

Méthodes à haute résolution

Augustin HOFF et Gustavo CIOTTO PINTON



2014

Table des matières

Généralités

Outils mathématiques

Application à un signal sinusoïdal complexe

Algorithme MUSIC

Aspect théorique

Mise en oeuvre

Resultats

Critère de Rayleigh

Algorithme ESPRIT

Références

Outils mathématiques

Définitions

- L'autocorrelation d'un processus aléatoire pour deux indices de temps différents n_1 et n_2 est définie comme

$$r_{xx} = \mathcal{E}\{x[n_1]x^*[n_2]\} \quad (1)$$

- La matrice formée par les valeurs d'autocorrelation :

$$R_{N-1} = \begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & r_{xx}[-2] & \cdots & r_{xx}[-(N-1)] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \cdots & r_{xx}[-(N-2)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[N-1] & r_{xx}[N-2] & r_{xx}[N-3] & \cdots & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \quad (2)$$

Outils mathématiques

Définitions

- Le rapport entre les puissances du signal et du bruit (SNR) :

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \quad (3)$$

Il est souvent écrit en *décibels* [dB] :

$$SNR_{dB} = 10 * \log \left[\frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right] \quad (4)$$

- La puissance d'un processus aléatoire est calculée par l'équation suivante

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\omega) d\omega = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(\nu) d\nu \quad (5)$$

où $S_x(f) = \mathcal{F}\{r_{xx}[k]\}$

Outils mathématiques

Application à un signal sinusoïdal complexe

- ▶ On pose le signal d'entrée

$$s[n] = \sum_{k=1}^P A_k \exp(j(2\pi f_k nT + \theta_k)) \quad (6)$$

- ▶ En supposant que les variables aléatoires θ_k sont indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, on obtient alors

$$\bar{s}[n] = 0 \quad \text{et} \quad r_{ss}[m] = \sum_{k=1}^P A_k^2 \exp(j2\pi f_k mT) \quad (7)$$

De plus :

$$SNR_{dB} = 10 * \log \left[\frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right] = 10 * \log \left[\frac{\sum_{k=1}^P A_k^2}{P_{bruit}} \right] \quad (8)$$

Outils mathématiques

Application à un signal sinusoïdal complexe

- La matrice d'autocorrelation s'écrit en présence de bruit blanc de variance p_w

$$R_{xx} = R_{ss} + R_w = \sum_{k=1}^P A_k^2 \mathbf{e}_{N-1}(f_k) \mathbf{e}_{N-1}^H(f_k) + p_w \mathbf{I} \quad (9)$$

où

$$\mathbf{e}_{N-1}(f_k) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(2\pi j f_k T) \\ \vdots \\ \exp(2\pi j f_k (N-1) T) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Outils mathématiques

Application à un signal sinusoïdal complexe

- ▶ La matrice se réécrit à partir des P valeurs propres de R_{ss}

$$R_{xx} = \sum_{i=1}^P (\lambda_i + p_w) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + p_w \sum_{i=P+1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (11)$$

- ▶ Les P premiers vecteurs propres de R_{xx} forment l'espace signal orthogonal à l'espace bruit donné par les $N-P$ autres vecteurs propres.

Algorithme MUSIC

Aspect théorique

- ▶ On pose alors :

$$\sum_{k=P+1}^N \alpha_k |\mathbf{e}_{N-1}^H(f) \mathbf{v}_k|^2 = \mathbf{e}_{N-1}^H(f) \left(\sum_{k=P+1}^N \alpha_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) \mathbf{e}_{N-1}(f) \quad (12)$$

- ▶ Cette quantité est nulle si $\mathbf{e}_{N-1}(f)$ est un des vecteurs de l'espace signal i.e si f est une fréquence du signal car \mathbf{v}_k est un vecteur propre de l'espace bruit pour $k \in \llbracket P+1, N \rrbracket$
- ▶ L'estimateur est donc donné par l'expression

$$P_{MUSIC}(f) = \frac{1}{\mathbf{e}_{N-1}^H(f) \left(\sum_{k=P+1}^N \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) \mathbf{e}_{N-1}(f)} \quad (13)$$

Algorithme MUSIC

Mise en oeuvre - *P_music.m*

► Les principales variables

```
function [ resultat ] = P_music(signal_x,  frequences ,  
    P)  
N = size(signal_x ,2);  
T = 1/N;
```

► Calcul de la matrice d'autocorrelation

```
z    = corrmatrix( signal_x, 0 );  
Rxx = toeplitz(z);
```

Algorithme MUSIC

Mise en oeuvre - *test.m*

► Paramètres initiaux du test

```
clear all; close all; clc;  
N = 100;  
n = 0: 1 : N - 1;  
P = 3;  
T = 1/N;  
fDebut = 1e0;  
fFin    = 7e1;  
fPas    = 1e-1;  
  
A = [1 2.5 3];  
F = [4.9e1 5e1 6e1];  
Theta = 2*pi*[rand(1) rand(1) rand(1)];  
  
SNR = [0.001 40 100 500]; %(dB)
```

Algorithme MUSIC

Mise en oeuvre - *test.m*

- Calcul des pics pour chaque'un des SNRs

```
bAux = randn(1,N);

%signal
s = zeros (1, N);
for k = 1:P
s = s + A(k) * exp(2*pi*1i*n*T*F(k) + 1i*Theta(k));
end

%bruit
for l = 1 : size(SNR, 2)

varianceNoise = sum (A.*A) / ( 10 ^ (SNR(l) / 10));
b = sqrt(varianceNoise) * bAux;
x = s + b;

frequences = fDebut : fPas : fFin;
result = P_music (x, frequences, P);
plot(...)
end
```

Algorithme MUSIC

Résultats

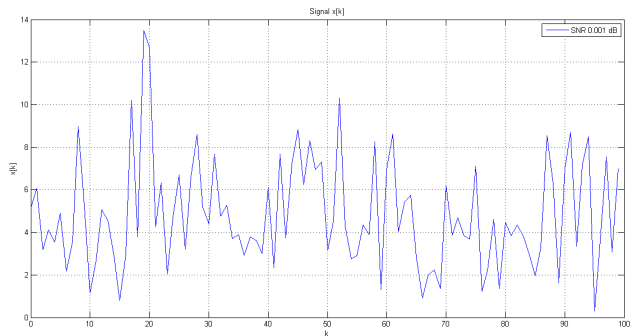


FIGURE 1: Signal avec du bruit pour $SNR_{dB} = 0.001dB$

Algorithme MUSIC

Resultats

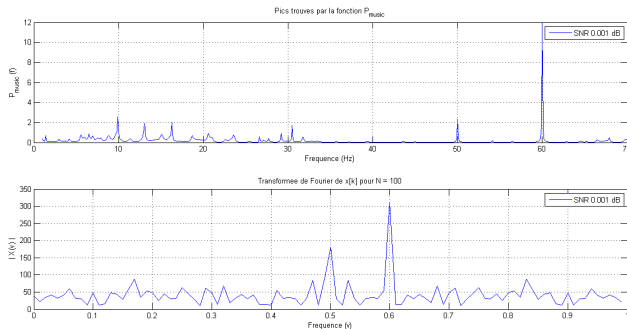


FIGURE 2: Resultats obtenus pour $SNR_{dB} = 0.001dB$

Algorithme MUSIC

Resultats

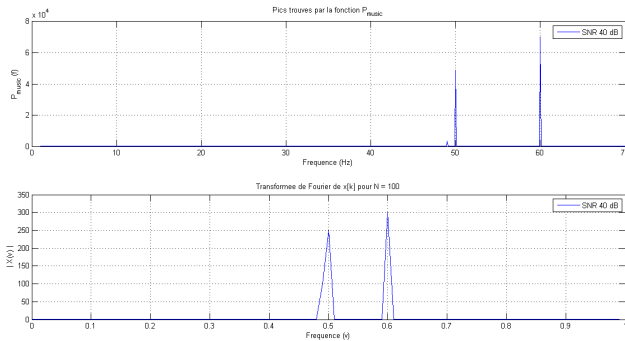


FIGURE 3: Resultats obtenus pour $SNR_{dB} = 40dB$

Algorithme MUSIC

Résultats

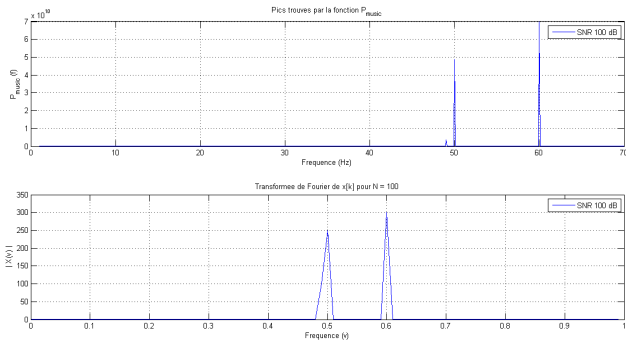


FIGURE 4: Résultats obtenus pour $SNR_{dB} = 100dB$

Algorithme MUSIC

Resultats

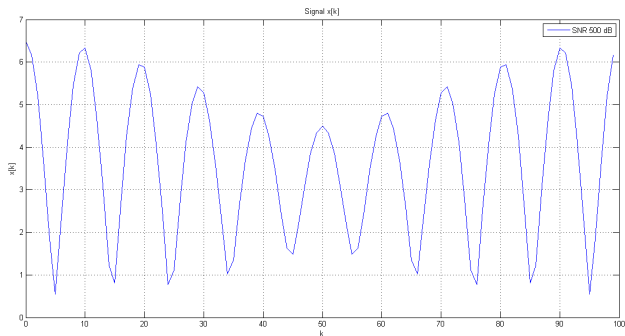


FIGURE 5: Signal avec du bruit pour $SNR_{dB} = 500dB$

Algorithme MUSIC

Résultats

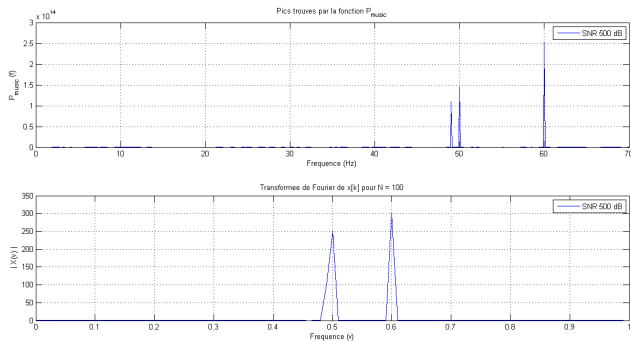


FIGURE 6: Résultats obtenus pour $SNR_{dB} = 500dB$

Critère de Rayleigh

Analogie avec la lumière

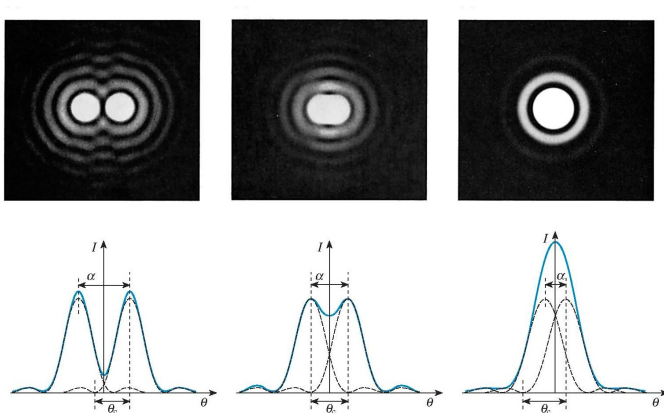


FIGURE 7: Distinction des différentes taches de lumière selon les cas

Algorithme ESPRIT

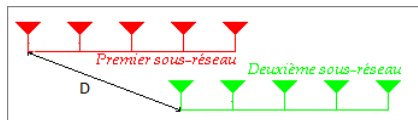


FIGURE 8: Disposition des antennes.

Déphasage temporel de $\frac{D \sin(\phi)}{c}$ où ϕ est l'angle d'incidence du signal

Algorithme ESPRIT

$$S_2 = S_1 \Omega \quad (14)$$

si

$$S_1 = [\mathbf{e}_{N-1}(f_1) \quad \cdots \quad \mathbf{e}_{N-1}(f_P)]$$

et

$$\Omega = \begin{bmatrix} \exp(2\pi j f_1 \frac{D \sin(\phi_1)}{c}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(2\pi j f_P \frac{D \sin(\phi_P)}{c}) \end{bmatrix}$$

Algorithme ESPRIT

- ▶ La matrice d'autocorrélation s'écrit alors

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_1 \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_P^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_1 \Omega \end{bmatrix}^H + p_w I \quad (15)$$

- ▶ Ce qui donne :

$$U = [u_1 \cdots u_P] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_1 \Omega \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} S_1 T \\ S_1 \Omega T \end{bmatrix} \quad (16)$$

Algorithme ESPRIT

- Finalement

$$U_2 = U_1 T^{-1} \Omega T = U_1 \Psi \quad (17)$$

- La méthode des moindres carrés donne alors une estimation de Ψ la matrice semblable à Ω contenant les informations du signal

$$\Psi = (U_1 U_1^H)^{-1} U_1^H U_2 \quad (18)$$

Références

- ▶ Institute for Dynamics Systems and Control. *White noise and power spectral density*.
http://www.idsc.ethz.ch/Courses/signals_and_systems/ArchiveFall10/lectureNotes8.pdf
- ▶ S. Lawrence Marple Jr. *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice-Hall Inc, 1988
- ▶ Bernard Picinbono. *Signaux aléatoires - Tome 2 Fonctions aléatoires et modèles avec problèmes résolus*. Dunod Université, 1993
- ▶ *Les méthodes à haute résolution*. HERMES, 1998
- ▶ Yves Grenier. *Méthodes haute-résolution en analyse spectrale et localisation*.
<http://perso.telecom-paristech.fr/~rioul/liesse/2012liesse4/YG-slides.pdf>