Résolution Optimisée de Grands Systèmes Matriciels

Fandresena Lahatriniavo ANDRIAMANJATO

Avril 2024

1 Introduction

Les grands systèmes matriciels sont omniprésents dans de nombreux domaines tels que l'ingénierie, les sciences informatiques et les sciences naturelles. La résolution efficace de ces systèmes revêt une importance capitale pour de nombreuses applications.

Ce programme vise à résoudre une matrice carrée symétrique définie positive. Il sera divisé en deux étapes. La première utilisera l'algorithme de Cuthill-McKee pour réarranger la matrice afin de minimiser la taille du profil de la matrice. La deuxième partie recevra le fichier du premier programme et stockera la matrice dans un tableau à une dimension que nous appellerons matrice de profil. Ainsi, nous ne stockerons que les éléments nécessaires de la matrice afin d'éviter de stocker autant de zéros que possible. Ensuite, à partir de cette matrice de profil, la résolution sera effectuée en utilisant la décomposition $\mathrm{LDL^T}$ ($\mathrm{A{=}LDL^T}$).

2 Réarrangement de la matrice A de taille n par l'algorithme de Cuthill-McKee

Étape 1 : On choisit un sommet s au hasard et on stocke dans v_n les différents niveaux obtenus. On calcule ensuite son excentricité que nous noterons n.
Étape 2 : On calcule l'excentricité du premier élément du dernier niveau non-vide et on la stocke dans m. Si $m > n$, on choisit comme nouveau sommet s ce dernier et on reprend la boucle. Sinon, on passe à l'élément suivant et ainsi de suite.
On sort de la boucle lorsqu'on a parcouru tous les éléments du dernier niveau du sommet. Ainsi, on obtient notre premier sommet.
Étape 3 : On trouve l'ordre de rangement des autres sommets en parcourant le niveau $N1$ du premier sommet et en les numérotant par ordre croissant en fonction du nombre de voisins de ces éléments. Et ainsi de suite, on continue avec le niveau suivant.

Étape 4 : On réarrange la matrice en permutant d'abord les colonnes. On prend la colonne du premier sommet et on la met dans la première colonne de la nouvelle matrice. Puis la deuxième, puis la troisième, ainsi de suite jusqu'à n. (Dans le cas de Cuthill-McKee inverse, avant de procéder à cette quatrième étape, on inverse d'abord l'ordre du sommet pris.)

3 Transformation de la matrice en dimension 1 et résolution

3.1 Transformation de la matrice en dimension 1

Après avoir obtenu notre matrice A en deux dimensions après réarrangement avec l'algorithme de Cuthill-McKee, nous allons la transformer en tableau à une dimension. Voici les étapes que nous suivrons lors de l'enregistrement de A dans un tableau que nous nommerons AP :

1. Nous ne tiendrons compte que de la partie triangulaire inférieure de la matrice, puisque A est une matrice creuse symétrique définie positive.

2. Lors de l'enregistrement de A, pour chaque ligne, nous enregistrerons uniquement les éléments de la première colonne non nulle jusqu'à la diagonale.

3. Pour faciliter l'identification de a_{ij} de A, nous enregistrerons dans un tableau que nous nommerons pi l'indice dans AP du premier élément de chaque ligne, dans un autre tableau ki l'indice de la colonne du premier élément non nul, et dans un tableau nommé $nDiag$ le numéro de toutes les diagonales dans AP.

4. Pour obtenir ou modifier l'élément (i, j) de A, nous créerons une méthode telle que :

   - Si $i < j$, nous échangerons i et j.
   - Si $j < ki[i]$, nous renverrons 0.
   - Si $i = j$, nous renverrons $LP[nDiag[i]]$, sinon $LP[pi[i] + j - ki[i]]$.

Notons que :

- On procédera de la même manière pour la matrice L lors de la factorisation. LP et AP ont exactement le même indice et numéro d'accès. Donc, nous utiliserons ki, pi, et $nDiag$ pour la matrice de profil LP de la matrice L.

- Le but de cette transformation est d'optimiser le stockage en mémoire.

- Nous utiliserons pour la suite la matrice AP.

- Au lieu d'utiliser une mémoire pour une matrice de taille $n \times n$, nous n'aurons qu'un tableau de dimension n ou même encore plus petit.

3.2 Résolution

Pour mieux comprendre la methode de résolution en $\mathrm{LDL^T}$, on va garder les notations L et A au lieux de LP et AP(qui sont déja sous forme tableaux). Pour l'affichage à en deux dimension on utilisera la methode d'accées déja citez auparavant.

La factorisation $\mathrm{LDL^T}$ est une méthode courante pour résoudre efficacement des systèmes linéaires de la forme $\mathrm{Ax = b}$, où A est une matrice symétrique définie positive.

L'idée derrière la factorisation $\mathrm{LDL^T}$ est de décomposer la matrice AP en un produit de trois matrices : L, une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale principale, D, une matrice diagonale contenant les valeurs propres de A, et $\mathrm{L^T}$, la transposée de L. Donc, si $\mathrm{A = LDL^T}$, nous avons L et D (on utiliser la methode déja créer avant pour obtenir ces élément dans le programme)telles que :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

où L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale principale, et D est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de A.

Maintenant, pour résoudre le système $\mathrm{Ax = b}$, nous pouvons le réécrire comme $\mathrm{LDL^Tx = b}$. Puisque L est une matrice triangulaire inférieure et D est diagonale, le système est plus facile à résoudre.

Tout d'abord, nous posons $\mathrm{y = L^Tx}$. En résolvant $\mathrm{Ly = b}$, nous trouvons y. Ensuite, nous résolvons $\mathrm{Dx = y}$ pour trouver x.

4 Conclusion

On conclut que ce programme résout $Ax = b$, en réarrangeant d'abord A et b par l'algorithme de Cuthill-McKee pour obtenir une nouvelle matrice A (ou A') et b (ou b'). Ensuite, on range la matrice A dans un tableau à une dimension que nous notons AP. À partir de cette matrice AP, nous effectuons la factorisation et la résolution. Enfin, nous inverserons x en fonction du réarrangement de A après l'algorithme de Cuthill-McKee.