

El grupo de pilas de arena

Carlos A. Alfaro



BANCO DE MÉXICO

1 Supuestos

2 Grupo de pilas de arena

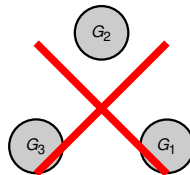
- Definiciones
- Configuraciones minimales y maximales
- GPA y la matriz Laplaciana
- GPA y polinomio de Tutte
- GPA y Programación Líneal Entera

3 Grupo Crítico

- Factores invariantes
- El grupo crítico del ciclo gordo
- Gráficas con conectividad uno.
- La Familia \mathcal{G}_i

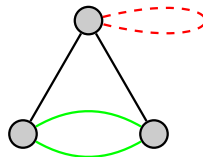
Supuestos sobre gráficas

- son **conexas**,



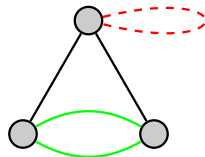
Supuestos sobre gráficas

- se permiten **aristas múltiples**, y



Supuestos sobre gráficas

- se prohíben **lazos**.



1. *Journal of the American Medical Association*, 2000; 284: 2689-2695.

100

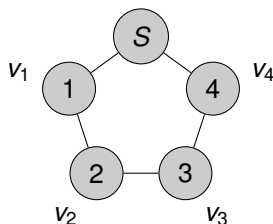


Figure 1. The effect of the number of trials on the mean accuracy of the responses. The error bars represent the standard error of the mean.

La **suma de dos configuraciones** de una gráfica G es entrada por entrada.

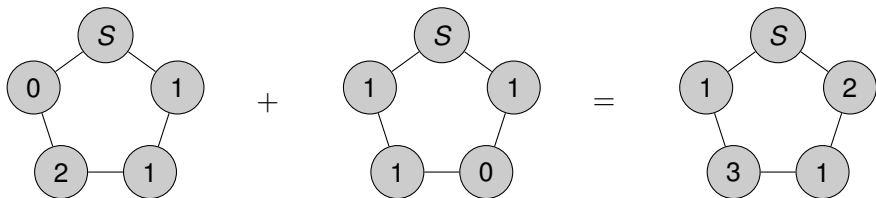
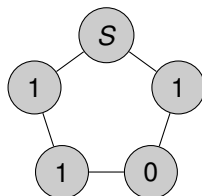


Figura: Suma de configuraciones

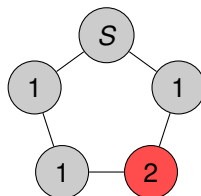
Definiciones

Sea \mathbf{a} una configuración de G .

- El vértice v es **estable** si $\mathbf{a}_v < \deg_G(v)$.
- Una configuración es **estable** si todos los vértices no sumidero son estables.



estable



inestable

Figura: Configuraciones

Regla del desbordamiento

Sea $G = (V, E)$ una multigráfica y sea \mathbf{a} una configuración. Si algún vértice v es tal que $\deg_G(v) \leq \mathbf{a}_v$, entonces **desbordaremos** el vértice v al restar $\deg_G(v)$ a \mathbf{a}_v y a cada vecino u de v sumamos $m_{v,u}$.

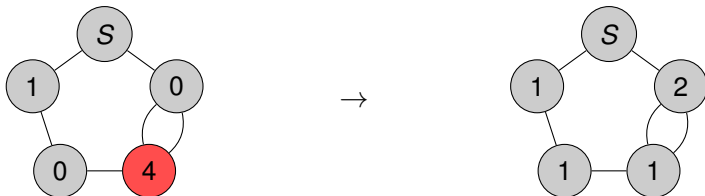


Figura: Desbordamiento de $(1, 0, 4, 0)$.

Figura: Configuración estable de $(1, 2, 2, 2)$

Definición

Una configuración u es **recurrente** si existe una configuración **no cero** v tal que $s(u + v) = u$.

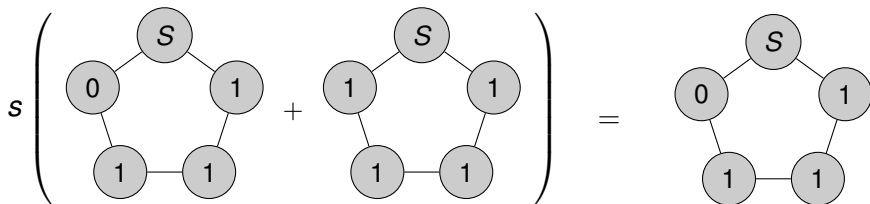
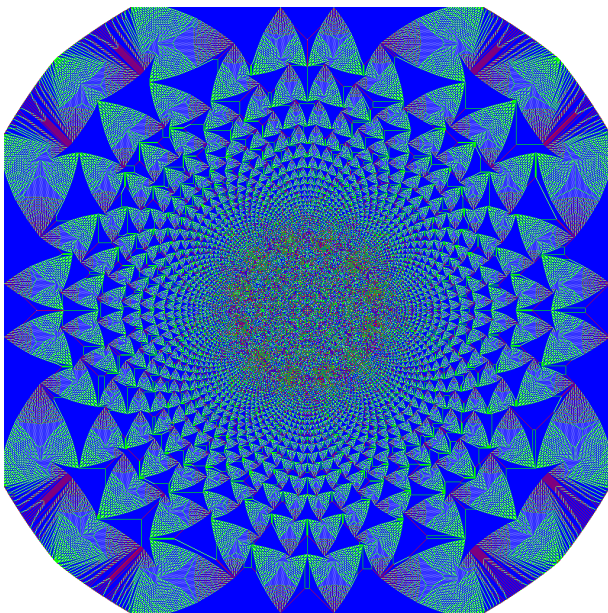


Figura: $(0,1,1,1)$ es recurrente



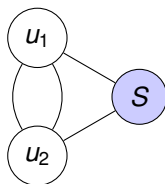
Teorema

El conjunto de configuraciones recurrentes de (G, s) junto con la operación $\oplus = s(\cdot + \cdot)$ forman un grupo abeliano finito.

Definición

El **grupo de pilas de arena** $SP(G, s)$ de G es el conjunto de configuraciones recurrentes.

El conjunto de configuraciones recurrentes depende del sumidero.



Configuraciones recurrentes

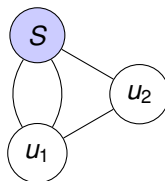
(2 , 1)

(2 , 0)

(0 , 2)

(1 , 2)

(2 , 2)



Configuraciones recurrentes

(1 , 0)

(2 , 0)

(0 , 1)

(1 , 1)

(2 , 1)

$$K(G) = \mathbb{Z}_5$$

Configuraciones minimales y maximales

Definición

Sea σ_{max} la configuración $(\deg_G(v_1) - 1, \dots, \deg_G(v_{n-1}) - 1)$.

Definición

Una configuración recurrente h es **minimal** si no existe una configuración recurrente $h' \neq h$ tal que $h' \leq h$.

Teorema

Toda configuración entre alguna configuración recurrente minimal y σ_{max} es recurrente.

Proposición [Cori y Rossin]

Las configuraciones recurrentes minimales de K_n son permutaciones de $(n - 2, \dots, 1, 0)$.

Lemma

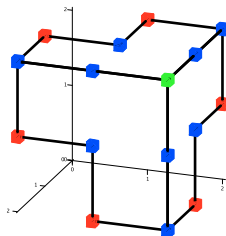
La configuración $(n - 2, \dots, n - 2)$ es la identidad en $SP(K_n, s)$.

Proposición [Cori y Rossin]

Las configuraciones recurrentes minimales de K_n son permutaciones de $(n - 2, \dots, 1, 0)$.

Lemma

La configuración $(n - 2, \dots, n - 2)$ es la identidad en $SP(K_n, s)$.



Teorema

Si $n \geq 3$, entonces

- las configuraciones $g_j = \sum_{i=1}^{n-1} (n-3)e_i + e_j$ con $1 \leq j \leq n-1$ tienen orden n , y
- cualesquiera $n-2$ generan a $SP(K_n, s)$.

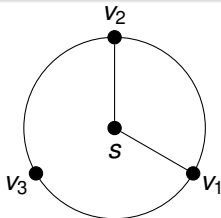
GPA y la matriz Laplaciana

Definición

La **matriz Laplaciana** es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de G) tal que la entrada uv esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} \deg_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $m_{u,v}$ es el número de aristas entre u y v .



$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

Definición

Sea G una gráfica. Una subgráfica **generadora** es una subgráfica G' de G con $V(G') = V(G)$.

Teorema matriz-árbol

El número de árboles generadores de una gráfica G es igual a cualquier menor $n - 1 \times n - 1$ de $L(G)$.

El **número de configuraciones recurrentes** es igual al **número de árboles generadores**.

Teorema

$$\tau(G) = |SP(G)|$$

GPA y polinomio de Tutte

Definición

Sea G una gráfica. El polinomio de Tutte de G es el polinomio $T(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ definido como sigue:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(G) = \emptyset, \\ xT(G/e) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ yT(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ T(G/e; x, y) + T(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni puente.} \end{cases}$$

Por ejemplo $T(K_4; x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y + y^3 + x^3$

Dada una configuración c , definimos

$$\text{nivel}(c) = \sum_v c_v.$$

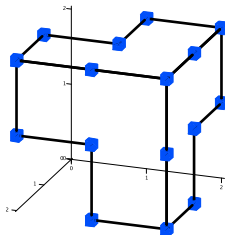
Teorema

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con sumidero s y c una configuración recurrente, entonces

$$|E| - \deg_G(s) \leq \text{nivel}(c) \leq 2|E| - \deg_G(s) - |V| + 1$$

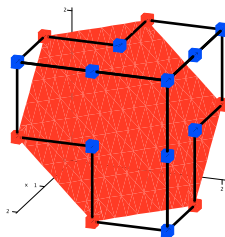
Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4 .



Ejemplo

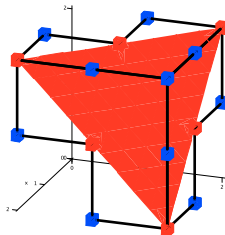
Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4 .



nivel = 3

Ejemplo

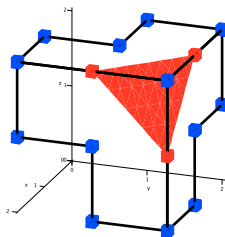
Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4 .



nivel = 4

Ejemplo

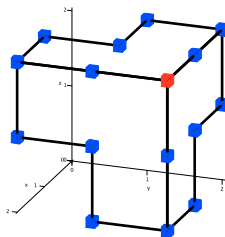
Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4 .



nivel = 5

Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4 .



nivel = 6

Para $i \geq 0$, tomemos n_i como el número de configuraciones críticas con nivel $i + |E| - \deg(s)$.

La **función generadora** de las configuraciones críticas es el polinomio

$$P(G; y) = \sum_{i=0}^{|E|-|V|+1} n_i y^i$$

Teorema [Merino,1997]

La **función generadora** de las configuraciones recurrentes es el **polinomio de Tutte** a lo largo de la línea $x = 1$,

$$P(G, y) = T(G; 1, y).$$

$$P(K_4, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3.$$

GPA y Programación Líneal Entera

Teorema

Sea G una gráfica, $s \in V(G)$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1}$ una configuración estable de G y \mathbf{x}^* una solución óptima del siguiente problema líneal entero:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq L(G, s)^t \mathbf{x} + \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \quad (1)$$

entonces $L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c} \in SP(G, s)$ y $[\mathbf{c}] = [L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c}]$.

Ejemplo

Sea $c = (0, 0, 1, 0)$ una configuración en (C_5, v_5) . El correspondiente programa lineal entero es:

maximizar $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

sujeto a:

$$\mathbf{0} \leq \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Obtenemos que $\mathbf{x}^* = (1, 1, 1, 1)$. Y $L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c} = (1, 0, 1, 1)$ es una configuración recurrente.

Corolario

Sea G una gráfica, \mathbf{x}^* una solución óptima del siguiente programa líneal entero:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq L(G, s)^t \mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{(G, s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \quad (2)$$

entonces $L(G, s)^t \mathbf{x}^* \in SP(G, s)$ es la identidad de $SP(G, s)$.

Corolario

Sea G una gráfica r -regular, entonces $r\mathbf{1}$ es la identidad del grupo de pilas de arena, $SP(c(G), s)$.

1

En la literatura el grupo de pilas de arena también es conocido como el grupo crítico, el grupo Jacobiano, el grupo de Picard, etc.

Más aún, existen varias formas equivalentes de definirlo.

La descripción algebraica del grupo de pilas de arena también es conocida como el grupo crítico.

(relación matriz laplaciana)

¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

El grupo crítico se puede obtener calculando la **forma normal de Smith** de la matriz Laplaciana.

Definición

Dos matrices M y N son **equivalentes** si existen $P, Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ tal que $N = PMQ$.

Teorema

Si M y N son equivalentes, entonces $\mathbb{Z}^n/M \cong \mathbb{Z}^n/N$.

Teorema

$$K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r},$$

donde $d_i > 0$ y $d_i \mid d_j$ si $i \leq j$.

Definición

Los enteros d_1, \dots, d_r son llamados **factores invariantes**.

Proposición

$d_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$, donde $\Delta_0 = 1$ y Δ_i es el gcd de los $i \times i$ menores de $L(G)$.

Teorema [Cori y Rossin 2001]

Si K_n es la gráfica completa de n vértices. Entonces

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

Demostración.

$$L(K_n, s) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$



El grupo crítico del ciclo gordo

El ciclo gordo \mathcal{C}_n es la gráfica cuya gráfica subyacente es un ciclo.

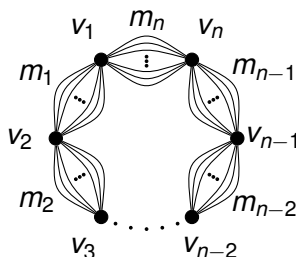


Figura: Ciclo gordo \mathcal{C}_n .

Teorema

Sea \mathcal{C}_n el ciclo gordo con m_i la multiplicidad entre v_i y v_{i+1} , entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{n-1} \mathbb{Z}_{\Delta_i / \Delta_{i-1}} \right).$$

con

$$\Delta_i = \begin{cases} \gcd \{ m_{j_1} \cdots m_{j_i} \}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ (-1)^n \sum_{i=1}^n m_1 m_2 \cdots \hat{m}_i \cdots m_n & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

Corolario

Sea \mathcal{C}_n el ciclo gordo con $m_i = m$, entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_m \right) \oplus \mathbb{Z}_{mn}.$$

Corolario

El grupo de pilas de arena del ciclo de n vertices es isomorfo a \mathbb{Z}_n .

Gráficas con conectividad uno.

Teorema

Sea G una gráfica y sean G_1, G_2, \dots, G_l sus bloques, entonces

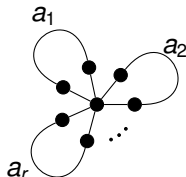
$$K(G) = K(G_1) \oplus K(G_2) \oplus \dots \oplus K(G_l).$$

Pregunta

Dado un grupo finito abeliano Γ . ¿Existe una gráfica G tal que $K(G) = \Gamma$?

Sí, basta tomar a G como un wedge de ciclos.

$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{a_r}$$



Algunos isomorfismos.

Teorema [Cori y Rossin, 2000]

Sea G una gráfica y G^* su dual, entonces $K(G) \cong K(G^*)$.

Teorema [Wagner, 2000]

Sean G y H gráficas. Si las matroides gráficas de G y H son isomorfas, entonces $K(G) \cong K(H)$.

La Familia \mathcal{G}_i

Denotemos por:

- $f_i(G)$, el número de factores invariantes iguales a i de $K(G)$,
- $f_{\geq 2}(G)$ al número de factores invariantes mayores a 2 de $K(G)$.

Teorema [Godsil, 2001]

$$f_1(G) + f_{\geq 2}(G) = n - c,$$

donde c es el número de componentes conexas.

Corolario

Una gráfica simple conexa cumple

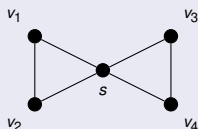
$$1 \leq f_1(G) \text{ y } f_{\geq 2}(G) \leq n - 2.$$

Definición

Denotemos por \mathcal{G}_i a la familia de gráficas simples conexas con $f_1(G) = i$.

Ejemplo

Por ejemplo, la siguiente gráfica pertenece a \mathcal{G}_2 .



$$L(G, s) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

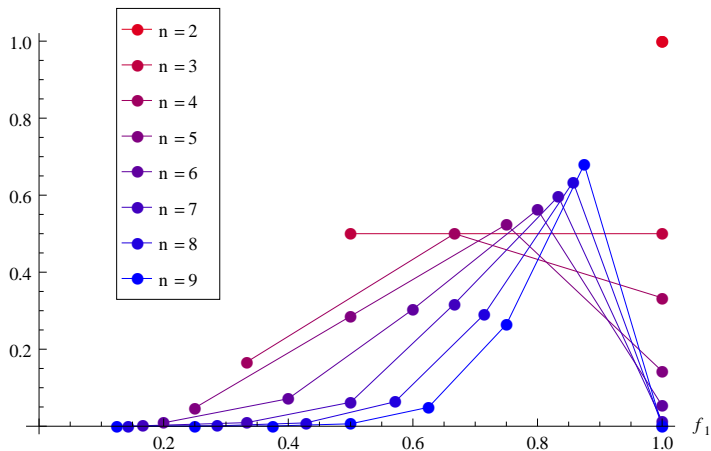


Figura: Número normalizado de graficas con f_1 factores invariantes iguales a 1

¿Qué tan frecuente es cíclico el grupo crítico? es decir, ¿Qué tan frecuente $f_1(G)$ es igual a $n - 1$ o $n - 2$?

Casi todas las gráficas simples y conexas tienen grupo crítico cíclico.

La probabilidad de que el grupo crítico de una gráfica aleatoria sea cíclica es asintóticamente a lo más

$$\zeta(3)^{-1}\zeta(5)^{-1}\zeta(7)^{-1}\zeta(9)^{-1}\zeta(11)^{-1}\dots \approx 0,7935212$$

donde ζ es la función zeta de Riemann.

Gráficas con un factor invariante igual a 1

Por otro lado...

Pregunta

¿Qué podemos decir sobre \mathcal{G}_1 ?

Teorema [Lorenzini, 1989]

Si G es una gráfica **simple conexa**, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- I. $G \in \mathcal{G}_1$,
- II. G es P_2 -libre,
- III. G es la gráfica completa.

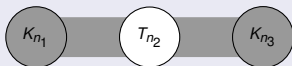
Pregunta

¿Qué podemos decir sobre \mathcal{G}_2 y \mathcal{G}_3 ?

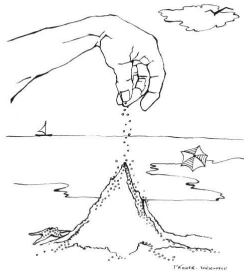
Teorema

Sea G una gráfica **simple conexa**. Entonces, $G \in \mathcal{G}_2$ si y solamente si G es una de las siguientes gráficas:

- I. K_{n_1, n_2, n_3} , donde n_1 , n_2 y n_3 tienen la misma paridad.
- II. L_{n_1, n_2, n_3} , si n_1 , n_2 , $n_3 \geq 3$ tienen la misma paridad, u otros once casos.



La demostración usa los ideales críticos.



¡Gracias!