

## El grupo de pilas de arena

Carlos A. Alfaro



BANCO DE MÉXICO

## 1 Supuestos

## 2 Grupo de pilas de arena

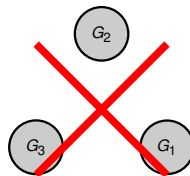
- Definiciones
- Configuraciones minimales y maximales
- GPA y la matriz Laplaciana
- GPA y polinomio de Tutte
- GPA y Programación Líneal Entera

## 3 Grupo Crítico

- Factores invariantes
- El grupo crítico del ciclo gordo
- Gráficas con conectividad uno.
- La Familia  $\mathcal{G}_i$

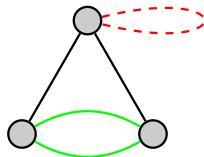
## Supuestos sobre gráficas

- son **conexas**,



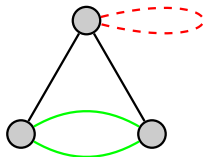
## Supuestos sobre gráficas

- se permiten **aristas múltiples**, y



## Supuestos sobre gráficas

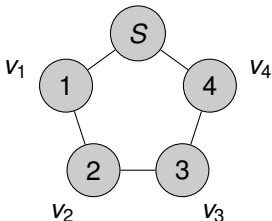
- se prohíben **lazos**.



1

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

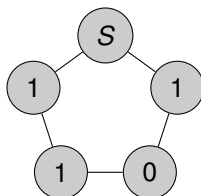
[illegible]



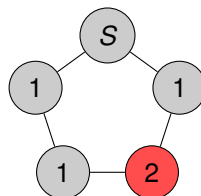
## Definiciones

Sea  $\mathbf{a}$  una configuración de  $(G, s)$ .

- El vértice  $v$  es **estable** si  $\mathbf{a}_v < \deg_G(v)$ .



estable



inestable

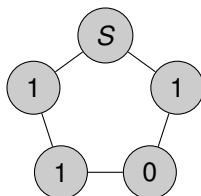
**Figura :** Configuraciones



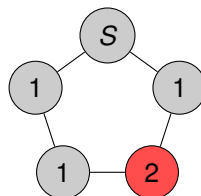
## Definiciones

Sea  $\mathbf{a}$  una configuración de  $(G, s)$ .

- El vértice  $v$  es **estable** si  $a_v < \deg_G(v)$ .
- Una configuración es **estable** si todos los vértices no sumidero son estables.



estable



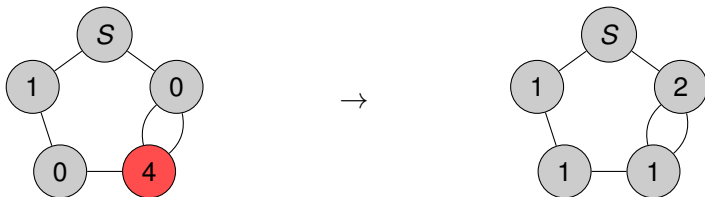
inestable

### Figura : Configuraciones

## Regla del desbordamiento

Sea  $\mathbf{a}$  una configuración de  $(G, s)$ . Si un vértice  $v$  satisface que  $\deg_G(v) \leq \mathbf{a}_v$ , entonces  $v$  puede **desbordarse**, es decir:

- restar  $\deg_G(v)$  a  $\mathbf{a}_v$  y
- a cada vecino  $u$  de  $v$  sumamos  $m_{v,u}$ .

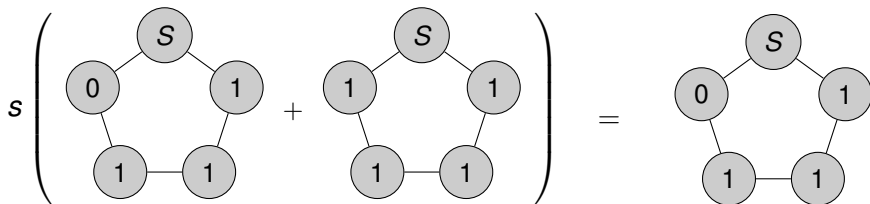


**Figura :** Desbordamiento de  $(1, 0, 4, 0)$ .

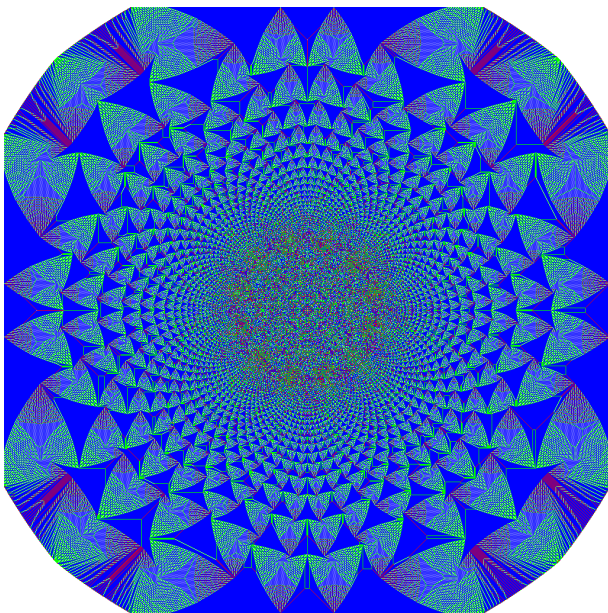
**Figura :** Configuración estable de (1, 2, 2, 2)

## Definición

Una configuración  $u$  es **recurrente** si existe una configuración **no cero**  $v$  tal que  $s(u + v) = u$ .



**Figura :** (0,1,1,1) es recurrente



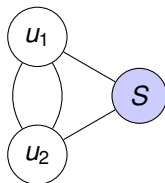
## Teorema

El conjunto de configuraciones recurrentes de  $(G, s)$  junto con la operación  $\oplus = s(\cdot + \cdot)$  forman un grupo abeliano finito.

## Definición

El **grupo de pilas de arena**  $SP(G, s)$  de  $G$  es el conjunto de configuraciones recurrentes de  $(G, s)$  junto con la operación  $\oplus$ .

El conjunto de configuraciones recurrentes depende del sumidero.



Configuraciones recurrentes

---

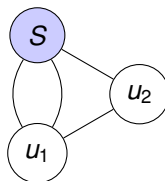
( 2 , 1 )

( 2 , 0 )

( 0 , 2 )

( 1 , 2 )

( 2 , 2 )



Configuraciones recurrentes

---

( 1 , 0 )

( 2 , 0 )

( 0 , 1 )

( 1 , 1 )

( 2 , 1 )

$$SP(G) = \mathbb{Z}_5$$

## Configuraciones minimales y maximales

### Definición

Sea  $\sigma_{max}$  la configuración  $(\deg_G(v_1) - 1, \dots, \deg_G(v_{n-1}) - 1)$ .



## Configuraciones minimales y maximales

### Definición

Sea  $\sigma_{max}$  la configuración  $(\deg_G(v_1) - 1, \dots, \deg_G(v_{n-1}) - 1)$ .

### Definición

Una configuración recurrente  $h$  es **minimal** si no existe una configuración recurrente  $h' \neq h$  tal que  $h' \leq h$ .

## Configuraciones minimales y maximales

### Definición

Sea  $\sigma_{max}$  la configuración  $(\deg_G(v_1) - 1, \dots, \deg_G(v_{n-1}) - 1)$ .

### Definición

Una configuración recurrente  $h$  es **minimal** si no existe una configuración recurrente  $h' \neq h$  tal que  $h' \leq h$ .

### Teorema

Toda configuración entre alguna configuración recurrente minimal y  $\sigma_{max}$  es recurrente.

## Proposición [Cori y Rossin]

Las configuraciones recurrentes minimales de  $K_n$  son permutaciones de  $(n - 2, \dots, 1, 0)$ .

## Lemma

*La configuración  $(n - 2, \dots, n - 2)$  es la identidad en  $SP(K_n, s)$ .*

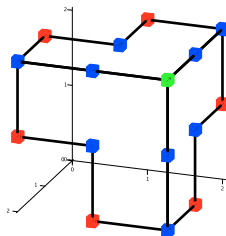
$SP(K_4, s)$

## Proposición [Cori y Rossin]

Las configuraciones recurrentes minimales de  $K_n$  son permutaciones de  $(n-2, \dots, 1, 0)$ .

## Lemma

*La configuración  $(n-2, \dots, n-2)$  es la identidad en  $SP(K_n, s)$ .*



## Teorema

Si  $n \geq 3$ , entonces

- las configuraciones  $g_j = \sum_{i=1}^{n-1} (n-3)e_i + e_j$  con  $1 \leq j \leq n-1$  tienen orden  $n$ , y
- cualesquiera  $n-2$  generan a  $SP(K_n, s)$ .

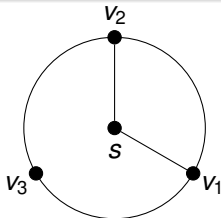
# GPA y la matriz Laplaciana

## Definición

La **matriz Laplaciana** es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de  $G$ ) tal que la entrada  $uv$  esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} \deg_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $m_{u,v}$  es el número de aristas entre  $u$  y  $v$ .



$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## ¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

### Definición

Sea  $G$  una gráfica. Una subgráfica **generadora** es una subgráfica  $G'$  de  $G$  con  $V(G') = V(G)$ .

### Teorema matriz-árbol

El número de árboles generadores de una gráfica  $G$  es igual a cualquier menor  $n - 1 \times n - 1$  de  $L(G)$ .

El **número de configuraciones recurrentes** es igual al **número de árboles generadores**.

### Teorema

$$\tau(G) = |SP(G)|$$

## GPA y polinomio de Tutte

### Definición

Sea  $G$  una gráfica. El polinomio de Tutte de  $G$  es el polinomio  $T(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  definido como sigue:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(G) = \emptyset, \\ xT(G/e) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ yT(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ T(G/e; x, y) + T(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni puente.} \end{cases}$$

Por ejemplo  $T(K_4; x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y + y^3 + x^3$



Dada una configuración  $c$ , definimos

$$\text{nivel}(c) = \sum_v c_v.$$

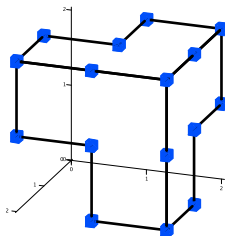
### Teorema

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica con sumidero  $s$  y  $c$  una configuración recurrente, entonces

$$|E| - \deg_G(s) \leq \text{nivel}(c) \leq 2|E| - \deg_G(s) - |V| + 1$$

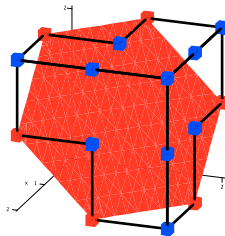
## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



## Ejemplo

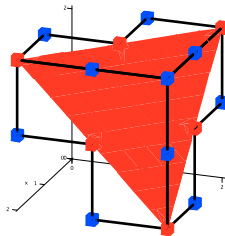
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



nivel = 3

## Ejemplo

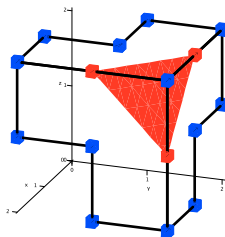
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



nivel = 4

## Ejemplo

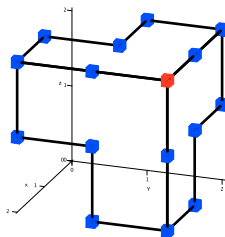
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



nivel = 5

## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



nivel = 6

Para  $i \geq 0$ , tomemos  $n_i$  como el número de configuraciones críticas con nivel  $i + |E| - \deg(s)$ .

La **función generadora** de las configuraciones críticas es el polinomio

$$P(G; y) = \sum_{i=0}^{|E|-|V|+1} n_i y^i$$

### Teorema [Merino,1997]

La **función generadora** de las configuraciones recurrentes es el **polinomio de Tutte** a lo largo de la línea  $x = 1$ ,

$$P(G, y) = T(G; 1, y).$$

$$P(K_4, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3.$$



# GPA y Programación Líneal Entera

## Teorema

Sea  $G$  una gráfica,  $s \in V(G)$ ,  $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1}$  una configuración estable de  $G$  y  $\mathbf{x}^*$  una solución óptima del siguiente problema líneal entero:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq L(G, s)^t \mathbf{x} + \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \quad (1)$$

entonces  $L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c} \in SP(G, s)$  y  $[\mathbf{c}] = [L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c}]$ .

## Ejemplo

Sea  $c = (0, 0, 1, 0)$  una configuración en  $(C_5, v_5)$ . El correspondiente programa lineal entero es:

$$\text{maximizar} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

sujeto a:

$$\mathbf{0} \leq \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Obtenemos que  $\mathbf{x}^* = (1, 1, 1, 1)$ . Y  $L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c} = (1, 0, 1, 1)$  es una configuración recurrente.

## Corolario

Sea  $G$  una gráfica,  $\mathbf{x}^*$  una solución óptima del siguiente programa líneal entero:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq L(G, s)^t \mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{(G, s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \quad (2)$$

entonces  $L(G, s)^t \mathbf{x}^* \in SP(G, s)$  es la identidad de  $SP(G, s)$ .

## Corolario

Sea  $G$  una gráfica  $r$ -regular, entonces  $r\mathbf{1}$  es la identidad del grupo de pilas de arena,  $SP(c(G), s)$ .

100

En la literatura el grupo de pilas de arena también es conocido como el grupo crítico, el grupo Jacobiano, el grupo de Picard, etc.

Más aún, existen varias formas equivalentes de definirlo.

La descripción algebraica del grupo de pilas de arena también es conocida como el grupo crítico.

(relación matriz laplaciana)

## ¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

El grupo crítico se puede obtener calculando la **forma normal de Smith** de la matriz Laplaciana.

## Definición

Dos matrices  $M$  y  $N$  son **equivalentes** si existen  $P, Q \in GL_n(\mathbb{Z})$  tal que  $N = PMQ$ .

## Teorema

Si  $M$  y  $N$  son equivalentes, entonces  $\mathbb{Z}^n/M \cong \mathbb{Z}^n/N$ .

## Teorema

$$K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r},$$

donde  $d_i > 0$  y  $d_i \mid d_j$  si  $i \leq j$ .

## Definición

Los enteros  $d_1, \dots, d_r$  son llamados **factores invariantes**.

## Proposición

$d_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$ , donde  $\Delta_0 = 1$  y  $\Delta_i$  es el gcd de los  $i \times i$  menores de  $L(G)$ .

## Teorema [Cori y Rossin 2001]

Si  $K_n$  es la gráfica completa de  $n$  vértices. Entonces

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

## Demostración.

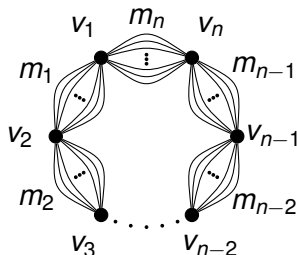
$$L(K_n, s) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$





## El grupo crítico del ciclo gordo

El ciclo gordo  $\mathcal{C}_n$  es la gráfica cuya gráfica subyacente es un ciclo.



**Figura :** Ciclo gordo  $\mathcal{C}_n$ .

## Teorema

Sea  $\mathcal{C}_n$  el ciclo gordo con  $m_i$  la multiplicidad entre  $v_i$  y  $v_{i+1}$ , entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \left( \bigoplus_{i=2}^{n-1} \mathbb{Z}_{\Delta_i / \Delta_{i-1}} \right).$$

con

$$\Delta_i = \begin{cases} \gcd \{ m_{j_1} \cdots m_{j_i} \}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ (-1)^n \sum_{i=1}^n m_1 m_2 \cdots \hat{m}_i \cdots m_n & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

## Corolario

Sea  $\mathcal{C}_n$  el ciclo gordo con  $m_i = m$ , entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \left( \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_m \right) \oplus \mathbb{Z}_{mn}.$$

## Corolario

El grupo de pilas de arena del ciclo de  $n$  vertices es isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .

## Gráficas con conectividad uno.

### Teorema

Sea  $G$  una gráfica y sean  $G_1, G_2, \dots, G_l$  sus bloques, entonces

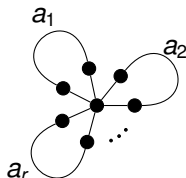
$$K(G) = K(G_1) \oplus K(G_2) \oplus \dots \oplus K(G_l).$$

## Pregunta

Dado un grupo finito abeliano  $\Gamma$ . ¿Existe una gráfica  $G$  tal que  $K(G) = \Gamma$ ?

Sí, basta tomar a  $G$  como un wedge de ciclos.

$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{a_r}$$



## Algunos isomorfismos.

### Teorema [Cori y Rossin, 2000]

Sea  $G$  una gráfica y  $G^*$  su dual, entonces  $K(G) \cong K(G^*)$ .

### Teorema [Wagner, 2000]

Sean  $G$  y  $H$  gráficas. Si las matroides gráficas de  $G$  y  $H$  son isomorfas, entonces  $K(G) \cong K(H)$ .

## La Familia $\mathcal{G}_i$

Denotemos por:

- $f_i(G)$ , el número de factores invariantes iguales a  $i$  de  $K(G)$ ,
- $f_{\geq 2}(G)$  al número de factores invariantes mayores a 2 de  $K(G)$ .

### Teorema [Godsil, 2001]

$$f_1(G) + f_{\geq 2}(G) = n - c,$$

donde  $c$  es el número de componentes conexas.

### Corolario

Una gráfica simple conexa cumple

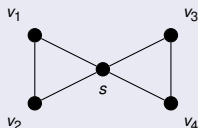
$$1 \leq f_1(G) \text{ y } f_{\geq 2}(G) \leq n - 2.$$

## Definición

Denotemos por  $\mathcal{G}_i$  a la familia de gráficas simples conexas con  $f_1(G) = i$ .

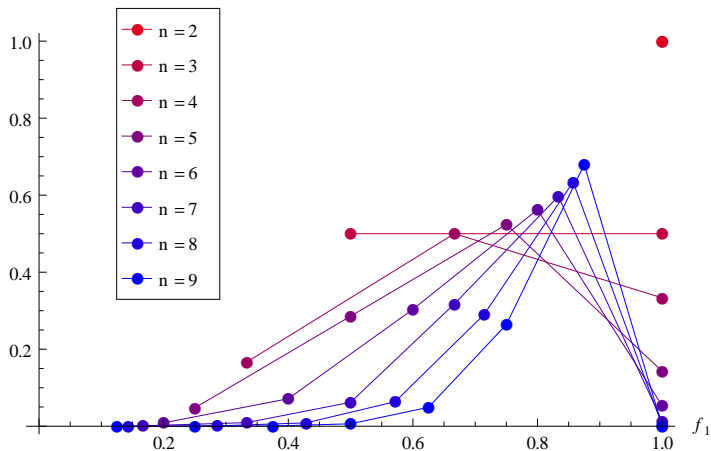
## Ejemplo

Por ejemplo, la siguiente gráfica pertenece a  $\mathcal{G}_2$ .



$$L(G, s) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$





**Figura :** Número normalizado de graficas con  $f_1$  factores invariantes iguales a 1

¿Qué tan frecuente es cíclico el grupo crítico? es decir, ¿Qué tan frecuente  $f_1(G)$  es igual a  $n - 1$  o  $n - 2$ ?

Casi todas las gráficas simples y conexas tienen grupo crítico cíclico.

La probabilidad de que el grupo crítico de una gráfica aleatoria sea cíclica es asintóticamente a lo más

$$\zeta(3)^{-1}\zeta(5)^{-1}\zeta(7)^{-1}\zeta(9)^{-1}\zeta(11)^{-1}\dots \approx 0,7935212$$

donde  $\zeta$  es la función zeta de Riemann.

## Gráficas con un factor invariante igual a 1

Por otro lado...

### Pregunta

¿Qué podemos decir sobre  $\mathcal{G}_1$ ?

### Teorema [Lorenzini, 1989]

Si  $G$  es una gráfica **simple conexa**, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- I.  $G \in \mathcal{G}_1$ ,
- II.  $G$  es  $P_2$ -libre,
- III.  $G$  es la gráfica completa.

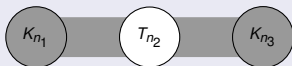
## Pregunta

¿Qué podemos decir sobre  $\mathcal{G}_2$  y  $\mathcal{G}_3$ ?

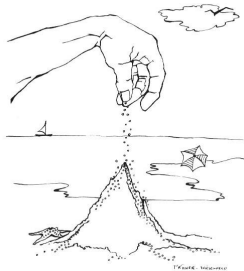
## Teorema

Sea  $G$  una gráfica **simple conexa**. Entonces,  $G \in \mathcal{G}_2$  si y solamente si  $G$  es una de las siguientes gráficas:

- I.  $K_{n_1, n_2, n_3}$ , donde  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  tienen la misma paridad.
- II.  $L_{n_1, n_2, n_3}$ , si  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3 \geq 3$  tienen la misma paridad, u otros once casos.



La demostración usa los ideales críticos.



¡Gracias!