

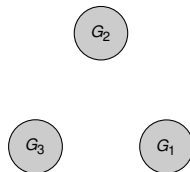
# El grupo de pilas de arena

Carlos A. Alfaro



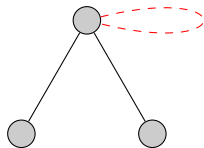
## Supuestos

- son **conexas**,



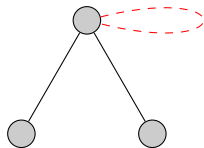
## Supuestos

- se permiten **aristas multiples**,



## Supuestos

- se prohíben **lazos**,



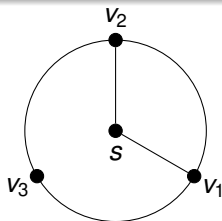


## Definición

La **matriz Laplaciana** es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de  $G$ ), tal que la entrada  $uv$  esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} \deg_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $m_{u,v}$  es el número de aristas entre  $u$  y  $v$ .

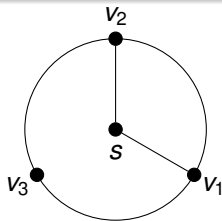


$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Distinguiremos un vértice  $s$  de  $G$  y lo llamaremos sumidero.

### Definición

La matriz Laplaciana sin la fila y sin la columna correspondiente al vértice  $s$  es conocida la **matriz Laplaciana reducida** y es denotada por  $L(G, s)$ .



$$L(G, s) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

En la literatura el grupo de pilas de arena también es conocido como el grupo crítico, el grupo Jacobiano, el grupo de Picard, etc.

Más aún, existen varias formas equivalentes de definirlo.

En esta charla estamos interesados en la descripción algebraica y combinatoria de un grupo de pilas de arena.

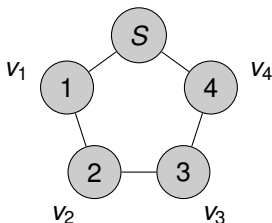


## Descripción Combinatoria (Grupo de Pilas de Arena)

El conjunto de los vértices no sumidero son denotados por  $\tilde{V}$ .

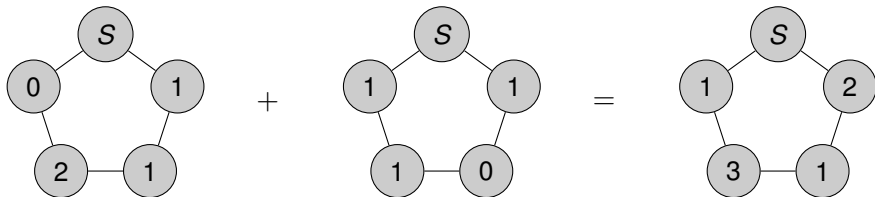
### Definición

Sea  $G = (V, E)$  una multigráfica. Una **configuración** de  $G$  es una asignación de enteros **no negativos** a los vértices no sumidero de  $G$ .



**Figura :** La configuración  $(1, 2, 3, 4)$  en  $C_5$

La **suma de dos configuraciones** de una multigráfica  $G$  es entrada por entrada.

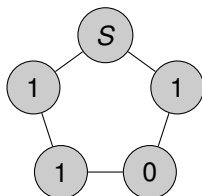


**Figura :** Suma de configuraciones

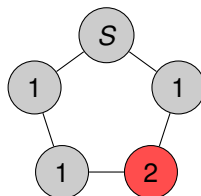
## Definiciones

Sea  $\mathbf{a}$  una configuración de  $G$ .

- El vértice  $v$  es **estable** si  $a_v < \deg_G(v)$ .
- Una configuración es **estable** si todos los vértices no sumidero son estables.



estable

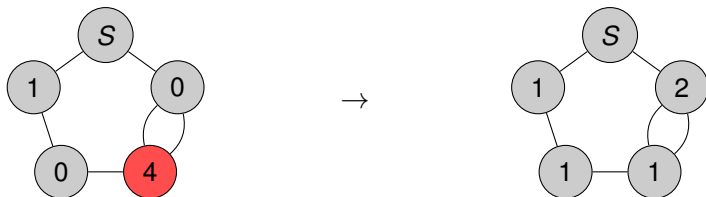


inestable

**Figura :** Configuraciones

## Regla del desbordamiento

Sea  $G = (V, E)$  una multigráfica y sea  $\mathbf{a}$  una configuración. Si algún vértice  $v$  es tal que  $\deg_G(v) \leq a_v$ , entonces **desbordaremos** el vértice  $v$  al restar  $\deg_G(v)$  a  $a_v$  y a cada vecino  $u$  de  $v$  sumamos  $m_{v,u}$ .



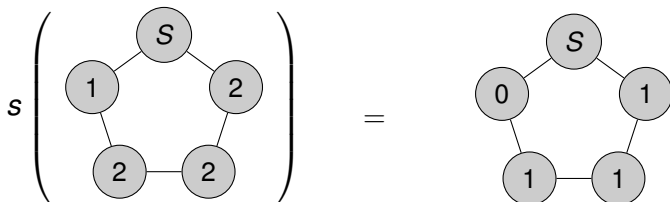
**Figura :** Desbordamiento de  $(1, 0, 4, 0)$ .

## Proposición

Para cualquier configuración existe una única configuración estable obtenida al desbordar los vértices.

(conmutatividad y norma)

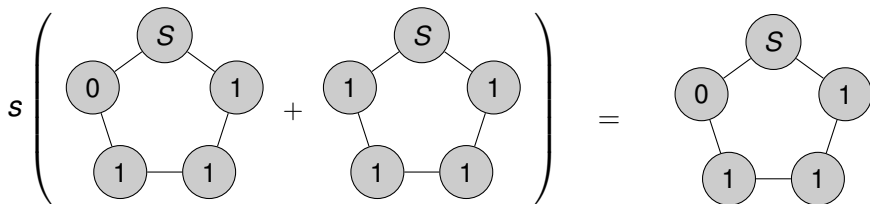
Denotaremos por  $s(\bullet)$  a la estabilización de una configuración.



**Figura :** Configuración estable de (1, 2, 2, 2)

## Definición

Una configuración  $u$  es **recurrente** si existe una configuración **no cero**  $v$  tal que  $s(u + v) = u$ .



**Figura :** (0,1,1,1) es recurrente

## Definición

El **grupo de pilas de arena** de  $G$  es el conjunto de configuraciones recurrentes. Y lo denotaremos por  $SP(G, s)$ .

## Teorema (Burning Algorithm)

Sea  $G$  una multigráfica con  $s \in V(G)$  un vertice distinguido. Además, sea  $\beta = L(G)_s$ . Una configuración  $u$  es recurrente si y solo si  $s(u + \beta) = u$ .

## ¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

### Definición

Sea  $G$  una multigráfica. Una subgráfica **generadora** es una subgráfica  $G'$  de  $G$  con  $V(G') = V(G)$ .

### Teorema matriz árbol

El número de árboles generadores de una gráfica  $G$  es igual a cualquier menor  $n - 1 \times n - 1$  de  $L(G)$ .

El **número de configuraciones recurrentes** es igual al **número de árboles generadores**.



Dada una configuración  $c$ , definimos

$$\text{nivel}(c) = \sum_v c_v.$$

### Teorema

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica con sink  $s$  y  $c$  una configuración recurrente, entonces

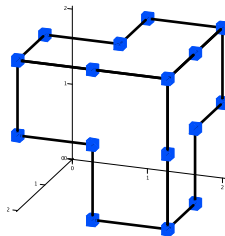
$$|E| - \deg_G(s) \leq \text{nivel}(c) \leq 2|E| - \deg_G(s) - |V| + 1$$

## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .

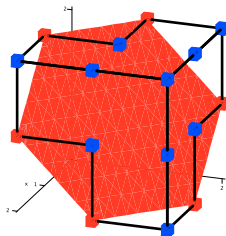
## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



## Ejemplo

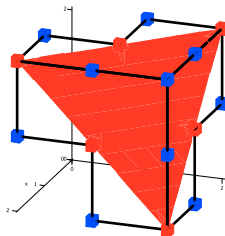
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



nivel = 3

## Ejemplo

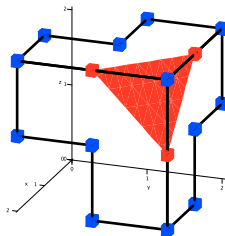
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



nivel = 4

## Ejemplo

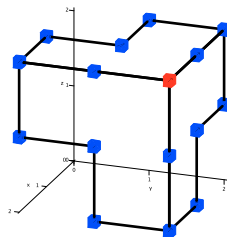
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



nivel = 5

## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



nivel = 6

Para  $i \geq 0$ , tomemos  $n_i$  como el número de configuraciones críticas con nivel  $i + |E| - \deg(s)$ .

La **función generadora** de las configuraciones críticas es el polinomio

$$P(G; y) = \sum_{i=0}^{|E|-|V|+1} n_i y^i$$



## Definición

Sea  $G$  una multigráfica. El polinomio de Tutte de  $G$  es el polinomio  $T(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  definido como sigue:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(G) = \emptyset, \\ xT(G/e) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ yT(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ T(G/e; x, y) + T(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni puente} \end{cases}$$

Por ejemplo  $T(K_4; x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y + y^3 + x^3$

**Teorema [Merino,1997]**

La **función generadora** de las configuraciones recurrentes es el **polinomio de Tutte** a lo largo de la línea  $x = 1$ ,

$$P(G, y) = T(G; 1, y).$$

$$P(K_4, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3.$$

## Descripción Algebraica (Grupo Crítico)

La descripción algebraica del grupo de pilas de arena también es conocida como el grupo crítico.

El **grupo crítico** de  $G$ , denotado por  $K(G)$ , está dado por

$$K(G) = \mathbb{Z}^{n-1} / L(G, s)^t,$$

donde  $L(G, s)$  es la matriz Laplaciana reducida.

### Teorema

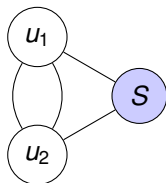
El grupo de pilas de arena de  $G$  junto con la operación  $\oplus = s(\cdot + \cdot)$  es un grupo abeliano finito.

### Proposición

Para toda multigráfica  $G$  el grupo de pilas de arena  $SP(G, s) \cong K(G)$  para todo  $s \in V(G)$ .

(relación matriz laplaciana)

El grupo abeliano  $K(G)$  no depende sumidero. Sin embargo, el conjunto de configuraciones recurrentes,  $SP(G, s)$ , **sí** depende del sumidero.



Configuraciones recurrentes

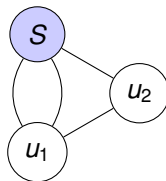
( 2 , 1 )

( 2 , 0 )

( 0 , 2 )

( 1 , 2 )

( 2 , 2 )



Configuraciones recurrentes

( 1 , 0 )

( 2 , 0 )

( 0 , 1 )

( 1 , 1 )

( 2 , 1 )

$$K(G) = \mathbb{Z}_5$$

¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

- 1 El grupo crítico se puede obtener calculando la **forma normal de Smith** de la matriz Laplaciana reducida.

**Teorema [Cori y Rossin 2001]**

Si  $K_n$  es la gráfica completa de  $n$  vértices. Entonces

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

**Demostración.**

$$L(K_n, s) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$



## ¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

- 1 El grupo crítico se puede obtener calculando la **forma normal de Smith** de la matriz Laplaciana reducida.
- 2 El grupo de pilas de arena se necesita calcular la configuración de desbordado (burning algorithm) y calcular combinatoriamente las configuraciones recurrentes.



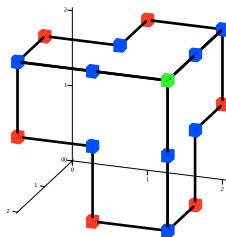
Sea  $\sigma_{max}$  la configuración  $(\deg_G(v_1) - 1, \dots, \deg_G(v_{n-1}) - 1)$ .

## Definición

Una configuración recurrente  $h$  es **minimal** si no existe una configuración recurrente  $h' \neq h$  tal que  $h' \leq h$ .

## Teorema

Toda configuración  $h$  entre alguna  $h_{min}$  y  $\sigma_{max}$  es recurrente.



### Proposición [Cori y Rossin]

Las configuraciones recurrentes minimales de  $K_n$  son permutaciones de  $(n - 2, \dots, 1, 0)$ .

### Lemma

*La configuración  $(n - 2, \dots, n - 2)$  es la identidad en  $SP(K_n, s)$ .*

### Teorema

Si  $n \geq 3$ , entonces

- las configuraciones  $g_j = \sum_{i=1}^{n-1} (n - 3)e_i + e_j$  con  $1 \leq j \leq n - 1$  tienen orden  $n$ , y
- cualesquiera  $n - 2$  generan a  $SP(K_n, s)$ .

Gráficas con conectividad uno.

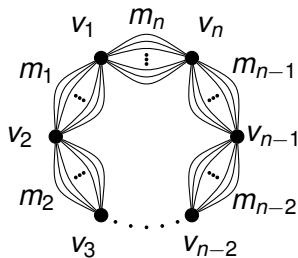
### Teorema

Sea  $G$  una multigráfica y sean  $G_1, G_2, \dots, G_l$  sus bloques, entonces

$$K(G) = K(G_1) \oplus K(G_2) \oplus \dots \oplus K(G_l).$$

# El grupo de pilas de arena del ciclo gordo.

El ciclo gordo  $\mathcal{C}_n$  es la multigráfica cuya gráfica subyacente es un ciclo.



**Figura :** Ciclo gordo  $\mathcal{C}_n$ .

## Teorema

Sea  $\mathcal{C}_n$  el ciclo gordo con  $m_i$  la multiplicidad entre  $v_i$  y  $v_{i+1}$ , entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \left( \bigoplus_{i=2}^{n-1} \mathbb{Z}_{\Delta_i / \Delta_{i-1}} \right).$$

con

$$\Delta_i = \begin{cases} \gcd \{ m_{j_1} \cdots m_{j_i} \}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ (-1)^n \sum_{i=1}^n m_1 m_2 \cdots \hat{m}_i \cdots m_n & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

**Corolario**

Sea  $\mathcal{C}_n$  el ciclo gordo con  $m_i = m$ , entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \left( \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_m \right) \oplus \mathbb{Z}_{mn}.$$

**Corolario**

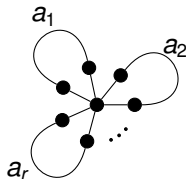
El grupo de pilas de arena del ciclo de  $n$  vertices es isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .

Dado un grupo finito abeliano  $\Gamma$

¿Existe una gráfica  $G$  tal que  $K(G) = \Gamma$ ?

Sí, basta tomar a  $G$  como un wedge de ciclos.

$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{a_r}$$



## Algunos isomorfismos.

**Teorema [Cori y Rossin, 2000]**

Sea  $G$  una gráfica y  $G^*$  su dual, entonces  $K(G) \cong K(G^*)$ .

**Teorema [Wagner, 2000]**

Sean  $G$  y  $H$  gráficas. Si las matroides gráficas de  $G$  y  $H$  son isomorfas, entonces  $K(G) \cong K(H)$ .



## Homomorfismos y el grupo de pilas de arena.

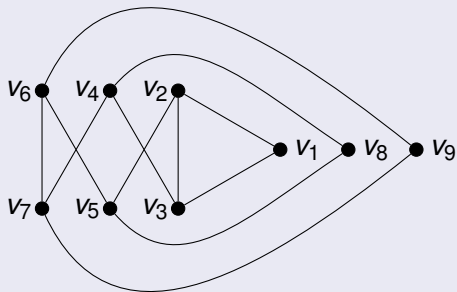
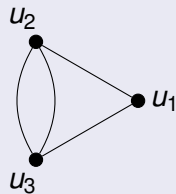
### Definición

Sean  $G$  y  $H$  multigráficas. Un **homomorfismo uniforme** de  $G$  a  $H$ , denotado por  $f : G \rightarrow H$ , es una función  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que para todos  $x, y \in V(H)$  tenemos que

$$d_{G[S_x \cup S_y]}(u) = m_{x,y} \text{ para todos } u \in S_x \cup S_y,$$

donde  $S_x = f^{-1}(x)$  y  $S_y = f^{-1}(y)$ .

## Ejemplo: Homomorfismo uniforme.

 $G$  $H$

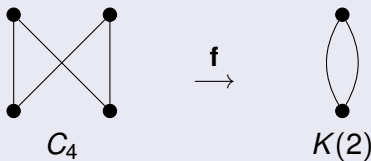
## Teorema

Sean  $G$  y  $H$  multigráficas y sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo uniforme sobrejectivo, entonces la función inducida  $\tilde{f} : SP(c(H), s) \rightarrow SP(c(G), t)$  dada por

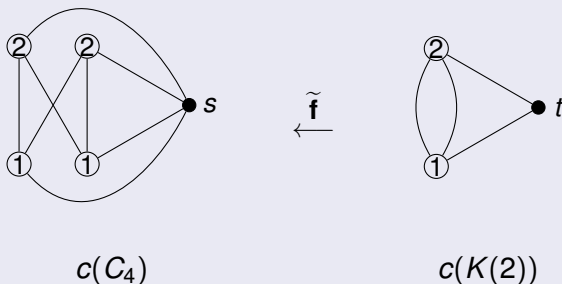
$$\tilde{f}(u)_v = u_x \in \mathbb{N}^{V(G)} \text{ para todo } v \in S_x = f^{-1}(x),$$

es un homomorfismo inyectivo de grupos, es decir,  $K(c(H)) \triangleleft K(c(G))$ .

## Ejemplo: Homomorfismo uniforme.



Las configuraciones recurrentes de  $c(K(2)) = \mathcal{C}_3(2, 1, 1)$  son  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(1, 2)$  y  $(0, 2)$ .



## Teorema

Sea  $d$  un número natural, entonces el grupo de pilas de arena del cono del hipercubo  $c(Q_d)$  está dado por:

$$K(c(Q_d)) \cong \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}_{2^{i+1}}^{\binom{d}{i}} = \mathbb{Z}_3^d \oplus \mathbb{Z}_5^{\binom{d}{2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{2^{d-1}}^d \oplus \mathbb{Z}_{2^{d+1}}.$$

## Programación Lineal Entera y el grupo de pilas de arena.

### Teorema

Sea  $G$  una multigráfica,  $s \in V(G)$ ,  $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1}$  una configuración estable de  $G$  y  $\mathbf{x}^*$  una solución óptima del siguiente problema lineal entero:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq L(G, s)^t \mathbf{x} + \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \quad (1)$$

entonces  $L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c} \in SP(G, s)$  y  $[\mathbf{c}] = [L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c}]$ .

## Ejemplo

Sea  $c = (0, 0, 1, 0)$  una configuración en  $(C_5, v_5)$ . El correspondiente programa lineal entero es:

$$\text{maximizar} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

sujeto a:

$$\mathbf{0} \leq \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Obtenemos que  $\mathbf{x}^* = (1, 1, 1, 1)$ . Y  $L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c} = (1, 0, 1, 1)$  es una configuración recurrente.

### Corolario

Sea  $G$  una multigráfica,  $\mathbf{x}^*$  una solución óptima del siguiente programa líneal entero:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq L(G, s)^t \mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{(G, s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \quad (2)$$

entonces  $L(G, s)^t \mathbf{x}^* \in SP(G, s)$  es la identidad de  $SP(G, s)$ .

### Corolario

Sea  $G$  una multigráfica  $r$ -regular, entonces  $r\mathbf{1}$  es la identidad del grupo de pilas de arena,  $SP(c(G), s)$ .



### La Familia $\mathcal{G}_i$

Un resultado clásico (ver [Jacobson,1985]) es que

$$K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{d_r},$$

donde  $d_i > 0$  y  $d_i \mid d_j$  si  $i \leq j$ .

Los enteros  $d_1, \dots, d_r$  son llamados **factores invariantes**.

Más aún,  $d_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$ , donde  $\Delta_0 = 1$  y  $\Delta_i$  es el gcd de los  $i \times i$  menores de  $L(G)$ .

Denotemos por:

- $f_i(G)$ , el número de factores invariantes iguales a  $i$  de  $K(G)$  y
- $f_{\geq 2}(G)$  al número de factores invariantes mayores a 2 de  $K(G)$ .

Se sabe (ver [Godsil, 2001]) que

$$f_1(G) + f_{\geq 2}(G) = n - c,$$

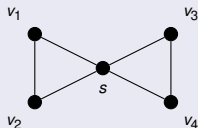
donde  $c$  es el número de componentes conexas.

### Definición

Denotemos por  $\mathcal{G}_i$  a la familia de gráficas **simples conexas** con  $f_1(G) = i$ .

## Ejemplo

Por ejemplo, la siguiente gráfica pertenece a  $\mathcal{G}_2$ .



$$L(G, s) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Una gráfica simple conexa cumple

$$1 \leq f_1(G) \text{ y } f_{\geq 2}(G) \leq n - 2.$$

## Observación

El conjunto  $\mathcal{G}_i$  no es cerrado bajo subgráficas inducidas. Por ejemplo, el cono de  $S_3$  pertenece a  $\mathcal{G}_2$ , pero  $S_3$  pertenece a  $\mathcal{G}_3$ .

También, la gráfica  $K_6 \setminus M_2$  pertenece a  $\mathcal{G}_3$ , y  $K_5 \setminus M_2$  pertenece a  $\mathcal{G}_2$ .

## Teorema [Lorenzini, 1989]

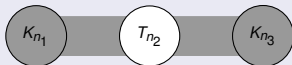
Si  $G$  es una gráfica **simple conexa**, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

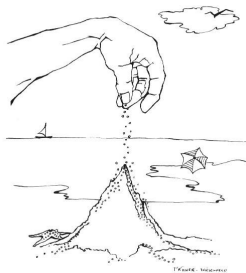
- I.  $G \in \mathcal{G}_1$ ,
- II.  $G$  es  $P_2$ -free,
- III.  $G$  es la gráfica completa.

## Teorema

Sea  $G$  una gráfica **simple conexa** . Entonces,  $G \in \mathcal{G}_2$  si y solamente si  $G$  es una de las siguientes gráficas:

- I.  $K_{n_1, n_2, n_3}$ , donde  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  son o pares o impares.
- II.  $L_{n_1, n_2, n_3}$ , si  $n_1, n_2, n_3 \geq 3$  y son pares o impares, u otros once casos.





¡Gracias!