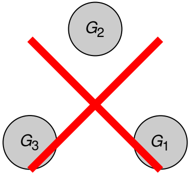
El grupo de pilas de arena

Carlos A. Alfaro

BANCO DE MÉXICO

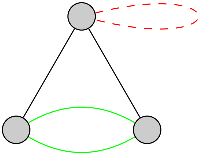


Supuestos

- son conexas,

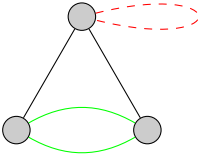
Supuestos

- se permiten aristas multiples,



Supuestos

- se prohiben lazos,

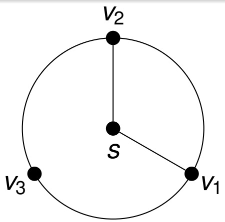


Definición

La **matríz Laplaciana** es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de G), tal que la entrada uv esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} deg_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $m_{u,v}$ es el número de aristas entre u y v.

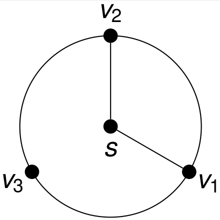


$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Distinguiremos un vértice s de G y lo llamaremos sumidero.

Definición

La matriz Laplaciana sin la fila y sin la columna correspondiente al vértice s es conocida la matriz Laplaciana reducida y es denotada por $L(G, s)$.



$$L(G, s) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

En la literatura el grupo de pilas de arena tambien es conocido como el grupo crítico, el grupo Jacobiano, el grupo de Picard, etc.

Más aún, existen varias formas equivalentes de definirlo.

En esta charla estamos interesados en la descripción algebraica y combinatoria de un grupo de pilas de arena.

Descripción Combinatoria (Grupo de Pilas de Arena)

El conjunto de los vértices no sumidero son denotados por $\widetilde{V}$.

Definición

Sea $G = (V, E)$ una multigráfica. Una configuración de G es una asignación de enteros no negativos a los vértices no sumidero de G.

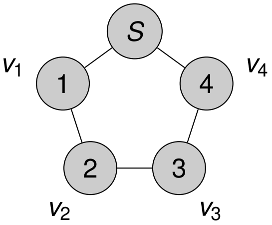


Figura : La configuración $(1, 2, 3, 4)$ en C_5

La **suma de dos configuraciones** de una multigráfica G es entrada por entrada.

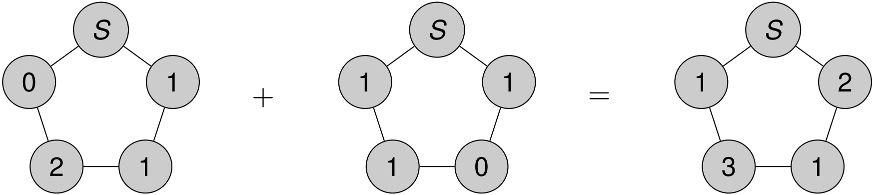


Figura : Suma de configuraciones

Definiciones

Sea **a** una configuración de G.

- El vértice v es estable si $a_v < deg_G(v)$.
- Una configuración es estable si todos los vértices no sumidero son estables.

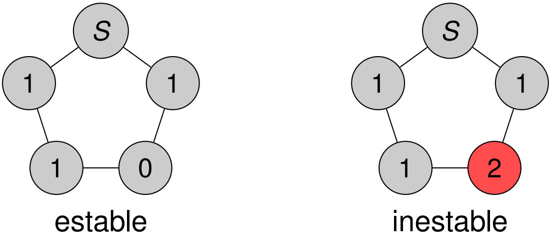


Figura : Configuraciones

Regla del desbordamiento

Sea $G = (V, E)$ una multigráfica y sea **a** una configuración. Si algún vértice v es tal que $deg_G(v) \leq a_v$, entonces desbordaremos el vértice v al restar $deg_G(v)$ a a_v y a cada vecino u de v sumamos $m_{v,u}$.

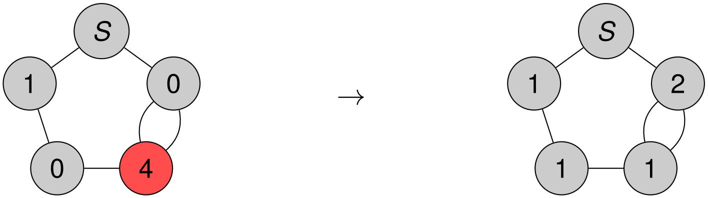


Figura : Desbordamiento de $(1, 0, 4, 0)$.

(relación matriz laplaciana)

Proposición

Para cualquier configuración existe una única configuración estable obtenida al desbordar los vértices.

(conmutatividad y norma)

Denotaremos por $s(\bullet)$ a la estabilización de una configuración.

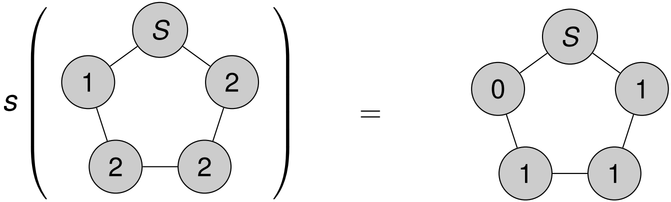


Figura : Configuración estable de $(1, 2, 2, 2)$

Definición

Una configuración u es recurrente si existe una configuración no cero v tal que $s(u+v)=u$.

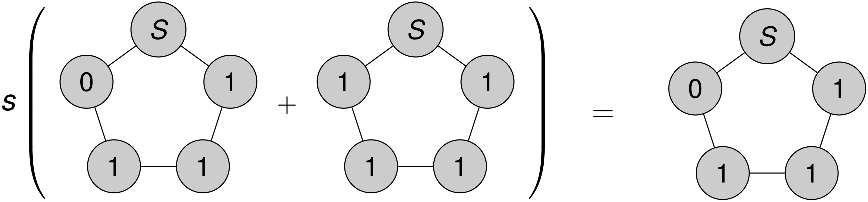


Figura : (0,1,1,1) es recurrente

Definición

El grupo de pilas de arena de G es el conjunto de configuraciones recurrentes. Y lo denotaremos por $SP(G, s)$.

Teorema (Burning Algorithm)

Sea G una multigráfica con $s \in V(G)$ un vertice distinguido. Además, sea $\beta = L(G)_s$. Una configuración u es recurrente si y solo si $s(u + \beta) = u$.

¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

Definición

Sea G una multigráfica. Una subgráfica generadora es una subgráfica G' de G con $V(G') = V(G)$.

Teorema matriz árbol

El número de árboles generadores de una gráfica G es igual a cualquier menor $n-1 \times n-1$ de $L(G)$.

El número de configuraciones recurrentes es igual al número de árboles generadores.

Dada una configuración c, definimos

$$nivel(c) = \sum_{v} c_v.$$

Teorema

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con sink s y c una configuración recurrente, entonces

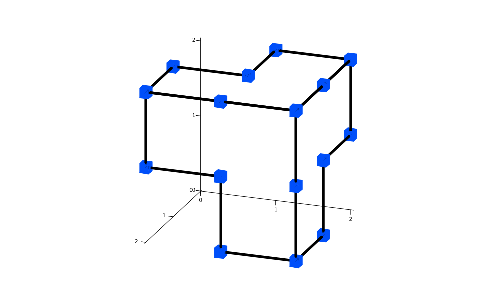
$$|E| - \deg_G(s) \leq nivel(c) \leq 2|E| - \deg_G(s) - |V| + 1$$

Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.

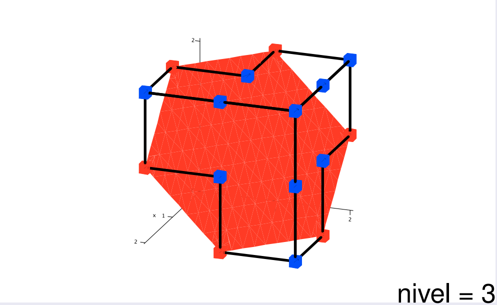
Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



Ejemplo

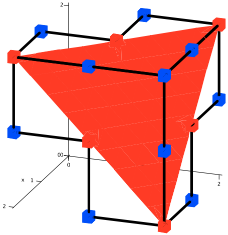
Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



nivel = 3

Ejemplo

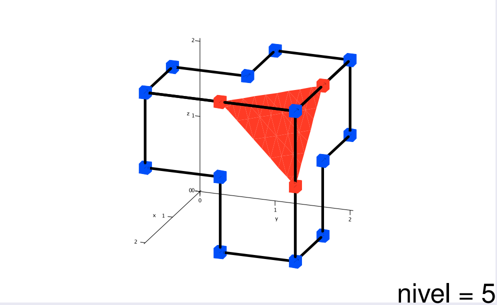
Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



nivel = 4

Ejemplo

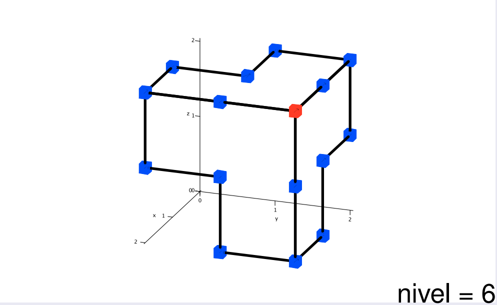
Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



nivel = 5

Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



nivel = 6

Para $i \geq 0$, tomemos n_i como el número de configuraciones críticas con nivel $i + |E| - \deg(s)$.
La función generadora de las configuraciones críticas es el polinomio

$$P(G; y) = \sum_{i=0}^{|E|-|V|+1} n_i y^i$$

Definición

Sea G una multigráfica. El polinomio de Tutte de G es el polinomio $T(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ definido como sigue:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(G) = \emptyset, \\ xT(G/e) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ yT(G \backslash e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ T(G/e; x, y) + T(G \backslash e; x, y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni pue} \end{cases}$$

Por ejemplo $T(K_4; x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y + y^3 + x^3$

Teorema [Merino,1997]

La **función generadora** de las configuraciones recurrentes es el **polinomio de Tutte** a lo largo de la linea $x = 1$,

$$P(G, y) = T(G; 1, y).$$

$P(K_4, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3$.

Descripción Algebraica (Grupo Crítico)

La descripción algebraica del grupo de pilas de arena también es conocida como el grupo crítico.

El grupo crítico de G, denotado por $K(G)$, esta dado por

$$K(G) = \mathbb{Z}^{n-1}/L(G,s)^t,$$

donde $L(G,s)$ es la matriz Laplaciana reducida.

Teorema

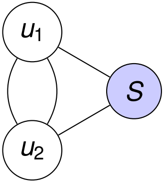
El grupo de pilas de arena de G junto con la operación $\oplus = s(\cdot + \cdot)$ es un grupo abeliano fínito.

Proposición

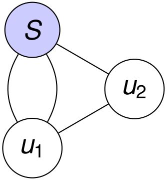
Para toda multigráfica G el grupo de pilas de arena $SP(G, s) \cong K(G)$ para todo $s \in V(G)$.

(relación matriz laplaciana)

El grupo abeliano $K(G)$ no depende sumidero. Sin embargo, el conjunto de configuraciones recurrentes, $SP(G,s)$, sí depende del sumidero.



Configuraciones recurrentes
(2 , 1)
(2 , 0)
(0 , 2)
(1 , 2)
(2 , 2)



Configuraciones recurrentes
(1 , 0)
(2 , 0)
(0 , 1)
(1 , 1)
(2 , 1)

$$K(G) = \mathbb{Z}_5$$

¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

1. El grupo crítico se puede obtener calculando la forma normal de Smith de la matriz Laplaciana reducida.

Teorema [Cori y Rossin 2001]

Si K_n es la gráfica completa de n vértices. Entonces

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

Demostración.

$$L(K_n, s) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$\square$

¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

1. El grupo crítico se puede obtener calculando la forma normal de Smith de la matriz Laplaciana reducida.
2. El grupo de pilas de arena se necesita calcular la configuración de desbordado (burning algorithm) y calcular combinatoriamente las configuraciones recurrentes.

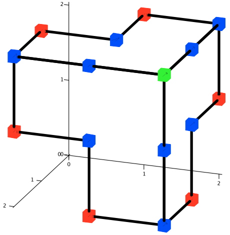
Sea σ_{max} la configuración $(\deg_G(v_1) - 1, ..., \deg_G(v_{n-1}) - 1)$.

Definición

Una configuración recurrente h es **minimal** si no existe una configuración recurrente $h' \neq h$ tal que $h' \leq h$.

Teorema

Toda configuración h entre alguna h_{min} y σ_{max} es recurrente.



Proposición [Cori y Rossin]

Las configuariones recurrentes minimales de K_n son permutaciones de $(n-2, ..., 1, 0)$.

Lemma

La configuración $(n-2, ..., n-2)$ *es la identidad en* $SP(K_n, s)$*.*

Teorema

Si $n \geq 3$, entonces

- las configuraciones $g_j = \sum_{i=1}^{n-1}(n-3)e_i + e_j$ con $1 \leq j \leq n-1$ tienen orden n, y
- cualesquiera $n-2$ generan a $SP(K_n, s)$.

Gráficas con conectividad uno.

Teorema

Sea G una multigráfica y sean G_1, G_2, ..., G_l sus bloques, entonces

$$K(G) = K(G_1) \oplus K(G_2) \oplus \cdots \oplus K(G_l).$$

El grupo de pilas de arena del ciclo gordo.

El ciclo gordo $\mathcal{C}_n$ es la multigráfica cuya gráfica subyacente es un ciclo.

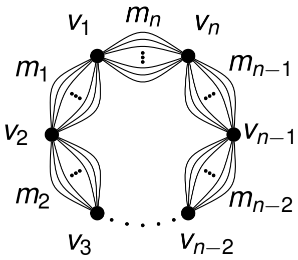


Figura : Ciclo gordo $\mathcal{C}_n$.

Teorema

Sea $\mathcal{C}_n$ el ciclo gordo con m_i la multiplicidad entre v_i y v_{i+1}, entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{n-1} \mathbb{Z}_{\Delta_i/\Delta_{i-1}} \right).$$

con

$$\Delta_i = \begin{cases} \gcd \left\{ m_{j_1} \cdots m_{j_i} \right\}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ (-1)^n \sum_{i=1}^{n} m_1 m_2 \cdots \hat{m}_i \cdots m_n & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

Corolario

Sea $\mathcal{C}_n$ el ciclo gordo con $m_i = m$, entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_m \right) \oplus \mathbb{Z}_{mn}.$$

Corolario

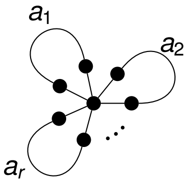
El grupo de pilas de arena del ciclo de n vertices es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

Dado un grupo fínito abeliano Γ

¿Existe una gráfica G tal que $K(G) = \Gamma$?

Sí, basta tomar a G como un wedge de ciclos.

$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{a_r}$$



Algunos isomorfismos.

Teorema [Cori y Rossin, 2000]

Sea G una gráfica y G^* su dual, entonces $K(G) \cong K(G^*)$.

Teorema [Wagner, 2000]

Sean G y H gráficas. Si las matroides gráficas de G y H son isomorfas, entonces $K(G) \cong K(H)$.

Homomorfismos y el grupo de pilas de arena.

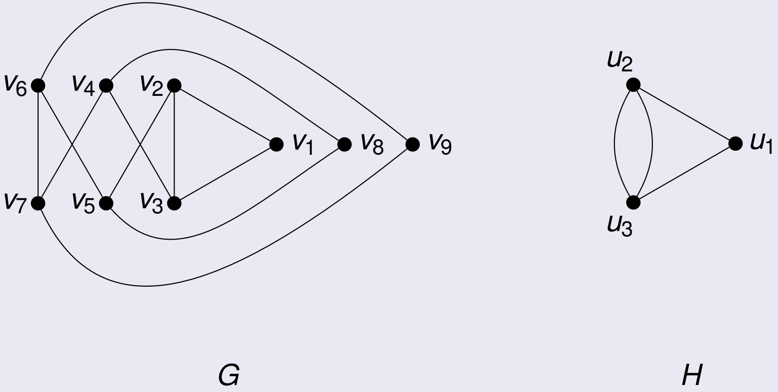
Definición

Sean G y H multigráficas. Un homomorfismo uniforme de G a H, denotado por $f : G \to H$, es una función $f : V(G) \to V(H)$ tal que para todos $x, y \in V(H)$ tenemos que

$$d_{G[S_x \cup S_y]}(u) = m_{x,y} \text{ para todos } u \in S_x \cup S_y,$$

donde $S_x = f^{-1}(x)$ y $S_y = f^{-1}(y)$.

Ejemplo: Homomorfismo uniforme.



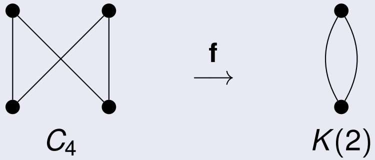
Teorema

Sean G y H multigráficas y sea $f : G \to H$ un homomorfismo uniforme sobrejectivo, entonces la función inducida $\widetilde{f} : SP(c(H), s) \to SP(c(G), t)$ dada por

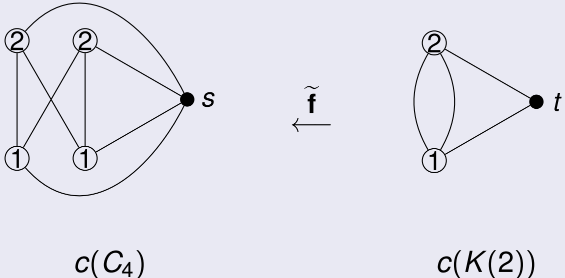
$$\widetilde{f}(u)_v = u_x \in \mathbb{N}^{V(G)} \text{ para todo } v \in S_x = f^{-1}(x),$$

es un homomorfismo inyectivo de grupos, es decir, $K(c(H)) \triangleleft K(c(G))$.

Ejemplo: Homomorfismo uniforme.



Las configuraciones recurrentes de $c(K(2)) = \mathcal{C}_3(2,1,1)$ son $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$ y $(0,2)$.



Teorema

Sea d un número natural, entonces el grupo de pilas de arena del cono del hipercubo $c(Q_d)$ está dado por:

$$K(c(Q_d)) \cong \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}_{2i+1}^{\binom{d}{i}} = \mathbb{Z}_3^d \oplus \mathbb{Z}_5^{\binom{d}{2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{2d-1}^d \oplus \mathbb{Z}_{2d+1}.$$

Programación Líneal Entera y el grupo de pilas de arena.

Teorema

Sea G una multigráfica, $s \in V(G)$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1}$ una configuración estable de G y $\mathbf{x}^*$ una solución óptima del siguiente problema líneal entero:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} \quad & \mathbf{0} \leq L(G,s)^t\mathbf{x} + \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

entonces $L(G,s)^t\mathbf{x}^* + \mathbf{c} \in SP(G,s)$ y $[\mathbf{c}] = [L(G,s)^t\mathbf{x}^* + \mathbf{c}]$.

Ejemplo

Sea $c = (0, 0, 1, 0)$ una configuración en (C_5, v_5). El correspondiente programa líneal entero es:

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{sujeto a:} \quad & \\
& \mathbf{0} \leq \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Obtenemos que $\mathbf{x}^* = (1, 1, 1, 1)$. Y $L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c} = (1, 0, 1, 1)$ es una configuración recurrente.

Corolario

Sea G una multigráfica, $\mathbf{x}^*$ una solución óptima del siguiente programa líneal entero:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} \quad & \mathbf{0} \leq L(G,s)^t\mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2}$$

entonces $L(G,s)^t\mathbf{x}^* \in SP(G,s)$ es la identidad de $SP(G,s)$.

Corolario

Sea G una multigráfica r-regular, entonces $r\mathbf{1}$ es la identidad del grupo de pilas de arena, $SP(c(G),s)$.

La Familia $\mathcal{G}_i$

Un resultado clásico (ver [Jacobson,1985]) es que

$$K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{d_r},$$

donde $d_i > 0$ y $d_i \mid d_j$ si $i \leq j$.
Los enteros $d_1, \ldots, d_r$ son llamados factores invariantes .
Más aún, $d_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$, donde $\Delta_0 = 1$ y Δ_i es el gcd de los $i \times i$ menores de $L(G)$.

Denotemos por:

- $f_i(G)$, el número de factores invariantes iguales a i de $K(G)$ y
- $f_{\geq 2}(G)$ al número de factores invariantes mayores a 2 de $K(G)$.

Se sabe (ver [Godsil, 2001]) que

$$f_1(G) + f_{\geq 2}(G) = n - c,$$

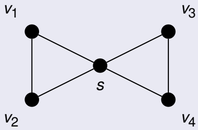
donde c es el número de componentes conexas.

Definición

Denotemos por $\mathcal{G}_i$ a la familia de gráficas simples conexas con $f_1(G) = i$.

Ejemplo

Por ejemplo, la siguiente gráfica pertenece a $\mathcal{G}_2$.



$$L(G, s) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Una gráfica simple conexa cumple

$$1 \leq f_1(G) \text{ y } f_{\geq 2}(G) \leq n - 2.$$

Observación

El conjunto $\mathcal{G}_i$ no es cerrado bajo subgráficas inducidas.
Por ejemplo, el cono de S_3 pertenece a $\mathcal{G}_2$, pero S_3 pertenece a $\mathcal{G}_3$.
También, la gráfica $K_6 \setminus M_2$ pertenece a $\mathcal{G}_3$, y $K_5 \setminus M_2$ pertenece a $\mathcal{G}_2$.

Teorema [Lorenzini, 1989]

Si G es una gráfica simple conexa , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

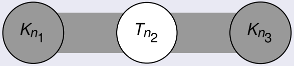
I. $G \in \mathcal{G}_1$,
II. G es P_2-free,
III. G es la gráfica completa.

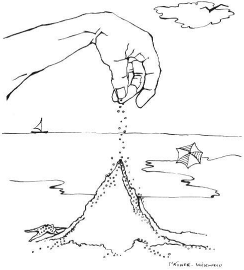
Teorema

Sea G una gráfica simple conexa . Entonces, $G \in \mathcal{G}_2$ si y solamente si G es una de las siguientes gráficas:

I. K_{n_1,n_2,n_3}, donde n_1, n_2 y n_3 son o pares o impares.

II. L_{n_1,n_2,n_3}, si $n_1, n_2, n_3 \geq 3$ y son pares o impares, u otros once casos.





¡Gracias!