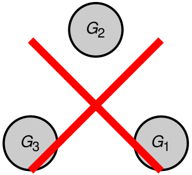
El grupo de pilas de arena

Carlos A. Alfaro

BANCO DE MÉXICO

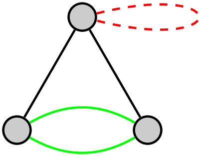
Supuestos sobre gráficas

- son conexas,



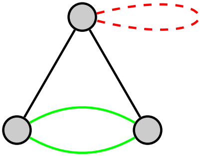
Supuestos sobre gráficas

- se permiten aristas multiples,



Supuestos sobre gráficas

- se prohiben lazos,



Descripción Combinatoria (Grupo de Pilas de Arena)

El conjunto de los vértices no sumidero son denotados por $\widetilde{V}$.

Definición

Sea $G = (V, E)$ una multigráfica. Una configuración de G es una asignación de enteros no negativos a los vértices no sumidero de G.

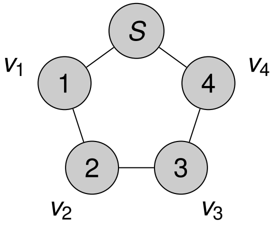


Figura: La configuración $(1, 2, 3, 4)$ en C_5

La **suma de dos configuraciones** de una multigráfica G es entrada por entrada.

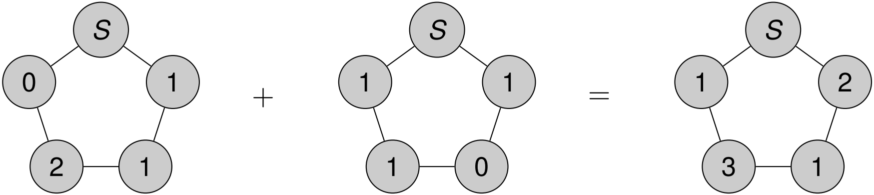


Figura: Suma de configuraciones

Definiciones

Sea **a** una configuración de G.

- El vértice v es estable si $a_v < deg_G(v)$.
- Una configuración es estable si todos los vértices no sumidero son estables.

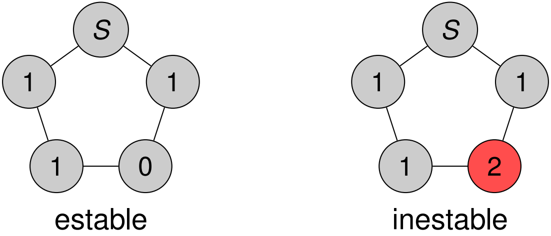


Figura: Configuraciones

Regla del desbordamiento

Sea $G = (V, E)$ una multigráfica y sea **a** una configuración. Si algún vértice v es tal que $deg_G(v) \leq a_v$, entonces desbordaremos el vértice v al restar $deg_G(v)$ a a_v y a cada vecino u de v sumamos $m_{v,u}$.

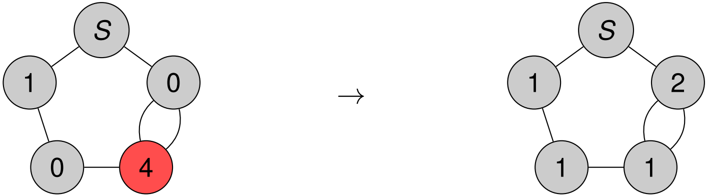


Figura: Desbordamiento de $(1, 0, 4, 0)$.

(relación matriz laplaciana)

Proposición

Para cualquier configuración existe una única configuración estable obtenida al desbordar los vértices.

(conmutatividad y norma)

Denotaremos por $s(\bullet)$ a la estabilización de una configuración.

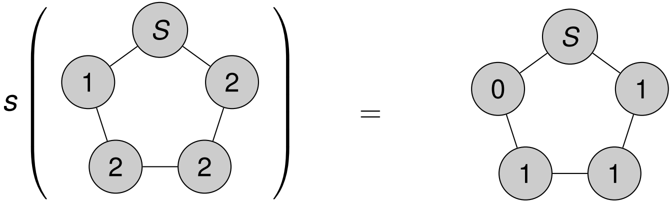


Figura: Configuración estable de $(1, 2, 2, 2)$

Definición

Una configuración u es recurrente si existe una configuración no cero v tal que $s(u+v)=u$.

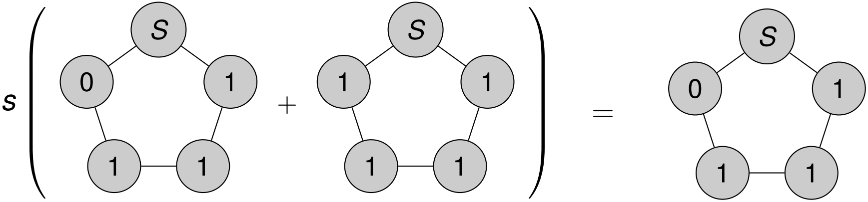


Figura: (0,1,1,1) es recurrente

Definición

El grupo de pilas de arena de G es el conjunto de configuraciones recurrentes. Y lo denotaremos por $SP(G, s)$.

Teorema (Burning Algorithm)

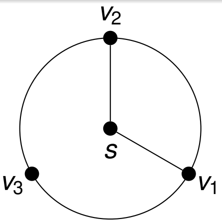
Sea G una multigráfica con $s \in V(G)$ un vertice distinguido. Además, sea $\beta = L(G)_s$. Una configuración u es recurrente si y solo si $s(u + \beta) = u$.

Definición

La matríz Laplaciana es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de G), tal que la entrada uv esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} deg_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $m_{u,v}$ es el número de aristas entre u y v.

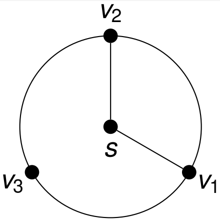


$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Distinguiremos un vértice s de G y lo llamaremos sumidero.

Definición

La matriz Laplaciana sin la fila y sin la columna correspondiente al vértice s es conocida la matriz Laplaciana reducida y es denotada por $L(G, s)$.



$$L(G, s) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

Definición

Sea G una multigráfica. Una subgráfica generadora es una subgráfica G' de G con $V(G') = V(G)$.

Teorema matriz árbol

El número de árboles generadores de una gráfica G es igual a cualquier menor $n-1 \times n-1$ de $L(G)$.

El número de configuraciones recurrentes es igual al número de árboles generadores.

Dada una configuración c, definimos

$$nivel(c) = \sum_{v} c_v.$$

Teorema

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con sink s y c una configuración recurrente, entonces

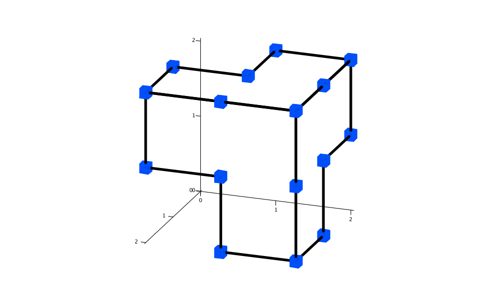
$$|E| - \deg_G(s) \leq nivel(c) \leq 2|E| - \deg_G(s) - |V| + 1$$

Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.

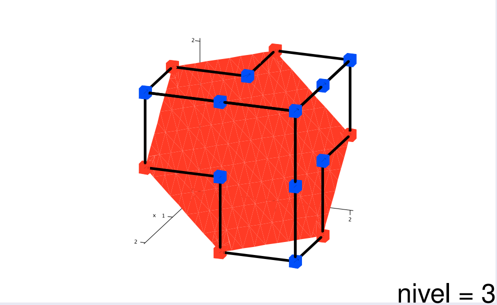
Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



Ejemplo

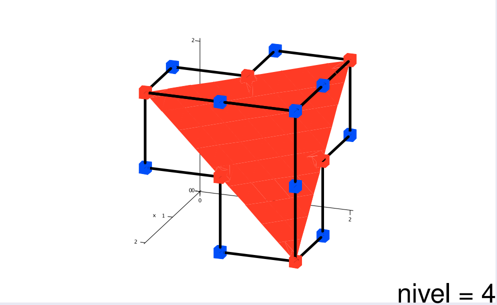
Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



nivel = 3

Ejemplo

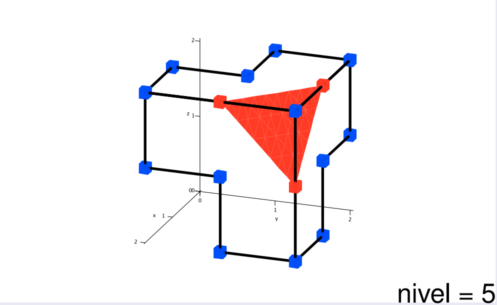
Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



nivel = 4

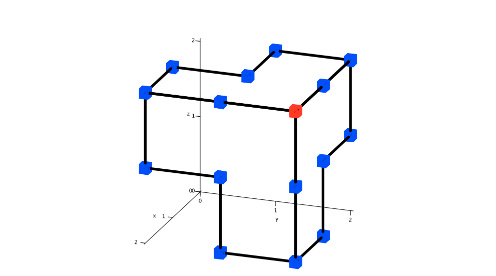
Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de K_4.



nivel = 6

Para $i \geq 0$, tomemos n_i como el número de configuraciones críticas con nivel $i + |E| - \deg(s)$.
La función generadora de las configuraciones críticas es el polinomio

$$P(G; y) = \sum_{i=0}^{|E|-|V|+1} n_i y^i$$

Definición

Sea G una multigráfica. El polinomio de Tutte de G es el polinomio $T(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ definido como sigue:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(G) = \emptyset, \\ xT(G/e) & \text{si } e \text{ es un puente}, \\ yT(G \backslash e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo}, \\ T(G/e; x, y) + T(G \backslash e; x, y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni puen} \end{cases}$$

Por ejemplo $T(K_4; x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y + y^3 + x^3$

Teorema [Merino,1997]

La **función generadora** de las configuraciones recurrentes es el **polinomio de Tutte** a lo largo de la linea $x = 1$,

$$P(G, y) = T(G; 1, y).$$

$P(K_4, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3$.

Descripción Algebraica (Grupo Crítico)

La descripción algebraica del grupo de pilas de arena también es conocida como el grupo crítico.

El grupo crítico de G, denotado por $K(G)$, esta dado por

$$K(G) = \mathbb{Z}^{n-1}/L(G,s)^t,$$

donde $L(G,s)$ es la matriz Laplaciana reducida.

Teorema

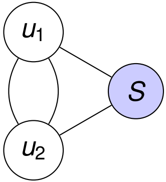
El grupo de pilas de arena de G junto con la operación $\oplus = s(\cdot + \cdot)$ es un grupo abeliano fínito.

Proposición

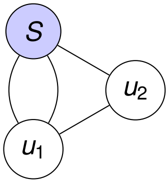
Para toda multigráfica G el grupo de pilas de arena $SP(G, s) \cong K(G)$ para todo $s \in V(G)$.

(relación matriz laplaciana)

El grupo abeliano $K(G)$ no depende sumidero. Sin embargo, el conjunto de configuraciones recurrentes, $SP(G, s)$, sí depende del sumidero.



Configuraciones recurrentes
(2 , 1)
(2 , 0)
(0 , 2)
(1 , 2)
(2 , 2)



Configuraciones recurrentes
(1 , 0)
(2 , 0)
(0 , 1)
(1 , 1)
(2 , 1)

$$K(G) = \mathbb{Z}_5$$

¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

1. El grupo crítico se puede obtener calculando la forma normal de Smith de la matriz Laplaciana reducida.

Teorema [Cori y Rossin 2001]

Si K_n es la gráfica completa de n vértices. Entonces

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

Demostración.

$$L(K_n, s) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$\square$

¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

1. El grupo crítico se puede obtener calculando la **forma normal de Smith** de la matriz Laplaciana reducida.
2. El grupo de pilas de arena se necesita calcular la configuración de desbordado (burning algorithm) y calcular combinatoriamente las configuraciones recurrentes.

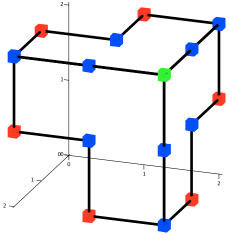
Sea σ_{max} la configuración $(\deg_G(v_1) - 1, \ldots, \deg_G(v_{n-1}) - 1)$.

Definición

Una configuración recurrente h es **minimal** si no existe una configuración recurrente $h' \neq h$ tal que $h' \leq h$.

Teorema

Toda configuración h entre alguna h_{min} y σ_{max} es recurrente.



Proposición [Cori y Rossin]

Las configuariones recurrentes minimales de K_n son permutaciones de $(n-2, ..., 1, 0)$.

Lemma

La configuración $(n-2, ..., n-2)$ *es la identidad en* $SP(K_n, s)$.

Teorema

Si $n \geq 3$, entonces

- las configuraciones $g_j = \sum_{i=1}^{n-1}(n-3)e_i + e_j$ con $1 \leq j \leq n-1$ tienen orden n, y
- cualesquiera $n-2$ generan a $SP(K_n, s)$.

Gráficas con conectividad uno.

Teorema

Sea G una multigráfica y sean G_1, G_2, ..., G_l sus bloques, entonces

$$K(G) = K(G_1) \oplus K(G_2) \oplus \cdots \oplus K(G_l).$$

El grupo de pilas de arena del ciclo gordo.

El ciclo gordo $\mathcal{C}_n$ es la multigráfica cuya gráfica subyacente es un ciclo.

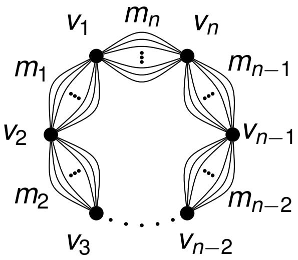


Figura: Ciclo gordo $\mathcal{C}_n$.

Teorema

Sea $\mathcal{C}_n$ el ciclo gordo con m_i la multiplicidad entre v_i y v_{i+1}, entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \left(\bigoplus_{i=2}^{n-1} \mathbb{Z}_{\Delta_i/\Delta_{i-1}} \right).$$

con

$$\Delta_i = \begin{cases} \gcd \left\{ m_{j_1} \cdots m_{j_i} \right\}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ (-1)^n \sum_{i=1}^{n} m_1 m_2 \cdots \hat{m}_i \cdots m_n & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

Corolario

Sea $\mathcal{C}_n$ el ciclo gordo con $m_i = m$, entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_m \right) \oplus \mathbb{Z}_{mn}.$$

Corolario

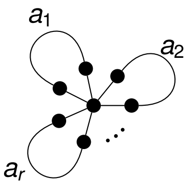
El grupo de pilas de arena del ciclo de n vertices es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

Dado un grupo fínito abeliano Γ

¿Existe una gráfica G tal que $K(G) = \Gamma$?

Sí, basta tomar a G como un wedge de ciclos.

$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{a_r}$$



Algunos isomorfismos.

Teorema [Cori y Rossin, 2000]

Sea G una gráfica y G^* su dual, entonces $K(G) \cong K(G^*)$.

Teorema [Wagner, 2000]

Sean G y H gráficas. Si las matroides gráficas de G y H son isomorfas, entonces $K(G) \cong K(H)$.

Homomorfismos y el grupo de pilas de arena.

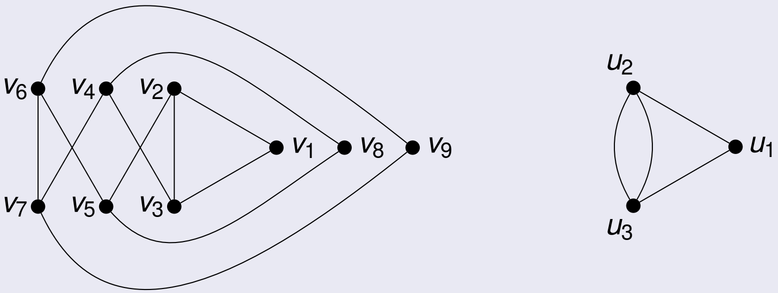
Definición

Sean G y H multigráficas. Un homomorfismo uniforme de G a H, denotado por $f : G \to H$, es una función $f : V(G) \to V(H)$ tal que para todos $x, y \in V(H)$ tenemos que

$$d_{G[S_x \cup S_y]}(u) = m_{x,y} \text{ para todos } u \in S_x \cup S_y,$$

donde $S_x = f^{-1}(x)$ y $S_y = f^{-1}(y)$.

Ejemplo: Homomorfismo uniforme.



G H

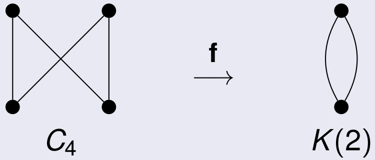
Teorema

Sean G y H multigráficas y sea $f : G \to H$ un homomorfismo uniforme sobrejectivo, entonces la función inducida $\widetilde{f} : SP(c(H), s) \to SP(c(G), t)$ dada por

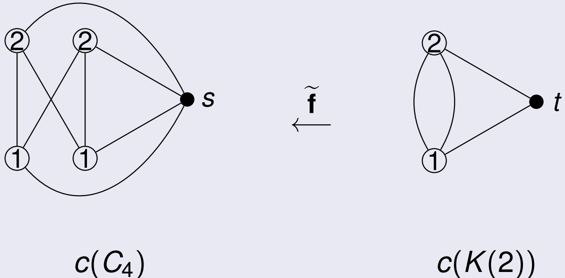
$$\widetilde{f}(u)_v = u_x \in \mathbb{N}^{V(G)} \text{ para todo } v \in S_x = f^{-1}(x),$$

es un homomorfismo inyectivo de grupos, es decir, $K(c(H)) \triangleleft K(c(G))$.

Ejemplo: Homomorfismo uniforme.



Las configuraciones recurrentes de $c(K(2)) = \mathcal{C}_3(2,1,1)$ son $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$ y $(0,2)$.



Teorema

Sea d un número natural, entonces el grupo de pilas de arena del cono del hipercubo $c(Q_d)$ está dado por:

$$K(c(Q_d)) \cong \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}_{2i+1}^{\binom{d}{i}} = \mathbb{Z}_3^d \oplus \mathbb{Z}_5^{\binom{d}{2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{2d-1}^d \oplus \mathbb{Z}_{2d+1}.$$

Programación Líneal Entera y el grupo de pilas de arena.

Teorema

Sea G una multigráfica, $s \in V(G)$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1}$ una configuración estable de G y $\mathbf{x}^*$ una solución óptima del siguiente problema líneal entero:

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq L(G,s)^t\mathbf{x} + \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \qquad (1)$$

entonces $L(G,s)^t\mathbf{x}^* + \mathbf{c} \in SP(G,s)$ y $[\mathbf{c}] = [L(G,s)^t\mathbf{x}^* + \mathbf{c}]$.

Ejemplo

Sea $c = (0,0,1,0)$ una configuración en (C_5, v_5). El correspondiente programa líneal entero es:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{sujeto a:} & \\
& \mathbf{0} \leq \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

Obtenemos que $\mathbf{x}^* = (1,1,1,1)$. Y $L(G,s)^t\mathbf{x}^* + \mathbf{c} = (1,0,1,1)$ es una configuración recurrente.

Corolario

Sea G una multigráfica, $\mathbf{x}^*$ una solución óptima del siguiente programa líneal entero:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} \quad & \mathbf{0} \leq L(G,s)^t\mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2}$$

entonces $L(G,s)^t\mathbf{x}^* \in SP(G,s)$ es la identidad de $SP(G,s)$.

Corolario

Sea G una multigráfica r-regular, entonces $r\mathbf{1}$ es la identidad del grupo de pilas de arena, $SP(c(G),s)$.

La Familia $\mathcal{G}_i$

Un resultado clásico (ver [Jacobson,1985]) es que

$$K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{d_r},$$

donde $d_i > 0$ y $d_i \mid d_j$ si $i \leq j$.
Los enteros $d_1, \ldots, d_r$ son llamados factores invariantes .
Más aún, $d_i = \Delta_i/\Delta_{i-1}$, donde $\Delta_0 = 1$ y Δ_i es el gcd de los $i \times i$ menores de $L(G)$.

Denotemos por:

- $f_i(G)$, el número de factores invariantes iguales a i de $K(G)$ y
- $f_{\geq 2}(G)$ al número de factores invariantes mayores a 2 de $K(G)$.

Se sabe (ver [Godsil, 2001]) que

$$f_1(G) + f_{\geq 2}(G) = n - c,$$

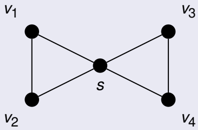
donde c es el número de componentes conexas.

Definición

Denotemos por $\mathcal{G}_i$ a la familia de gráficas simples conexas con $f_1(G) = i$.

Ejemplo

Por ejemplo, la siguiente gráfica pertenece a $\mathcal{G}_2$.



$$L(G,s) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Una gráfica simple conexa cumple

$$1 \leq f_1(G) \text{ y } f_{\geq 2}(G) \leq n - 2.$$

Observación

El conjunto $\mathcal{G}_i$ no es cerrado bajo subgráficas inducidas.
Por ejemplo, el cono de S_3 pertenece a $\mathcal{G}_2$, pero S_3 pertenece a $\mathcal{G}_3$.
También, la gráfica $K_6 \setminus M_2$ pertenece a $\mathcal{G}_3$, y $K_5 \setminus M_2$ pertenece a $\mathcal{G}_2$.

Teorema [Lorenzini, 1989]

Si G es una gráfica simple conexa , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

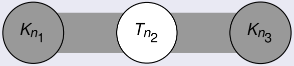
1. $G \in \mathcal{G}_1$,
2. G es P_2-free,
3. G es la gráfica completa.

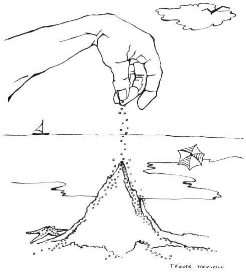
Teorema

Sea G una gráfica simple conexa. Entonces, $G \in \mathcal{G}_2$ si y solamente si G es una de las siguientes gráficas:

I. K_{n_1,n_2,n_3}, donde n_1, n_2 y n_3 son o pares o impares.

II. L_{n_1,n_2,n_3}, si $n_1, n_2, n_3 \geq 3$ y son pares o impares, u otros once casos.





¡Gracias!