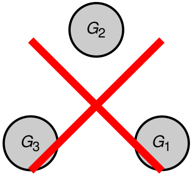
# El grupo de pilas de arena

Carlos A. Alfaro

BANCO DE MÉXICO

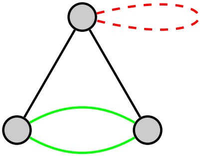
**Supuestos sobre gráficas**

- son conexas,



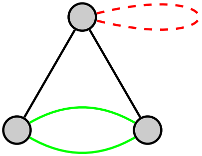
## Supuestos sobre gráficas

- se permiten aristas multiples, y



## Supuestos sobre gráficas

- se prohiben lazos.



## Grupo de Pilas de Arena

El conjunto de los vértices no sumidero son denotados por $\widetilde{V}$.

### Definición

Sea $G = (V, E)$ una gráfica y $s \in V$. Una configuración de $(G, s)$ es una asignación de enteros no negativos a los vértices no sumidero de $G$.

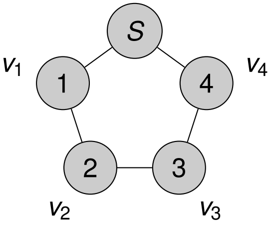



**Figura :** La configuración $(1, 2, 3, 4)$ en $C_5$

La **suma de dos configuraciones** de una gráfica $G$ es entrada por entrada.

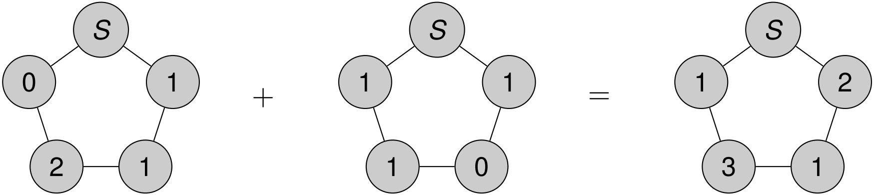



**Figura :** Suma de configuraciones

## Definiciones

Sea **a** una configuración de $(G, s)$.

- El vértice $v$ es estable si $\mathbf{a}_v < deg_G(v)$.

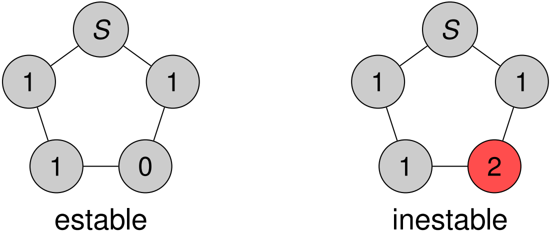



**Figura :** Configuraciones

## Definiciones

Sea **a** una configuración de $(G, s)$.

- El vértice $v$ es estable si $\mathbf{a}_v < deg_G(v)$.
- Una configuración es estable si todos los vértices no sumidero son estables.

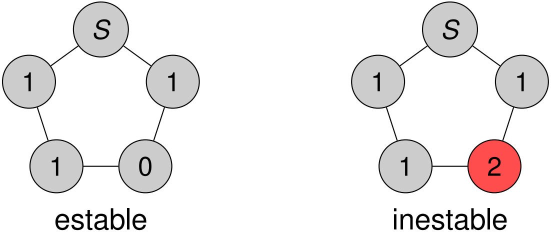



**Figura :** Configuraciones

## Regla del desbordamiento

Sea $\mathbf{a}$ una configuración de $(G, s)$. Si un vértice $v$ satisface que $deg_G(v) \leq \mathbf{a}_v$, entonces $v$ puede desbordarce, es decir:

- restar $deg_G(v)$ a $\mathbf{a}_v$ y
- a cada vecino $u$ de $v$ sumamos $m_{v,u}$.

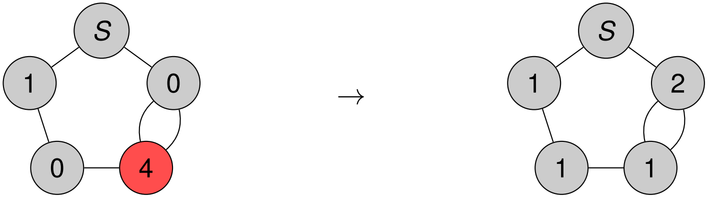



**Figura :** Desbordamiento de $(1, 0, 4, 0)$.

(relación matriz laplaciana)

## Proposición

Para cualquier configuración existe una única configuración estable obtenida al desbordar los vértices.

(conmutatividad y norma)

Denotaremos por $s(\bullet)$ a la estabilización de una configuración.

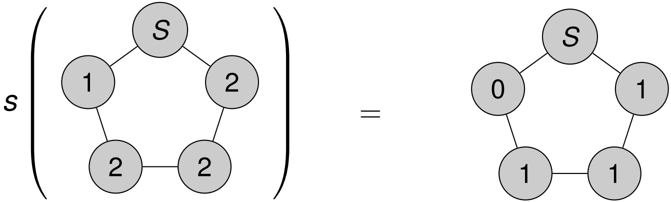



**Figura :** Configuración estable de $(1, 2, 2, 2)$

### Definición

Una configuración **u** es recurrente si existe una configuración no cero **v** tal que $s(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = u$.

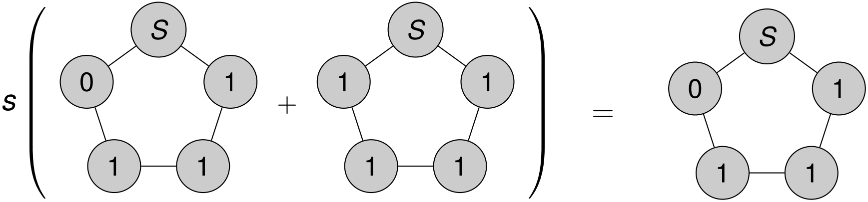
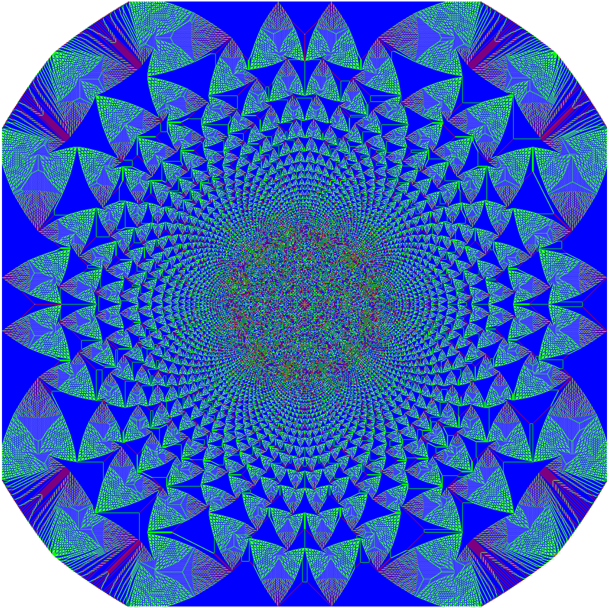



**Figura :** (0,1,1,1) es recurrente



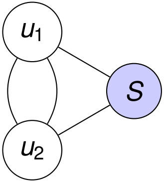
**Teorema**

El conjunto de configuraciones recurrentes de $(G, s)$ junto con la operación $\oplus = s(\cdot + \cdot)$ forman un grupo abeliano fínito.

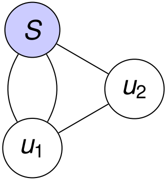
**Definición**

El grupo de pilas de arena $SP(G, s)$ de $G$ es el conjunto de configuraciones recurrentes.

El conjunto de configuraciones recurrentes depende del sumidero.




| Configuraciones recurrentes |
|---|
| ( 2 , 1 ) |
| ( 2 , 0 ) |
| ( 0 , 2 ) |
| ( 1 , 2 ) |
| ( 2 , 2 ) |




| Configuraciones recurrentes |
|---|
| ( 1 , 0 ) |
| ( 2 , 0 ) |
| ( 0 , 1 ) |
| ( 1 , 1 ) |
| ( 2 , 1 ) |

$$K(G) = \mathbb{Z}_5$$

## Configuraciones minimales y maximales

**Definición**

Sea $\sigma_{max}$ la configuración $(\deg_G(v_1) - 1, \ldots, \deg_G(v_{n-1}) - 1)$.

**Definición**

Una configuración recurrente $h$ es minimal si no existe una configuración recurrente $h' \neq h$ tal que $h' \leq h$.

**Teorema**

Toda configuración entre alguna configuración recurrente minimal y $\sigma_{max}$ es recurrente.

**Proposición [Cori y Rossin]**

Las configuariones recurrentes minimales de $K_n$ son permutaciones de $(n-2, ..., 1, 0)$.

**Lemma**

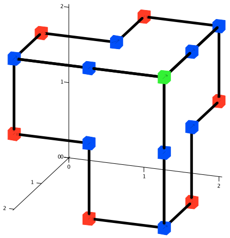
*La configuración $(n-2, ..., n-2)$ es la identidad en $SP(K_n, s)$.*

## Proposición [Cori y Rossin]

Las configuariones recurrentes minimales de $K_n$ son permutaciones de $(n-2, ..., 1, 0)$.

## Lemma

*La configuración* $(n-2, ..., n-2)$ *es la identidad en* $SP(K_n, s)$.



**Teorema**

Si $n \geq 3$, entonces

- las configuraciones $g_j = \sum_{i=1}^{n-1}(n-3)e_i + e_j$ con $1 \leq j \leq n-1$ tienen orden $n$, y
- cualesquiera $n-2$ generan a $SP(K_n, s)$.

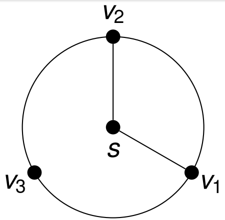
## GPA y la matriz Laplaciana

**Definición**

La matriz Laplaciana es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de $G$) tal que la entrada $uv$ esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} deg_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $m_{u,v}$ es el número de aristas entre $u$ y $v$.




$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## ¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

### Definición

Sea $G$ una gráfica. Una subgráfica generadora es una subgráfica $G'$ de $G$ con $V(G') = V(G)$.

### Teorema matriz-árbol

El número de árboles generadores de una gráfica $G$ es igual a cualquier menor $n-1 \times n-1$ de $L(G)$.

El número de configuraciones recurrentes es igual al número de árboles generadores.

### Teorema

$$\tau(G) = |SP(G)|$$

## GPA y polinomio de Tutte

### Definición

Sea $G$ una gráfica. El polinomio de Tutte de $G$ es el polinomio $T(G;x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ definido como sigue:

$$T(G;x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(G) = \emptyset, \\ xT(G/e) & \text{si } e \text{ es un puente}, \\ yT(G\backslash e;x,y) & \text{si } e \text{ es un lazo}, \\ T(G/e;x,y) + T(G\backslash e;x,y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni puente}. \end{cases}$$

Por ejemplo $T(K_4;x,y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y + y^3 + x^3$

Dada una configuración $c$, definimos

$$nivel(c) = \sum_{v} c_v .$$

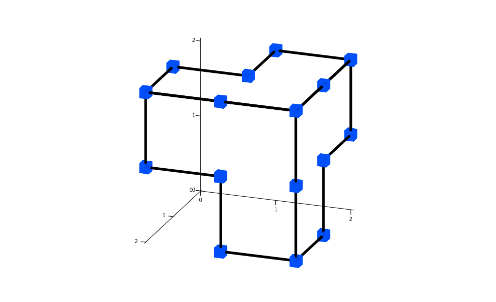
**Teorema**

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con sumidero $s$ y $c$ una configuración recurrente, entonces

$$|E| - \deg_G(s) \leq nivel(c) \leq 2|E| - \deg_G(s) - |V| + 1$$

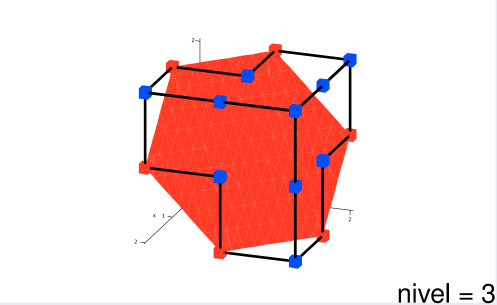
## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de $K_4$.



## Ejemplo

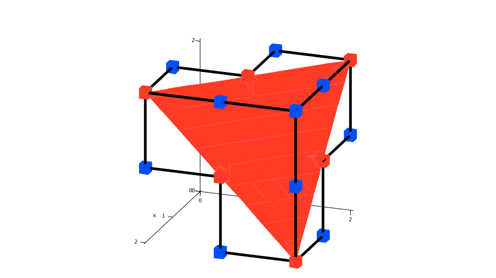
Consideremos las configuraciones recurrentes de $K_4$.



nivel = 3

## Ejemplo

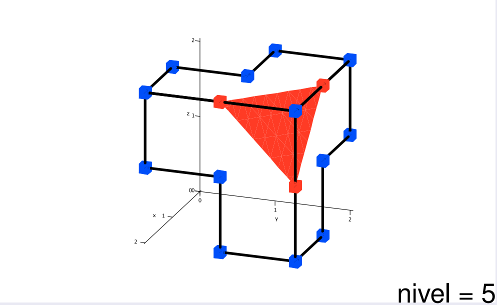
Consideremos las configuraciones recurrentes de $K_4$.




nivel = 4

## Ejemplo

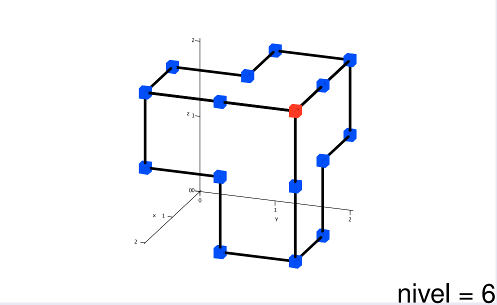
Consideremos las configuraciones recurrentes de $K_4$.




nivel = 5

## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de $K_4$.




nivel = 6

Para $i \geq 0$, tomemos $n_i$ como el número de configuraciones críticas con nivel $i + |E| - \deg(s)$.
La función generadora de las configuraciones críticas es el polinomio

$$P(G; y) = \sum_{i=0}^{|E|-|V|+1} n_i y^i$$

**Teorema [Merino,1997]**

La función generadora de las configuraciones recurrentes es el polinomio de Tutte a lo largo de la linea $x = 1$,

$$P(G, y) = T(G; 1, y).$$

$P(K_4, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3$.

## GPA y Programación Líneal Entera

### Teorema

Sea $G$ una gráfica, $s \in V(G)$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1}$ una configuración estable de $G$ y $\mathbf{x}^*$ una solución óptima del siguiente problema líneal entero:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} \quad & \mathbf{0} \leq L(G,s)^t\mathbf{x} + \mathbf{c} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

entonces $L(G,s)^t\mathbf{x}^* + \mathbf{c} \in SP(G,s)$ y $[\mathbf{c}] = [L(G,s)^t\mathbf{x}^* + \mathbf{c}]$.

## Ejemplo

Sea $c = (0, 0, 1, 0)$ una configuración en $(C_5, v_5)$. El correspondiente programa líneal entero es:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{sujeto a:} & \\ & \mathbf{0} \leq \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Obtenemos que $\mathbf{x}^* = (1, 1, 1, 1)$. Y $L(G, s)^t \mathbf{x}^* + \mathbf{c} = (1, 0, 1, 1)$ es una configuración recurrente.

## Corolario

Sea $G$ una gráfica, $\mathbf{x}^*$ una solución óptima del siguiente programa líneal entero:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & |\mathbf{x}| \\ \text{sujeto a:} \quad & \mathbf{0} \leq L(G,s)^t\mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{(G,s)} - \mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2}$$

entonces $L(G,s)^t\mathbf{x}^* \in SP(G,s)$ es la identidad de $SP(G,s)$.

## Corolario

Sea $G$ una gráfica $r$-regular, entonces $r\mathbf{1}$ es la identidad del grupo de pilas de arena, $SP(c(G),s)$.

## Grupo Crítico

En la literatura el grupo de pilas de arena tambien es conocido como el grupo crítico, el grupo Jacobiano, el grupo de Picard, etc.

Más aún, existen varias formas equivalentes de definirlo.

La descripción algebraica del grupo de pilas de arena también es conocida como el grupo crítico.

## Definición

El grupo crítico $K(G)$ de $G$ está definido como la parte de torción del cokernel de la matriz Laplaciana de $G$.

$$coker(L(G)) = \mathbb{Z}^n / \mathrm{Im} L(G) = \mathbb{Z} \oplus K(G).$$

## Proposición

Para toda gráfica $G$, y todo $s \in V(G)$, tenemos

$$SP(G, s) \cong K(G).$$

(relación matriz laplaciana)

## ¿Cómo calcular el grupo de pilas de arena?

El grupo crítico se puede obtener calculando la forma normal de Smith de la matriz Laplaciana.

**Definición**

Dos matrices $M$ y $N$ son equivalentes si existen $P, Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ tal que $N = PMQ$.

**Teorema**

Si $M$ y $N$ son equivalentes, entonces $\mathbb{Z}^n/M \cong \mathbb{Z}^n/N$.

**Teorema**

$$K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r},$$

donde $d_i > 0$ y $d_i \mid d_j$ si $i \leq j$.

**Definición**

Los enteros $d_1, \ldots, d_r$ son llamados factores invariantes .

**Proposición**

$d_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$, donde $\Delta_0 = 1$ y $\Delta_i$ es el gcd de los $i \times i$ menores de $L(G)$.

### Teorema [Cori y Rossin 2001]

Si $K_n$ es la gráfica completa de $n$ vértices. Entonces

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

### Demostración.

$$L(K_n, s) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

□

## El grupo crítico del ciclo gordo

El ciclo gordo $\mathcal{C}_n$ es la gráfica cuya gráfica subyacente es un ciclo.

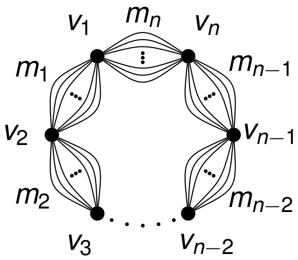



**Figura :** Ciclo gordo $\mathcal{C}_n$.

**Teorema**

Sea $\mathcal{C}_n$ el ciclo gordo con $m_i$ la multiplicidad entre $v_i$ y $v_{i+1}$, entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \left( \bigoplus_{i=2}^{n-1} \mathbb{Z}_{\Delta_i/\Delta_{i-1}} \right).$$

con

$$\Delta_i = \begin{cases} \gcd\left\{ m_{j_1} \cdots m_{j_i} \right\}_{1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n} & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ (-1)^n \sum_{i=1}^{n} m_1 m_2 \cdots \hat{m}_i \cdots m_n & \text{si } i = n-1. \end{cases}$$

**Corolario**

Sea $\mathcal{C}_n$ el ciclo gordo con $m_i = m$, entonces

$$K(\mathcal{C}_n) = \left( \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_m \right) \oplus \mathbb{Z}_{mn}.$$

**Corolario**

El grupo de pilas de arena del ciclo de $n$ vertices es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

## Gráficas con conectividad uno.

**Teorema**

Sea $G$ una gráfica y sean $G_1$, $G_2$, ..., $G_l$ sus bloques, entonces

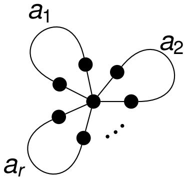
$$K(G) = K(G_1) \oplus K(G_2) \oplus \cdots \oplus K(G_l).$$

**Pregunta**

Dado un grupo fínito abeliano $\Gamma$. ¿Existe una gráfica $G$ tal que $K(G) = \Gamma$?

Sí, basta tomar a $G$ como un wedge de ciclos.

$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{a_r}$$



Algunos isomorfismos.

**Teorema [Cori y Rossin, 2000]**

Sea $G$ una gráfica y $G^*$ su dual, entonces $K(G) \cong K(G^*)$.

**Teorema [Wagner, 2000]**

Sean $G$ y $H$ gráficas. Si las matroides gráficas de $G$ y $H$ son isomorfas, entonces $K(G) \cong K(H)$.

## La Familia $\mathcal{G}_i$

Denotemos por:

- $f_i(G)$, el número de factores invariantes iguales a $i$ de $K(G)$,
- $f_{\geq 2}(G)$ al número de factores invariantes mayores a 2 de $K(G)$.

**Teorema [Godsil, 2001]**

$$f_1(G) + f_{\geq 2}(G) = n - c,$$

donde $c$ es el número de componentes conexas.

**Corolario**

Una gráfica simple conexa cumple

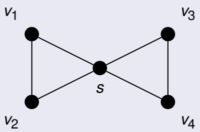
$$1 \leq f_1(G) \text{ y } f_{\geq 2}(G) \leq n - 2.$$

### Definición

Denotemos por $\mathcal{G}_i$ a la familia de gráficas simples conexas con $f_1(G) = i$.

### Ejemplo

Por ejemplo, la siguiente gráfica pertenece a $\mathcal{G}_2$.




$$L(G,s) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

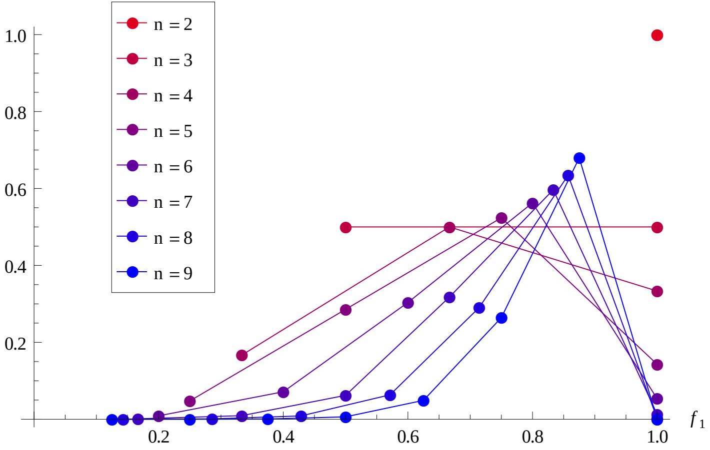



**Figura :** Número normalizado de graficas con $f_1$ factores invariantes iguales a 1

**Pregunta**

¿Qué tan frecuente es cíclico el grupo crítico? es decir, ¿Qué tan frecuente $f_1(G)$ es igual a $n-1$ o $n-2$?

**Conjetura [D. Wagner, 2001]**

Casi todas las gráficas simples y conexas tienen grupo crítico ciclico.

**Teorema [M. Wood, 2014]**

La probabilidad de que el grupo crítico de una gráfica aleatoria sea cíclica es asintóticamente a lo más

$$\zeta(3)^{-1}\zeta(5)^{-1}\zeta(7)^{-1}\zeta(9)^{-1}\zeta(11)^{-1}\cdots \approx 0{,}7935212$$

donde $\zeta$ es la función zeta de Riemann.

# Gráficas con un factor invariante igual a 1

Por otro lado...

**Pregunta**

¿Qué podemos decir sobre $\mathcal{G}_1$?

**Teorema [Lorenzini, 1989]**

Si $G$ es una gráfica simple conexa, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i. $G \in \mathcal{G}_1$,
ii. $G$ es $P_2$-libre,
iii. $G$ es la gráfica completa.

## Pregunta

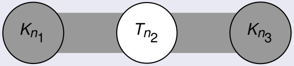
¿Qué podemos decir sobre $\mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_3$?

## Teorema

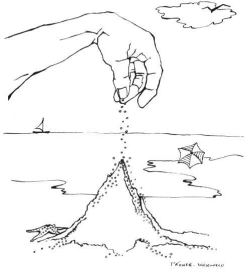
Sea $G$ una gráfica simple conexa . Entonces, $G \in \mathcal{G}_2$ si y solamente si $G$ es una de las siguientes gráficas:

I. $K_{n_1,n_2,n_3}$, donde $n_1$, $n_2$ y $n_3$ tienen la misma paridad.

II. $L_{n_1,n_2,n_3}$, si $n_1, n_2, n_3 \geq 3$ tienen la misma paridad, u otros once casos.




La demostración usa los ideales críticos.




¡Gracias!