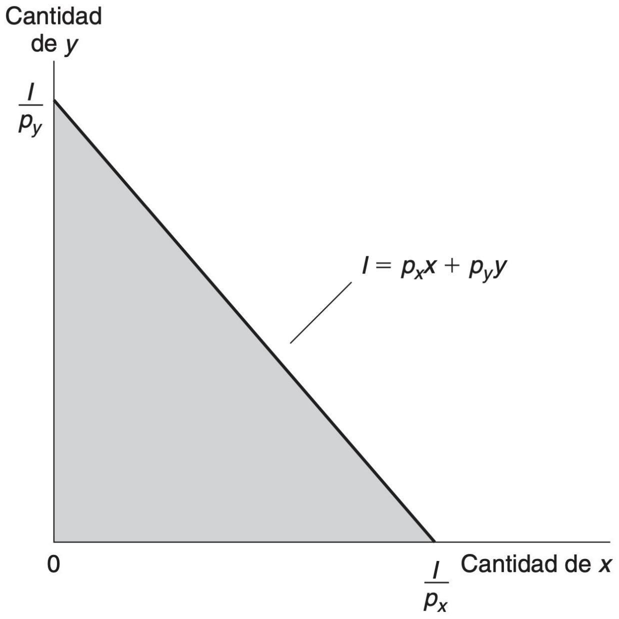
# Maximización de utilidad y elección

El modelo supone que los individuos se comportan como si maximizaran la utilidad, sujeto a la **restricción de su presupuesto**.

Los individuos, para maximizar su utilidad, elegirán paquetes de bienes que representen una TMS que sea igual a la tasa de los precios de mercado de esos bienes.

Los precios de mercado ofrecen información acerca de los costos de oportunidad para los individuos y la TMS desempeña un importante papel que afecta lo que ellos eligen.

# Restricción presupuestaria




Supongamos que un individuo tiene ***I*** dólares para asignar entre el bien ***x*** y el bien ***y****.*

Si $p_x$ es el precio del bien ***x*** y $p_y$ es el precio del bien ***y****,* entonces el individuo estará restringido por

$$p_x x + p_y y \leq I.$$

Esta persona sólo se puede permitir elegir las combinaciones de ***x*** y ***y*** que estén dentro del triángulo sombreado de la figura.

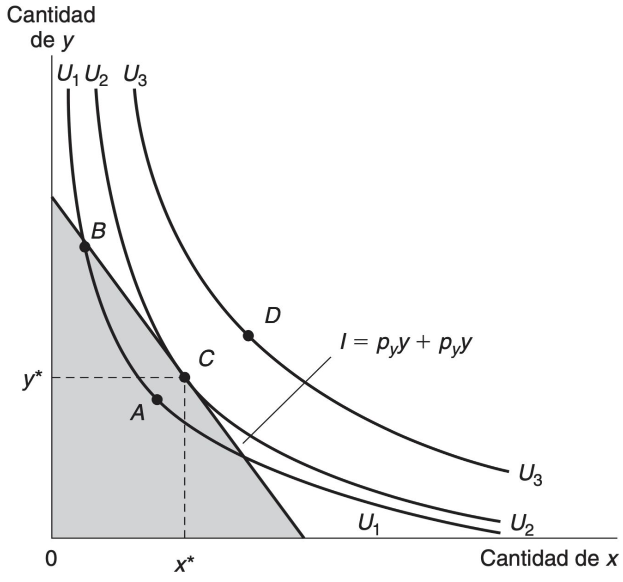
Si gasta todo su ingreso *I* en el bien ***x****,* entonces comprará $I / p_x$ unidades de ***x****.*

Si gasta todo en *y,* entonces comprará $I / p_y$ unidades de ***y****.*

La pendiente de la restricción es $-p_x / p_y$.

Esta pendiente muestra cómo el individuo puede cambiar ***y*** por ***x*** en el mercado.

# Condiciones de primer orden para un máximo




El punto ***D*** queda descartado porque sus ingresos no son lo bastante altos como para adquirir ***D.***

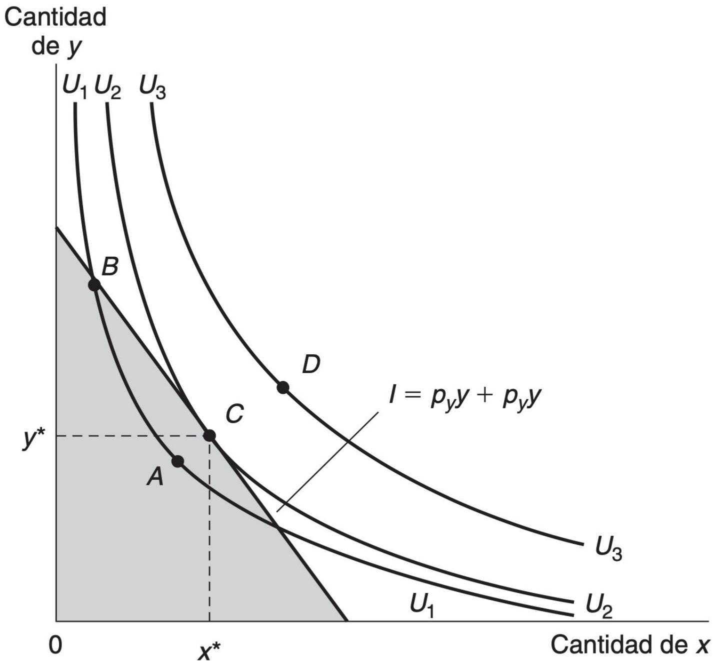
El individuo no sería racional si eligiera un punto como el ***A***, ya que el supuesto de que no hay saciedad implica que la persona debe gastar todos sus ingresos.

Si la persona reasigna sus gastos podrá estar en mejor posición que en el punto ***B.***

La posición de máxima utilidad se encuentra en el punto ***C.***

En este punto el individuo gastará todos sus ingresos, y la ***TMS*** será igual a la tasa a la cual puede intercambiar los bienes en el mercado (***$p_x$ /$p_y$***).

# Condiciones de primer orden




El objetivo del individuo consiste en maximizar la utilidad que obtiene de estos ***n*** bienes:

$$\text{utilidad} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

sujeta a la restricción presupuestaria:

$$I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0.$$

La expresión lagrangiana es

$$\mathscr{L} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \ldots - p_nx_n).$$

Si hacemos que las derivadas parciales de **L** sean igual a cero obtendremos *n* + 1 ecuaciones que representan las condiciones necesarias para alcanzar un máximo interior:

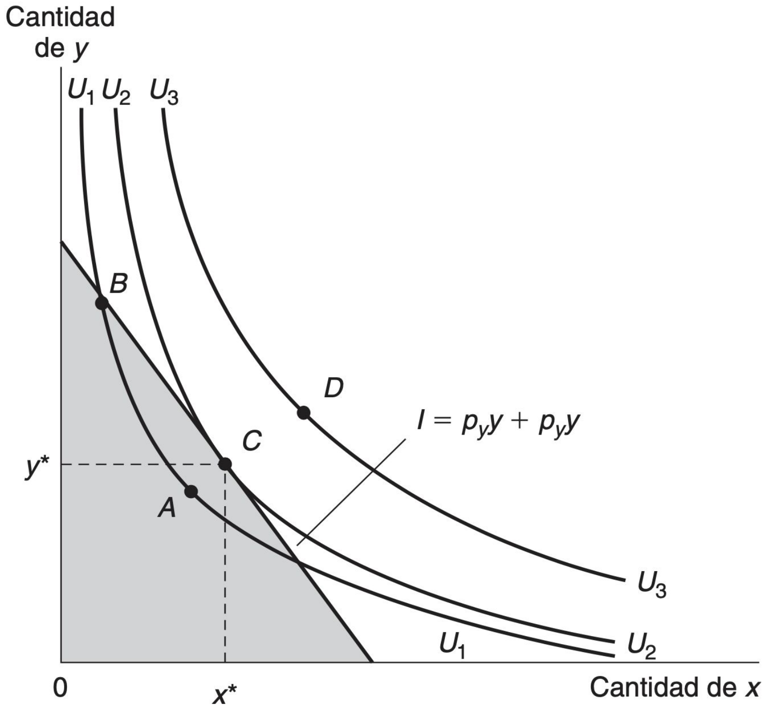
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} = \frac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_x = 0.$$

# Condiciones de primer orden




Para cualesquiera dos bienes, $x_i$ y $x_j$, tenemos

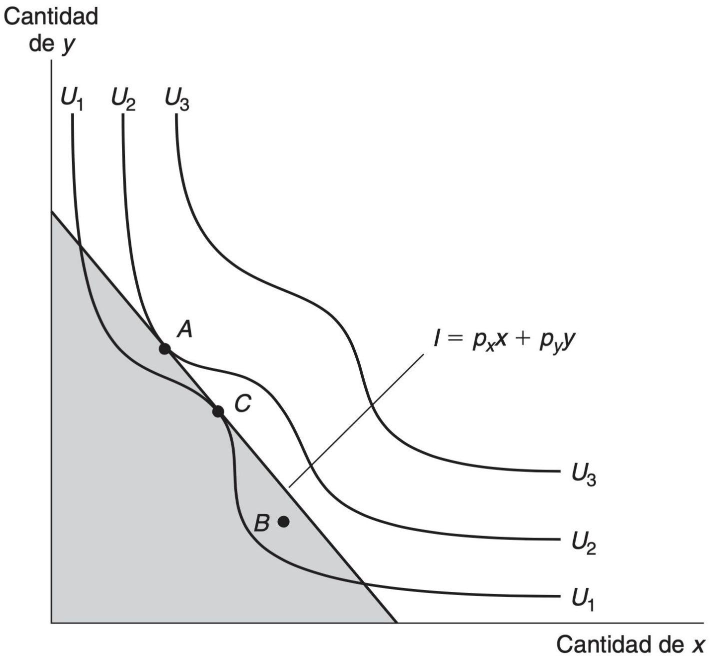
$$\frac{\partial U/\partial x_i}{\partial U/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Por tanto, las condiciones para una asignación óptima de los ingresos son:

$$TMS\ (x_i\ para\ x_j) = \frac{p_i}{p_j}.$$

Es decir, para maximizar la utilidad, el individuo debe igualar su tasa subjetiva de intercambio y la tasa de intercambio del mercado.

# Tangencia no garantiza un máximo




Si las curvas de indiferencia no cumplen el supuesto de una ***TMS**,* decreciente, entonces no todos los puntos de tangencia (puntos en los cuales ***TMS* = $p_x$ /$p_y$**) pueden ser realmente puntos de utilidad máxima.

Un punto de tangencia (***C***) es inferior a un punto sin tangencia (***B***).

Si suponemos que la ***TMS*** es decreciente, entonces la condición de tangencia será tanto necesaria como suficiente para alcanzar un máximo.

# Interpretación del multiplicador lagrangiano

De las ecuaciones de primer orden podemos obtener

$$\lambda = \frac{\partial U/\partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U/\partial x_2}{p_2} = \cdots = \frac{\partial U/\partial x_n}{p_n}$$

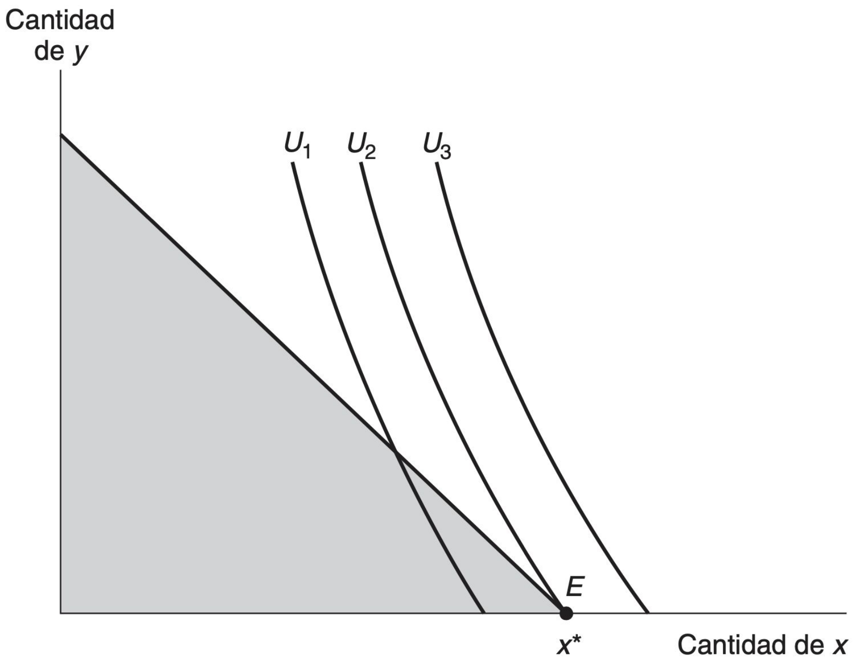
o

$$\lambda = \frac{MU_{x_1}}{p_1} = \frac{MU_{x_2}}{p_2} = \cdots = \frac{MU_{x_n}}{p_n}.$$

En el punto de maximización de la utilidad, cada bien adquirido debe ofrecer la misma utilidad marginal por unidad monetaria gastada en ese bien.

Lo que expresa la ecuación es que una unidad monetaria adicional debería producir la misma “utilidad adicional”, independientemente del bien en el cual se gaste.

# Soluciones de esquina




Con las preferencias representadas por este conjunto de curvas de indiferencia, la maximización de la utilidad se produce en el punto ***E***, donde el individuo consume nada del bien ***y***.

Por lo que se deben modificar un poco las condiciones de primer orden para obtener un máximo a efecto de dar cabida a esta posibilidad.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i \leq 0 \; (i = 1 \ldots n),$$

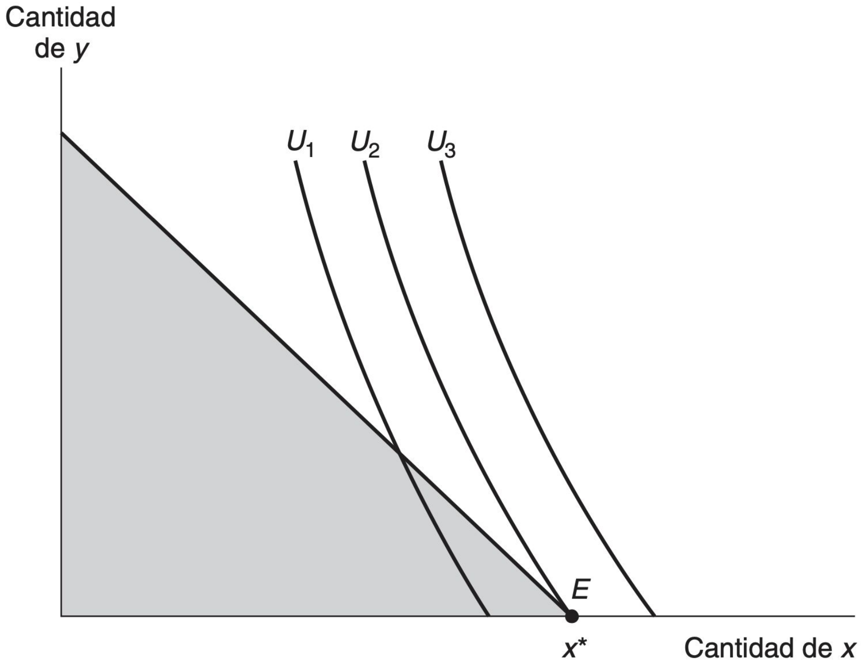
y si

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \lambda p_i < 0,$$

entonces

$$x_i = 0.$$

# Soluciones de esquina




Despejando tenemos

$$p_i > \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\lambda} = \frac{MU_{x_i}}{\lambda}.$$

Por lo que un bien cualquiera, cuyo precio sea mayor que su valor marginal para el consumidor no será adquirido ($x_i = 0$).

# Funciones Cobb-Douglas

La función de utilidad Cobb-Douglas está dada por

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta},$$

donde, por comodidad, suponemos

$$\alpha + \beta = 1.$$

Si escribimos la expresión lagrangiana

$$\mathcal{L} = x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda(I - p_x x - p_y y)$$

se obtendrán las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} - \lambda p_x = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_x x - p_y y = 0.$$

Si se toma el cociente de los dos primeros términos se obtendrá

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y}$$

es decir,

$$p_y y = \frac{\beta}{\alpha} p_x x = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x,$$

Sustituyendo en la restricción presupuestal:

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x = p_x x\left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} p_x x$$

Al despejar **x**, se obtiene

$$x^* = \frac{\alpha I}{p_x}$$

Y por lo tanto

$$y^* = \frac{\beta I}{p_y}.$$

# Cobb-Douglas

Supongamos que ***x*** tiene un precio de venta de \$1, que ***y*** tiene un precio de \$4 y que el ingreso total asciende a \$8.
Es decir,

$$p_x = 1,\ p_y = 4,\ I = 8.$$

Supongamos además que $\alpha = \beta = 0.5$
Por lo que

$$x^* = \alpha I/p_x = 0.5I/p_x = 0.5(8)/1 = 4$$
$$y^* = \beta I/p_y = 0.5I/p_y = 0.5(8)/4 = 1$$

y

$$\text{Utilidad} = x^{0.5}y^{0.5} = (4)^{0.5}(1)^{0.5} = 2.$$

También podemos calcular el multiplicador lagrangiano

$$\lambda = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}/p_x = 0.5(4)^{-0.5}(1)^{0.5}/1 = 0.25$$

Este valor implica que cada pequeña variación de los ingresos incrementará la utilidad aproximadamente en una cuarta parte de esa cantidad.

Por ejemplo, supongamos que esta persona tuviera 1% más de ingresos (\$8.08).

En tal caso, escogería ***x*** = 4.04 e ***y*** = 1.01, y la utilidad sería de 2.02.

Por tanto, un incremento de \$0.8 en los ingresos incrementa la utilidad 0.02.

# Demanda CES

Caso $\delta = \mathbf{0.5}$. En este caso, la utilidad es

$$U(x, y) =$$

y la expresión lagrangiana

$$\mathscr{L} =$$

Por lo que

$$\partial\mathscr{L}/\partial x =$$
$$\partial\mathscr{L}/\partial y =$$
$$\partial\mathscr{L}/\partial\lambda =$$

$$x^* =$$
$$y^* =$$

# Demanda CES

Caso $\delta = -\infty$. supongamos que debe consumir cada unidad de ***y*** al mismo tiempo que 4 unidades exactas de ***x***.

Por lo que la función de utilidad es:

$$U(x, y) = Min(x, 4y).$$

La persona que maximiza su utilidad sólo optará por combinaciones de los dos bienes en las que ***x=4y***.

Sustituyendo en la restricción presupuestaria tenemos

$$I = p_x x + p_y y = p_x x + p_y \frac{x}{4} = (p_x + 0.25p_y)x.$$

Por lo que

$$x^* = \frac{I}{p_x + 0.25p_y} \quad \text{e} \quad y^* = \frac{I}{4p_x + p_y}.$$