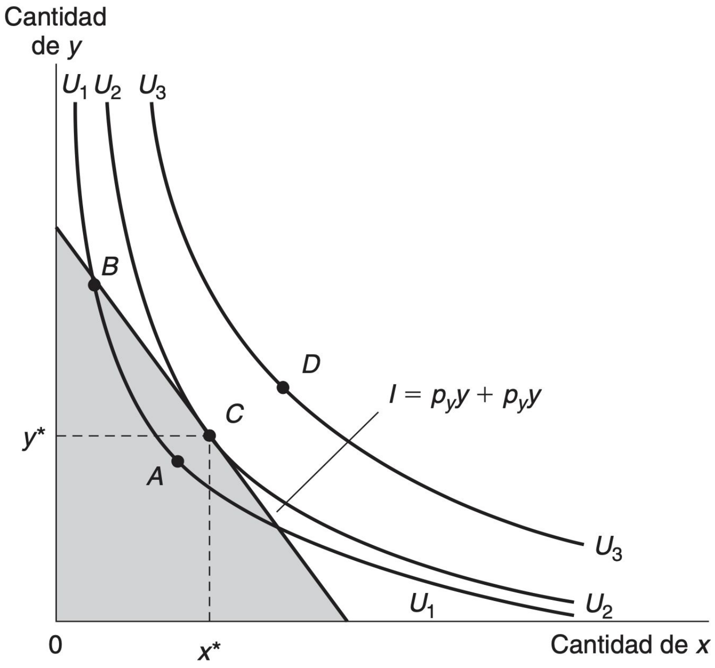
Condiciones de primer orden



El objetivo del individuo consiste en maximizar la utilidad que obtiene de estos ***n*** bienes:

$$\text{utilidad} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

sujeta a la restricción presupuestaria:

$$I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0.$$

La expresión lagrangiana es

$$\mathscr{L} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \ldots - p_nx_n).$$

Si hacemos que las derivadas parciales de **L** sean igual a cero obtendremos *n* + 1 ecuaciones que representan las condiciones necesarias para alcanzar un máximo interior:

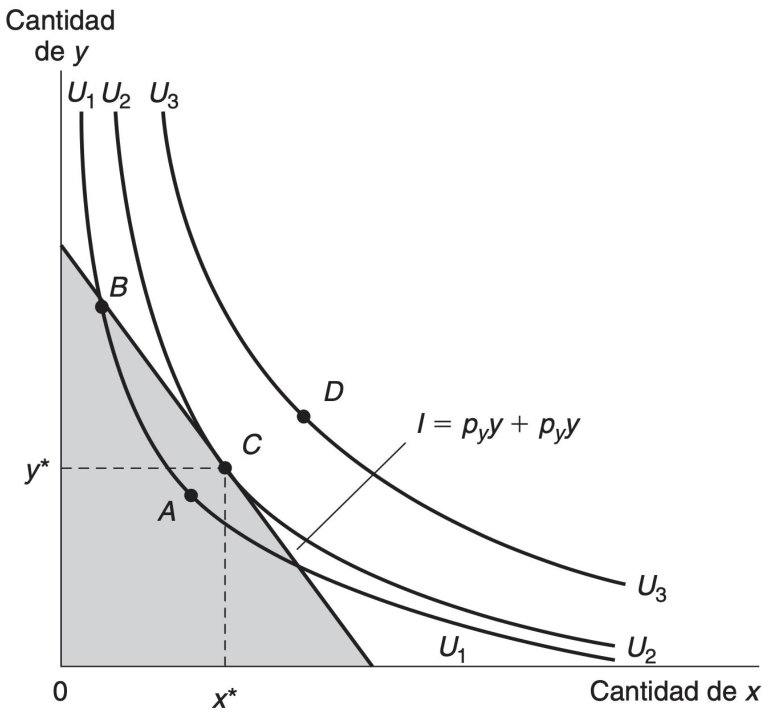
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} = \frac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_x = 0.$$

Condiciones de primer orden



Para cualesquiera dos bienes, $\boldsymbol{x_i}$ y $\boldsymbol{x_j}$, tenemos

$$\frac{\partial U/\partial x_i}{\partial U/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Por tanto, las condiciones para una asignación óptima de los ingresos son:

$$TMS\ (x_i\ para\ x_j) = \frac{p_i}{p_j}.$$

Es decir, para maximizar la utilidad, el individuo debe igualar su tasa subjetiva de intercambio y la tasa de intercambio del mercado.

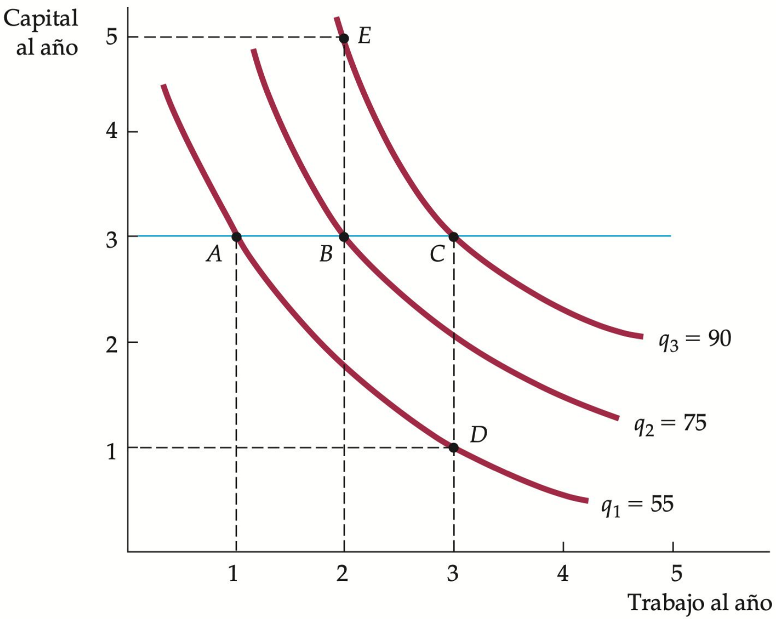
Optimización de la producción

Las empresas combinan los factores, como el capital y el trabajo, para producir bienes y servicios de una manera que minimice los costes de producción y maximice la producción.

Para ello introduciremos los conceptos de curvas isocuantas y curvas de isocostos.

Veremos muchas analogías con términos de la teoría del consumidor.

Funciones de producción



La **función de producción** de la empresa en el caso de un bien determina '

$$q = f(k, l),$$

muestra la cantidad máxima del bien que ésta puede producir utilizando distintas combinaciones de capital (k) y de trabajo (l).

Las **isocuantas** de producción muestran las distintas combinaciones de factores necesarias para que la empresa obtenga un determinado nivel de producción.

- Tienen pendiente negativa
- Las isocuantas no se cortan
- Más alejadas del origen, mayor es la producción

Producción marginal

El **producto marginal** de un factor productivo es el producto adicional que podemos obtener empleando una unidad más de ese factor productivo.

En términos matemáticos,

$$\text{producto marginal del capital} = PMg_k = \frac{\partial q}{\partial k} = f_k$$

$$\text{producto marginal del trabajo} = PMg_l = \frac{\partial q}{\partial l} = f_l.$$

Las definiciones matemáticas del producto marginal utilizan derivadas parciales, reflejando así correctamente el hecho de que la utilización de todos los demás factores de producción se mantiene constante mientras varía el factor de producción que nos interesa.

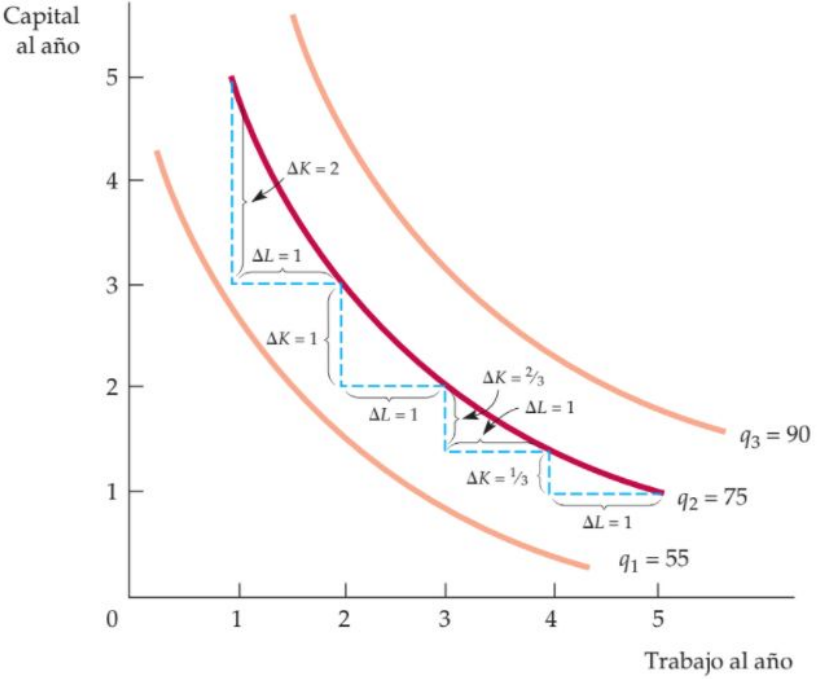
Por ejemplo,

si 50 trabajadores en una finca son capaces de producir 100 toneladas de trigo por año,

y 51 trabajadores, con la misma cantidad de tierra y los mismos equipos, pueden producir 102 toneladas,

el producto marginal del trabajador número 51 será de 2 toneladas por año.

Tasa técnica de sustitución



La **tasa técnica de sustitución** o **tasa marginal de sustitución técnica** de capital por trabajo es la cantidad en que puede reducirse el capital cuando se utiliza una unidad más de trabajo,

$$TTS\ (l \text{ por } k) = \left.\frac{-dk}{dl}\right|_{q = q_0}.$$

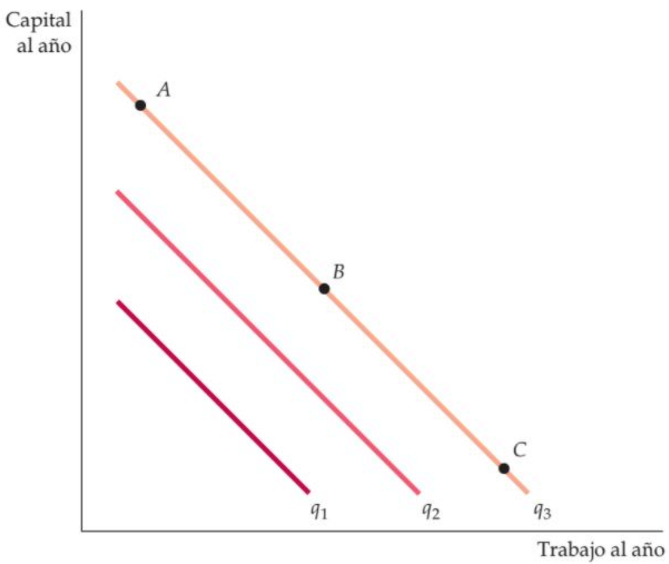
De la diferencial total de trabajo

$$dq = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot dl + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot dk = PMg_l \cdot dl + PMg_k \cdot dk,$$

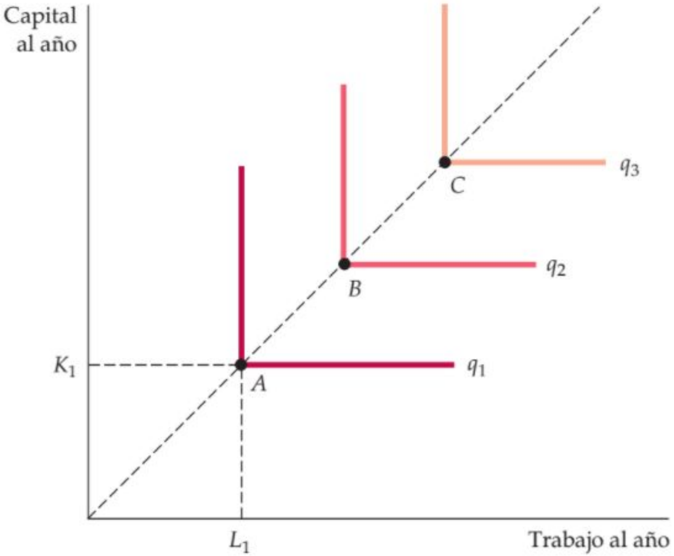
obtenemos

$$-\left.\frac{dk}{dl}\right|_{q = q_0} = TTS\ (l \text{ por } k) = \frac{PMg_l}{PMg_k}.$$

Funciones de producción

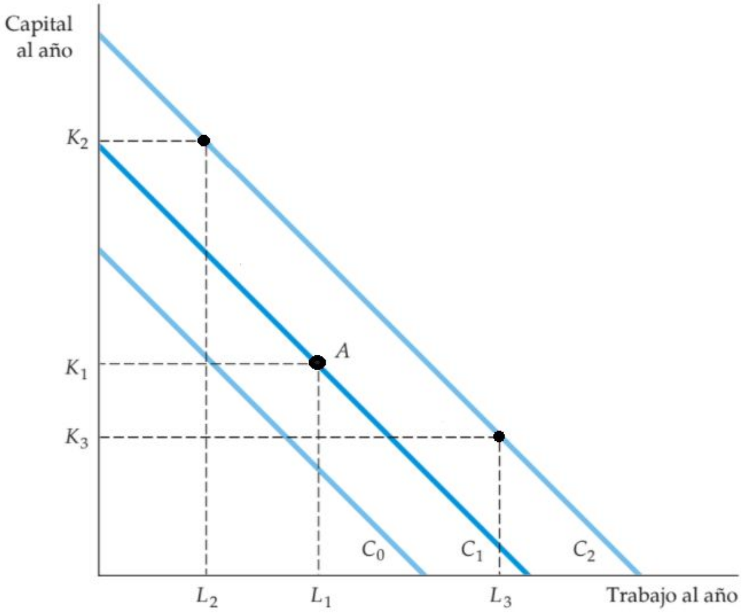


Factores sustitutos perfectos



Factores complementarios perfectos

Funciones de costo



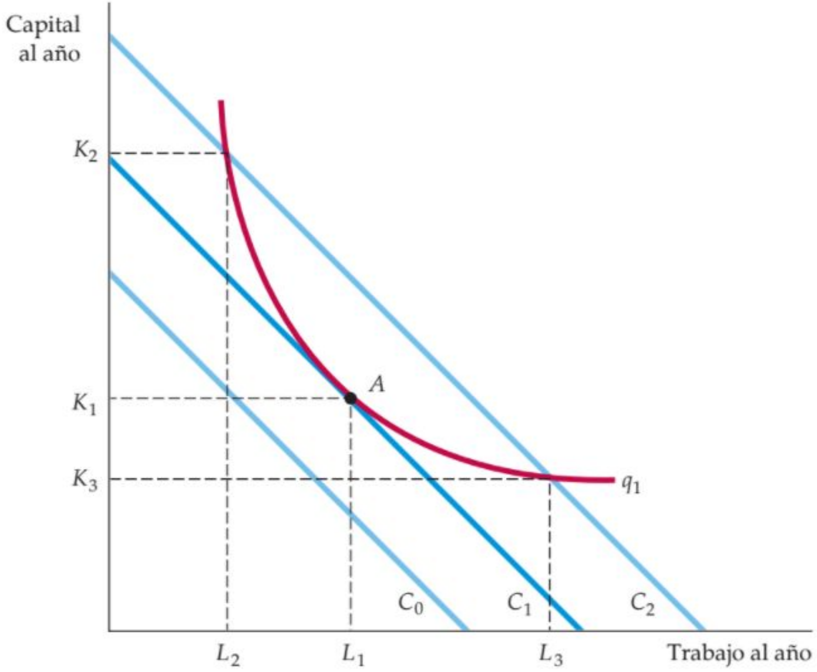
Suponga que el costo de una empresa está dado por

$$\text{costo total} = C = wl + vk,$$

donde **l** y **k** representan la utilización de los factores trabajo y capital, respectivamente. Además **w** denota el salario de los trabajadores y **v** es el valor del alquiler de las máquinas.

Las curvas de **isocostos** muestran las combinaciones de capital y trabajo que generan un mismo nivel de costo

Dos problemas duales



Tenemos dos problemas duales

Minimizar el costo de producción sujeto a un nivel de producción q_0. En este caso el lagrangiano es

$$\mathscr{L} = wl + vk + \lambda[q_0 - f(k, l)]$$

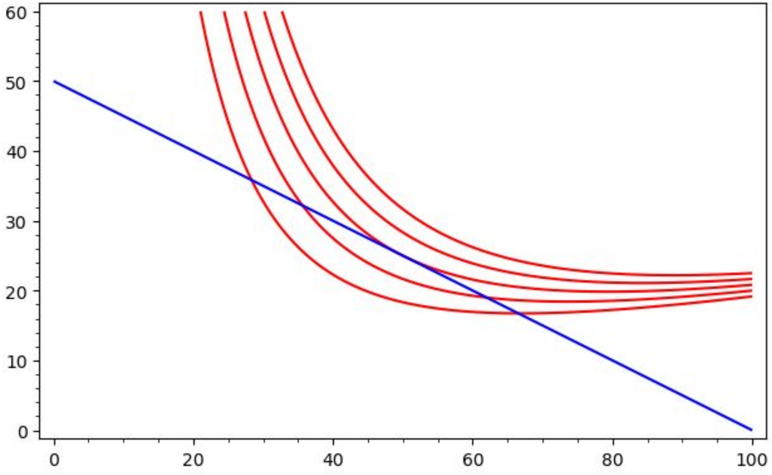
Maximizar la producción sujeto un costo C_0. En este caso el lagrangiano es

$$\mathscr{L} = f(k, l) + \lambda[C_0 - wl - vk]$$

En ambos casos tenemos la condición de equilibrio

$$\frac{w}{v} = \frac{\partial f / \partial l}{\partial f / \partial k} = TTS(l \text{ para } k).$$

Ejemplo 1: Maximización de la producción dado un costo de producción



Enlace a figura

Suponga que la función de producción de un bien está dada por $f(l,k) = -l^3 + 6kl^2$ y que la empresa quiere gastar $C_0 = \$1000$. También sabemos que el salario es $w = \$10$ y el costo del alquiler de maquinaria $v = \$20$. ¿Cuál es la combinación de los factores de producción que maximiza la producción?

La condición de equilibrio nos dice

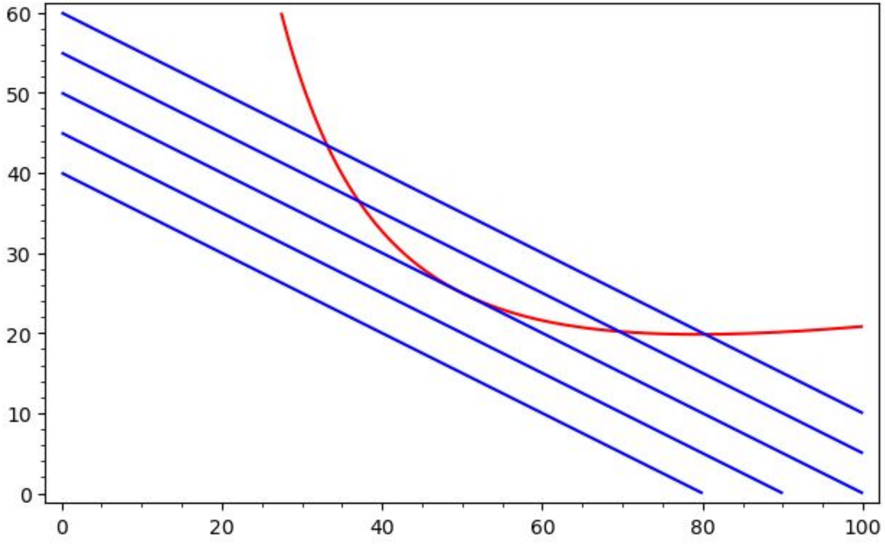
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial l}}{\frac{\partial f}{\partial w}} = \frac{w}{v} \text{ por lo que } \frac{-3l^2 + 12kl}{6l^2} = \frac{10}{20}.$$

Despejando obtenemos $l = 2k$.
Sustituyendo en la restricción de costo obtenemos que

$$1000 = 10l + 20k = 10(2k) + 20k,$$

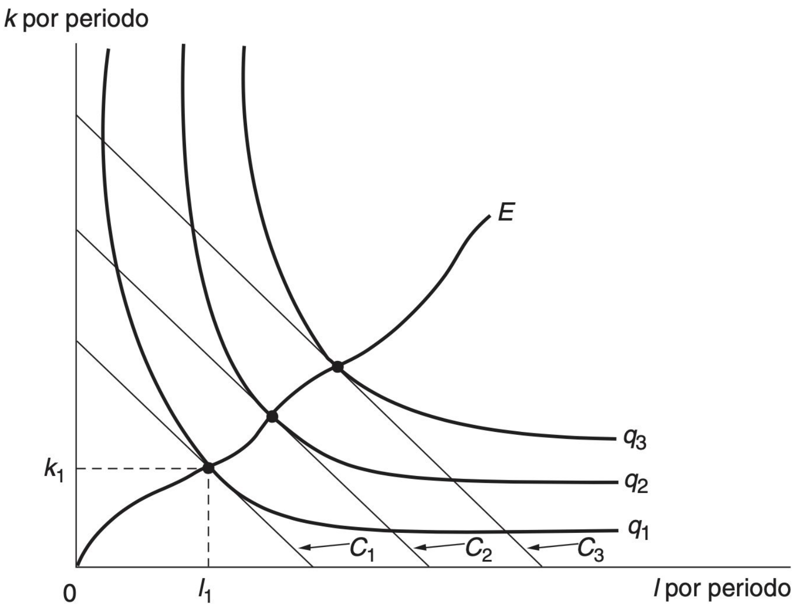
por lo que $k = 25$ y $l = 50$.
Lo cuál nos da una producción de $q = -(50)^3 + 6(25)(50)^2 = 250000$ unidades.

Ejemplo 2: Minimización del costo sujeto a un nivel de producción



Suponga que la función de producción de un bien está dada por **$f(l,k)=-l^3+6kl^2$** y que la empresa quiere producir **250000** unidades. También sabemos que el salario es **w=$10** y el costo del alquiler de maquinaria **v=$20**. ¿Cuál es la combinación de los factores de producción que minimiza el costo de la producción?

Senda de expansión de la empresa



Una empresa puede seguir el proceso de minimización del costo en cada nivel de producción.

Para cada nivel de producción **q**, la empresa encuentra la combinación de factores que minimiza el costo de producción

La curva donde se ubican estos puntos de tangencia se llama la **senda de expansión**, de la empresa, porque muestra cómo aumenta la utilización de los factores a medida que se expande la producción, al tiempo que los precios de los factores se mantienen constantes.