

# Optimización de costos de acuñación de moneda

---

Carlos A. Alfaro

Banco de México



# Contenido

- Programación Lineal
- Descripción del problema
- Capacidades y costos de producción de moneda
- Modelo de optimización
- Simulación
- Beneficios por la optimización
- Conclusiones

# Programación lineal

Función objetivo  $\longrightarrow$

Restricciones

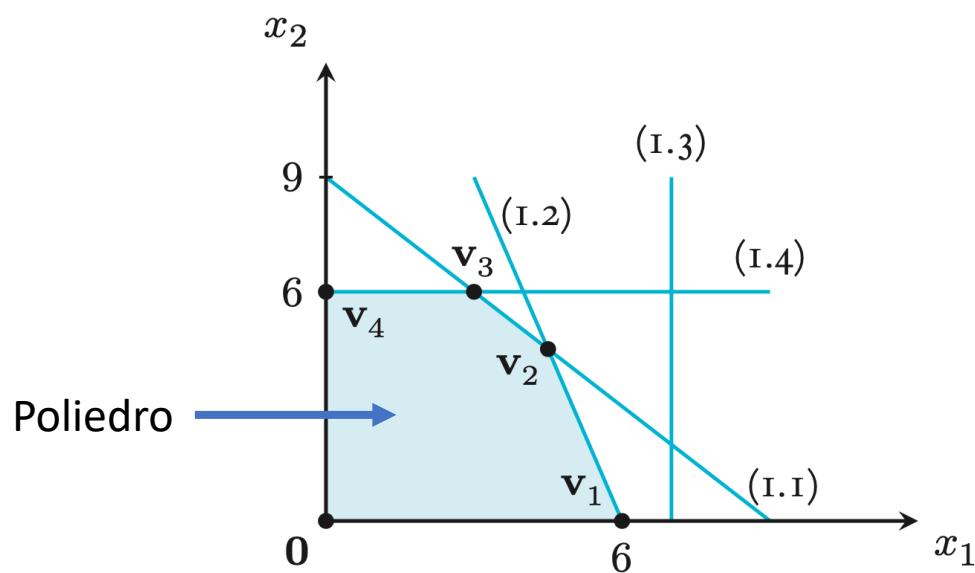
$$\left[ \begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 9 \quad (\text{I.1}) \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18 \quad (\text{I.2}) \\ & x_1 \leq 7 \quad (\text{I.3}) \\ & x_2 \leq 6 \quad (\text{I.4}) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right]$$

# Programación lineal

Función objetivo

$$\begin{aligned} & \max \quad 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 9 \quad (\text{I.1}) \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18 \quad (\text{I.2}) \\ & x_1 \leq 7 \quad (\text{I.3}) \\ & x_2 \leq 6 \quad (\text{I.4}) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Restricciones



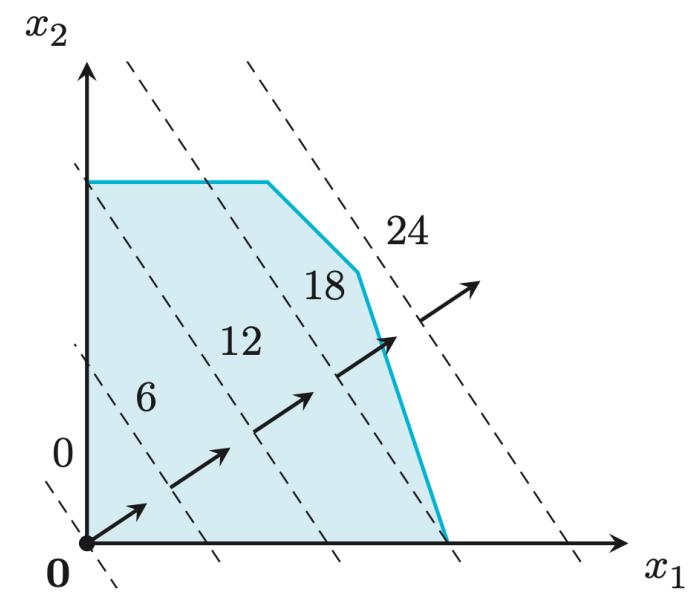
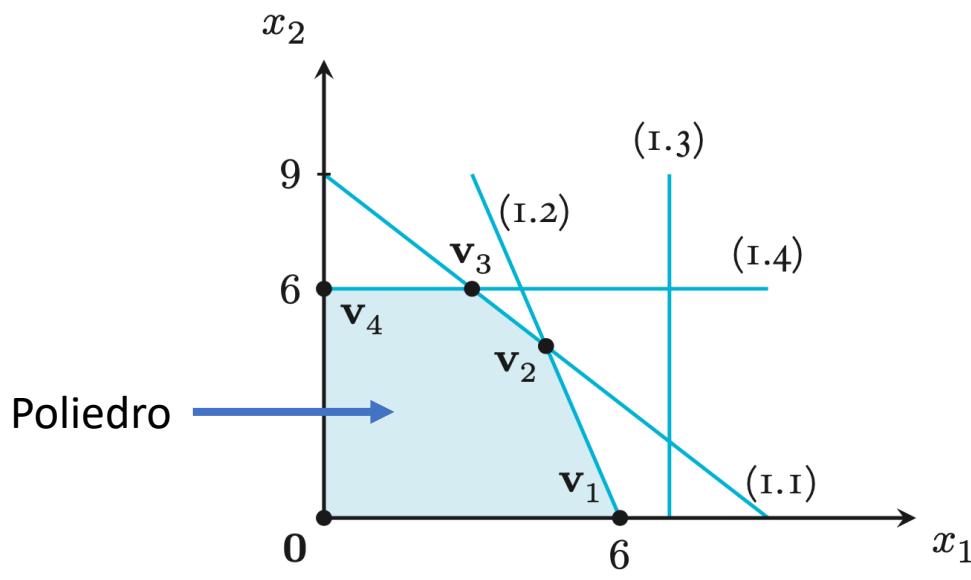
# Programación lineal

Función objetivo

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

Restricciones

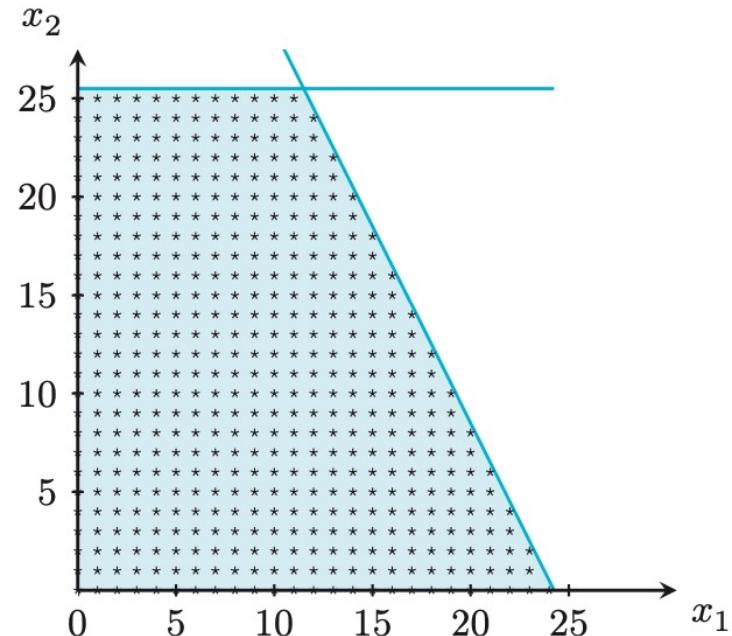
$$\begin{aligned} \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 9 & (\text{I.1}) \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18 & (\text{I.2}) \\ & x_1 \leq 7 & (\text{I.3}) \\ & x_2 \leq 6 & (\text{I.4}) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



# Programación lineal entera

- En la programación lineal entera se pide que las variables sean enteras
- La PLE está en NP-duros
- Las técnicas son más complejas (Heurísticas, Branch&Bound, Deep Learning)

$$\begin{aligned} \text{max } & 1000x_1 + 700x_2 \\ \text{s.t. } & 100x_1 + 50x_2 \leq 2425 \\ & 20x_2 \leq 510 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad \text{enteros} \end{aligned}$$



## Descripción del problema

- El Banco de México (BM) tiene entre sus finalidades proveer de **efectivo** a la economía del país.
- Específicamente para la moneda metálica, el BM es el responsable de planear la **producción y distribución** de moneda corriente que acuña la Casa de Moneda.
- Mediante una **orden de acuñación**,  $f_t$ , el BM detalla el número de piezas a fabricar en cada trimestre.
- El proceso de fabricación de moneda consiste en 3 procesos: **Corte, Horno y Acuñación**.
- El BM paga a la CMM una renta anual que contempla el uso del nivel **básico** de los tres procesos.
- Si el BM requiriera mayor capacidad en alguno de estos procesos, el BM puede contratar terceros turnos para producir la orden de acuñación.

# Descripción del problema

Minimizar el costo de los terceros turnos

Al satisfacer las capacidades de producción de la CMM

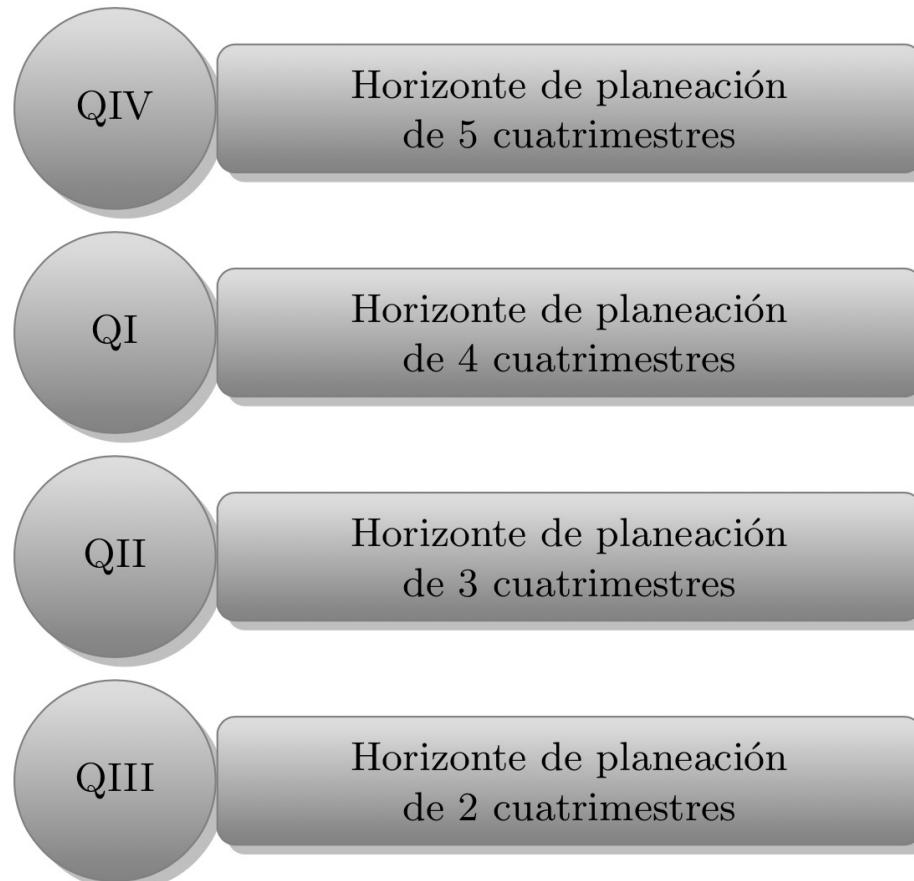
Adicionalmente:

- Satisfacer las demandas trimestrales de moneda,
- No sobre pasar la capacidad de las bóvedas,
- Mantener al menos el inventario mínimo para operar.

Nuestro modelo no contempla el costo del metal, pues la CMM es quién gestiona la compra y el almacenamiento del metal.

# Descripción del problema

## Evolución del horizonte de planeación dependiendo del cuatrimestre



# Capacidades trimestrales de producción de la CMM

- El primer proceso en la línea de producción es el **corte**. Este consiste en obtener las partes que conforman las monedas: **núcleos y arillos**. Para medir el consumo de este recurso utilizamos el **número,  $D(\mathbf{f}_t)$ , de días** necesarios para producir la orden de acuñación.

$$\mathcal{C}(\mathbf{f}_t) = \begin{cases} 0, & \text{if } D(\mathbf{f}_t) \leq x_0, \\ C_1, & \text{if } x_0 < D(\mathbf{f}_t) \leq x_1, \\ \vdots \\ C_{nc} & \text{if } x_{nc-1} < D(\mathbf{f}_t) \leq x_{nc}, \end{cases}$$

# Capacidades trimestrales de producción de la CMM

- El proceso de **recocido en horno** es utilizado para controlar la dureza de las partes de la moneda que contienen una aleación basada en cobre. El uso trimestral del proceso de recocido se determina por la **suma**  $W(\mathbf{f}_t)$  **de los pesos** de las partes hechas de esas aleaciones que se fabricaron en un trimestre.

$$\mathcal{H}(\mathbf{f}_t) = \begin{cases} 0, & \text{if } W(\mathbf{f}_t) \leq y_0 \text{ Ton.} \\ H, & \text{if } y_0 < W(\mathbf{f}_t) \leq y_1 \text{ Ton.,} \end{cases}$$

# Capacidades trimestrales de producción de la CMM

- El proceso de **acuñación** es donde se imprimen y sellan las caras de la moneda. El uso de este recurso se mide directamente por el **número de piezas** que se acuñan en un trimestre y es independiente de la denominación.

$$\mathcal{A}(\mathbf{f}_t) = \begin{cases} 0, & \text{if } N(\mathbf{f}_t) \leq z_0 \\ A_1, & \text{if } z_0 < N(\mathbf{f}_t) \leq z_1 \\ \vdots \\ A_{na}, & \text{if } z_{na-1} < N(\mathbf{f}_t) \leq z_{na} \end{cases}$$

# Modelo de optimización

---

## Índices

---

$i$	$i$ -ésimo nivel de tercer turno de corte
$j$	$j$ -ésimo nivel de tercer turno de acuación
$t$	cuatrimestre $t \in \{1, \dots, T\}$
$d$	denominación

---

## Parámetros

---

$T$	número de cuatrimestres en el horizonte de planeación
$C_i$	costo del $i$ -ésimo nivel de terceros turnos de corte
$A_j$	costo del $j$ -ésimo nivel de terceros turnos de acuñación
$H$	costo del tercer turno de horno
$P_t^d$	pronóstico de la demanda de moneda de la denominación $d$ en el cuatrimestre $t$
$IMAX$	capacidad máxima de bóveda
$IMIN^d$	inventario mínimo de la denominación $d$
$x_i$	cota superior para el número de días laborales requeridos por el $i$ -ésimo nivel de corte
$y_1$	cota superior para el peso requerido en el tercer turno de horno
$z_j$	cota superior para el número de monedas acuadas por el $j$ -ésimo nivel acuñación

---

## Variables

---

$c_t^i$	variable binaria que asigna el $i$ -ésimo nivel de los terceros turnos de corte
$h_t$	variable binaria que representa si se está usando el tercer turno de horno
$a_t^j$	variable binaria que asigna el $j$ -ésimo nivel de los terceros turnos de acuñación
$f_t^d$	variable que representa el número de monedas acuñadas de la denominación $d$ en el cuatrimestre $t$
$E_t^d$	variable que representa el inventario de moneda de la denominación $d$ en el cuatrimestre $t$
$K$	variable que maximiza el uso de los niveles de producción

---

$$h_t = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el recocido en horno en tercer turno durante el trimestre } t \\ 0, & \text{si se utiliza el recocido en horno en producción base durante el trimestre } t \end{cases}$$

$$a_t^j = \begin{cases} 1, & \text{si en el trimestre } t \text{ se utiliza el nivel de acuñación } j \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$c_t^i = \begin{cases} 1, & \text{si en el trimestre } t \text{ se utiliza el nivel de corte } i \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Minimizar:  $\sum_t \sum_i C_i c_t^i + \sum_t H h_t + \sum_t \sum_j A_j a_t^j - K$

- Sujeto a:

$$(1) \quad \forall t, \quad W(\mathbf{f}_t) \leq y_0 + (y_1 - y_0)h_t$$

$$(2) \quad \forall t, \quad \sum_d f_t^d \leq z_0 + \sum_j (z_j - z_0) a_t^j$$

$$(3) \quad \forall t, \quad \sum_j a_t^j \leq 1$$

$$(4) \quad \forall t, \quad D(\mathbf{f}_t) \leq x_0 + \sum_i (x_i - x_0) c_t^i$$

$$(5) \quad \forall t, \quad \sum_i c_t^i \leq 1$$

$$(6) \quad \forall t, d, \quad E_t^d = E_{t-1}^d + f_t^d - P_t^d$$

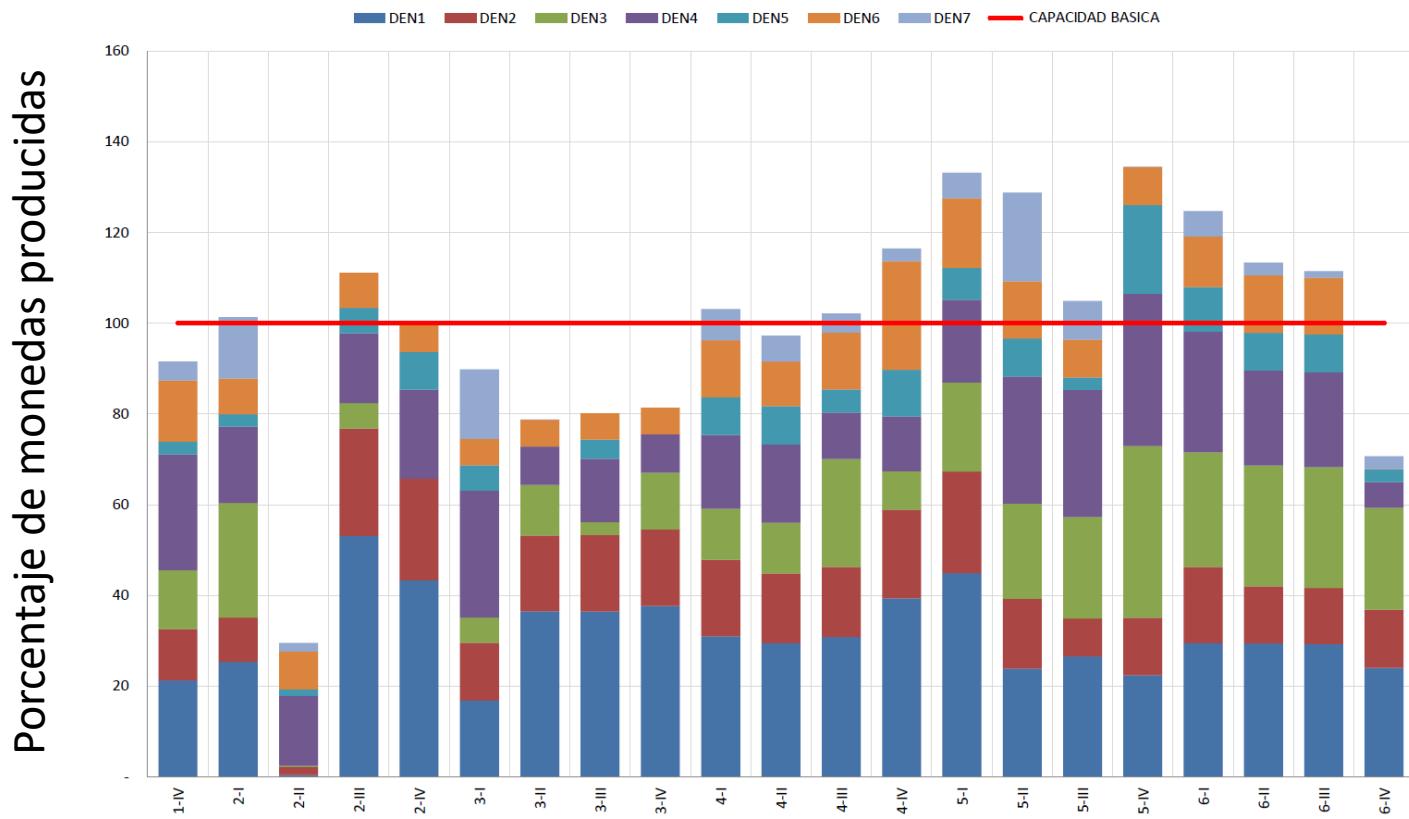
$$(7) \quad \forall d, \quad E_T^d \geq IMIN^d K$$

$$(8) \quad \forall t, \quad \sum_d E_t^d \leq IMAX$$

$$(9) \quad \forall t, d, \quad E_t^d \geq IMIN_t^d$$

# Datos históricos

- Datos reales de 21 cuatrimestres consecutivos.
- En el cuatrimestre 2-II hubo una limitación en la producción debido a un problema de suministro de gas.
- Mantendremos esa restricción en la simulación.



## Heurísticas adicionales

- Si la solución del modelo utiliza menos de la capacidad base de alguna de los procesos, entonces trataremos que el modelo use completamente la capacidad básica siempre y cuando el costo de los terceros turnos no aumente.

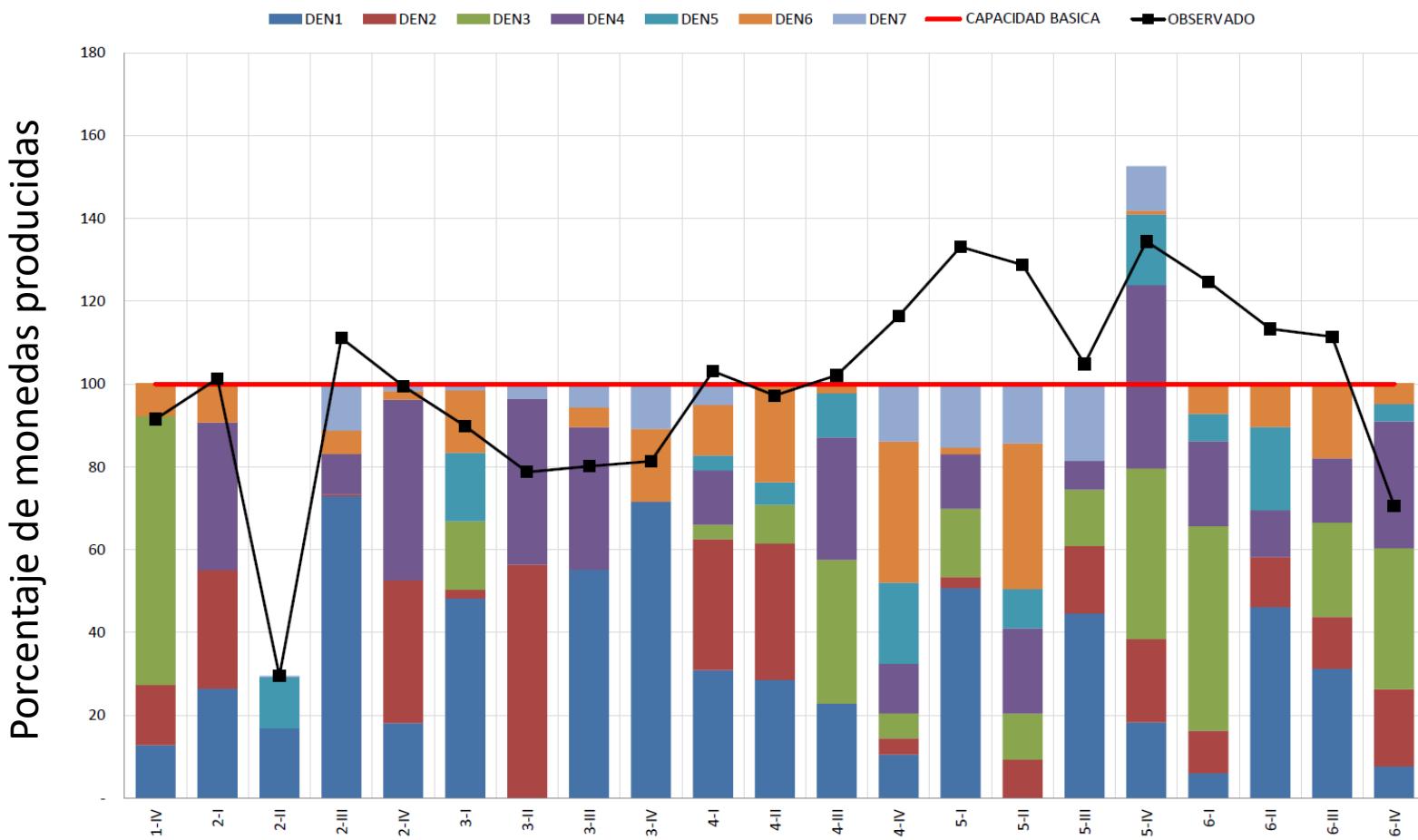
$$(\text{acuñación}) \quad \sum_d f_1^d = z_0 \quad \text{o} \quad (\text{corte}) \quad D(\mathbf{f}_1) = x_0.$$

- Si la solución del modelo utiliza un turno extra de alguno de los procesos, entonces intentaremos postergarlo mientras que esto no implique un aumento en los costos de los terceros turnos.

$$(\text{acuñación}) \quad \sum_j a_1^j = 0, \quad (\text{corte}) \quad \sum_i c_1^i = 0, \quad \text{u} \quad (\text{horno}) \quad h_1 = 0.$$

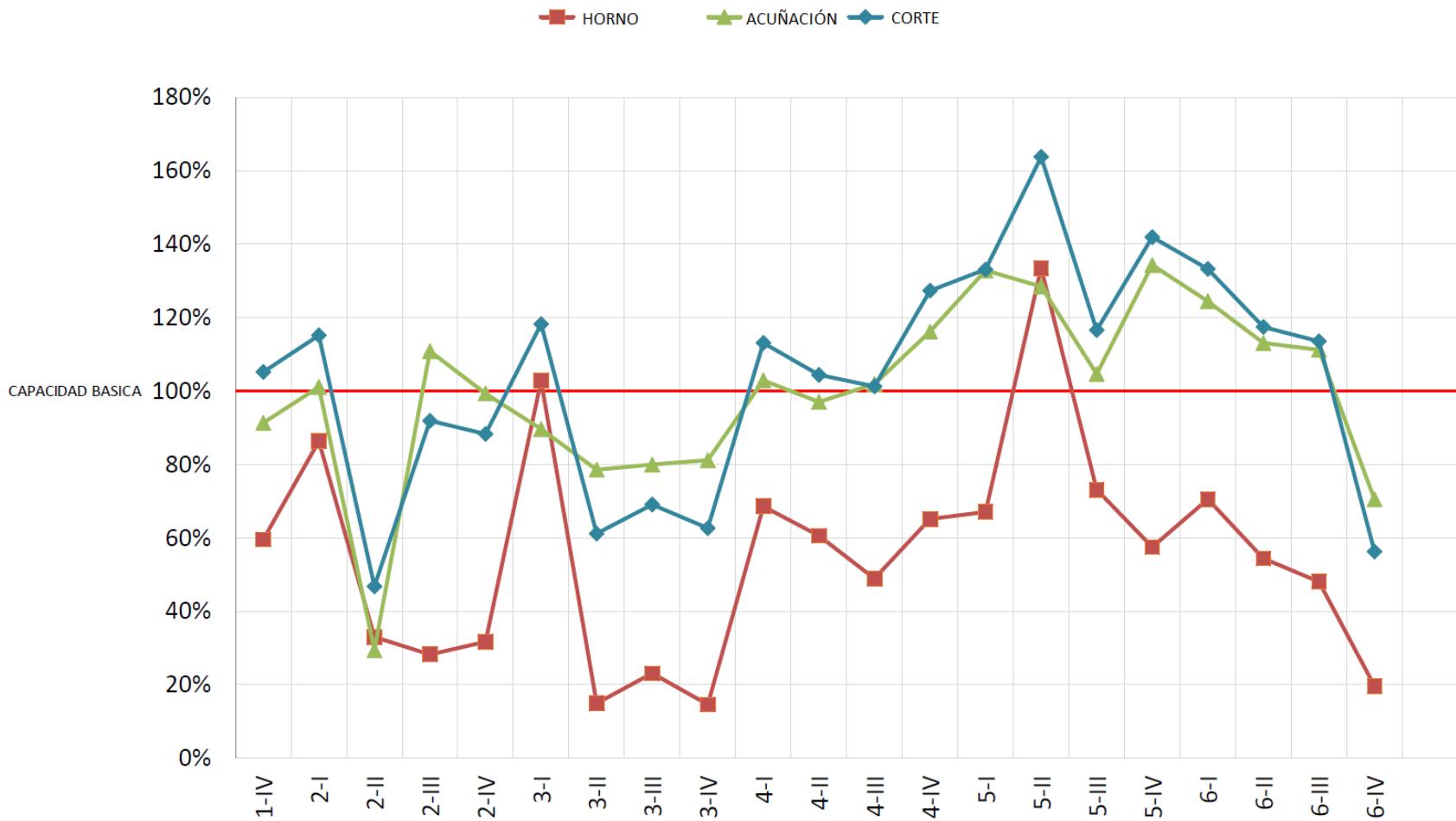
# Simulación

- La simulación se implementó en C++,
- Para resolver el modelo usamos el método de “Ramificación-y-Poda” implementado en la librería GLPK.

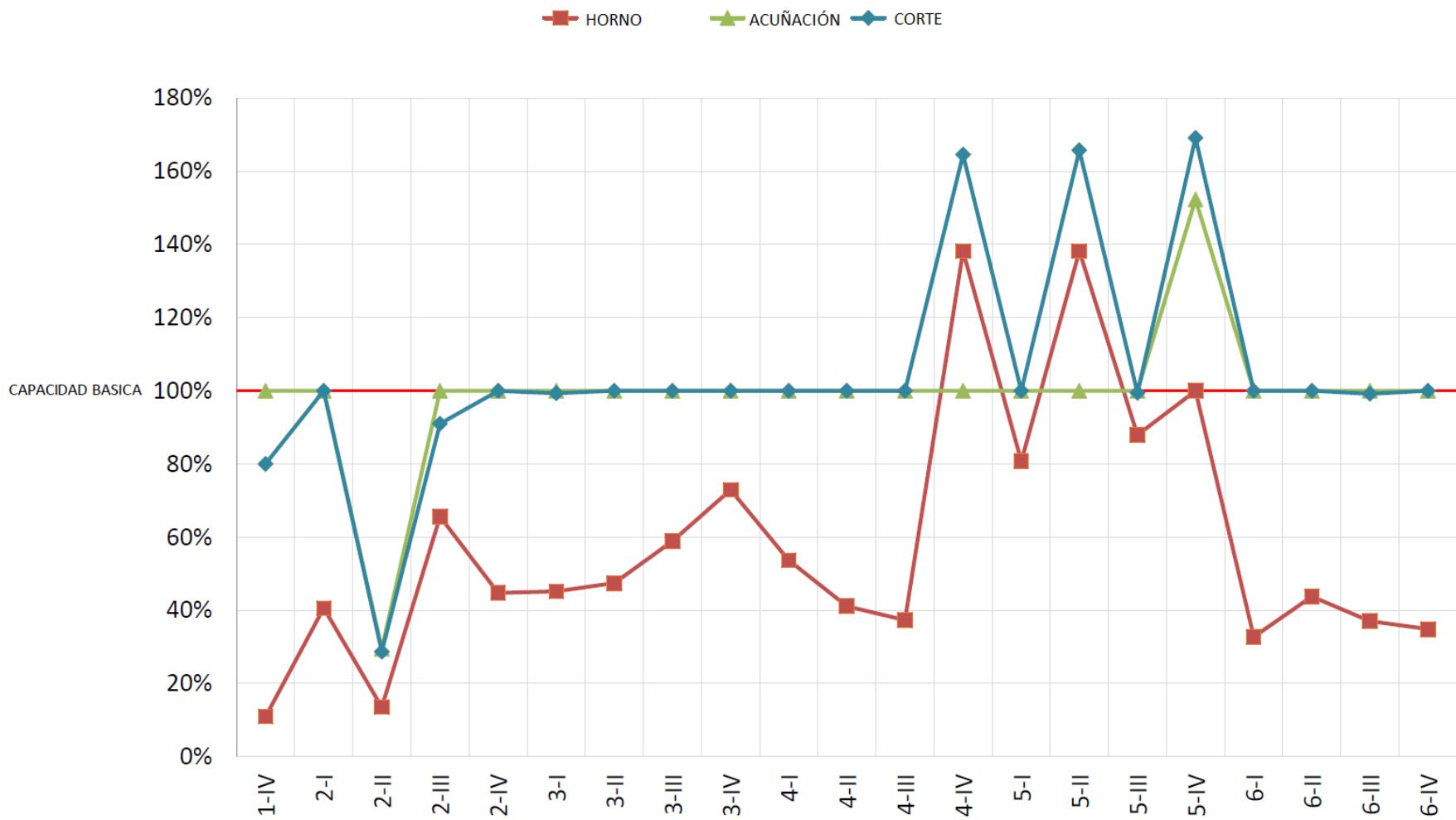


# Beneficios por la optimización de las órdenes de producción

## Porcentaje del uso de los procesos (histórico)

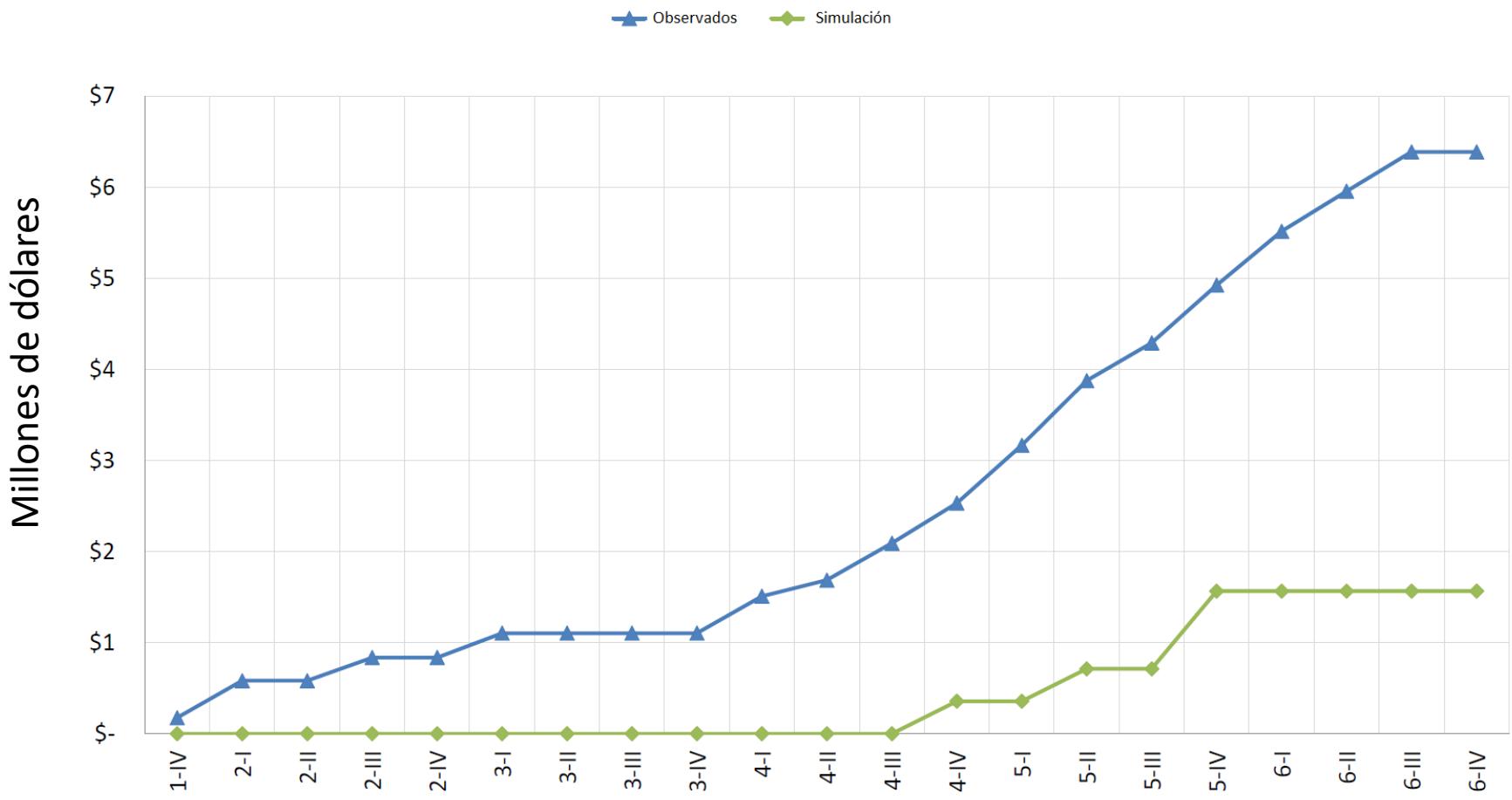


## Porcentaje del uso de los procesos (simulación)



## Comparación de costos acumulados

El costo de los terceros turnos se reduce al 24%



# Redes complejas en la economía

## Banco de México

Carlos A. Alfaro

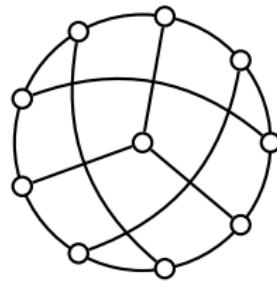
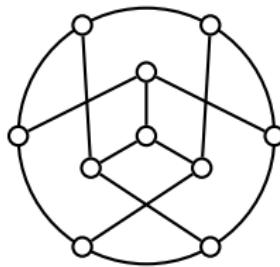
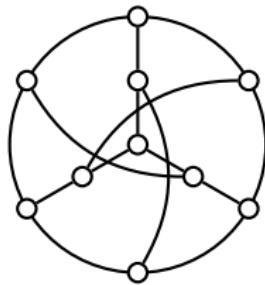
- ① Gráficas
- ② Ejemplos de redes
- ③ Modelo de segregación de Shelling
- ④ Pilas de arena
- ⑤ Juego del dolar

# Gráficas

## Definición

Una **gráfica**<sup>a</sup>  $G$  es una pareja  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto no vacío y  $E$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V$ .

<sup>a</sup>Solomon Lefschetz y Victor Neumann



- J.A. Bondy y U.S.R. Murty. **Graph theory.** Graduate Texts in Mathematics, 244. Springer, New York, 2008.
- M.E.J. Newman. **Networks.** An introduction. Second edition. Oxford University Press, Oxford, 2018.

# Seis grados de separación

Es común la expresión: "Que pequeño es el mundo."

En 1976, Stanley Millgram realizó<sup>1</sup> un experimento peculiar. Millgram mandó cartas a personas en Kansas y Nebraska, indicando que debían reenviar la carta a conocidos tal que el destinatario final debía ser un corredor de bolsa en Boston.

Millgram encontró que en promedio se necesitaron 5.2 intermediarios para llegar al destinatario.



---

<sup>1</sup>S. Millgram. **The small world problem.** Psychology today 2 (1967) 60–67.

# Cuatro grados de separación

En 2012, se encontró<sup>2</sup> que en la gráfica formada por los usuarios de Facebook se requería en promedio 3.74 usuarios para conectar cualesquiera dos usuarios en la componente conexa más grande.



---

<sup>2</sup>L. Backstrom, P. Boldi, M. Rosa, J. Ugander & S. Vigna. **Four degrees of separation.** In Proceedings of the 4th Annual ACM Web Science Conference (WebSci '12). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 33–42. <https://doi.org/10.1145/2380718.2380723>

# Red de economistas

En 2006, se analizó<sup>3</sup> la gráfica formada por los autores de economía entre 1970 y 1990 incluidos en EconLit.

	1970s	1980s	1990s
Total authors	33,770	48,608	81,217
Degree:			
Average	.894	1.244	1.672
Standard deviation	1.358	1.765	2.303
Giant component:			
Size	5,253	13,808	33,027
Percentage	15.6%	28.4%	40.7%
Second-largest component	122	30	30
Isolated authors:			
Number	16,735	19,315	24,578
Percentage	49.6%	39.7%	30.3%
Clustering coefficient	.193	.182	.157
Distance in giant component:			
Average	12.86	11.07	9.47
Standard deviation	4.03	3.03	2.23

<sup>3</sup>S. Goyal, M.J. van der Leij & J.L. Moraga-Gonzalez. **Economics: an emerging small world**. Journal of Political Economy, 114 (2006), 403-412.  
<https://doi.org/10.1086/500990>

# Modelo de segregación de Shelling

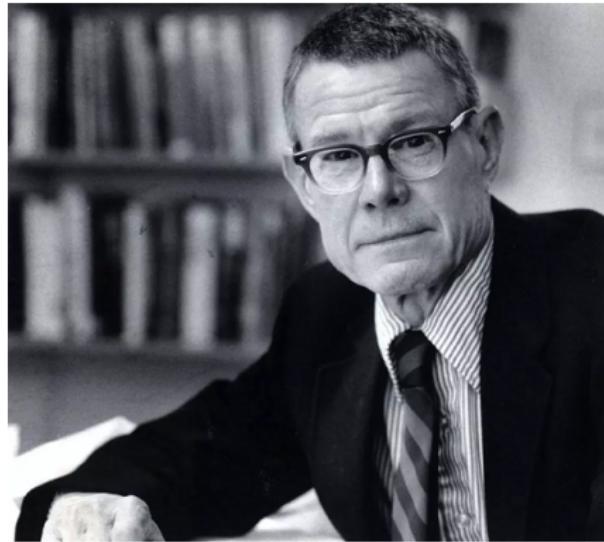
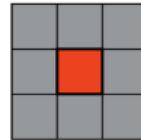
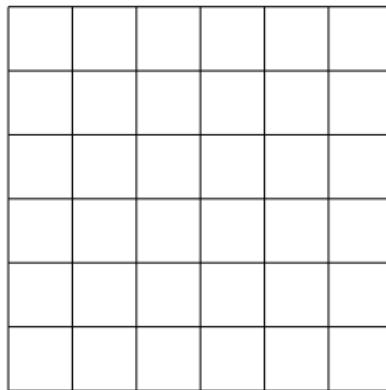


Figura: Thomas C. Schelling (1921-2016), premio Nobel de Economía 2005.

# Modelo de segregación de Shelling

El modelo se desarrolla en la rejilla  $n \times n$ . Cada agente ocupa un celda y tiene a lo más 8 vecinos (vecindad de Moore).



Thomas C. Schelling. **Dynamic models of segregation**. The Journal of Mathematical Sociology. 1 (1971) 143–186.  
doi:10.1080/0022250x.1971.9989794

<http://www.netlogoweb.org/launch#http://www.netlogoweb.org/assets/modelslib/Sample%20Models/Social%20Science/Segregation.nlogo>

# Modelo de segregación de Shelling

- Los agentes se dividen en 2 grupos (rojos y azules).
- Cada agente desea que una fracción  $\lambda$  de vecinos sean de su mismo grupo.
- En cada iteración se busca que cada agente satisfaga que  $\lambda$  vecinos sean de su mismo grupo.
- En caso contrario, se reubica el agente en una nueva posición donde se satisfaga la condición.
- Las iteraciones continúan hasta que cada agente esté satisfecho.

Thomas C. Schelling. **Dynamic models of segregation**. The Journal of Mathematical Sociology. 1 (1971) 143–186.  
doi:10.1080/0022250x.1971.9989794

<http://www.netlogoweb.org/launch#http://www.netlogoweb.org/assets/modelslib/Sample%20Models/Social%20Science/Segregation.nlogo>

# Modelo de segregación de Shelling

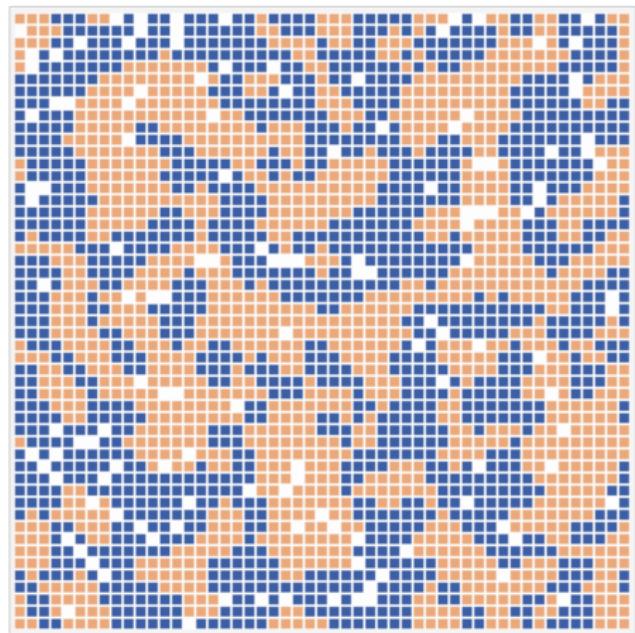
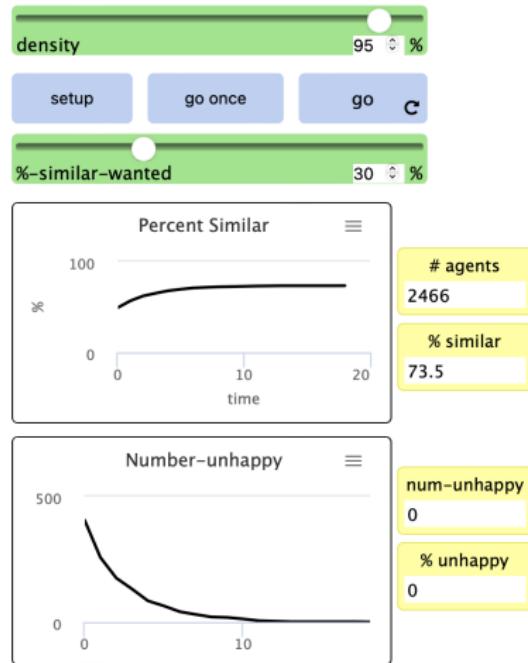
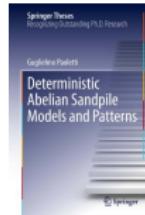
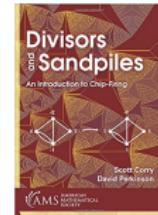
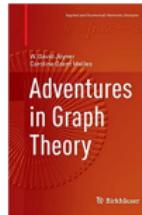
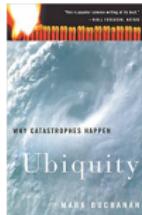
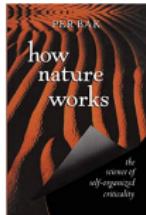


Figura: Segregación formada con  $\lambda = 30\%$

# Pilas de arena

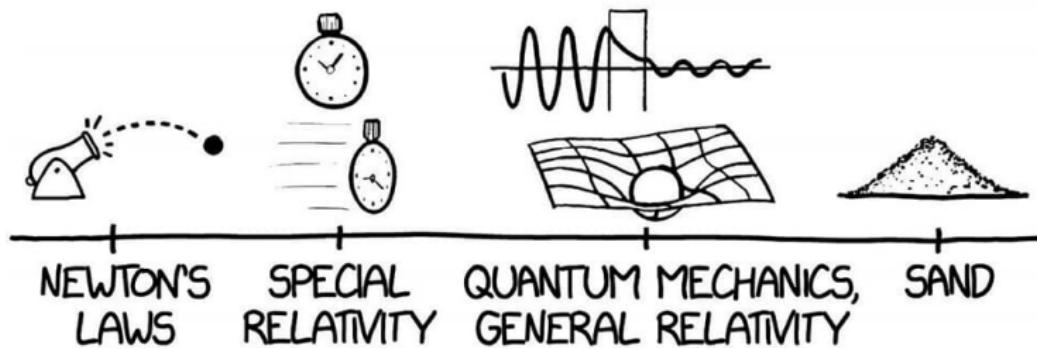
Las pilas de arena tienen sus orígenes en física estadística en 1987. Fue el primer modelo de un sistema dinámico con **criticalidad autorganizada**, la cual intenta explicar la ocurrencia de leyes potenciales en diversos fenómenos naturales, desde geofísica y economía hasta neurociencia.

En matemáticas, se ha estudiado desde puntos de vista muy distintos como la geometría aritmética, geometría algebraica, sistemas dinámicos, teoría de gráficas, cadenas de Markov, entre otros.



## AREAS OF PHYSICS BY DIFFICULTY

HARDER →

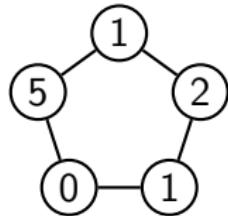


Fuente: xkcd

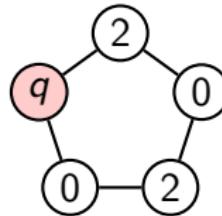
La dinámica de las pilas de arena se desarrolla en una gráfica de la siguiente manera.

Dada una gráfica  $G$ , una **configuración** es un vector  $c$  que asigna a cada vértice un número (no negativo) de granos de arena.

En algunas ocasiones, habrá un vértice especial llamado **sumidero** con la finalidad de colectar los granos que “salen del sistema”. Al cual denotaremos por  $q$ .



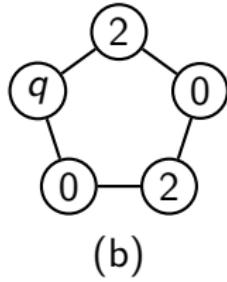
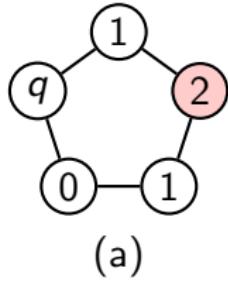
configuración  
(5, 1, 2, 1, 0)



configuración  
con sumidero

Decimos que un vértice  $v$  es **no estable** si el número  $c_v$  de granos de arena en el vértice  $v$  es mayor o igual a su grado  $d_G(v)$ , es decir,  
 $c_v \geq d_G(v)$ .

Un **desbordamiento** consiste en seleccionar un vértice  $v$  **no estable** y mover  $d_G(v)$  granos de arena a sus vecinos, donde cada vecino  $u$  de  $v$  recibe el número de aristas entre  $u$  y  $v$ .



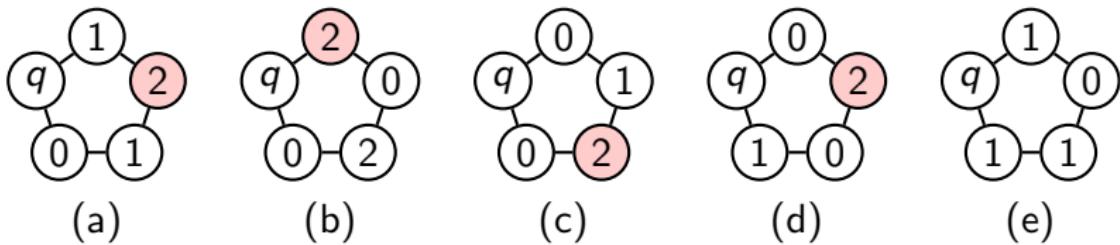
Una configuración  $c$  es **estable** si sus vértices son estables.

### Teorema

*Toda configuración inestable sobre una gráfica conexa con un sumidero, siempre se podrá estabilizar, después de una secuencia finita de desbordamientos.*

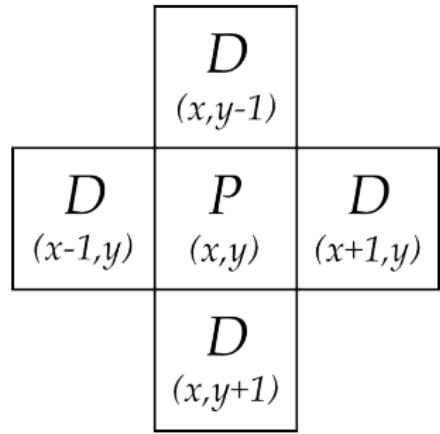
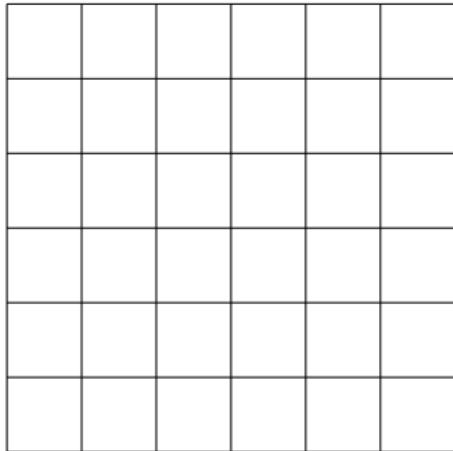
La estabilización de una configuración  $c$  se denotará por  $s(c)$

Una **avalancha** es una secuencia finita necesaria para obtener una configuración estable, y su tamaño es el número de desbordamientos utilizados.



Avalancha de tamaño 4.

Rejilla  $7 \times 7$  inmersa en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



Vecindad de von Neumann

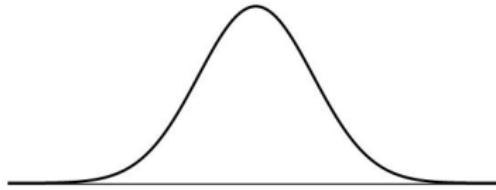
<https://alfaromontufar.github.io/pilasdearena/main.html>

# Sismos

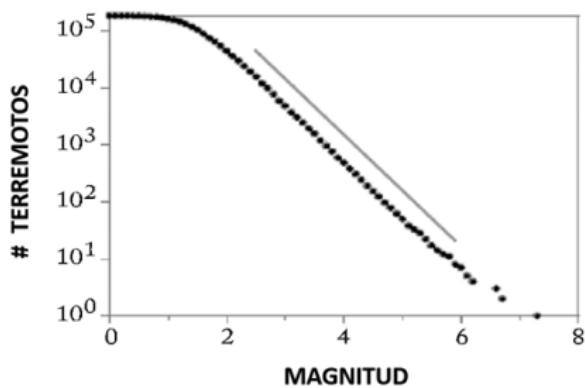
En 1950, Beno Gutenberg y Charles Ritcher esperaban que al censar los sismos ocurridos en el mundo podrían revelar un patrón significativo que pudiera revelar alguna causa de los terremotos.

Construyeron una tabla de frecuencias relativas de los sismos de diferentes tamaños.

Si hubiera un sismo típico, esperaríamos una campana de Gauss.



Pero no encontraron tal comportamiento, lo que encontraron fue el siguiente patrón.



Si un sismo de magnitud A tiene una magnitud el doble de magnitud que el sismo B, entonces el tipo A es cuatro veces menos frecuente que el tipo B.

A este comportamiento se le conoce como **ley de potencia Gutember-Richter**.

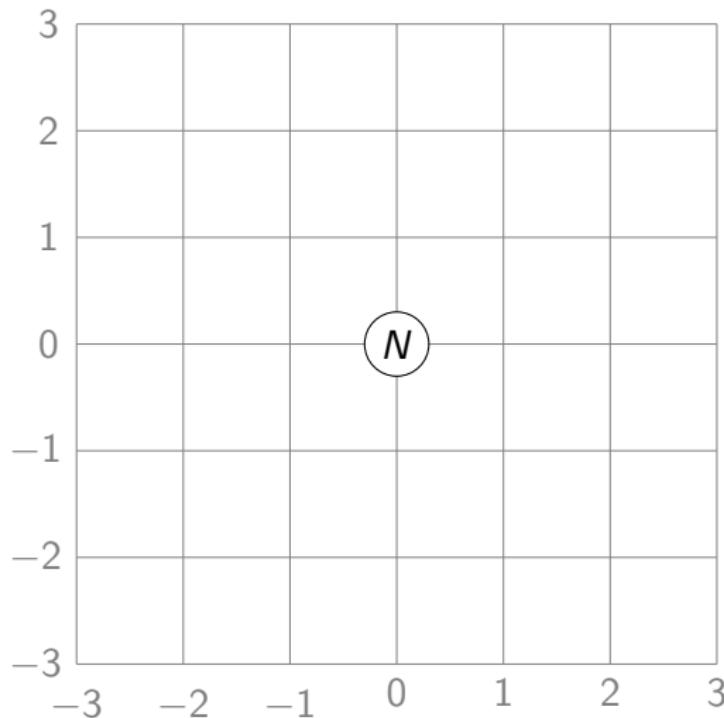
Per Bak, Chao Tang y Kurt Weisenfeld encontraron una relación similar con el juego de las pilas de arena.

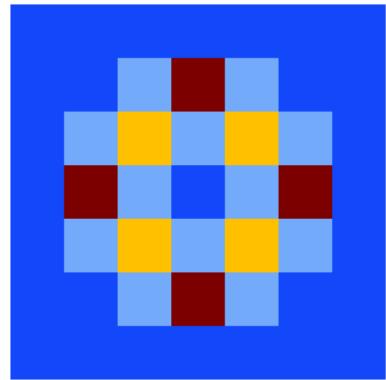
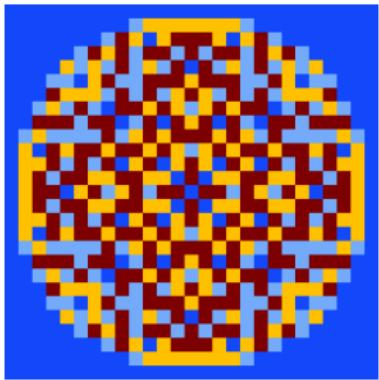
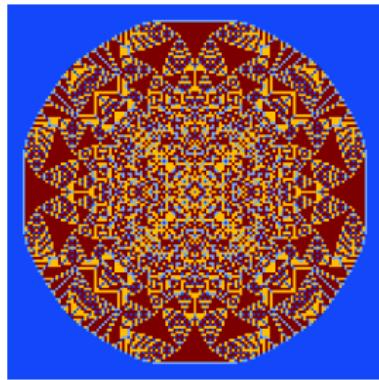
Esta observación los llevo al descubrimiento del **punto crítico** y de los **los sistemas que exhiben criticalidad autorganizada**.

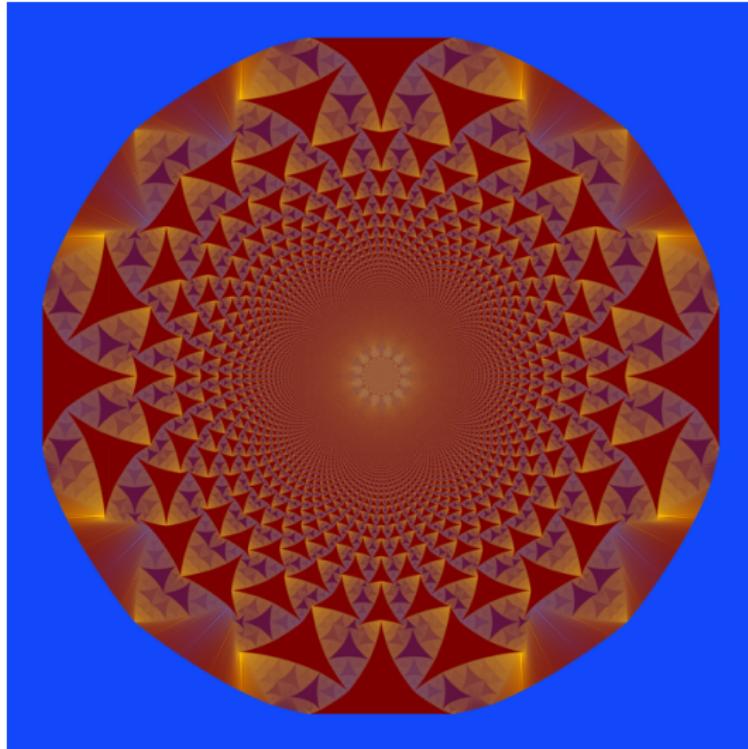
\* Per Bak, Chao Tang y Kurt Weisenfeld. Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise. **Phys. Rev. Lett.** 59, 381–384.

## Formación de patrones

Sobre la rejilla infinita colocamos  $N$  granos de arena en  $(0, 0)$  y estabilizamos.



 $2^5$  $2^{10}$  $2^{15}$

 $2^{30}$

¿Qué pasa cuando  $N$  tiende a  $\infty$ ?

Wesley Pedgen y Charles K. Smart demostraron que existe una función en  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  a la cual converge \*-debilmente.

Su demostración usa técnicas de ecuaciones diferenciales.

Lionel Levine, Wesley Pedgen y Charles K. Smart demostraron que las soluciones a las EDP están relacionadas con **estructuras fractales de Apolonio**.

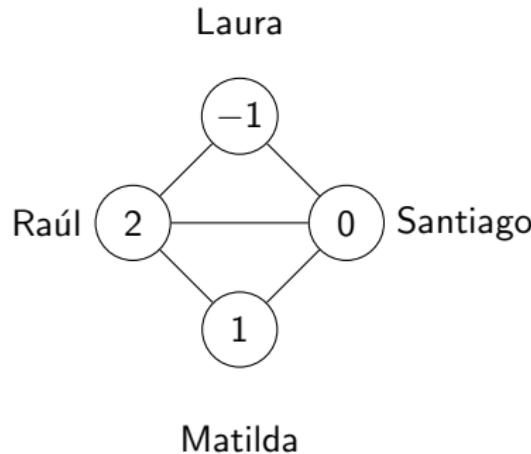
Algunas referencias:

- Wesley Pedgen y Charles K. Smart, Convergence of the Abelian sandpile, **Duke Math. J.** 162 (2013) 4 627–642.
- Lionel Levine, Wesley Pedgen y Charles K. Smart, Apollonian structure of integer superharmonic matrices. **Annals of Math.** 186 (2017) 1–67.

# Juego del dolar de Baker y Norine

La dinámica de las pilas de arena representan el flujo de dólares en una economía, donde una configuración representa la cantidad de dinero que tiene cada agente.

En este modelo, se permite que los agentes tengan deuda.



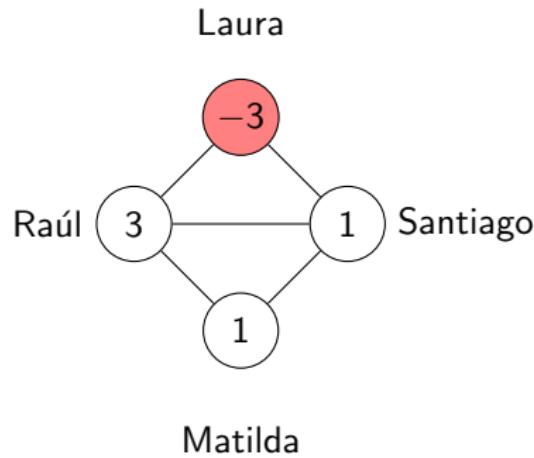
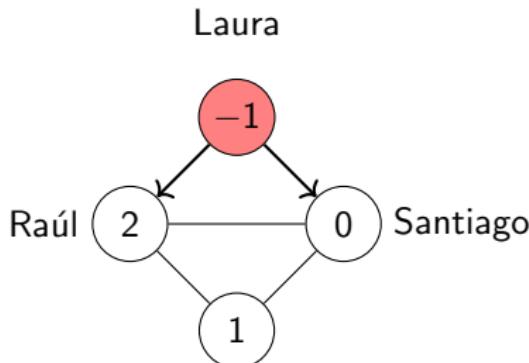
M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine

## Definición

Un **movimiento** consiste en que un vértice preste a cada vecino un dolar, o en que cada uno de los vecinos le den un dolar.



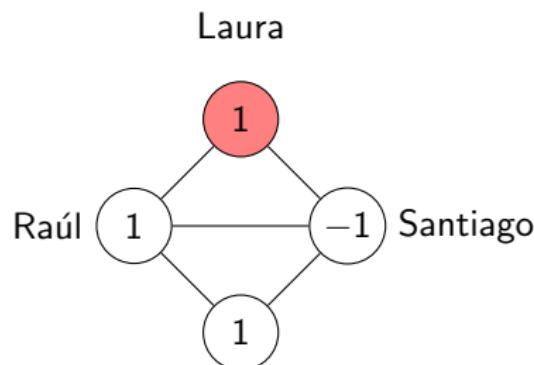
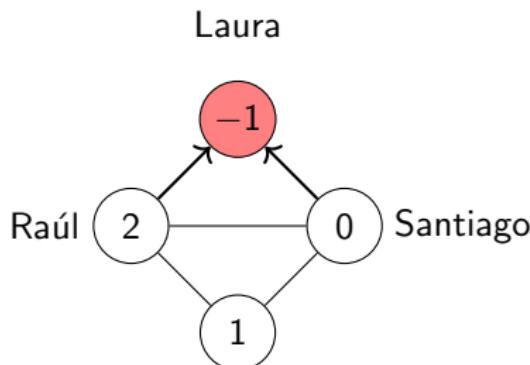
M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine

## Definición

Un **movimiento** consiste en que un vértice preste a cada vecino un dolar, o en que cada uno de los vecinos le den un dolar.



M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine

Note que cualquier movimiento no modifica el número de dólares en el sistema.

El objetivo es obtener configuración no negativa a través de movimientos.

Tal configuración se llama **configuración ganadora** y la secuencia de movimientos se dice que es una **estrategia ganadora**.

M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine

## Teorema

Sea  $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$  y sea  $N$  el número de dólares en la economía.

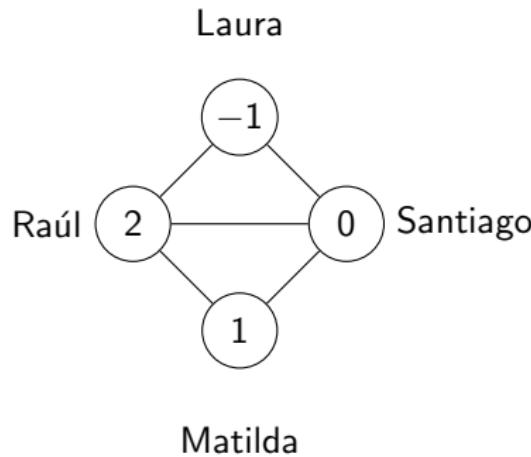
- ① si  $N \geq g$ , entonces existe una estrategía ganadora.
- ② si  $N \leq g - 1$ , entonces existe una configuración inicial para la que no existe una estrategía ganadora.

M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph.** Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

## Juego del dolar de Baker y Norine

En la economía descrita abajo se tienen  $N = 2$  dólares y  $g = |E(G)| - |V(G)| + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$ , por lo tanto, existe una estrategia ganadora en este juego.

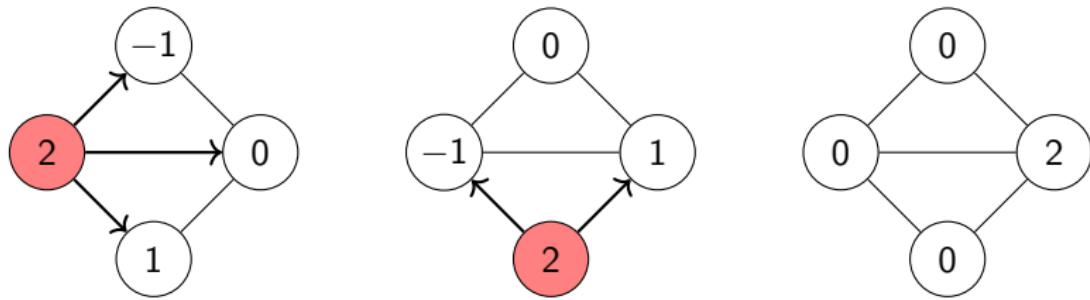


¿Puede encontrar una estrategia ganadora en este juego?

M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

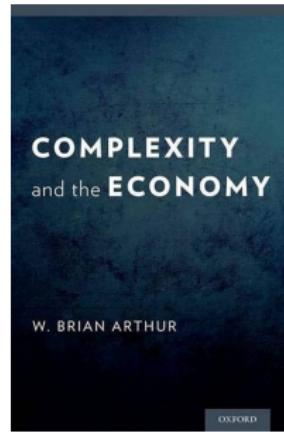
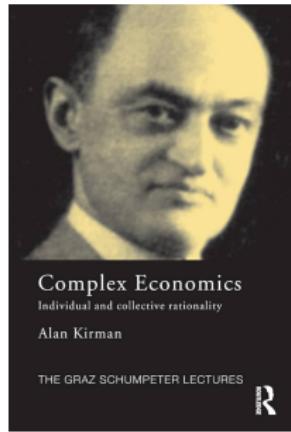
# Juego del dolar de Baker y Norine

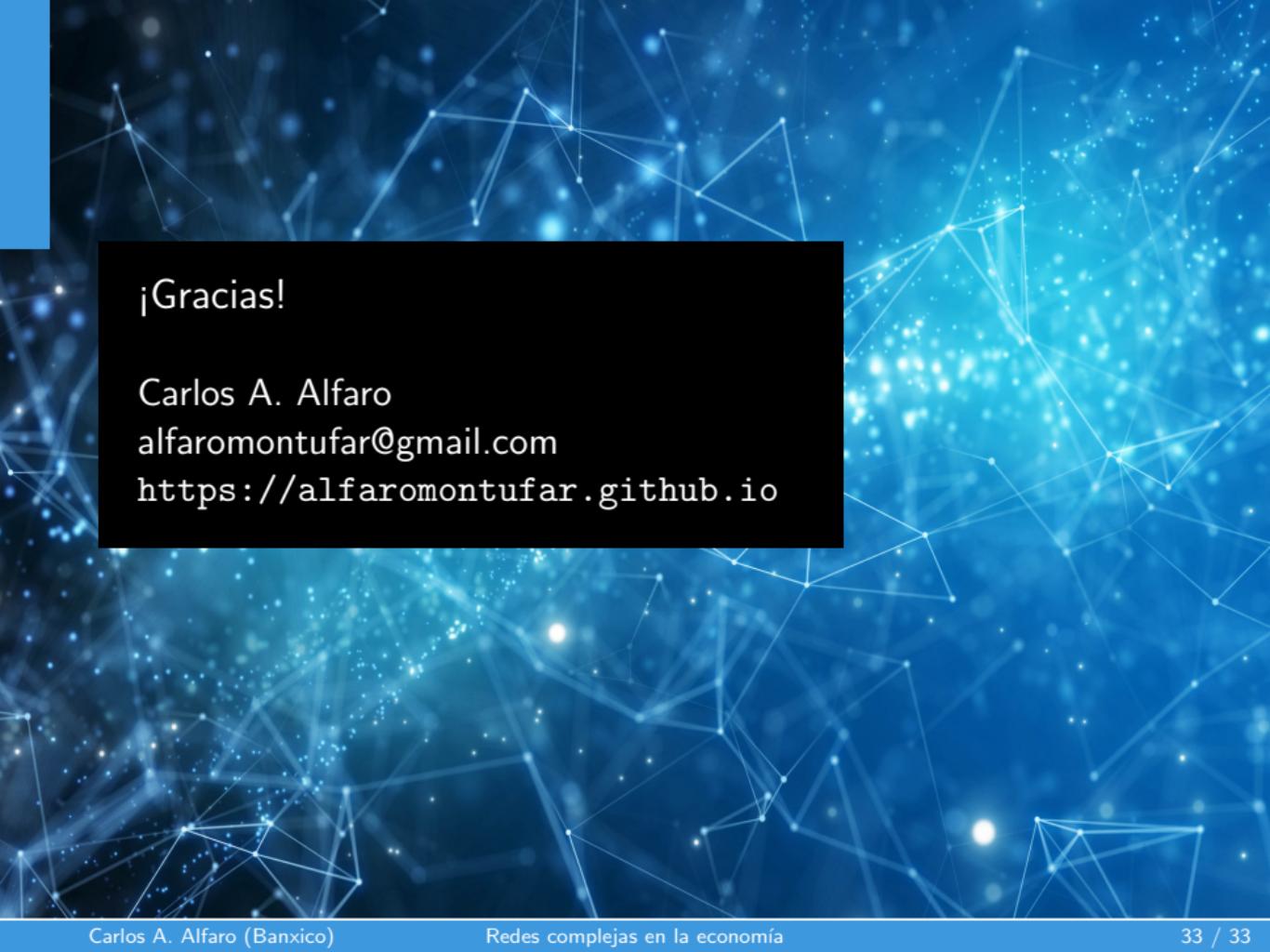


M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph.** Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Lecturas recomendadas



The background of the slide features a complex, abstract network structure composed of numerous small, glowing blue dots connected by thin white lines, resembling a molecular or neural network. This pattern is set against a dark blue gradient.

¡Gracias!

Carlos A. Alfaro

alfaromontufar@gmail.com

<https://alfaromontufar.github.io>