

# Pilas de arena

## álgebra, combinatoria, optimización... y fractales

Carlos A. Alfaro (BANXICO)

El grupo de pilas de arena tiene sus orígenes en física estadística en 1987. Fue el primer modelo de un sistema dinámico con **criticalidad autorganizada**, la cual intenta explicar la ocurrencia de leyes potenciales en diversos fenómenos naturales, desde geofísica y economía hasta neurociencia.

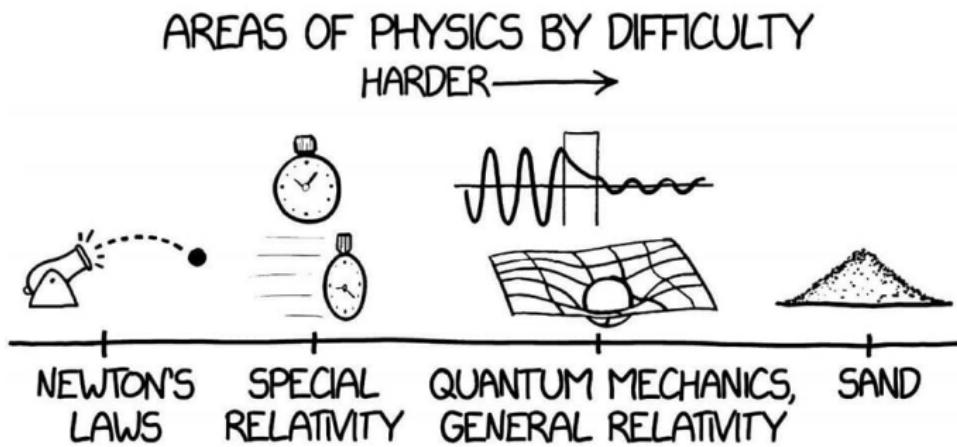
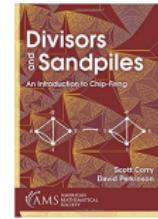
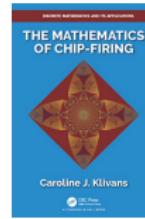
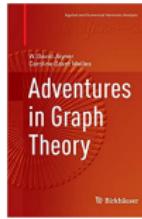
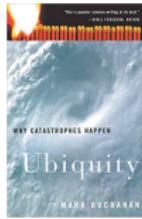
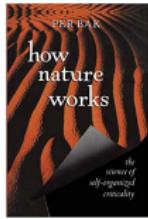


Imagen: xkcd

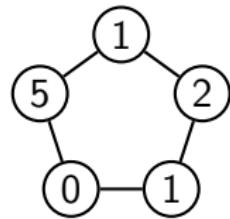
En matemáticas, se ha estudiado desde puntos de vista muy distintos como la geometría aritmética, geometría algebraica, sistemas dinámicos, teoría de gráficas, cadenas de Markov, entre otros.



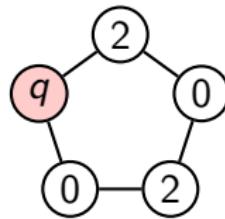
La dinámica de las pilas de arena se desarrolla en una gráfica de la siguiente manera.

Dada una gráfica  $G$ , una **configuración** es un vector  $c$  que asigna a cada vértice un número (no negativo) de granos de arena.

En algunas ocasiones, habrá un vértice especial llamado **sumidero** con la finalidad de colectar los granos que “salen del sistema”. Al cual denotaremos por  $q$ .



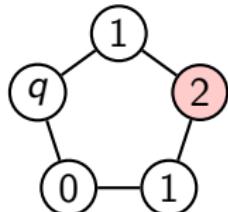
configuración  
(5, 1, 2, 1, 0)



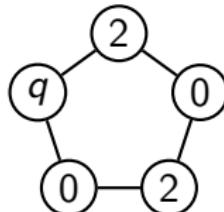
configuración  
con sumidero

Decimos que un vértice  $v$  es **no estable** si el número  $c_v$  de granos de arena en el vértice  $v$  es mayor o igual a su grado  $d_G(v)$ , es decir,  
 $c_v \geq d_G(v)$ .

Un **desbordamiento** consiste en seleccionar un vértice  $v$  **no estable** y mover  $d_G(v)$  granos de arena a sus vecinos, donde cada vecino  $u$  de  $v$  recibe el número de aristas entre  $u$  y  $v$ .



(a)



(b)

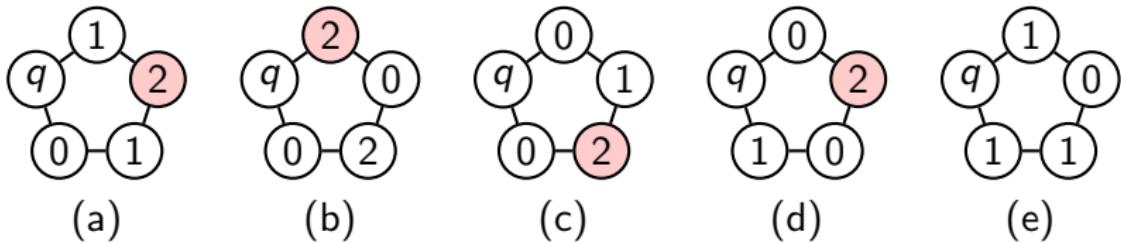
Una configuración  $c$  es **estable** si sus vértices son estables.

### Teorema

*Toda configuración inestable sobre una gráfica conexa con un sumidero, siempre se podrá estabilizar, después de una secuencia finita de desbordamientos.*

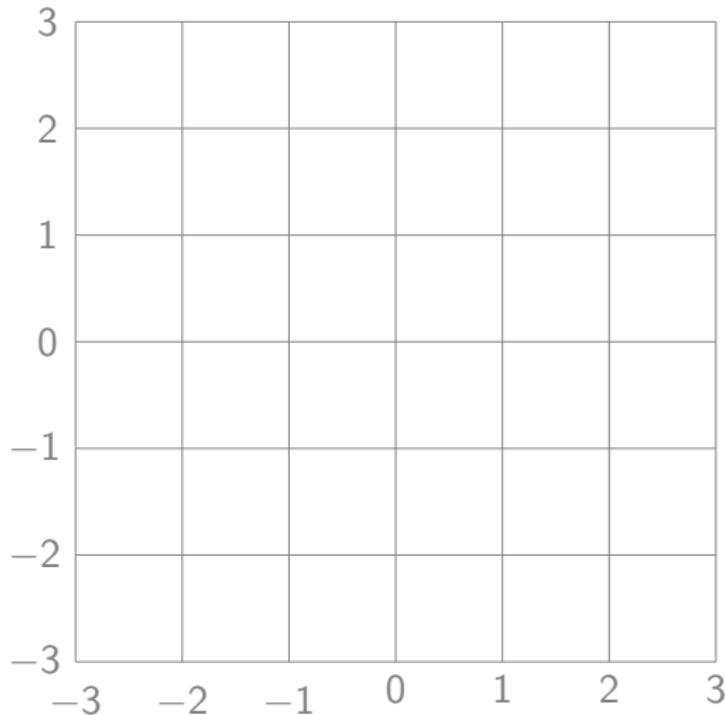
La estabilización de una configuración  $c$  se denotará por  $s(c)$

Una **avalancha** es una secuencia finita necesaria para obtener una configuración estable, y su tamaño es el número de desbordamientos utilizados.



Avalancha de tamaño 4.

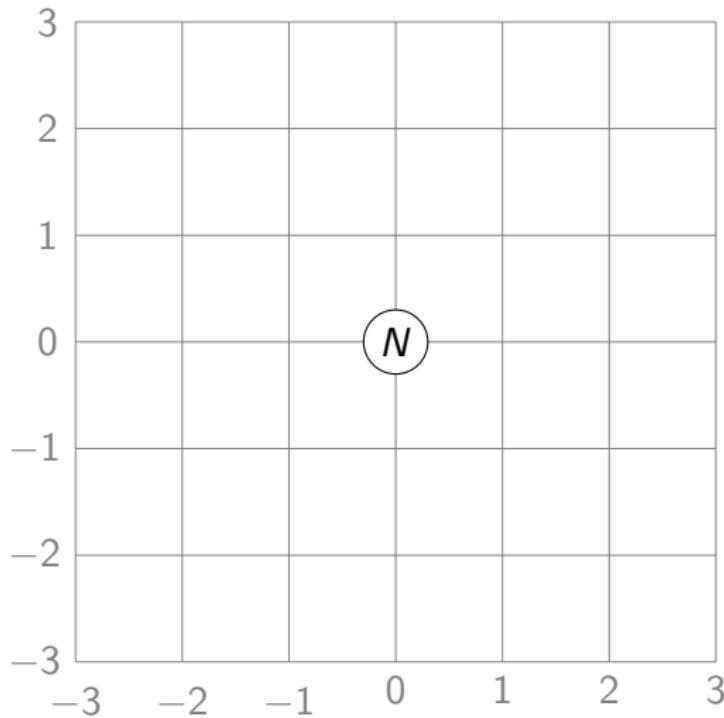
## Rejilla $7 \times 7$ inmersa en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

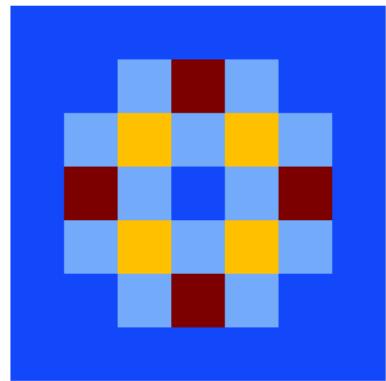
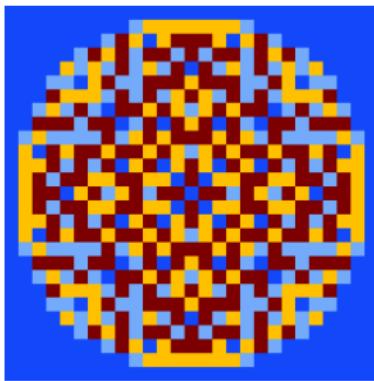
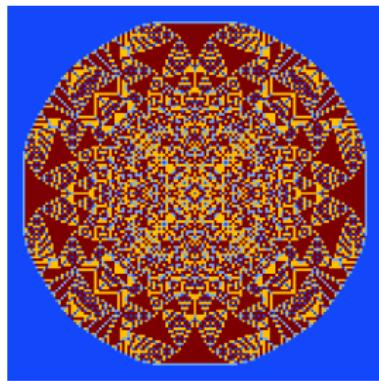


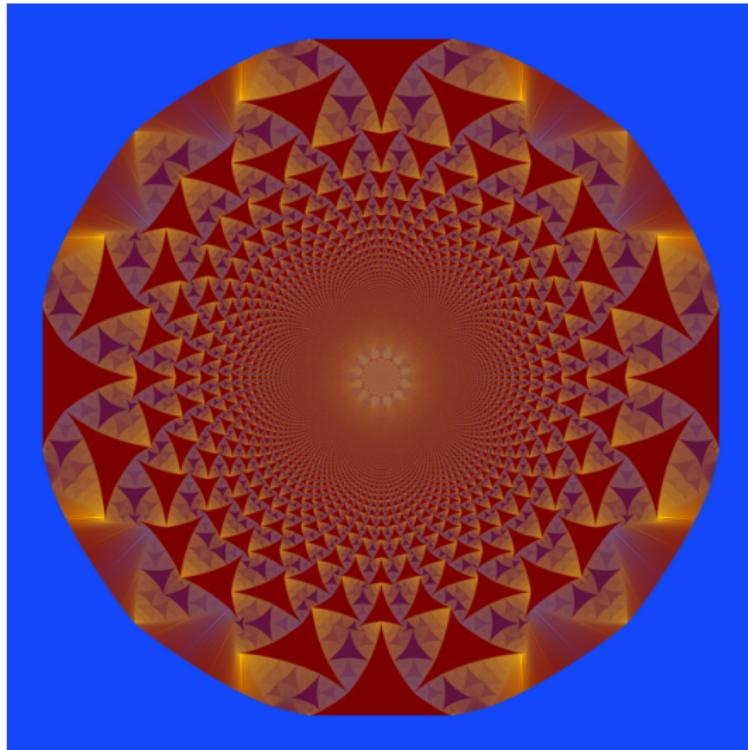
<https://alfaromontufar.github.io/pilasdearena/main.html>

## Formación de patrones

Sobre la rejilla infinita colocamos  $N$  granos de arena en  $(0, 0)$  y estabilizamos.



 $2^5$  $2^{10}$  $2^{15}$



$2^{30}$

¿Qué pasa cuando  $N$  tiende a  $\infty$ ?

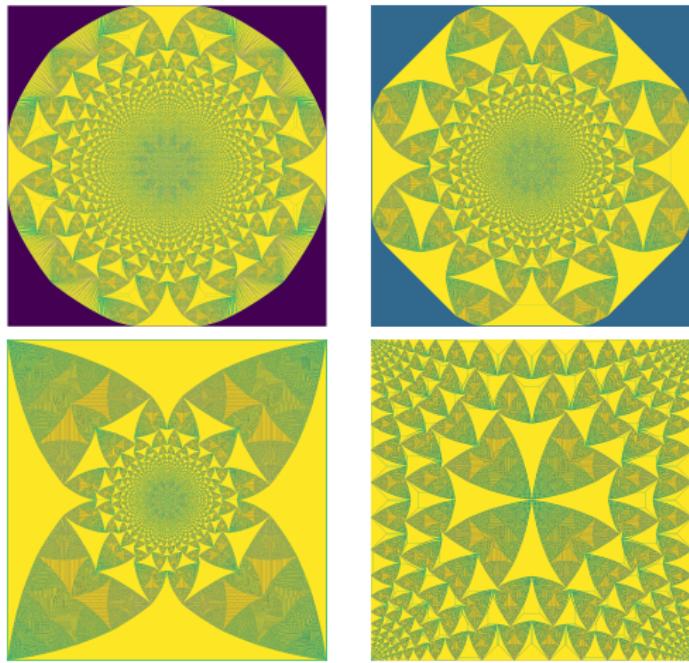
Wesley Pedgen y Charles K. Smart demostraron que existe una función en  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  a la cual converge \*-debilmente.

Su demostración usa técnicas de ecuaciones diferenciales.

Lionel Levine, Wesley Pedgen y Charles K. Smart demostraron que las soluciones a las EDP están relacionadas con **estructuras fractales de Apolonio**.

Referencias:

- Wesley Pedgen y Charles K. Smart, Convergence of the Abelian sandpile, **Duke Math. J.** 162 (2013) 4 627–642.
- Lionel Levine, Wesley Pedgen y Charles K. Smart, Apollonian structure of integer superharmonic matrices. **Annals of Math.** 186 (2017) 1–67.



¿Podría esto ilustrar el origen de un universo fractal desde el Big Bang?

Referencia:

- Per Bak and Michael Creutz, Dynamics of sand, **MRS Bulletin** (1991) 17–21.

# Configuraciones recurrentes

La suma de dos configuraciones se hace entrada por entrada.

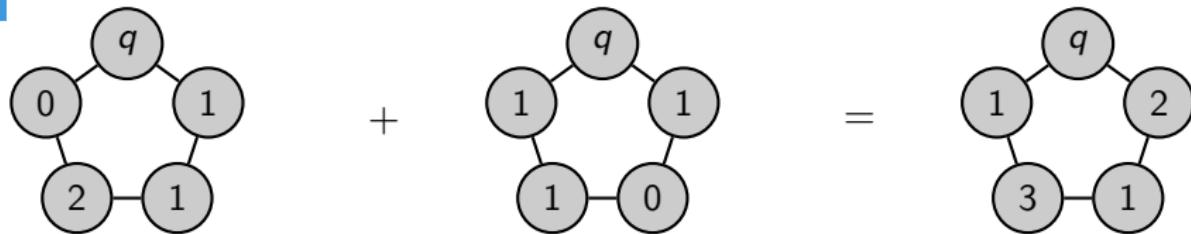


Figure: Suma de configuraciones

## Definición

La **suma de pilas de arena** será denotada por  $c \oplus d$  y es la estabilización de la suma  $c + d$ , es decir,  $c \oplus d := s(c + d)$ .

## Definición

Una configuración  $c$  se dice que es **recurrente** si existe una configuración  $d$  distinta de la configuración cero, tal que,  
 $s(c + d) = c$ .

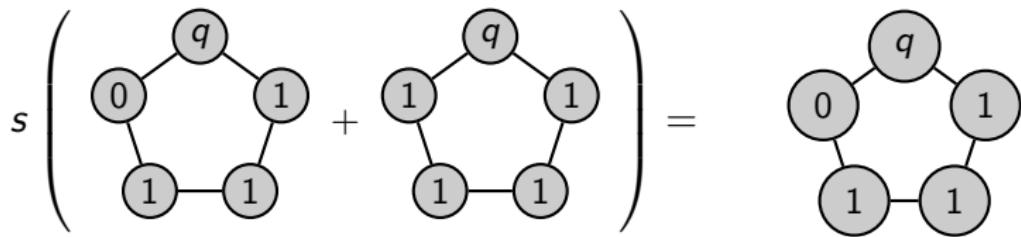
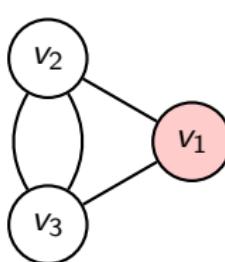
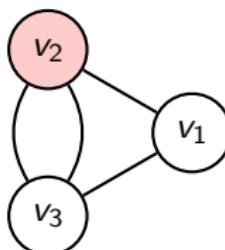


Figure:  $(0,1,1,1)$  es recurrente

Las configuraciones recurrentes dependen del vértice sumidero.



$$\begin{array}{l} (\nu_2, \nu_3) \\ \hline (2, 1) \\ (2, 0) \\ (0, 2) \\ (1, 2) \\ (2, 2) \end{array}$$



$$\begin{array}{l} (\nu_3, \nu_1) \\ \hline (1, 0) \\ (2, 0) \\ (0, 1) \\ (1, 1) \\ (2, 1) \end{array}$$

El conjunto de configuraciones recurrentes sobre la gráfica  $G$  con el sumidero  $q$  lo denotaremos por  $K(G, q)$ .

## ¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

### Definición

Sea  $G$  una gráfica. Una **subgráfica generadora** es una subgráfica  $H$  de  $G$  con  $V(H) = V(G)$ .

### Definición

Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

### Teorema

*El número de configuraciones recurrentes es igual al número de árboles generadores.*

El número de árboles generadores de  $G$  se denotará por  $\tau(G)$ .

Dada una configuración  $c$ , definimos

$$\text{nivel}(c) = \sum_{v \in V \setminus q} c_v.$$

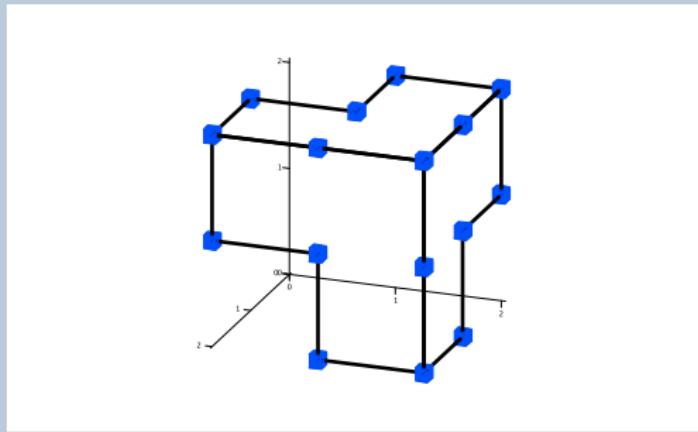
### Teorema

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica con sumidero  $q$  y sea  $c$  una configuración recurrente, entonces

$$|E| - \deg_G(q) \leq \text{nivel}(c) \leq 2|E| - \deg_G(q) - |V| + 1$$

## Ejemplo

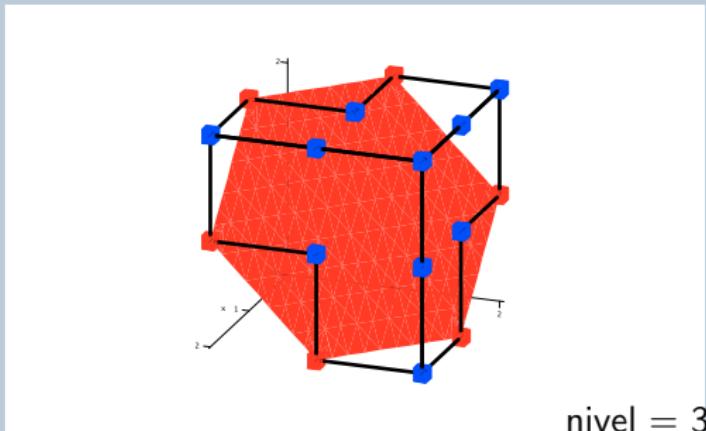
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 16 configuraciones recurrentes

## Ejemplo

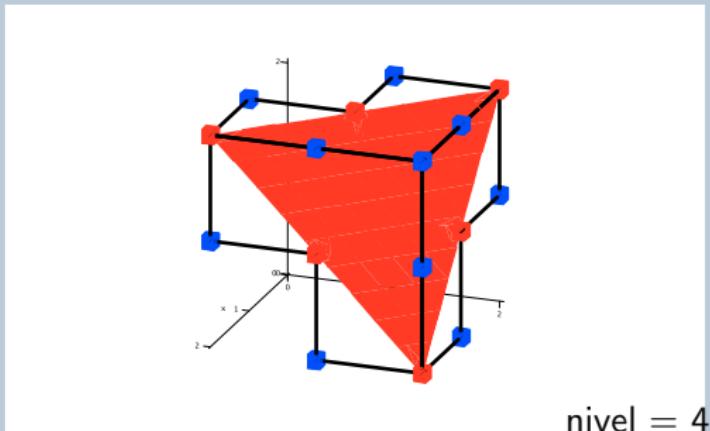
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 6 configuraciones recurrentes con nivel 3

## Ejemplo

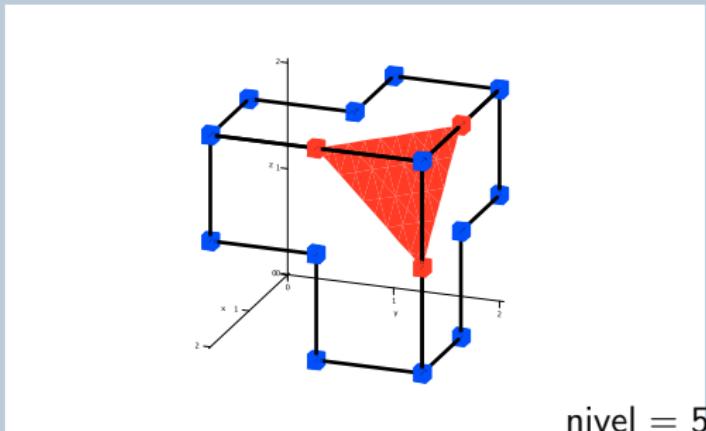
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 6 configuraciones recurrentes con nivel 4

## Ejemplo

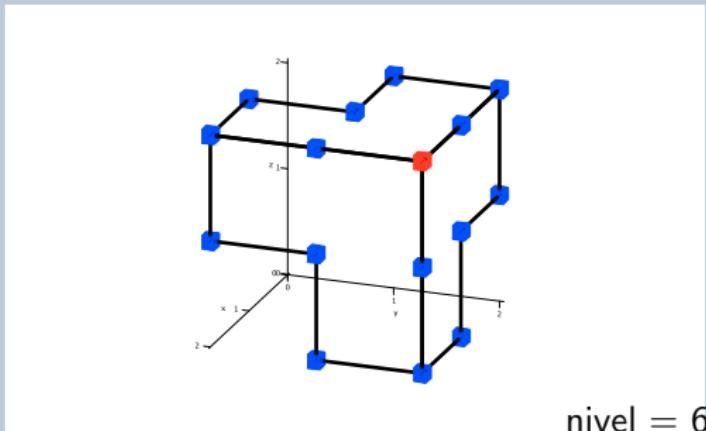
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 3 configuraciones recurrentes con nivel 5

## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 1 configuración recurrentes con nivel 6

Para  $i \geq 0$ , tomemos  $n_i$  como el número de configuraciones recurrentes con nivel  $i + |E| - \deg(q)$ .

La **función generadora** de las configuraciones críticas es el polinomio

$$P(G; y) = \sum_{i=0}^{|E|-|V|+1} n_i y^i$$

## Definición

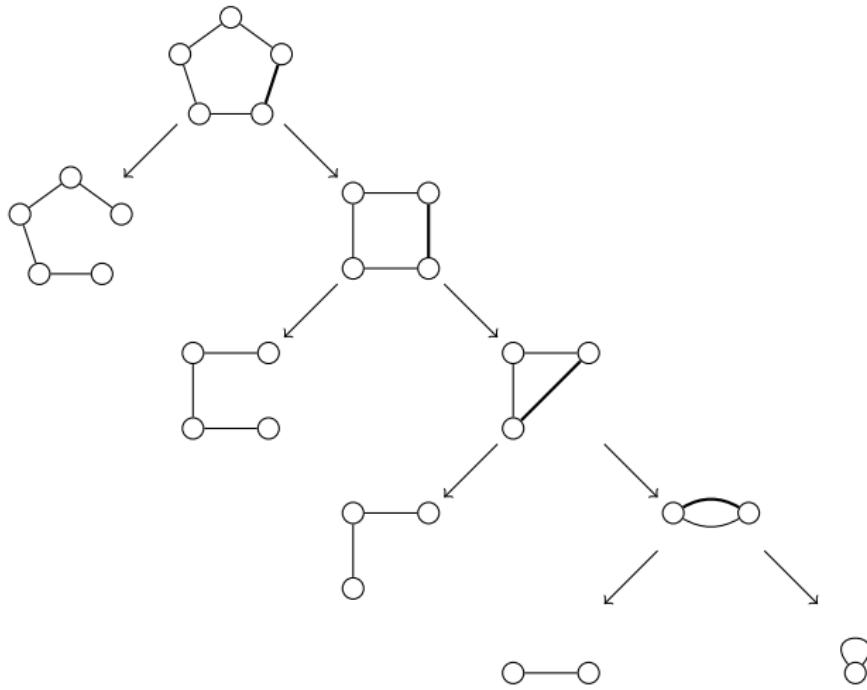
Sea  $G$  una gráfica. El **polinomio de Tutte** de  $G$  es el polinomio  $T(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  definido como sigue:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(G) = \emptyset, \\ xT(G/e) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ yT(G\backslash e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ T(G/e; x, y) + T(G\backslash e; x, y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni puente.} \end{cases}$$

donde

- $G/e$  denota la contracción de la arista  $e$ ,
- $G\backslash e$  denota la eliminación de la arista  $e$ .

## Polinomio de Tutte del ciclo de 5 vértices.



$$T(C_5; x, y) = x^4 + x^3 + x^2 + x + y$$

## Teorema (Merino 1997)

**La función generadora** de las configuraciones recurrentes es el **polinomio de Tutte** a lo largo de la linea  $x = 1$ ,

$$P(G, y) = T(G; 1, y).$$

Entonces

$$P(C_5, y) = 4 + y.$$

Además, el polinomio de  $K_4$  es

$$T(K_4; x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y + y^3 + x^3.$$

Por lo tanto,

$$P(K_4, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3.$$

Referencia:

- C. Merino. Chip firing and the tutte polynomial. **Annals of Combinatorics** (1997) 253–259.

## Teorema

*El conjunto  $K(G, q)$  de las configuraciones recurrentes junto con la suma de pilas de arena  $\oplus$  forman un grupo finito abeliano.*

Recordemos que un grupo abeliano  $(K(G, q), \oplus)$  satisface:

- (cerrado) si  $a, b \in K(G, q)$ , entonces  $a \oplus b \in K(G, q)$ ,
- (asociativo) si  $a, b, c \in K(G, q)$ , entonces  
$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$
- (identidad)  $\forall a \in K(G, q)$ , existe  $e \in K(G, q)$  tal que  
$$a \oplus e = e \oplus a = a$$
- (inverso)  $\forall a \in K(G, q)$ , existe  $b \in K(G, q)$  tal que  
$$a \oplus b = b \oplus a = e,$$
- (comutativo)  $\forall a, b \in K(G, q)$ , se tiene  $a \oplus b = b \oplus a$

Este grupo es conocido como el **grupo de pilas de arena**, el cual denotaremos por  $K(G)$ .

Para nuestro ejemplo sobre el ciclo de 5 vértices, las configuraciones recurrentes son  $(0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$  y  $(1, 1, 1, 1)$ .

- ¿Podría verificar que estas configuraciones junto con la operación  $\oplus$  forman un grupo abeliano?
- ¿Qué configuración es la identidad?

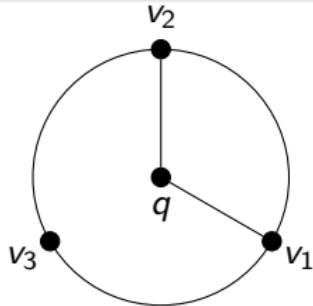
# Matriz Laplaciana

## Definición

La **matriz Laplaciana** es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de  $G$ ), tal que la entrada  $uv$  esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} \deg_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $m_{u,v}$  es el número de aristas entre  $u$  y  $v$ .



$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

# La forma normal de Smith

Una matriz es **equivalente** a otra si se obtiene al

- Intercambiar dos filas o dos columnas,
- sumar un múltiplo entero de una fila (o columna) a otra,
- multiplicar una fila (o columna) por -1.

## Definición

La forma normal de Smith (SNF) de la matriz  $M$  es la única matriz diagonal

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

equivalente a  $M$  tal que  $r$  es el rango de  $M$  y  $d_i|d_j$  para  $i < j$ . Los enteros positivos  $d_i$  se llaman **factores invariantes**.

# Estructura del grupo de pilas de arena

## Teorema

Sean  $d_1, \dots, d_r$  los factores invariantes de  $L(G)$ , entonces  
 $K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$ .

Denotemos por  $L_q(G)$  a la matriz Laplaciana de  $G$  sin la columna y la fila asociadas a  $q$ .

Si  $G$  es una gráfica conexa, entonces los factores invariantes de  $L(G)$  y  $L_q(G)$  son los mismos.

## Corolario

Sean  $d_1, \dots, d_r$  los factores invariantes de  $L_q(G)$ , entonces  
 $K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$ .

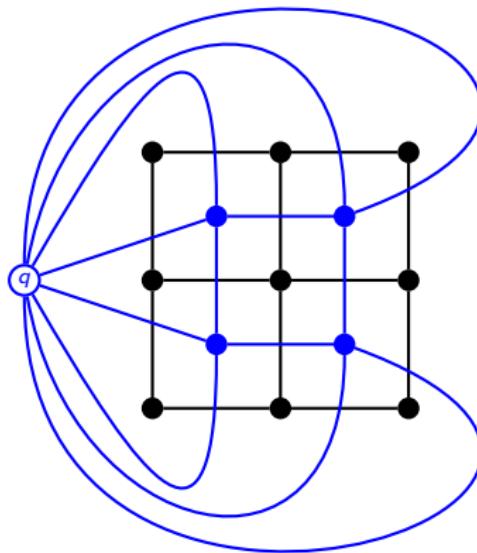
## Proposición

*Si  $K_n$  es la gráfica completa de  $n$  vértices. Entonces*

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

$$L(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \sim diag(1, n, \dots, n, 0)$$

# Gráfica plana y su dual



El dual de la rejilla se muestra en azul lo denotaremos por  $L_{n,n}^q$ .  
El sumidero de  $L_{n,n}^q$  suele ser el vértice asociado con la cara exterior  
de la rejilla.

Teorema (Vince 1991, Cori & Rossin 2000)

Si  $G$  es plana y  $G^*$  es dual de  $G$ , entonces  $K(G) \cong K(G^*)$

El dual de  $C_n$  es la gráfica banana  $B_n$



cuya matriz Laplaciana es

$$\begin{bmatrix} n & -n \\ -n & n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que  $K(C_n) \cong K(B_n) \cong \mathbb{Z}_n$ .

Referencias:

- R. Cori, D. Rossin, On the sandpile group of dual graphs, **European J. Combin.** 21 (2000) 447–459.
- A. Vince, Elementary divisors of graphs and matroids, **Europ. J. Combinat.** 12 (1991) 445–453.

# La forma normal de Smith de la matriz de intersección de ciclos

## Definición

Sea  $G$  una gráfica plana con  $s$  caras interiores  $F_1, \dots, F_s$ , y sea  $c(F_i)$  el número de aristas acotando la cara  $F_i$ . Definimos la matriz de intersección de ciclos  $C(G) = (c_{ij})$  como la matriz simétrica  $s \times s$  donde  $c_{ij} = c(F_i)$  si  $i = j$ , y  $c_{ij}$  es el negativo del número de aristas en común entre las caras  $F_i$  y  $F_j$ , si  $i \neq j$ .

La forma normal de Smith (SNF) de la matriz  $M$  es la única matriz diagonal  $\text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ , equivalente a  $M$  tal que  $r$  es el rango de  $M$  y  $d_i|d_j$  para  $i < j$ . Los enteros  $d_i$  se llaman **factores invariantes**.

## Lema

Sean  $d_1, \dots, d_r$  los factores invariantes de  $C(G)$ , entonces  $K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$ .

La gráfica dual débil de una gráfica outerplana biconexa es un árbol.

Denotemos por  $d(\mathcal{M})$  al determinante de la submatriz de  $c(G) = \text{diag}(c(F_1), \dots, c(F_s)) - A(T)$  formado al seleccionar las filas y columnas asociados a los lazos de  $\mathcal{M}$  de  $T'$ .

### Teorema (Alfaro & Villagrán, 2021)

Sea  $G$  una gráfica plana biconexa cuyo dual débil es el árbol  $T$  con  $n$  vértices. Sea  $\Delta_i = \text{mcd}(\{d(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in 2M_k^*(T')\})$ . Entonces,

$$K(G) \cong \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} \text{ and } \tau(G) = \Delta_n.$$

Referencia:

- C.A. Alfaro y R.R. Villagrán. The structure of sandpile groups of outerplanar graphs. **Applied Mathematics and Computation** 395 (2021) 125861.

# Gráficas con vértices de corte

## Proposición

Sea  $G$  una gráfica cuyos bloques son  $B_1, \dots, B_m$ , entonces

$$K(G) \cong K(B_1) \oplus \cdots \oplus K(B_m)$$

## Problema

Dado un grupo finito abeliano  $\Gamma$ , ¿existe una gráfica  $G$  tal que  $K(G) = \Gamma$ ?

# Gráficas con vértices de corte

## Proposición

Sea  $G$  una gráfica cuyos bloques son  $B_1, \dots, B_m$ , entonces

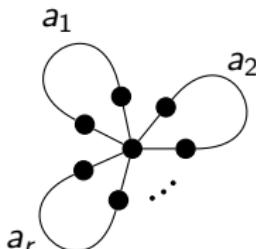
$$K(G) \cong K(B_1) \oplus \cdots \oplus K(B_m)$$

## Problema

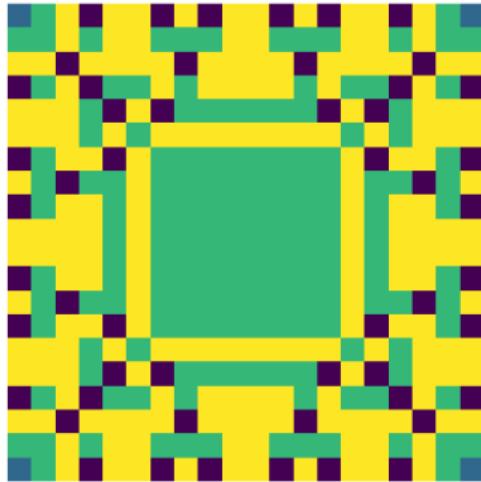
Dado un grupo finito abeliano  $\Gamma$ , ¿existe una gráfica  $G$  tal que  $K(G) = \Gamma$ ?

Sí, basta tomar a  $G$  como un wedge de ciclos.

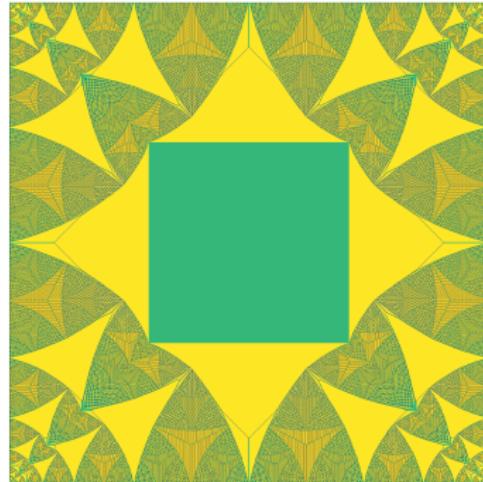
$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{a_r}$$



# Identidad en el complemento de la rejilla



(a)  $20 \times 20$



(b)  $1000 \times 1000$

# El grupo de pilas de arena del complemento de la rejilla

$n$	$K(L_{n,n}^q, q)$
2	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{15}$
3	$\mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{240}$
4	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{1488} \oplus \mathbb{Z}_{22320}$
5	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{5552} \oplus \mathbb{Z}_{87116432}$
6	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{390768} \oplus \mathbb{Z}_{47142251520}$
7	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_{64} \oplus \mathbb{Z}_{16105920} \oplus \mathbb{Z}_{113441902566720}$
8	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{3318522672} \oplus \mathbb{Z}_{12101139645290897136}$

## Teorema (Alfaro, Valencia y Vargas, 2023)

Sea  $G$  una gráfica con sumidero  $q$ ,  $\mathbf{c}$  una configuración estable en  $(G, q)$ , sea  $\sigma_{max}$  la configuración estable máxima. Si  $\mathbf{x}^*$  es una solución óptima del programa lineal entero

$$\text{maximiza: } \mathbf{1} \cdot \mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a: } \mathbf{0} \leq \mathbf{c} + \mathbf{x}L_q \leq \sigma_{max} \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{\tilde{V}},$$

entonces  $\mathbf{x}^*$  es único y  $\mathbf{c} + \mathbf{x}^*L_q \in K(G, q)$ .

Referencia:

- C.A. Alfaro, M.C. Vargas y C.E. Valencia. Computing sandpile configurations using integer linear programming, **Chaos, Solitons and Fractals**, 2023.

## Corolario

*La solución óptima  $x^*$  del problema*

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza:} & \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq \mathbf{x}L_q \leq \sigma_{\max} \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{\tilde{V}}, \end{array} \quad (1)$$

*satisface que  $\mathbf{x}^*L_q$  es la identidad en  $K(G, q)$ .*

## Corolario

*Sea  $G$  una gráfica  $r$ -regular. Si el sumidero  $q \in V(G)$  es el ápice del cono de  $G$ , entonces  $r \cdot \mathbf{1}$  es la identidad de  $K(CG, q)$ .*

# Programa lineal en SAGEMATH

---

```
def MIP(g,sink,conf):
    p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True,solver='GLPK')
    b = p.new_variable(integer=True)

    m = g.laplacian_matrix().delete_columns([sink]).delete_rows([sink])

    sigma = [v - 1 - c for (v,c) in zip(g.degree(),conf)]
    del sigma[sink]
    lhs = [-c for c in conf]
    del lhs[sink]

    p.set_objective(sum([b[i] for i in range(len(sigma))]))
    p.add_constraint(m*b, min=lhs, max=sigma)
    p.solve()
    sol = vector(p.get_values(b).values())
    return [int(u-v) for (u,v) in zip(m*sol,lhs)]

G = graphs.CycleGraph(5)
G.show()
sink = 0
configuration = G.order()*[0]
```

---

Enlace a código en [Sagemathcell](#).

## Gráficas cuyo grupo de pilas de arena tiene un número fijo de generadores

Sea  $f_1(G)$  el número de factores invariantes de  $L(G)$  iguales a 1, y sea  $\phi(G)$  el número mínimo de generadores de  $K(G)$ .

Si  $G$  es una gráfica conexa con  $n$  vértices, entonces

$$n - 1 = f_1(G) + \phi(G).$$

Los árboles y las completas son casos extremos, pues

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n \text{ y } \phi(K_n) = n - 2,$$

mientras que el grupo de pilas de arena consiste de un único elemento.

Esto inspiró las siguientes preguntas:

¿Qué gráficas tienen grupo de pilas de arena cíclico?

¿Qué gráficas con  $n$  vértices gráficas satisfacen que su grupo de pilas de arena tiene  $n - 3$  y  $n - 4$  generadores?

# Gráficas cuyo grupo de pilas de arena es cíclico

Dino Lorenzini y David Wagner basados en evidencia numérica sugirieron que una proporción sustancial de gráficas con  $n$  vértices tendría grupo de pilas de arena cíclico.

## Conjetura

*La probabilidad de que el grupo de pilas de arena de una gráfica aleatoria sea cíclico es 1.*

Recientemente, Melanie M. Wood demostró que la probabilidad de que el grupo de pilas de arena de una gráfica aleatoria sea cíclico es a lo más 0.7935212. Refutando la conjetura.

## Referencias:

- D.J. Lorenzini. Smith normal form and Laplacians. *J. Comb. Theory B* 98 (2008) 1271–1300.
- D.G. Wagner. The critical group of a directed graph. Preprint arXiv: [math/0010241v1](https://arxiv.org/abs/math/0010241v1) [math.CO].
- M.M. Wood. The distribution of sandpile groups of random graphs. *J. Am. Math. Soc.* 30 (2017) 915–958.

## Teorema

Sea  $G$  una gráfica simple. Entonces  $G \in \mathcal{K}_2$  si y solo si  $G$  es una de las siguientes gráficas:

(a)  $K_{n_1, n_1, n_3}$  con  $n_1 \geq n_2 \geq n_3$  satisfaciendo las siguientes condiciones:

- $n_1 = 2$  y  $n_2 = 1$ ,
- $n_1 \geq 2 = n_2$  y  $n_3 = 0$ ,
- $n_1, n_2 \geq 2$ ,  $n_3 = 0$  y  
 $\gcd(n_1, n_2) \neq 1$ ,
- $n_1 \geq 3$  y  $n_2 = n_3 = 1$ ,
- $n_1, n_2 \geq 3$ ,  $n_3 = 1$  y  
 $\gcd(n_1 + 1, n_2 + 1) \neq 1$ , o
- $n_1, n_2, n_3 \geq 2$  con la misma paridad.

(b)  $(nK_1) \vee (K_{m_1} + K_{m_2})$  con  $m_1 \geq m_2$  y  $n$  satisfaciendo las siguientes condiciones:

- $n \geq 2 = m_1$  y  $m_2 = 0$ ,
- $n = 2$ ,  $m_1 \geq 3$  y  $m_2 = 0$ ,
- $n, m_1 \geq 3$ ,  $m_2 = 0$  y  
 $\gcd(n, m_1) \neq 1$ ,
- $n \geq 1$  y  $m_1 = m_2 = 1$ ,
- $m_1 \geq 1$  y  $n = m_2 = 1$ ,
- $n, m_1 \geq 2$ ,  $m_2 = 1$  y  
 $\gcd(n - 1, m_1 + 1) \neq 1$ ,
- $n = 1$ ,  $m_1, m_2 \geq 2$  y  
 $\gcd(m_1 + 1, m_2 + 1) \neq 1$ , o
- $n, m_1, m_2 \geq 2$  con la misma paridad.

## Teorema

Sea  $G$  una gráfica conexa simple regular. Entonces  $G \in \mathcal{K}_{\leq 3}$  si y solo si  $G$  es una de las siguientes gráficas:

- (a)  $C_5,$
- (b)  $K_3 \square K_2,$
- (c)  $K_r,$
- (d)  $K_{r,r},$

- (e)  $K_{r,r,r},$
- (f)  $K_{r,r,r,r},$
- (g)  $C_4^{(-r,-r,-r,-r)}.$

donde  $C_4^{(-r,-r,-r,-r)}$  es la gráfica obtenida al reemplazar los vértices de  $C_4$  por cliques de tamaño  $r$ .

### Referencias:

- C.A. Alfaro y C.E. Valencia. Graphs with two trivial critical ideals. **Discret. Appl. Math.** 167 (2014) 33–44.
- C.A. Alfaro y C.E. Valencia. Small clique number graphs with three trivial critical ideals. **Spec. Matrices** 6 (2018) 122–154.
- C.A. Alfaro, M.D. Barrus, J. Sinkovic, R.R. Villagrán. Graphs with few trivial characteristic ideals. **Linear Algebra Appl.** 615 (2021) 155–174.
- C.A. Alfaro, M.D. Barrus, J. Sinkovic, R.R. Villagrán. The characterization of graphs whose sandpile group has fixed number of generators. In: J. Nešetřil, G. Perarnau, J. Rué, O. Serra (eds) Extended Abstracts EuroComb 2021. Springer International Publishing, Cham, pp 567–573.



¡Gracias por su atención!

Carlos A. Alfaro

alfaromontufar@gmail.com

<https://alfaromontufar.github.io>