

Universidad La Salle México  
Licenciatura en Actuaría  
Economía Matemática  
Segundo examen parcial

Nombre:

**Responda las siguientes preguntas.** (Una gráfica sin explicación no tendrá valor)

1. Sea  $a$  el último dígito de su matricula y  $b$  el penúltimo dígito de su matricula. Suponga que la función de producción de un bien está dada por  $f(l, k) = (a + b)k^3l^2$  y que la empresa quiere producir 100000 unidades. También sabemos que el salario es  $w=10+a$  y el costo del alquiler de maquinaria  $v=20+b$ . ¿Cuál es la combinación de los factores de producción que minimiza el costo de la producción?
2. El costo de fabricar televisores de pantalla plana ha disminuido en las últimas décadas. Considere ciertas implicaciones de este hecho.
  - (a) Dibuje una gráfica de la oferta y la demanda para mostrar el efecto de la caída de los costos de producción en el precio y la cantidad vendida de televisores de pantalla plana.
  - (b) En su diagrama muestre qué sucede con los excedentes del consumidor y del productor.
  - (c) ¿Quién se beneficia más con los costos de producción decrecientes: los consumidores o los productores de estos televisores?
3. ¿Cuál es la diferencia entre el PIB real y el PIB nominal? ¿Por qué un PIB nominal alto no necesariamente refleja que hay crecimiento?
4. A una pequeña nación de diez personas le fascina el programa de American Idol. Todo lo que producen y consumen son máquinas de karaoke y CD en las siguientes cantidades:

	Maquinas de karaoke		CD	
	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
2011	10	\$ 40	30	\$ 10
2012	12	\$ 60	50	\$ 12

- (a) Utilizando un método similar al del índice de precios al consumidor, calcule el cambio porcentual en el nivel general de precios. Utilice 2011 como el año base y fije la canasta en una máquina de karaoke y tres CD.
- (b) Utilizando un método similar al del deflactor del PIB, calcule el cambio porcentual del nivel general de precios. También utilice 2011 como año base.
- (c) ¿La tasa de inflación de 2012 es la misma utilizando los dos métodos? Explique por qué.

## Ejercicio 1.

La empresa quiere tener una producción

$$\textcircled{1} \quad f(k, l) = (a+b) k^3 l^2 = 100000$$

sujeta a una restricción presupuestaria

$$(20+b)k + (10+a)l = vk + wl$$

Entonces el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = (20+b)k + (10+a)l + \lambda (100000 - (a+b)k^3 l^2)$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = 20+b - \lambda(a+b)3k^2 l^2 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = 10+a - \lambda(a+b)2lk^3 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 100000 - (a+b)k^3 l^2 = 0$$

Despejando  $\lambda$  en las ecuaciones  $\textcircled{1}$  y  $\textcircled{2}$  tenemos:

$$\lambda = \frac{20+b}{(a+b)3k^2 l^2} = \frac{10+a}{(a+b)2lk^3}$$

Por lo que

$$\frac{20+b}{10+a} = \frac{(a+b)3k^2 l^2}{(a+b)2lk^3} = \frac{3l}{2k}$$

Despejando  $l$  obtenemos

$$l = \left( \frac{20+b}{10+a} \right) \frac{2}{3} k$$

Sustituyendo en  $\textcircled{3}$  tenemos

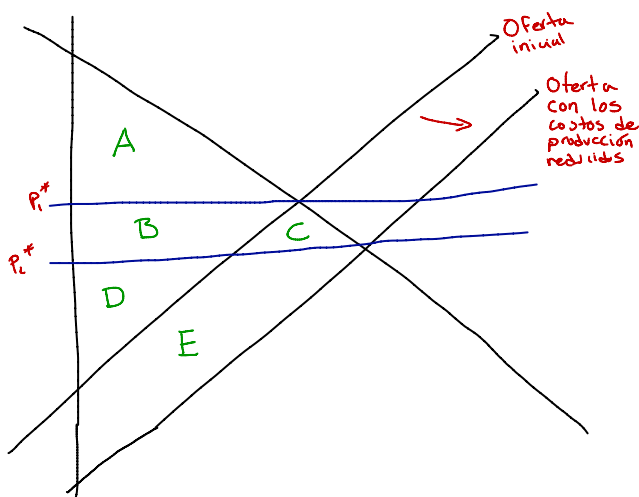
$$(a+b)k^3 \left( \frac{20+b}{10+a} \right)^2 \left( \frac{2}{3} \right)^2 k^2 = 100000$$

$$k = \sqrt[5]{\frac{100000}{(a+b) \left( \frac{20+b}{10+a} \right)^2 \left( \frac{2}{3} \right)^2}}$$

$$\text{y} \quad l = \left( \frac{20+b}{10+a} \right) \left( \frac{2}{3} \right) \sqrt[5]{\frac{100000}{(a+b) \left( \frac{20+b}{10+a} \right)^2 \left( \frac{2}{3} \right)^2}}$$

## Ejercicio 2.

a) Una reducción de los costos de producción desplazará a la derecha la curva de oferta.



b) El excedente del consumidor está dado, originalmente por el triángulo A, al aumentar la oferta su nuevo excedente estará dado por el triángulo A+B+C. El excedente del productor originalmente está dado por el triángulo B+D. Al reducirse el costo de producción su excedente será D+E

c) Ambos aumentan por igual.

c) Se benefician más los consumidores, pues con la caída de los costos de producción, aumenta el Excedente de consumidor

3° El PIB Nominal es la producción de bienes y servicios valuados a los precios actuales; y el Real valuados a precios constantes de un año Base.

El nominal no necesariamente refleja crecimiento, ya que podría ser efecto de la inflación, además que valora a precios actuales. Así que es conveniente ver su relación con el PIB real.

$$4^a) 2011: \$40(1) + \$10(3) = 40 + 30 = \$70$$

$$2012: \$60(1) + \$12(3) = 60 + 36 = \$96$$

$$\text{Cambio Porcentual: } \frac{96 - 70}{70} \times 100 = \underline{37.14\%}$$

$$b) \text{PIB Nom}_{2011}: \$40 \times 10 + \$10 \times 30 = 400 + 300 = \$700$$

$$\text{PIB Nom}_{2012}: \$60 \times 12 + \$12 \times 50 = 720 + 600 = \$1320$$

$$\text{PIB Real}_{2011}: \$40 \times 10 + \$10 \times 30 = 400 + 300 = \$700$$

$$\text{PIB Real}_{2012}: \$40 \times 12 + \$10 \times 50 = 480 + 500 = \$980$$

$$\text{Deflactor PIB}_{2011}: \frac{700}{700} \times 100 = 100, \quad \text{Deflactor PIB}_{2012}: \frac{1320}{980} \times 100 = 134.69$$

$$\text{Cambio Porcentual: } \frac{134.69 - 100}{100} \times 100 = \underline{34.69\%}$$

c) Las tasas de inflación no son las mismas, ya que el deflactor del PIB no contempla el incremento en el precio de un bien importado

# Crecimiento económico



En la historia reciente, algunos países asiáticos, como Singapur, Corea del Sur y Taiwán han experimentado un crecimiento de aproximadamente 7% por año.

Esto es un ejemplo de que un país que experimenta un crecimiento acelerado puede pasar de encontrarse entre los países más pobres a encontrarse entre los más ricos del mundo.

En contraste, en algunos países como Chad, Gabon y Senegal, el crecimiento promedio se ha quedado estancado durante años.

¿Qué explica estas diversas experiencias?

¿Cómo mantienen los países más ricos su alto nivel de vida?

¿Qué políticas deberían buscar los países para promover un crecimiento más rápido?



# Crecimiento económico en el mundo

País	Periodo	PIB real por persona a principios del periodo*	PIB real por persona a finales del periodo*	Tasa de crecimiento (por año)
Japón	1890–2008	\$ 1504	\$35 220	2.71%
Brasil	1900–2008	779	10 070	2.40
México	1900–2008	1159	14 270	2.35
Alemania	1870–2008	2184	35 940	2.05
Canadá	1870–2008	2375	36 220	1.99
China	1900–2008	716	6020	1.99
Estados Unidos	1870–2008	4007	46 970	1.80
Argentina	1900–2008	2293	14 020	1.69
Reino Unido	1870–2008	4808	36 130	1.47
India	1900–2008	675	2960	1.38
Indonesia	1900–2008	891	3830	1.36
Pakistán	1900–2008	737	2700	1.21
Bangladesh	1900–2008	623	1440	0.78

\*El PIB real se mide en dólares de 2008.

**Fuente:** Robert J. Barro y Xavier Sala-i-Martin, *Economic Growth* (Nueva York: McGraw-Hill, 1995), tablas 10.2 y 10.3; *World Development Report* 2010, Tabla 1; y cálculos del autor.

La tabla muestra datos del PIB real por persona para 13 países.

Para cada país, los datos abarcan más de un siglo de historia.

Los datos del PIB real por persona muestran que los estándares de vida varían ampliamente de un país a otro.

En 2008 el ciudadano típico de India tenía menos ingreso real que el residente típico de Inglaterra en 1870.

Un país que se ha quedado atrás es el Reino Unido.

# Crecimiento económico en el mundo

País	Periodo	PIB real por persona a principios del periodo*	PIB real por persona a finales del periodo*	Tasa de crecimiento (por año)
Japón	1890–2008	\$1504	\$35 220	2.71%
Brasil	1900–2008	779	10 070	2.40
México	1900–2008	1159	14 270	2.35
Alemania	1870–2008	2184	35 940	2.05
Canadá	1870–2008	2375	36 220	1.99
China	1900–2008	716	6020	1.99
Estados Unidos	1870–2008	4007	46 970	1.80
Argentina	1900–2008	2293	14 020	1.69
Reino Unido	1870–2008	4808	36 130	1.47
India	1900–2008	675	2960	1.38
Indonesia	1900–2008	891	3830	1.36
Pakistán	1900–2008	737	2700	1.21
Bangladesh	1900–2008	623	1440	0.78

\*El PIB real se mide en dólares de 2008.

**Fuente:** Robert J. Barro y Xavier Sala-i-Martin, *Economic Growth* (Nueva York: McGraw-Hill, 1995), tablas 10.2 y 10.3; *World Development Report* 2010, Tabla 1; y cálculos del autor.

La tasa de crecimiento mide qué tan rápido aumento el PIB real por persona en un año típico.

$$\text{Tasa de crecimiento del año 0 al 1} = 100 \left( \frac{\text{PIB real del año 1} - \text{PIB real del año 0}}{\text{PIB real del año 0}} \right)$$

Si el PIB real por persona, que empieza en \$4,007 aumentara 1.80% en cada uno de los 138 años, terminaría en \$46,970.

Japón encabeza la lista, con una tasa de crecimiento promedio de 2.71% por año.

Hace cien años Japón no era un país rico.

“Se levanta el viento”

## Una imagen vale más que 100 estadísticas



Cada familia fue fotografiada afuera de su hogar, junto con todas sus pertenencias materiales.

En 2006, Reino Unido tenía un PIB por persona de \$36,130.

Una parte insignificante vive en una pobreza extrema, es decir, menos de 2 dólares al día.

Entre los jóvenes en edad de bachillerato 91% asiste a la escuela.

La probabilidad de que una persona viva hasta los 65 años es de 85% para los hombres y de 91% para las mujeres.

## Una imagen vale más que 100 estadísticas



En 2008, el PIB por persona de México era de \$14,270.

Alrededor de 5% de la población vivía con menos de \$2 al día.

Entre los jóvenes en edad de asistir al bachillerato, sólo 71% asiste a la escuela.

La probabilidad de que una persona sobreviva hasta los 65 años es de 78% para los hombres y de 86% para las mujeres.



# Una imagen vale más que 100 estadísticas



En 2008, el PIB por persona en Malí era de sólo \$1,090.

Más de tres cuartas partes de la población vive con menos de \$2 al día.

Entre los jóvenes en edad de asistir al bachillerato, sólo 29% asiste a la escuela.

La probabilidad de que una persona sobreviva hasta los 65 años es sólo de 38% para los hombres y de 42% para las mujeres.

“Ebano” de Ryszard Kapuscinski

# Productividad



La **productividad** es la cantidad de bienes y servicios producidos por cada unidad de insumo de trabajo.

El estándar de vida de un país depende de su capacidad para producir bienes y servicios.

Los estadounidenses viven mejor que los nigerianos porque los trabajadores estadounidenses producen más que los nigerianos.

¿por qué algunas economías son mucho mejores que otras en la producción de bienes y servicios?

# ¿Cómo se determina la productividad?



Los factores que determinan la productividad son capital físico, capital humano, recursos naturales y conocimiento tecnológico.

## Capital físico por trabajador

El conjunto de equipo y estructuras utilizados para producir bienes y servicios se denomina **capital físico** o simplemente capital.

Un trabajador con las herramientas manuales básicas puede fabricar menos muebles cada semana que un trabajador que tenga un equipo sofisticado y especializado para trabajar.

El capital es un factor de producción que se utiliza para producir más capital.

# ¿Cómo se determina la productividad?



## Capital humano por trabajador

**Capital humano** es el el conocimiento y las capacidades que adquieren los trabajadores por medio de la educación, la capacitación y la experiencia.

El capital humano incrementa la capacidad de una nación para producir bienes y servicios.

La producción de capital humano requiere insumos en forma de profesores, bibliotecas y tiempo del estudiante.



# ¿Cómo se determina la productividad?



## Recursos naturales por trabajador

Los **recursos naturales** son los insumos de producción que proporciona la naturaleza, como tierra, ríos y depósitos minerales.

Algunos países como Kuwait y Arabia Saudita sucede que se encuentran situados encima de los pozos petroleros más grandes del mundo.

Japón es uno de los países más ricos del mundo a pesar de tener pocos recursos naturales.

El comercio internacional hace que su éxito sea posible.



[illegible]

El **conocimiento tecnológico** se refiere a la comprensión de la mejor forma de producir bienes y servicios.

El capital humano se refiere a los recursos gastados para transmitirle esta comprensión a la fuerza de trabajo.

“El conocimiento es la calidad de los libros de texto de la sociedad, mientras que el capital humano es la cantidad de tiempo que la población ha dedicado a leerlos.”

# Crecimiento económico y política pública



¿Qué puede hacer una política gubernamental para incrementar la productividad y los estándares de vida?

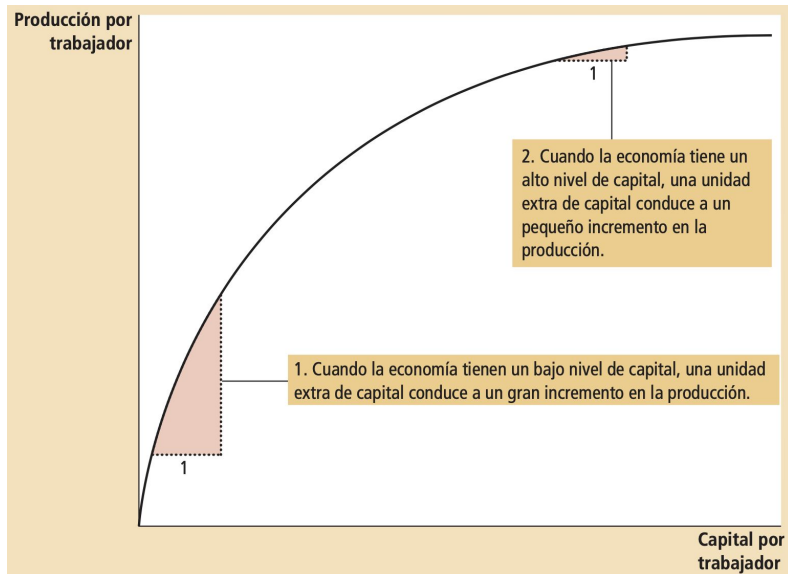
## Ahorro e inversión

Una manera de incrementar la productividad futura es invertir más recursos actuales en la producción de capital.

Para que la sociedad invierta más en capital, debe consumir menos y ahorrar más de su ingreso actual

Alentar el ahorro y la inversión es una forma en que un gobierno puede alentar el crecimiento y, en el largo plazo, mejorar el estándar de vida de la economía

# Crecimiento económico y política pública



## Rendimientos decrecientes y efecto de convergencia

El capital está sujeto a **rendimientos decrecientes**: a medida que aumentan las existencias de capital, disminuye la producción extra producida por una unidad adicional de capital.

El **efecto de convergencia** nos dice que es más fácil para un país crecer con mayor rapidez si empieza siendo relativamente pobre.

Los gobiernos al controlar otras variables, como el porcentaje del PIB dedicado a la inversión, los países pobres tienden a crecer más rápidamente que los ricos.

---

# Crecimiento económico y política pública



---

## Inversión del extranjero

Aun cuando algunos de los beneficios de la inversión fluyen de regreso al extranjeros, esta inversión incrementa las acciones de capital de la economía, lo que conduce a una mayor productividad y a salarios más altos.

La inversión del extranjero es una forma para que los países pobres aprendan las tecnologías más modernas que se desarrollan y se utilizan en países más ricos.

Por estas razones, muchos economistas que asesoran a los gobiernos en países menos desarrollados recomiendan políticas que alientan la inversión del extranjero.

A menudo, esto significa eliminar las restricciones que los gobiernos han impuesto sobre la propiedad extranjera del capital nacional.

# Crecimiento económico y política pública



## Educación

La política gubernamental puede mejorar el estándar de vida es proporcionar buenas escuelas y alentar a la población para que las aproveche.

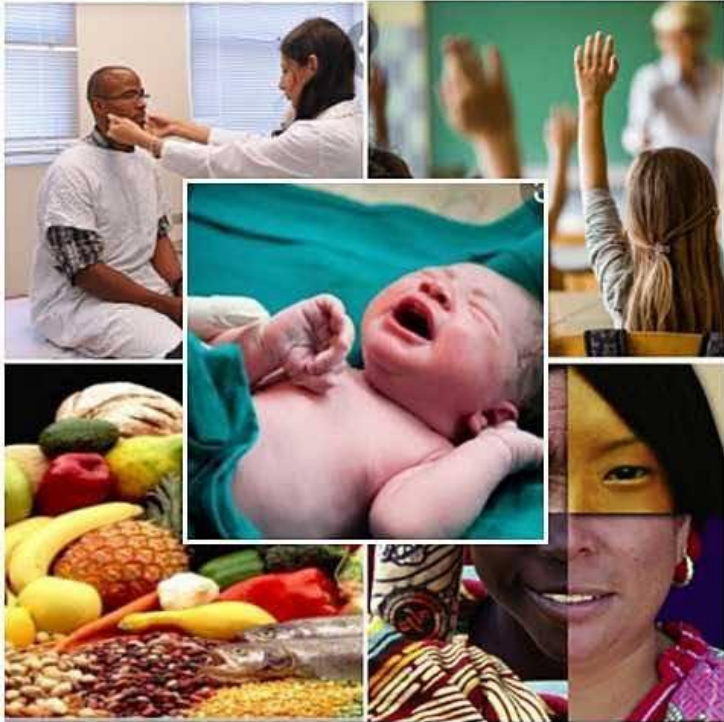
Una persona educada podría generar nuevas ideas acerca de cómo producir en una forma mejor los bienes y servicios.

Si esas ideas forman parte del conjunto de conocimientos de una sociedad, de manera que todos las puedan utilizar, entonces las ideas son un beneficio externo de la educación.

Un problema que enfrentan algunos países pobres es la **fuga de talentos**.



# Crecimiento económico y política pública



## Salud y nutrición

Si todo lo demás es igual, los trabajadores más saludables son más productivos.

Los países pobres lo son en parte porque sus poblaciones no disfrutan de buena salud, y sus poblaciones no disfrutan de buena salud en parte porque son pobres y no se pueden permitir un cuidado de la salud y una nutrición adecuadas.

Las inversiones en la salud de la población proporcionan una forma para que una nación incremente su productividad y mejore sus estándares de vida.

---

# Crecimiento económico y política pública



---

## Derechos de propiedad y estabilidad política

Los derechos de propiedad se refieren a la capacidad de las personas para ejercer autoridad sobre los recursos que poseen.

Una empresa minera no hará el esfuerzo para extraer mineral de hierro si espera que le roben éste.

Un país con un sistema de tribunales eficiente, con funcionarios gubernamentales honestos y una constitución estable disfrutará de un estándar de vida económico más alto que un país con un sistema de tribunales deficiente y funcionarios corruptos.

# Crecimiento económico y política pública



## Libre comercio

La mayoría de los economistas cree que los países pobres estarían mejor si buscaran políticas orientadas al exterior e integraran a esos países en la economía mundial.

Sin embargo, se han dado casos como el Brexit.

El comercio internacional de bienes y servicios puede mejorar el bienestar económico de los ciudadanos de un país.

En ciertas formas, el comercio es un tipo de tecnología.

# Crecimiento económico y política pública



## Investigación y desarrollo

La razón principal de que los estándares de vida sean más altos en la actualidad que hace un siglo, es el avance del conocimiento tecnológico.

La mayoría de los avances tecnológicos proviene de la investigación privada de empresas e inventores individuales, pero también hay un interés público en promover estos esfuerzos.

El gobierno tiene un rol para alentar la investigación y el desarrollo de nuevas tecnologías.

# Problemas y aplicaciones



En la década de 1990 y la primera década del siglo XX, inversionistas de las economías de Japón y China hicieron considerables inversiones directas y de cartera en Estados Unidos.

En esa época, muchos estadounidenses estaban molestos por el hecho de que estuviera ocurriendo dicha inversión.

- ¿En qué forma era mejor para Estados Unidos recibir esa inversión extranjera que no recibirla?
- ¿En qué forma habría sido todavía mejor que los estadounidenses hicieran esa inversión?



## IV. EL PRODUCTO E INGRESO EN EL CORTO PLAZO

La variable macroeconómica más importante es el producto interior bruto (PIB).

El PIB mide tanto la producción total de bienes y servicios de un país como su renta total.

Los países que tienen un elevado nivel de PIB per cápita, en comparación con los más pobres, tienen de todo, desde niños mejor nutridos hasta más ordenadores por hogar.

Que el PIB sea alto no significa que todos los ciudadanos de un país sean felices, pero es, sin duda, la mejor receta que pueden ofrecer los macroeconomistas para alcanzar la felicidad.

¿Cuánto producen las empresas de la economía?

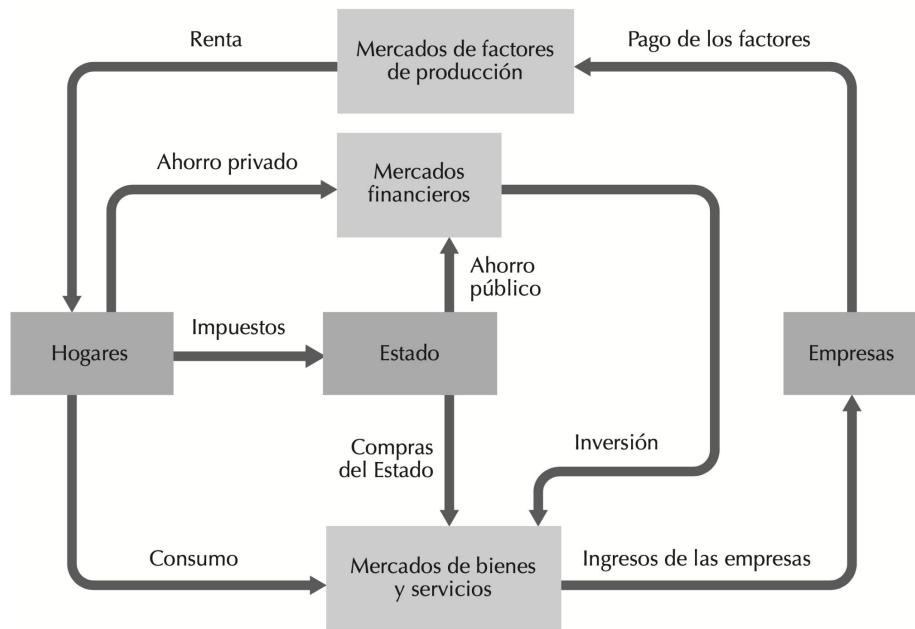
¿Qué determina la renta total de un país?

¿Quién recibe la renta generada por la producción?

¿Cuánto se destina a remunerar a los trabajadores y cuánto a remunerar a los propietarios de capital?

¿Qué equilibra la demanda y la oferta de bienes y servicios?

# Flujo circular de la economía



La figura refleja con mayor precisión cómo funcionan las economías reales.

Muestra las relaciones entre los agentes económicos –los hogares, las empresas y el Estado– y cómo fluyen el dinero entre ellos a través de los distintos mercados de la economía.

El Estado recibe ingresos derivados de los impuestos y los emplea para pagar sus compras.

Cualquier exceso de los ingresos fiscales sobre el gasto público se denomina **ahorro público**, que puede ser positivo (un **superávit presupuestario**) o negativo (un **déficit presupuestario**).

# ¿Qué determina la producción total de bienes y servicios?

La producción de bienes y servicios de una economía –su PIB– depende de:

(1) su cantidad de factores de producción, y

(2) su capacidad para transformar los factores en productos, representada por la función de producción.

# Factores de producción

Los **factores de producción** se utilizan para producir bienes y servicios.

Los dos más importantes son el capital y el trabajo.

El **capital** es el conjunto de herramientas que utilizan los trabajadores: la grúa de los obreros de la construcción, la calculadora del contable y el ordenador personal de este autor.

El **trabajo** es el tiempo que dedica la gente a trabajar.

Utilizamos el símbolo **K** para representar la cantidad de capital y el símbolo **L** para representar la de trabajo.

En el análisis subsecuente suponemos que la economía tiene una cantidad fija de capital y una cantidad fija de trabajo:

$$K = \bar{K}.$$

$$L = \bar{L}.$$

Suponemos que los factores de producción se utilizan plenamente, es decir, que no se despilfarra ningún recurso.

# La función de producción

Representando la cantidad de producción por medio del símbolo **Y**, expresamos la función de producción de la manera siguiente:

$$Y = F(K, L).$$

Esta ecuación indica que la producción es una función de la cantidad de capital y de la de trabajo.

La función de producción refleja la tecnología existente para convertir el capital y el trabajo en producción.

Si una persona inventa un método mejor para producir un bien, el resultado es un aumento de la producción con las mismas cantidades de capital y de trabajo.

Por tanto, el cambio tecnológico altera la función de producción.



## Rendimientos constantes de escala

Una función de producción muestra rendimientos constantes de escala si un aumento de todos los factores de producción en el mismo porcentaje provoca un incremento de la producción del mismo porcentaje.

Si la función de producción tiene rendimientos constantes de escala, obtenemos un 10 por ciento más de producción cuando incrementamos un 10 por ciento tanto el capital como el trabajo.

En términos matemáticos, una función de producción tiene rendimientos constantes de escala si

$$zY = F(zK, zL),$$

para cualquier número positivo  $z$ .

# La oferta de bienes y servicios

Los factores de producción y la función de producción determinan conjuntamente la cantidad ofrecida de bienes y servicios, que es igual a la producción de la economía.

En términos matemáticos,

$$Y = F(K, L)$$

# ¿Cómo se distribuye la renta nacional entre los factores de producción?

La producción total de una economía es igual a su renta total.

Como los factores de producción y la función de producción determinan conjuntamente la producción total de bienes y servicios, también determinan la renta nacional.

El diagrama del flujo circular muestra que esta renta nacional fluye de las empresas a los hogares a través de los mercados de factores de producción.



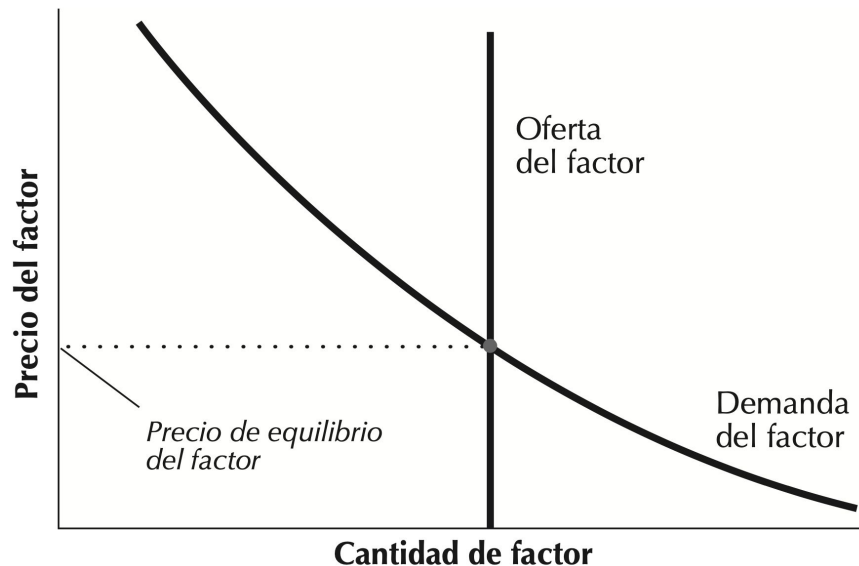
# Teoría neoclásica de la producción

La teoría moderna de la distribución de la renta nacional entre los factores de producción se basa en la idea clásica (del siglo XVIII) de que los precios se ajustan para equilibrar la oferta y la demanda.

La cual aplicaremos a los mercados de factores de producción.

Además, nos basaremos en la idea más reciente (del siglo XIX) de que la demanda de cada factor de producción depende de la productividad marginal de ese factor.

# Los precios de los factores



En una economía en la que los dos factores de producción son el capital y el trabajo, los precios de los dos factores son el salario que perciben los trabajadores y el alquiler que obtienen los propietarios de los bienes de capital.

El precio pagado a un factor de producción depende de la oferta y la demanda de sus servicios.

Suponiendo que la oferta es fija, la curva de oferta es vertical.

La curva de demanda tiene pendiente negativa.

La intersección de la oferta y la demanda determina el precio de equilibrio del factor.



# Las decisiones que toma una empresa competitiva

Una **empresa competitiva** es pequeña en relación con los mercados en los que comercia, por lo que apenas influye en los precios de mercado.

Tampoco puede influir en los salarios de los trabajadores, porque muchas otras empresas locales también emplean trabajadores.

La empresa competitiva considera que los precios de su producto y de sus factores vienen dados por las condiciones del mercado.

Para hacer su producto, necesita dos factores de producción: capital y trabajo.

Representamos la tecnología de producción de la empresa, por medio de la función de producción

$$Y = F(K, L)$$

---

La empresa vende su producto al precio **P**, contrata a los trabajadores al salario **W** y alquila capital a la tasa **R**.

El objetivo de la empresa es maximizar los beneficios.

Los **beneficios** son iguales al ingreso menos los costos.

$$\begin{aligned}\text{Beneficios} &= \text{Ingreso} - \text{Costes de trabajo} - \text{Costes de capital} \\ &= PY - WL - RK.\end{aligned}$$

El **ingreso**, **PY**, es igual al **precio de venta** del bien, **P**, multiplicado por la **cantidad producida** por la empresa, **Y**.

Los **costos de trabajo**, **WL**, son iguales al **salario**, **W**, multiplicado por la **cantidad de trabajo**, **L**.

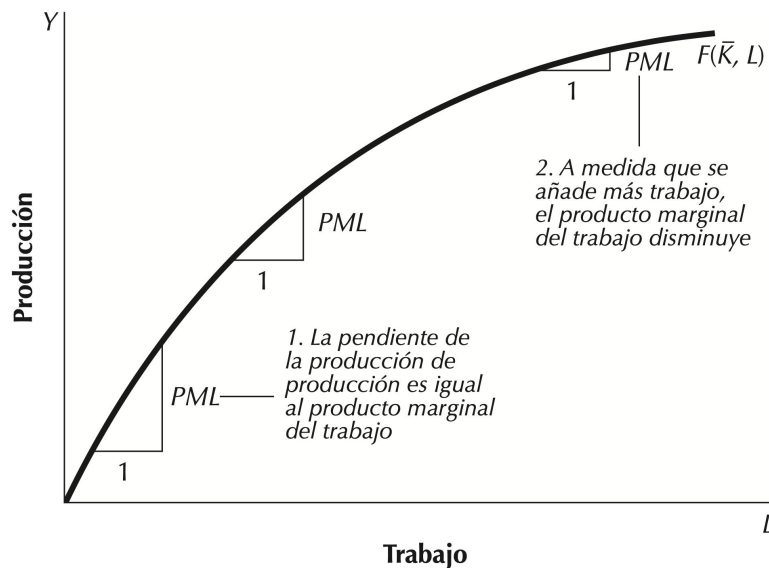
Los **costos de capital**, **RK**, son iguales al **precio de alquiler del capital**, **R**, multiplicado por la **cantidad de capital**, **K**.

Sustituyendo la función de producción  $Y=F(K,L)$  obtenemos  $\text{Beneficios} = PF(K, L) - WL - RK$ .

Los beneficios dependen del **precio del producto**, **P**, de los **precios de los factores** **W** y **R** y de las **cantidades de factores** **L** y **K**.

---

# La demanda de los factores de la empresa



La empresa contratará trabajo y alquilará capital en las cantidades que maximicen los beneficios.

Pero ¿cómo averigua qué cantidades son las que maximizan los beneficios?

El **producto marginal del trabajo (PML)** es la cantidad adicional de producción que obtiene la empresa de una unidad adicional de trabajo, manteniendo fija la cantidad de capital.

$$PML = F(K, L + 1) - F(K, L).$$

Las funciones de producción tienen la propiedad del **producto marginal decreciente**: el producto marginal del trabajo disminuye conforme se incrementa la cantidad de trabajo.

## Del PML a la demanda de trabajo

Cuando la empresa competitiva y maximizadora de los beneficios considera la posibilidad de contratar una unidad adicional de trabajo, se pregunta cómo afectaría esa decisión a los beneficios.

Compara el ingreso adicional generado por el aumento de la producción con el coste adicional de la contratación del trabajo adicional.

Una unidad adicional de trabajo produce **PML** unidades de producción y cada unidad de producción se vende a **P** pesos.

Entonces el ingreso adicional es **PxPML**.

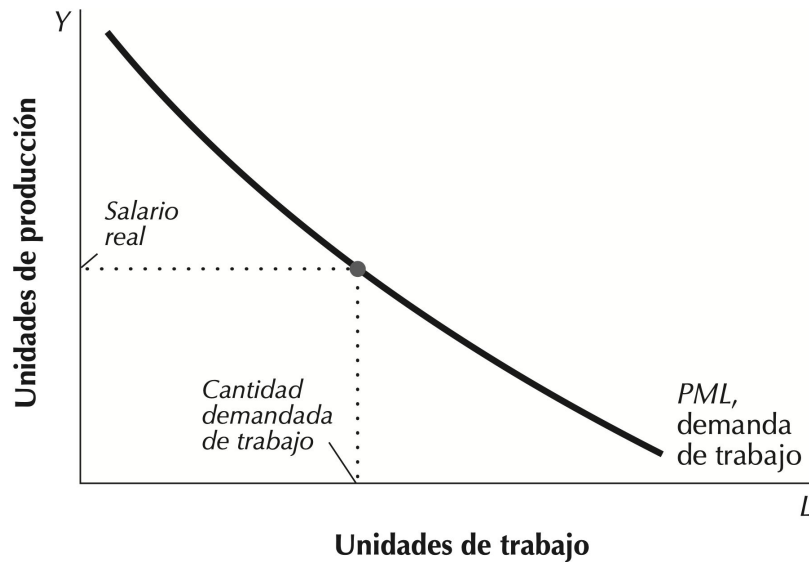
El coste adicional de contratar una unidad más de trabajo es el salario **W**.

Así, la variación que experimentan los beneficios contratando una unidad adicional de trabajo es

$$\Delta \text{ Beneficios} = \Delta \text{ Ingreso} - \Delta \text{ Coste}$$

$$= (P \times PML) - W.$$

## ¿cuánto trabajo contrata la empresa?



El gerente continúa contratando trabajo hasta que la siguiente unidad ya no sea rentable; es decir, hasta que el **PML** alcance el punto en el que el ingreso adicional sea igual al salario, **W**.

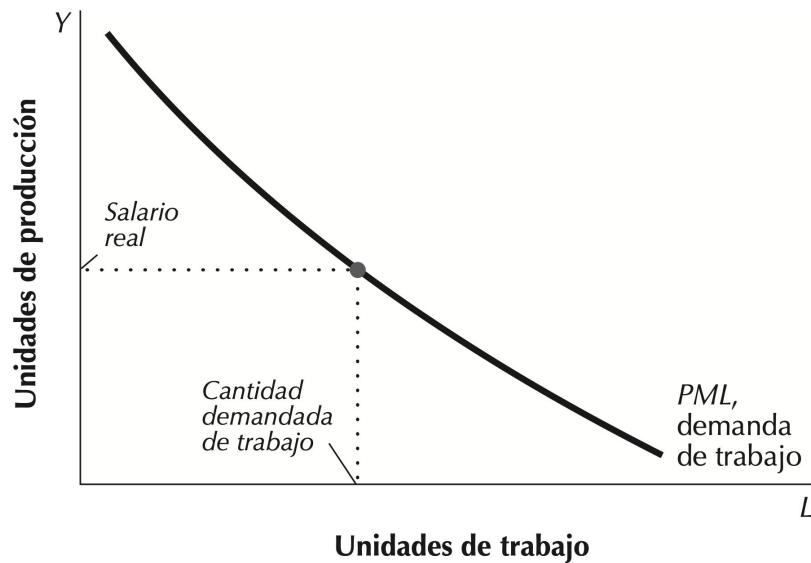
Es decir,  $P \times PML = W$ .

Qué es lo mismo que  $PML = W/P$ .

donde  $W/P$  es el **salario real**, es decir, el pago al trabajo medido en unidades de producción en lugar de pesos.



# ¿cuánto trabajo contrata la empresa?

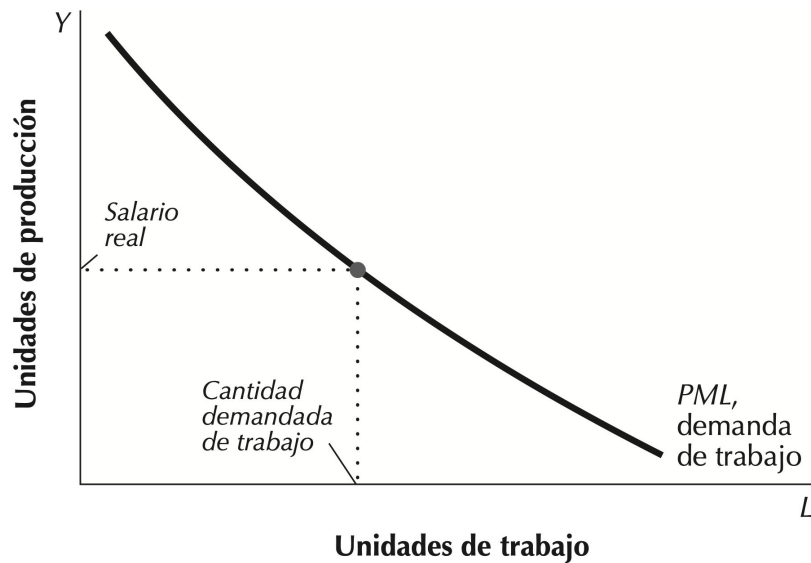


Supongamos que el precio del pan,  $P$ , es de 2 euros la barra y que un trabajador gana un salario,  $W$ , de 20 euros por hora.

El salario real,  $W/P$ , es de 10 barras por hora.

En este ejemplo, la empresa continúa contratando trabajadores en la medida en que un trabajador adicional produzca al menos 10 barras por hora.

## ¿cuánto trabajo contrata la empresa?



El producto marginal del trabajo,  $PML$ , depende de la cantidad de trabajo.

La curva  $PML$  tiene pendiente negativa porque el  $PML$  disminuye conforme aumenta  $L$ .

La empresa contrata trabajo hasta el punto en el que el salario real,  $W/P$ , es igual al  $PML$ .

Por tanto, esta curva también es la curva de demanda de trabajo de la firma.

# El PMK y la demanda de capital

El **producto marginal del capital (PMK)** es la cantidad de producción adicional que obtiene la empresa de una unidad adicional de capital, y se mantiene constante la cantidad de trabajo:

$$PMK = F(K + 1, L) - F(K, L).$$

El capital está sujeto a la regla del producto marginal decreciente.

El aumento que experimentan los beneficios alquilando una máquina es el ingreso adicional generado por la venta de la producción de esa máquina menos su precio de alquiler:

$$\begin{aligned}\Delta \text{ Beneficios} &= \Delta \text{ Ingresos} - \Delta \text{ Coste} = \\ &= (P \times PMK) - R.\end{aligned}$$

La empresa continúa alquilando más capital hasta que el  $PMK$ , que va disminuyendo, se iguala al precio real de alquiler:  $PMK = R/P$ .

El **precio real de alquiler del capital** es el precio de alquiler expresado en unidades de bienes en lugar de pesos.

# Distribución de la renta nacional

Si todas las empresas de la economía son competitivas y maximizadoras de los beneficios, cada factor de producción percibe su aportación marginal al proceso de producción.

El **salario real** pagado a cada trabajador es igual al  $PML$  y el **precio real** de alquiler pagado a cada propietario de capital es igual al  $PMK$ .

La renta que queda una vez que las empresas han pagado los factores de producción es el **beneficio económico** de los propietarios de las empresas.

$$\text{Beneficio económico} = Y - (PML \times L) - (PMK \times K).$$

Y la renta nacional

$$Y = (PML \times L) + (PMK \times K) + \text{Beneficio económico}.$$

## ¿Cuál es la magnitud del beneficio económico?

Si la función de producción tiene la propiedad de los rendimientos constantes de escala, como suele considerarse, el beneficio económico debe ser nulo.

Esta conclusión se desprende de un famoso resultado matemático llamado teorema de Euler, según el cual si la función de producción tiene rendimientos constantes de escala,

$$F(K, L) = (PMK \times K) + (PML \times L).$$

Si es cero, ¿cómo explicamos la existencia de «beneficios» en la economía? En el mundo real la mayoría de las empresas poseen el capital que utilizan en lugar de alquilarlo. Como los propietarios de empresas y los propietarios de capital son las mismas personas.

# Beneficio contable

$$\text{Beneficio contable} = \text{Beneficio económico} + (\text{PMK} \times K)$$

El «beneficio» en la contabilidad nacional debe ser principalmente el rendimiento del capital.

Cada factor de producción recibe su producto marginal y estas cantidades pagadas a los factores azotan la producción total. *La producción total se divide entre las cantidades pagadas al capital y las cantidades pagadas al trabajo, cantidades que dependen de las productividades marginales.*



---

## **¿Qué función de producción concreta describe la manera en que las economías reales transforman el capital y el trabajo en PIB?**

---

■ 

---

Paul Douglas fue senador de Estados Unidos por Illinois desde 1949 hasta 1966. La distribución de la renta nacional entre el capital y el trabajo se había mantenido más o menos constante durante un largo periodo. A medida que la economía se había vuelto más próspera con el paso del tiempo, la renta de los trabajadores y la renta de los propietarios de capital habían crecido casi exactamente a la misma tasa.

Douglas preguntó a Charles Cobb, matemático, si existía una función de producción que produjera participaciones constantes de los factores si estos siempre ganaban su producto marginal.

---

$$\text{Renta del capital} = PMK \times K = \alpha Y$$

$$\text{Renta del trabajo} = PML \times L = (1 - \alpha)Y$$

Donde  $\alpha$  es una constante comprendida entre cero y uno que mide la participación del capital en la renta. Es decir,  $\alpha$  determina la proporción de la renta que obtiene el capital y la que obtiene el trabajo. Cobb demostró que la función que tenía esta propiedad era;

$$Y = F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

Donde A es un parámetro mayor que cero que mide la productividad de la tecnología existente. Esta función llegó a conocerse con el nombre de **función de producción Cobb-Douglas**, tiene rendimientos constantes de escala.

---

El producto marginal del trabajo es:  $PML = (1 - \alpha) AK^\alpha L^{-\alpha}$

y el del capital es:  $PMK = \alpha AK^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$

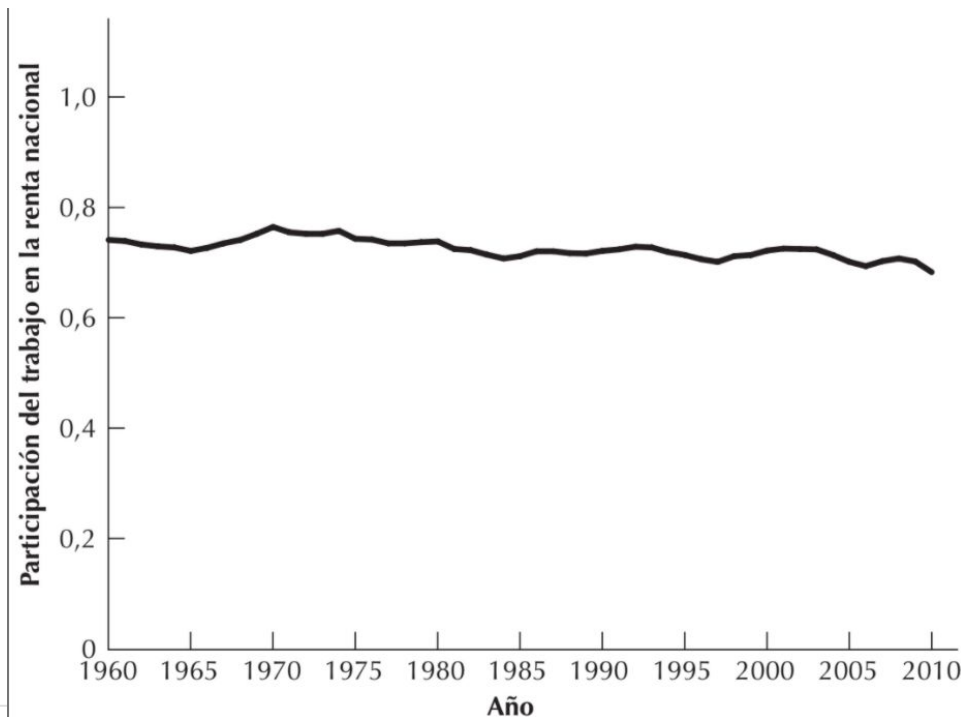
Los productos marginales correspondientes a la función de producción Cobb-Douglas también pueden expresarse de la forma siguiente:

$$PML = (1 - \alpha)Y/L$$

$$PMK = \alpha Y/K.$$

$Y/L$  se denomina *productividad media del trabajo* e  $Y/K$  se llama *productividad media del capital*. Si la función de producción es Cobb-Douglas, la productividad marginal de un factor es proporcional a su productividad media.  $(1 - \alpha)$  es la proporción de la producción correspondiente al trabajo y  $\alpha$  es la proporción de la producción correspondiente al capital.

# El cociente entre la renta del trabajo y la renta total en Estados Unidos.



La renta del trabajo ha representado alrededor de 0,7 de la renta total durante un largo periodo de tiempo.

# Problemas y aplicaciones

1. Suponga que la función de producción en la Europa medieval es  $Y = K^{0,5}L^{0,5}$ , donde  $K$  es la cantidad de tierra y  $L$  es la cantidad de trabajo. La economía comienza teniendo 100 unidades de tierra y 100 unidades de trabajo. Utilice una calculadora y las ecuaciones del capítulo para dar una respuesta numérica a cada una de las siguientes preguntas.

- a) ¿Cuánto produce la economía?
- b) ¿Cuáles son el salario y el precio de alquiler de la tierra?
- c) ¿Qué proporción de la producción recibe el trabajo?
- d) Si una peste mata a la mitad de la población, ¿cuál es el nuevo nivel de producción?
- e) ¿Cuáles son el nuevo salario y el nuevo precio de alquiler de la tierra?
- f) ¿Qué proporción de la producción recibe ahora el trabajo.

# Problemas y aplicaciones

2. Utilice la teoría neoclásica de la producción para predecir el efecto que ejercen en el salario real y en el precio real de alquiler del capital cada uno de los hechos siguientes:

- a) Una oleada de inmigración aumenta la población activa.
- b) Un terremoto destruye parte del stock de capital.
- c) Un avance tecnológico mejora la función de producción.
- d) Una elevada inflación duplica los precios de todos los factores y los productos en la economía.