Alfredo Carrillo del Campo

Notas de Clase

Complejidad y Computabilidad

Profesor:
Dr. Rodolfo Martinez Conde

Otoño 2018

Temario

1. Introducción
   1.1. Necesidad de la complejidad complejidad computacional
   1.2. Alfabetos y lenguajes
   1.3. Problemas y su codificación en el alfabeto $\{0, 1\}$
2. Computabilidad
   2.1. Maquinas de Turing
   2.2. Lenguajes computables y computables enumerablemente
   2.3. Imposibilidad del problema de detención
   2.4. Reducciones Computables
3. Clases de Complejidad
   3.1. Notación asintótica y funciones de complejidad apropiadas
   3.2. Clases básicas de complejidad: **TIME(f(n)), SPACE(f(n)), P, NP, L, NL, PSPACE y EXP)**
   3.3. Teoremas del aceleramiento lineal y la jerarquía del tiempo y sus consecuencias.
4. Reducciones y completez
   4.1. Reducciones polinomiales
   4.2. Problemas completos y duros
   4.3. La importancia de los problemas completos
5. Problemas **NP**-completos
   5.1. Teorema de *Cook* (Prueba de existencia de un problema **NP**-completo: SAT)
   5.2. Problemas **NP**-completos básicos: 3SAT, apareamientos, cubierta de vertices, circuito hamiltoniano, clan, etc).
   5.3. Técnicas: Restricción, remplazo local, diseño de componentes.
6. **P** *vs* **NP** y más allá.
   6.1. ¿Son **P** y **NP** iguales?
   6.2. La clase **BPP**
   6.3. Contar soluciones y la clase #**P**

Referencias

[1] Michael R Garey and David S Johnson. *Computers and intractability*, volume 29. wh freeman New York, 2002.

[2] Sanjeev Arora and Boaz Barak. *Computational complexity: a modern approach*. Cambridge University Press, 2009.

[3] Dexter C Kozen. Automata and computability, undergraduate texts in computer science, 1997.

[4] Cristopher Moore and Stephan Mertens. *The nature of computation*. OUP Oxford, 2011.

[5] Christos H Papadimitriou. *Computational complexity*. John Wiley and Sons Ltd., 2003.

[6] Michael Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*, volume 2. Thomson Course Technology Boston, 2006.

Formas de calificar

1. Ejercicios 40 %
2. Examen Parcial 10 %
3. Exposiciones 30 %
4. Examen final 20 %
5. Apuntes 15 %

1. Introducción

1.1. Necesidad de la complejidad computacional.

Es una materia *teórica* donde se resolverán preguntas como:

- ¿Qué significa que una función sea computable?
- Existen funciones no computables
- ¿Cómo el poder de computo depende en los constructos de programación?
- Modelo matemático de computo (Máquina de Turing)
- Si sí se puede calcular, ¿Cuánto cuesta calcularlo tanto en tiempo como en espacio de memoria? Aquí entran medidas como eficiencia, y un término que no se puede traducir: *untracktable*.[1]

1.2. Alfabetos y Lenguajes

Definición 1.2.1. Un **alfabeto** es un conjunto A finito. En símbolos, $|A| < \infty$.

Ejemplo 1.2.1. Determinamos cuáles conjuntos son alfabetos.

1. Todos los siguientes son alfabetos:
   - El alfabeto binario $\Sigma = \{0, 1\}$.
   - $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
   - Todas las letras del alfabeto junto con { á, é, í, ó, ú}.
   - $\Sigma = \{a, b, c\}$.
   - $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$, $\Sigma = \emptyset$.
2. El siguiente conjunto no es un alfabeto.
   - $I = [0, 1]$

Definición 1.2.2. A los elementos del conjunto Σ se les llama **símbolos** o **letras**.

Definición 1.2.3. Una **cadena** sobre un alfabeto Σ es cualquier secuencia finita de elementos de Σ. También algunos autores usan el término de **palabra**.

Ejemplo 1.2.2. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, entonces $aaba$ es una cadena sobre Σ. Pero $aa1ab$ no es una cadena sobre sigma pues $1 \notin \Sigma$.

Definición 1.2.4. La **longitud** de una cadena x sobre Σ se denota $|x|$ y es el numero de símbolos que contiene x.

[1] Se refiere a que si vale la pena correr el algoritmo. Si se tarda mucho no vale la pena.

Ejemplo 1.2.3. $|aaba| = 4$ o $|aabab| = 5$.

Existe una cadena única sobre Σ llamada cadena vacía y la denotamos por $\lambda(\Sigma)$. Si no hay ambigüedad, simplemente λ. Se caracteriza como aquella tal que $|\lambda| = 0$.

Una cadena de la forma $aa\dots a$ donde a se repite n veces se puede denotar por a^n. Por ejemplo, $aa = a^2$ o $aabb = a^2b^2$. Podemos dar una definición inductiva (recursiva) de a^n como sigue:

$$\begin{cases} a^0 & = \lambda \\ a^{n+1} & = aa^n \end{cases}$$

Definición 1.2.5. El conjunto de todas las cadenas sobre un alfabeto lo denotamos por $\Sigma^\star$ y le llamamos **cerradura** de Σ. La cerradura puede considerarse como el conjunto de palabras. En símbolos, $\Sigma^\star = \{x : |x| < \infty, \forall a \in x \Rightarrow a \in \Sigma\}$.

Ejemplo 1.2.4. Se muestran las cerraduras de distintos conjuntos.

- La cerradura de $\{a\}$ es $\{a\}^\star = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.
- La cerradura de $\{a, b\}$ es $\{a, b\}^\star = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$.

Definición 1.2.6. Un **lenguaje** es un subconjunto $A \subseteq \Sigma^\star$ de $\Sigma^\star$.

Operaciones en cadenas

Definición 1.2.7. Sea $\Gamma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \subseteq \Sigma$, éste último un alfabeto. Sean $x = a_1a_2\dots a_n$ y $y = b_1b_2\dots b_m \in \Sigma^\star$. La operación $(x \circ y))$ de **concatenación**, con notación más compacta xy, se define como $xy = a_1a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_m \in \Sigma^\star$.

Ejemplo 1.2.5. Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ un alfabeto y $x, y \in \Sigma$ dados por $x = 10111, y = 0001$, entonces $xy = 101110001 \in \Sigma^\star$.

Hasta ahora, el símbolo a^5 es mera notación. Sin embargo, tras introducir la defnción previa, puede considerarse como la operación concatenación 5 veces de a con sí mismo. Más aún, podemos extender esta noción a cadenas. Si x es una cadena entonces x^n es la cadena formada tras concatenar a x con si mismo n veces. Por ejemplo, $(aba)^5 = (aba)(aba)\dots(aba) = abaaba\dots aba$.

Definición 1.2.8. Un **monoide** es una pareja $(A, \circ)$ donde A es un conjunto y $\circ$ es una operación binaria $\circ : A \times A \to A$ donde se satisfacen las siguientes tres propiedades: cerradura, asociatividad y existencia de un elemento neutro en A.

Aquél que conozca de algebra moderna puede recordarlo como "casi" un grupo pues no pide la existencia de elementos inversos.

Teorema 1.2.1. *Sea Σ un alfabeto y la operación de concatenación es denotada por $\circ$. Luego $(\Sigma, \circ)$ es un monoide.*

Demostración. Primero, la operación $\circ$ es cerrada porque si $x, y \in \Sigma^\star$, entonces xy es una cadena cuyos símbolos están en Σ, se sigue que $xy \in \Sigma^\star$.

Segundo, la operación es asociativa. Sea Σ un alfabeto y x, y y $z \in \Sigma^\star$. Sea $x = a_1a_2..a_n, y = b_1b_2 \dots b_n$ y $z = c_1c_2 \dots c_n$. Luego

$$\begin{aligned}(xy)z &= (a_1a_2..a_nb_1b_2 \dots b_n)c_1c_2 \dots c_n \\ &= a_1a_2..a_nb_1b_2 \dots b_nc_1c_2 \dots c_n \\ &= a_1a_2..a_n(b_1b_2 \dots b_nc_1c_2 \dots c_n) \\ &= a_1a_2..a_n(yz) \\ &= x(yz)\end{aligned}$$

Tercero, la operación contiene un elemento identidad denominado λ. Esta prueba es trivial pero se hace en el Ejercicio 1. Note que como no existe un elemento inverso, $(\Sigma, \circ)$ no es un **grupo**. ■

Ejercicio 1. Probar que para todo $x \in \Sigma^\star$ se sigue que $x\lambda = \lambda x = x$.

Demostración. Sea $x \in \Sigma^\star$. Si $x = \lambda$ entonces $x\lambda = \lambda^2 = \lambda x = \lambda = x$. Si $x \neq \lambda$, sea $x = a_1a_2 \dots a_n$, con $n \geq 1$. Luego

$$\begin{aligned}x\lambda &= (a_1a_2 \dots .a_n) \circ \lambda = a_1a_2 \dots .a_n = x. \\ \lambda x &= \lambda \circ (a_1a_2 \dots .a_n) = a_1a_2 \dots .a_n = x.\end{aligned}$$

■

Ejercicio 2. Probar que para toda $x, y \in \Sigma^\star$ se sigue que $|xy| = |x| + |y|$.

Demostración. Usaremos inducción sobre la longitud de y. Para el caso base, sea y una cadena tal que $|y| = 0$. En este caso $y = \lambda$, por lo tanto $xy = x\lambda = x$, por el Ejercicio 1. Se sigue que $|xy| = |x\lambda| = |x| = |x| + 0 = |x| + |y|$.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que la propiedad es cierta para $|y| \leq n, n \in \mathbb{N}$. Por demostrar que si $|y| = n + 1$ entonces $|xy| = |x| + |y|$.

Sea $y = a_1a_2 \dots a_na_{n+1} = y_1a_{n+1}$, donde y_1 es igual a la cadena de y excepto que no contiene el último símbolo. Por hipótesis de inducción se tiene que $|y| = |y_1a_{n+1}| = |y_1| + |a_{n+1}|$. Se sigue que

$$\begin{aligned}|xy| &= |x(y_1a_{n+1})| \\ &= |(xy_1)a_{n+1}| \\ &= |xy_1| + |a_{n+1}| \\ &= |x| + |y_1| + |a_{n+1}| \\ &= |x| + |y|.\end{aligned}$$

■

Operaciones en conjuntos

Se denotan subconjuntos de $\Sigma^\star$ usualmente con las letras $A, B, C, \ldots$. Se define la operación concatenación sobre conjuntos y se definen propiedades y notaciones análogas a las de la sección previa.

Definición 1.2.9. Sean A y B son subconjuntos de $\Sigma^\star$ ($A, B \subseteq \Sigma^\star$). La operación **concatenación** de A y B se define como $AB = \{xy : x \in A, y \in B\}$.

Es importante distinguir el contexto, si la operación es sobre cadenas o sobre conjuntos, ya que la operación se llama igual, pero se define según el caso. Note como en ningún caso la operación es conmutativa.

Ejemplo 1.2.6. Sea $A = \{a, aa\}, B = \{b, bb\}$. Luego $AB = \{ab, abb, aab, aabb\}$.

Ejemplo 1.2.7. Sea $A = \{a, aa\}, B = \{\lambda\}$, se sigue que $AB = A$. Más aún, así como λ es el elemento identidad para la concatenación en cadenas, en el contexto de conjuntos el elemento identidad es $\{\lambda\}$.

Ejercicio 3. Mostrar que si $A \subseteq \Sigma^\star$ y $B = \emptyset$ entonces $AB = \emptyset$.

Demostración. Claramente $\emptyset \subseteq AB$. Supongamos que estos conjuntos no son iguales. Entonces existe $x \in AB$. Por definición x está conformado por dos cadenas, una en A y otra en B. Sin embargo, B no contiene ninguna cadena, ni siquiera la cadena vacía. Se sigue que AB no puede contener elementos y por lo tanto $AB = \emptyset$. ■

Notación.

a) Sea $A \subseteq \Sigma^\star$, luego $A^n = AA \ldots A$, n veces.

b) Equivalentemente, $A^n = \{x \in \{a\} : |x| = n\}$.

Exhibimos porque ambas notaciones son consistentes. Partiendo de la primera: Sea $A^n = \{a_1 a_2 \ldots a_n : a_i \in A\} = \{x : x \in A^\star, |x| = n\}$, que coincide con la segunda notación. Lo importante de esto, es que la primera tiene que ver con n concatenaciones de conjuntos, mientras que la segunda con n la concatenación de simbolos.

Ejemplo 1.2.8. Consideremos al alfabeto $\{a, b\}$. Queremos calcular $|\{a, b\}^n|$.

$$|\{a, b\}^n| = |\{a, b\}\{a, b\} \ldots \{a, b\}| = |\{a, b\}||\{a, b\}| \ldots |\{a, b\}| = 2 \cdot 2 \ldots 2 = 2^n.$$

Un resultado más general es el siguiente. Sea A un alfabeto, luego $|A^n| = |A|^n$.

La definición 1.2.5 de cerradura la vimos estrictamente a partir de alfabetos. Ahora se exitiende de forma más general, a partir de lenguajes y la operación concatenación ya sea para cadenas o conjuntos.

Definición 1.2.10. Sea A un lenguaje. La **cerradura** o **estrella de Kleene** de $A \subseteq \Sigma^\star$ es

$$A^\star = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i,$$

donde $A^0 = \{\lambda\}$ y $A^{n+1} = A^n A$. En palabras, podemos pensar a $A^\star$ como todas las cadenas que podemos formar con el lenguaje A. Una notación equivalente en términos de concatenación de cadenas y no de conjuntos es

$$A^\star = \{x_1 x_2 \dots x_n : n \geq 0, x_i \in A\}$$

Expliquemos por qué es conveniente que $A^0 = \{\lambda\}$. Notemos que operaciones del tipo: $A^n A^m = A^{n+m}$. Nos gustaría entonces que $A^0 A^m = A^m$, es decir que A^0 actué como elemento identidad. Éste sabemos que es único y es $\{\lambda\}$. Por otro lado, para alfabetos no vacíos $A \subseteq \Sigma$, se sigue que $|A| < \infty$ y $|A^\star| = \infty$. El símbolo de * nos dice que el conjunto es infinito.

Por convenicencia $\emptyset^0 = \{\lambda\}$. Tenemos que hacer esta aclaración porque $\emptyset$ no es un alfabeto al cuál aplique la regla.

Ejercicio 4. Probar que si $A \subseteq \Sigma^\star$ entonces $A^\star A^\star = A^\star$.

Demostración. Por casos.
Si $A = \emptyset$ entonces $A^\star = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cdots = \{\lambda\}$. Luego, $A^\star A^\star = \{\lambda\}\{\lambda\} = \{\lambda\} = A^\star$.

Si $A \neq \emptyset$, sea $x \in A^\star \subseteq \Sigma^\star$. Por definición $x \in A^0 \cup A^1 \cup \dots$, en particular $x \in A^k$, para alguna $k \in \mathbb{N}$. Además $\lambda \in A^0 \subseteq A^\star$. Se sigue que $x = x\lambda \in A^\star A^\star$. Hemos probado la primera contención, $A^\star \subseteq A^\star A^\star$.

Sea $xy \in A^\star A^\star$, con $x, y \in A^\star$. Se sigue que $x \in A^{k_1}$ para alguna $k_1 \in \mathbb{N}$, y análogamente k_2 para y. Se sigue que $xy \in A^{k_1+k_2} \subseteq A^\star$. Se sigue la segunda contención y por lo tanto podemos concluir que $A^\star A^\star = A^\star$. ■

Propiedades adicionales

1. $A^{\star\star} = A^\star$ (idempotencia de *).

   Demostración. Por definición, $A^{\star\star} = \cup_{i=0}^{\infty}(A^\star)^i$ Por el ejercicio anterior, usando inducción es fácil probar que $(A^\star)^i = A^\star$, para toda $i \geq 1$. Finalmente, $(A^\star)^0 = \{\lambda\}$, por convenio (¿también?). Luego $A^{\star\star} = \cup_{i=0}^{\infty}(A^\star)^i = \cup_{i=0}^{\infty}(A^\star) = A^\star$. ■

2. $A^\star = \{\lambda\} \cup AA^\star$.

   Demostración. Se deduce del siguiente argumento:

   $$AA^\star = A \cup_{i=0}^{\infty} A^i = \cup_{i=0}^{\infty} A^{i+1} = \cup_{i=1}^{\infty} A^i.$$

   Es inmediato que $AA^\star \cup \{\lambda\} = \cup_{i=0}^{\infty} A^i = A^\star$. ■

3. $\emptyset^\star = \{\lambda\}$.

   Demostración. De la definición tenemos que $\emptyset^\star = \cup_{i=0}^{\infty} \emptyset^i$. Si $i = 0$, sabemos que para todo subconjunto $A \subseteq \Sigma$ se tiene que $A^0 = \{\lambda\}$, en particular para $\emptyset$. Por otro lado, para toda $i \geq 1$, se tiene que $\emptyset^i = \emptyset$. Se concluye que $\emptyset^\star = \{\lambda\}$. ■

1.3. Problemas y su codificación en el alfabeto {0,1}

En esta sección nos interesa describir un alfabeto dado en términos de otro. Informalmente, el problema de la **codificación** consiste en definir una función ν donde para cada símbolo $b \in B$, exista un elemento $a \in A$ que le "pegue", es decir $\nu(a) = b$. Intuitivamente estamos buscando una función $\nu : A^\star \to B^\star$ sobre, codificamos el alfabeto B a partir del alfabeto A. Sin embargo, el problema de la codificación es ligeramente más simple. No requiere mapear a cada elemento de $A^\star$ a un elemento de $B^\star$. Basta trabajar sobre un subconjunto de $A^\star$.

Definición 1.3.1. Definimos una **codificación válida** del alfabeto B a partir del alfabeto A si existe una función $\nu : \Gamma \to B^\star$, donde $\Gamma \subseteq A^\star$, que sea sobre.

Notación. Sean Σ y Ψ dos alfabetos. La función $\nu : \Gamma \subseteq \Sigma^\star \to \Psi^\star$ es igual a $\nu : \Gamma \to \Psi^\star$, donde $\Gamma \subseteq \Sigma$. La primera es una notación más compacta. Se enfatiza que Γ es el dominio de la función, no $\Sigma^\star$. Esta notación será particularmente útil para proponer codificaciones entre alfabetos, pues como mencionamos no es necesario hacerlo usando toda la clausura de Σ, sino basta un subconjunto Γ del mismo.

Los siguientes ejemplos codifican respectivamente a: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a partir de alfabetos pequeños, como por ejemplo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ o pequeñas codificaciones de este. Note como las codificaciones propuestas están bien definidas.

Ejemplo 1.3.1. Codifiquemos a $\mathbb{N}$ a partir del alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. Proponemos la función $\nu : \Gamma \subseteq \Sigma^\star \to \mathbb{N}$, donde $\nu(1^n) = n$. Podemos ver que es una codificación válida, en el sentido que es una función sobre. Aquí $\Gamma = \{1^n : n \in \mathbb{N}\}$. Hay codificaciones más eficientes como por ejemplo a partir del sistema binario. Por ejemplo, ahí con 32 bits podemos generar 2^{32} números.

Ejemplo 1.3.2. Para codificar a $\mathbb{Z}$, proponemos agregar el símbolo #. Ahora, $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, donde "#" se usa para distinguir el signo y hacemos lo mismo que en el Ejemplo 1.3.1. Formalmente, $\nu : \Gamma \subseteq \{0, 1\}^\star \to \mathbb{N}$ donde $\Gamma = \{x1^n, n \in \mathbb{N}, x \in \{\lambda, \#\}\} \cup \{0\}$,

$$\nu(x) = \begin{cases} \nu(1^n) = n & \text{si } n > 0 \\ \nu(\#1^n) = -n & \text{si } n < 0 \\ \nu(0) & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Por simplicidad no definiremos más el conjunto Γ, quedará implícito con la función de codificación.

Ejemplo 1.3.3. Para $\mathbb{Q}$ podemos considerar un símbolo adicional "\". Ahora $\Sigma = \{0, 1, \#, \backslash\}$ y proponemos la función $\nu : \Gamma \subseteq \Sigma^\star \to \mathbb{Q}$, donde

$$\nu(x) = \begin{cases} \nu(1^n \backslash 1^m) & = n \backslash m, \\ \nu(\#1^n \backslash 1^m) & = -n \backslash m, \\ \nu(0) & = 0 \end{cases}$$

A continuación mostramos un par de ejemplos con conjuntos menos convencionales.

Ejemplo 1.3.4. Codificar el $\{0, 1, \#\}$ a partir de $\{0, 1\}$. Proponemos leer en cadenas de dos. Luego $\nu(00) = 0, \nu(01) = 1, \nu(10) = \#$.

Ejemplo 1.3.5. Consideremos un alfabeto arbitrario $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y el alfabeto $\{0, 1\}$. Propongamos primero una codificación de $\{0, 1\}$ a partir de A. Sea $\mathbb{N}_n = \{a \in \mathbb{N} : a \leq n\}$. Definimos una codificación auxiliar válida (suprayectiva), con los naturales $\psi : A^\star \to \mathbb{N}_n$ como sigue: $\psi(a_i) = i$. Basta entonces definir una codificación de $\omega : \mathbb{N}_n \to \{0, 1\}^\star$.

Sea k tal que $2^k \geq n$, luego es posible representar a cada número en $\mathbb{N}_n$ en una cinta de longitud fija k, de la forma binaria usual, salvo que llenamos de ceros a la izquierda para que la codificación sea de exactamente k dígitos binarios y la codificación esté bien definida. Definimos $\omega(n) = n_2$, donde n_2 es tal representación binaria de n. Luego $(\omega \circ \psi) : A^\star \to \{0, 1\}^\star$ es claramente sobre. Más aún, $(\omega \circ \psi)^-1 : \{0, 1\}^\star \to A^\star$ es la codificación inversa, ya que ψ y ω son biyectivas.

Proponemos ahora una segunda codificación de a A a partir de $\{0, 1\}$. La función $\nu : \{0, 1\}^\star \to A^\star$ definida como sigue: $\nu(0^{n-i}1^i) = a_i$ es sobre.

Matrices

Si $\mathcal{K}$ es un campo, se definen las matrices $M_{m\times n}(\mathcal{K})$ cuyos elementos $a_i, j \in \mathcal{K}$. Los campos con los que estaremos trabajando comúnmente son $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para codificar matrices se extiende el diccionario de la forma $\Sigma = \{0, 1, \#, @\}$, donde los últimos dos símbolos son para separar renglones y columnas, respectivamente.

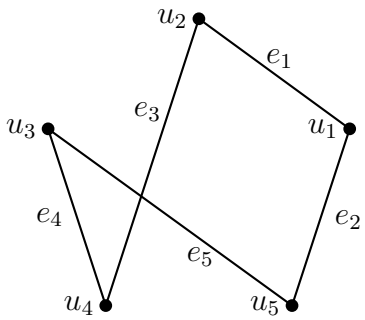
Definición 1.3.2. Una **gráfica** (o **gráfo**) es una pareja ordenada $G = (V, E)$ donde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto no vacío de vértices. Mientras que E es el conjunto de aristas dado como sigue, $E = \{uv : u, v \in V\}$.

En las **gráficas dirigidas** las aristas se llaman **arcos** y varían en que son *dirigidas*, es decir, tienen un sentido. Se denotan así $\vec{uv}$, con origen en u y destino en v.

Definición 1.3.3. La **matriz de adyacencia** de G es la matriz simétrica $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2, ..., n$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \text{ es adyacente a } j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.3.6. Ahora se presenta una gráfica y su respectiva matriz de adyacencia.



Descripción gráfica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de adyacencia.

Ejercicio 5. ¿Cuál es el número máximo de vértices de las gráficas que se pueden representar por matriz de adyacencia con $k = 32$ bits y con $k = 64$ bits.

Solución. La pregunta que nos debemos hacer es: ¿cuál es la máxima dimensión de la matriz cuadrada cuyo número de entradas no supera a 32? En otras palabras, ¿cuál es el máximo número natural cuyo cuadrado no supera 32? La respuesta es 5, por lo tanto son 5 vértices. Análogamente, para el caso de 64 bits, son 8 vértices.

Problemas de Decisión y Lenguajes

Definición 1.3.4. Un **problema de decisión** es una función con un *output* de un sólo bit: "sí" o "no". Para especificar un problema de decisión uno debe definir

- El conjunto A de posibles *inputs* (instancias).
- El subconjunto $Y \subseteq A$ de las denominadas "sí-instancias".

Hay problemas de decisión tanto en las matemáticas, como en la vida real. En este contexto, un *lenguaje* define un *problema* y un *problema* define un *lenguaje*. La idea es convertir una instancia de un problema, por ejemplo una gráfica dada, a una cadena de símbolos, digamos al alfabeto $\{0, 1\}$. Después se computa esta cadena para saber si se "acepta" o se "rechaza". Existe una correspondencia donde la "aceptación" corresponde a una "sí-instancia" mientras que el "rechazo" a una "no-instancia".

Instancia $\rightarrow$ Traducción a Lenguaje $\rightarrow$ Lectura de Máquina $\rightarrow$ Acepta\Rechaza.

Definición 1.3.5. Sea $G = (V, E)$ y $I \subseteq V$. Decimos que I es un **conjunto independiente** si y sólo si para todo $u, v \in I$ se sigue que $uv \notin E$.

Ejemplo 1.3.7. Dada una gráfica, encontrar el conjunto independiente de tamaño máximo (o conjunto máximal) es un problema clásico. Este problema tiene su equivalente problema de decisión, donde aquí además de dar la misma instancia se provee de una $k \in \mathbb{N}$ adicional. La pregunta que se hace es si existe o no un conjunto máximal de tamaño k en la gráfica G. Son *sí-instancias* aquellas que tienen un conjunto independiente de tamaño k. Las vamos a denotar por el conjunto $\langle G, k \rangle$.

Para problemas como este podríamos usar una máquina de Turing para resolverlo. En el siguiente capítulo estudiaremos cómo se definen éstas.

2. Computabilidad

Autómatas finitos

Intuitivamente, un *estado* de un sistema puede pensarse como una foto (*snapshot*) de éste. Se guarda así su configuración momentánea. Por ejemplo en una partida de ajedrez es cualquier escenario posible válido. De éste, podemos considerar las posibles *transiciones* que pueden proseguir. Note que por más complejo que es el ajedrez existen un número finito de escenarios posibles. A este tipo de sistemas, con un número de estados finitos se les conoce como *finite-state transition system* y el modelo que le asignamos se le conoce como *autómatas finitos*.

Definición 2.0.1. La definición formal de un **autómata finito determinístico** M es una 5-tupla dada por $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, donde

- Q es un conjunto finito, los elementos son llamados estados.
- Σ es un alfabeto.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es una función de transición. Dado un estado y un input, nos dice cual es el nuevo estado del sistema que se genera.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$; los elementos de F son llamados estados finales o estados de aceptación.

Ejemplo 2.0.1. Considere una sistema M donde $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, $\Sigma = \{a, b\}, F = \{3\}, q_0 = 0$ y la función delta está dada como sigue:

$$\delta(q, x) = \begin{cases} 1 & x = a, q = 0 \\ 2 & x = a, q = 1 \\ 3 & x = a, q = 2, 3 \\ q & x = b \end{cases}$$

Analizando a la función notamos que si el input es b, la transición nos dice que nos quedamos en el mismo estado. En cambio, cuando es a se abren casos, pero básicamente nos cambiamos de estado hasta quedar en el estado 3.

Informalmente la máquina opera como sigue. El *input* puede ser cualquier cadena x de $\Sigma^\star$. Supongamos que estamos en el estado inicial q_0. Se escanea el *input* x de izquierda a derecha, un símbolo a la vez. Leemos el primer símbolo y hacemos una transición de acuerdo a la función δ. Note que δ recibe un símbolo, no una cadena. Por eso a cada símbolo corresponde una transición. Eventualmente, se termina de leer la cadena x. En ese momento consideramos el estado actual y verificamos si está en F o no. En el primer caso decimos que x es *aceptado*, en el segundo que es *rechazado*.

2.1. Máquina de Turing

Se introduce aquí uno de los más poderoso autómatas que estudiaremos: las máquinas de *Turing*. Se llaman así por Alan Turing quien las inventó en 1936. Éstas son capaces de computar cualquier función que nosotros estemos acostumbrados a que una computadora realice. Por ello, tiene sentido decir que una función es computable, si lo es por una Maquina de Turing. Su definición está motivada porque los matemáticos buscaban definir el concepto de *efectividad computacional*. Con ello, plantear un modelo que formalizara qué es una función computable y que no es una función computable. Informalmente, una función no computable sería aquella que no acaba en tiempo finito o una función que no se pueda programar. Nos interesan los límites de estos modelos computacionales, más aún porque se asemejan a las capacidades de una computadora real.

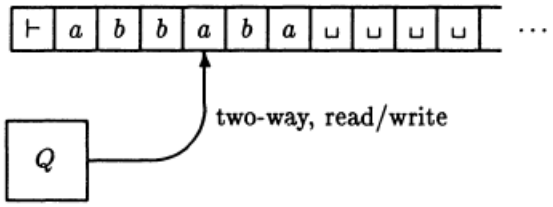
Se plantearon varios modelos, además de las máquinas de Turing. Por ejemplo los *Post systems*, μ-*recursive functions*, λ-*calculus*, *combinatory logic*. Todos son distintos pero es posible emular lo que hace cualquiera de estos modelos por cualquiera de los otros. Realmente, función computable no tiene que definirse relativo a cuál modelo pues son todos equivalentes, aunque aquí se hizo relativo a una máquina de Turing. Se eligió así porque el modelo de máquina de Turing es el que mejor captura la esencia de ser computable. Se define ahora rigurosamente una máquina de Turing.

Definición 2.1.1. Sean Γ un alfabeto y $\Sigma \subseteq \Gamma$. Una **máquina de Turing** (MT) es una 9-tubla, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, q_0, q_y, q_n)$, donde

- Q es un conjunto finito (estados).
- Σ es un conjunto finito (el alfabeto del *input*).
- Γ es un alfabeto de cinta ($\Sigma \subseteq \Gamma$).
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{R, L\}$ función de terminación (programa).
- $\sqcup$ el símbolo de espacio en blanco.
- $\vdash$ el símbolo de inicio hasta en la cinta, indica donde empieza el input.
- $q_0 \in Q$ Estado inicial
- $q_y \in Q$ Estado de aceptación
- $q_n \in Q$ Estado de rechazo

La máquina de Turing es el más similar a una computadora actual entre los otros modelos propuestos. Podemos pensarla con la siguiente imagen, en su versión clásica. Una cinta semi-infinita. Decimos *semi* porque la cinta sólo es infinita hacia la derecha. El símbolo $\vdash$ denota el inicio de la cinta. La cabeza de la cinta se puede mover en ambos sentidos y puede tanto leer, como escribir.

En la cinta hay una cadena finita de símbolos, que llamamos *input*. El input se escribe justo a partir del símbolo $\vdash$. Cuando acaba, se considera que tenemos infinitos espacios, denotados por $\sqcup$. La máquina comienza con un estado inicial q_0 y empieza a analizar los símbolos en la cinta de izquierda a derecha. Cada acción consiste en los siguientes pasos en estricto orden: leer el símbolo y estado actual, cambiar o no de estado, mover el lector un sólo espacio, ya sea a la derecha o a la izquierda.



Intuitivamente, $\delta(p, a) = (q, b, R)$ significa: Si se está en el estado p viendo en la cinta al símbolo $a \in \Gamma$, entonces se pasa al estado q, se escribe el símbolo "b" sobrescribiendo "a" y se mueve la cabeza lector en la dirección de "R".

Si la maquina entra en el estado q_y decimos que la **cadena es aceptada**. Si entra en el estado q_n decimos que la **cadena es rechazada**. En ambos casos decimos que la máquina M se **detiene**. En caso contrario, decimos que la máquina se queda en un **ciclo** (infinito), o que la máquina se **encicla** con esa cadena.

Para que el símbolo $\vdash$ no sea sobreescrito, para toda $p \in Q$ existe $q \in Q$ tal que $\delta(p, \vdash) = (q, \vdash, R)$. Si no la máquina se podría mover hacía la izquierda infinitamente. También requerimos que si la máquina está en estado de aceptación t o de rechazo b, entonces permanezca en el mismo hasta que se termine de leer la cinta. Esto es que para toda $b \in \Gamma$, existan $c, c' \in \Gamma$ y $d, d \in \{L, R\}$ tal que

$$\delta(t, b) = (t, c, d)$$
$$\delta(r, b) = (r, c', d')$$

Definición 2.1.2. Sea Σ un alfabeto y $M = (Q, \Gamma, \delta, q_0, q_y, q_n)$ una MT. Definimos el **lenguaje aceptado** por M como $L(M) = \{w \in \Sigma^\star : M \text{ acepta a } w\}$.

Definición 2.1.3. Sea M una MT sobre un alfabeto Σ. Definimos una **configuración** (descripción instantánea) de M como un elemento (q, w, n) del conjunto $Q \times \Gamma^\star \times \mathbb{N}$. Donde (q, w, n) significa que la máquina está en el estado q (estado actual) viendo el n-ésimo símbolo en la cadena $w = a_1 a_2 \dots a_n \dots a_N$.

Definición 2.1.4. Sea $(q_1, \vdash w, n)$ una configuración. Tras una acción de la MT se llega a la **siguiente configuración** $(q_2, \vdash w', n \pm 1)$, la cuál tiene un nuevo estado y un nuevo símbolo sobreescrito, y el lector estará situado en el símbolo $n+1$ o $n-1$. Se denota por $(q_1, \vdash w, n) \xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash w', n \pm 1)$, indicando que M, en 1 acción, puede pasar de la primera configuración a la segunda. Note que a lo más, w y w' difieren en un símbolo, el n-ésimo para ser precisos.

Extendemos de forma inductiva esta notación si se pasa de una configuración a otra en más de un paso. Sean α, β configuraciones.

- $\alpha \xrightarrow[M]{0} \alpha$.
- $\alpha \xrightarrow[M]{n+1} \beta$ si $\alpha \xrightarrow[M]{n} \gamma \xrightarrow[M]{1} \beta$, para alguna configuración γ y $n \in \mathbb{N}$.
- $\alpha \xrightarrow[M]{\star} \beta$, si es posible pasar de α a β sin especificar en cuántos pasos.

En las primeros dos puntos se especifica exactamente en cuántas transiciones. En el último punto solo se indica que es posible pasar de una configuración a otra en un número finito de transiciones.

En términos de configuraciones, decimos que $x \in \Sigma^\star$ está en el lenguaje aceptado $L(M)$ si y sólo si $(q_0, \vdash x, 0) \xrightarrow[M]{\star} (q_y, \vdash w, n)$. Análogamente, M rechaza a $x \in \Sigma^\star$ si $(q_0, \vdash x, 0) \xrightarrow[M]{\star} (q_n, \vdash w, n)$.

Un problema común es dado un lenguaje L, definir una máquina de Turing M tal que que $L(M) = L$. A continuación haremos algunos ejemplos partiendo de ese problema.

Ejemplo 2.1.1. Sea un alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\} \subseteq \{a, b, c\}^\star$. Describimos una MT cuyo lenguaje aceptado sea L. Se propone la siguiente máquina: $M = (Q, \Gamma, \delta, q_o, q_y, q_n)$, $\Sigma = \{a, b, c\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\vdash, \sqcup, \dashv\}$, $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{10}, q_y, q_n\}$, $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$. Finalmente, δ está dada por la siguiente tabla.

	$\vdash$	a	b	c	$\sqcup$	$\dashv$
q_0	$(q_0, \vdash, R)$	(q_0, a, R)	(q_1, b, R)	$(q_n, -, -)$	$(q_3, \dashv, L)$	-
q_1	-	$(q_n, -, -)$	(q_1, b, R)	(q_2, c, R)	$(q_3, \dashv, L)$	-
q_2	-	$(q_n, -, -)$	$(q_n, -, -)$	(q_2, c, R)	$(q_3, \dashv, L)$	-
q_3	$(q_y, -,$-$)$	$(q_n, -, -)$	$(q_n, -, -)$	$(q_4, \sqcup, L)$	$(q_3, \sqcup, L)$	-
q_4	$(q_n,$-$,$-$)$	$(q_n, -, -)$	$(q_5, \sqcup, L)$	(q_4, c, L)	$(q_4, \sqcup, L)$	-
q_5	$(q_n,$-$,$-$)$	$(q_6, \sqcup, L)$	(q_5, b, L)	-	$(q_5, \sqcup, L)$	-
q_6	$(q_7, \vdash, R)$	(q_6, a, R)	-	-	$(q_6, \sqcup, L)$	-
q_7	-	$(q_8, \sqcup, R)$	$(q_n, -,$-$)$	$(q_n, -, -)$	$(q_7, \sqcup, R)$	$(q_y, -, -)$
q_8	-	(q_8, a, R)	$(q_9, \sqcup, R)$	$(q_n, -, -)$	$(q_8, \sqcup, R)$	$(q_n, -, -)$
q_9	-	-	(q_9, b, R)	$(q_{10}, \sqcup, R)$	$(q_9, \sqcup, R)$	$(q_n, -, -)$
q_{10}	-	-	-	(q_{10}, c, R)	$(q_{10}, \sqcup, R)$	$(q_3, \dashv, L)$

Consideremos la transición de configuraciones de λ.

$$(q_0, \vdash \sqcup, 0) \xrightarrow[M]{1} (q_0, \vdash \sqcup, 1) \xrightarrow[M]{1} (q_3, \vdash \dashv, 0) \xrightarrow[M]{1} (q_y,$-$,$-$)$$

Ahora a la cadena "*abc*".

$$(q_0, \vdash abc\sqcup, 0) \xrightarrow[M]{2} (q_1, \vdash abc\sqcup, 2) \xrightarrow[M]{2} (q_2, \vdash abc\sqcup, 4) \xrightarrow[M]{1} (q_3, \vdash abc \dashv, 3) \xrightarrow[M]{3}$$
$$(q_6, \vdash \sqcup\sqcup\sqcup \dashv, 0) \xrightarrow[M]{4} (q_7, \vdash \sqcup\sqcup\sqcup \dashv, 4) \xrightarrow[M]{1} (q_y,$-$,$-$)$$

Ejercicio 6. Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Define una MT M tal que $L(M) = \{ww : w \in \Sigma^\star\}$.

Solución. Propongo dos respuestas. En la primera, $\Gamma = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}, \dot{a}, \dot{b}, \vdash, \sqcup, \dashv\}$. La segunda solución fue pensada por Saúl Caballero, Mario Vazquez y yo donde Γ es un conjunto de menor cardinalidad y por ello la solución es más elaborada pero aún así, creemos que más elegante. El conjunto Γ está dado por $\Gamma = \{a, b, \vdash, \sqcup, \dashv\}$.

1) Al inicio es posible corroborar si la cadena contiene un número par de elementos. Para ello hacemos lo siguiente. Definimos dos estados q_0 y q_1, conforme la máquina M lee la cinta, alterna entre estos dos estados. El primero representa que el elemento que leyó se encuentra en una posición impar, el otro representa que esta en posición par. Si al llegar al primer espacio la máquina se encuentra en estado impar entonces rechazamos la cadena. Si no, simplemente escribimos $\dashv$, denotando el fin de la cadena y comenzamos la segunda parte, es decir cambiamos a un nuevo estado q_2 que indica que esta prueba ya fue superada.

Ahora, nuestro lector está en el último símbolo. Si es a lo cambiamos a $\bar{a}$. Análogamente b a $\bar{b}$, y enseguida nos movemos hasta el inicio de la cadena. Nuevamente, si el primer símbolo es a lo hacemos $\dot{a}$ y a b lo hacemos $\dot{b}$. En seguida, nos movemos al final de la cadena y reconocemos el penúltimo símbolo porque el siguiente tiene una barra (formalmente, llegamos al símbolo con barra, y retrocedemos uno). Nuevamente, aplicamos una barra al penúltimo símbolo y un punto al segundo símbolo. Esto lo hacemos iteradamente hasta que todos los elementos en la primera mitad tengan una punto y todos en la segunda mitad tengan una barra. Por ejemplo, si la cadena original era $abaaba$ tendremos $\dot{a}\dot{b}\dot{a}\bar{a}\bar{b}\bar{a}$. En nuestra máquina, en q_2 se sustituye a por $\bar{a}$ y b por $\bar{b}$ y cambiamos de estado a q_3 donde se regresa al inicio de la cinta, pero se cambia de estado al estado q_4 si detecta $\dot{a}$ o $\dot{b}$ antes. En q_4 cambiamos a por $\dot{a}$ y b por $\dot{b}$ y cambiamos a q_5, donde leemos hacia la derecha, hasta encontrar el primer elemento con barra. Eventualmente, todas las letras fueron cambiadas, y eso se detecta en el estado q_2 cuando el símbolo que se lee es $\dot{a}$ o $\dot{b}$, y pasamos al estado q_6 que siempre nos regresa al inicio de la cadena, la tercera parte del algoritmo.

Considere que estamos al inicio de la cadena. Leemos el primer símbolo en q_7, lo borramos y lo comparamos con el primer símbolo que tenga una barra ya sea en q_8 o q_9, si son iguales, lo borramos y nos regresamos al "nuevo" primer símbolo, es decir el segundo. Si no rechazamos la cadena. Este proceso lo hacemos iterativo hasta que la cadena sea vacía (sólo contiene símbolos de espacio) en cuyo caso aceptamos la cadena. Corresponde cuando estando en q_7 se leen varios "$\sqcup$" y luego el símbolo "$\dashv$".

En resumen, la máquina identifica que tenga un número par de caracteres, la parte en dos mitades y verifica, uno a uno, que los elementos entre estas partes sean iguales. Si la primera fase o la tercera fases fallan la cadena es rechazada. Por ende, el lenguaje acepta a las cadenas que se conformen por dos subcadenas iguales y rechaza al resto, para concluir que $L(M) = L$.

A continuación mostramos la tabla de transiciones que define δ para esta máquina.

	$\vdash$	a	b	$\dot{a}$	$\dot{b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\sqcup$	$\dashv$
q_0	$(q_0, \vdash, R)$	(q_1, a, R)	(q_1, b, R)	$(q_n,\text{-},\text{-})$	$(q_n,\text{-},\text{-})$	$(q_n,\text{-},\text{-})$	$(q_n,\text{-},\text{-})$	$(q_2, \dashv, L)$	-
q_1	-	(q_0, a, R)	(q_0, b, R)	-	-	-	-	$(q_n,\text{-},\text{-})$	-
q_2	-	$(q_3, \bar{a}, L)$	$(q_3, \bar{b}, L)$	$(q_6, \dot{a}, L)$	$(q_6, \dot{b}, L)$	-	-	-	-
q_3	$(q_4, \vdash, R)$	(q_3, a, L)	(q_3, b, L)	$(q_4, \dot{a}, R)$	$(q_4, \dot{b}, R)$	-	-	-	-
q_4	-	$(q_5, \dot{a}, R)$	$(q_5, \dot{b}, R)$	-	-	-	-	-	-
q_5	-	(q_5, a, R)	(q_5, b, R)	-	-	$(q_2, \bar{a}, L)$	$(q_2, \bar{b}, L)$	-	-
q_6	$(q_7, \vdash, R)$	-	-	$(q_6, \dot{a}, L)$	$(q_6, \dot{b}, L)$	-	-	$(q_6, \sqcup, L)$	-
q_7	-	-	-	$(q_8, \sqcup, R)$	$(q_9, \sqcup, R)$	-	-	$(q_7, \sqcup, R)$	$(q_y,\text{-},\text{-})$
q_8	-	-	-	$(q_8, \dot{a}, R)$	$(q_8, \dot{b}, R)$	$(q_6, \sqcup, L)$	$(q_n,\text{-},\text{-})$	$(q_8, \sqcup, R)$	-
q_9	-	-	-	$(q_9, \dot{a}, R)$	$(q_9, \dot{b}, R)$	$(q_n,\text{-},\text{-})$	$(q_6, \sqcup, L)$	$(q_9, \sqcup, R)$	-

2) La primera parte es idéntica a la solución anterior, sólo que aquí retrocedemos al lector al inicio de la cadena. Aquí $\dashv$ representa el fin de la cadena original, pero también denotará el inicio de una nueva cadena que estaremos escribiendo. Tomamos el primer símbolo de la cadena original, lo borramos, y lo escribimos dos veces después de $\dashv$. Regresamos por el segundo símbolo, lo borramos y lo escribimos dos veces después del primer símbolo. Así, hasta que tenemos una replica de la cadena original, sólo que los símbolos se repiten dos veces. Por ejemplo:

$$\vdash abaaba \overset{\star}{\underset{M}{\rightarrow}} \vdash \sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup \dashv aabbaaaabbaa \dashv$$

Sobre la nueva cadena, podemos hacer que las posiciones pares sean $\sqcup$. Continuando con el ejemplo, sólo considerando la nueva cadena, tenemos que

$$\dashv aabbaaaabbaa \overset{\star}{\underset{M}{\rightarrow}} \dashv a\sqcup b\sqcup a\sqcup a\sqcup b\sqcup a\sqcup \dashv$$

Finalmente copiamos el último símbolo, lo borramos y lo escribimos en la segunda posición, después el penúltimo, lo borramos y lo escribimos en la cuarta posición. Al finalizar nuevamente escribimos $\dashv$. En el ejemplo procedemos como sigue:

$$\dashv a\sqcup b\sqcup a\sqcup a\sqcup b\sqcup a\sqcup \dashv \overset{1}{\underset{M}{\rightarrow}} \dashv aab\sqcup a\sqcup a\sqcup b\sqcup\cdots \dashv \overset{1}{\underset{M}{\rightarrow}} \dashv aabba\sqcup a\sqcup\cdots \dashv \overset{1}{\underset{M}{\rightarrow}} \dashv aabbaa \dashv \cdots \dashv$$

Finalmente, tomamos el primer elemento, lo borramos y lo comparamos con el último. Si son iguales lo borramos, si no rechazamos la cadena. Hacemos este proceso iterado de afuera hacia adentro. En el ejemplo tenemos:

$$\dashv aabbaa \dashv \cdots \dashv \overset{1}{\underset{M}{\rightarrow}} \dashv \sqcup abba\sqcup \dashv \cdots \dashv \overset{1}{\underset{M}{\rightarrow}} \dashv \sqcup\sqcup bb\sqcup\sqcup \dashv \cdots \dashv \overset{1}{\underset{M}{\rightarrow}} \dashv \sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup \dashv \cdots \dashv$$

Si nuestra cadena original tenía símbolos $x_1x_2x_3x_4\ldots.x_{2n-3}x_{2n-2}x_{2n-1}x_{2n}$, entonces está cadena reordenada se ve como $x_1x_{2n}x_2x_{2n-1}x_3x_{2n-2}x_{2n-3}\ldots x_nx_{n+1}$. De tal suerte, que podemos ir haciendo las comparaciones uno a uno de afuera hacia adentro. Comparamos x_1 con x_{n+1}, x_{2n} con x_n, x_2 con x_{n+2}, etc. Podemos concluir también que $L(M) = L$.

Note que a diferencia del ejercicio anterior, no hubo necesidad de encontrar la mitad de la cadena. Quizá lo tedioso de esta solución fue replicar la cadena original con espacios entre sus elementos iniciales y después reordenarlos. Sin embargo, consideramos que esta solución es más elegante que la anterior porque aunque a primera

instancia el reordenamiento de los elementos no hace mucho sentido, la comparación de elementos extremos en la cadena es precisamente entre elementos que queremos comparar para la verificación de que la cadena se compone de dos cadenas iguales.

Ejercicio 7.

a) Demuestra que el conjunto de MTs es numerable.

Demostración. Definimos M como una 9-tupla. Es un resultado conocido que el conjunto generado por productos cartesianos de conjuntos numerables un número finito de veces es numerable. En particular $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N}$, 9 veces, es numerable.[2] Basta, entonces probar que cada uno de los conjuntos de donde se conforma la máquina de Turing es numerable.

Comencemos con Q, queremos argumentar porque es posible enumerar a todos los posibles conjuntos finitos. Un resultado conocido es que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Como Q es finito, si fijamos la cardinalidad de Q, entonces podemos considerar la unión variando la cardinalidad de todos los posibles conjuntos Q. Basta probar que el número de conjuntos con tamaño fijo para Q es numerable. Note que el conjunto que contiene a todos los conjuntos Q de cardinalidad 2 es equipotente con $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, para 3 con $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, etc. Esto prueba el resultado. Por ende es posible enumerar a todos los posibles conjuntos Q. Análogamente para Σ y Γ. Para contabilizar todas las posibles funciones δ, por los argumentos anteriores tanto su dominio como su imagen son numerables. Por lo tanto podemos asignar a cada función δ una única pareja ordenada $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y este número de parejas es numerable. Finalmente, $q_n, q_y, q_0, \sqcup, \dashv$ son elementos fijos y trivialmente numerables. ■

b) Demuestra que el conjunto de todos los lenguajes es no numerable

Demostración. Supongamos un alfabeto no trivial, por ejemplo $\Sigma=\{0,1\}$. Luego, $\Sigma^\star$ es un conjunto infinito numerable. Es numerable, porque se puede describir como unión numerable de conjuntos numerables, a partir de la longitud de las cadenas. Sabemos que cada subconjunto de $\Sigma^\star$ define un lenguaje. Por lo tanto, requerimos contar el número de conjuntos del conjunto potencia. Por el *Teorema de Cantor* sabemos que la cardinalidad de $\Sigma^\star$ es estrictamente menor que $2^{\Sigma^\star}$ (notación de conjunto potencia). Por lo tanto el número de subconjuntos de Σ^* es no-numerable. Note que partimos de un alfabeto particular no trivial Σ de cardinalidad igual a 2, pero esto es suficiente para argumentar que el número de lenguajes de cualquier alfabeto con cardinalidad mayor o igual a 2 también es infinito no-numerable. ■

c) Concluir que hay mas problemas que soluciones.

[2]Para su prueba, es fácil construir una función inyectiva de este conjunto a los naturales utilizando los primeros 9 números primos.

Demostración. Cada lenguaje define un problema único: encontrar la máquina de Turing que sólo acepte a ese lenguaje. Por lo tanto hay una biyección entre lenguajes y problemas. Análogamente, cada Máquina de Turing tiene bien determinado cuáles cadenas acepta y rechaza, por lo tanto es una *solución* de un lenguaje particular. Nuevamente hay otra biyección entre soluciones y máquinas de Turing. Por lo tanto se sigue que haya más problemas que soluciones. Esto nos dice que desafortunadamente, ¡no todo lenguaje tiene una MT que lo acepte! ■

Definición 2.1.5. Una **relación** R de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es un subconjunto del producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Decimos que xRy están relacionados si $(x, y) \in R$.

Recordemos que para que una función esté bien definida, a cada elemento en el dominio corresponde un único elemento en la imagen. Las relaciones sirven para aquellos casos donde queramos que a un elemento x correspondan varias imágenes, por ejemplo y_1 y y_2. Para ello podemos decir que xRy_1, xRy_2 o bien que $(x, y_1), (x, y_2) \in R$.

Las MTs, ahora especificadas como Máquinas de Turing Determínisticas (MTDs), tienen una función δ que define la transición dado un estado y un símbolo. En las *Máquinas de Turing No-Determinísticas* (MTNDs) no existe una función δ sino una relación que indica que dado un símbolo y un estado, existen varias posibilidades de configuraciones siguientes. Sin embargo este número aunque posiblemente sea mayor a uno, tiene un número finito de transiciones posibles. Es claro entonces que un caso particular de las MTNDs son las MTDs. En este contexto convendrá enfatizar la distinción con las MDNTs y no escribir simplemente MTs.

Definición 2.1.6. Sea Σ un alfabeto. Una **máquina de Turing no determinística** es una 9-tupla, $N = (Q, \Sigma, \Gamma, R, \vdash, \sqcup, q_0, q_y, q_n)$, donde las definiciones de los argumentos son como en la Definición 2.1.1 de MT, salvo por que aquí la función δ es sustituida por la relación R. Aquí $R \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ es una relación con $|R| < \infty$.

Intuitivamente, los primeros dos argumentos emulan lo que en δ era el dominio y los últimos tres su imagen, sin la restricción de que sea una función. A pesar de esto, es posible denotarla como una función $R : Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R\}}$. Si $(q, a, s, b, D) \in R$ entonces escribimos $R(q, a) \ni (s, b, D)$. Enfatizamos que $R(q, a)$ no es un elemento de $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, sino un elemento del conjunto potencia de éste. Por ejemplo,

$$R(q, a) = \{(s_1, b_1, D_1), (s_2, b_2, D_2), \ldots, (s_r, b_r, D_r)\} \subseteq Q \times \Gamma \times \{L, R\}$$

El lenguaje de aceptación $L(N)$ para la MTND N y las configuraciones se define de la misma forma que para MTDs. De hecho ambos, tipos tienen el mismo poder de computo.

Teorema 2.1.1. *Sea $L \subseteq \Sigma^\star$ un lenguaje. Luego $L(M) = L$, para una MDT M, si y sólo si existe una MTND N, tal que $L(N) = L$.*

Sea Σ un alfabeto y $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ una función de cadenas. Una Máquina de Turing que calcula f es una 6-tupla $M = (Q, \Gamma, \delta, q_0, q_h, q_e)$ donde Q, q_0, Γ y δ son como en la definición 2.1.1. $q_h \in Q$ es estado de detención y $q_e \in Q$ es estado de "error".

Ejemplo 2.1.2. Una máquina de Turing que suma dos números naturales. Codificar a $\mathbb{N}$ en $\Sigma = \{0, 1\}$. Decimos, $f : A \subseteq \{1^n 01^m : n, m \in \mathbb{N}\} \to \Sigma^\star, f(1^n 01^m) = 1^{n+m}$. Formalmente, $M = (Q, \Gamma, \delta, q_0, q_h, q_e), Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, toq_h, roq_e)\}$ donde δ está dada como sigue.

δ	0	1	$\sqcup$
s	$(r, \cdot, \cdot)$	$(q_1, 1, R)$	$(r, \cdot, \cdot)$
q_1	$(q_2, 1, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(r, \cdot, \cdot)$
q_2	$(r, \cdot, \cdot)$	$(q_2, 1, R)$	$(q_3, \sqcup, L)$
q_3	$\cdot$	$(t, \sqcup, R)$	$\cdot$
t	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
r	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tesis de Church-Turing. Todo problema que puede ser resuelto por un procedimiento de un número *polinomial* de pasos puede ser resuelto por una MT de tiempo polinomial.

Es posible que una MT U simule paso por paso el comportamiento de cualquier otra MT, $M = (Q, \Gamma, \delta, q_0, q_y, q_n)$,[3]. A ésta le llamaremos **Máquina Universal (MUT)**. El alfabeto de la máquina universal es $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Recibe como argumento una cadena larga partida por un separador $\#$. La primera parte es una *descripción codificada* de la MT M, el número de estados, símbolos, función de transición, etc. La segunda partes es la cadena x codificada en el alfabeto $\{0, 1\}$ que se desea simular. Sí M acepta a x entonces U también, si M rechaza a x entonces U también, si M se queda en ciclo entonces U también. La cadena codificada se denota $M\#x$ por obvias razones. La máquina universal de Turing MUT es el "equivalente" a una computadora convencional como una PC, lap, tablet, celular int.

El proceso para la descripción codificada de la MT al alfabeto $\{0, 1\}$ es el siguiente. Sean Q, Γ, δ de una MT. Sin perdida de generalidad, $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$. Análogamente, $\Gamma = \{1, 2, \ldots, m\}, \{R, L\} \mapsto \{0, 1\}$. El símbolo $\sqcup$ equivale al símbolo 1. El inicio de la codificación es $1^n 01^m 0 \ldots$, indicando a n y m. Finalmente, si $\delta(q_1, a_2) = (q_2, a_4, R)$ entonces $\delta(1, 2) = (2, 4, 1) \mapsto 10110110111101$ (no es binario, es un alfabeto ineficiente donde los 0's son separadores).

El lenguaje $L(U)$ de la máquina universal de Turing U puede ser definida así

$$L(U) = \{M\#x \in \{0, 1, \#\} : M \text{ acepta a } x\}.$$

La máquina universal recibe el *input* $M\#x$, y verifica la primera parte para saber que M tiene sentido. Si no, se rechaza y lo mismo para x. Después procede a hacer

[3]Aquí estamos obviando 3 de los argumentos que definen una MT, pero es por mera simplificación de la notación, no es una notación rigurosa.

la simulación paso por paso. La cinta en U se parte en 3. En la primera parte está la configuración de la máquina M. En la segunda, está x codificado. En la tercer está, sirve para recordar el estado y posición de M, pues no necesariamente son los mismos que los de U.

Ejercicio 8. Construir a "groso modo" una máquina de Turing simule MTs que calculan funciones de cadena, $f : A \to \Sigma^\star$, $A \subseteq \Sigma^\star$.

Solución. La única diferencia con las MT usuales y las que calculan funciones son que las primeras al final aceptan o rechazan cadenas, mientras que en las otras se llega a un mensaje siempre de error o detención. Sin embargo, en esencia son iguales.

Sea $L(M)$ las cadenas que se pueden calcular correctamente, esto es $L(M) = \{x \in \Sigma^\star : M \text{ calcula } f(x) \text{ y llega a estado de detención}\}$. Luego $L(U)$ contiene a las cadenas codificadas en $\{0,1\}$ que se calculan correctamente en M. Esto es, $L(U) = \{M\#x \in \{0,1,\#\} : M \text{ calcula } f(x) \text{ en su cinta justo al momento de detención}\}$.

La construcción sería idéntica, eso me garantiza que la simulación sea posible. Finalmente si M llega a estado de detención entonces U también, si M llega a estado de error, entonces U también y si no se quedará en un ciclo.

2.2. Lenguajes computables enumerablemente y computables

Definición 2.2.1. Sea Σ un alfabeto y M una máquina de Turing sobre Σ.

a) Se dice que M es **total** si y sólo si para todo $x \in \Sigma^\star$, M se detiene en x, es decir, M se acepta o M rechaza a x, pero jamás se queda en ciclo.

b) Se dice que el lenguaje $L \subseteq \Sigma^\star$ es **computable enumerablemente (recursivo enumerablemente**) si existe una maquina de Turing M tal que $L = L(M)$. Cualquier elemento del lenguaje se va a aceptar.

c) **Co-recursivo enumerable** si su alfabeto complemento es recursivo enumerable.

d) Se dice que el lenguaje $L \subseteq \Sigma^\star$ es **computable (recursivo)** si existe una máquina de Turing *total* tal que $L = L(M)$.

En el recursivo numerable los elementos en el lenguaje se aceptan, pero los que no están dentro del alfabeto no podemos saber. En cambio, en el lenguaje recursivo nunca caeremos en un ciclo infinito.

Definición 2.2.2. Una propiedad lógica P es **decidible** si y sólo si $\{x \in \Sigma^\star : P(x)\}$ es computable. Una propiedad P es **semidecidible** si y sólo si $\{x \in \Sigma^\star : P(x)\}$ es computable enumerablemente. Se dice que P es **no trivial** si no es universalmente cierta o universalmente falsa. Algunas $x \in \Sigma^\star$ la cumplen y otras que no.

Ejemplo 2.2.1.

a) $A = \{w \in \{a,b\}^\star : w = a^n b^b\}$ es computable.

b) $P = \{a^p \in \{a\}^\star : p \text{ es primo}\}$ es computable.[4]

c) Todo conjunto regular (generado por expresiones regulares) es computable.

d) Todo conjunto computable es computable enumerablemente mas no el converso y se probará más adelenta como corolario.

Definición 2.2.3. Sea Σ un alfabeto.

a) Sea $\mathcal{C} = \{A \subseteq \Sigma^\star : A \text{ es computable}\}$.

b) Sea $\mathcal{CE} = \{A \subseteq \Sigma^\star : A \text{ es computable enumerablemente}\}$.

Propiedades de los conjuntos recién definidos

i) $\mathcal{C}, \mathcal{CE} \subseteq 2^{\Sigma^\star}$.

ii) $\mathcal{C}, \mathcal{CE} \neq \emptyset$.

iii) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{CE}$.

Para contestar esta pregunta tomamos dos lenguajes para la máquina universal de Turing U. El conjunto $HP = \{M\#x : M \text{ se detiene en } x\}$ conocido como "El problema de detención", y el lenguaje $MP = \{M\#x : x \in L(M)\}$, conocido como "El problema de la membresia".

Ejercicio 9. Demostrar que $HP, MP \in \mathcal{CE}$.

Demostración.
a) Proponemos una máquina universal U tal que reciba como input $M\#x$ y simula a M. Si y sólo si M se detiene entonces U acepta. Se sigue que $L(U) = HP$.

b) Proponemos una máquina universal U que acepte $M\#x$ si y sólo si M acepta. Es inmediato que $L(U) = MP$. ■

2.3. Imposibilidad del problema de detención

Teorema 2.3.1. *$HP \notin \mathcal{C}$.*

Demostración. Usaremos como motivación las proposiciones que se siguen a continuación de esta prueba. Para $x \in \{0,1\}^\star$ consideramos la máquina de Turing $M_\star$ con alfabeto $\{0,1\}$, la cual viene descrita por la cadena δ. De esta froma obtenemos una lista: $M_\lambda, M_0, M_1,\ M_{00}, M_{10}, M_{11}, M_{100}, \ldots$. De todas las posibles máquinas de Turing con alfabeto en $\{0,1\}$, Consideremos una matriz infinita, la cual tiene como renglones a las máquinas de la lista anterior y las columnas son cadenas en $\{0,1\}^\star$. En la posición $M_{x,y}$ la matriz contiene una H si M_x se detiene en y. Si M_x entra en un ciclo con y entonces la entrada tiene una L.

[4]Existe un algoritmo polinomial para saber si un número es primo de 2004.

	λ	0	1	00	01	10	11	000	...
M_λ	H	L	L	H	H	L	H	L	...
M_0	L	L	H	H	L	H	H	L	...
M_1	L	L	H	H	L	H	H	L	...
M_{00}	L	H	H	L	L	L	H	H	...
M_{01}	H	L	H	L	L	H	L	L	...
M_{10}	H	L	H	H	H	H	H	H	...
M_{11}	L	L	H	L	L	H	L	L	...
M_{000}	H	H	H	L	L	H	H	L	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Por contradicción supongamos que $HP \in \mathcal{C}$, es decir que es computable. Entonces existe una máquina de turing total $\mathcal{K}$ tal que $L(\mathcal{K}) = HP$, es decir para $M\#x \in \{0,1,\#\}^\star$. $\mathcal{K}$ se detiene y acepta si M se detiene en x. $\mathcal{K}$ se detiene y rechaza si M entra en un ciclo en x.

Construimos una Máquina de Turing $\mathcal{N}$, que en la entrada $x \in \{0,1\}^\star$:

1) Se construye M_x a partir de x.

2) Escribe la cadena $M_x\#x$ en su cinta.

3) Ejecuta a $\mathcal{K}$ en la entrada $M_x\#x$ aceptando si K rechaza y entra en un ciclo si $\mathcal{K}$ acepta. Es como seguir un comportamiento contrario.

Entonces el comportamiento de $\mathcal{N}$ en $x \in \{0,1\}^\star$ en es siguiente. $\mathcal{N}$ se detiene en x si y solo si $\mathcal{K}$ rechaza a $M_x\#x$ si y sólo si M_x se encicla en x. La pregunta para llegar a la contradicción. ¿Qué renglón de la matriz corresponde a $\mathcal{N}$. Podemos ver que $\mathcal{K}$ no existe. Por lo tanto HP no es computable.

Como resumen, usando la autoreferencia. Si $\mathcal{N}$ se detiene en $x_\mathcal{N}$ entonces $\mathcal{N}\#x_\mathcal{N} \in HP = L(\mathcal{K})$, entonces $\mathcal{K}$ acepta a $x_\mathcal{K}$, entonces $\mathcal{N}$ se encicla con $x_\mathcal{K}$. La otra contradicción es análoga en el caso que $\mathcal{N}$ no se detiene en $x_\mathcal{N}$. ■

Proposición 2.3.1. No existe $f : \mathbb{N} \to 2^\mathbb{N}$ biyectiva.

Demostración. Supongamos que si existe f biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $2^\mathbb{N}$. Formemos una matriz la cual tiene sus columnas indexadas por $\mathbb{N}$ y los renglones por conjuntos $f(0), f(1)$... Es decir por todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Llenamos los espacios de la matriz de la siguiente manera. En la posición $(f(k), j)$ colocamos un 1 e si $j \in f(k)$ y 0 si $j \notin f(k)$. Si el natural pertenece o no pertenece al conjunto.

	0	1	2	3	4	...
f(0)	0	1	1	0	1	...
f(1)	1	1	1	1	1	...
f(2)	0	0	0	1	1	...
f(3)	1	0	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Como f es sobre, todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es un renglon de la matriz. Pero ahora construimos un conjunto $B \subseteq \mathbb{N}$ que no aparece en la matriz. Este conjunto se forma con el complemento de bits de la diagonal de la matriz. En este caso la diagonales 0100... y su complemento es 1011... Por lo tanto B difiere del conjunto $f(k)$ justamente en el elemento k. Encontré un elemento que no está en la matriz. Por eso f sobre no existe. ■

Corolario 2.3.1. $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{CE}$

Ejercicio 10. Mostrar que no existe $f : A \to 2^A$ biyectiva par cualquier conjunto A.

Demostración. Consideremos a $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Notemos que $B \subseteq 2^A$. Debe existir un elemento x_0 tal que $f(x_0) = B$. Pero $x_0 \in A$, por lo tanto podemos preguntarnos si $x_0 \in B$ o $x_0 \notin B$. Si $x_0 \in B = f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin f(x_0)$, esto es una contradicción. Si $x_0 \notin B = f(x_0) \Rightarrow x_0 \in f(x_0)$, esto es una contradicción. Por lo tanto tal f no existe. ■

Ejercicio 11. Probar que el siguiente conjunto está en $\mathcal{C}$

$$HP_T = \{M\#x\#t : M \text{ se detiene en } x \text{ a lo más en } t \text{ pasos}\}$$

Demostración. Proponemos una máquina universal U que lea $M\#X\#t$ y después simule a la maquina M. Después de t pasos, M pudo haber rechazado, aceptado o ninguna de las dos. Luego U en este paso deberá aceptar la cadena si y solo si M la aceptó. Rechazar si M la rechazó y rechazar si aún no ha acabado. Se sigue que $HP_T \in \mathcal{C}$. ■

Ejercicio 12. Probar que A es computable si y sólo si A es computable enumrablemente y A y $\Sigma^\star - A$ es computable enumerablemente. Concluir que $HP^c \notin \mathcal{CE}$.

Demostración.
$\Rightarrow$)
Si el conjunto A es computable, entonces es inmediato que A es computable enumerablemente. Luego, existe una máquina de Turing total M_1, tal que $L(M_1) = A$. Sea M_2 una máquina de Turing idéntica a M_1, que rechaza a $x \in \Sigma^\star$ si M_1 la acepta, y la acepta si M_1 rechaza. Como M_1 es total, entonces M_2 acepta si y sólo si M_1 rechaza. Esto implica que $L(M_2) = \Sigma^\star - A$.

$\Leftarrow$)
Supongamos que $\Sigma^\star - A$ es computable enumerablemente. Por hipótesis A también

es computable enumerablemente. Luego existen M_1 y M_2, dos máquinas de Turing, tales que $L(M_1) = A$, y $L(M_2) = \Sigma^\star - A$.

Consideremos a una máquina universal U que simule alternadamente a M_1 y a M_2 dado un *input*. Esta máquina acepta si y sólo si M_1 acepta, por lo tanto $L(U) = A$. Por otro lado, como toda cadena x está en A o está en $\Sigma^\star - A$, entonces o M_1 acepta a x o M_2 acepta a x. Por ello, al hacer una simulación alternada de las máquinas se garantiza que U se detenga eventualmente en x. Por lo tanto U es una máquina total.

Probamos que $HP \notin \mathcal{C}$ entonces o HP no es computable enumerablemente o HP^c no es computable enumerablemente. Pero ya probamos que HP sí es computable enumerablemente. Se sigue que entonces la primera, que HP^c no es computable enumerablemente. ■

2.4. Reducciones Computables

Definición 2.4.1. Decimos que σ es una **función computable** si es total y es efectivamente computable. Esto quiere decir que σ es computable por una MT total que se detiene cuando en su cinta contiene a $\sigma(x)$.

Definición 2.4.2. Sean Σ, Δ alfabetos y $A \subseteq \Sigma^\star, B \subseteq \Delta^\star$ conjuntos. Una **reducción** (muchos a uno) de A en B es una función computable $\sigma : \Sigma^\star \to \Delta^\star$ tal que $\forall x \in \Sigma^\star$:

$$x \in A \Leftrightarrow \sigma(x) \in B.$$

Si existe la reducción, decimos que A se **reduce** a B, denotado por $A \leq_m B$, la m por el *many to one*.

La reducción construye a las máquinas más no ejecuta la instancia. Si no correría el riesgo de caer en un ciclo infinito.

Ejercicio 13. Probar que "$\leq_m$" es reflexiva y transitiva.

Demostración. Sea $A \subseteq \Sigma^\star$, por demostrar que $A \leq_m A$. Proponemos a la función $\sigma : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ tal que $\sigma(x) = x$, es decir σ es la función identidad. La función σ es computable porque tan pronto recibe un *input* se detiene sin tener que modificar su cinta. Luego, si $x \in A \Leftrightarrow \sigma(x) = x \in A$.

Supongamos que $A \leq_m B$ y que $B \leq_m C$. Por demostrar que $A \leq_m C$. Sea $A \subseteq \Sigma_A^\star$, $B \subseteq \Sigma_B^\star$ y $C \subseteq \Sigma_C^\star$ Por hipótesis, existen $\sigma_1 : \Sigma_A^\star \to \Sigma_B^\star$ y $\sigma_2 : \Sigma_B^\star \to \Sigma_C^\star$ totales, tales que $x \in A \Leftrightarrow \sigma_1(x) \in B$ y $y \in B \Leftrightarrow \sigma_2(y) \in C$. Proponemos la función $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Por lo anterior, es inmediato que $x \in A \Leftrightarrow \sigma_3(x) \in C$. Como σ_1 y σ_2 son funciones computables por hipótesis, entonces su composición es también computable. Basta, considerar una MT universal que simule la primera MT, correspondiente a σ_1 y cuando se detiene, comienza a simular a σ_2. Cuando ésta se detiene, entonces la máquina universal también.

Finalmente, "$\leq_m$" no es una relación de equivalencia porque no es simétrica. Satisface entonces sólo dos de tres propiedades. ■

Teorema 2.4.1. *Sean Σ, Δ alfabetos, $A \subseteq \Sigma^\star, B \subseteq \Delta^\star$ conjuntos y supongamos que $A \leq_m B$. Entonces*

a) Si $B \in \mathcal{CE}$ entonces $A \in \mathcal{CE}$.

b) Si $B \in \mathcal{C}$ entonces $A \in \mathcal{C}$.

Demostración.
a) Por demostrar que $A \in \mathcal{CE}$, es decir que existe una MT M tal que $L(M) = A$. Por hipótesis $A \leq_m B$ entonces existe $\sigma : \Sigma^\star \to \Delta^\star$ computable tal que $\forall x \in \Sigma^\star$ se sigue que $x \in A \Leftrightarrow \sigma(x) \in B$. Como $B \in \mathcal{CE}$ entonces existe una MT M_B tal que $L(M_B) = B$. Sea M una MT tal que en la entrada $x \in \Sigma^\star$ hace lo siguiente:

1) Calcula $y = \sigma(x)$.

2) Ejecuta a M_B en y.

3) Acepta a x si M_B acepta a y.

Como $x \in L(M) \Leftrightarrow M_B$ acepta a $\sigma(x) \Leftrightarrow \sigma(x) = y \in B \Leftrightarrow x \in A$, se concluye que $L(M) = A$.

Hasta aquí hemos probado la *correctez* de M. Resta probar que todos los pasos, 1), 2) y 3) se hacen en tiempo polinomial. El 1) es por hipótesis, está dado implícitamente al existir una reducción de $A \leq_m B$. El 2) es porque M_B se hace en tiempo polinomial. El 3) es porque M termina también cuando la simulación de B termina. Por lo tanto $A \in \mathcal{CE}$

b) Supongamos que B es computable. Por hipótesis, $A \leq_m B$, entonces existe una reducción $\sigma : \Sigma^\star \to \Delta^\star$. Si $B \in \mathcal{C}$ entonces existe una MT M_B total tal que $L(M_B) = B$. Sea M una MT tal que 1) Calcula $y = \sigma(x)$. 2) Ejecuta a M_B en y. 3) Si M_B acepta a y entonces M acepta a x. 4) Si M_B rechaza a y entonces M rechaza a x. La correctez y el tiempo polinomial del algoritmo se argumentan de forma idéntica que en a). Finalmente, M es total porque M_B lo es. Por lo tanto A es computable.

Otra prueba de b) sería como sigue. Por el Ejercicio 12 se sigue que como $B \in \mathcal{C}$ entonces $\Sigma^\star - B$ está en $\mathcal{CE}$. Dada la misma σ del inciso a) se sigue que $x \in \Sigma^\star - A \Leftrightarrow x \notin \Sigma^\star - B$. Esto prueba que $\Sigma^\star - A \leq_m \Sigma^\star - B$. Por el inciso a) aplicado dos veces, para A y su complemento, se sigue que $A \in \mathcal{CE}$ y que $\Sigma^\star - A \in \mathcal{CE}$. Nuevamente, por el Ejercicio 12 se sigue que $A \in \mathcal{C}$. ■

Ahora mostraremos cómo usar el Teorema 2.4.1 para determinar. Por ejemplo, en el Ejercicio 12 concluimos que en particular $HP^c \notin \mathcal{CE}$. Sea $A = HP^c$. Por contrapositiva, si existe un problema B tal que $A \leq_m B$ entonces se sigue que $B \notin \mathcal{CE}$. Podemos usar esa estrategia para probar el siguiente resultado.

Resultado 2.4.1. *El conjunto* $FIN = \{N : |L(N)| < \infty\} \notin \mathcal{CE}$*, con* $FIN \subseteq \Sigma^\star$*. Es decir, la prima* N *denota la configuración de* N *como cadena, no* N *en sí.*

Demostración. Recordemos que $HP^c = \{M\#x : M \text{ no se detiene en } x\}$. Buscamos una reducimos de HP^c a FIN, esto es una función $\sigma : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ tal que $M\#x \in HP^c$ si y sólo si $\sigma(M\#x) \in FIN$. En otras palabras, dado $M\#x$ construimos una MT $N = \sigma(M\#x)$ tal que M se cicla en x si y sólo si $|L(N)| < \infty$.

En el caso de cadenas invalidas $M\#x$ podemos suponer que llega a un estado de error. Supongamos que la cadena es válida. Sea $N = \sigma(M\#x)$ una MT tal que en la entrada $y \in \Sigma^\star$ (1) Borra la entrada y. (2) Escribe a x en la cinta. (3) Ejecuta a M en x. (4) Si M se detiene en x entonces N acepta a y. Se sigue que σ es una reducción computable y total, donde $\sigma(N)$ satisface lo siguiente:

$$L(N) = \begin{cases} \Sigma^\star & \text{si } M\#x \in HP \\ \emptyset & \text{si } M\#x \in HP^c \end{cases}$$

Luego, $M\#x \in HP^c \Leftrightarrow L(N) = \emptyset \Leftrightarrow |L(N)| = 0 < \infty \Leftrightarrow N = \sigma(M\#x) \in FIN$. Por lo tanto $HP^c \leq_m FIN$. Por el Teorema 2.4.1 se concluye que $FIN \notin \mathcal{CE}$. ■

Resultado 2.4.2. *El conjunto* $FIN^c = \{N : |L(N)| = \infty\} \notin \mathcal{CE}$*.*

Demostración. Probaremos que $HP^c \leq_m FIN^c$. Por el Teorema 2.4.1 se seguirá que $FIN^c \notin \mathcal{CE}$. Note que la misma reducción para probar que $HP \leq_m FIN$ funciona para probar que $HP^c \leq_m FIN^c$. Definiremos entonces la primera, esto es una reducción $\sigma : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ tal que $x \in HP \Leftrightarrow \sigma(x) \in FIN$. Esto es, dado $M\#x$, construir una MT $N = \sigma(M\#x)$, tal que $x \in HP \Leftrightarrow |L(N)| < \infty$.

Se define σ similar a como en el Resultado 2.4.1. Se construye la máquina N como sigue: 1) Guarda el *input* y por separado. 2) Guarda a x en su cinta. 3) Simula a x en M por $|y|$ pasos. Por cada paso que simula en x borra un elemento en y, es decir lo sustituye por $\sqcup$. Finalmente, N acepta si y sólo si M no se ha detenido tras y pasos.

Resta demostrar que σ funciona. Si $M\#x \notin HP$, entonces M no se detiene en x jamás. Luego, para toda y la MT N acepta, se sigue que $|L(N)| = \infty$. Sea $M\#x \in HP$, entonces M se detiene en x, digamos tras exactamente k pasos. Si y sólo si $|y| < k$, tras $|y|$ pasos M todavía no se detiene y por lo tanto acepta a y. Existe un número finito de cadenas y tal que satisfacen que $|y| < k$. Se sigue que $|y| < k \Leftrightarrow |L(N)|\infty \Leftrightarrow \sigma(M\#x) \in FIN$. Por lo tanto, si $M\#x \in HP \Leftrightarrow N \in FIN$. ■

Resultado 2.4.3. *Probar que* $MP = \{N\#y : y \in L(N)\} \notin \mathcal{C}$*.*

Demostración. Mostraremos que $HP \leq_m MP$ y usaremos el hecho que $HP \notin \mathcal{C}$. Sea una reducción $\sigma : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ tal que $M\#x \in HP$ si y sólo si $\sigma(M\#x) = N\#y \in MP$. Esto es, M se detiene en $x \Leftrightarrow y \in L(N)$.

A partir de $M\#x$, se define N idéntico a M, salvo que si M se detiene en x entonces N acepta a x. Entonces si M acepta o rechaza a x, N simplemente acepta. Esto se

logra con un paso adicional de N. Definimos $y = x$, así que ahora $\sigma(M\#x) = N\#y$ está definido. Basta notar que, $M\#x \in HP \Leftrightarrow M$ se detiene en $x \Leftrightarrow N$ acepta a $y \Leftrightarrow y \in L(N) \Leftrightarrow N\#y \in MP$. ■

Ejercicio 14. Sea $B = \{M : \lambda \in L(M)\}$, es decir las MT que aceptan a la cadena vacía. Probar que $B \notin \mathcal{C}$.

Demostración. Probaremos que $HP \leq_m B$, por el Teorema 2.4.1 se seguirá que como $HP \notin \mathcal{C}$ entonces $B \notin \mathcal{C}$. Definiremos una reducción $\sigma : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ tal que, $M\#x \in HP \Leftrightarrow N \in B \Leftrightarrow \lambda \in L(N)$, donde $N = \sigma(M\#x)$. Es decir, dados $M\#x$ construimos una MT N que acepte a λ si y sólo si M se detiene en x.

Definimos σ como sigue. Se construye una máquina de Turing N donde 1) Anota en su cinta a x, 2) Ignora el *input* y que recibe N, 3) Simula M con la cadena x. 4) N acepta a y si y sólo si M se detiene en x. Probaremos que σ funciona. Notemos que

$$L(N) = \begin{cases} \Sigma^\star & \text{si } M\#x \in HP \\ \emptyset & \text{si } M\#x \in HP^c \end{cases}$$

Se sigue que, $M\#x \in HP \Leftrightarrow \lambda \in L(N) = \Sigma^\star \Leftrightarrow N = \sigma(M\#x) \in B$. Por último notemos que σ es total porque si recibe una cinta invalida puede rechazar. Si no, entonces 1), 2), 3) y 4) definen a N en tiempo polinomial. ■

Teorema 2.4.2. ***Teoema de Rice****. Toda propiedad no trivial de los conjuntos c.e. es no computable.*

Ejercicio 15. Demuestre los incisos.

a) $A = \{M : M \text{ tiene al menos 481 estados}\} \in \mathcal{C}$.

b) $B = \{M : L(M) = \Sigma^\star\} \notin \mathcal{C}$.

Demostración.
a) Lo probaremos directamente, es decir daremos una MT M total tal que $L(M) = A$. Recordemos que la MT la codificamos de la siguiente manera: $0^n10^m1...$, donde n representa el número de estados y m el número de símbolos del alfabeto.

Definimos una máquina de Turing N que dado M haga lo siguiente. 1) Parta a su cinta en dos partes. 2) En la primera escriba en su cinta 480 veces el mismo símbolo, digamos a. 3) En la segunda parte escribe la codificación correspondiente a los estados Q de M, e ignora el resto. Es decir escribe 0^n1. 4) Borra alternadamente un símbolo en la primera parte y un símbolo en la segunda. 5) Acepta a M si y sólo si $n \geq 481$, esto es borró completamente la cadena de a^{480} y aún no termina de borrar la cadena 0^n1. Veamos porque N funciona.

Por la definición de N, N acepta a $M \Leftrightarrow M$ tiene al menos 481 estados. Esto implica que $L(N) = A$. Podemos hacer que si recibe una cadena invalida entonces N rechaza.

Se sigue que N es total, pues siempre va a rechazar o a aceptar cualquier cadena M. Se concluye que $A \in \mathcal{C}$.

b) Probaremos que existe una reducción de $HP \leq_m B$ y usaremos el Teorema 2.4.1. Sea $\sigma : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ una reducción tal que , $M\#x \in HP \Leftrightarrow N \in B \Leftrightarrow L(N) = \Sigma^\star$, con $N = \sigma(M\#x)$.

Definimos σ como sigue. Se construye una máquina de Turing N donde 1) Anota en su cinta a x, 2) Ignora el *input* y que recibe N, 3) Simula M con la cadena x, 4) N acepta a y si y sólo si M se detiene en x. Probaremos que σ funciona. Notemos que

$$L(N) = \begin{cases} \Sigma^\star & \text{si } M\#x \in HP \\ \emptyset & \text{si } M\#x \in HP^c \end{cases}$$

Es inmediato que $M\#x \in HP \Leftrightarrow N = \sigma(M\#x) \in B \Leftrightarrow L(N) = \Sigma^\star$. ■

3. Clases de Complejidad

3.1. Notación asintótica y funciones de complejidad apropiadas

Toda esta sección es dentro del contexto $\mathcal{C}$. Sea el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. La instancia de un problema se puede representar como una cadena $x \in \Sigma^\star$. Consideramos, *nautralesn* el tamaño de la instancia, definido como $n := |x|$. Para medir el tiempo y espacio usado por un algoritmo MT empleamos funciones "funciones de complejidad apropidas".

Definición 3.1.1. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una **función de complejidad apropiada** si

1. Es positiva, $f > 0$.
2. Es creciente, $f(n) \leq f(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$
3. Existe una MTD M_f que calcula el valor $f(n)$ en un número de pasos proporcional a $f(n)$.

Definición 3.1.2. El **tiempo** que tarda una MT M en decidir su una cadena $x \in \Sigma^\star$ está o no en $L(M)$ es el transiciones que M ejecuta empezando en su configuración inicial $(q_0 \vdash x)$ para llegar a una configuración de aceptación o rechazo. Diremos que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es **una cota superior (inferior) para el tiempo de ejecución** de M si en el peor de los casos de ejecución, el tiempo que tarda M está acotado superiormente (inferiormente) por f.

Definición 3.1.3. El **espacio** consumido por una MT M en decidir a $x \in \Sigma^\star$, es el número máximo de celdas usadas por M para llegar a alguna de las configuraciones de detención partiendo de su configuración inicial.

Ejemplo 3.1.1. Para la MTD que acepta el lenguaje $L\{a^n b^n c^n : n \leq 0\}$. Tenemos lo siguiente.

1. M acepta a λ en dos pasos: $\vdash \sqcup \to \vdash \dashv$, pues recuerde que

$$(q_0, \vdash, 0) \underset{M}{\overset{2}{\to}} (q_y, \vdash\dashv, \text{-})$$

2. M acepta a abc en 9 pasos, ya que

$$(q_0, \vdash abc, 0) \underset{M}{\overset{5}{\to}} (q_0, \vdash abc \dashv, 3) \underset{M}{\overset{4}{\to}} (q_y, \text{-}, \text{-})$$

3. Para $aabbcc$ hacemos 22 pasos:

$$(q_0, \vdash aabbcc, 0) \underset{M}{\overset{8}{\to}} (q_0, \vdash aabbcc \dashv, 6) \underset{M}{\overset{7}{\to}} (q., \vdash a \sqcup b \sqcup c \sqcup \dashv, 1) \underset{M}{\overset{7}{\to}} (q_y, \text{-}, \text{-})$$

4. En general, para $a^n b^n c^n$ hacemos $(n+1)(3n+1)+1 = 3n^2+4n+2$.

Por lo tanto el tiempo que tarda en decidir si $a^n b^n c^n$ está en L el tiempo total de ejecución es: $f(n) = 3n^2+4n+2$. Para las cadenas que no están en L son rechazadas en un número menor tiempo. Por lo tanto $f(n)$ nos da la medición del peor caso y es una cota superior.

¿Cuál es el espacio que ocupa M para decidir L? La máquina nunca ocupa fuera del símbolo $\vdash$. Por lo tanto el espacio ocupado por M está acotado por $s(n) = 3n+2$.

Ejemplo 3.1.2. Calculemos el tiempo y el espacio usados por la MT que suma números naturales. En el caso de elementos del dominio: $S(1^n 0 1^m) = 1^{n+m}$. Por ejemplo, si recibe la cadena $1^3 0 1^4$, la MT hace

$$(q_0, \vdash 1^3 0 1^4 \sqcup, 0) \overset{11}{\underset{M}{\to}} (q_0, \vdash 1^7 0 \dashv, 0),$$

luego recorrer todos los símbolos implica $(n+m+1+2)$ movimientos y un paso adicional para convertir el último 1 a 0. Por lo tanto el tiempo de ejecución de M para cadenas en el dominio de S está acotado por $T(n,m) = n+m+4$. En términos del espacio, fácilmente vemos que el espacio ocupador por M está acotado por $R(n,m) = n+m+3$.

Pasamos ahora al contexto de notación asintótica, donde se simplificará el análisis de tiempo y la memoria pues bastará clasificar el algoritmo según un orden de complejidad.

Definición 3.1.4. Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función de complejidad apropiada.

a) Se dice que $g(n)$ es una cota asintótica de $f(n)$ si $\Theta(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \exists n_o \in \mathbb{N}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0\}$.

b) Se dice que $g(n)$ es una cota superior asintótica de $f(n)$ si $O(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \exists n_o \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0\}$.

c) Se dice que $g(n)$ es una cota inferior asintótica de $f(n)$ si $\Omega(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \exists n_o \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq cg(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0\}$.

Ejercicio 16.

a) Para toda función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, los conjuntos $\Theta(g(n)), O(g(n)), \Omega(g(n)) \neq \emptyset$.

b) Para todo g, f funciones de computación apropiadas. $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Demostración.

a) Dada una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) \geq 0, \forall n$, proponemos a $c_1 = c_2 = 1$, y $n_0 = 1$. Luego, la siguiente afirmación es válida: $0 \leq 1 \cdot g(n) \leq g(n) \leq 1 \cdot g(n), \forall n \geq 1$. Se sigue que $g(n) \in \Theta(g(n))$. Además, en particular $g(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in \Omega(g(n))$. Se concluye entonces que $\Theta(g(n)), O(g(n)), \Omega(g(n)) \neq \emptyset$.

b) $\Rightarrow$). Supongamos que $f(n) \in \Omega(g(n))$. Luego existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 \geq \mathbb{N}$ tal que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0$. Note por un lado que como $0 \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0$ se sigue que $f(n) \in O(g(n))$. Por otro lado, $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0$, luego $f(n) \in \Omega(g(n))$.

$\Leftarrow$). Supongamos que $f(n) \in O(g(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$. De la primera se tiene que existe c_2 y n_2 tal que $0 \leq f(n) \leq c_2 g(n)$. De la segunda que existe c_1 y n_1 tal que $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$. Definiendo $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, se tiene que $0 \leq c_1 g(n) lef(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0$, Se concluye que $f(n) \in \Theta(g(n))$.

■

Notación: Se denota $f(n) = \Theta(g(n))$ en lugar de $f(n) \in \Theta(g(n))$. Por ejemplo $\log n = O(n^2)$.

Ejemplo 3.1.3.

a) Para el ejemplo 3.1.1, la función de complejidad era $f(n) = 3n^2 + 4n + 2$. Por lo tanto se sigue que $f(n) = O(n^2)$. El espacio estaba dado por $S(n) = 3n + 2$, por lo tanto $S(n) = \Omega(n)$.

b) Para el ejemplo 3.1.2, la función de complejidad era $n + m + 2$. Si $p = n + m$, entonces $f(p) = O(p)$. Para el espacio $s(p) = O(p)$, también.

Ejemplo 3.1.4. Demostrar que si $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ entonces $f(n) = O(n^2)$.

Demostración. Demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$0 < c_1 n^2 \leq \tfrac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, \forall n \geq n_0$$

Note que $f > 0$ si $n \geq 7$. Proponemos $n_0 = 7$. Trivialmente, $f(n) \leq \frac{1}{2}n^2$, así que proponemos $c_2 = \frac{1}{2}$. Para c_1 considere la desigualdad $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$. Si evaluamos el segundo miembro en n_0 obtenemos que $c_1 \leq \frac{4}{14}$. En particular $c_1 = \frac{1}{14}$ funciona. ■

Ejemplo 3.1.5. Probar que $6n^3 \neq \Theta(n^2)$. Por contradicción, supongamos que $6n^3 = \Theta(n^2)$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, tal que $0 \leq c_1 n^2 \leq n^3 \leq c_2 n^2, \forall n \geq n_0$. Luego $6n^3 \leq c_2 n^2 \Rightarrow 6n \leq c_2, \forall n \geq n_0$. Pero esta desigualdad no puede ser cierto para ninguna $n_0 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $6n^3 \neq \Theta(n^2)$. En particular, $6n^3 \neq O(n^2)$.

Ejemplo 3.1.6. Todo polinomio de la forma $p(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ cumple con $p(n) = \Theta(x^d)$, si $a_d > 0$.

Ejercicio 17. Probar los incisos:

a) $n^3 \neq \Theta(n^4)$.

b) $\log_2 n = O(n)$.

c) $\text{máx}\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n)$.

Demostración.

a) Por contradicción, supongamos que $n^3 = \Theta(n^4)$. Entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, tal que $0 \leq c_1 n^4 \leq n^3 \leq c_2 n^4, \forall n \geq n_0$. Dividiendo entre n^3/c_1, se obtiene de la primera parte de la desigualdad que $0 \leq n \leq 1/c_1, \forall n \geq n_0$. Como los números naturales no están acotados por ninguna constante esta desigualdad no puede ser cierta ser cierta para ninguna $n_0 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $n^3 \neq \Theta(n^4)$. En particular se probó que $n^3 \neq \Omega(n^4)$.

b) Sabemos que $\log_2(n) = \log(n)/\log(2)$. Además,

$$log(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \int_1^n \frac{1}{1} dx = n.$$

Se sigue que

$$\log_2(n) = \frac{\log(n)}{\log(2)} \leq \frac{1}{\log(2)} \log(n), \forall n \geq 1.$$

De lo anterior se concluye que $\log_2 n = O(n)$.

c) Note que $0 \leq f(n) \leq f(n) + g(n)$ y $0 \leq g(n) \leq f(n) + g(n), \forall n \geq 1$, porque f y g son funciones de complejidad apropiadas. Como, máx$\{f(n), g(n)\}$ es igual a $f(n)$ o a $g(n)$. Se sigue que $0 \leq f(n) =$ máx$\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$ o $0 \leq g(n) =$ máx$\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$. En general, $0 \leq$ máx$\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$ para toda $n \geq 1$. Se concluye que máx$\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$.

■

Ejercicio 18. Probar los incisos:

a) Si $f(n) = O(g(n))$ y $g(n) = O(h(n))$ entonces $f(n) = O(h(n))$.

b) $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$.

Demostración.

a) Por la primera hipótesis existen n_1, c_1 tal que $0 \leq f(n) \leq c_1 g(n), \forall n \geq n_1$. Por la segunda hipótesis existen n_2, c_2 tal que $0 \leq g(n) \leq c_2 h(n), \forall n \geq n_2$. Si $n_0 =$ máx$\{n_1, n_2\}$ y $c = c_1 c_2 \in \mathbb{R}^+$ se sigue que

$$0 \leq f(n) \leq c_1 g(n) \leq c_1(c_2 h(n)) = (c_1 c_2) h(n) = c \cdot h(n).$$

Se concluye que $f(n) = O(h(n))$.

b) Es directo,

$$\begin{aligned} f(n) = O(g(n)) &\Leftrightarrow 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0, c \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{c} f(n) \leq g(n), \forall n \geq n_0, c \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n)) \end{aligned}$$

■

Ejercicio 19. Probar los incisos:

a) ¿$2^{n+1} = O(2^n)$?

b) ¿$2^{2n} = O(2^n)$?

c) ¿$3^n = O(2^{n^2})$?

Solución. Supongamos que existe alguna $c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$.

a) $2^{n+1} \leq c2^n, \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow 2 \leq c$. Proponemos $c = 3, n_0 = 1$. Luego $2^{n+1} = O(2^n)$.

b) $2^{2n} \leq c2^n, \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow 2^n \leq c, \forall n \geq n_0$, es imposible. Se concluye que $2^{2n} \neq O(2^n)$.

c) $3^n \leq c2^{n^2}, \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow n\log(3) \leq \log(c) + n^2\log(2), \forall n \geq n_0$
$\Leftrightarrow \log(3) \leq \frac{\log(c)}{n} + n\log(2), \forall n \geq n_0$

Con $n_0 = 1$ y $c = 3$, se concluye que $3^n = O(2^{n^2})$.

Noción de uso eficiente de los recursos (tiempo y espacio)

$f(n) \setminus n$	10	50	100	1000
$\log(n)$	3	5	6	9
n	10	50	100	10^3
n^2	100	2.5×10^3	10^5	10^6
n^3	10^3	1.25×10^5	10^6	10^9
2^n	10^3	1.1×10^{16}	12.68×10^{29}	10.7×10^{223}

La noción de eficiencia en el uso del tiempo es la polinomial. En el espacio usualmente la noción de eficiencia es la "polilogaritmica", es decir, el algoritmo hace un uso eficiente del espacio si este esta acotado por una función de la forma $n!, \exp, c\log^k n$.

Problema de Satisfacibilidad booleana

Definición 3.1.5. Sea $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ un conjunto de variables. Una **asignación de verdad** para U es una función $t : U \to \{V, F\}$. Si $t(u) = V$ decimos que u es "verdadero" bajo t, sino diremos que es "falso" bajo t.

Definición 3.1.6. Si $u \in U$ entonces u y $\bar{u}$ son **literales** sobre U. La variable u y el literal u se denotan igual. El literal u es verdadero bajo t si y sólo si u es verdadero bajo t. El literal $\bar{u}$ es verdadero bajo t si y sólo si u es falsa bajo t.

Definición 3.1.7. La **cláusula** C sobre U es un conjunto de literales sobre U, denotado $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n)$. Se dice que C se **satisface** bajo t si y sólo si al menos uno de sus elementos es verdadero bajo t.

Por ejemplo $C = (x_1 \vee x_2)$ se satisface bajo t, si $t(x_1) = V$ y $t(x_2) = F$, pues el literal x_1 en C es verdadero bajo t.

Definición 3.1.8. Una fórmula booleana $\phi = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está en **Fórmula normal conjuntiva** (FNC). Si ϕ se puede describir como una colección de m disyunciones ($\vee$) conectadas como una gran conjunción $\wedge$.

Ejemplo 3.1.7.

- $(x_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x_4} \vee x_2)$ está en FNC.
- $x_1 \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_1)$ está en FNC
- $x_1 \wedge (\bar{x}_1 \vee (x_3 \wedge x_4))$ no está en FNC.

Una fórmula ϕ en FNC es satisfacilble si existe una asignación de verdadero (T) o falso (F) para las variables de ϕ tal que la fórmula ϕ es verdadera bajo esa asignación.

Teniendo la codificación, definimos

$$\text{SAT} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n : n \leq 1 \text{ y } \phi \text{ es satisfacible}\},$$

donde la cadena $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una cadena en $\{0,1\}^\star$. El orden es de $O(n, m)$ donde n es variables y m es clausulas.

Dada una cadena $x \in \Sigma^\star$, la máquina primera verifica que x representa una fórmula ϕ_x en FNC. Si no es válida, rechaza de inmediato. Si la cadena es una fórmula ϕ_x booleana en FNC. entonces la máquina ejecuta el siguiente ciclo. Para cada posible asignación de verdad de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de ϕ_x, prueba si la asignación satisface ϕ_x. En el caso de que ϕ_x sea satisfacible bajo la asignación, entra en el estado de aceptación. En otro caso continua el ciclo con la siguiente asignación de verdad para $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Aquí termina el ciclo. Si el ciclo termina y ϕ_x no se satisfizo por alguna asignación de verdad, entonces entra en rechazo.

La complejidad de este algoritmo es $O(nm+2^n(n+nm))$. El primer nm corresponde a parsear el input. El 2^n corresponde a cada combinación, dentro de ella, n corresponde a una asignación y nm corresponde a verificar si esa solución funciona. Se puede probar que $O(nm2^n) = O(2^n)$.

Caso no determinístico
Dado $x \in \Sigma^\star$ tal que x representa a una fórmula en FNC ϕ_x. La máquina "adivina" una posible asignación de verdad para $x_1, x_2, \ldots x_n$ y prueba si ésta satisface a ϕ_x, aceptando si este es el caso y rechazando en otro caso.

Ejercicio 20. ¿Hay una fórmula mecánica eficiente de reconocer fórmulas en FNC satsifacibles?

Solución. No es posible dar una fórmula mecánica eficiente de reconocer fórmulas en FNC satsifacibles a menos que **P**=**NP**. El famoso *Teorema de Cook* probó que la clase **NP-completo** no era vacía pues contenía al problema de satisfacibilidad. Este problema es entonces de los problemas más difíciles dentro de la clase **NP**.

Ejercicio 21. Dar una codificación de fórmulas booleanas de FNC en el alfabeto $\{0,1\}$.

Solución. Las expresiones booleanas en FNC pueden tener como símbolos los elementos del siguiente conjunto:

$$\text{SIMB} = \{x_i, \bar{x}_i, (,), \wedge, \vee\}$$

Nos interesa un mapeo $m : \text{SIMB} \to \Sigma^\star$. Proponemos el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \wedge \mapsto 0000 & (\mapsto 00 & x_i \mapsto 1^i \\ \vee \mapsto 000 &) \mapsto 00 & \bar{x}_i \mapsto 1^i 01 \end{array}$$

Este mapeo, además de ser sobre, tiene la particularidad que se pueden decodificar cadenas enteras sin ambigüedad, siempre y cuando sí sea una fórmula en FNC válida. Asi que es posible mapear una fórmula a FNC elemento a elemento y saber que no hay ambigüedad para reconocer la preimagen.

Por ejemplo, $(x_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_4 \vee x_2)$ se mapea a la siguiente cadena de 1's y 0's:

$$00100011100000000011111010001100$$

A partir de esta cadena, es posible regresar a la fórmula $(x_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_4 \vee x_2)$, pues es posible reconocer donde empieza y acaba la codificación de cada símbolo, denotando esta separación por un guión.

$$\begin{array}{c} \text{00-1-000-111-00-0000-00-111101-000-11-00.} \\ (\ x_1 \vee \quad x_3 \quad) \quad \wedge \quad (\quad \bar{x}_4 \quad \vee \quad x_2 \quad) \end{array}$$

Problema de Coloración

Sea $G = (V, E)$ una gráfica no dirigida y $|V| = n$. Una coloración de los vértices de G con k colores es una función $c : V \to \{1, 2..., k\}$ tal que cumple la siguiente condición: para toda $uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$. Una gráfica G es k-colorable si G tiene una coloración de k colores.

Definición 3.1.9. Se dice que la gráfica $G = (V, E)$ es **completa** si para todo $u, v \in V$ existe $uv \in E$. Se denota la gráfica k_n la gráfica completa de n vértices.

Ejemplo 3.1.8.

- La gráfica k_3 es 3-colorable pero no 2-colorable.
- Los arboles, es decir gráficas conexas acíclicas, son 2-colorables (no se va a probar).

Nos interesa si el conjunto k-colouring $= \{G \in \{0,1\}^\star : G$ tiene una k-coloración$\}$ es computable. Se analiza la complejidad de ejecutar todas las combinaciones de colores.

Ejercicio 22. Dar un algoritmo determinístico para 2-colouring y 3-colouring. ¿Son de tiempo polinomial?

Solución. En este ejercicio supondremos una gráfica $G = (V, E)$ y que $|V| = n$. Propondremos un algoritmo deterministico que acepte la gráfica si es 2-colouring en el primer caso, 3-colouring en el segundo caso y si no lo es, rechaza en ambos casos.

Para 2-colouring, dada una cadena $x \in \Sigma^\star$, la máquina primera verifica que la cadena que representa a G sea válida. Si no, se rechaza de inmediato. Después, se enlistan todos los 2^n distintas mapeos de coloración. Se comienza eligiendo el primero, y después para toda $uv \in E$ se verifica que $c(u) \neq c(v)$. Si se logra verificar tal condición para todas las aristas entonces se acepta la cadena. Si no, en el momento en el que falla, se elige el siguiente mapeo en la lista, ya que el mapeo actual no sirve como certificado. Si el algoritmo recorre toda la lista y no encuentra ningún mapeo 2-colouring, entonces se rechaza la cadena. Para 3-colouring, el algoritmo es idéntico, salvo que se enlistan 3^n mapeos.

En cuanto a la complejidad, primero se parsea la entrada en orden $O(n + n^2)$, tanto vértices como aristas respectivamente. Después se hace una elección de la lista de mapeos. Se asignan colores en orden $O(n)$ y se verifican en orden $O(n^2)$. Luego el orden de este algoritmo es $O((n + n^2) + 2^n(n + n^2)) = O(n^2 \cdot 2^n)$ y $O((n + n^2) + 3^n(n + n^2)) = O(n^2 \cdot 3^n)$, respectivamente para 2-colouring y 3-colouring. Por ende, estos mapeos no son polinomiales.

Ejercicio 23. (Extra) Dar un algoritmo determinístico polinomial para 2-colouring. Analizarlo par explicar por qué es polinomial.

Solución. Dada una gráfica G, demostraremos que si tiene una 2-coloración entonces el algoritmo que describiremos genera una 2-coloración.

Primero note, que si la gráfica tiene varias componentes, entonces para que toda la gráfica G sea 2-colouring, cada componente deberá ser 2-colouring. Además note que el mapeo que se elija para una componente, no depende de las otras componentes. Por lo tanto, es posible trabajar componente a componente, generado funciones de coloración sobre un dominio restringido, y con todas ellas será posible generar la función de coloración con el dominio completo. Por lo tanto bastará dar un algoritmo para el caso donde la gráfica tiene una única componente.

Comenzamos eligiendo un vértice arbitrario $v_0 \in V(G)$ y le asignamos el color 0. Procedemos con las siguientes reglas:

1. Sea v sin color y existe $u \in N(v)$ tal $c(u) = 1$, entonces $c(v) = 0$.
2. Sea v sin color y existe $u \in N(v)$ tal $c(u) = 0$, entonces $c(v) = 1$.

Finalmente, el algoritmo revisa que la asignación c sea un certificado. Es decir, que para toda $uv \in E$ se siga que $c(u) \neq c(v)$. Si termina y esto se cumplió siempre, se acepta la cadena. Si no, se rechaza.

Probaremos que este algoritmo es correcto. Primero justificamos por qué el algoritmo termina y todos los vértices tienen un color. Como el número de vértices es finito el proceso de asignar colores tiene que terminar. Supongamos que al final de la asignación existe un vértice u que no tiene color. Sin embargo, este vértice está conectado con el vértice arbitrario v_0 que se coloreo al inicio del algoritmo. Luego existe un camino $v_0v_1 \dots v_ku$, con $v_1, v_2, \dots v_k \in V$, porque estamos trabajando con una única componente. Se sigue que con las reglas dadas aplicadas $k+1$ veces, es posible colorear u, lo cuál es una contradicción de que esto no era posible. Por lo tanto, al final de esta rutina todos los vértices tienen un color. Se define el mapeo $d : V \to \{0, 1\}$ dado por éste algoritmo.

Resta demostrar que si existe una 2-coloración entonces la asignación propuesta por el algoritmo funciona. Supongamos que existe una 2-coloración c. Sin perdida de generalidad, $c(v_0) = 0$. Si fuera $c(v_0) = 1$ entonces podemos considerar el siguiente mapeo $c'(v) = 1 - c(v)$. Sean $u, v \in V$, luego $c'(u) = 1 - c(u) \neq 1 - c(v) = c'(v)$, porque $c(u) \neq c(v)$. Por lo tanto, este mapeo es otro certificado, donde $c(v_0) = 0$.

Por demostrar que $c(u) = d(u)$ para todo $u \in V$. Nuevamente, procedemos por contradicción. Supongamos que existe $u \in V$ tal que $c(u) \neq d(u)$ y que la asignación $c(u)$ se realizó en la i-ésima iteración del algoritmo. Note que para asignar un color a u nos apoyamos en un vértice vecino, digamos u' que ya tenía color. Es imposible que $d(u') = c(u')$ pues si no, la regla estaría mal aplicada. Como nos apoyamos de u' para asignar u, la iteración correspondiente a la asignación de color de u' tiene que ser menor que la de u. De forma análoga, debe de existir un vecino de $u'' \neq u$ del cual se apoyó el algoritmo para hacer la asignación de u'. Nuevamente, $d(u'') \neq c(u'')$ y la asignación de color de u'' fue anterior que la de u'. Este proceso, lo podemos hacer un número finito de veces hasta llegar a la iteración 0, donde se definió el color de v_0. Sin embargo se tendría que $d(v_0) \neq c(v_0)$, lo cual es una contradicción. Se concluye que d es un certificado. Después se procede al paso de verificación, donde la gráfica se acepta con certificado d si es 2-colouring y se rechaza en otro caso. Por lo tanto el algoritmo es correcto.

Resta demostrar que este algoritmo es polinomial. Para validar la cadena se hacen $n + n^2$ pasos, para los vértices y aristas respectivamente. Para asignar un color a algún vertice, consideremos que tenemos enlistados los vértices que aún no están coloreados. Sobre ellos se hace la pregunta ¿este vértice tiene algún vecino con color? Por lo cuál hay que revisar a lo más $n - 1$ vecinos. Es posible, que tras esta revisión ningún vecino tenga color y se proceda a examinar otro vértice. Por lo tanto esta rutina es de orden $O(n^2)$. Como hay que repetir este proceso n veces, el orden de la asignación de colores es $O(n^3)$. Por último, resta verificar que la asignación d es un certificado, donde se revisan las n^2 aristas. Por lo tanto el algoritmo es de orden $O((n + n^2) + n^3 + n^2) = O(n^3)$, que es de orden polinomial.

Problemas de números

Dado un conjunto de números $N = \{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$, cada entero $i \in N$ tiene un valor v_i y un peso w_i asociado, con $v_i, w_i \in \mathbb{R}$. Se nos pide seleccionar un subconjunto $S \subseteq N$ tal que la suma de los pesos no exceda un límite dado w y además que la suma de valores sea tan grande como sea posible (maximizar la suma de valores). Entonces, el problema es

$$\text{máx} \sum_{i \in S} v_i \qquad \text{s.a.} \sum_{i \in S} w_i \leq w \tag{3.1}$$

Este es un problema de optimización. Adaptamos el problema a una versión de reconocimiento de lenguaje, es decir una versión de decisión y a ésta le llamamos *knapsack*. Aquí, adicionalmente se nos da un entero k y deseamos verificar si existe $S \in \subseteq N$ tal que

$$\sum_{i \in S} v_i \leq k \qquad \text{s.a.} \sum_{i \in S} w_i \leq w \tag{3.2}$$

Rigurosamente definido,

$$\text{KNAPSACK} = \{(N, w, k) : \exists S \subseteq N \text{ tal que satisface (3.2)}\}$$

Ejercicio 24.

a) Dar un algoritmo determinístico para KNAPSACK

b) Dar un algoritmo no determinístico para KNAPSACK

c) Dar cotas asintóticas para los algoritmos a) y b). ¿Son polinomiales?

Solución.

a) Dada una instancia $x \in \Sigma^\star$, el algoritmo primero verifica que la instancia sea válida. Si no es, se rechaza inmediatamente. Lo primero que se hace es enlistar todos los posibles subconjuntos $S \subseteq N$, es decir todos los posibles candidatos a ser certificados de la instancia. Es un número finito de ellos, porque N es finito. Dado S, se calcula $\sum_{i \in S} w_i$ y $\sum_{i \in S} v_i$, y se verifican ambas desigualdades de (3.2). Si ambas se satisfacen entonces aceptamos la cadena. Si alguna no se satisface entonces probamos con otro conjunto S de la lista. Si al final ningún conjunto S satisface (3.2), se rechaza la cadena x.

b) Dada una instancia $x \in \Sigma^\star$, primero se valida. Si no pasa la prueba, entonces se rechaza. Después adivina un subconjunto $S \subseteq N$ y prueba si satisface (3.2). Si sí acepta la cadena x y si no rechaza.

c) Sea $n = |N|$, es decir, hay n objetos posibles a elegir. Note que la instancia tiene que enlistar los objetos, sus pesos y su utilidad. Por lo tanto parsear la instancia toma orden $O(n)$. Después, dado $S \subseteq N$ hay que calcular las dos sumas de (3.2). En el Ejemplo 3.1.2 mostramos que la complejidad de esta operación era igual

a la suma de los operandos. En términos prácticos podemos pedir que c sea una constante, tal que $v_i, w_i \leq c, \forall i \in N$. Luego, calcular cada una de las sumas es de orden $O(cn)$. Finalmente, el número de candidatos es igual a la cardinalidad del conjunto potencia de N, es decir de 2^n. Por lo tanto, la complejidad del algoritmo es $f(n) = O(n) + O(2^n \cdot 2cn) = O(2^n \cdot n)$. Por lo tanto no es un algoritmo polinomial.

Lo anterior se calculó para el peor de los casos y fue una cota superior asintótica. En el mejor de los casos, el primer candidato es un certificado por lo que aquí la complejidad $f(n) = \Omega(n)$.

El algoritmo no-determinístico parsea la instancia en tiempo $O(n)$, adivina una solución en ese mismo orden y obtiene el valor de ambas sumas en el mismo orden. Por lo tanto, el orden de este algoritmo es $f(n) = \Theta(n) + \Theta(n) + \Theta(2cn) = \Theta(n)$. Este sí es un algoritmo polinomial.

3.2. Clases Básicas de Complejidad

Una clase de complejidad está dada por varios parámetros:

- El modelo de computo (objeto matemático que representa la computadora).
- La forma de realizar cálculos determinísticos y no-determinísticos-paralelos.

El recurso que medimos es el tiempo, espacio, comunicación, objetos compartidos, etc. Aquí, nuestro modelo será una máquina de Turing con k cintas, esto no afecta en absoluto el análisis, en el sentido de que si en vez se analizara con una MT de una cinta únicamente. A este tipo de máquinas las denotaremos MTDk y MTNDk.

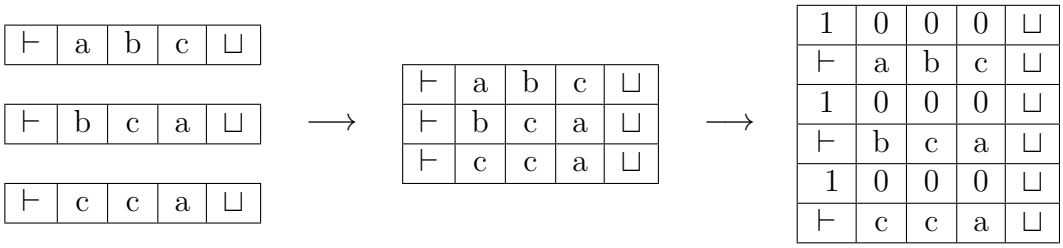
Ejercicio 25. Probar que si $L \subseteq \Sigma^\star$ es aceptado por una MTD de k-cintas en tiempo $O(f(n))$ entonces L es aceptado por una MTD con 1 cinta en tiempo $O(f^2(n))$.

Demostración. Comenzamos enunciando los aspectos importantes que distinguen a las MTs de una sola cinta con las MTs de k cintas. Las MTs leen un símbolo a la vez, mientras que las segundas leen k símbolos simultáneamente. Las primeras tienen una única cabecilla lectora, mientras que las segundas también tienen k cabecillas. Cada una es independiente al resto y se puede mover en ambas direcciones. Note entonces que no hay cabecillas que lean múltiples símbolos. En ambos modelos una cabecilla lee un símbolo por transición.

Por un momento podría pensarse que una máquina con k-cintas es igual a k máquinas de Turing independientes, pero esto es falso. La diferencia es que en las MTks, al igual que en las MTs, hay un único estado por transición. En todo caso, una MTk podría pensarse sí como k MTs usuales, con la restricción que los estados de estas siempre coinciden en cada transición. Nos interesa simular un paso de una MTk en una MT usual.

Imagine que la máquina M_k con k cintas distintas se agrupan en una única cinta gruesa, que tiene en forma vertical los símbolos que se iban a leer de manera paralela. Llamaremos *subcintas* a cada una de las cintas dentro de la cinta gruesa, pues no son propiamente cintas. Agregamos dos movimientos a está máquina: arriba y abajo. Tenemos una máquina M que puede mover su cabecilla de manera vertical y horizontal y hacia los lados[5].

Queremos simular un paso de M_k en M. Para ello, notamos que tenemos un problema no trivial. ¿Cómo sabe M en dónde está la cabecilla de cada una de las cintas? Para ello, agregamos dos símbolos al abecedario: $\{0, 1\}$ y agregamos filas auxiliares encima de cada una de las lineas de la cinta gruesa. El 1 denota que el símbolo inmediatamente abajo es donde está la cabecilla[6]. Aquí se muestran estos tres modelos:



La figura muestra como se paso del modelo de 3 cintas, a una modelo de una sola cinta gruesa y como a ésta se le añadieron cintas auxiliares para tener control sobre la posición de la cabecillas.

Suponga que en la máquina M_k en la i-ésima iteracion recibe cierto input de longitud k y se encuentra en un estado q_i. La máquina M buscará en la primera subcinta el 1, después cambia el 1 por 0, se moverá un paso de hacia abajo. Leerá este símbolo y actuara de acuerdo a lo que hace M_k en la primera cinta. Después, escribe un 1, encima de donde está actualmente. De esta manera es posible saber donde esta en la $(i + 1)$-estima transición la posición de la cabecilla correspondiente a la primera cinta de M_k. Sin embargo, esta máquina no cambia de estado hasta haber actuado sobre todas las subcintas. Este proceso lo podemos hacer k veces para cada una de las k cintas de M_k, al terminar se cambia al estado q_{i+1} correspondiente al de la $(i + 1)$-ésima iteración de M_k.

Por hipótesis se tiene que $f(n) \geq n$ de donde se sigue que $O(n) = O(f(n))$. Note que en este proceso de simular un paso, la máquina en el peor de los casos recorre cada una de las subcintas impares una vez para determinar dónde están las cabecillas y luego haces pasos auxiliares, como actualizar la posición de las cabecillas o simular lo que hace M_k en cada una de sus cintas. Por lo tanto el orden de la simulación

[5]Si al lector no le gusta esta idea, puede pensar en una cinta usual, donde los símbolos de la i-ésima cinta de M_k están transcritas sobre esta máquina M en las posiciones r que satisfacen $r \equiv i$ mód k. En ambos modelos está bien establecido cuáles posiciones de M corresponde a cada una de las cintas de M_k.

[6]También esto tiene su análogo si no quiere pensarse en cintas gruesas. El modulo habría que considerarse sobre $2k$ en vez de k.

de un paso es $O(n)$. Sabemos que L es aceptado en M_k tras un número de pasos de orden $O(f(n))$, y además sabemos que cada paso en M es de orden $O(n)$. Se sigue que en M, L es aceptado en un tiempo de orden $O(n) \cdot O(f(n)) = O(f^2(n))$. ■

Definición 3.2.1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función de complejidad apropiada (positiva y creciente) y Σ un alfabeto.

1) TIME $(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^\star : \exists M$ MTDk que decide a L en tiempo $f(n)\}$

2) NTIME $(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^\star : \exists M$ MTDNk que decide a L en tiempo $f(n)\}$

3) SPACE$(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^\star : \exists M$ MTDk que decide a L en espacio $f(n)\}$

4) NSPACE$(f(n)) = \{L \subseteq \Sigma^\star : \exists M$ MTDNk que decide a L en espacio $f(n)\}$

5) $\mathbf{P} = \cup_{k>0}\text{TIME}(n^k)$

6) $\mathbf{NP} = \cup_{k>0}\text{NTIME}(n^k)$

7) $\mathbf{L} = \text{SPACE}(\log n)$

8) $\mathbf{NL} = \text{NSPACE}(\log n)$

9) $\text{PSPACE} = \cup_{k>0}\text{SPACE}(n^k)$

10) $\text{NPSPACE} = \cup_{k>0}\text{NSPACE}(n^k)$

11) $\text{EXP} = \cup_{k>0}\text{TIME}(2^{n^k})$

Ejemplo 3.2.1.

- $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$. Sea $L \in \mathbf{P}$. Luego existe M, una MTDk que decide a L en tiempo n^k, para alguna $k \in \mathbb{N}$. Como las MTDks son un caso particular de las MTDNks entonces M decide a L en tiempo n^k y por lo tanto $L \in \mathbf{NP}$.

- $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL}$. Sea $L \in \mathbf{L}$, luego existe una MTDk M que acepta a L en espacio $\log(n)$. Esta máquina tambien es una MTND. Se sigue que $L \in \mathbf{NL}$.

- PSPACE $\subseteq$ NPSPACE. Es análogo a los anteriors. Las MTDks son un caso particular de las MTNDks.

- P $\subsetneq$ EXP. Sea L un lenguaje en $\mathbf{P}$. Luego, existe una MTD tal que decide a L en tiempo menor a n^k, para alguna k. Como $n^k \leq 2^{n^k}$ se sigue que L se decide en éste tiempo. Esto concluye la prueba. La inclusión propia se prueba a parte.

Definición 3.2.2. Dado $L \subseteq \Sigma^\star$ definimos L-complemento, o simplemente L-co, como el conjunto de cadenas $x \in \Sigma^\star$ que no están en L, pero son entradas legítimas del problema definido por L.

Ejemplo 3.2.2. Los problemas de satisfacibilidad son los problemas válidos que no se satisfacen se definiría como el problema SAT-co.

Dada una clase de complejidad $\mathcal{C}$, definimos co-$\mathcal{C}$ como sigue

$$co\text{-}\mathcal{C} = \{L \subseteq \Sigma^\star : \text{L-co} \in \mathcal{C}\}$$

Proposición 3.2.1. co-(co-$\mathcal{C}$) = $\mathcal{C}$

Demostración. Usando la definición se tiene que

$$\begin{aligned}\text{co-(co-}\mathcal{C}) &= \{L \subseteq \Sigma^\star : \text{L-co} \in \text{co-}\mathcal{C}\}\\ &= \{L \subseteq \Sigma^\star : (L\text{-co})\text{-co} \in \mathcal{C}\}\\ &= \{L \subseteq \Sigma^\star : L \in \mathcal{C}\}\\ &= \mathcal{C}\end{aligned}$$

■

Proposición 3.2.2. Para toda $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, una función de complejidad apropiada.

a) TIME($f(n)$) =coTIME($f(n)$)

b) SPACE($f(n)$) =coSpace($f(n)$) (tiempo y espacio determinístico)

Demostración. a) Para el primer caso, dado un lenguaje L en alguna de las clases y su correspondiente máquina determinística M que decide el lenguaje L en un tiempo no mayor a $f(n)$, cambiamos todos los estados de aceptación a rechazo y viceversa y a esta máquina le llamamos M'. Se sigue que dado $x \in \Sigma^\star$, M entra en q_n si y solo si M' entra en q_y. Además el tiempo de decisión no excede a $f(n)$ en M'. Se concluye el primer resultado.

b) La prueba es totalmente análoga, salvo por la distinción que la $f(n)$ acota el espacio y no el tiempo.

■

Ejemplo 3.2.3. Si se sabe que SAT $\in$ TIME(2^{n^k}), usando la Proposición 3.2.2, se sigue que SAT $\in$ coTIME(2^{n^k})

Corolario 3.2.1.

a) co-$\boldsymbol{P}$ = $\boldsymbol{P}$

b) co-$\boldsymbol{L}$ = $\boldsymbol{L}$

c) PSPACE = co-PSPACE

d) EXP = co-EXP

Demostración. Sólo se prueba a), el resto son análogos.

$$\begin{aligned}\text{co-}\mathbf{P} &= \{L \subseteq \Sigma^\star : L\text{-co} \in P\}\\ &= \{L \subseteq \Sigma^\star : L\text{-co} \in \cup_k \text{TIME}(n^k)\}\\ &= \{L \subseteq \Sigma^\star : L\text{-co} \in \cup_k \text{co-TIME}(n^k)\}\\ &= \text{co-(co-}\mathbf{P})\\ &= \mathbf{P}\end{aligned}$$

■

El Teorema de Jerarquía dice que con una cantidad suficientemente más grande de tiempo, las MT pueden hacer tareas más complejas. Sea $f(n) \geq n$ una función de complejidad apropiada. Definimos el lenguaje MP_f como una versión de tiempo del lenguaje del problema de membresia MP.

$$MP_f = \{M\#x : M \text{ acepta a } x \text{ en a lo más } f(|x|) \text{ pasos}\}$$

Asumimos que el lenguaje de cada MT M está compuesto por símbolos usados para codificar cosas "útiles" (0,1,(,),",,"), entonces $x \in \Sigma^\star$ es dado tal cual.

3.3. Teoremas del aceleramiento lineal y la jeraquía del tiempo y sus consecuencias

Teorema 3.3.1. *(Teorema del Aceleramiento Lineal). Sea $L \in TIME(f(n))$. Entonces, $\forall \epsilon > 0$, $L \in TIME(f_\epsilon(n))$, donde $f_\epsilon(n) = \epsilon f(n) + n + 2$.*

Hemos dicho que las constantes "no importan" para fines prácticos y este Teorema fortalece lo que decimos. Los avances en hardware reducen las constantes. El siguiente lema nos dice que existe una máquina universal que simula MT que tarden $f(n)$ pasos en aceptar, en a lo más $f^3(n)$.

Ejercicio 26. (Extra) Dada una codificación M de una máquina de Turing razonable, si $n = |M\#x|$, entonces $\log |M| = O(n)$.

Demostración. La prueba es trivial. En esencia, la codificación de M ocupa un número de bits fijo, mientras que la codificación de x es variable. Se sigue que $\log |M| \leq |M| \leq O(|M\#x|) = O(n)$.

En este contexto, exhibo cuantos bits mínimos tiene que tener la codificación de M en $\{0, 1\}$. Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, q_0, q_y, q_n)$. Para codificar a Σ realmente la máquina universal sólo requiere de conocer cúantos simbolos tiene Σ. No necesita saber el símbolo como tal. En otras palabras necesita saber su identificador que puede ser un número natural. Decodificamos a Σ a partir del número de símbolos que tiene $|\Sigma|$. Para ello requerimos $\log(|\Sigma|)$ bits. De manera análoga el alfabeto extendido es del mismo orden, de $\log(|\Sigma|)$ bits, esto porque pedimos que la codificación sea razonable. Análogamente Q se codifica en $\log(|Q|)$ bits. La parte más pesada naturalmente es la función de transición y en términos de orden es la única que va a a importar. Queremos especificar muchas funciones, tantas como estados por símbolos en Gamma. Estos son $|Q||\Sigma|$ funciones, si cada una tiene un ID, entonces requerimos $\log(|Q||\Sigma|)$ bits para identificar a la función que implicitamente se define a partir del input que recibe. Cada función se mapea a un estado nuevo, a un símbolo nuevo y un bit de movimiento. Esto se puede codificar nuevamente con $\log(|Q||\Sigma|) + 1$ bits. Los símbolos auxiliares como q_0 q_y se puede contar implicatemente en Q y en Γ. Por lo tanto, la codificación mínima la tenemos es de orden $O(\log^2(|Q||\Sigma|))$. ■

Lema 3.3.1. $MP_f \in TIME(f^3(n))$

Demostración. Construimos una MT U_f con 4 cintas la cual decide a $M\#x$ en tiempo $O(f^3(n))$. Es decir, recibe a $M\#x$, simula, y no tarda más de $f(|x|)$ pasos en decidir. U_f está basada en varias máquinas:

- La máquina universal U que simulara a $M\#x$.
- El simulador de máquinas con k-cintas en una máquina con 1 cinta.
- La máquina del teorema del aceleramiento lineal.
- La máquina M_f que calcula a $f(n)$.

Imagine las 4 cintas en paralelo. La máquina U_f hace lo siguiente en este orden.

1. U_f utiliza a M_f para inicializar en su cuarta cinta un "reloj de alarma" de longitud $f(|x|)$, es decir escribe $f(|x|)$ veces el mismo símbolo. Esto lo hace en $O(f(|x|))$, donde la constante depende sólo de f y no de M o x. Si M_f usa más cintas de cuatro cintas, se agregan el número necesario a U_f.

2. U_f copia la descripción de M, la máquina a ser simulada en su tercera cinta y copia (o codifica) a x en su primera cinta, esto toma $O(n)$.

3. U_f inicializa la segunda cinta con el estado inicial q_0 correspondiente a la simulación de M. En este momento U_f puede verificar que su estrada sea válida y rechazar si no es así (lo cual se puede hacer en tiempo lineal en dos cintas). El tiempo usado hasta este momento es de $O(f(|x|) + |x|) = O(f(n)$. Esta última igualdad porque por hipótesis $f(n) \geq n$ y porque $|x| \leq n$. A continuación describimos el ciclo de operación de U_f:

4. Se va a simular a M en la primera cinta, paso por paso. Primero se hace un escaneo en la primera cinta para saber que símbolos son los que M tiene en las cabezas lectoras y estos son escritos en la segunda cinta. Recuerda que M tiene k cintas pero se está simulando como una única cinta. Ya que transcribe todos los símbolos, considera el estado actual y busca la transición en la 3era cinta y la ejecuta, modificando el contenido de la primera cinta y el estado actual en la segunda cinta. También borra los símbolos después del estado). Por último tacha una unidad de tiempo de la alarma, o en otras palabras incrementa su reloj de alarma en 1.

   Definimos k_M el número de cintas de la máquina M y l_M es la longitud de la descripción de estados y símbolos de M. Luego para simular un paso se tarda $O(l_M k_M^2 f(|x|))$. Como se sabe que para máquinas de Turing válidas, l_M y k_M están acotadas por $\log|M|$. Pero $k_M^2 l_M \in O(\log|M|) \subseteq O(n) \subseteq O(f(n))$, por el ejercicio 26. Por lo tanto, simular un paso es de orden $O(f^2(n))$.

   El tiempo total de la simulación será de $O(f^3(n))$ (pues U_f simulará a lo más $f(|x|)$ pasos de M, por el reloj de alarma, donde $f(|x|) = O(f(n))$, porque x es una parte

proporcional de n. Sea $c > 0$ tal que el número de pasos para aceptar sea menor que $cf^3(n)$. Haciendo $\epsilon = \frac{1}{2c}$, y aplicando el Teorema del aceleramiento lineal, existe una MT tal que decide a $M\#x$ en tiempo no mayor a $\epsilon cf^3(n) + (n+2) = \frac{1}{2}f^3(n) + \frac{1}{2}f^3(n) = f^3(n)$. Se concluye que $MP_f \in \text{TIME}(f^3(n))$.

■

Lema 3.3.2. *$MP_f \notin TIME(f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$*

Demostración. Por contradicción, supongamos que $MP_f \in \text{TIME}\ (f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$. Así que existe una MT con k-cintas K_f que decide a MP_f en tiempo $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. Con la suposición de la máquina K_f, es posible construir una máquina "diagonalizadura" D_f, con el siguiente programa: $D_f(M)$:

K_f acepta a $M\#M$ then
    rechaza
else
    acepta

Note que el input de K_f tiene el doble de longitud más uno, que la entrada de D_f, y sin embargo $D_f(M)$ corre en el mismo tiempo que corre $K_f(M\#M)$. Es decir si $n = |M|$, K_f corre en tiempo $f\left(\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor\right) = f\left(\lfloor n + \frac{1}{2} \rfloor\right) = f(n)$

Ahora nos preguntamos ¿Qué pasa si D_f corrre en sí misma?. Supongamos que D_f acepta, entonces K_f rechaza a la cadena $D_f\#D_f$, es decir $D_f\#D_f \notin MP_f$. Luego D_f no acepta a D_f en tiempo menor a $f(n)$, en otras palabras $D_f(D_f)$ se rechaza, esto es una contradicción con lo que se se supuso al inicio. Por el contrario, si $D_f(D_f)$ se rechaza entonces K_f acepta a la cadena $D_f\#D_f$, esto implica que $D_f(D_f)$ es aceptado. Concluimos que K_f no existe y por lo tanto $MP_f \notin \text{TIME}(f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$. ■

Teorema 3.3.2. *(Jerarquía del tiempo) Si $f(n) \geq n$ es una función de complejidad apropiada entonces $TIME(f(n)) \subsetneq TIME(f^3(2n+1))$*

Demostración. Trivialmente, $\text{TIME}(f(n)) \subseteq \text{TIME}(f^3(2n+1))$. En los lemas 3.3.1 y 3.3.2, haciendo $n = 2m + 1$, probamos que MP_f está en el segundo y no en el primero. Se concluye que $\text{TIME}(f(n)) \subsetneq \text{TIME}(f^3(2n+1))$ ■

Corolario 3.3.1. ***$P \subsetneq EXP$***

Demostración. Por el Teorema de Jerarquía,

$$\text{P} \subseteq \text{TIME}(2^n) \subsetneq \text{TIME}((2^{2n+1})^3) \subseteq \text{EXP}$$

■

Teorema 3.3.3. *Jerarquía del espacio. Si $s(n)$ es una función de complejidad apropiada. Entonces $SPACE(s(n)) \subsetneq SPACE(s(n)\log(s(n)))$*

Ejercicio 27. (Extra) Probar el Teorema 3.3.3.

Consideremos el modelo de MT que tiene dos cintas. La primera es *read-only* y se lee el input de longitud n. La segunda es la cinta de trabajo o la cinta donde se escribe el *output*.

Definición 3.3.1. Una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es de espacio construible si existe una MT tal que dado $x \in \Sigma^\star$ con $n = |x|$, escriba en binario el valor de $s(n)$ en la cinta de trabajo y el número de bits usados para calcular esta función, es decir el espacio usado, es de orden $O(s(n))$.

Sea $s(n) \geq \log(n)$ una función de espacio construible. Definimos el siguiente lenguaje:

$$L_s = \{M\#x : M \text{ acepta a } x \text{ y usa espacio menor a } s(|M\#x|) \text{ y } |\Gamma| = 4\}$$

Los siguientes dos lemas serán útiles para probar dos lemas más.

Lema 3.3.3. *Sea L un lenguaje en $SPACE(s(n))$. Luego, para toda $\epsilon > 0$, se sigue que $L \in SPACE(\epsilon \cdot s(n) + 2)$.*

Demostración. La prueba es muy similar al Teorema 3.3.1. Ahí, se logró que se usara menos tiempo a costa de usar más estados y codificar letras en palabras más grandes. El término de más dos correspondia a leer $\vdash$ y el primer $\sqcup$ al final del input. También aquí, para usar menos espacio, se trabaja con un alfabeto más grande y con más estados a cambio de que se use menos espacio para describir el mismo *output*. La idea es que un sólo símbolo engloba lo que podríamos escribir con muchos símbolos. El 2 es porque la cadena del output usa al menos $\vdash$ y $\dashv$. ■

Lema 3.3.4. *Sea L un lenguaje que es decidido por una MT M en espacio $s(n)$ con su alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. Luego existe otra MT M' con su alfabeto $\Sigma' = \{0, 1\}$ tal que también decide a L y tal que su alfabeto de escritura tiene $|\Gamma| = 4$. Adicionalmente, usa espacio $O(s(n))$.*

Demostración. Si se considera una máquina no trivial entonces usa el mínimo número de símbolos posibles para el alfabeto de escritura Γ. Los símbolos naturalmente son $\vdash, 0, 1, \sqcup$. Las máquinas M y M' son casi idénticas, salvo que se paga agregando estados a Q' de tal suerte que se codifiquen los símbolos Γén binario. El input sigue siendo idéntico en ambas máquinas. Se sigue que el espacio ocupado en M' es un múltiplo, de $\log \Gamma$ veces, y como esto es una constante, entonces se tiene que es de orden $O(s(n))$. ■

El teorema se seguirá trivialmente de los dos siguientes lemas.

Lema 3.3.5. $L_s \in SPACE\ (s(n) \log(s(n)))$.

Demostración. Sea U_s una MT universal con cuatro cintas de escritura. que simula máquinas M con $|\Gamma| = 4$. Sea $n = |M\#x|$ y note que en la descripción de los estados Q de M, se tiene que $|Q| \leq n$. Es posible computar el valor de $s(n) \log n$ y marcamos con algún símbolo distinto al espacio las primeras $s(n) \log n$ celdas en la tercera cinta. Como s es construible, por definición esto va a tardar orden $O(s(n) \log(n))$. Consideremos el número de configuraciones posibles t. Este número esta dado por

el número de estados $|Q|$, por el número de cadenas que no excedan más memoria que $s(n)$, esto es $(4^{s(n)\log n})$, por el lugar el número de posibles celdas donde está la cabecilla en el input, es decir n. Se computa este el número $t = |Q| \cdot 4^{s(n)\log(n)} \cdot n$ en la cuarta cinta, e inicializamos un reloj de alarma con este valor. Este valor usa $O(s(n)\log(n) + \log n)$ bits de espacio.

Luego U_s simula a $M\#x$. En la primera cinta usamos $s(n)\log n$ posiciones para simular la memoria y $\log|Q| = \log n$ para guardar el estado actual de Q en la segunda cinta. En cada iteración de M se decrementa el contador de la cuarta cinta. Si se llega a cero en el contador quiere decir que estamos en un *loop* pues se regresó a alguna configuración. Se sigue que que $M\#x \notin L_s$. Si se usan más de $s(n)\log(n)$ celdas entonces rechazamos también, esto se puee verificar con la tercera cinta. Si la simulación termina antes de t pasos entonces si M acepta entonces U_s acepta y si M rechaza entonces U_s rechaza. Note como L_s decide correctamente, y usa espacio $O(s(n)\log n + \log n) = O(s(n)\log(n))$. Usando el Teorema del 3.3.3 se puede lograr que la cota sea menor que $s(n)\log(n)$ probando el resultado. ■

Lema 3.3.6. *El conjunto $L_s \notin$ SPACE $(s(n))$.*

Demostración. Cuando una MT universal simula a otra y esta última usa espacio $s(n)$, el espacio que usa la simuladora es $s(n) \cdot \log(n)$, porque adicionalmente debe de decodificar los símbolos en el alfabeto Γ correspondiente a M y esto aumenta el espacio en memoria por ese factor. Sin embargo, si nos restrigimos a máquinas con $|\Gamma| = 4$, un número fijo y la máquina universal tuviera este mismo número de símbolos, entonces no se agrega un factor de codificación. En cuyo caso el mismo espacio que usa la máquina M en aceptar o rechazar es el que usa M_s.

Supongamos que existe una MT M_s que decide a L_s en SPACE$(s(n))$. Por el Lema 3.3.4, existe una M'_s tal que su alfabeto de escritura $|\Gamma'| = 4$ y usa memoria de orden $O(s(n))$. Por el Lema 3.3.3 es posible que esta máquina use memoria estrictamente menor a $s(n)$, a costa de incrementar el número de estados Q' y del alfabeto Σ'.

Construimos una MT D_s que acepte a $M\#x$ si M_s rechaza a $M\#x$ y D_s rechaza a $M\#x$ si M_s acepta a $M\#x$. Nos preguntamos si podemos mandar la cadena $D_s\#x$ a M_s. La condición la cumple porque D_s hereda el alfabeto $|\Gamma| = 4$ de M_s.

Supongamos que D_s acepta a $D_s\#x$. Entonces M_s rechaza a $D_s\#x$. Por la definición de M_s, esto significa que D_s rechaza a $D_s\#x$ o que D_s usa más espacio de $s(|D_s\#x|)$ al recibir la cadena $D_s\#x$. Lo primero es contradictorio, así que debe ser lo segundo. Sin embargo, el espacio que usa D_s en aceptar o rechazar $D_s\#x$ es el mismo que usa M_s bajo este input. No obstante, por construcción, M_s no usa más espacio que $s(D_s\#x)$ para decidir. Utiliza el mínimo espacio posible y este es el mismo espacio que el de su simulación. Se sigue que D_s usa menos espacio que $s(D_s\#x)$ para decidir, lo cual nuevamente es contradictorio.

Supongamos que D_s rechaza a $D_s\#x$. Entonces M_s acepta a $D_s\#x$ y por lo tanto D_s acepta a $D_s\#x$ lo cuál es una contradicción. Se sigue que el problema fue en la

suposición de la existencia de la máquina M_s. ■

La siguiente demostración corresponde a la prueba del Teorema 3.3.3

Demostración. Trivialmente se tiene que SPACE($s(n)$) $\subseteq$ SPACE($s(n)\log(s(n))$). Por los Lemas 3.3.5 y 3.3.6 se tiene que L_s pertenece al segundo y no al primero. De este hecho se sigue que la inclusión es propia. ■

Problema de alcanzabilidad

El método de "alcanzabilidad". Sea $G = (V, A)$ una digráfica. Es un problema muy común el decidir si dados dos vértices i y j, si existe un camino dirigido de i a j. Este problema lo llamamos REACHABILITY. En la gráfica hay un camino dirigido de 1 al 5, pero si cambiamos el arco (4,3) de dirección a (3,4) entonces no hay camino dirigido de 1 al 5.

Teorema 3.3.4. *Reachability* $\in$ *TIME*(n^2) *donde n es el número de vértices de G.*

Teorema 3.3.5. *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una función de complejidad apropiada entonces:*

a) *SPACE*($f(n)$) $\subseteq$ *NSPACE*($f(n)$).

b) *TIME*($f(n)$) $\subseteq$ *NTIME*($f(n)$).

c) *NTIME*($f(n)$) $\subseteq$ *SPACE*($f(n)$).

d) *NSPACE*($f(n)$) $\subseteq$ *TIME*($k^{f(n)}$).

Demostración.

a) Es trivial

b) Es trivial

c) Sea $L \in$ NTIME($f(n)$). Así que existe N una máquina de Turing no determinística que decide a 2 en tiempo "$f(n)$". Construimos una MTD S que decide L en espacio $f(n)$.

d) Sea $L \in$ SPACE($f(n)$), así que existe una MTDN que decide a L en espacio $f(n)$. Recordemos que una configuración para una MTDN con k cintas es una tupla $Sw_1, i, u_1, w_2, i, u_2, \ldots w_k, i, u_k$, donde $s \in Q$ y $w_i u_i \in \Gamma^\star$ y el símbolo i indica que la cabeza lectora de la i-ésima cinta está posicionada en el 1er símbolo de u_i para cada cinta. El número de posibles de configuraciones de M se determina como sigue. Hay $|Q|$ posibles estados y $|\Gamma + 1|^{k \cdot f(n)}$, el $+1$ es por el símbolo de espacio, que se considera aparte. La posición de la cabecilla está implica en la notación de la cadena y por ello no se considera como un tercer factor dentro de las combinaciones. El número de configuraciones es $c_1 = |\Gamma + 1|^k \cdot |Q|$, donde este número depende de M y nada más. Definimos la gráfica dirigida de configuraciones de M, denotada por $G(M, x), (x \in \Sigma^\star)$. El conjunto de vértices de $G(M, x)$ es el

conjunto de todas las posibles configuraciones y hay un arco de configuración D_1 a D_2.

El decidir si M acepta a $x \in \Sigma^\star$, es equivalente a decidir si existe un camino dirigido de la configuración $q_0\lambda, i, x\lambda, i, x \ldots \lambda, i, x$ hacia alguna configuración de aceptación de M $(q_y \cdots \in G(M, x)$. En otras palabras, hemos reducido el problema de decidir a L al problema de *Reachability* en una digráfica de $c_1^{f(n)}$ vértices. *Reachability* se puede resolver en $O(n^2)$ tiempo donde n es c_1, y sea c_2 la constante que proviene del orden. Por lo tanto podemos decidir a L en tiempo $c_2 \cdot (c_1^{f(n)})^2$. Si $c = c_1 c_2^2$ entonces se puede decidir a L en tiempo $(c^{f(n)})$.

■

Si Q y Γ son el conjunto de estados y símbolos de N, sean $\sigma \in \Gamma$, $q \in Q$. Sea

$$C_{\sigma,q} = \{(S, \beta, A) : A \in \{L, R\}, (S, \beta, A) \in \delta(q, \sigma)\},$$

un renglón del árbol. Luego $C_{\sigma,q}$ es el conjunto de posibles elecciones no determinísticas para la pareja (q, σ). Como cada $C_{\sigma,q}$ es finito, sea $d = \text{máx}_{q,\sigma} |C_{\sigma,q}|$. Construimos una MTD S que decida a L en espacio $f(n)$. S primero calcula el número d, luego en la tercera cinta genera un secuencia de números cada uno entre 0 y $d-1$. Genera $f(n)$ números.

Luego S genera la primer secuencia de números $(O^{f(n)})$ en su tercer cinta y empieza a simular a N, en el camino indicado por la secuencia actual. Si en este camino N acepta, S acepta si S agota todos los posibles caminos de N y esta no acepta, entonces S rechaza su entrada. Es claro que como S reutiliza el espacio de trabajo, el espacio total usado es de $O(f(n))$ (aunque el tiempo puede ser exponencial. Así que $L \in$SPACE$(f(n))$.

Teorema 3.3.6. *(Sauitch) El problema Reachability* $\in$ *SPACE*$(\log^2(n))$.

Corolario 3.3.2. *Si* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es una función de complejidad apropiad y* $f \geq \log n$*, entonces NSPACE*$(f(n))$ = *SPACE*$(f^2(n))$

Ejercicio 28. Probar que **P** es cerrado bajo unión e intersección de conjuntos. Repetir para **NP**.

Demostración. Sean dos lenguajes L_1 y L_2 en **P**.

1. Por demostrar que $L = L_1 \cup L_2$ está en **P**, es decir que existe una máquina de Turing M que acepta a L en tiempo polinomial. Sea x una cadena, luego M simula de forma altenada a L_1 y a L_2 con el input x. La máquina acepta a x si y sólo si en alguna de las simulaciones x se acepta. Note que x se acepta si y sólo si $x \in L$. Finalmente, como las simulaciones son polinomiales entonces M tarda TIME$(1 + n^{k_1} + n^{k_2})$ =TIME$(n^{\text{máx}\{k_1,k_2}\})$. Por lo tanto M acaba en tiempo polinomial.

2. Por demostrar que $L = L_1 \cap L_2$ está en **P**, es decir que existe una máquina de Turing que acepta a L en tiempo polinomial. La demostración es completamente análoga a la anterior, salvo que x se acepta si y sólo si se acepta en ambas simulaciones.

■

La cerradura también puede ser definida sobre lenguajes y no sólo sobre conjuntos finitos. Su definición es directa, si L es un lenguaje entonces la estralla de Kleene es $L^\star = .$

Ejercicio 29. Sea L un lenguaje y $L^\star$ su cerradura o bien, su estrella de Kleene.

a) **NP** es cerrado bajo estrella de Kleene. Es decir que dado Σ en **NP** entonces $\Sigma^\star$ está en **NP**.

b) **P** es cerrrado bajo estrella de Kleene.

Demostración.

a) Supongamos que existe una máquina M que acepta a Σ en tiempo polinomial.

b) f

■

4. Reducciones y completez

4.1. Reducciones polinomiales

- SAT
- k-coloring ($k = 2, 3$)
- Knapsack (optimización)

Todos estos problemas están en **NP**: 2-coloring, 3-coloring.

Definición 4.1.1. Sean L_1, $L_2 \subseteq \Sigma^\star$. Definimos que L_1 es reducible en tiempo polinomial a L_2, denotado $L_1 \leq_p L2 \iff \exists f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ función computable en tiempo polinomial, por una MTD cpm k-cintas tal que cumple que $\forall x \in \Sigma^\star (x \in L_1 \iff f(x) \in L_2)$.

En capítulos anteriores se dan nociones de reducciones que no tienen un concepto de eficiencia. En este capitulo se exploran este tipo de reducciones eficientes.

Definición 4.1.2. Función computable en tiempo polinomial

$$FP = \left\{ f : \Sigma^* \to \Sigma^* | \exists M \text{ una MTD de k-cintas que calcula a } f \text{ en tiempo } n^k \right\}$$

Ejercicio 30. Si $f_1 : \Sigma^* \to \Sigma^*$ es una reducción polinómica de L_1 a L_2 y $f_2 : \Sigma^* \to \Sigma^*$ es una reducción polinomial de L_2 a L_3, entonces $f_2 \circ f_1 : \Sigma^* \to \Sigma^*$ es una reducción polinomial de L_1 a L_3.

Demostración. ■

Ejercicio 31. Probar que si $A \leq_p B$ y $B \in P$, entonces $A \in P$.

Demostración. ■

Sea $k \geq 1$ se define el lenguaje:

$$kSAT = \{\phi : \phi \text{ está en FNC, con k literales en cada clausula y } \phi \text{ es satisfacible}\}$$

Lema 4.1.1. *$SAT \leq_p$ 3SAT*

Demostración. Debemos probar que existe $f \in FP$ tal que $\phi \in$ SAT $\iff f(\phi) \in$ 3SAT. Si alguna clausula de ϕ contiene a más de 2 literales entonces

$$(x_1 \vee \neg x_2) \sim (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$$
$$\neg x_3 \sim (\neg x_3 \vee \neg x_3 \vee \neg x_3)$$

Si una clausula C de ϕ contiene más de 3 literales $\Rightarrow$ la convertimos a un número de clausulas equivalentes, agregando variables adecuadas que no están en ϕ, de tal manera que se conserve la satisfacibilidad o no satisfacibilidad de C, por ejemplo:

$$C = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

Se convierte en

$$C = (x_1 \vee x_2 \vee z_2) \wedge (\neg z_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

En general, si C es la clausula $C = (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_l), l \geq 4$. Luego C es reemplazado por las $l-2$ clausulas $(a_1 \vee a_2 \vee z_1) \wedge (\neq z_1 \vee a_3 \vee z_4) \cdots \wedge (\neq z_k \vee a_{l-1} \vee a_l)$. El orden de esta transfomración es de orden $O(nm) = O(n^2)$ y por lo tanto es polinomial. ■