Understanding Computation - From Simple Machines to Impossible Programs

Chapter 2: The Meaning of Programs

Computer programming isn't really about programs, it's about ideas.

The Meaning of "Meaning"

In linguistics, semantics is the study of the connection between words and their meanings: the word "dog" is an arrangement of shapes on a page, or a sequence of vibrations in the air caused by someone's vocal cords, which are very different things from an actual dog or the idea of dogs in general.

How to specify a language

1. syntax

2. a semantics

In the context of programming language theory, the word semantics is usually treated as singular: we describe the meaning of a language by giving it a semantics.

Three Ways to Specify a language

- **An Interpreter**
  Plenty of languages don't have an official written specification, just a working interpreter or compiler
  - **MRI**
    If any piece of Ruby documentation disagrees with the actual behavior of MRI, it's the documentation that's wrong.
  - PHP and Perl 5
- **Prose Specification**
  Another way of describing a programming language is to write an official prose specification, usually in English.
  - C++, Java, and ECMAScript
- **Mathematical Techniques**
  A third alternative is to use the mathematical techniques of formal semantics to precisely describe the meaning of a programming language.

Syntax

a collection of rules that describe what kind of character strings may be considered valid programs in that language

- **Parser**
  a program that can read a character string representing a program, check it against the syntax rules to make sure it's valid, and turn it into a structured representation of that program suitable for further processing.
- **Abstract Syntax Tree**
  abstract syntax tree (AST)

  a representation of the source code that discards incidental detail like whitespace and focuses on the hierarchical structure of the program.

Operational Semantics

defining rules for how its programs execute on some kind of device

This device is often an abstract machine

Small-Step

Small-Step Semantics

Expressions

The purpose of an expression is to be evaluated to produce another expression

- Number, Add, and Multiply

```
class Number : Struct.new(:value)
end

class Add : Struct.new(:left, :right)
end

class Multiply : Struct.new(:left, :right)
end

puts Add.new(
  Multiply.new(Number.new(1), Number.new(2)),
  Multiply.new(Number.new(3), Number.new(4))
)
```

- reducible?

```
class Number
  def reducible?
    false
  end
end

class Add
  def reducible?
    true
  end
end

class Multiply
  def reducible?
    true
  end
end

p: Number.new(1).reducible?
=> false
p: Add.new(Number.new(1), Number.new(2)).reducible?
=> true
```

- reduce

  - If the addition's left argument can be reduced, reduce the left argument.
  - If the addition's left argument can't be reduced but its right argument can, reduce the right argument.
  - If neither argument can be reduced, they should both be numbers, so add them together.

```
class Add
  def reduce(environment)
    if left.reducible?
      Add.new(left.reduce(environment), right)
    elsif right.reducible?
      Add.new(left, right.reduce(environment))
    else
      Number.new(left.value + right.value)
    end
  end
end

class Multiply
  def reduce(environment)
    if left.reducible?
      Multiply.new(left.reduce(environment), right)
    elsif right.reducible?
      Multiply.new(left, right.reduce(environment))
    else
      Number.new(left.value * right.value)
    end
  end
end

irb(main):001:0> add = Add.new(Number.new(1), Number.new(2))
irb(main):002:0> puts add.reduce(nil)
irb(main):003:0> puts add.reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):004:0> puts add.reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):005:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):006:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):007:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):008:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):009:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):010:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):011:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):012:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):013:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):014:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):015:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):016:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):017:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):018:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):019:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):020:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):021:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):022:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):023:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):024:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):025:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):026:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):027:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):028:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):029:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):030:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):031:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):032:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):033:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):034:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):035:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):036:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):037:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):038:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):039:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):040:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):041:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):042:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):043:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):044:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):045:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):046:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):047:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):048:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):049:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):050:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):051:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):052:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):053:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):054:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):055:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):056:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):057:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):058:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):059:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):060:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):061:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):062:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):063:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):064:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):065:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):066:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):067:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):068:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):069:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):070:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):071:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):072:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):073:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):074:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):075:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):076:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):077:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):078:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):079:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):080:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):081:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):082:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):083:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):084:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):085:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):086:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):087:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):088:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):089:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):090:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):091:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):092:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):093:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):094:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):095:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):096:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):097:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):098:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):099:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil)
irb(main):100:0> puts Multiply.new(add, add).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(nil).reduce(n
```