Budapesti Corvinus Egyetem

Gazdálkodástudomány Kar

Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

A Longstaff-Schwartz kamatlábmodell

Készítette: Alföldi Boldizsár

Pénzügy mesterszak

Befektetés-elemző szakirány

2015

Szakszeminárium vezető Dr. Makara Tamás

A. Bevezetés

Szakdolgozatomban Francis A. Longstaff és Eduardo S. Schwartz affin, általános egyensúlyi, kétfaktoros kamatlábmodelljét mutatom be (Longstaff - Schwartz, 1992b). A modell széles körben elismert a szakirodalomban, amely a Cox, Ingersoll és Ross által alkotott egyensúlyi gazdaság (Cox et al., 1985a) egy speciális esete. A következőekben röviden ismertetem a kamatlábmodellek klasszifikációját, a választott modell szakirodalomban való tér és időbeli elhelyezése érdekében.

A hozamgörbe-, kamatlábmodellek számossága és szakirodalma terjedelmes, ezért az egyes típusok részleteibe nem megyek bele. Ezeket pár szóban ismertetem, valamint minden típusra idézek egy ismert, leginkább jellemző modellt. Mivel a bemutatható kategóriák száma ezzel a korlátozással is jelentős, ezért korlátozom azt a modellek megalkotási, első megjelenési dátumai alapján. Az intervallumot a szakdolgozatom tárgyához szorosa köthetően, az 1970-es évek és 1990-es évek eleje közötti időszakban határozom meg.

A klasszifikálást érdemes az elején rögtön két részre bontani, egyrészt a modell alapú, dinamikus valamint az illesztett, statikus megközelítésre. Az előbbiek fontos tulajdonságai azok a feltételezések, amelyekkel korlátokat, kényszereket alkalmaznak a kamatlábak, hozamok időbeli változására, jövőbeli alakulására. Az utóbbiak egy egyszerűbb családot képviselnek és mindösszesen egy megfelelően rugalmas függvényformát határoznak meg, amellyel az adott kereskedési napi hozamgörbe a legjobban leírható. Az utóbbiakat leginkább két modell, függvényforma példázza, az első a spline függvényforma, amelyet először McCulloch használt (McCulloch, 1971). Ez egy folytonos függvényt k elemre bont fel, ahol mindegyik elem egy tetszőleges hatványú paraméteres függvény. A statikus család egy másik jeles képviselője a Nelson és Siegel által alkotott függvényforma (Nelson - Siegel, 1987), amely egy másodfokú differenciálegyenletet illeszt a forward hozamgörbére.

A modell alapú, strukturális megközelítésben alkotott kamatlábmodelleket további csoportokra bonthatjuk. A következő megbontás során Damiano Brigo előadását (Brigo, 2007) követem, amely Fabio Mercurioval közösen írt könyvük (Brigo - Mercurio, 2007) alapján készült. Ők az általam leszűkített időintervallumon belüli kamatlábmodelleket három csoportra osztják.

Az első családban a rövid kamatláb mint endogén, modellen belüli változó kerül modellezésre a kockázatmentes mérték szerint. Az első ilyen jellegű megközelítés a Vasicek modell (Vasicek, 1977), amely hatékony piacokat feltételez és azt feltételezi, hogy az összes hozam egytől függ, az azonnali rövid kamatlábtól. De ilyen a Cox, Ingersoll és Ross által alkotott modell (Cox et al., 1985b) is, amely egy általános gazdasági egyensúly alapján határozza meg az azonnali kamatlábat. Ehhez a modellhez nagyon hasonló a Longstaff és Schwartz által alkotott modell (Longstaff - Schwartz, 1992b) is. Ezekben a modellekben az a közös, hogy valamilyen transzformációval áttérnek a kockázatmentes állapotváltozó alakulásra, és „no arbitrage" feltétellel határozzák meg az egyensúlyi, hatékony piaci kamatláb és származtatott termékár- alakulást. Ezek a modellek jellemzően affin modellek, azaz a kamatláb a kockázati faktor lineáris transzformáltja. Az ilyen típusú modellek részletekbe menő további csoportosítása Dai és Singleton cikkében (Dai - Singleton, 2000) található.

A Longstaff-Schwartz kamatlábmodell pontos klasszifikálása érdekében az előző a modellcsaládon belül egy további alcsoportot képzek. Az ilyen típusú modellekben az egyensúlyi kamatlábat általános egyensúlyi elméletre épülő gazdasági modellel határozzák meg. Ilyen specifikációval lehetőségünk nyílik fundamentális makró változókat a kockázati faktorok közé építeni, így növelve a modellek valóságot leíró erejét. Ezekre jellemző a gazdasági szereplők preferenciáira vonatkozó feltételezések is. Ehhez hasonló, látens gazdaságra épülő modell a Longstaff-Schwartz kamatlábmodell is, igaz makró változó helyett, a rövid kamatláb mellett, annak azonnali varianciája szerepel második faktorként. A szerzőpáros által alkalmazott egyéni preferenciákra az elméleti rész során térek ki.

A második modellkategória esetén szintén a rövid kamatláb kerül modellezésre, de ezúttal mint a piac által adott, külső változó. Ezeknél a cél minden esetben az adott kereskedési nap hozamgörbéjének az eltérés nélküli illesztése. Ez abban különbözik a statikus megközelítéstől, hogy az ilyen modellek esetén a céltól függetlenül fel van téve egy kamatlábat alakító folyamat. Csak éppen a kényszer paraméterezésének a szabadságfoka olyan magas, hogy lehetővé teszi a hozamgörbe pontos illesztését. Ilyen modellek például Ho és Lee munkája (Ho - Lee, 1986), amelyben a kamatláb alakulás drift paramétere változhat minden időpillanatban. Hull és White modellje (Hull - White, 1990), amely a Vasicek modell kiterjesztése a hosszú távú átlagkamatláb önkényes megválasztásának lehetőségével. Valamint ilyen Black, Derman és Toy által alkotott modell (Black et al., 1990), amelyben szintén a drift paraméter változtatásával érik el a hozamgörbéhez való teljes illeszkedést. Ezen modellek esetében sokkal inkább a kamatláb volatilitás szerkezetének megfelelő paraméterezésére, kalibrálására helyeződik a hangsúly a rövid kamatláb egyensúlyi, állandó szintjének meghatározása helyett.

A harmadik, a szakdolgozatom szempontjából még releváns modellcsalád fő képviselője a Heath, Jarrow és Morton által alkotott forward hozamokat leíró modell (Heath et al., 1990). Ez egy egységes keretrendszer, amelyen belül az előzőleg ismertetett két csoport közösen is kezelhető. A modell a forward kamatláb alakulását írja le egy egységes rendszerben, azok volatilitás struktúrájára kényszerített feltételezésekkel. Ebbe a modell keretbe a Longstaff-Schwartz kamatlábmodell is beilleszthető, amelyhez szükséges eljárás szerepel a szerzők cikkében (Longstaff - Schwartz, 1992a).

Ezzel elhelyeztem a választott modellt, mind időben, mind térben a kamatlábmodellek szakirodalmában. A szakdolgozatom során az első bekezdésben említett modellt fogom bemutatni, feltérképezni. A dolgozatomat négy további részre tagolom, ezek felépítése a következő.

Az első részben bemutatom az általam feldolgozott kamatlábmodell elméleti hátterét, ezen belül kitérek a modell mögött megbúvó folytonos gazdasági modellre, bemutatom a kockázati faktorok átalakításait, illetve ismertetem a modellen belül meghatározható egyenleteket, összefüggéseket.

A második rész a modell kalibrálására határoz meg három különböző módszert. Ezek közül egyet a modell szerzői javasoltak, egyet a szakirodalomból merítettem. Az utolsót én dolgoztam ki, támaszkodva természetesen az előző kettőben rejlő elképzelésekre. Ezen felül a rész legelején ismertetem az állapotváltozók meghatározásának módszerét is.

A harmadik részben az empirikus vizsgálatom eredményei találhatóak. Ezek között bemutatom az általam felhasznált adatokat és programokat. Emellett ismertetem az állapotváltozók és a kalibrációs technikám alkalmazása során kapott eredményeket, ami 2003-as év elejétől 2015 félévéig tartó időszakra vonatkozó magyar állampapír-piaci hozamgörbe.

A negyedik részben összegzem a dolgozat során gyűjtött tapasztalatokat, valamint további kutatási lehetőségeket, útvonalakat határozok meg.

B. A modell elméleti bemutatása

A Longstaff-Schwartz kamatlábmodell tipizálását tekintve egy kétfaktoros, egyensúlyi kamatlábmodell. Mivel egy folytonos gazdasági modellre épül, amelyen belül meghatározható az általános egyensúly, ami megadja ebben a gazdaságban az azonnali, egyensúlyi kamatlábat. Valamint kétfaktoros, mivel két mögöttes, látens változó van hatással az egyensúly alakulására. Az így meghatározott kamatláb alakulással adja a modell a különböző termékek árát.

Szakdolgozatom ebben a részében a modell mögött meghúzódó elméletet mutatom be. Ezt az elméleti bemutatást három fejezetre osztom, az első a modell mögött meghúzódó folytonos gazdasági modell bemutatása. A második az azt megelőző fejezet paramétereinek az átváltásáról, transzformálásáról szól, amivel el tudunk rugaszkodni az absztrakt megközelítéstől. Amely segítségével olyan paramétereket kapunk, amelyekről intuitíven is azt gondoljuk, hogy befolyásolják a kamatlábak, hozamok alakulását. A harmadik fejezetben a szerzők által kapott eredményeket, egyenleteket, a modell további felhasználási lehetőségeit ismertetem. Mind a három fejezetben nagyban támaszkodok a modell alkotóinak cikkére (Longstaff - Schwartz, 1992b). Most az elkövetkezendő fejezetek rövid tartalma következik.

A modell fundamentális alapját képezi az a gazdasági modell, amelyet Cox, Ingersoll és Ross ezzel foglalkozó cikkében (Cox et al., 1985a) bemutatott. Ennek a gazdasági modellnek egy speciális esete a Longstaff és Schwartz által specifikált és ezáltal szakdolgozatom alapját képező folytonos gazdaság. Az első fejezet ennek az elképzelt folytonos gazdaságnak a bemutatásáról fog szólni. Szintén ebben a fejezetben ismertetem a modell magját alkotó sztochasztikus differenciálegyenletet, amely leírja minden ebben a gazdaságban fellelhető termék áralakulását.

A második fejezet kapcsolatot teremt a folytonos gazdaságot alakító látens állapotváltozók, valamint közgazdaságilag értelmezhető, kvázi megfigyelhető faktorok között. Ezt egy változó átalakítással érte el a szerzőpáros, melynek módját és következményeit részletezem. Emellett bemutatom a kockázati faktorok további transzformálását, amely segítségével áttérhetünk a kockázatsemleges világba.

A harmadik fejezetben bemutatom a szerzőpáros által kapott összefüggéseket. Itt található az alapvető árazási egyenlet megoldása a speciális esetre, amikor a termék kifizetése a lejáratkor egy. Ez az elemi kötvény árát meghatározó egyenlet, amelyet a kalibráció és a számítások során is alkalmaztam. A fejezetet egy kitekintéssel zárom, amelyben megadom a kötvényre szóló opció árazási módszerét, bemutatom a forward mértékre való áttérés módját, valamint további lehetőséget vázolok fel a modell használatára.

I. A folytonos gazdaság bemutatása

Ebben a fejezetben a modell alapját képező folytonos gazdasági modellt mutatom be. Ezt a modell szerzőpárosa átvette Cox, Ingersoll és Ross által írt szakirodalmi cikkből (Cox et al., 1985a). A forrásra támaszkodva fogom ezt én is bemutatni. Ennek a folytonos gazdaságnak a vizsgálata elengedhetetlen a kamatlábmodell teljes megértéséhez.

A fejezeten belül további alfejezeteket képeztem a pontosabb bemutatás, jobb megértés érdekében. Az első alfejezet kizárólag Cox, Ingersoll és Ross cikkére fog támaszkodni, és az általuk megalkotott modell főbb részeit tárgyalja, mint például az alkalmazott feltevéseik, kimondott tételeik, amelyeknek hatásuk van a jelen szakdolgozat tárgyát képező modell esetében is. Ennek a gazdasági modellnek egy speciális esete a Longstaff-Schwartz kamatlábmodell, valamint a Cox-Ingersoll-Ross kamatlábmodell (Cox et al., 1985b) is. A második fejezetben a kamatlábmodell „háttér” gazdaságának a specifikációja szerepel, amelyen bemutatom a kamatlábmodell szerzőpárosának alkalmazott korlátozásait az eredetihez viszonyítva. A harmadik alfejezet további párhuzamot von a két gazdasági modell között, és bemutatja azokat a tételeket, egyezőségeket, amelyeket Longstaff és Schwartz felhasznált a saját modelljük építése során.

1. A Cox-Ingersoll-Ross féle folytonos gazdaságmodell

Ebben az alfejezetben a kamatlábmodell alapját képező folytonos gazdasági modellt mutatom be teljes mértékben Cox, Ingersoll és Ross cikkére (Cox et al., 1985a) támaszkodva. Típusát tekintve ez egy folytonos, általános egyensúlyi gazdasági modell, ahol a szerzők feltételezésekkel éltek a folyamatok egyszerűsítése érdekében. A következőekben ismertetem az általuk használt feltétezéseket, ezek között szerepel a termelési folyamatok specifikációja, a szereplők preferenciái és a többi. A bemutatás során eltérek a szerzők cikkben használt jelöléseitől a feldolgozott kamatlábmodellel való konzisztencia érdekében.

A modell alapja a pénzeszköz meglétének feltételezése, azaz van egy olyan jószág a gazdaságban, amit minden szereplő elfogad, és amiben a különböző termékek árai kifejezhetőek. Ez a jószág felhasználható fogyasztásra, valamint újra befektethető a termelési folyamatokban. A modellen belül mindent ennek a jószágnak a mértékében fejeznek ki.

A második építőelem a termelési folyamatok specifikációja, amelyekből n darab van a gazdaságban, valamint amelyeket a következő sztochasztikus differenciálegyenlet rendszerrel írnak le,

$$dQ = I_Q\mu(Y,t)dt + I_Q\sigma(Y,t)dZ$$

-1

ahol Q egy n dimenziós vektor, amely megadja a befektetések felhasználása során keletkező termelés értékét, dZ egy $n+k$ dimenziós Wiener folyamat. I egy olyan $n \times n$ diagonális mátrix, amelynek átlójában az egyes termelési folyamatokba fektetett pénzmennyiség értékei szerepelnek. Y egy olyan k dimenziós vektor, amely az állapotváltozók értékeit tartalmazza. μ egy olyan n dimenziós vektorosan értelmezett függvény, amely az adott időpillanatra az állapotváltozó értéke alapján megadja a termelési folyamat drift paraméterét. σ pedig egy olyan $n \times (n+k)$ dimenziós mátrixosan értelmezett függvény, amely az adott állapotváltozó értéke alapján megadja az adott időpillanatra a folyamat volatilitás paraméterét. A termelési tényezők megtérülésének kovariancia mátrixa, $\sigma\sigma'$ pozitív definit. Ez az egyenletrendszer teljes mértékben leírja a termelési lehetőségek halmazát.

A következő építőelem a termelésre hatással lévő k darab állapotváltozó, faktor specifikációja, amelyet a következő, szintén sztochasztikus egyenletrendszer ír le,

$$dY = a(Y,t)dt + b(Y,t)dZ \qquad \text{B-2}$$

ahol a egy k dimenziós vektor, b egy $k \times (n+k)$ dimenziójú mátrix. A faktorok kovariancia mátrixa, bb' nemnegatív definit.

Az állapotváltozók és a termelés korrelációját $\sigma b'$ mátrixszorzat határozza meg. Amíg ennek értéke nem egy null mátrix, addig valamilyen mértékű kölcsönhatás fennáll. Természetesen, ha a két mátrix szorzata az egységmátrix, akkor a korreláció tökéletes. Ez a specifikáció lehetővé teszi, hogy az állapotváltozók az időben folytonosan változzanak, és ennek hatására folytonosan változzon a jelenleg elérhető, aktív termelési lehetőségek halmaza is. Emellett ez a megváltozás jobb és rosszabb gazdasági helyzet irányába is mutathat.

A piacokra való belépésnek és kilépésnek nincsenek korlátai, fizikai befektetést a gazdasági szereplők cégek és saját maguk által is kezdeményezhetnek, a második esetben tulajdonképpen a saját cégüket alapítják meg. Az összes piaci szereplő árelfogadó.

Létezik olyan piac, amelyen a szereplők azonnal kölcsönt adhatnak vagy vehetnek fel r kamatláb mellett. Amely az egyensúlyi piaci kamatláb, melynek értékét a modell implicit határozza meg.

Az összes olyan származtatott terméknek létezik piaca, amelyek kifizetései konkrétan meg vannak fogalmazva. Ezek a kifizetések függhetnek az állapotváltozóktól, valamint az összegzett gazdasági vagyontól. Az i-dik ilyen termék áralakulása a következő differenciálegyenlettel írható le,

$$dF_i = (F_i \vartheta_i - \pi_i)dt + F_i h_i dZ \qquad \text{B-3}$$

ahol h egy $n + k$ dimenziójú vektorosan értelmezett függvény, amelynek értékei az i-dik termék különböző faktorokra vonatkoztatott kockázati érzékenységét jellemzi. π a szerződés szerinti kifizetéseket, míg ϑ az átlagos árváltozást jelöli. Ezzel a specifikációval a modell természetesen nem szabja meg a konkrét áralakulást, mivel az sztochasztikus és a modell implicit adja meg.

A gazdaságban megszámolható és állandó darabszámú szereplő van jelen, akik ugyanolyan preferenciákkal és várakozásokkal rendelkeznek, illetve mindannyian elfogadják a gazdaság kereteit. Azaz a termelési lehetőségek és az állapotváltozók az előzőekben leírt differenciálegyenlet rendszerek szerint alakulnak. Valamint minden egyén ugyanazzal a célfüggvénnyel rendelkezik, amelyet maximalizál, és amelynek formája a következő,

$$E \int_t^{t\prime} U[C_s, Y_s, s]\, ds \qquad \text{B-4}$$

ahol E a várható érték operátor a jelenlegi várakozások és gazdasági helyzet mellett. C_s az s időpontbeli fogyasztás, Y_s az s időpontbeli állapotváltozó értékek, U pedig egy von Neumann-Morgenstern hasznossági függvény, amely emelkedő, szigorúan konkáv és kétszer differenciálható.

Emellett a szerzők felteszik, hogy a kereskedés folytonos és az üzlet megkötése mindig az egyensúlyi árfolyamokon történik. Ezzel a gazdaság keretrendszere definiálva lett, egyedül az induló vagyoni helyzet, állapot van hátra. Ez a következőképpen van meghatározva. Minden gazdasági szereplő rendelkezik egy W mennyiségű vagyonnal. Amely oW arányát befekteti a fizikai termelési folyamatokba, ιW részét származtatott termékekre költi, míg C_s részt elfogyaszt belőle. Ebből a W vagyonából származó hasznosságot szeretné minden szereplő maximálni a költségkorlát mellett.

Ezen felül a szerzők tesznek még három technikai feltevést, amelyek a bizonyítást segítik, ahhoz szükségesek. Egyrészt a gazdasági szereplők a maximalizálás során korlátozzák a figyelmüket néhány elfogadható kontroll változóra, azaz döntéseiket nem az összes rendelkezésükre álló információ alapján hozzák meg. Másodrészt egy egyedi indirekt hasznossági függvény és az előzőekben feltett kontroll változó léteznek. Ezt azért teszik, hogy az indirekt hasznossági függvény örökölje a direkt hasznossági függvény, U néhány fontos tulajdonságát. Harmadrészt az indirekt hasznossági függvény deriváltjai rendelkeznek további egy vagyon szerinti folytonos deriválttal.

Ez az a látens gazdaság, amely Longstaff-Schwartz kamatlábmodell mögött is jelen van. Fontos még megismerni a gazdasági modell egyensúly definícióját, ami a következő. A differenciálegyenlet rendszereknek teljesíteniük kell bizonyos feltételeket, korlátokat. Például nem lehet az egyén fizikai termelési folyamatba fektetett vagyonhányada, o negatív, emellett nem lehet az egyén adott időszaki fogyasztása, C_s se negatív. Ezen felül a sztochasztikus folyamatoknak (r, ϑ, o, C) teljesíteniük kell még addicionális feltételeket, ami szükséges az optimum meghatározásához[1]. Az előzőeken felül teljesülnie kell még a piactisztító egyensúlyoknak. Azaz az összes kihelyezett hitel egyenlő az összes felvett hitellel, valamint az összes származtatott termékben felvett pozícióra kell legyen ellentétes pozíció felvéve, a második formálisan $\sum \iota_i = 0$.

A szerzők ezekkel a feltételezésekkel és korlátokkal három fontos tételt mondanak ki, és bizonyítanak, amelyekből kettő meghatározó erővel bír a Longstaff-Schwartz kamatlábmodellben is. A három tétel az egyensúlyi kockázatmentes kamatlábra, a származtatott termékek kockázati prémiumára, valamint a származtatott termékek áralakulását leíró differenciálegyenletre vonatkoznak. Ezek közül az első kettő a modell által implicit meghatározott, azaz az előzőekben ismertetett gazdaság egyensúlyi helyzetéből fakad. Míg a harmadik az alapvető árazási egyenlet, amellyel bármilyen származtatott termék beárazható, amennyiben ismerjük a kifizetés függvényét.

A modell által adott, implicit egyensúlyi kamatláb a vagyon határhasznosságának megváltozási rátájában várhatóan bekövetkező változással egyenlő, negatív előjellel. Vagy ugyanez másképp kimondva, a vagyon várható megtérülési rátájának és a vagyon megtérülési rátájának, valamint a vagyon határhasznosság változási rátáinak kovarianciájának összege.

A származtatott termékek kockázati prémiuma az a többlet hozam, ami az előzőekben meghatározott kockázatmentes kamatlábon felül várható az adott terméktől. Ez a gazdasági modellen belül egy adott származtatott termék esetén a következő. A terméknek az egyes faktorokra vonatkozó érzékenységének, valamint az adott faktorok kockázati prémiumának a

[1] Ezek a korlátok megtalálhatóak a gazdasági modellel foglalkozó cikk (Cox et al., 1985a) 370. oldalán, 11-es jelzésű egyenletek.

szorzatösszege, súlyozott átlaga. Az egyes állapotváltozókra való érzékenységet a termék áralakulását leíró differenciálegyenlet adott faktor szerinti deriváltja határozza meg.

Az árazó egyenlet általános alakját nem mutatom be. A speciális alakját, ami a Longstaff-Schwartz kamatlábmodellre vonatkozik a következő alfejezet tartalmazza. Ebben a fejezetben ismertetett eredmények általánosak, azok felhasználhatóak egyéni gazdaság specifikációk esetén. Egy gazdaság specifikációra kiváló példa a jelen szakdolgozatban tárgyalt kamatlábmodell, ezt a következő alfejezet tartalmazza.

2. A Longstaff-Schwartz féle specifikáció

A Longstaff-Schwartz kamatlábmodell kétfaktoros, általános egyensúlyra épül. Az előző fejezetben ismertettem a teljes gazdasági modellt n termelési folyamatra és k állapotváltozóra, amelyet Cox, Ingersoll és Ross (Cox et al., 1985a) alkotott. Ebben az alfejezetben ennek az általános modellnek a két állapotváltozós reprezentációjának bemutatása következik. Itt megmutatom azokat a korlátok, egyszerűsítéseket, feltételezéseket, amelyeket Longstaff és Schwartz alkalmazott az általuk írt cikkben (Longstaff - Schwartz, 1992b). Az alfejezetben e cikket jegyző szerzőpárosra fogok szerzőkként hivatkozni.

A szerzők egyszerűsítettek a Cox-Ingersoll-Ross szerkezeten, először is azzal, hogy az eredeti n fizikai termelési folyamat helyett egyet specifikáltak. Ennek a folyamatnak az alakulását leíró differenciálegyenlet a következő,

$$\frac{dQ}{Q} = (\mu X + \theta Y)dt + \sigma\sqrt{Y}dZ_1 \qquad \text{B-5}$$

ahol X és Y az állapotváltozók értékei, μ és θ az állapotváltozókra jellemző pozitív drift paraméter. Míg σ az Y faktorhoz tartozó pozitív volatilitás paraméter, dZ_1 pedig egy skalár Wiener folyamat. Emellett korlátként beépítik a $\theta > \sigma^2$ összefüggést, amely megegyezik Cox, Ingersoll és Ross saját kamatlábmodelljében (Cox et al., 1985b) alkalmazott korláttal. Ez biztosítja a kockázatmentes hozam nemnegatívitását.

A modell specifikációja során azt feltételezik, hogy a két állapotváltozó közül csak az egyiknek van a termelésben rejlő kockázatokra hatása. A céljuk ezzel az, hogy az X állapotváltozásában rejlő kockázatot ne lehessen a modellel fedezni, beárazni. Ezzel azt is elérik, hogy a várható termelési hozamok és a termelés volatilitása ne korreláljon tökéletesen. Továbbá ezzel a beállítással, intuitíven is magyarázható, különválasztható a két faktor. Mivel X a véletlen technológiai változás, ami nem befolyásolja a termelés bizonytalanságát, volatilitását, mert ez utóbbit az Y faktor befolyásolja egyedül. Figyeljük meg, hogy ez a specifikáció teljes mértékben kompatibilis a Cox-Ingersoll-Ross gazdasági modellel, a μ és θ paraméterek a vektorosan értelmezett $\mu(Y,t)$ függvény egyes elemei, míg σ a mátrixosan értelmezett $\sigma(Y,t)$ függvény eleme.

Az állapotváltozókat leíró differenciálegyenletek meghatározásánál követték a Cox-Ingersoll-Ross gazdasági modellt, és azokat a következőképpen határozták meg a szerzők,

$$dX = (a - bX)dt + c\sqrt{X}dZ_2 \qquad \text{B-6}$$

$$dY = (d - eX)dt + f\sqrt{Y}dZ_3 \qquad \text{B-7}$$

ahol a, b, c, d, e és f szigorúan pozitív konstansok, míg dZ_2 és dZ_3 skalár Wiener folyamatok. Az állapotváltozók átlaghoz visszatérő, négyzetgyökös, diffúziós folyamatként vannak modellezve, amilyen folyamattal jellemzően a kamatlábak alakulását leírják. Ezen felül a modell alkotói elvárják, hogy a dZ_2 legyen mind dZ_1, mind dZ_3-mal korrelálatlan.

A piacokra, a gazdasági szereplőkre és a származtatott termékekre ugyanazokkal a feltevésekkel élnek, továbbá konkrétan specifikálják a hasznossági függvény alakját, amelyet a következőképpen határoznak meg,

$$E_t\left[\int_t^{\infty} e^{-\rho s}\, ln(C_s)ds\right] \qquad \text{B-8}$$

ahol $E[.]$ a feltételes várható érték operátor, ρ a hasznossági diszkontfaktor, míg C_s az s időpontbeli fogyasztás. Figyeljük meg, a szerzők specifikációjánál azt feltételezik, hogy az állapotváltozókban bekövetkező változásoknak nincs hatása a gazdasági szereplő hasznosságára.

A szerzőpáros az előzőekben kifejtett módosításokkal élt a Cox-Ingersoll-Ross gazdasági modellhez képest. Ezt követően a reprezentatív befektető, gazdasági szereplő egy optimalizálási problémával találja szemben magát, amelynek a költségkorlátja a következő,

$$dW = W\frac{dQ}{Q} - Cdt \qquad \text{B-9}$$

ahol W jelöli a gazdasági szereplő vagyonát, amit a termelési folyamat növel minden időszakban, és amelynek C részét elfogyasztja, a maradék pedig újra befektetésre kerül az egyetlen termelési folyamatba. Egy jellemző gazdasági szereplő költségkorlátja a Cox-Ingersoll-Ross gazdasági modellben is hasonló.

Az optimalizálási probléma indirekt hasznossági függvénye megadható a választott hasznossági függvény specifikációja mellett Merton (Merton, 1971) alapján. Ez az indirekt hasznossági függvény a fogyasztás helyett az állapotváltozóktól, valamint a vagyontól függ és alakja a következő,

$$J(W, X, Y, t) = -\frac{e^{-\rho t}}{\rho} ln(W) + G(X, Y, t) \qquad \text{B-10}$$

ahol $G(.)$ egy előre nem definiált függvény, amelynek értéke csak az időtől és az állapotváltozóktól függ. Ez alapján az optimális fogyasztás megállapítható, amely jelen esetben $\rho W.$ Ezt az eredményt visszahelyettesítve (B-5) és (B-9)-be a következő egyensúlyi vagyonalakulást leíró egyenletet kapjuk,

$$dW = (\mu X + \theta Y - \rho)W dt + \sigma W \sqrt{Y} dZ_1. \qquad \text{B-11}$$

Ezek a szerzők által végzett módosítások az általánosabb Cox-Ingersoll-Ross folytonos gazdasági modellen. Az előzőkben leírt feltételezések és differenciálegyenletek segítségével felírható a gazdasági egyensúly, valamint annak alakulása. Figyeljük meg, hogy a Cox, Ingersoll és Ross által alkotott kamatlábmodell (Cox et al., 1985b) gazdasági specifikációja az itt leírt specifikáció egyik speciális esete, amikor a μ paraméter értékét nullára állítjuk, azaz amikor az X, a technológiai változások alakulását leíró állapotváltozónak nincs hatása az egyensúly alakulására. A következő fejezet a fundamentális árazási egyenlet és az egyensúlyi kamatláb meghatározásával fog foglalkozni az előzőekben specifikált modell alapján.

3. Alkalmazott tételek

Ebben a fejezetben bemutatom Longstaff és Schwartz által alkalmazott két tétel eredményét. Ezeket a tételeket „A Cox-Ingersoll-Ross féle folytonos gazdaságmodell” című alfejezetben már kimondtam. Most bemutatom, hogy ezek segítségével hogyan határozta meg a szerzőpáros a folytonos modell alapvető származtatott termék árazási differenciálegyenletét, valamint a modell által implikált egyensúlyi kamatlábat. A tételeket természetesen a saját maguk által specifikált, előző alfejezet tárgyát képező gazdasági modellre alkalmazták.

A tételek alkalmazást megelőzően skálázták az állapotváltozókat leíró differenciálegyenlet rendszert, amely átalakításnak a pontos bemutatása a következő fejezetben található. Ebben a fejezetben elegendő annyi, hogy az átalakításnak köszönhetően a faktorok varianciájának a mértéke csak az állapotváltozó négyzetgyökös értékétől függ, formálisan $x = X/c^2$ és $y = Y/f^2$.

Először az árazási egyenlet meghatározását mutatom be. Itt a szerzők egy az egyben alkalmazták az előzőekben említett tételt, ami Cox, Ingersoll és Ross cikkének (Cox et al., 1985a) III. tétele. Amely megadja az egyenlet alakját és együtthatóit egy adott gazdasági specifikáció mellett. Jelen esetben az egyenlet a következő,

$$\frac{x}{2}H_{xx} + \frac{y}{2}H_{yy} + (\gamma - \delta x)H_x + \left(\eta - \xi y - \left(-\frac{J_{WW}}{J_W}\right)Cov(W,Y)\right)H_y - rH = H_\tau \qquad \text{B-12}$$

ahol H a származtatott terméket jelöli τ lejárattal. Az alsóindexek parciális deriváltakat jelölnek, a görög betűk pedig az állapotváltozók skálázott paramétereit, ezek pontosabb bemutatását a következő fejezet tárgyalja. r az azonnali egyensúlyi, kockázatmentes kamatlábat, amelyet a modell impliciten határoz meg. Ezen felül a $Cov(W,Y)$ kifejezés a vagyonba bekövetkező változásoknak az Y faktorban bekövetkező változásaira számolt kovarianciáját jelöli.

Az előző egyenletben H koefficiensében szereplő hasznosság függő tag a kockázat piaci ára, ami a termelési bizonytalanság szintjében megfigyelhető kockázati hányadot mutatja. Ez formálisan a következő alakban írható fel,

$$\left(-\frac{J_{WW}}{J_W}\right)Cov(W,Y) = \lambda y \qquad \text{B-13}$$

ahol λ a kockázat piaci ára, amely az y skálázott állapotváltozóval arányos és konstans. Fontos kiemelni a modellnek azt a tulajdonságát, hogy a kockázat piaci árát is impliciten, a modellel konzisztensen határozza meg. Így nem kell se külön becsülni, se alakjára, értékére feltételezéssel élni a kamatlábmodell használata során.

Ezen felül az egyensúlyi kamatláb alakulását meghatározó képletet is a Cox, Ingersoll és Ross által írt cikk (Cox et al., 1985a) egyik tételének felhasználásával határozták meg a szerzők. Méghozzá a cikk I. tételével, amelyet „A Cox-Ingersoll-Ross féle folytonos gazdaságmodell" című alfejezetben már ismertettem. Azaz az egyensúlyi kamatláb a vagyon határhasznosságának megváltozási rátájában várhatóan bekövetkező változással egyenlő, negatív előjellel. Vagy másképpen a jelen esetben, a termelési folyamat várható megtérülési rátája mínusz a termelési folyamat varianciája. Ez az egyszerűsítés a hasznossági függvény logaritmikus formájának köszönhető. Ez a Longstaff-Schwartz féle modellspecifikáció esetén a következő egyenlettel írható le,

$$r = \alpha x + \beta y \qquad \text{B-14}$$

ahol α és β az eredeti termelési folyamat paraméterei átskálázott állapotváltozókkal kifejezve. Ezek pontosabb bemutatása a következő fejezet témája. Ezen az egyenlet formán látható, hogy az egyensúlyi kamatláb lineáris a két skálázott állapotváltozó tekintetében.

Ebben az alfejezetben bemutattam a szerzők, Longstaff és Schwartz által alkalmazott tételek eredményeit, következményeit. Ezzel teljes a modell, a következő fejezetben bemutatom a már többször hivatkozott átskálázását a faktoroknak, valamint kitérek a kockázat piaci árával történő korrekcióra, amelyre szükségünk lesz az árazásnál, hogy kizárjuk a modellen belül az arbitrázs lehetőségét.

II. Az állapotváltozók átalakítása

Ez a fejezet már kizárólag a szakdolgozatom témáját képező kamatlábmodellel foglalkozik, és az előző fejezetben felvázolt gazdaság megértését hivatott elősegíteni. Ebben a modell állapotváltozói átskálázásra kerülnek Longstaff és Schwartz-ot követve, amire már az előző, „Alkalmazott tételek" című alfejezetben is hivatkoztam. Így könnyebben értelmezhető paramétereket kapunk, amelyek hatásait bemutatom az egyes gazdasági folyamatokra. Emellett az átskálázott állapotváltozók kockázattal korrigált alakulására is kitérek, melyhez elengedhetetlenül szükséges a kockázat piaci ára, amely az előző fejezetben meghatározásra került. Ez a kockázattal korrigált alakulás az árazási kérdéseknél fontos, mivel ott át kell térnünk az arbitrázsmentes árfolyam, kamatláb alakulásra.

Ezt követően a fejezet megpróbál kapcsolatot teremteni az előző fejezetben bemutatott látens gazdaság, átskálázott állapotváltozói, valamint ténylegesen megfigyelhető, valós gazdasági változók között. Ezek kerülnek majd felhasználásra a kalibráció és a számolások során.

A paraméterek átskálázására nincs szükség, viszont sokat segít a modell értelmezésében, megértésében, valamint a számolások levezetésében is egyszerűsítő hatása van. Ezért a kamatlábmodellt szerző páros is átskálázta azokat, méghozzá a következőképpen. Céljuk az volt, hogy a faktorok varianciájának a mértéke csak az állapotváltozó négyzetgyökös értékétől függjön. Így a faktorok volatilitás paramétereivel nem kellett külön számolni, azok beépítésre kerültek az egyéb paraméterekbe. Ez formálisan a következő műveletet jelenti,

$$x = \frac{X}{c^2} \tag{B-15}$$

$$y = \frac{Y}{f^2} \tag{B-16}$$

amely elvégezhető, mivel mind a c és az f paraméterek csak szigorúan pozitívak lehetnek, tehát értékük nem lehet nulla. Ezt követően létrehoztak még két paramétert, amely megteremti az eredeti kapcsolatot az átskálázott állapotváltozók, valamint a termelést leíró differenciálegyenlet között. Az eredeti kapcsolat alatt a skálázatlan összefüggést értem. Az így kapott paraméterek jelöléseit, valamint az új és az eredeti paraméterek közötti összefüggéseket a B-1. táblázat foglalja össze.

B-1. táblázat – Paraméterek átskálázása

Skálázott paraméter	α	β	γ	δ	η	ξ
Eredeti paraméterekkel	μc^2	$(\theta - \vartheta^2) f^2$	$\frac{a}{c^2}$	$\frac{b}{c^2}$	$\frac{d}{f^2}$	$\frac{e}{f^2}$

Az előző táblázat alapján az új átskálázott paraméterek konkrétan az egyes folyamatokhoz köthetőek, értékeik szigorúan pozitívak[2], kivéve az α paramétert. Ezen paraméterek közül az α és a β értelmezésével kezdem, a maradék négy paraméter tulajdonságait, hatásait az átskálázott kockázati faktorokat leíró egyenletek felírását követően elemzem. Az előzőleg említett két paraméter a termelési folyamat részét képezi, és értékeik az adott faktorra való érzékenységet fejezi ki. Az α paraméter az x, míg a β paraméter az y skálázott állapotváltozóra vonatkozó kapcsolatot. Pontosan ezért szerepelt ez a két paraméter

[2] Az eredeti paraméterek is azok voltak, és az állapotváltozók folyamatát befolyásoló változók transzformációja során nincs olyan átalakítás, amivel negatív vagy nulla értéket vehetnének fel. Illetve korábban létrehoztuk a $\theta > \sigma^2$ korlátot, ami biztosítja β szigorú pozitivitását.

az előző fejezetben, amikor a tétel segítségével meghatároztuk a kockázatmentes kamatláb egyensúlyi alakulását leíró egyenletet.

A faktorok differenciálegyenleteit ezekkel az átskálázott paraméterekkel felírva lehetőségünk nyílik megállapítani, hogy az egyes paraméterek hogyan fejtik ki hatásukat. A módosított differenciálegyenlet rendszer a következő,

$$dx = (\gamma - \delta x)dt + \sqrt{x}dw \qquad \text{B-17}$$

$$dy = (\eta - \xi y)dt + \sqrt{y}dw. \qquad \text{B-18}$$

Ez alapján megállapíthatjuk, hogy amíg a γ és a δ paraméterek az x, addig az η és a ξ változók az y faktorra fejtik ki hatásukat. A differenciálegyenletek tipizálását tekintve ezek átlaghoz visszatérő, négyzetgyökös folyamatok, ezeknél a folyamatoknál drift tag további részekre bontható. Egy hosszú távú átlagot megadó paraméterre, amelyhez a folyamat tart. Valamint az átlaghoz visszatérési sebességet jellemző paraméterre. Ezek az értékek megadhatóak a kamatlábmodell faktoralakulását leíró differenciálegyenleteknél is. A δ és a ξ változók mutatják meg a hosszú távú átlaghoz visszatérés sebességét rendre az x és az y állapotváltozófolyamatoknál, míg ugyanilyen sorrendben a γ/δ és a η/ξ hányadosok adják meg az egyes folyamatok hosszú távú, átlagos értékét.

Az állapotváltozókat az átskálázáson kívül még tovább transzformáljuk, mivel jelenleg elvont, absztrakt folyamatok. Az ilyenek közgazdasági értelmezése nehézkés, becslésük is kihívást jelentene. Ezért a szerzőket követve átváltjuk ezeket, a könnyebb megértés és becslés érdekében. Ezt a következőképpen tesszük. Az előző fejezetben az „Alkalmazott tételek" című alfejezetében láttuk, hogy a folytonos gazdaságon belüli egyensúlyi, kockázatmentes kamatláb felírható az (B-14) formában. Erre az összefüggésre alkalmazva az Ito Lemma-t, a kockázatmentes kamatláb azonnali varianciájára a következő képletet kapjuk,

$$V = \alpha^2 x + \beta^2 y. \qquad \text{B-19}$$

Figyeljük meg, hogy a két egyenlet nagyon hasonló, tulajdonképpen ugyanazokat a valószínűségi változókat és konstansokat tartalmazzák. Az (B-14) és (B-19)-es összefüggésből álló egyenletrendszer megoldható a skálázott állapotváltozókra, minden olyan esetben, amikor $\alpha \neq \beta$[3]. Az egyenletrendszer megoldása a következő,

$$x = \frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)} \qquad \text{B-20}$$

$$y = \frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}. \qquad \text{B-21}$$

Ezzel a megoldással átírható a teljes modell úgy, hogy közgazdaságilag is értelmezhető faktorokat használunk, ezek pedig az azonnali, kockázatmentes kamatláb, illetve annak azonnali varianciája. Kamatláb derivatív árazás során a modell a piacon fellelhető információ nagyobb hányadát képes felhasználni, mert a modell eredményeként kapott árfolyamok egyszerre fognak függni a megfigyelhető rövid kamattól, valamint azok azonnali varianciájától.

Ezt követően egy további transzformációt szeretnék bemutatni az állapotváltozókon, ez pedig a kockázattal való korrigálás, azaz amikor áttérünk a valós alakulásról a kockázatsemleges, arbitrázsmentes állapotváltozó alakulásra. Mint azt az előzőekben kifejtettem, egyedül az y faktornak van hatása a termelési bizonytalanságra, ezért csak az y állapotváltozó alakulásában lévő bizonytalanság árazható be a termékek árába a kamatlábmodell alapján. Így csak az y állapotváltozó esetén lehetséges a kockázat piaci árával korrigálni, amelyet a modell alapját képező folytonos gazdasági modell implicit határoz meg. Ezt az (B-13)-as egyenlet segítségével tehetjük meg, ami meghatározza a kockázat piaci árát az y állapotváltozóval arányos értékben. Ha ezt az egyenletet behelyettesítjük az (B-12)-es egyenletbe, akkor H_Y koefficienseként a következő kifejezést kapjuk,

$$\eta - y(\xi + \lambda). \qquad \text{B-22}$$

Az alapvető árazási egyenlet ezen részében jól láthatóan a λ csak a ξ paraméterrel közösen fejti ki hatását. Ezért amennyiben ezt az összeget ezentúl együttesen kezeljük, akkor áttérünk a kockázatsemleges alakulásra. Természetesen ezt a felfedezést a modell szerzői tették, illetve a kamatlábmodellel foglalkozó másik cikkükben (Longstaff - Schwartz, 1992a)

[3] A β paraméter szigorúan pozitív, azaz a nulla elérhetetlen érték a változó számára. Amennyiben $\alpha = 0$, akkor a modell egy faktorosra egyszerűsödik, illetve az említett egyenletrendszer elveszti jelentőségét. Így az $\alpha \neq \beta$ elégséges feltétel.

ezzel paralel módon állapították meg az y állapotváltozó kockázatsemleges alakulását leíró differenciálegyenletet, ami a következő[4],

$$dy = (\eta - \nu y)dt + \sqrt{y}dw \qquad \text{B-23}$$

ahol $\nu = \xi + \lambda$. Jól láthatóan megváltozott a faktor alakulásának a driftje, ez mutatja az áttérést a kockázatsemleges alakulásra. Ezen felül az Ito Lemma segítségével felírható a véglegesre transzformált állapotváltozók, az egyensúlyi kamatláb, valamint annak varianciájának alakulását leíró differenciálegyenlet. Ezt újra a (B-14) és a (B-19)-es egyenletre kell alkalmazni. Ennek eredményeképpen a következő egyenletekhez jutunk a kockázattal korrigálatlan állapotváltozók használata esetén Longstaff és Schwartz (Longstaff - Schwartz, 1992b) alapján,

$$dr = \left(\alpha\gamma + \beta\eta - \frac{\beta\delta - \alpha\xi}{\beta - \alpha} r - \frac{\xi - \delta}{\beta - \alpha} V\right) dt$$
$$+\alpha\sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}} dZ_2 + \beta\sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}} dZ_3 \qquad \text{B-24}$$
$$dV = \left(\alpha^2\gamma + \beta^2\eta - \frac{\alpha\beta(\xi - \delta)}{\beta - \alpha} r - \frac{\beta\xi - \alpha\delta}{\beta - \alpha} V\right) dt$$
$$+\alpha^2\sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}} dZ_2 + \beta^2\sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}} dZ_3 \qquad \text{B-25}$$

Mivel a két differenciálegyenletet ugyanazok a véletlenek mozgatják, ezért a kettő közötti korreláció pozitív. Ami egybevág a tapasztalati tényekkel, de a kamatlábmodell még ennél is tovább megy. Megmutatható, hogy adott időponti kamatláb korlátok közé szorítja az azonnali varianciát, ezek a korlátok az αr és a βr. A két transzformált állapotváltozó kockázatsemleges alakulása a transzformálatlan állapotváltozók felírásával analóg módon meghatározható. Ez nem volt a cikkben megtalálható, de saját kezűleg elkészítettem, és megtalálható a Függelékben, (*J-1*) és (*J-2*)-es egyenletként.

[4] x állapotváltozóra vonatkozó kockázati korrekció nem lehetséges. Az egyenletét nem ismétlem meg, lásd (BB-17)-es egyenlet.

III. A modell alapvető összefüggései

Az előző fejezetben bemutattam a modell egészét, az ez alapján kapott alapösszefüggéseket tárgyalom ebben a fejezetben Longstaff és Schwartz (Longstaff - Schwartz, 1992b) alapján. A fejezetet két alfejezetre bontom, az első az általam is felhasznált képletekre, a második a további alkalmazási lehetőségekre koncentrál. A felhasznált összefüggéseket röviden elemzem is, amely során a szerzők előzőleg hivatkozott cikkére támaszkodok.

Az általam használt összefüggések között szerepel a diszkont kötvény árára kapott analitikus képlet, amely segítségével bármilyen, nem változó kamatozású kötvény árazása lehetséges. Ez az a képlet, amit én is felhasználtam a hozamgörbe becsléséhez. Emellett bemutatom az általuk kapott analitikus képletet a hozamgörbe egyes pontjaira, amely az előző összefüggés egy egyszerű átalakítása. Ezt követően a modell szerinti lejárati prémiumokra meghatározható analitikus egyenletet és a hosszú távú egyensúlyi kamatláb képletét is bemutatom.

Ezt követően röviden kitérek a további felhasználási lehetőségekre, amelyek megvalósíthatóak a modellel egy egységes keretrendszerben. Ezek között található a kötvényre szóló opciók árazási egyenlete, a forward mértékre való áttérés módszere, amellyel további kamatláb derivatívak árazása lehetséges, valamint egyéb szimulációs felhasználási lehetőségek. A kötvényre szóló opció képlete megtalálható a szerzők modellel foglalkozó főcikkében (Longstaff - Schwartz, 1992b), a többit az előző cikket megelőzően írt beharangozó cikk (Longstaff - Schwartz, 1992a) tartalmazza, a szimulációs felhasználási lehetőség kivételével.

1. A diszkontgörbe meghatározása és hozadékai

A diszkontgörbét az elemi kötvényen keresztül határozza meg a modell, az elemi kötvény egy olyan származtatott termék, amelynek értéke a lejárattól, valamint a hozamgörbe egy, a lejáratkori értékétől függ. A kötvény a névértékét lejáratkor fizeti vissza megvásárlójának. Ennek kamatlábmodell szerinti értékét „A folytonos gazdaság bemutatása" fejezetben az „Alkalmazott tételek" alfejezetben már bemutatott (B-12)-es egyenlet adja meg, ami a kamatlábmodell származtatott termékek áralakulását leíró differenciálegyenlete. A szerzők által alkalmazott kifizetés függvény a lejáratkori egy pénzegység kifizetés, és ezzel a végső feltétellel oldották meg a differenciálegyenletet. Ennek az eredménye a következő analitikus képlet, amely a transzformált és kockázatsemleges állapotváltozó alakulást feltételezte,

$$F(r, V, \tau) = A^{2\gamma}(\tau) B^{2\eta}(\tau) e^{\kappa\tau + C(\tau)r + D(\tau)V}, \qquad \text{B-26}$$

amelyben a következő paraméterek szerepelnek,

$$A(\tau) = \frac{2\varphi}{(\delta + \varphi)(e^{\varphi\tau} - 1) + 2\varphi}$$

$$B(\tau) = \frac{2\psi}{(\nu + \psi)(e^{\psi\tau} - 1) + 2\psi}$$

$$C(\tau) = \frac{\alpha\varphi\left(e^{\psi\tau} - 1\right)B(\tau) - \beta\psi(e^{\varphi\tau} - 1)A(\tau)}{\varphi\psi(\beta - \alpha)}$$

$$D(\tau) = \frac{\psi(e^{\varphi\tau} - 1)A(\tau) - \varphi(e^{\psi\tau} - 1)B(\tau)}{\varphi\psi(\beta - \alpha)}$$

$$\nu = \xi + \lambda$$

$$\varphi = \sqrt{2\alpha + \delta^2}$$

$$\psi = \sqrt{2\beta + \nu^2}$$

$$\kappa = \gamma(\delta + \varphi) + \eta(\nu + \psi).$$

A képlet felhasználása során az előzőekben bemutatott hat skálázott paramétert, a két transzformált állapotváltozó értékét, valamint a lejáratig hátralévő időt kell megadni, az utolsót években. A csak skálázott állapotváltozókkal felírt képletet a Függelék tartalmazza, (J-3)-as egyenlet, amely alkalmazásához ugyanezek a paraméterek szükségesek.

Könnyen ellenőrizhetőek az előzetes, empirikus elvárások a képlettől. Lejáratkor a kötvény értéke minden esetben a névértéke. Ezt úgy tudjuk ellenőrizni, hogy τ helyére nullát helyettesítünk be. Az állapotváltozók értékének növelése mellett, ha a lejáratot fixen tartjuk, akkor a kötvényárfolyam nullához konvergál. Ami intuitíven megfelelő, mivel ahogy nő a bizonytalanság, variancia a rövid hozamokban, úgy ér egyre kevesebbet egy jövőbeli kifizetés. Ezzel ellentétben, amikor a két állapotváltozó értéke nulla, akkor a kötvény értéke nem a névértéke. Ez az állapotváltozók differenciálegyenletéből következik, mivel ha a folyamat eléri a nullát, akkor a következő pillanatban visszapattan onnan. Így a modell szerinti forward hozamok pozitívak, és a kötvényárfolyam tényleg nem a névérték. Ha megvizsgáljuk a képlet állapotváltozók szerinti első deriváltjait, akkor azt tapasztalhatjuk, hogy az előjele lehet negatív és pozitív is, de kicsi τ-k esetén ez mindig negatív. Ami szintén egybevág intuitív megérzéseinkkel, hogy a lejárathoz közelítve már sokkal kisebb a bizonytalanság, és sokkal inkább a lineáris viszony dominál a rövid kamatláb és a kötvényárfolyam között.

A (B-26)-os egyenletnek véve a természetes alapú logaritmusát, majd ezt szorozva mínusz eggyel és osztva a lejárattal a hozam képletét kapjuk. Ami a következő,

$$Y(r,V,\tau) = -\frac{\kappa\tau + 2\gamma\ln A(\tau) + 2\eta\ln B(\tau) + C(\tau)r + D(\tau)V}{\tau}. \qquad \text{B-27}$$

Ez a képlet is teljesíti az előzetes elvárásainkat egyrészt a határértéke, ahogy τ közelít nullához r. Másrészt a végtelen irányában vizsgálva egy állapotváltozótól független konstanshoz közelít, amelyet a következő egyenlettel adhatunk meg,

$$\bar{Y} = \gamma(\varphi - \delta) + \eta(\psi - \nu) \qquad \text{B-28}$$

ahol $\bar{Y}$ a hosszú távú egyensúlyi hozam, amelyhez konvergál a végtelenben a hozamképlet. Emellett az összefüggés szabadságfoka elég magas, így a hozamgörbe sokféle alakot ölthet, lehet például egyszerre púpja és teknője is.

A kamatlábmodell alapján felírható az azonnali lejárati prémiumokra is analitikus képlet,

$$\lambda\frac{\left(e^{\psi\tau} - 1\right)B(\tau)}{\psi(\beta - \alpha)}(\alpha r - V). \qquad \text{B-29}$$

Ez a képlet az azonnali várható hozam egyenletéből következik, ami a Függelékben található (J-5)-ös számú. A kettő közötti különbség mindössze a rövid kamatláb. A (B-29)-es képlet alapján elmondható, hogy a modell szerinti lejárati prémium akkor pozitív, ha a kockázat piaci ára, a λ paraméter negatív értéket vesz fel[5]. Illetve a prémium értéke akkor nulla, ha λ vagy τ értéke nulla, ami egybevág elvárásainkkal.

A Longstaff-Schwartz kamatlábmodellben a volatilitás lejárati szerkezete is analitikusan megállapítható, a képletet lásd a Függelékben, az (J-4)-es egyenlet. Ez szintén teljesíti alapvető elvárásainkat, valamint egybevág a területen végzett empirikus kutatások eredményeivel. Azaz a rövid kamatlábat fixálva, ahogy közelítünk τ-val nullához úgy konvergál a variancia is nullához. Valamint az így kapott analitikus képlet τ szerinti első deriváltja végig pozitív, azaz növekvő lejáratok varianciája is növekszik.

Ez természetesen csak a jéghegy csúcsa a modell felhasználásában rejlő lehetőségeknek. További felhasználási módokat a következő fejezet ismertet. Ebben a fejezetben bemutattam a modell használatához nélkülözhetetlen képleteket és összefüggéseket, amelyek empirikákkal egybevágó tulajdonságait kiemeltem.

2. További felhasználási lehetőségek

Longstaff és Schwartz az elemi kötvény kifizetési függvényén kívül a kötvényre vonatkozó opció kifizetésfüggvényére is megoldotta az előzőekben ismertetett alapvető árazási differenciálegyenletet, a (B-12)-es egyenletet. A következő kifizetésfüggvényt használták

$$max(0, F(r, V, T) - K), \tag{B-30}$$

ahol K az opció lehívási árfolyama, valamint T az opció lejáratától számított hátralévő futamidő hossza években. Ezt követően éltek azzal az ésszerű feltételezéssel, hogy $F(0,0,T) > K$, azaz $K < 1$. Ez azért ésszerű, mert a diszkont kötvény névértékét egyedül lejáratkor éri, előtte mindig kisebb annál. Tehát ha K nagyobb lenne, mint a lejáratkori érték, akkor az opció sohasem kerülne lehívásra. Az általuk kapott képletet a cikkben (Longstaff - Schwartz, 1992b) megtalálható.

Mint egyéb árazási modelleknél, itt is lehetőségünk van áttérni a forward mértékre. Ezt demonstrálta a szerzőpáros is különböző, bonyolultabb termékek árazásának leírásával a kamatlábmodellt beharangozó cikkükben (Longstaff - Schwartz, 1992a). Szakdolgozatomban mindössze a forward mértékre történő áttérés módját és előnyét ismertetem röviden.

[5] $(\alpha r - V)$ kifejezés értéke szigorúan negatív, mivel V alsó korlátja αr, amelynél mindig nagyobb. Korlátot lásd „Az állapotváltozók átalakítása" fejezetben. Ezt felhasználva az előző állítás könnyen belátható.

A forward mértékre való áttérés tulajdonképpen azt jelenti, hogy nem a termék jelenértékének áralakulását határozom meg, hanem a forward értékének, amelyet azt követően diszkontálok a jelenlegi értékre. Ezt a diszkontálást az elemi kötvény árfolyamával végzem el, azaz ez egy elemi kötvény szerinti forward mérték. Ez tulajdonképpen kiemeli a diszkontálást a várható érték számításon kívülre, amit csak forward mérték, vagy determinisztikus kamatláb alakulás mellett tehetek meg (Medvegyev - Száz, 2010). A mértékcserét követően a forward származtatott termék áralakulásra, M-re a következő képletet kapjuk,

$$\frac{x}{2}M_{xx}+\frac{y}{2}M_{yy}+\left(\gamma+x\left(\frac{F_x}{F}-\delta\right)\right)M_x \\ +\left(\eta+y\left(\frac{F_y}{F}-\nu\right)\right)M_y=M_\tau \qquad \text{B-31}$$

Figyeljük meg, hogy az így kapott árazási képletből eltűnt kockázatsemleges hozam, mivel azzal diszkontálunk. Ennek a felírásnak nagy előnye, hogy így a forward mérték mellett kapott jövőbeli termékárat a modellből származó hozammal diszkontálunk. Így az árazás mindig konzisztens lesz a hozamgörbe jelenlegi alakjával.

Az (B-31)-es egyenlet a transzformálatlan állapotváltozókkal került felírásra, itt jön jól, hogy a diszkont kötvény árát ezekkel a nyers faktorokkal is meghatároztuk, mivel abból az egyenletből[6] egyszerűen meghatározható a diszkont kötvény áralakulás kockázati faktorokra vonatkoztatott érzékenysége, konkrétan $F_x/F=C(\tau)$ és $F_y/F=D(\tau)$. Ezzel mind az árazási, mind a kockázati faktor alakulását leíró differenciálegyenlet is egyszerűsödik, az utóbbiak alakja a következő,

$$dx=\big(\gamma+x(C(\tau)-\delta)\big)dt+\sqrt{x}dw \qquad \textit{B-32}$$

$$dy=\big(\eta+y(D(\tau)-\nu)\big)dt+\sqrt{y}dw. \qquad \textit{B-33}$$

Ahol τ annak az elemi kötvénynek a lejárata, amelyiket a mértéknek választottuk. A forward mérték melletti árazás esetén a várható értéket az így módosított állapotváltozó alakulással és annak a kétváltozós eloszlásával kell meghatározni. A két változó együttes eloszlása egy kétváltozós nem centrális χ^2 eloszlás, amelyre analitikus képlet adható.

[6] Ez az összefüggés a Függelék (J-3)-as egyenlete.

Az így módosított állapotváltozó alakulásokkal lehetőségünk nyílik egyéb kamatláb érzékeny származtatott termékek árazására, többek között forward szerződés, változó kamatra vonatkozó cap, swaption, volatilitásra vonatkozó cap. A pontos árazási módszert a szerzők beharangozó cikke (Longstaff - Schwartz, 1992a) tartalmazza.

Egy jól kalibrált modellel emellett lehetőségünk van szimulációs tesztek elvégzésére is. Ezalatt a következőt értem, meghatározzuk a jelenlegi gazdasági helyzetet legjobban leíró paramétervektort, azaz kalibráljuk a modellt. Ezt követően az eddigiekben ismertetett képletekkel lehetőségünk nyílik a transzformált állapotváltozók kockázatsemleges mérték melletti szimulálására a Függelék (J-1) és (J-2)-es képlete segítségével. Ezt követően az előzőekben meghatározott paramétervektor, valamint a modell szerinti különböző lejáratú hozamokra szóló képlet, a (B-27)-es egyenlet segítségével lehetőségünk nyílik a kamatalakulással konzisztens hozamgörbe előrejelzésére, szimulálására. Ezzel párhuzamosan a különböző lejáratú hozamok időbeli alakulás is konzisztens lesz, valamint az előző kettő közötti keresztmetszeti azonosságok is egy zárt rendszer eredményei.

C. *Kalibrációs módszertan*

A Longstaff-Schwartz kamatlábmodell egy egyszerűsített gazdaságot ír le sztochasztikus differenciálegyenletek segítségével. A modell két állapotváltozóra épül, ami a modellezett gazdaságot meghatározó két látens faktor átalakításaként adódik. Ezek a rövid kamatláb valamint annak azonnali megváltozása. A két állapotváltozó értéke mellett hét paraméterre van szükség a gazdaság, valamint az abban bekövetkező általános egyensúly meghatározásához. Ezek pontos becslésével leírható az egyensúlyi rövid kamatláb jövőbeni, várható pályája, ami meghatározza a hozamgörbét.

A paraméterek becslése több módszerrel lehetséges. Mielőtt kiválasztanánk egyet érdemes elgondolkozni, hogy milyen célra fogjuk felhasználni ezt követően a kalibrált modellt. Ahogy azt a „További felhasználási lehetőségek" fejezetemben kifejtettem, a modellt sok területen lehet felhasználni. Alkalmazható például kamatláb érzékeny származtatott termékek árazására, mint például a kötvények, vagy az azokra szóló opciók. Emellett használható szimulációs tesztek során a jövőben várható kamatláb, valamint annak alakulásával konzisztens hozamgörbe meghatározására. Az előbbi két példa is jól mintázza, hogy egymástól teljesen eltérő esetekben is kiválóan alkalmazható, valamint ugyanazzal a kilenc szimbólummal jelölt paraméter becslése szükséges mindkét elemzéshez. Egy tökéletes világban ez a kilenc paraméter ugyanaz lenne a homlokegyenest különböző felhasználási célok ellenére. Egy ilyen világban a tényleges termelési lehetőségek, a technológiai változások „A folytonos gazdaság bemutatása" című fejezetben található (B-5), (B-6) és (B-7) differenciál egyenletek szerint alakulnának. A mi világunk nem ilyen, de elfogadható mértékű hibával leírható ezzel a modellel. Azonban ebben a világban a paraméterek becslése során már nem elhanyagolható a különböző felhasználási célok figyelembe vétele.

Vegyük az előbbi két példát. Amikor a modellt árazási célokra szeretnénk felhasználni, akkor arra törekszünk, hogy a jelenlegi, aznapi piaci viszonyokat és várakozásokat a lehető legjobban tükrözze. Míg a szimulációs célra való felhasználás esetén ara törekednénk, hogy a modell előrejelző képessége hosszú távon legyen a legmegbízhatóbb. Az utóbbihoz nem elégséges egynapi eltérések minimalizálása, ebben az esetben szükséges kereskedési napokon átívelő, hosszabb távú kalibrációs eljárás használata. A gondolatmenetet folytatva két kalibrálási módszertant különböztetek meg. Az elsőt az első példa alapján árazási kalibrálásnak, míg a másodikat hasonlóan szimulációs kalibrálásnak fogom hívni. A kettő módszertan egymástól nem független. Jelentősen leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy a szimulációs kalibrálás a pillanatnyi, kereskedési napi árazási kalibrálások hosszú távú átlaga. Ezt folytatva a két módszertannak részben össze kell érnie, konzisztensnek kell lennie.

Ebben a részben a kilenc paraméter meghatározásának, becslésének módszereit mutatom be, a következő struktúrában. Elsőként kitérek a szakirodalomban a kalibráció témájában írt cikkekre, az azokban alkalmazott módszerekre. Bemutatom ezek előnyeit és hátrányait. Ezt követően bemutatom a saját magam által kifejlesztett kalibrációs eljárást, algoritmust. Ez jelentősen támaszkodik a szakirodalomra, az abban alkalmazott technikákra. Most a következő fejezetek rövid tartalma következik.

A Longstaff-Schwartz kamatlábmodell kalibrálásának szakirodalma szűk. A témában egy kifejezetten ezzel foglalkozó cikket találtam, amely a modell alkotóinak munkája (Longstaff - Schwartz, 1993). Ezen felül egy cikk foglalkozott még a modell paramétereinek becslésével, ami Dahlquist és Svensson (Dahlquist - Lars E. O. Svensson, 1996) munkája. Az első cikkben meghatározott módszertan inkább egy hosszú távú, szimulációs kalibrálás, míg a második egy árazási. Ezt követően bemutatom saját illesztési algoritmusomat, amelyet a modell alkotóinak eredeti munkája (Longstaff - Schwartz, 1992b) ihletett. Ez magába foglalja mind a szimulációs, mind az árazási megközelítést.

A modell kalibrációjához összességében kilenc paraméter becslésére van szükség. Az állapotváltozókat mind a három módszer a rövid hozamok jelenlegi szintjéből, azok idősorából határozza meg, itt mindhárom arra épít, hogy a rövid hozamszint megfigyelhető. Mivel ezek becslése azonos ezért a következőekben ezt mutatom be. Ezután az alfejezet felépítése a következő, elsőként bemutatom a modell alkotóinak eljárását, majd röviden ismertetem Dahlquist és Svensson módszerét. Végezetül bemutatom saját eljárásomat.

I. Az állapotváltozók meghatározásának módszere

A módszerek kiindulópontja a két állapotváltozó, valamint azok múltbeli értékeinek meghatározása. Ezek közül az egyik, a rövid kamatláb objektíven megfigyelhető. Itt fontos, mérlegelendő kérdés a futamidő kiválasztása, azaz a hozam „rövidségének" meghatározása. Erre vonatkozóan konkrét útmutatással nem szolgálnak a szerzők, ők az idősorosan rendelkezésükre álló legrövidebbet, az egyhónapos lejáratú, amerikai diszkontkincstárjegy hozamát használták a bemutatott kalibrációs példában. Dahlquist és Svensson a bankközi kamatlábat alkalmazták, mondván az a legrövidebb, megfigyelhető kamatláb. Saját becslésem során az Államadóság Kezelő Központ által közzétett három hónapos referenciahozamot használtam, mivel a bankközi kamatláb alsó korlátossága miatt torzítást vitt volna a másik állapotváltozó, az azonnali variancia becslésébe. Az alsó korlátosság alatt a jegybanki alapkamathoz való viszonyát, arról történő visszapattanását értem.

A másik állapotváltozó, a kamatláb azonnali megváltozása objektíven nem figyelhető meg. Azonban meghatározásának, becslésének tág szakirodalma van. A konzisztencia megtartása, valamint a modell alapfeltételeinek teljesülése érdekében az azonnali megváltozást az előzőekben kiválasztott hozam idősorából kell kiszámolni. Longstaff-Schwartz egy idősoros modell illesztését javasolja a hozamok historikus adataira, ezt a megközelítést alkalmazza Dahlquist és Svensson, valamint én is.

Az idősoros modellek közül az úgynevezett GARCH modell (Bollerslev, 1986) használata tűnik indokoltnak. Ez a modell két részből tevődik össze. Első része a vizsgált változó várható értékét modellezi egy autoregresszív, mozgóátlag folyamattal. Míg második része feloldja a szokásos idősoros modelleknél a hibatagokra alkalmazott feltételezést, miszerint azok varianciája időben állandó. Ez lehetővé teszi a feltételes szórás, variancia meghatározását, amely a második állapotváltozó a vizsgált kamatlábmodellben. Használatát empirikus vizsgálatok is alátámasztják, miszerint a hozamok idősorában megfigyelhető a volatilitás időszakos klasztereződése. A klasztereződés vizsgálata, és a GARCH modell pontos specifikációja az „Állapotváltozók becslése" című fejezetben található.

II. A Longstaff-Schwartz módszer

Az eljárás alapja az általuk létrehozott egyensúlyi modell. A modell egyik következménye, hogy mind a rövid kamatlábnak, mind annak azonnali variancia a modellbeli eloszlása analitikusan kiszámolható. Az analitikus eloszlás meghatározása során a megbecsülendő paramétereket használjuk fel. Ezt a logikát megfordítva és az analitikus képleteket felhasználva a két állapotváltozón kívül további hat paraméter megadható. Ezt követően a kilencedik paraméterrel lehetőségünk van a kapott hozamgörbét a piacon megfigyelhető hozamokhoz igazítani.

A kamatlábmodell paramétereit akár az állapotváltozókat meghatározó GARCH modell paramétereiből is számolhatnánk, de Longstaff-Schwartz egy másik megközelítést mutat be. Ehhez szükség van az azonnali variancia idősorára a vizsgált időszakban. Az előzőekben alkalmazott GARCH modell torzítatlan becslést ad erre is. Ennek köszönhetően megkaptuk mind a rövid hozamok, mind azok azonnali variancia idősorát. Ezekből lehetőségünk van meghatározni a kamatlábmodell további hét paraméteréből hatot. A technika a következő, mind a rövid hozamok, mind megváltozásuk modellbeli hosszú távú eloszlása ismert. Ezeknek az eloszlásoknak az első két momentuma a paraméterekkel meghatározható. Figyeljük meg, hogy az előzőleg említett idősorok birtokában ezzel szemben az empirikus eloszlást ismerjük. Ebből az empirikus momentumok meghatározhatóak. Az α és a β paraméterekre vonatkozó korlát betartása érdekében ezekre a változókra egy kényszert alkalmazunk. Így a becslendő hat paraméter négyre csökken, amihez van egyenlet. Ez az egyenletrendszer megoldható és megoldása a következő,

$$\alpha = min\left(\frac{V_t}{r_t}\right) \tag{C-1}$$

$$\beta = \max\left(\frac{V_t}{r_t}\right)$$

$$\delta = \frac{\alpha\,(\alpha +\ \beta)(\beta\ E[r] - E[V])}{2\,(\beta^2\ Var[r] - Var[V])}$$

$$\xi = \frac{\beta\,(\alpha +\ \beta)(E[V] - \alpha\ E[r])}{2\,(Var[V] - \alpha^2\ Var[r])}$$

$$\gamma = \frac{\delta\,(\beta\ E[r] - E[V])}{\alpha\,(\beta - \alpha)}$$

$$\eta = \frac{\xi\,(E[V] - \alpha\ E[r])}{\beta\,(\beta - \alpha)}$$

Ezt követően a modell kalibrálásához egy paraméter meghatározására van szükségünk. Mégpedig a λ paraméterre, ami kockázat piaci ára. Amely a ξ paraméterrel összeadva jelenik meg az elemi kötvényre szóló képletben. A kockázat piaci ára objektíven nem megfigyelhető, ezért meghatározhatjuk ezt a paramétert úgy, hogy a modell által implikált hozamgörbe a legkevésbé térjen el a piacon megfigyelhetőtől. Ezt a diszkontkötvény árára meghatározott analitikus képlettel, a (B-26)-os egyenlettel tudjuk megvalósítani. Ennek a képletnek és az eddigiekben kiszámolt paramétereknek a segítségével felírjuk a piacon megfigyelt kötvények modell által adott árát. Majd a piaci áraktól való eltérés valamilyen transzformáltját minimalizáljuk. A szerzőpáros a négyzetes eltérés minimalizálását javasolja. Ennél a kalibrációs módszernél az időszak kiválasztására, amelyen a momentumokat számoljuk, kiemelt figyelmet kell fordítani. Emellett érdemes a varianciának az empirikus eloszlását is külön vizsgálatnak alávetni. Mivel egy esetleges több móduszú eloszlás, vagy rezsimváltás jelentős torzítást vihet a becslésbe a momentumok meghatározása során.

Vegyük észre, hogy a szerzők által javasolt megközelítés nem illik bele egyik általam korábban meghatározott kategóriába sem. Azonban egyértelműen a szimulációs kalibráláshoz van közelebb, mivel egy szabad paramétert hagy a jelenlegi hozamszinthez való kalibráláshoz. Technikailag persze három paraméter is biztosítja a jelenlegi állapot figyelembe vételét, mert a becslés során a jelenlegi rövid hozamot és annak azonnali varianciáját alkalmazza. Viszont a többi paraméter további optimalizálásával elérhető lenne egy pontosabb illeszkedés a jelenlegi hozamgörbéhez. Ezért van ez az eljárás közelebb a szimulációs kalibrációhoz, hosszú távú szemléletet alkalmaz. Azaz a kalibrálási technika a hozamok hosszú távú eloszlásából indul ki, ezért ez a módszer hosszú távú trendek meghatározására szolgál, pillanatnyi félreárazások keresésére nem alkalmas.

Ennek a kalibrálási technikának a legnagyobb előnye az egyszerűsége. A módszer emellett biztosítja a modell által szimulált kamatláb dinamika megegyezését a múltbelihez viszonyítva. Azaz a szimulált eloszlások első két momentuma jó közelítéssel megegyezik a múltbeli momentumokkal. Továbbá a modell konzisztens a jelenlegi gazdasági helyzettel, piaci alakulással, valamint kapunk egy modell általi becslést a kötvényhozamokban rejlő kockázat piaci árára is.

Azonban a nagy előnye egyben a hátránya is, mivel az egész kalibráció során csak egy olyan paramétert alkalmaz, amely a jelenlegi piaci viszonyokhoz igazítja a modellt. Ezért piaci árakhoz való illeszkedés közel sem tökéletes. Ez részben javítható, amennyiben a kockázat piaci ára paramétert nem feltételezzük egy adott időpillanatban a lejáratokon átívelően állandónak, ahogy ezt Longstaff-Schwartz is javasolja. Ez a módszer a legrövidebb lejáratú kifizetésekből kiindulva minden elkövetkezendő időpontban meghatározza ν paraméter értékét úgy, hogy a modell által implikált kötvény árfolyam megegyezzen a piacon megfigyelhetővel. Azonban ezzel a módszerrel töréseket hozunk létre a diszkontgörbében, aminek következményeként törések keletkeznek a spot hozamgörbében. Ez jobb esetben törést, rosszabb esetben szakadást eredményez a forward hozamgörbében. Aminek közgazdaságilag szakszerű értelmezése nehézkés. Ezen felül nehezíti a modell felhasználhatóságát.

Hátránya továbbá a hosszú távú momentumok számításánál alkalmazott idősorból fakad, mivel a kalibráció során csak az első két momentum kerül felhasználásra. Így a modellbeli stacioner eloszlás nem veszi figyelembe az empirikus eloszlás további karakterisztikáit, ami egy rezsimváltást magába foglaló idősor, vagy két módusszal rendelkező empirikus eloszlás esetén torzításhoz vezet. Ezért a teljes eljárásnak fontos részét kell képeznie az empirikus eloszlások és lehetséges rezsimváltások vizsgálata, feltérképezése. További torzítások lépnek fel, ha a múltbeli hozamoknak és varianciájuknak az empirikus eloszlása nem írható fel független gamma eloszlások lineáris kombinációjaként, ahogy ez a kamatlábmodellben feltételezett.

Ezzel a kalibrációs módszertannal kapcsolatban kiemelendő még egy cikk, ami Clewlow és Strickland (Clewlow - Strickland, 1994) munkája. A szerzőpáros erős kritikát fogalmaz meg a paraméter becslési módszert illetően. Szerintük a becslési módszer nem robusztus, és ezt egy általuk kidolgozott teszttel is alátámasztják.

A tesztjük kiindulópontja a paraméterek meghatározása a Longstaff-Schwartz módszer segítségével, cikkükben a modell alkotói (Longstaff-Schwartz) által meghatározott paramétereket használták fel. A paraméterekkel szimuláció útján előállítanak egy kamatláb és egy variancia idősort, a Longstaff és Schwarz által meghatározott képlet alapján. Ezek a képletek a „Az állapotváltozók ” című fejezetemben, a (BB-17) és (BB-18) egyenletek. Ezzel azt szimulálják, mintha a modell szerinti világ igaz lenne. Két különböző idősort szimulálnak, egy öt éves napi változásokat tartalmazót, valamint egy huszonöt éves szintén napi változásokat tartalmazót, ahol csak havi egy megfigyelést tartottak meg. Ezzel tesztelték a becsléshez használt időintervallum, illetve a használt idősor hosszának befolyásoló szerepét is. Mindkét szimulált idősorból tízezer realizációt hoztak létre, majd mindegyikből külön-külön és együttesen újrabecsülték az előzőekben leírt módszerrel a paramétereket. Ezzel a modell robusztusságát tesztelték.

Eredményeik szerint α paraméter becslése pontos, viszont a további hat paraméteré gyenge. Szerintük ez a két állapotváltozó együttes eloszlásának következménye, ami a Longstaff és Schwartz által becsült paraméterekkel kifejezve erősen ferde és kis híján degenerált. Továbbá kiemelik, hogy akkoriban a becsléshez szükséges pénzügyi idősor kevés szakember számára volt elérhető. Ez természetesen napjainkban már nem igaz. Emellett javasolnak β meghatározására egy másik megközelítést, amely a két állapotváltozó közötti korrelációra épül.

III. A Dahlquist-Svensson módszer

Ez az alfejezet a Magnus Dahlquist és Lars E. O. Svensson 1994-es cikke (Dahlquist & Lars E. O. Svensson, 1996) alapján mutatja be az általuk alkalmazott paraméter meghatározási eljárást. A technika alapköve megegyezik a Longstaff-Schwartz módszerrel, a két állapotváltozó értékét azok jelenleg megfigyelhető, megbecsülhető szintjére állítják be. A szerzőpáros szintén megpróbálta GARCH modellel megbecsülni az azonnali varianciát, de később elvetették az eljárást, mivel nem tapasztaltak klasztereződést benne, szintje statikus volt. A gondolatmenet ezt követően változik meg, a maradék hét paraméterből közösen kezelik a λ-t és a ξ-t, és csak az összegüket a ν-t határozzák meg. Ezzel az összevonással kapott hat további becslendő paramétert egyszerre határozzák meg a nemlineáris legkisebb négyzetek módszer segítségével, ami egy maximum likelihood eljárás. A kalibrációt egy éves időintervallumon minden kereskedési napra elvégezték, és minden esetben a megfigyelhető svéd kötvényárfolyamokhoz képesti négyzetes eltérést minimalizálták. Ez egy árazási kalibráció, mivel minden kereskedési nap az összes szükséges paramétert megbecslik a legjobb illeszkedés meghatározása érdekében.

Eredményeik alapján a Longstaff-Schwartz modell illeszkedése jobb, mint a cikkben szereplő másik hozamgörbe becslő eljárás, a Nelson-Siegel (Nelson - Siegel, 1987). Viszont számolás igényesebb, és előfordulhat, hogy az algoritmus nem konvergált, nyolc ilyen esetről tettek említést az egy évet felölelő adatbázisukból, ami 142 megfigyelést tartalmazott.

IV. Saját kalibrációs eljárás

A saját algoritmusom egy szimulációs és egy árazási kalibrálási módszerből tevődik össze, az állapotváltozók becslésén felül. Az állapotváltozókat a korábban leírt módszer szerint becsültem. A szimulációs kalibrálási módszer részlegesen megtalálható Longstaff és Schwartz modellt bemutató cikkében (Longstaff - Schwartz, 1992b). A szerzők ezt a modell keresztmetszeti feltevéseinek tesztelésére használta, de egy apró módosítással felhasználható a teljes paramétertér több kereskedési napot felölelő, együttes és torzítatlan becslésére. Ezt követően egy hatékony, evolúciós alapú, sztochasztikus optimalizálási módszert alkalmaztam minden kereskedési napra, annak érdekében, hogy megtudjam vizsgálni a modell teljesítő képességét árazásra is. Most ennek a kétlépcsős kalibrációs folyamatnak a részletes leírása következik.

1. Saját szimulációs kalibrálási módszer

Az állapotváltozókat az előző alfejezetben leírt módon határozom meg. Ezt követően a szimulációs kalibráció következik. Ez az eljárás a momentumok általánosított módszerére támaszkodik (Hansen, 1982). Leegyszerűsítve a momentumok módszere az az, amikor úgy becslek meg egy feltételezett összefüggést a teljes sokaságra, hogy veszem a rendelkezésemre álló megfigyelések első momentumát, az átlagát, és utána ezt használom fel az egyenletembe, amikor a teljes sokaságra vonatkozó összefüggést határozom meg. Ez tulajdonképpen a legkisebb négyzetek módszere. Egy bonyolultabb problémánál már több ilyen momentum feltétel kerülhet meghatározásra, ami egymásnak ellentmondó adatok esetén meghiúsítaná az előző mondatban leírt módszer sikeres elvégzését. Hansen azt bizonyította be, hogy ha megfelelően súlyozom a momentum feltételeket, azaz amelyikbe biztosabb vagyok, annak adok nagyobb súlyt, akkor elkerülhető a túlazonosítás problémája. Hansen által alkotott becslő segítségével iteratívan meghatározható ez a súly (Leek, 2013). Tehát az eljárás alapgondolata a megfigyelt sokaság főbb momentumainak összevetése a modell által egy adott paramétervektor esetén meghatározott, illesztett sokaság főbb momentumaival, ezekből meghatározunk egy súlyvektort, amit minimalizálva aszimptotikusan optimális paramétervektorhoz jutunk. Ez a módszer tulajdonképpen több jól ismert eljárás általánosított összegzése, mint például a legkisebb négyzetek, vagy a maximum likelihood módszereké.

Ezt a módszert a modell szerzőihez hasonlóan panel adatokon használom fel. Alapja a rendelkezésemre álló a különböző futamidejű hozamok idősorai, ebből a legrövidebbet a három hónapos hozamokat használom fel, mint állapotváltozót. Ebből számítom a másik állapotváltozót a három hónapos hozamok azonnali varianciáját. Ezek, illetve a megbecslendő modell paraméterek együttesen erős korlátokat érvényesítenek más futamidejű hozamok időbeli alakulására. Így egyrészt megvannak a modell által implikált, valamint a ténylegesen megfigyelt hozamok, amelyek momentumai közötti eltérést már lehet Hansen módszerével minimalizálni, és ezzel együttesen általános, hosszú távú paramétereket becsülni.

Az alkalmazáshoz emlékezzünk arra, hogy a modell feltevései alapján van egy nem-lineáris összefüggés a modell paraméterei, a futamidő és a modell által meghatározott különböző lejáratú hozamok között.

$$Y(r, V, \tau) = -\frac{\kappa\tau + 2\gamma \ln A(\tau) + 2\eta \ln B(\tau) + C(\tau)r + D(\tau)V}{\tau} \qquad \text{C-2}$$

A képlet átalakításával egy olyan egyenlethez jutunk, amellyel leírható a modell által meghatározott hozamok időbeli alakulása egy adott futamidőre. Az egyenlet két koefficiense lineáris kapcsolatban áll a hozamok időbeli alakulásával. Az egyenlet a konstansban nem-lineáris a különböző lejáratokra. Egy lejáraton belül vizsgálva viszont ez is lineáris, konstans marad. Az átalakítás eredménye a következő.

$$\Delta Y_\tau = a_\tau + b_\tau \Delta r + c_\tau \Delta V \qquad \text{C-3}$$

Ahol a_τ, b_τ és c_τ lejárat specifikus konstansok, Δ pedig az idő szerinti differenciát jelöli. Ez az egyenlet felírható n különböző lejáratú hozamra, mindegyikre három momentum feltétellel. Viszont a modell feltevései az így megbecslendő $3n$ paraméterre $3n - 6$ erős korlátot kényszerítenek. Ez annak köszönhető, hogy az előzőekben egyenletenként definiált három paraméter felírható az alábbi alakban.

$$a_\tau = -\frac{\kappa\tau + 2\gamma \ln A(\tau) + 2\eta \ln B(\tau)}{\tau} \qquad \text{C-4}$$

$$b_\tau = -\frac{C(\tau)}{\tau} \qquad \text{C-5}$$

$$c_\tau = -\frac{D(\tau)}{\tau} \qquad \text{C-6}$$

Amelyek a modell hat paraméterétől függnek és különböző lejáratokra csak a futamidő paraméterben, τ térnek el. Így amennyiben rendelkezésünkre áll elegendő, különböző futamidejű hozam, akkor használhatjuk a momentumok általánosított módszerét. Az eljárás használatához nem szükséges a hozamváltozások normális eloszlása, hanem elégséges a stacioneritás, ergodicitás és a releváns várakozások megléte. A modell által implikált, valamint a megfigyelt hozamok közötti eltérést az alábbi képlet szerint definiálom.

$$\varepsilon_t = \Delta Y_\tau - a_\tau - b_\tau \Delta r - c_\tau \Delta V \qquad \text{C-7}$$

Ezt követően olyan paramétervektor keresek, amely az így meghatározott hibatagok összegét, valamint a keresztszorzatokat minimalizálja, ezek a momentumaink és regressziós keretrendszerben gondolkozva is ezeket minimalizálnánk. Momentum feltételeimet is a szerzőpáros, Longstaff és Schwartz modellt bemutató munkája alapján határoztam meg. A modell esetén használható egy tesztstatisztika is, a J-teszt, ami a modell alkalmazhatóságára, a specifikáció érvényességére ad egy tesztelési lehetőséget. A null hipotézis elfogadása esetén a modell megfelelően specifikált. A tesztstatisztika null hipotézis alatti eloszlása x^2-et követ $k - l$ szabadságfokkal, ahol k a momentum feltételek darabszáma és l a modell paramétereinek száma. Az előző egyenletet négy lejáratra írtam fel, így 12 momentum egyenletet kapok, amelyek közül 6-ra kényszerít korlátot a modell, 6-ra becslünk paramétert. Ezért esetünkben χ_6^2 eloszlást követ. Erre lehet a tesztstatisztikát alkalmazni, amit a későbbiekben használok is.

Ezen felül alkalmaztam a szerzőpáros által meghatározott korlátokat a becslési eljárás során, hogy a kamatlábmodell szempontjából érvényes paramétervektorokat kapjak eredményül. A szerzőpáros a cikkben bemutatott hasonló eljárásában nem alkalmazta ezeket, ami eredményeikben is meglátszik. Ugyanis az α paraméterre negatív értéket kaptak. Ellenben a cikkben az eljárás célja nem a paraméter meghatározás volt, amit külön ki is emeltek.

Ezzel a módszerrel hosszabb időtávon tudom megbecsülni a modell paramétereit, tehát az eljárás a szimulációs becslési módszer. Ebből a becslési módszerből származó paramétervektorok adták az árazási becslési módszernél alkalmazott optimalizációs eljárás kezdő értékeit.

2. Saját árazási kalibrálási módszer

Az árazási módszeremmel egy adott kereskedési napra optimalizáltam a paramétervektort. Célom az volt, hogy a modell által becsült kötvényárak és a megfigyelt kötvényárak közötti különbség a lehető legkisebb legyen. Az optimalizáció során egy hatékony, evolúciós alapú sztochasztikus módszert alkalmaztam, a differenciál evolúciós módszert. A használatához az alapadatokra volt kizárólag szükségem. Az eljárásnak emellett kezdőértékek adhatóak meg, amelyek gyorsítják, segítik az algoritmus konvergenciáját. Mivel a tényleges konvergencia elérése elég számolás igényes, ezért megadtam ezeket a kalkuláció során.

Az differenciál evolúciós algoritmus megalkotója Kenneth Price és Rainer Storn (Storn - Price, 1997). Az eljárást leginkább egy evolúciós folyamathoz lehetne hasonlítani, mivel az optimalizációs problémát egy populáció fenntartásával, vizsgálatával oldja meg. Ez a populáció, amely végigkíséri az optimalizálási eljárást, folyamatosan fejlődik, cserélődik. Ebben a fejlődésben van meghatározó, tulajdonképpen folyamatépítő szerepe a sztochasztikának, a véletlennek. A véletlennek és az algoritmusnak köszönhetően minden egyes iteráció során új egyedek keverődnek, fejlődnek ki a meglévő sokaságból. Majd az így kifejlődött új egyedek elegyednek küzdelembe a meglévő egyedekkel a populációs tagságért, és ahogy az evolúció során is, itt is a jobbik kerül ki győztesként. Az evolúcióval ellentétben itt a harc csak képletesen jelenik meg a célfüggvény személyében. Ez a küzdelem folytatódik, amíg engedjük, azaz amíg az általunk előre definiált leállítási feltétel nem teljesül.

Az optimalizálandó feladatot először egy célfüggvénnyé kell alakítani, amely egy változóval és egy eredménnyel rendelkezhet. A függvény változója a keresett paramétervektor. A kimenete egy racionális szám lehet, értékének az illeszkedés jóságát kell jellemeznie. Minél kisebb értékének kell jelölnie a minél jobb illeszkedést, jobb paramétervektort.

Az algoritmus tényleges lefutását a következő pszeudo kód mutatja be részletesen. A pszeudo kód forrása a témával foglalkozó könyv (Price et al., 2006), ami az algoritmus alkotóinak munkája.

I. Keresési tér meghatározása a paraméterek korlátaival.
II. Induló populáció létrehozása a keresési téren belül.
III. Leállítási feltétel definiálása.
IV. Következő lépések iterálása, ameddig a leállítási feltétel nem teljesül.
   i. Minden egyedre, amely alatt egy paramétervektort értünk és jelöljük ezentúl őket χ-el, végigcsináljuk a következőt:
      1. Véletlenszerűen kiválasztunk hármat, rendre α, β és γ, amelyek különbözőek mind egymástól, mind χ-től.
      2. Kiválasztunk egy véletlen indexet, R-t a $\{1, 2 \dots n\}$ halmazból, ahol n az optimalizálási probléma dimenziószáma, a paramétervektor hossza.
      3. Meghatározzuk az új, mutált egyed, $\omega[\omega_1, \omega_2 \dots \omega_i]$ helyzetét az keresési térben a következően:
         a) Minden i-re húzunk egy egyenletes eloszlású véletlen számot, r-t a $(0, 1)$ nyitott intervallumból
         b) Ha $r_i < CR$ vagy $i = R$, akkor $\omega_i = \alpha_i + F(\beta_i - \gamma_i)$, különben $\omega_n = \chi_n$
      4. A célfüggvény alapján eldöntjük, hogy az eredeti egyed χ vagy az új egyed ω esetén kisebb a célfüggvény értéke. Ha az új egyed esetén, akkor kicseréljük a két egyedet.
V. Kiválasztjuk a populációból a célfüggvény alapján a legjobb egyedet.

Az előző pszeudo kódban a görög betűk nem egyeznek meg a kamatláb modell paramétereivel. A keresési téren a modell változóira alkalmazott korlátok által határolt többdimenziós teret értem. F az úgynevezett differenciál súly, értékeit a $[0,1+]$ intervallumon veheti fel, ez szabályozza a mutáció mértékét. Míg CR a mutálódás valószínűsége, értékeit természetesen a $[0,1]$ zárt intervallumon veheti fel. Figyeljük meg azonban, hogy az algoritmuson belüli mutálódást nem csak ezzel az általunk beállítható paraméterrel szabályozzuk, hanem minden egyes iterációban a kiválasztott véletlen indexhez, R-hez tartozó értéket is mindig mutáljuk. Ez biztosítja, hogy az eredeti vektortól különböző, mutált egyedet vizsgáljunk minden iteráció végén a populáció minden egyedével szemben.

A módszer előnye az a képessége, hogy bármilyen optimalizációs problémával megbirkózik, nem szükséges a differenciálhatóság, valamint a probléma grádiensének meghatározása sem. A keresési folyamat egy elég tág intervallumból indul, ami a paraméter korlátok által határolt tér. Ezt a tág teret szűkíti a folyamatos iterációkkal azáltal, hogy a meglévő egyedekből, azok egymáshoz viszonyított távolságaiból új populáció tagokat hoz létre. Értelemszerűen, ahogy konvergálunk a globális optimumhoz, úgy a tagok közötti távolságok egyre kisebbek lesznek[7], és az iterációs keresési, azaz a populáció által lefedett tér mérete is egyre csökken.

Ez egyben az egyik nagy hátránya is az eljárásnak. Mivel a keresési területet kvázi véletlen szűkíti le, így semmi sem biztosítja a globális optimum megtalálását. Nem lesz kézzel fogható bizonyítékunk az optimalizáció sikerességét illetően. Ezt többféleképpen lehet kiküszöbölni, egyrészt lehet a leállítási feltétel elégséges beállításával, másrészt egy közelítőleg pontos induló populáció megadásával, harmadrészt az algoritmus előzőekben leírt mutálódási és differenciál súlyának helyes megadásával. Helyes megadás alatt azt értem, hogy az algoritmus ki tudjon lépni a nem globális optimumokból minden esetben.

Az algoritmus mélyebb kutatása nem célja dolgozatomnak, így az optimalizáció sikerességét nem az eljáráson belüli paraméterek pontos beállításával értem el. Ehelyett nagyobb figyelmet a kezdő populáció meghatározására fordítottam, és az optimalizálást egy fix iteráció számig futtattam.

Tettem ezt azért, mert a modell esetében a keresési tér, amiben az optimális paramétervektort kell megtalálni elég tág. Egyrészt a probléma hat dimenziós, másrészt a paraméterek esetében jellemzően nulla és végtelen közé esik az az intervallum, amelyen a lehetséges „igaz” paraméterek elhelyezkedhetnek. Kivétel ez alól a ν, ami mínusz végtelen és plusz végtelen közé eshet, azaz esetében ez a tér még nagyobb. Eltérő még α és β paraméterek esetén, amelyek speciális viszonyban vannak egymással és az állapotváltozók pillanatnyi értékével. Ezen két változó esetében a keresési tér jelentősen kisebb, ketten együtt fednek le egy nulla és plusz végtelen közötti intervallumot. A szimulációs szemléletű eljárásom megléte is ezt a megoldást helyezi előtérbe, mivel lehetőségem van hosszabb időtávon optimális, átlagos paramétervektor megkeresésére. Ez a momentumok általánosított módszere.

A kiinduló populáció meghatározása során a legjobb becslés elérésére törekedtem az általam feldolgozott teljes időintervallumon. Ezt azáltal értem el, hogy az összes két évnél hosszabb intervallumon megbecsültem a paramétereket a momentumok általánosított módszerével. Majd ezekből a becslésekből szelektáltam ki a legpontosabbakat. Ez alatt azt értem, hogy kiszűrtem az olyanokat, amelyek esetén a módszer nem konvergált. Valamint

[7] Azért csökken, mert mindig a célfüggvény értéke alapján a legjobb egyedeket tartjuk meg, ha közelítünk a globális optimumhoz, akkor egyre több populáció tag lesz közelebb az optimumhoz. Ebben az esetben az algoritmus az optimum közeli területet is átfésüli a globális optimum megtalálása érdekében.

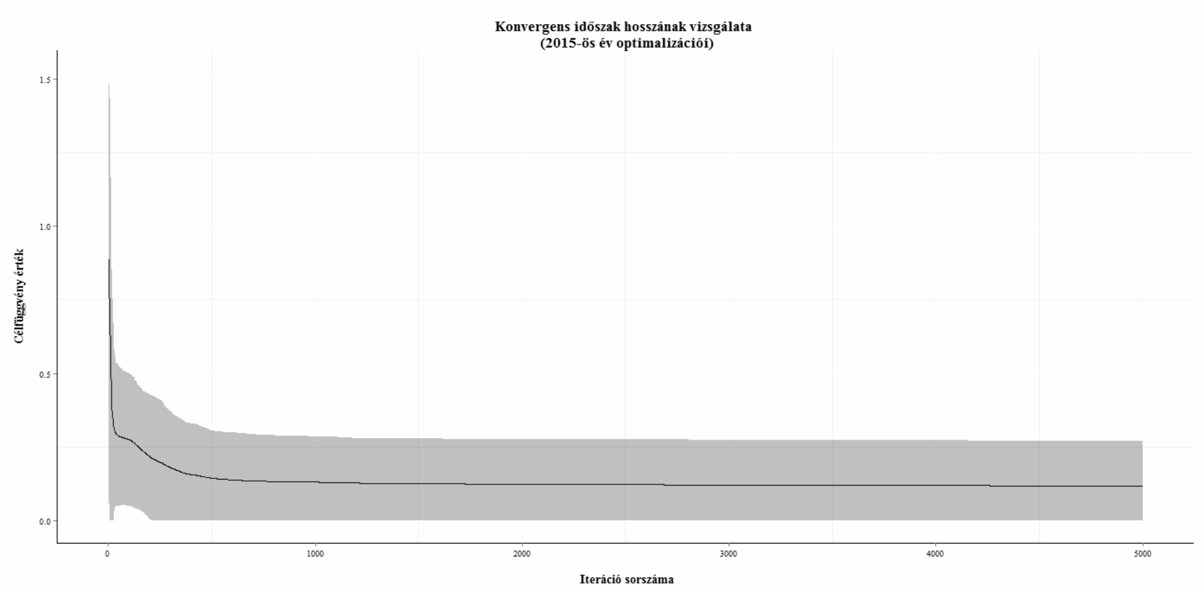
azokat, amelyek esetében a modell jóságát leíró teszt statisztika értéke alapján 10%-on elutasítottuk volna a kalibrált modellt az adott időszakra. Ezt követően minden kereskedési napra megkerestem azt a paraméter vektort, amely esetében az előzőekben említett tesztstatisztika értéke a legnagyobb volt.

Ezzel rendelkezésemre álltak a paramétervektorok minden kereskedési napra. Ebből állítottam elő az adott kereskedési napra az induló populációkat négy lépésben. Először megvizsgáltam az így kapott paraméterek szórását és terjedelmét. Mivel sokszor hosszú időn keresztül egy kalibrációval volt a legjobban leírható az adott napokra a hozamok változása, ezért a terjedelmet választottam ki. Ezt követően egyenletes eloszlású véletlen számokkal nulla várható értékű zajt állítottam elő, amelyet skáláztam az előzőekben kiszámolt adott paraméterre vonatkozó terjedelemmel. Utolsó lépésként megvizsgáltam a paraméterekre vonatkozó korlátok alapján az így előállított populációt, és ott ahol egy egyed megsértette a hozzá tartozó korlátot nullával helyettesítettem. Kivétel ez alól újra a két paraméter, az α és a β, mivel a speciális, összefonódó viszonyuk miatt itt csak az abszolút alsó korlát megsértését vizsgáltam, ami a zérus.

Az előzőekben leírt módon meghatározott kiinduló populáció jelentősen javítja a konvergencia sebességét, emellett jobb, pontosabb konvergencia érhető el. Ezt saját becslésem során tapasztaltam, mivel elsőre az induló populáció nélkül végeztem a becsléseket. Ezeknél többször is azt vettem észre, hogy a módszer egy fals, lokális optimumhoz konvergál, illetve néhány esetben a konvergencia nem történik meg. Átlagosan azt mondhatom, hogy ez egy évben, azaz körülbelül kétszázötven kereskedési napra vonatkozó becslés esetén kétszer-háromszor fordul elő. Ezzel szemben az induló populációval felvértezve nincs kiugróan gyenge konvergencia.

Az algoritmust minden kereskedési napra lefuttattam, a modell árazási kalibrálása érdekében. A célfüggvényem az átlagidővel súlyozott abszolút átlagos eltérés, amelyből az eltérést a modell által implikált és a megfigyelt árfolyamok különbségeként definiáltam.

Az iterációk számát tapasztalati úton határoztam meg a következő módszerrel. Először egy-egy kereskedési napra futtattam különböző számú iterációval. Az iterációk darabszámát ötszázasasával növeltem ötszázról tízezerre. Eközben azt figyeltem meg, hogy ötezer iteráció felett a célfüggvény értékében bekövetkező változás már nem jelentős. Ezt követően megvizsgáltam az ötezer iterációs lépésszám elégségességét egy fél évnyi időszakot felölelő árazási kalibrálás esetén. Nem tapasztaltam kiugró értéket a végső, az ötezer iterációt követő célfüggvény értékekben. Ebből azt a következtetést vontam le, hogy a modell minden esetben megfelelően konvergált. Azért jutottam erre, mivel a kalibrálási eljárás erősen támaszkodik az algoritmusban rejlő sztochasztikára. Ha ez fél éven keresztül, minden kereskedési napon közel azonos és megfelelően alacsony célfüggvény értéket eredményez, akkor a konvergenciát elértük. Emellett erre a félévre kigyűjtöttem az iterációs folyamat teljes hosszára az adott iterációban megfigyelt legjobb célfüggvény értéket. Ezt a C—1. ábra szemlélteti.



C—1. ábra – Konvergens időszak hosszának meghatározása

Az ábrán a vonal az átlagos célfüggvény érték az adott sorszámú iteráció esetén a 2015-ös évben. Az alá-fölé rajzolt terület egyfajta megbízhatósági sáv, amelyet két szórásnyi intervallumnak állítottam be. Ennek a területnek az esetlegesen negatív célfüggvény értékhez tartozó részét levágtam, mivel a célfüggvény nem vehet fel negatív értéket. Ez az ábra is az ötezer iteráció elégségességét támasztja alá. Sőt ez alapján akár az ezredik iterációnál is leállíthatnánk a futást, mivel azt követően jelentős változás nincs a célfüggvény értékében. Annak érdekében, hogy minden esetben megvalósuljon a konvergencia az árazási kalibrálásom során egységesen ötezer iterációt végeztem el minden kereskedési napra, valamint megadtam az induló populációt is, ahogy ennél a tesztfuttatásnál is történt.

D. Empirikus eredmények

Ebben a részben részletesen bemutatom az általam használt adatokat. Ezen belül kitérek az általam elvégzett átalakításokra, valamint a feltárt inkonzisztenciák kezelési módjára. Itt mutatom be a dolgozatom során használt programot, az egyetlen eszközt, amit az elemzés során alkalmaztam. Ezt követően az előzőekben ismertetett módszerek gyakorlati alkalmazására térek rá, és saját példán keresztül becslem meg a magyar hozamgörbét nyilvánosan elérhető adatokra támaszkodva. Itt a kalibráció eredményeit mutatom be részletekbe menően. Ezen belül külön tárgyalom az állapotváltozók, a szimulációs kalibrációs, valamint az árazási kalibrációs becslési eljárás eredményeit. Ezt a részt négy fejezetre tagolom, az egyes részek rövid tartalma a következő.

Az első fejezet a felhasznált adatok és az alkalmazott statisztikai program ismertetésével foglalkozik. Az adatok az Államadóság Kezelő Központ nyilvánosan elérhető adatai, míg a statisztikai programcsomag az R, amely egy ingyenesen és egyszerűen használható program, programozási nyelv. Ennek köszönhetően ez utóbbi egyre népszerűbb a statisztikusok és adatbányászok körében. Ezen felül felhasználtam még a Plotly nevű internet alapú applikációt, amely segítségével lélegzetelállító, interaktív ábrákat lehet készíteni, amelyből én is készítettem egyet.

A következő fejezet az állapotváltozók becslésével és annak eredményeivel foglalkozik. Ezek becslését az úgynevezett GARCH modellel végeztem, amelyet a modellt alkotó szerzőpáros is javasol. Ebben a fejezetben kitérek a modell pontos specifikációjára, amelyet szintén a modellel foglalkozó cikk alapján készítettem. Úgy állítottam be a specifikációt, hogy az a lehető legjobban hasonlítson a kamatlábak alakulására a Longstaff-Shwartz modellben. Ezzel párhuzamosan bemutatom az ilyen jellegű idősoros modellek esetén elvégzendő statisztikai tesztek lényegét és ezen tesztek saját elemzésem során kapott eredményeit, amely során Tulassay Zsolt a témában írt tanulmányát követem (Tulassay, 2009).

A harmadik fejezetben bemutatom a szimulációs kalibrálási eljárásom eredményeit. A módszert az általánosított momentumok módszerének hívják, ennek segítségével becsültem meg a modell paramétereit hosszabb időintervallumokra. Ebben a fejezetben bemutatásra kerül még az árazási kalibrálási eljárásom során használt induló paraméterek becslésének eredménye, valamint ezekkel a paraméterekkel illesztett hozamok idősora.

A negyedik fejezet fókuszában az árazási kalibrációs algoritmusom eredményei állnak. Ezzel az eljárással igazítottam a modell paramétereit a lehető legkisebb árazási eltérés elérése érdekében. Ezt a differenciál evolúciós algoritmus felhasználásával értem el, és amelynek eredményeként kaptam meg a magyar állampapír hozamgörbe teljes felületét 2003-tól 2015 félévéig. Emellett a fejezet elején röviden ismertetem az általam használt alapösszefüggéseket.

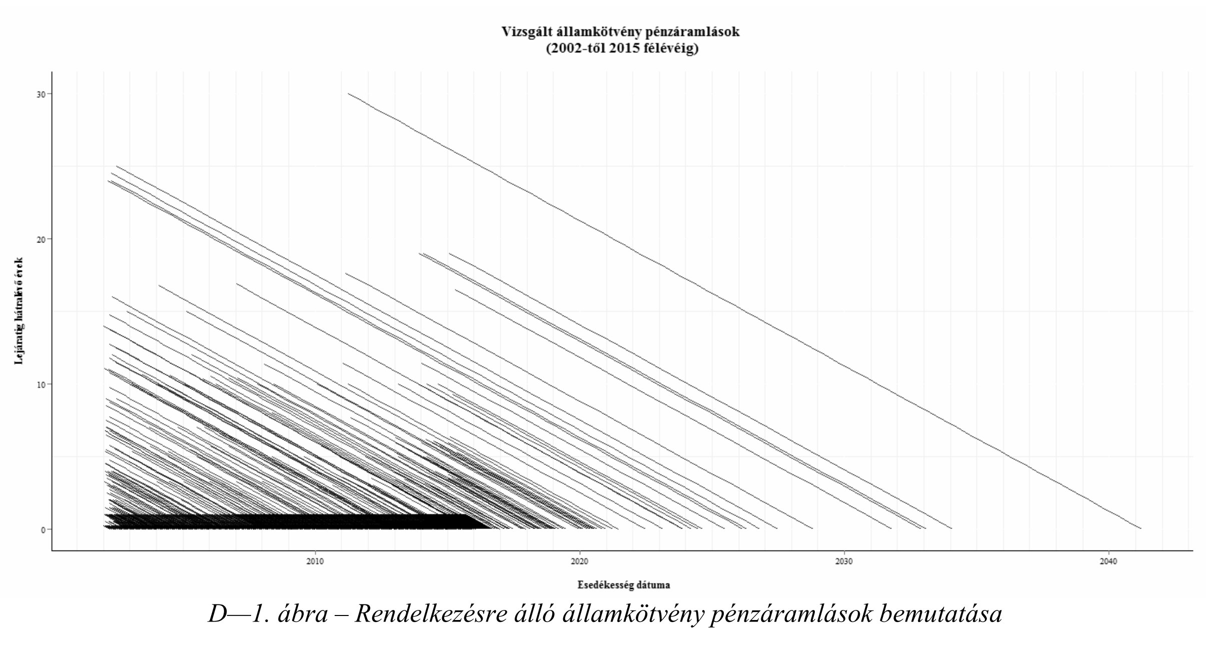
I. Adatok és az R

Ebben az alfejezetben bemutatom az általam feldolgozott adatokat, ezekben rejlő többlet információt. Ezt követően ismertetem átalakításuk módját, valamint az esetlegesen fellépő inkonzisztens, egymásnak ellent mondó adatokon alkalmazott korrekciós eljárásomat. Ezt követően bemutatom az alkalmazott programot kitérve az egyes eljárásokat támogató részletekkel.

1. Adatok

Az elemzéshez használt adatsor a nyilvánosan elérhető magyar államkötvény adatokból áll, és a 2002-től 2015 félévéig terjedő időszakot öleli fel. Az adatok forrása az Államadósság Kezelő Központ, amely munkavállalóinak ezúton is külön köszönöm az adatgyűjtés során nyújtott segítséget. A felhasznált adatokat három fő csoportra osztom, mind a három szorosan kapcsolódik a kötvények természetéhez. Az első a pénzáram adatok, a második a piaci áradatok, a harmadik pedig az előző kettőből meghatározott hozamadatok.

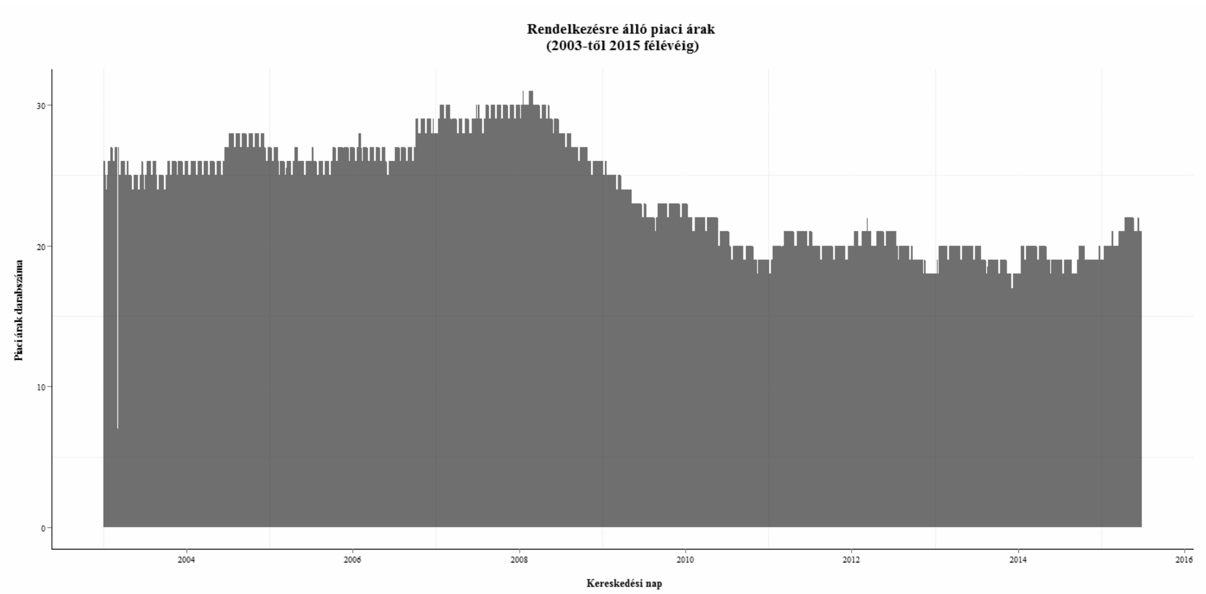
A kötvények kifizetés adatainak összegyűjtésében kaptam óriási segítséget az Államadósság Kezelő Központ munkatársától, mivel ezek minden kötvény esetén egyesével hozzáférhetők az intézmény honlapján. Ezeket az adatokat egy konzisztens adatbázisban bocsátották rendelkezésemre. Ez elég részletes, viszont a felhasználás szempontjából három kiemelendő mezője van. Az egyik a kifizetés dátuma, ez határozza meg a pénzáramlás időbeli eloszlását. A második a tőkefizetés összege, a harmadik pedig a kamatfizetés összege. Ezt az



D—1. ábra – Rendelkezésre álló államkötvény pénzáramlások bemutatása utóbbi kettőt egyként kezeltem és ez az adott időpontban, napon kifizetendő pénzáram összege. Ezt az adathalmazt leginkább a D–1. ábra szemlélteti, ahol minden vonal egy külön kötvényt jelöl, amely periodikus kifizetésekkel rendelkezik az egész élettartama alatt.

Az ábrán a függőleges tengelyen a lejáratig hátralévő évek száma, míg a vízszintes tengelyen az adott pénzáram esedékességi dátuma szerepel. Első pillantásra is látszik az ábrán a rövid távú, likviditási finanszírozása az államnak, ahol olyan sok kötvény van, hogy a vonalak nem is látszanak. Másrészt a jellemző finanszírozási időtáv is leolvasható, ez az a területe az ábrának, ahol viszonylag sűrűn helyezkednek el vonalak. Ez körülbelül 5-10 évre tehető. Meg kell jegyezni ugyanakkor, hogy nem állt módomban az összes, az ábrán látható kifizetést felhasználni, mivel nem rendelkeztem az összes kötvényre piaci árral. Ezen kívül mivel a forintban denominált hozamgörbe becslését tűztem ki célul, ezért kiszűrtem az olyan állampapírokat, amelyek nem forintban lettek kibocsátva. Valamint eltávolítottam az olyan állampapírokat is, amelyek nem fix kamatozásúak, mivel azokat nem tudom kezelni a később részletesen ismertetésre kerülő becslési eljárásomban.

A második adathalmazt, az adott kereskedési napon aktuális piaci árakat saját magam gyűjtöttem, szintén az Államadóság Kezelő Központ segítségével. Ezt a honlapjukról töltöttem le, mivel elérhető volt egy egységes adatbázisban. Ezek az adatok egy picivel rövidebb időtávot ölelnek fel, ez a 2003 elejétől 2015 júniusáig terjedő időszak. Ez az adatbázis, tartalmát tekintve, a kötelező árjegyzők adott kereskedési napra vonatkozó legjobb vételi és eladási árjegyzéseit tartalmazza. Ezt az adathalmazt a D—2. ábra foglalja össze.



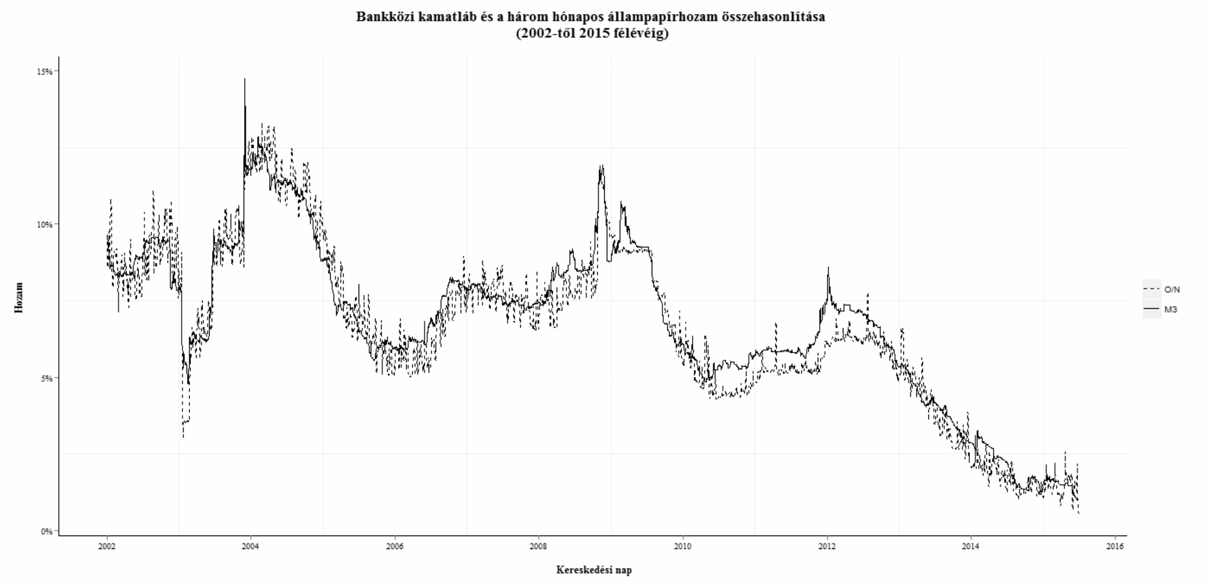
D—2. ábra – Rendelkezésre álló piaci árak ábrája

Az ábra azon egymástól különböző kötvények darabszámát mutatja, amelyek rendelkeztek az adott kereskedési napra legjobb eladási és vételi árfolyammal. Ez az ábra adja meg, hogy az árazási kalibrálási módszerem esetén az adott kereskedési napon hány különböző kötvényre tudtam optimalizálni a paramétervektort. Természetesen ezekben is megvizsgáltam van e devizában denominált kötvény árfolyam, nem volt. Illetve a változó kamatozású állampapírokat ez alkalommal is kiszűrtem.

Ebben az adatbázisban a szakdolgozatom szempontjából négy lényeges mező található. Ezek a kereskedési nap dátuma, amelyre az adott árjegyzés vonatkozik. Erre a napra elkészített árazási kalibráció szolgáltatja az adott napra vonatkozó hozamgörbét. A vételi és az eladási árfolyam, amelyek a névérték százalékában vannak kifejezve. Valamint a felhalmozott kamatok mértéke, amely az előző kamatfizetés dátumától az adott kereskedési napig felhalmozott kamatok mértékét tartalmazza, lineáris kamatozással. Az utóbbi háromból határoztam meg az adott napi kötvényárfolyamot, úgy hogy vettem a vételi és az eladási árfolyam átlagát és hozzáadtam a felhalmozott kamatok értékét. Ezzel egy bruttó középárfolyamot kaptam.

Ez nem minden esetben volt megfelelő, mivel voltak olyan napok, amelyeken egy adott kötvényre nem volt vételi vagy eladási árfolyam. Ilyen esetekben nem átlagoltam, hanem a megadott árfolyamot, akár az vételi, akár az eladási volt, tekintettem az adott kereskedési napra érvényes kötvényárfolyamnak. Ez nem vitt nagy torzítást a hozamgörbe becslésébe.

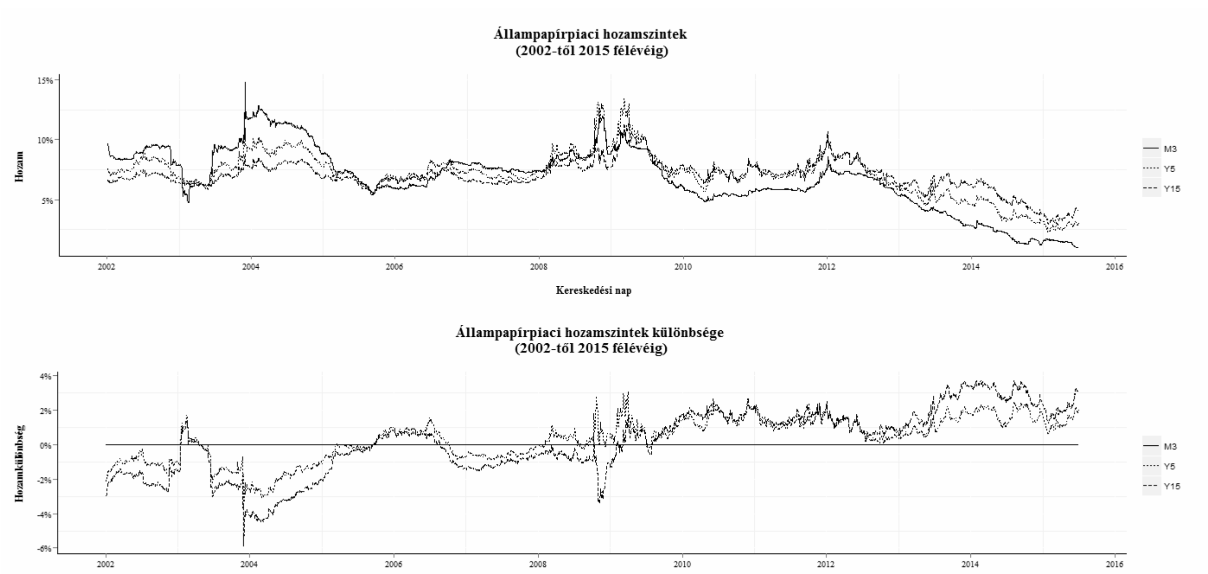
A harmadik adatbázis tartalmazza az adott napokra vonatkozó hozamadatokat. Ezeket a hozamadatokat az Államadóság Kezelő Központ állítja elő a rendelkezésükre álló információkból, azaz az előzőleg említett két adatbázisból. Ezt szintén a honlapjukról töltöttem le. Ehhez az adatbázishoz hozzáfűztem még a Magyar Nemzeti Bank által közzétett bankközi kamatlábat, mivel az a legrövidebb időtávra vonatkozó piaci kamatláb. Ezeket a későbbiekben nem használtam fel, mivel szintjüket túlságosan meghatározza a Magyar Nemzeti Bank által meghatározott alapkamat. Az alapkamat hatása megfigyelhető a hozamok,



D—3. ábra – A bankközi kamatláb és a három hónapos állampapírhozam összehasonlítása különösen a rövid hozamok alakulásában is, de nem ugyanolyan módon. Mert míg a bankközi kamatot az alapkamat alulról korlátossá teszi, addig a rövid hozamokra ugyanez nem érvényes. Ezzel szemben a kamatláb modell bemenő paramétere az azonnali kamatláb, amely a bankközi kamatlábra illik jobban. Ezen kettőség feloldása érdekében megvizsgáltam a két kamatláb, hozam viszonyát, amit a D–3. ábra szemléltet.

Az ábrán szaggatott vonallal a bankközi kamatláb, míg a folytonos vonallal a három hónapos magyar állampapírhozam látható. Az ábrán jól látható az előzőekben említett alsó korlátosság, azaz a bankközi kamatlábban nagy mozgások, ingadozások mindig felfelé, magasabb hozam felé láthatóak, lefelé fogja a Magyar Nemzeti Bank. Másrészt az is látható, hogy jellemzően a három hónapos hozam nagyobb vagy egyenlő, mint a bankközi kamatláb. Viszont a két hozamszintben az eltérés nem jelentős, így becsléseimet nem torzítja, ha a három hónapos állampapírhozamot használom a továbbiakban mint a modellhez szükséges rövid hozam.

A modell szimulációs kalibrálásához használt hozamokat a D–4. ábra foglalja össze. Ezeken az Államadóság Kezelő Központ által közzétett hozamok közül hármat tüntettem fel. A legrövidebb, a leghosszabb és egy közepes lejáratú hozamot, ezek a három hónapos, az ötéves és a tizenöt éves. Az ábrán két különböző változót ábrázoltam, a felsőn a hozamot, hozamszintet. Az alsón ennek a három hozamnak az egymáshoz viszonyított alakulását, ahol a viszonyítási alapnak a legrövidebb, a három hónapos hozamot választottam. Az ábrákon jól látható, hogy a 2008-as válságot megelőző években a hozamgörbe inverz alakú volt, azaz a rövid hozamok magasabbak voltak, mint a hosszúak. A válság hatására azonban ez megváltozott, és normál alakú lett a hozamgörbe. Ezt azért fontos előzetesen megvizsgálni, mivel így kapok egy tág, összefoglaló képet arról, hogy milyen hozamgörbére számíthatok a



D—4. ábra – Állampapír hozamok és a hozamszintek különbségének ábrái becslési eljárás végeztével. Így az a várakozásom, hogy a válságot megelőzően inverz, míg azt követően normál alakú hozamgörbét kapok eredményül.

Az ábráról az is leolvasható, hogy az inverziós időszakon, amelyen megcsavarodott a hozamgörbe, és ami 2006 és 2008 közé tehető, kívül nem lehetséges sem púp, sem teknő kialakulása. Mivel ezen az időszakon kívül a rövid, közepes, hosszú hozamok mindig ilyen vagy fordított sorrendben követik egymást. Így a közepes hozamok esetén nem lehet se minimuma, se maximuma a görbének.

2. R

Az R egy ingyenes, nyílt forráskódú, statisztikai programcsomag (R Core Team, 2015), amely segítségével komplex problémák egyszerűen oldhatóak meg. Az R tulajdonképpen egy programnyelv, amely objektum orientált és lehetőségünk van vektoros műveletek elvégzésére. Az R nagy előnye a hatalmas közösség, amely folyamatosan fejleszti. Ez a közösség úgynevezett csomagokat hoz létre, amelyek aztán felhasználhatóak bárki számára, és amelyben bonyolult statisztikai eljárások vannak megvalósítva mindenki számára elérhető, kezelhető módon.

A csomagok közül külön kiemelném a következőket. A DEoptim (Ardia et al., 2015) csomagot, amelyben az általam az előzőekben leírt optimalizációs algoritmus van megvalósítva. A gmm (Chaussé, 2010) csomagot, amely Hansen általánosított momentumok módszerét tartalmazza, amely felhasználásával végeztem el a szimulációs kalibrálást. A rugarch (Ghalanos, 2015) csomag, amelyben különböző ARCH és GARCH eljárások vannak implementálva, rengeteg változtatható argumentummal. Ezen felül a ggplot2 (Wickham, 2009) csomagot, amely segítségével készítettem az ábrákat. A data.table (Dowle et al., 2015) csomagot, amely az adatbázisok kezelését, a kezelés sebességét gyorsította, tette egyszerűbbé. A felsorolást szinte a végtelenségig folytathatnám, de ezek voltak a legfontosabbak, legtöbbet használtak.

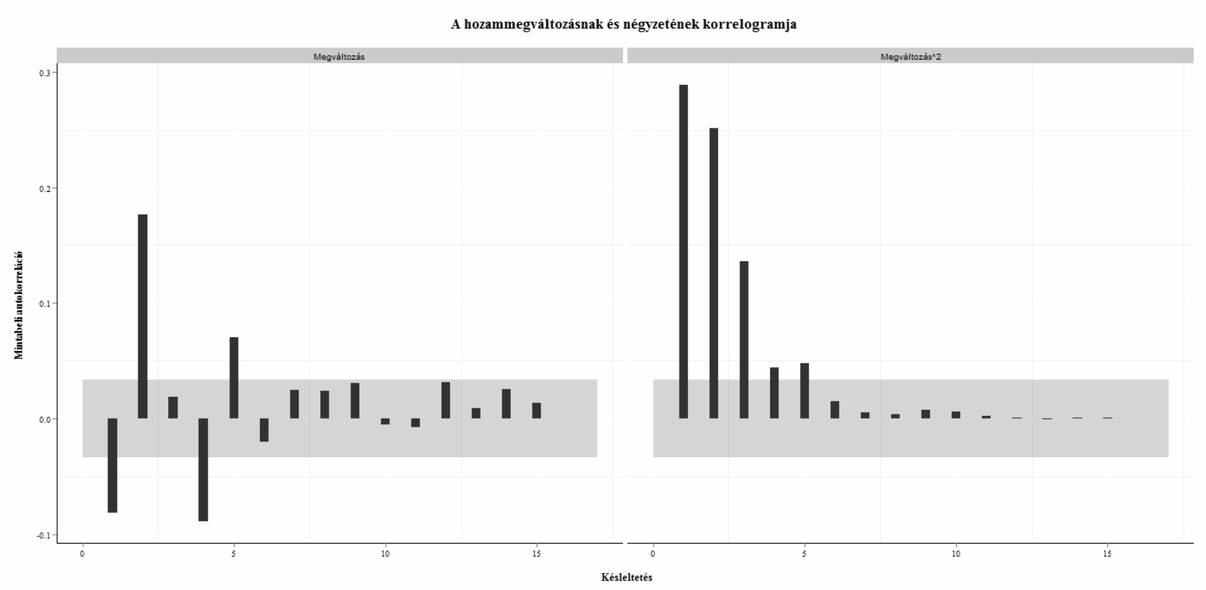
Ezen felül a három dimenziós ábrám elkészítéséhez használtam fel a Plotly (Plotly Technologies Inc, 2015) nevű, internet alapú programot. Ezt szintén az R-en keresztül tudtam irányítani, viszont az eredményei csak az interneten érhetőek el. A program kimenete egy három dimenziós, interaktív ábra, amely az Függelékben található, J—7. ábra.

II. Állapotváltozók becslése

Az állapotváltozók becslése során ugyanazt a módszert alkalmaztam, mint a szerzőpáros, Longstaff és Schwartz. A módszer a Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH), ami Bollerslev munkája (Bollerslev, 1986). Ez az általános autoregresszív és mozgóátlagos tagot tartalmazó idősoros modellektől annyiban tér, hogy nem teszi fel a hibatagok szórásának állandóságát a teljes időintervallumra. Ehelyett a szórást is modellezi, így a modell jobban leírja az empirikusan megfigyelhető, stilizált tényeket. Ilyen stilizált tény például a volatilitás klasztereződése, amely az állampapírhozamok idősorában is megfigyelhető. Ez leegyszerűsítve annyit jelent, hogy nagyobb a valószínűsége annak, hogy egy nagy hozamváltozást eredményező napot egy hasonlóan nagy változást eredményező nap követ. Ezt szemlélteti a Függelékben található J—1. ábra.

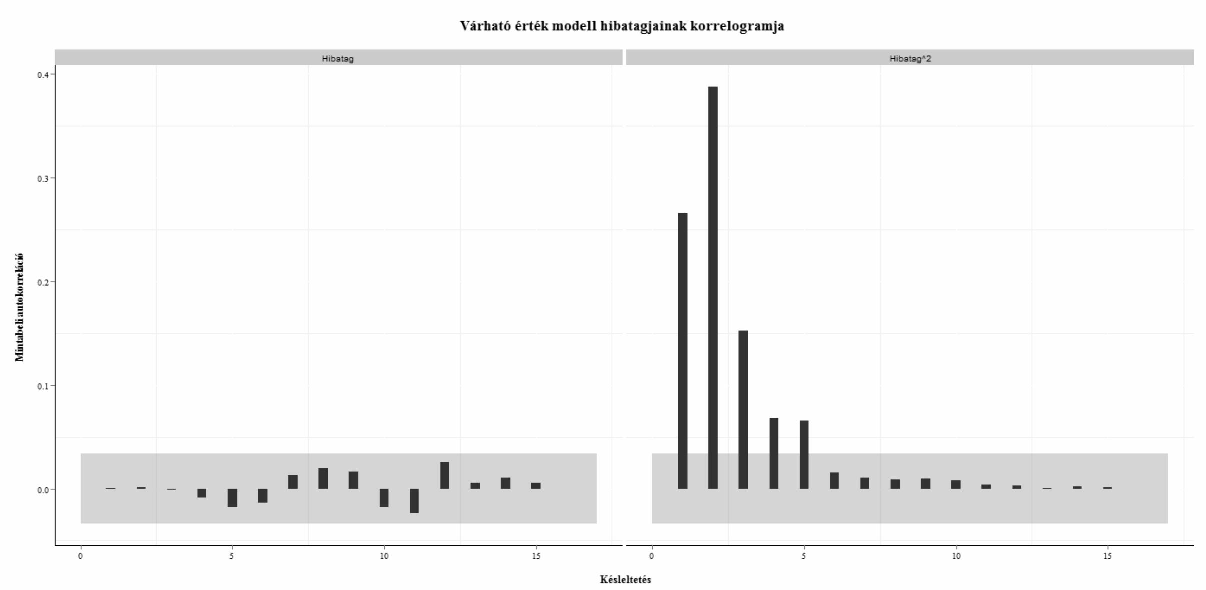
Szakszerűbben kifejezve, ez a modellcsalád feloldja a homoszkedaszticitásra vonatkozó feltételt. Ez azt jelenti, hogy nem tételezi fel azt, hogy a hibatagok szórása a teljes időintervallumon állandó, hanem megengedi annak változását, ingadozását. Ezt a hibatagok szórásának modellezésével valósítja meg, amiről feltételezi, hogy egy hasonló idősoros modellt követ. Ennek eredményeképpen létrejövő modell képes kezelni a feltételes heteroszkedaszticitást. Ezt a modellt akkor célszerű használni, ha várakozásunk szerint az innovációk, véletlen tagok szórása nem állandó. Ezt a várakozást többféleképpen tesztelhetjük, és a modellt csak akkor érdemes használni, ha a klasztereződés megfigyelhető. Különben célszerűtlenül bonyolítanánk a modellezést. A következőekben bemutatom az általam elvégzett állapotváltozó becslést az előzőekben röviden ismertetett modell segítségével. A becslési folyamat leírása közben elvégzem a szükséges teszteket. A fejezet további részében Tulassay Zsolt a témában írt cikkének (Tulassay, 2009) eljárását követem.

Mielőtt alkalmaznánk a GARCH modellt meg kell győződnünk arról, hogy ténylegesen jelen van a heteroszkedaszticitás az általunk alkalmazott idősorban. Ezt többféleképpen is tehetjük. Egyrészt megvizsgálhatjuk az előzőekben említett és a Függelékben található ábrát. Azon is látszik, hogy vannak olyan időszakok, amelyeken a hozamok varianciája jelentősen meghaladja azok hosszabb időszakra, időintervallumra vonatkozó átlagát. Ilyen időszak például a 2003 és 2004 közötti időintervallum, a 2008-as világgazdasági válság, valamint a 2012 év eleji szuverén válság. Amennyiben ez nem győz meg, akkor érdemes megvizsgálni a hozammegváltozások, illetve transzformáltjaiban jelenlévő autókorrelációt. Ezt legkönnyebben az úgynevezett korrelogrammal tehetjük meg, amely az autókorrelációt szemlélteti, különböző késleltetésekre. A hozammegváltozás különböző késleltetésű autókorrelációját szemlélteti a D—5. ábra, amelyről a nulladik rendűt eltávolítottam, mivel annak értéke értelemszerűen egy. Az ábrán a szürke hátterű területen belül a korreláció értéke nem különbözik szignifikánsan nullától 5%-os konfidencia szint mellett. A bal oldali ábrán a hozam megváltozások, míg a jobb oldalin azok négyzetes megváltozásainak korrelációs értékei láthatóak. A bal oldalin látható, hogy szükséges egy várható érték egyenlet illesztése a hozamok megváltozására, mivel még található szignifikáns autókorreláció bennük. A jobb oldali pedig tovább erősíti azon megérzésemet, hogy a volatilitás klasztereződik és szükség van a szórás idősoros modellezésére is.



D—5. ábra – A hozammegváltozásnak és négyzetének korrelogramja

A várható érték modell illesztésénél az R program forecast csomagját (Hyndman, 2015) használtam. Ebben lehetőségem volt olyan automatikus ARIMA modell illesztésére, amely a legjobban illeszkedik a hozamok megváltozásának idősára. Ezt használtam fel,



D—6. ábra – Várhatóérték modell hibatagjainak korrelogramja emellett megadtam egy külső magyarázó változót, amelynek a hozamok idősorának egyszeres késleltetettjét alkalmaztam. Ez azért volt szükséges számomra, mivel az azonnali variancia általam alkalmazni kívánt becslésénél is ezt a magyarázó változót alkalmazom, annak érdekében, hogy az így specifikált GARCH egyenletrendszer a legjobban közelítse a kamatlábmodell által feltételezett kamatláb alakulást. A várható érték modell illesztését követően a modell reziduumjaiban nem maradhat autókorreláció. Ezt szemlélteti a D–6. ábra, amelyen látható, hogy a hibatagban nem maradt szignifikáns autókorreláció, viszont a négyzetes hibatagban még igen, ami megerősíti a GARCH modell alkalmazásának helyességét. Ez alapján azt mondhatjuk, hogy a hozamok megváltozásának szórása időben nem állandó.

Ezt lehet még vizsgálni az Engle féle ARCH LM teszt segítségével, amit a FinTS nevű csomaggal (Graves, 2014) határoztam meg. A teszt null hipotézise, hogy nem található ARCH hatás a vizsgált idősorban. A tesztstatisztika x^2-t követ egy szabadságfokkal, a tesztstatisztika értéke $32{,}346$, a p érték gyakorlatilag 0. Tehát a null hipotézist elvetjük, a hibatagokban található ARCH hatás, a GARCH modell alkalmazása indokolt.

A GARCH modell specifikációja során arra törekedtem, hogy az alkalmazott egyenletrendszer a legjobban közelítse a kamatlábak kamatlábmodell szerinti alakulását. A specifikációt a modellel foglalkozó cikkből másoltam, ahol a szerzőpáros is hasonló gondolatmenetet követ. A modellt leíró egyenletrendszer a következő. Természetesen a következő képleteken belül alkalmazott görög betűknek semmi köze a kamatlábmodell hasonlóan jelölt paramétereihez.

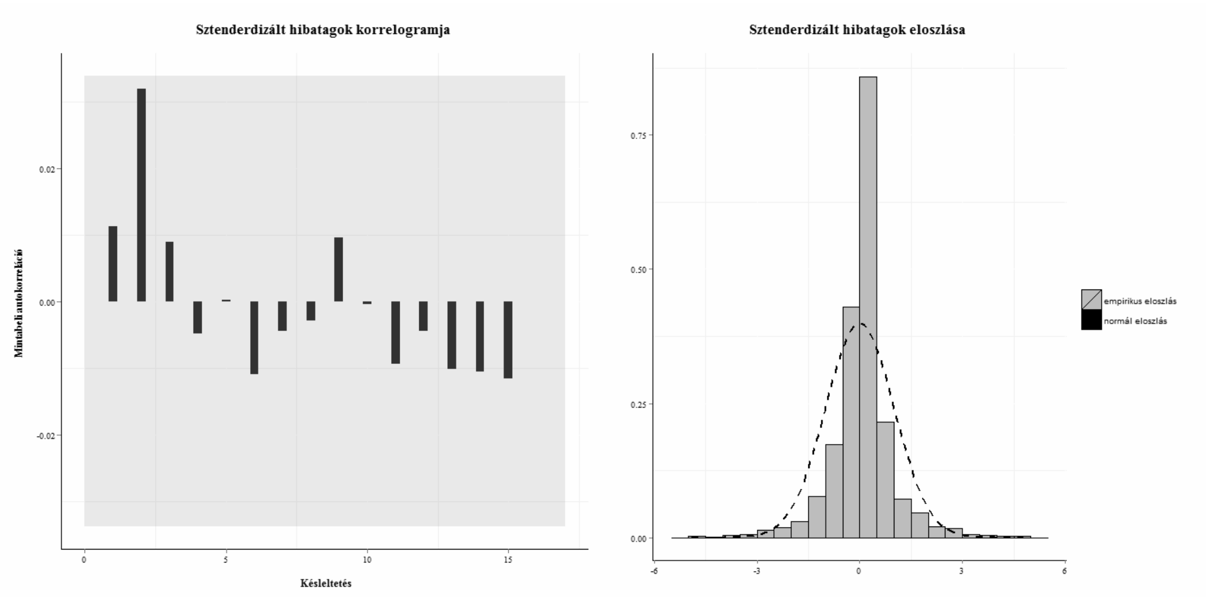
$$r_{t+1} - r_t = \mu + \gamma r_t + \delta V_t + \varepsilon_{t+1} \qquad \text{D-1}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, V_t) \qquad \text{D-2}$$

$$V_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1} + \beta V_{t-1} + \varphi r_{t-1} \qquad \text{D-3}$$

Ennek a specifikációnak a hét paraméterét becsültem meg az R program rugarch (Ghalanos, 2015) csomagja segítségével. A becslésnél tulajdonképpen nem a teljesen szignifikáns paramétervektor elérése volt a cél, hanem várható érték modell hibatagjaiban maradt ARCH hatás megszüntetése, a volatilitás klasztereződésének modellezése. Ennek oka, hogy a célom a GARCH modellel nem az előrejelzés, hanem a torzítatlan azonnali, más néven feltételes variancia becslése volt.

A megvalósulás ellenőrzésére a következő eljárást alkalmaztam. Először megvizsgáltam az idősoros modell illesztését követően a sztenderdizált reziduumokban jelenlévő autókorrelációt, az előzőekben is alkalmazott ábra segítségével. Ezt szemlélteti a D—7. ábra bal oldali része, ez alapján a volatilitás modellezése sikerrel zárult, a szignifikáns autókorreláció eltűnt a hibatagok négyzetes idősorából. Emellett megvizsgáltam ugyanezen hibatagok eloszlását, amelyen azt látom, hogy csúcsosabb eloszlást kaptam, mint a normál eloszlás. Ez eltér az előzetes specifikációtól, ezért egy csúcsosabb eloszlással, a student t-eloszlással is megbecsültem a modell paramétereit, vizsgáltam illeszkedését. Nem tapasztaltam javulást, ezért maradtam a normális eloszlás feltevésnél, amelyet a kamatlábmodell is alkalmaz.



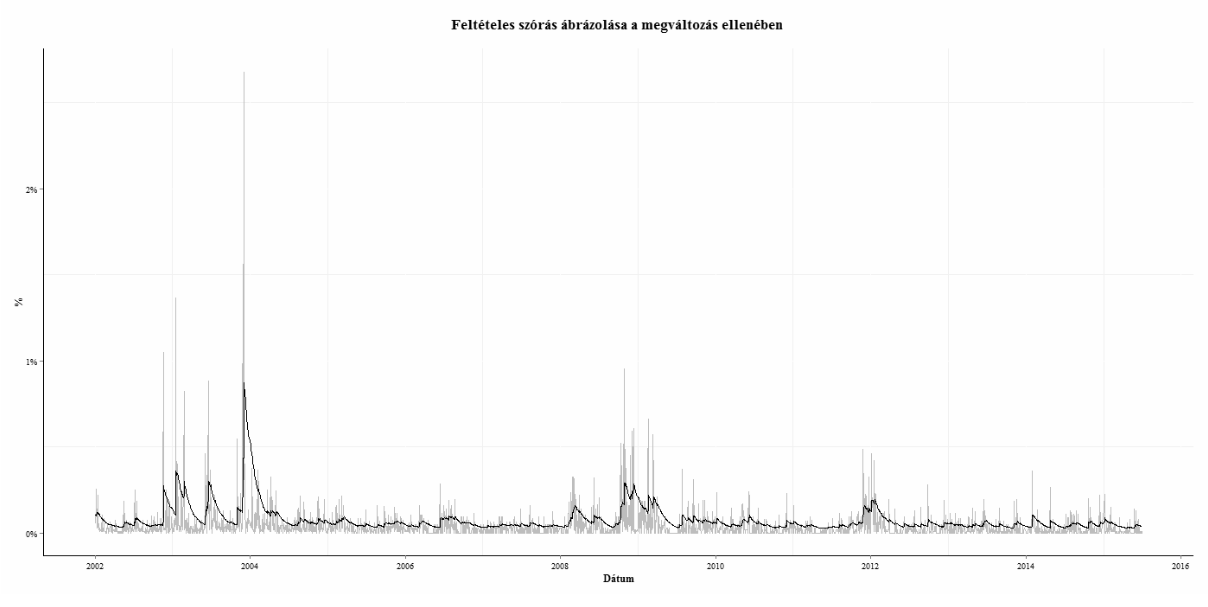
D—7. ábra – A GARCH modell sztenderdizált hibatagjainak korrelogramja és eloszlása

Az így kapott paraméterek pontos értékét, sztenderd hibáját és szignifikanciáját a Függelék J-1. táblázata tartalmazza. Ez alapján vannak paraméterek, amelyek nem különböznek jelentősen nullától.

Azt kijelenthetjük, hogy ez a GARCH specifikáció közelíti legpontosabban a Longstaff-Schwartz kamatlábmodellben feltételezett hozamalakulást. Mivel a feltételes szórást, varianciát a kamatlábmodellben kívánjuk a továbbiakban felhasználni, úgy a konzisztencia érdekében ezt a specifikációt célszerű alkalmazni. Természetesen, ha egy paraméter sem különbözne nullától, akkor más lenne a helyzet, de a becslési eredményeket jobban megnézve láthatjuk, hogy a variancia becslésénél kulcsszerepet játszó paraméterek, az α és a β szignifikánsak.

Erre alapozva a további becslések során ebből a specifikációból származó feltételes varianciát használtam. A megközelítés helyességét támasztja alá a D—8. ábra is, amelyen az eredményként kapott feltételes szórást ábrázoltam a hozammegváltozással együtt. Ezt alapul véve szerintem a modell alkalmazásával elértem a célom, megbecsültem az azonnali varianciát. A többi paraméter koefficiensét pedig csak a szórást magyarázó változónak tekintem.

Ez alapján megállapíthatjuk, hogy a hozamok megváltozása nem egy Longstaff-Schwartz világ szerint alakul. A GARCH modell eredményei alapján a hozamszintnek, mint magyarázó változónak gyenge befolyásoló ereje van a hozammegváltozásra, mivel az ezt jellemző paraméter, a γ 5%-on bír statisztikai szignifikanciával. Ezzel ellentétben a hozamszintnek egyáltalán nincs magyarázó ereje a varianciára, a paraméter φ semmilyen szokványos szinten nem szignifikáns. Emellett az is következik a paraméterbecslésből, hogy a varianciának sincs magyarázó ereje a következő időszaki hozammegváltozásra, mivel a δ paraméter sem szignifikáns. A tengelymetszetet jelölő μ paraméter szignifikanciája jelzi a trendet a hozamok alakulásában. A negatív előjel jelzi, hogy egy csökkenő trend figyelhető meg, de ennek értéke alacsony. Az ω sem szignifikáns, viszont ez teljesen helyes modellspecifikáció esetén is előfordulhat, és azt jelenti, hogy a variancia egyenletben nincs konstans.



D—8. ábra – GARCH modell alapján becsült feltételes szórás

A variancia alakulását leíró, meghatározó további két paraméter, az α és a β erős szignifikanciája azt jelöli, hogy a modellel sikerült megfogni annak alakulását. Így az illesztett értékek az időszak alatt megfigyelhető feltételes, azonnali varianciát adják. A két paraméter összege megmutatja a sokkok időtállóságát, perzisztenciáját. A két paraméter összege közel van egyhez, de alatta van, így biztosítanak afelől, hogy a modell stacioner.

III. Szimulációs kalibrálási eljárás

A szimulációs kalibrálási eljárásom során a „Saját szimulációs kalibrálási módszer” fejezetben leírt metódust alkalmaztam. Ez Hansen általánosított momentumok módszere, amelyet a kamatlábmodell szerzői is alkalmaztak cikkükben. Ezt a megközelítést fejlesztettem tovább úgy, hogy alkalmas legyen hosszabb időtávra a teljes paramétervektor becslésére. Ebből az eljárásból számítottam ki az árazási kalibrációs eljárásomhoz szükséges induló paramétervektort is. Ebben a fejezetben az eljárás technikai kivitelezését és eredményeit ismertetem.

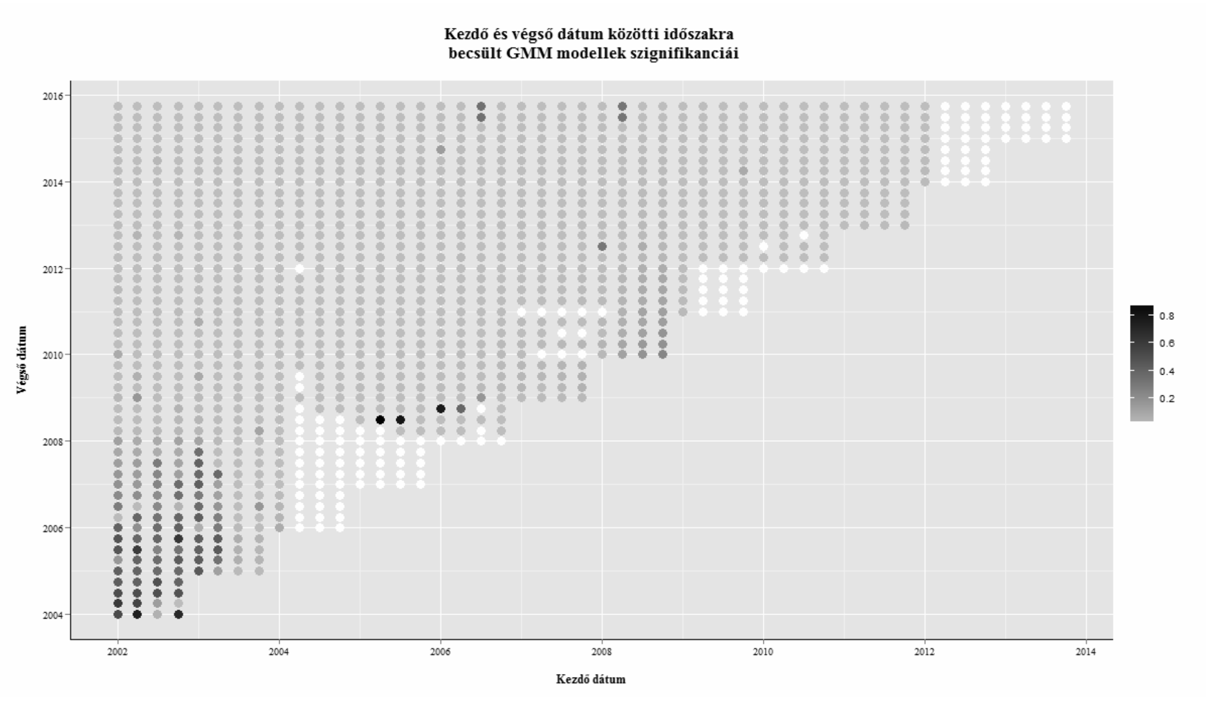
A becslés során az állapotváltozóm a három hónapos állampapírhozam volt, a felhasznált azonnali variancia az előző fejezetben becsült variancia értékek voltak. Míg további négy időszakra vonatkozó állampapírhozamot használtam fel a becslés során. Ezek a féléves, éves, három éves és az öt éves hozamok voltak, szóval jellemzően a rövidebbek. Mindegyik idősor az Államadósság Kezelő Központ által publikált referenciahozamok értékeit tartalmazza.

Először véletlenszerűen kiválasztott intervallumokon teszteltem az eljárás sikerességét. A módszer sikerességét a J-teszt statisztikai szignifikanciájához kötöttem. Azt tapasztaltam, hogy az eljárás akkor volt kevésbé sikeres, amikor jelentős változás, rezsimváltás volt a hozamok idősorában. Három főbb töréspontot azonosítottam, az első a 2005-ös év vége, amikor a hozamgörbe egy ideig kilapult, a második a 2008-as világgazdasági válság, míg a harmadik a 2011 év végi szuverén válság volt. Tehát amikor a becsléshez használt idősor tartalmazta az előzőleg említett három időszak egyikét, akkor jellemzően többször nem sikerült elérnie a konvergenciát az általánosított momentumok módszerének. Emellett megfigyeltem, hogy a sikeres konvergencia függ a kiválasztott időszak hosszától. A hamis konvergenciát, vagy annak teljes hiányát különösen a két évnél rövidebb időszakoknál figyeltem meg.

Az optimális induló paramétervektorok megtalálása érdekében, felvértezve az előzőleg leírt empirikus tapasztalatokkal, a következő módszert határoztam meg. Előállítottam az összes lehetséges két vagy több éves időszakot. Majd ezekre az időszakokra iteratívan alkalmaztam a becslési eljárást, kétszer minden adott időszakra. A kétszeres számításra az α és a β paraméterek összefonódó kapcsolata miatt volt szükség, mivel kölcsönösen határozzák meg egymás alsó vagy felső korlátait. Így egyszer úgy indítottam a becslést, hogy α kezdőértéke volt nagyobb, míg másszor fordítva. Ellenben a két paraméter végső viszonyát, azaz melyiknek lesz a másikat meghaladó értéke, amely lesz a kisebb felső korlátja, a becslési eljárásra bíztam. A becslés során csak az elméleti felső korlátot, a végtelent állítottam be.

Minden iterációnál rögzítettem a paramétervektor értékeit, a konvergenciára vonatkozó üzeneteket, a J-teszt statisztika értékét, valamint a célfüggvény végső értékeit annak érdekében, hogy ezeket felhasználva találhassam meg minden kereskedési napra az optimális induló paramétervektort.

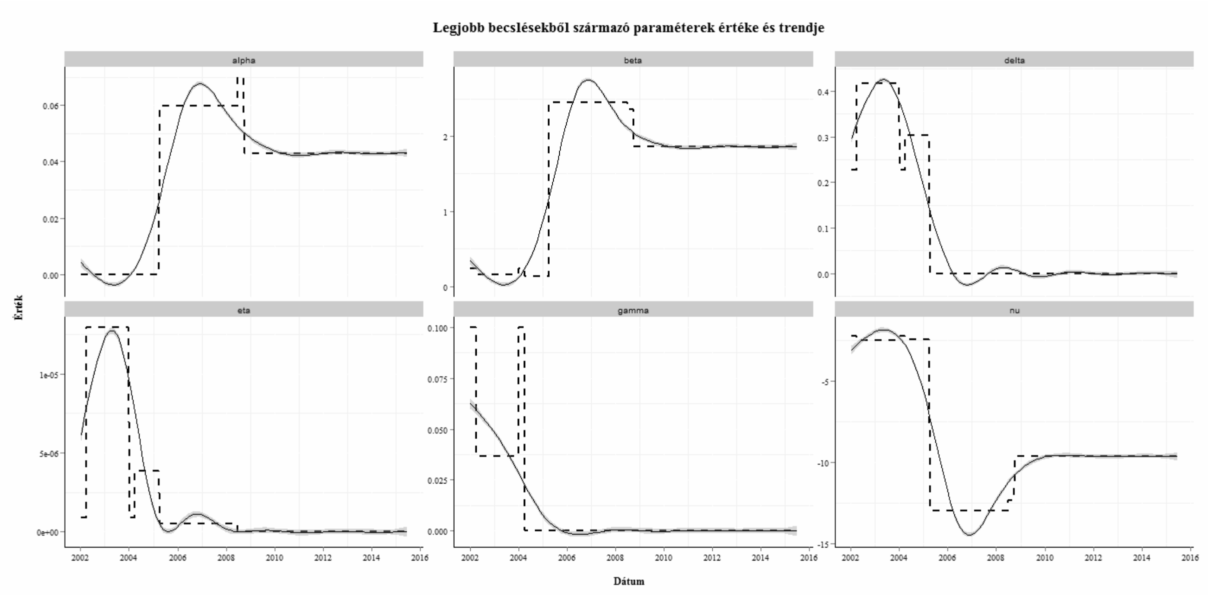
A különböző iterációk esetén a tesztstatisztika értékeit a D—9. ábra szemlélteti. Ezen az ábrán a vízszintes tengelyen az adott iterációban kiválasztott időszak kezdő dátuma, míg a függőleges tengelyen az időszak végső dátuma szerepel. Az ábrán látható pontok sötétsége a tesztstatisztika értéke alapján lett beállítva, minden iterációból kiválasztottam egyet, azt, amelynél a tesztstatisztika értéke nagyobb. A fehér pontok esetén módszer nem konvergált. A célfüggvény értéke szorosan kapcsolódik a tesztstatisztika értékéhez, a két változó közötti kapcsolat lineáris. Azaz jobb, értsd kisebb célfüggvény értékhez magasabb tesztstatisztika érték tartozik. A tesztstatisztika meghatározása során közvetlenül is felhasználjuk a célfüggvény értékét. A konvergenciára vonatkozó üzeneteket a Függelék J-2. táblázata tartalmazza.



D—9. ábra – Iteratívan becsült GMM illesztések szignifikanciái

A jelen szakdolgozatban feldolgozott kamatlábmodell a válság előtti időkben jobban írta le a hozamok alakulását. Ez jól látszik az ábrán is, mivel a 2002-es kezdődátum és a 2006-ös végső dátum által határolt terület jól láthatóan sötétebb színezetű, mint bármelyik másik. A maradék területen inkább egy-két kiugró tesztstatisztika érték található. Azok a pontok, ahol a konvergencia nem volt sikeres, a becslés rendszerint rövid időintervallumra szólt, azaz a felső háromszög átlójához közeliek. Ez részben ellene szól az általam tapasztalatok útján meghatározott legrövidebb felhasználható időintervallumnak, viszont a legjobb becslési eredmények is jellemzően ilyen régióból származnak, ami igazolja előzetes feltételezésem, hogy a két éves intervallum megfelelő az eljáráshoz.

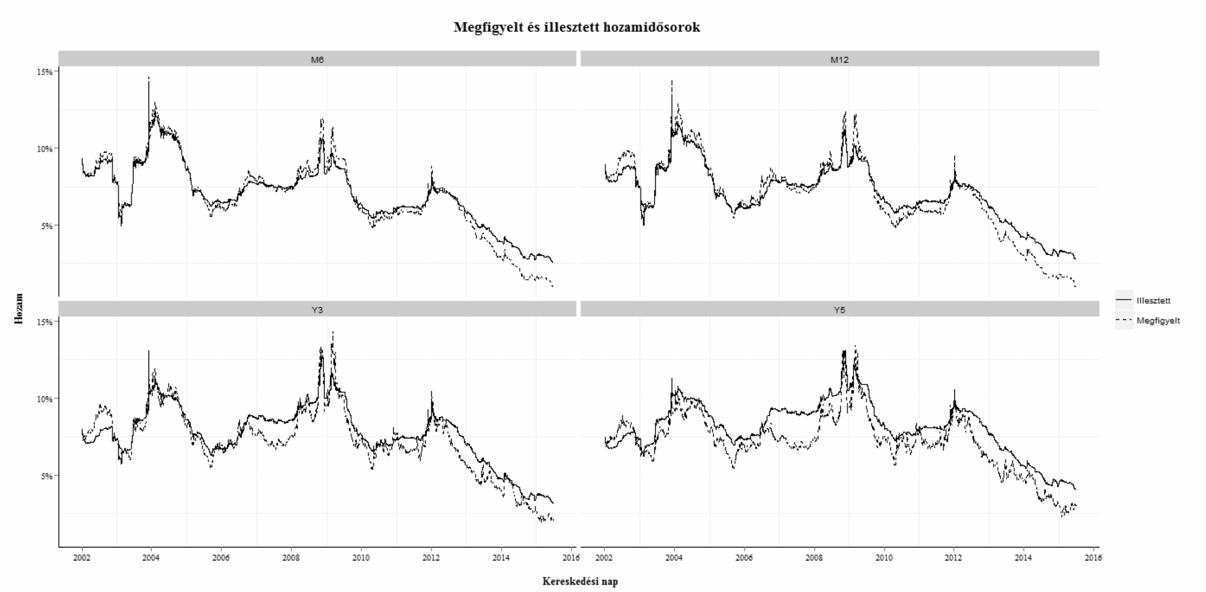
A következő lépés a különböző időszakokra vonatkozó paraméterek közül a legjobb, optimális paramétervektorok kiválasztása minden egyes kereskedési napra. Itt a következő logikát használtam. Először kiszűrtem azokat, ahol nem sikerült legalább relatív konvergenciát elérni. Majd a megmaradt becslések közül kiszűrtem az olyan paramétervektorokat, amelyek esetén a modell bármilyen szokványos statisztikai szinten elutasításra került volna. Ezt követően kiválasztottam minden kereskedési napra azt a paramétervektort, amely kezdő és végső dátuma magába foglalja az adott kereskedési napot, illetve ahol a J-tesztstatisztika értéke a lehető legnagyobb, ezzel együtt azokon a napokon minimalizáltam is a célfüggvény értékét. Az így kapott paramétereket mutatja be a D—10. ábra szaggatott vonallal. Az ábrán a trendek könnyebb azonosítása érdekében a paraméter értékeket harmadfokú spline regresszióval simítottam.



D—10. ábra – Legjobb becslésekből származó paraméterek és trendje

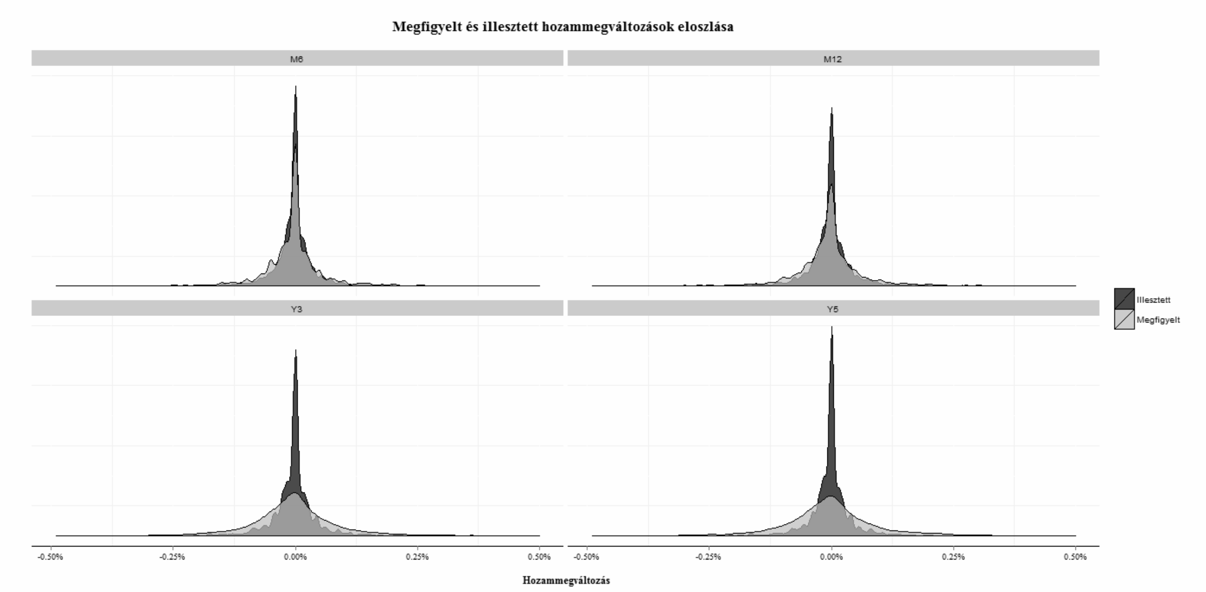
Az így kapott paraméterek segítségével határoztam meg egy induló populációt árazási kalibrációs algoritmusom számára. Ehhez az előzőekben bemutatott optimális paramétervektorokhoz nulla várható értékű, egyenletes eloszlású véletlen zajt adtam, amit előtte felskáláztam az előző ábrán látható terjedelmekkel, külön-külön paraméterenként. A terjedelmeket és szórásokat tartalmazó táblázat a Függelékben az J-3. táblázata. A kapott paraméterek esetén a J-tesztstatisztika alapján a modell minden esetben legalább 10% konfidenciaszint mellett elfogadásra került. Ez alapján a modell statisztikailag elfogadható korlátokat kényszerít a különböző lejáratú hozamok egymáshoz viszonyított idősoros alakulására.

A modell megfelelését, illesztését egy ábra segítségével is elemeztem, amely a D—11. ábra. Ezen az ábrán az előzőekben leírt módon kapott paraméterekkel illesztett hozamok idősora látható különböző lejáratokra. Ténylegesen az illesztés a hozammegváltozásokra történt, az ábrát ezen megváltozások kumulálásával készítettem, hozzáadva természetesen az első időpillanati hozamot. A folytonos vonal az illesztett hozamok idősora, míg a szaggatott a ténylegesen megfigyelteké. Az ábra alapján is elfogadjuk a modellt. Megállapítható továbbá, hogy a rövid lejáratú hozamok illeszkedése jobb. Ez természetes és a modell felépítéséből adódik. Az oka abban keresendő, hogy a modell tulajdonképpen nyolc paraméterrel írja le az állampapírhozamok végtelen számossággal rendelkező halmazát. A nyolc paraméterből pedig hat függvényszerű kapcsolatot hoz létre egy adott kereskedési napra a legrövidebbtől eltérő lejáratú hozamok és a legrövidebb lejáratú hozam értéke között. Ez a függvényszerű kapcsolat akkor tud erősebb, szignifikánsabb lenni, ha minél nagyobb a korreláció az adott lejárat és a legrövidebb között. Értelemszerűen a lejáratilag egymáshoz közelebb álló hozamok korrelációja erősebb, ezért a rövidebb hozamok illesztése lesz jobb. Az elemzéshez felhasznált különböző lejáratú hozamok korrelációs mátrixát a Függelék J-4. táblázata tartalmazza.



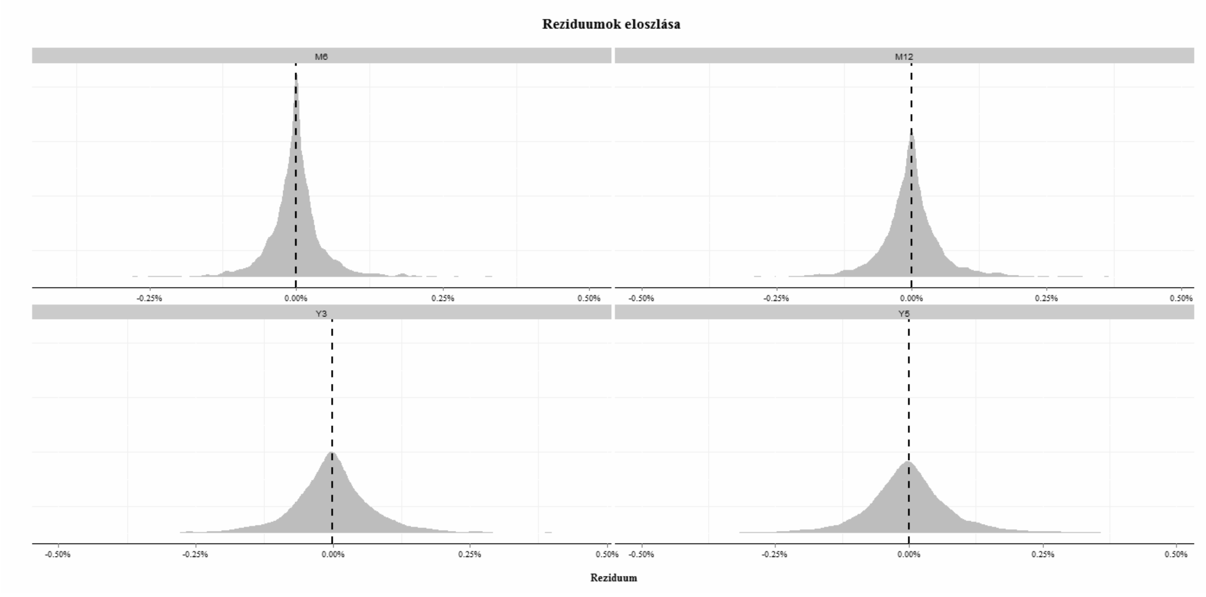
D—11. ábra – GMM segítségével illesztett hozamalakulás

Ezt követően a hozammegváltozásokat vizsgáltam meg, mivel a modell illesztése ténylegesen azokra történt meg, nem a hozamokra. A D—12. ábra a hozammegváltozások eloszlása mutatja. Ezen szürkével a megfigyelt és feketével az illesztett értékek láthatóak. Az ábra alapján ismét megállapíthatjuk, hogy a modell jobban teljesít a rövid lejáratú hozamok esetén. Az ábra alapján az illesztett hozammegváltozások eloszlása csúcsosabb, mint a megfigyelteké. Ebből arra következtethetünk, hogy a legrövidebb hozam megváltozásának a hatására a modell kisebb hozammegváltozást kényszerít a hosszabb lejáratú hozamokra az empirikusan megfigyeltnél. Ez alapján a kamatlábmodell keresztmetszeti kényszerei nem tökéletesek, a modell kisebb szórást feltételez a hosszabb lejáratú hozamoknak.



D—12. ábra – GMM illesztés hozammegváltozásainak eloszlása

Az illeszkedés helyességét a reziduálisok vizsgálatával ellenőrzöm tovább. A D–13. ábra a reziduumok eloszlásait mutatja be, amelyből eltávolítottam a kiugró értékeket, de ezek az eloszlás alakját nem változtatják. Szaggatott vonallal az adott lejáratra vonatkozó reziduálisok átlaga szerepel, amely számítása során figyelembe vettem a kiugró értékeket. Ezen látszik, hogy a reziduális eloszlások várható értéke minden lejáratra nulla. Ezen felül megvizsgáltam ugyanezen hibatagok autókorrelációját, valamint ábrázoltam a reziduumokat az illesztett értékek függvényében, hogy pontosabb képet kapjak az esetlegesen megmaradó információtartalomról az illesztés hibatagjaiban. Az utóbbi két ábra a Függelék J—2. ábra és



D—13. ábra – A GMM illesztés reziduumainak eloszlása

J—3. ábra.

Az utóbbiakban említett, Függelékben található ábrákon az látszik, hogy a reziduumok és az illesztett értékek között nincs kapcsolat, a reziduumok zajnak tekinthetőek. A szórásuk az ábra alapján állandónak mondható, tehát homoszkedasztikusak, valamint nincs trend sem bennük, ami modell specifikációs hibára utalna. A hibatagok korrelogramja alapján viszont gyenge, de mégis szignifikáns autókorreláció található még a bennük. Ez arra utal, hogy van még meg nem magyarázott információ a hozamok idősorában.

Összefoglalásul a szimulációs kalibrálási módszer megfelelően alkalmazható az állampapírhozamok keresztmetszeti összefüggéseinek magyarázására, valamint alkalmas hosszabb időintervallumra optimális kamatlábmodell paraméterek becslésére. Ez az eljárás felhasználható szimulációs alkalmazásokra, például ezzel a módszerrel meghatározunk optimális modell paramétereket az elmúlt két év hozamadataiból. Ezt követően szimulálunk rövid lejárú hozamot ezen paraméterek segítségével. Meghatározzuk annak azonnali varianciáját, majd ezt követően a hozamokra vonatkozó képlettel felírhatjuk a teljes szimulációs időintervallum hozamgörbéjét minden napra. Úgy hogy közben statisztikailag elfogadható kényszereket alkalmazunk a különböző lejáratú hozamok egymáshoz viszonyított alakulására.

IV. Árazási kalibrálási eljárás

Ebben a fejezetben található eredményeket a „Saját árazási kalibrálási módszer" fejezetben leírt módszertan alkalmazásával kaptam. Ennek a módszernek a segítségével 2003-tól 2015 félévéig minden kereskedési napra meghatároztam a magyar állampapír piaci hozamgörbét. Erre az időszakra minden napra külön meghatároztam a modellhez szükséges paraméterek optimális értékét a differenciál evolúciós algoritmus segítségével. Ehhez egy induló populációt határoztam meg hosszabb időszakokra optimális paraméterekkel, ezt az általánosított momentumok módszerének a segítségével tettem. Ennek eredményeit az előző fejezet részletezi.

Mielőtt rátérnék az eljárás eredményeire, röviden bemutatom az általam alkalmazott alapösszefüggéseket, számítási módszereket a kötvényárfolyamok meghatározása során. Erre azért szükséges kitérni, mivel a modell csak a diszkont kötvényre rendelkezik explicit képlettel, a kamatot is fizető kötvényre nem. Szerencsére a kamatfizető kötvény felbontható diszkont kötvények sorozatára, így áthidalható ez a probléma. Emellett azért is fontosak ezek az összefüggések, mert fontos részét képezik az eljárás során használt célfüggvénynek is. A becslési eljárás során én a következő módszert alkalmaztam, ami egyben a minimalizálandó célfüggvény értékem számítási módja is.

Először meghatároztam azoknak a kötvényeknek a halmazát, amelyekre az adott kereskedési napon rendelkeztem megfigyelt árfolyammal. A megfigyelt árfolyamnak a bruttó középárfolyamot tekintettem, ez a kétoldali jegyzés átlaga a felhalmozott kamatokkal megnövelve. Amennyiben az egyik oldali árjegyzés hiányzik, akkor az ellentétes oldalit alkalmaztam mint középárfolyam. Az Államadósság Kezelő Központ rendelkezik ezekre vonatkozólag nyilvánosan elérhető adatbázissal, ezt használtam fel. Ez az adatbázis minden kereskedési napra tartalmaz átlagosan húsz kötvényre árfolyamot, amely kötvények mindegyike forintban van denominálva, és egyike sem lebegő kamatozású. A felhasznált adatokról részletesebben az „Adatok" című alfejezetben írtam.

Ezt követően a rendelkezésemre álló adatbázisból megállapítottam a kötvények jövőbeli pénzáramainak nagyságát és ütemezését. Ebből létrehoztam minden kereskedési napra egy külön pénzáram mátrixot, amely soraiban az egyes kifizetési időpillanatok, míg oszlopaiban az egyes különálló kötvények találhatóak. Míg a mátrix elemei a pénzáramok nagyságát adják meg, a névérték százalékában kifejezve.

Ezzel megkaptam azokat az időpontokat is, amelyeknél szükségem van a hozamgörbe értékére ahhoz, hogy meg tudjam állapítani a kötvények árfolyamát. Ezekben az időpontokban nem a hozamgörbe, hanem a diszkontgörbe értékeit állapítottam meg. Mivel ezekre rendelkeztem analitikus képlettel, amit a kamatlábmodell szerzői állapítottak meg, és amely „A diszkontgörbe meghatározása és hozadékai" című fejezetben található (*B-26*)-os egyenlet.

Ezt követően a rendelkezésemre álló pénzáram mátrix megfelelő sorait beszoroztam az adott időpillanathoz tartozó diszkontgörbe értékkel, így a mátrixom a szerződés szerinti pénzáramok jelenértékét tartalmazta. Ezt követően két úton haladtam tovább. egyrészt összeadtam az oszlopok szerint, így megkaptam a modell általi, becsült kötvényárfolyamokat, amelyeket $\hat{P}$-pal jelölök. Másrészt megszoroztam még a jelenértékeket tartalmazó pénzáram mátrixot az egyes kifizetések hátralévő futamidejével és leosztottam a $\hat{P}$-pal. Ezt szintén az oszlopok szerint összegeztem, így megkaptam az adott diszkontgörbe mellett az egyes kötvények becsült átlagidejét, amit $\hat{D}$-vel jelölök. Az eddigiekben leírt számolási eljárás megegyezik a következő két képlet alkalmazásával, amelyek a sztenderd kötvényárfolyam és átlagidő képletek.

$$\hat{P} = \sum_{t=1}^{n} CF_t d_t \tag{D-4}$$

$$\hat{D} = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t d_t t}{\hat{P}} \tag{D-5}$$

A célfüggvényemben a becsült és a megfigyelt kötvényárfolyamok közötti különbséget minimalizálom. Annak érdekében, hogy ennek a függvénynek a minimuma nulla legyen és monoton csökkenjen, transzformálnom kell az eltérést. Dolgozatomban én a súlyozott abszolút eltérést választottam, ahol a súlyok az átlagidő inverzei voltak. Ez a következő képlettel írható fel.

$$WMAE = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| P - \hat{P}_t \right| \frac{1}{\hat{D}_t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\hat{D}_t}} \qquad \text{D-6}$$

Ezt a távolság definíciót minimalizáltam, egy addicionális feltétellel, ami a következő. Amennyiben az optimalizálás során olyan paramétervektorhoz jutok, amely mellett a modell értékei nem adhatóak meg, akkor a célfüggvény értéke legyen végtelen. Ez kezeli az olyan eseteket, amikor az optimalizáció ideje alatt a véletlen hatására nem értelmezhető eredményt kapok. Az optimalizáció során végig használtam a paraméterekre vonatkozó korlátokat. Az algoritmus konkrét lefutását, egy iteráció során elvégzett lépéseit a „Saját árazási kalibrálási módszer” fejezet tartalmazza.

Az árazási kalibrációs eljárásommal 2003 és 2015 félévéig minden kereskedési napra meghatároztam a magyar állampapír-piaci hozamgörbét. Ez összesen 3 122 napot jelent, 73 450 darab különböző kötvényárfolyammal. Az eredmények összefoglaló statisztikáit a D-1. táblázat tartalmazza.

A táblázat összegző sorában a kötvények darabszámával súlyozott átlag szerepel. Az átlagos darabszám a kötvényárfolyamok átlagos darabszámát takarja. Ez az oszlop ugyanazt az információt közli az, ami az „Adatok és az R” fejezet D—2. ábra ábráján is jól látszik, 2008-2009-ig emelkedő volt a közzétett napi kötvényárfolyamok darabszáma, amelyet ezt követően 20 körülire csökkentettek. Az átlagos árfolyam alapján elmondható, hogy a válság periódusokat kivéve a kötvények névleges kamatlába a piaci hozamszint körül alakul. Válság periódusokon a 2004-es évet, a 2008-2009-es világgazdasági válságot, valamint a 2011-2012-es szuverén válságot értem. Ezen kívül az is elmondható, hogy az utóbbi egy-két évben a névleges kamatlábak magasan a hozamszint felett találhatóak. Ezeket a következtetéseket a prémiumok-diszkontok meglétéből azonosítottam a kötvényárakban. Az átlagos átlagidő alapján emelkedő az átlagos futamidő.

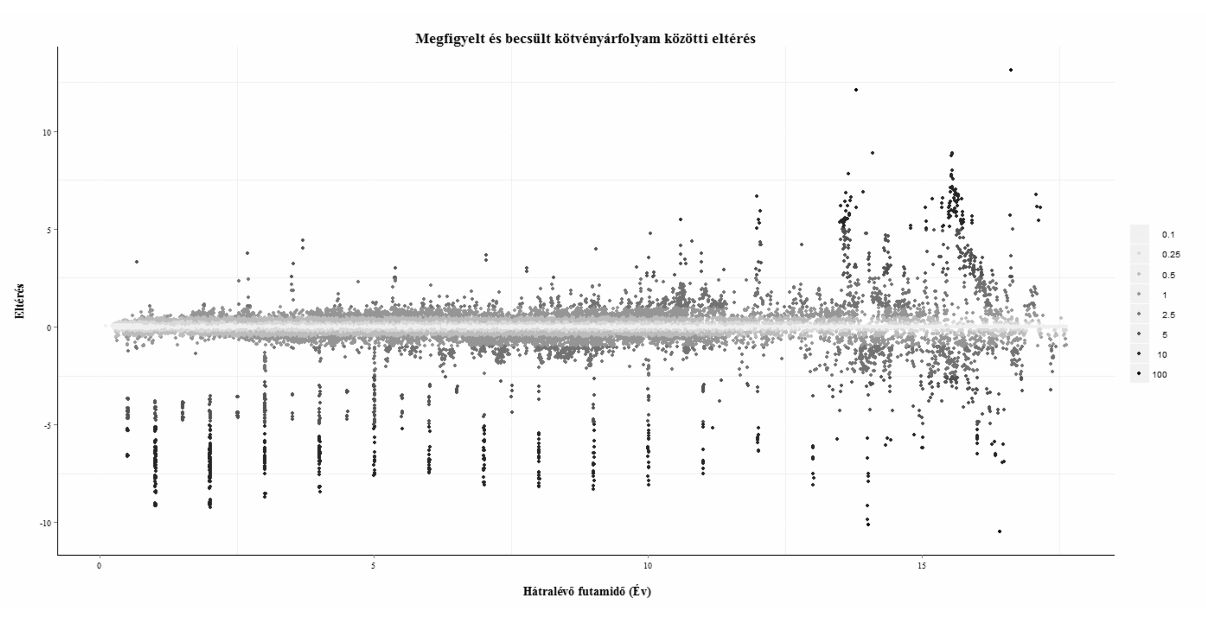
A különböző eltérés mértékek alapján elmondhatjuk, hogy a modell nem áraz szisztematikus alul vagy felül, mivel az átlagos eltérés kisebb, mint az átlagos abszolút eltérés. Az átlagos abszolút relatív eltérések alapján kijelenthetjük, hogy a modell relatív kis hibával

D-1. táblázat – Árazási kalibrációs eredmények összefoglalása

Év	Kötvényárak darabszáma	Átlagos darabszám	Napok száma	Átlagos árfolyam	Átlagos becsült ár	Átlagos átlagidő	Átlagos eltérés	Átlagos abszolút eltérés	Átlagos relatív abszolút eltérés
2003	6055	24,42	248	100,87	100,95	2,48	-0,0715	0,1967	0,19%
2004	6527	25,80	253	96,57	96,63	2,82	-0,0617	0,2548	0,27%
2005	6620	26,17	253	102,82	102,89	3,01	-0,0640	0,1648	0,16%
2006	6830	27,10	252	100,46	100,53	3,03	-0,0691	0,2006	0,20%
2007	7178	29,30	245	100,95	101,01	3,22	-0,0572	0,1849	0,18%
2008	7089	28,24	251	96,03	96,08	3,06	-0,0569	0,2765	0,30%
2009	5863	23,36	251	94,79	94,82	2,98	-0,0334	0,2446	0,27%
2010	5236	20,61	254	100,87	100,88	2,99	-0,0191	0,2248	0,22%
2011	5096	20,14	253	99,46	99,47	3,39	-0,0136	0,2082	0,21%
2012	4904	20,02	245	98,44	98,44	3,08	-0,0023	0,2455	0,25%
2013	4733	19,24	246	105,10	105,04	3,24	0,0569	0,3629	0,34%
2014	4761	19,20	248	108,38	108,41	3,46	-0,0382	0,2578	0,23%
2015	2558	20,80	123	110,68	110,69	3,73	-0,0162	0,3260	0,28%
	73450	23,53	3122	100,52	100,56	3,07	-0,0392	0,2350	0,23%

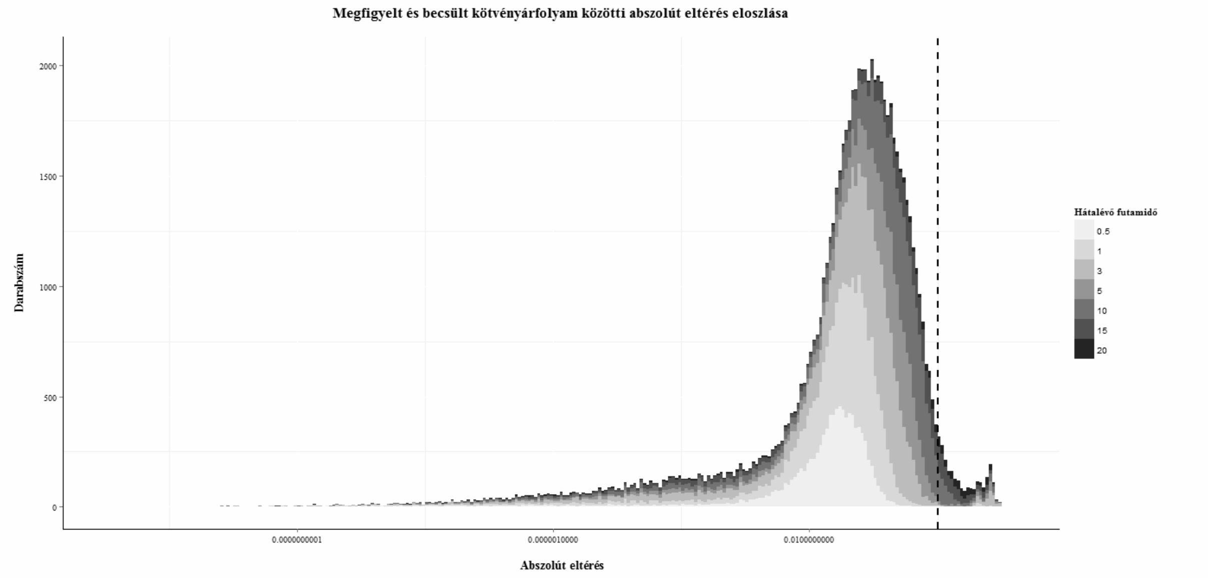
becsli meg a hozamgörbét. Emellett az is megfigyelhető az összefoglalón, hogy ez alapján a modell nem avult el. Gondolok itt arra, hogy a relatív hiba mértéke ingadozik évről évre, nem található trend az értékekben.

Ezt követően megvizsgáltam a kötvényárazási hibákat részletesen. Ezt szemlélteti a D–14. ábra. Ezen az ábrán megfigyelhető, hogy nincs egyértelmű kapcsolat a hátralévő futamidő és az árazási eltérések várható értéke között. Az ábra alapján úgy tűnhet, hogy nagy az aránya a jelentősebb árazási hibáknak. Ez nem így van, kategorizáltam a hibákat az ábrán is látható színek alapján, ahol a jelmagyarázatban szereplő szám az adott kategória felső határát jelöli. A hibák megoszlását ugyanezen kategóriák mellett a Függelék J-5. táblázata



D—14. ábra – Becslési hiba kapcsolata a hátralévő futamidővel tartalmazza, ez alapján az egynél nagyobb árazási hibáknak a teljes mintán belüli aránya mindössze 3,52%. Mivel a kötvények árfolyama a névérték százalékában van kifejezve, ezért gondolhatunk erre úgy is mint relatív eltérés. Átfogalmazva az előző kijelentést, az árazási eltérések 96,48%-ban a relatív eltérés nem volt nagyobb 1%-nál. Ami jó teljesítmény.

A D–14. ábra alapján látszik, hogy a hosszabb hátralévő futamidővel rendelkező kötvények esetén viszont az árazási hibák szórása emelkedett. Ezt még alaposabb vizsgálatnak vetettem alá, amelyet a D—15. ábra szemléltet. Ezen az ábrán az abszolút eltérések eloszlása látható. A vízszintes tengelyt 10 alapú logaritmussal skáláztam a jobb láthatóság kedvéért, ellenben egy csúcsos és nehezen olvasható eloszlást mutatna. Az ábrát a hátralévő futamidővel színeztem, a kategóriák képzése az előző ábrához hasonlatos, a jelmagyarázatban szereplő szám volt a felső határa a kategóriának.

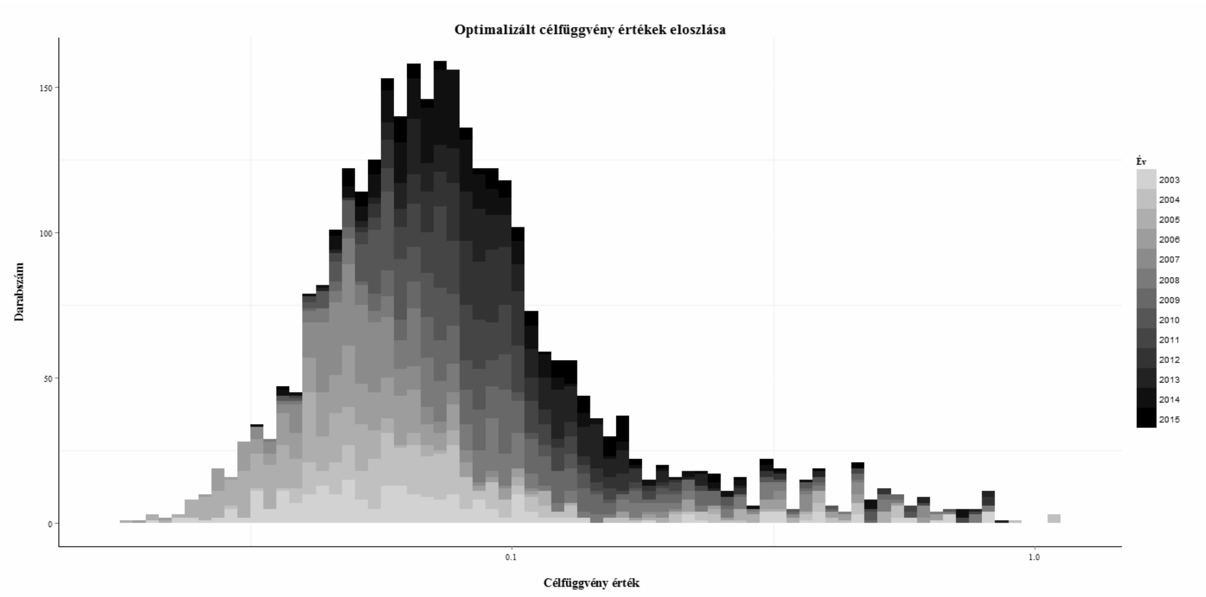


D—15. ábra – Az abszolút eltérés eloszlása a hátralévő futamidő alapján

Az ábra igazolja, hogy hosszabb hátralévő futamidejű kötvények abszolút eltérés eloszlása szélesebb, a megfigyelt értékek között nagyobb a szórás. Az is észrevehető, hogy a rövidebb hátralévő futamidejű, maximum 5 év hátralévő futamidejű kötvények esetén az előzőekben is említett 1%-os eltérés korlátot alig került meghaladásra. Ezt a korlátot a szaggatott vonal jelzi az ábrán. Emellett természetesen észrevehető, hogy egy-egy nagyobb árazási hiba minden kötvénykategória esetén előfordult, ezt jelzi az ábrán a legjobboldalibb kis megemelkedés. Ez alapján kijelenthetjük, hogy árazási hibák vizsgálata során a modell jól szerepelt.

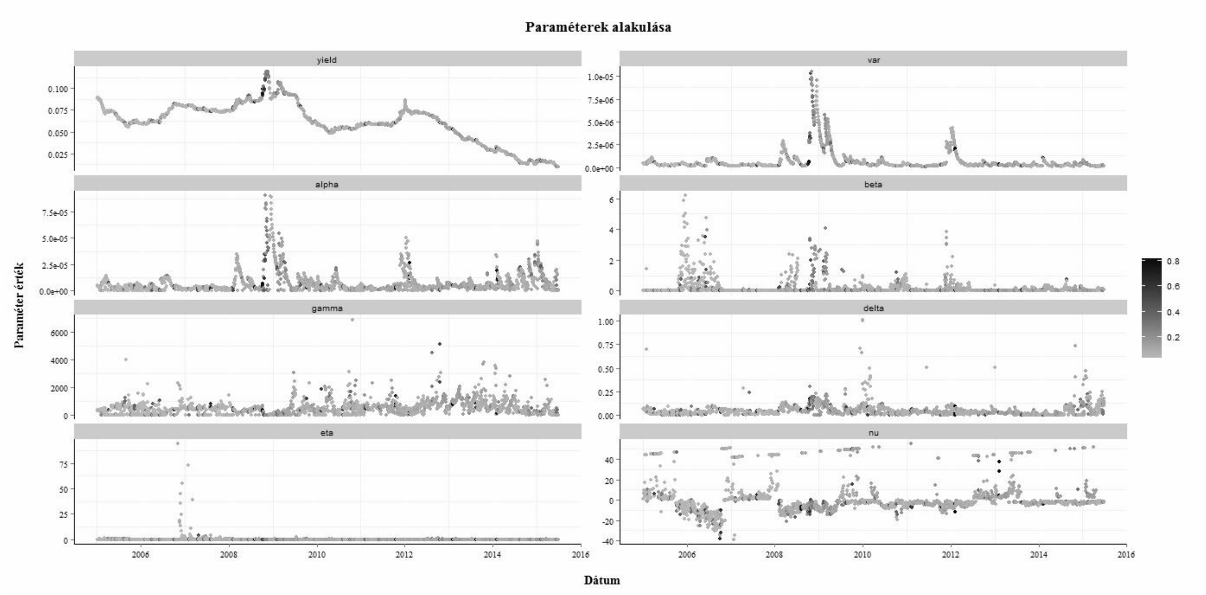
Ezt követően megvizsgáltam a kalibrációk során kapott végső célfüggvény értékeket. Ezek eloszlását a D—16. ábra szemlélteti. Ezt az eloszlást szintén 10 alapú logaritmussal transzformáltam a jobb láthatóság érdekében. Az ábra alapján azt mondhatjuk, amit már a

„Szimulációs kalibrálási eljárás” fejezetben is pedzegettem, hogy a válság előtti időkben jobb a modell teljesítménye. Ez a végső célfüggvény értékeken is látszik, mert a nagyon alacsony értékek azokból az évekből származnak. Ezek az ábra baloldalán találhatóak. Ezen kívül az figyelhető meg, hogy van véletlen meghibásodás, azaz minden évben voltak olyan napok, amikor a modell illeszkedése sokkal rosszabb volt az átlagosnál. Ezen felül megvizsgáltam a konvergencia alakulását az egyes iterációs lépések mentén. Ezekről két ábrát készítettem, amelyek a Függelékben találhatóak. A J—4. ábra évenkénti bontásban mutatja az átlagos célfüggvény értéket, valamint annak két szórásnyi területét. Ez alapján látható, hogy az algoritmus minden évben konvergált már ezer iterációt követően. A rárajzolt szórások alapján elmondható, hogy a célfüggvény értékek szórása változó és vannak évek, amikor szignifikánsan magasabb az, például a 2008-as évben. A J—5. ábra ugyanerre vonatkozik, csak összesítve az előző ábra adatait. Ez alapján is az mondható el, hogy ezer iterációt követően jelentős javulás nem történt a célfüggvény értékében.



D—16. ábra – Optimalizált célfüggvény értékek eloszlása

Ezt követően a kapott paraméterek vizsgálata következett. Ezek, illetve az állapotváltozók időbeli alakulását szemlélteti a D—17. ábra. Az ábrán a színezés az előzőekben ismertetett végső célfüggvény értékek alapján történt. Minél sötétebb az adott pont színe, annál nagyobb volt a célfüggvény érték, azaz az illesztés annál gyengébb volt. A függőleges tengelyeken eltérő skálák szerepelnek. Itt fontos megemlíteni, hogy a 2003-2004-es időszakban a kalibráció során az α paraméter értéke lett a nagyobb. Azt követően végig a β dominált. A két paraméter viszonya előre nem meghatározott, az az illesztés során véglegesedik. Ez az időszak lehagyásra került az ábráról, mivel a V/r hányados alacsony szintje miatt nem lehetne azonosítani az α paraméterben bekövetkező változásokat. Az előbb említett hányados határozza meg α vagy β felső korlátját.



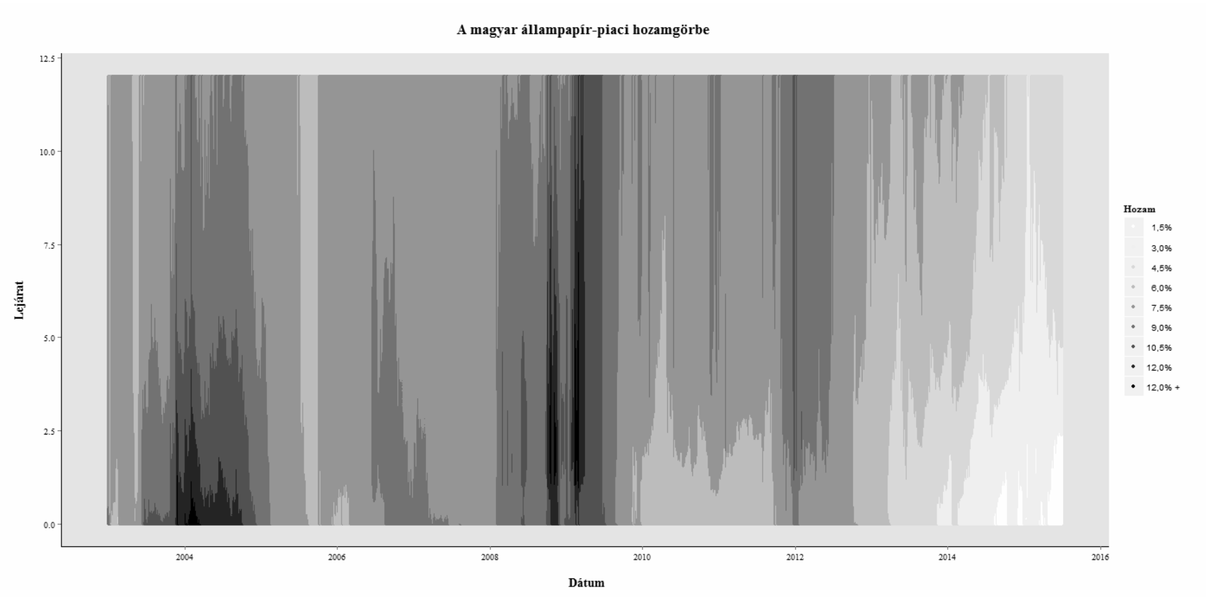
D—17. ábra – Paraméterek és állapotváltozók alakulása

A D—17. ábra alapján jól látható trend a paraméterek alakulásában nem azonosítható, de néhány érdekesség megfigyelhető. Egyrészt az α paraméter és vele együtt az x kockázati faktor aránya a rövid kamatláb varianciájával mozog együtt, ami a második állapotváltozó. Másrészt a magas célfüggvény értékek az egész időszakon elszórva találhatóak, ami ismét az előzőekben említett véletlen meghibásodást támasztja alá. Valamint ezen az ábrán is látható, hogy a 2008-as évben, a világgazdasági válság kirobbanásakor ez nem véletlen volt, mert többször egymás után is megismétlődött. Ez alapján megállapíthatjuk, hogy a modell nem teljesít jól extrém, turbulens időszakokban. Harmadrészt kaptunk információt a kockázat piaci áráról és az azonnali lejárati prémiumról. Ez a ν paraméter alakulásában figyelhető meg. Ez nem stabil és két jól elkülöníthető állapota van. Van egyrészt a tartósan negatív időszakok, ilyen esetekben a kockázat piaci ára negatív és az azonnali lejárati prémium pozitív, mivel a ν paraméter értéke a λ és a ξ paraméterek összege. A ξ változó csak pozitív értékeket vehet fel, tehát ha az összegük negatív, akkor biztosak lehetünk benne, hogy a λ, a kockázat piaci ára negatív. A másik állapota a változónak, amikor nulla vagy pozitív, ilyen esetekben a lejárati prémiumról és a kockázat piaci áráról nem tudunk semmit mondani ez az ábra alapján.

Az ábráról az olvasható még le, hogy a γ terjedelme, szórása hatalmas, és a kezdő paraméter tér definiálása során nem ilyen léptékű induló populációval kezdtük az iterálást. De a módszer természetéből kifolyólag mégis elérhetőek voltak ezek az „igaz” értékek.

A paraméterekből meghatározható a modell által adott, hosszú lejáratú, egyensúlyi kamatláb, amelyet a (B-28)-as egyenlet segítségével tudunk kiszámolni. Az így kapott kamatláb alakulását a Függelékben található J—6. ábra mutatja be. Az ábrán ki vannak szűrve a kiugró értékek, valamint egy harmadfokú spline regressziós simítást végeztem az adatokon, a trend azonosítása érdekében.

Végül, de nem utolsó sorban elérkeztünk a becsült hozamgörbék bemutatásához. Ehhez két ábrát készítettem. Egyrészt az itt látható D—18. ábra, amely síkban ábrázolja a hozamgörbe teljes felületét 2003-től 2015 félévéig. Az ábrán a színezés a különböző hozamszinteket jelöli 1,5%-os sávokkal. A jelmagyarázatban szereplő értékek a sávok felső határát jelölik. Illetve a Függelékben található J—7. ábra, amely három dimenzióban ábrázolja ugyanezt. Az az ábra megtekinthető az interneten is, illetve ott megnyitva az interaktív.



D—18. ábra – A magyar állampapír-piaci hozamgörbe felülete

A D—18. ábra alapján jól azonosíthatóak egyrészt az előzőekben említett turbulens időszakok, ezek a 2004-es év, a 2008-as gazdasági világválság és a 2011 év végi szuverén válság. Ezek mindegyikénél egy hirtelen ugrás látszik a szintben. Valamint megfigyelhető az elmúlt egy-két év kamatcsökkentési periódusa is, amely során soha nem látott, alacsony hozamok felé mozdult el az ország gazdasága.

E. Összegzés

Az előző részekben bemutattam a Longstaff-Schwartz kamatlábmodellt. Ebben a részben az előző részek tömör összefoglalása, valamint további kutatási lehetőségek, irányvonalak meghatározása következik.

A „Bevezetés” során röviden ismertettem és kategorizáltam a szakirodalomban fellelhető kamatlábmodellek közül azokat, amelyek relevánsak a dolgozat tárgyát képező modell szempontjából. Ez a bemutatás tartalmazza a modell közvetlen elődjeit, illetve a párhuzamosan publikált, fejlesztett megközelítéseket. Ezen ismertetés segítségével elhelyeztem a Longstaff-Schwartz kamatlábmodellt térben, időben és kamatlábmodell típus szerint a szakirodalomban.

A következő részben, „A modell elméleti bemutatása” során ismertettem a modell mögött meghúzódó általános egyensúlyi gazdaságmodellt. Ez utóbbiban szereplő egyensúlyi kamatláb és alakulása kulcsszerepet játszik a kamatlábmodell működésében. Szintén a gazdaságmodell segítségével kaptuk a modell származtatott termék áralakulását leíró differenciál egyenletet a kockázatsemleges mérték szerint. Ezt követően betekintést nyújtottam a modell szerzői által alkalmazott állapotváltozói transzformációjába, amivel a modell absztrakt kockázati faktorait kvázi megfigyelhető változókká alakították. Megmutattam a diszkontgörbe meghatározásának módját, valamint az egyéb nélkülözhetetlen összefüggéseket. Ezen felül ebben a részben ismertettem az elemi kötvény szerinti forward mértékre való áttérés lehetőségét és módját.

A „Kalibrációs módszertan” rész, ahogy a címe is sugallja, a modell kalibrálásának lehetséges eljárásait tartalmazza. Ebben a részben mutattam be az állapotváltozók becslésének a módszertanát, amit a szerzők is javasoltak. Ezt követően két, a szakirodalomból merített kalibrációs módszert ismertettem, majd a saját magam által kialakított kalibrációs eljárásra tértem ki. A saját eljárásom két részből áll, egy úgynevezett szimulációs és egy árazási kalibrációból. Ezeket a neveket én adtam a két eljárásnak az alapján, hogy milyen jellegű probléma megoldására lehet felhasználni az így kalibrált modellt. Az eljárásom szimulációs kalibrálásához az ihletet a szerzőpáros modellt tesztelő, validáló módszere nyújtotta, amely az általánosított momentumok módszere. Az árazási megközelítésem alapját egy hatékony optimalizációs algoritmus képezte, amely a differenciál evolúciós algoritmus.

Az „Empirikus eredmények” című része a szakdolgozatomnak tartalmazza az előzőekben ismertetett eljárások gyakorlati alkalmazásának hozadékát, ami a magyar állampapír-piaci hozamgörbe felülete 2003-as év elejétől 2015 félévéig. A rész elején található az általam felhasznált, nyilvánosan elérhető adatok, valamint az alkalmazott statisztikai programcsomag rövid ismertetése. Ezt követően bemutattam a kockázati faktorok meghatározásának eredményeit, mely során ismertettem az ilyen becsléseknél általában alkalmazásra kerülő statisztikai teszteket. A továbbiakban rátértem a saját kalibrációs eljárásom eredményeire, mely ismertetését a szimulációs megközelítésemmel kezdtem. Ezen belül határoztam meg az árazási kalibrációhoz szükséges induló populációkat, amely paramétervektorokkal bemutattam a modell illeszkedését az állampapírhozamok idősorához. Az így kapott hibatag eloszlást elemeztem is. A rész hátralévő felében az árazási algoritmusom eredményeit mutattam be. Ezt az optimalizálás során használt célfüggvényem ismertetésével kezdtem, melyet az algoritmus eredményeinek ismertetése követett. Ezen belül betekintést nyújtottam az árazási hibákba, azaz a megfigyelt és a modell által becsült kötvényárfolyamok közötti eltérés eloszlásába különböző szempontok szerint. Ezt követően megvizsgáltam a konvergencia elégséges teljesülését, valamint a paraméterek időbeli alakulását. Végezetül ábrázoltam a kapott hozamgörbe felületet.

A modell pontosságát további teszteknek lehet alávetni, amelyek között a szokványos validációs technikák felhasználása, időkizárt és mintakizárt eljárások alkalmazása. Emellett ajánlott még a modell alapján idősorokat szimulálni, egyrészt így meg tudjuk állapítani a kamatlábakra és azok varianciájára alkalmazott feltételek helyességét. Másrészt megvizsgálhatjuk együttes eloszlásuk specifikációjának helyességét. Ezen felül szükséges a modell egyéb kamatlábmodellekkel való összevetése, benchmarkolása. Ezzel tudjuk megállapitani a modell használatának jogosságát.

Továbbá ajánlott a kapott, adott kereskedési napra optimalizált paramétervektorokkal egyéb kamatláb érzékeny pénzügyi terméket árazni. Majd az így kapott árakat a piaci árakkal összevetve tovább vizsgálni a modell teljesítményét. Ez előzőekben említett tesztek, számítások további kutatás tárgyát képezhetik. Ezek segítségével lehetséges a modell még alaposabb feltérképezése.

F. Irodalomjegyzék

Ardia, D. - Mullen, K. M. - Peterson, B. G. - Ulrich, J. (2015): *DEoptim: Differential Evolution in R*. Retrieved from http://CRAN.R-project.org/package=DEoptim

Black, F. - Derman, E. - Toy, W. (1990): A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, *46*(1), 33–39.

Bollerslev, T. (1986): Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, *31*(3), 307–327.

Brigo, D. (2007, November): *Interest Rate Models: Paradigm shifts in recent years*. Presented at the Seminar, New York, Columbia University. Retrieved from http://ieor.columbia.edu/files/seasieor/industrial-engineering-operations-research/pdf-files/Brigo_D.pdf

Brigo, D. - Mercurio, F. (2007): *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media.

Chaussé, P. (2010): Computing Generalized Method of Moments and Generalized Empirical Likelihood with R. *Journal of Statistical Software*, *34*(11), 1–35.

Clewlow, L. - Strickland, C. (1994): A Note on Parameter Estimation in the Two Factor Longstaff and Schwartz Interest Rate Model. *The Journal of Fixed Income*, *3*(4), 95–100.

Cox, J. C. - Ingersoll, J. E. - Ross, S. A. (1985a):. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 363–384.

Cox, J. C. - Ingersoll, J. E. - Ross, S. A. (1985b):. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, *53*(2), 385–407.

Dahlquist, M. - Lars E. O. Svensson. (1996): Estimating the Term Structure of Interest Rates for Monetary Policy Analysis. *The Scandinavian Journal of Economics*, *98*(2), 163–183. http://doi.org/10.2307/3440852

Dai, Q. - Singleton, K. (2000): Specification analysis of term structure of interest rates. *Journal of Finance*, *55*, 1943–78.

Dowle, M. - Srinivasan, A. - Short, T. - Saporta, S. L. with contributions from R. - Antonyan, E. (2015): *data.table: Extension of Data.frame*. Retrieved from http://CRAN.R-project.org/package=data.table

Ghalanos, A. (2015): *rugarch: Univariate GARCH models.*

Hansen, L. P. (1982): Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, *50*(4), 1029–1054. http://doi.org/10.2307/1912775

Heath, D. - Jarrow, R. - Morton, A. (1990): Bond pricing and the term structure of interest rates: A discrete time approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *25*(4), 419–440.

Ho, T. S. - Lee, S.-B. (1986): Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, 1011–1029.

Hull, J. - White, A. (1990): Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*, *3*(4), 573–592.

Hyndman, R. J. (2015): *forecast: Forecasting functions for time series and linear models*. Retrieved from http://github.com/robjhyndman/forecast

Leek, J. (2013, October 14): A general audience friendly explanation for why Lars Peter Hansen won the Nobel Prize | Simply Statistics. Retrieved from http://simplystatistics.org/2013/10/14/why-did-lars-peter-hansen-win-the-nobel-prize-generalized-method-of-moments-explained/

Longstaff, F. A. - Schwartz, E. S. (1992a):. A two-factor interest rate model and contingent claims valuation. *The Journal of Fixed Income*, *2*(3), 16–23.

Longstaff, F. A. - Schwartz, E. S. (1992b):. Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. *The Journal of Finance*, *47*(4), 1259–1282. http://doi.org/10.2307/2328939

Longstaff, F. A. - Schwartz, E. S. (1993): Implementation of the Longstaff-Schwartz interest rate model. *The Journal of Fixed Income*, *3*(2), 7–14.

McCulloch, J. H. (1971): Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Business*, 19–31.

Medvegyev, P. - Száz, J. (2010): *A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon*. Budapest: Nemzetközi Bankárképő Központ Zrt.

Merton, R. C. (1971): Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, *3*(4), 373–413.

Nelson, C. R. - Siegel, A. F. (1987): Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 473–489.

Plotly Technologies Inc. (2015): Collaborative data science. Retrieved from https://plot.ly

Price, K. V. - Storn, R. M. - Lampinen, J. A. (2006): *Differential Evolution - A Practical Approach to Global Optimization*. Springer-Verlag.

R Core Team. (2015): *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Retrieved from https://www.R-project.org/

Storn, R. - Price, K. (1997): Differential evolution–a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, *11*(4), 341–359.

Tulassay, Z. (2009, August 26): ARCH/GARCH-modellek.

Vasicek, O. (1977): An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, *5*(2), 177–188.

Wickham, H. (2009): *ggplot2: elegant graphics for data analysis*. Springer New York. Retrieved from http://had.co.nz/ggplot2/book

G. Ábrajegyzék

H. Táblázatjegyzék

I. *Mellékletek*

I. számú melléklet

NYILATKOZAT SAJÁT MUNKÁRÓL

Név: Alföldi Boldizsár

E-mail cím: boldizsar.alfoldi@gmail.com NEPTUN kód: U1SZP0

A szakdolgozat címe magyarul:

A Longstaff-Schwartz kamatlábmodell

A szakdolgozat címe angolul:

The Longstaff-Schwartz interest rate model

Szakszeminárium-vezető (vagy konzulens) neve: Dr. Makara Tamás

Én, Alföldi Boldizsár teljes felelősségem tudatában kijelentem, hogy a jelen szakdolgozatban szereplő minden szövegrész, ábra és táblázat – az előírt szabályoknak megfelelően hivatkozott részek kivételével – eredeti és kizárólag a saját munkám eredménye, más dokumentumra vagy közreműködőre nem támaszkodik.

Budapest, 2015. november 30.

hallgató aláírása

TÉMAVEZETŐI NYILATKOZAT

Alulírott, Dr. Makara Tamás konzulens kijelentem, hogy a fent megjelölt hallgató fentiek szerinti szakdolgozata (egyetemi/ mesterképzésben diplomamunkája) **benyújtásra alkalmas és védésre ajánlom.**

Budapest, 2015. november 30.

konzulens aláírása

II. számú melléklet

NYILATKOZAT
A SZAKDOLGOZAT NYILVÁNOSSÁGÁRÓL

Név: Alföldi Boldizsár

Mesterszak, szak neve: Pénzügy mesterszak, Befeketetés-elemző szakirány

Dolgozatom elektronikus változatának (pdf dokumentum, a megtekintés, a mentés és a nyomtatás engedélyezett, szerkesztés nem) nyilvánosságáról az alábbi lehetőségek közül kiválasztott hozzáférési szabályzat szerint rendelkezem.

TELJES NYILVÁNOSSÁGGAL

A könyvtári honlapon keresztül elérhető a Szakdolgozatok/TDK adatbázisban (http://szd.lib.uni-corvinus.hu/), a világháló bármely pontjáról hozzáférhető, fentebb jellemzett pdf dokumentum formájában.

KORLÁTOZOTT NYILVÁNOSSÁGGAL

A könyvtári honlapon keresztül elérhető a Szakdolgozatok/TDK adatbázisban (http://szd.lib.uni-corvinus.hu/), a kizárólag a Budapesti Corvinus Egyetem területéről hozzáférhető, fentebb jellemzett pdf dokumentum formájában.

NEM NYILVÁNOS

A dolgozat a BCE Központi Könyvtárának nyilvántartásában semmilyen formában (bibliográfiai leírás vagy teljes szöveges változat) nem szerepel.

Budapest, 2015. november 30.

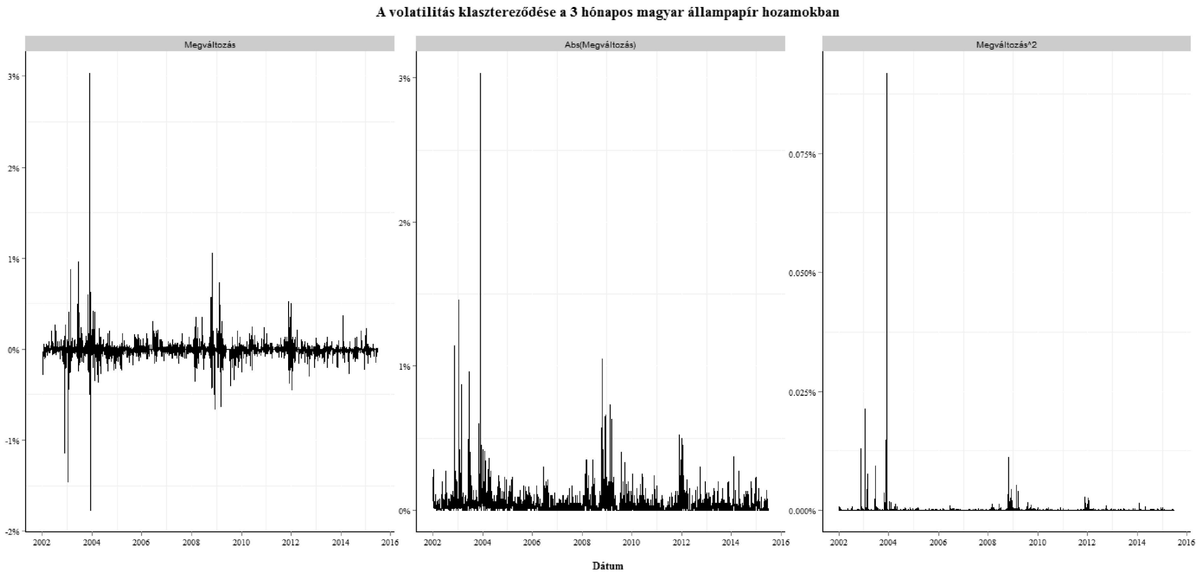
TELJES NYILVÁNOSSÁGGAL

____

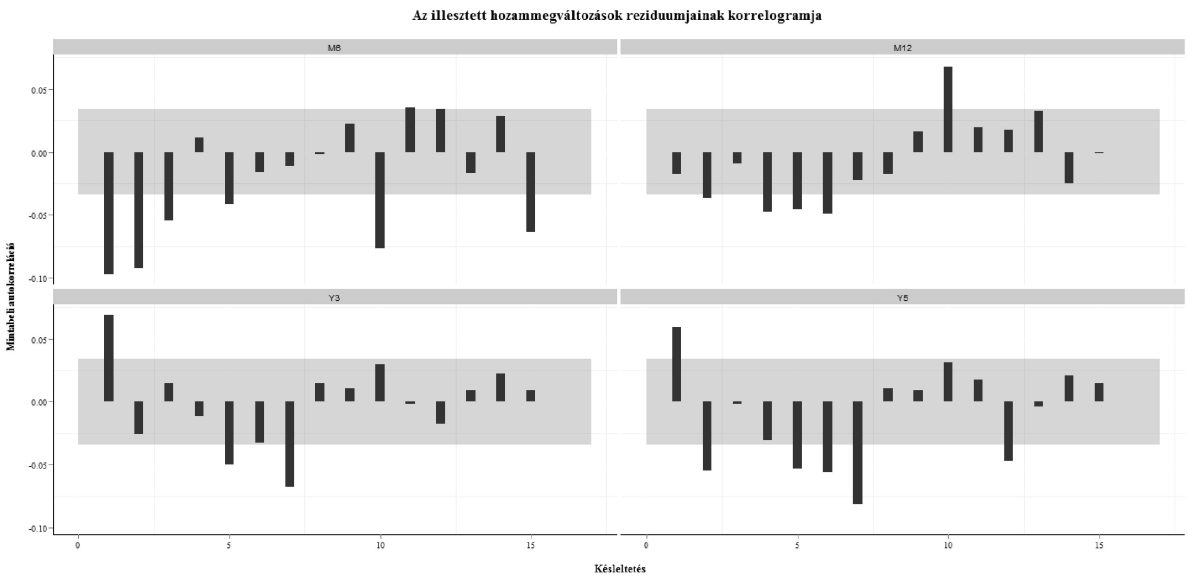
a hallgató (szerző) aláírása

J. *Függelék*

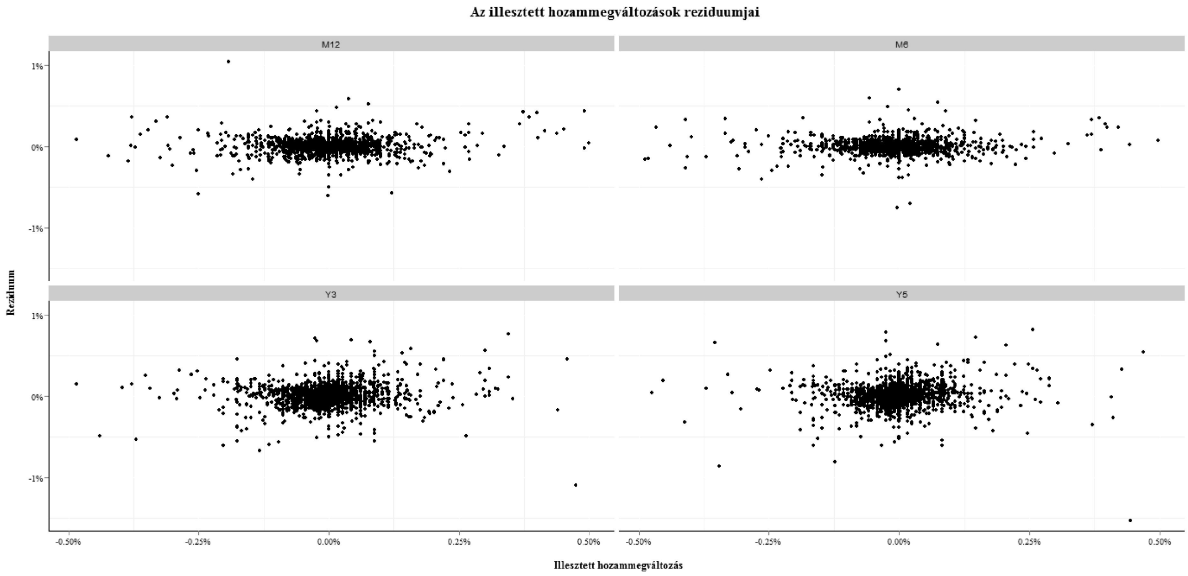
I. További ábrák



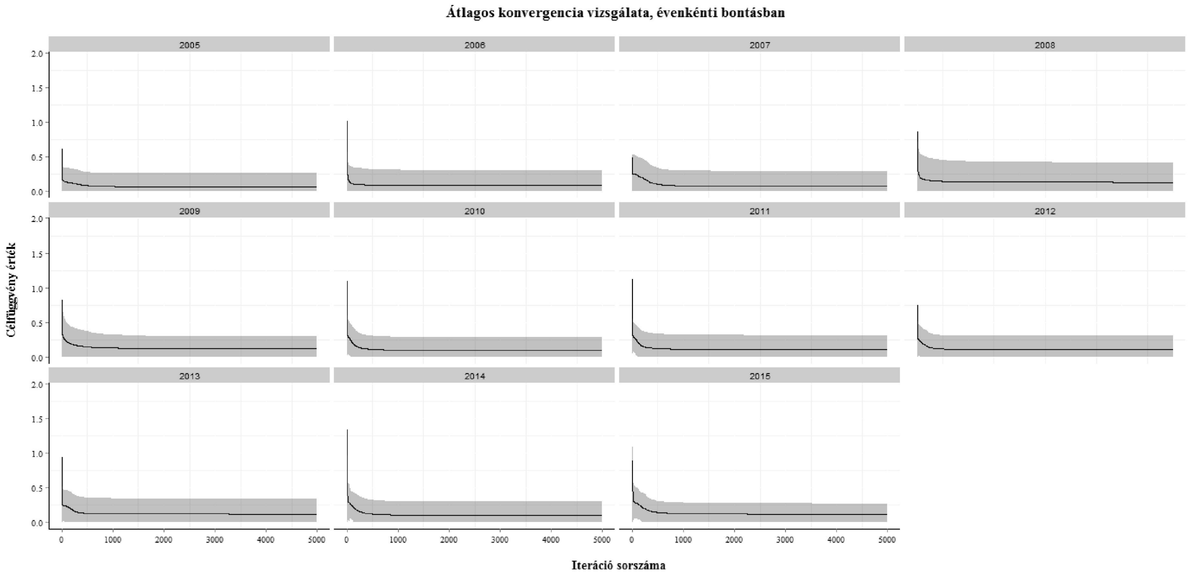
J—1. ábra – A volatilitás klasztereződése az állampapírhozamokban



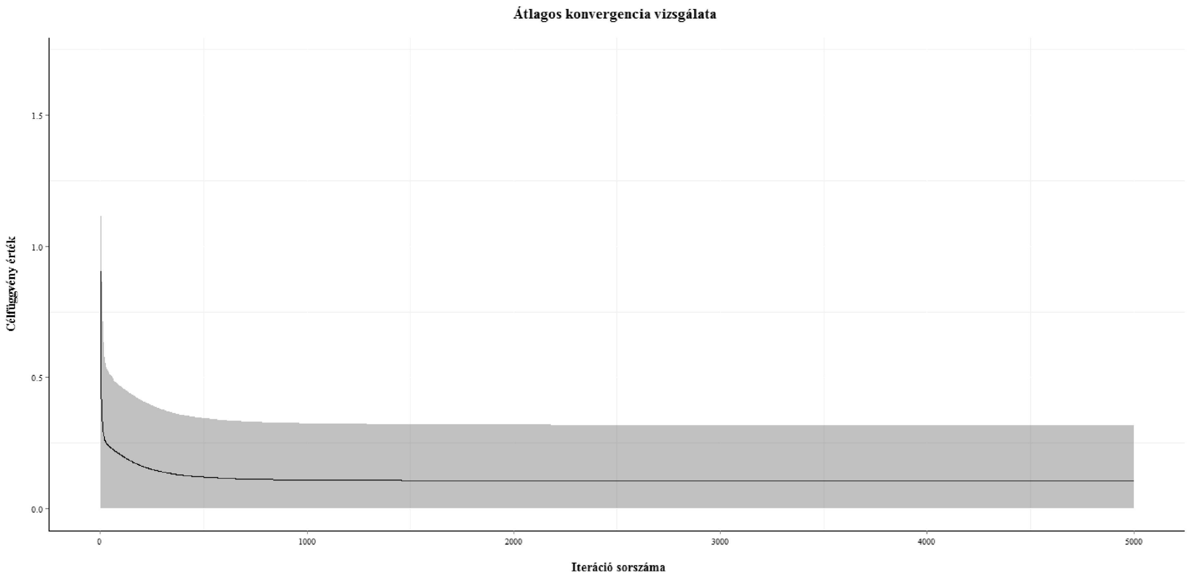
J—2. ábra – Illesztett hozammegváltozások hibatagjainak korrelogramja



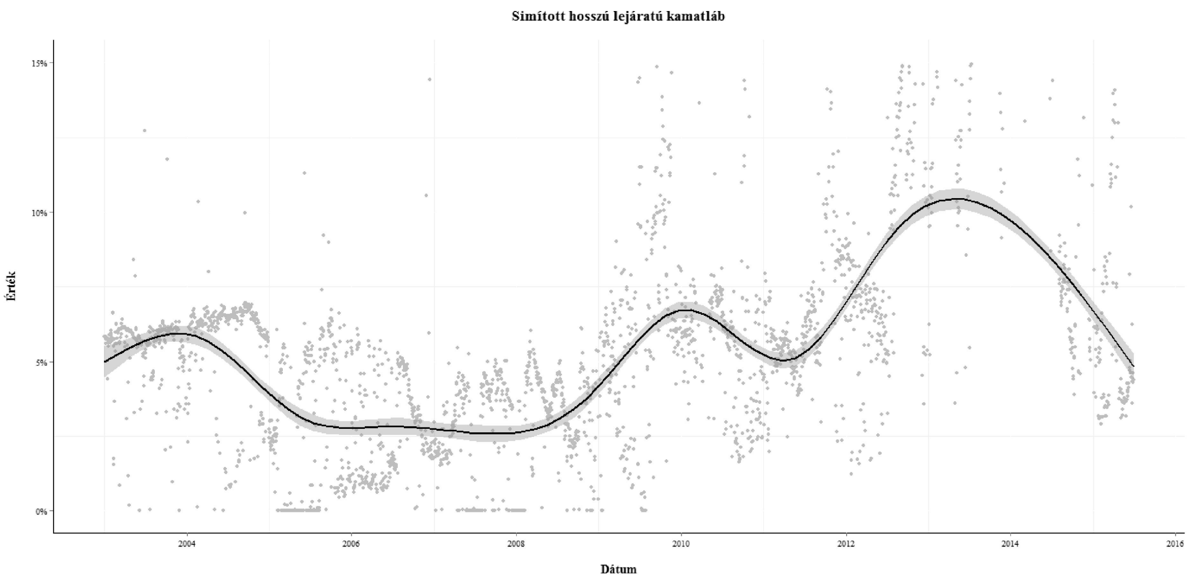
J—3. ábra – Reziduumok az illesztett hozammegváltozás függvényében



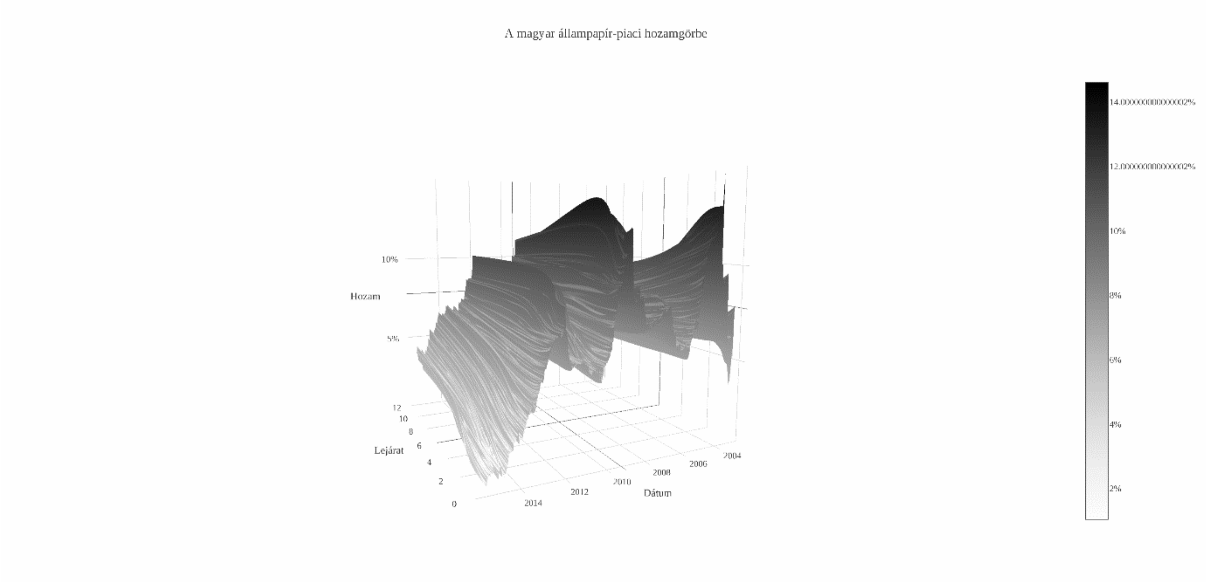
J—4. ábra – Konvergencia menetének és szórásának vizsgálata évenként



J—5. ábra – Konvergencia menetének és szórásának vizsgálata



J—6. ábra – Hosszú lejáratú simított kamatláb



J—7. ábra – A magyar állampapír-piaci hozamgörbe felülete három dimenzióban

Az interaktív háromdimenziós hozamgörbe felület az alábbi linken érhető el: https://plot.ly/~Alfoldib/137/a-magyar-allampapir-piaci-hozamgorbe/

II. További táblázatok

J-1. táblázat – A GARCH modell paraméterei

	Koefficiens	Std. Hiba	t érték	Pr(>|t|)	
μ	-0,00014	0,00004	-3,42838	0,00060	***
δ	-0,00849	0,05174	-0,16411	0,86965	
γ	0,00107	0,00050	2,13907	0,03243	*
ω	0,00000	0,00000	0,01359	0,98916	
α	0,06540	0,00723	9,05174	0,00000	***
β	0,93392	0,00603	154,91543	0,00000	***
φ	0,00000	0,00000	0,06350	0,94937	

J-2. táblázat – Az iteratív becslések során kapott üzenetek

Konvergencia üzenetek	Sikertelen	Hamis	Sikeres
Becslés nem sikerült - Szinguláris kovariancia mátrix	288	0	0
Maximális függvénymeghívás konvergencia nélkül	0	1210	0
Maximális számú iteráció elérése konvergencia nélkül	0	160	0
Hamis konvergencia	0	212	0
Szinguláris konvergencia	0	23	0
X-konvergencia	0	0	29
X- és relatív konvergencia	0	0	3
Relatív konvergencia	0	0	571

J-3. táblázat – Induló populáció meghatározásához felhasznált terjedelmek

Paraméter	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum	Terjedelem
α	0,0373	0,0222	0,0000	0,0699	0,0699
β	1,6034	0,8439	0,1393	2,4431	2,3039
γ	0,0083	0,0215	0,0000	0,1001	0,1001
δ	0,0844	0,1546	0,0000	0,4163	0,4163
η	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
ν	-8,7864	3,8206	-13,0177	-2,2345	10,7832

J-4. táblázat – A hozamok korrelációs mátrixa

	M3	M6	M12	Y3	Y5
M3	1,0000	0,9986	0,9923	0,9435	0,8954
M6	0,9986	1,0000	0,9962	0,9525	0,9060
M12	0,9923	0,9962	1,0000	0,9688	0,9275
Y3	0,9435	0,9525	0,9688	1,0000	0,9865
Y5	0,8954	0,9060	0,9275	0,9865	1,0000

J-5. táblázat – Eltérés kategóriák szerinti megoszlás

Alsó határ	Felső határ	Darabszám	Kumulált darabszám	Hányad	Kumulált hányad
0,00	0,10	44 395	44 395	60,44%	60,44%
0,10	0,25	14 482	58 877	19,72%	80,16%
0,25	0,50	8 047	66 924	10,96%	91,12%
0,50	1,00	3 942	70 866	5,37%	96,48%
1,00	2,50	1 460	72 326	1,99%	98,47%
2,50	5,00	547	72 873	0,74%	99,21%
5,00	10,00	573	73 446	0,78%	99,99%
10,00		4	73 450	0,01%	100,00%
		73 450		100,00%	

III. További egyenletek

Kockázattal korrigált és transzformált állapotváltozók alakulását leíró differenciálegyenletek

$$dr = \left(\alpha\gamma + \beta\eta - \frac{\beta\delta - \alpha\nu}{\beta - \alpha} r - \frac{\nu - \delta}{\beta - \alpha} V\right) dt$$

$$+\alpha \sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}} dZ_2 + \beta \sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}} dZ_3 \qquad \text{-1}$$

$$dV = \left(\alpha^2\gamma + \beta^2\eta - \frac{\alpha\beta(\nu - \delta)}{\beta - \alpha} r - \frac{\beta\nu - \alpha\delta}{\beta - \alpha} V\right) dt$$

$$+\alpha^2 \sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}} dZ_2 + \beta^2 \sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}} dZ_3 \qquad \text{-2}$$

Kockázattal korrigált, eredeti állapotváltozókkal felírt diszkont kötvény képlet (Longstaff - Schwartz, 1992a)

$$F(r, V, \tau) = A^{2\gamma}(\tau) B^{2\eta}(\tau) e^{\kappa\tau + C(\tau)r + D(\tau)V}, \qquad \text{J-3}$$

ahol,

$$A(\tau) = \frac{2\varphi}{(\delta + \varphi)(e^{\varphi\tau} - 1) + 2\varphi}$$

$$B(\tau) = \frac{2\psi}{(\nu + \psi)(e^{\psi\tau} - 1) + 2\psi}$$

$$C(\tau) = (\delta - \varphi)(1 - A(\tau))$$

$$D(\tau) = (\nu - \psi)(1 - B(\tau))$$

$$\nu = \xi + \lambda$$

$$\varphi = \sqrt{2\alpha + \delta^2}$$

$$\psi = \sqrt{2\beta + \nu^2}$$

$$\kappa = \gamma(\delta + \varphi) + \eta(\nu + \psi).$$

A volatilitás lejárati szerkezete a Longstaff-Schwartz kamatlábmodellben (Longstaff - Schwartz, 1992b)

$$\left(\frac{\alpha\beta\psi^2(e^{\varphi\tau}-1)^2A^2(\tau) - \alpha\beta\varphi^2\left(e^{\psi\tau}-1\right)^2B^2(\tau)}{\varphi^2\psi^2(\beta-\alpha)}\right)r + \left(\frac{\beta\varphi^2\left(e^{\psi\tau}-1\right)^2B^2(\tau) - \alpha\psi^2(e^{\varphi\tau}-1)^2A^2(\tau)}{\varphi^2\psi^2(\beta-\alpha)}\right)V \qquad \text{J-4}$$

Az azonnali várható hozamképlete különböző lejáratokra (Longstaff - Schwartz, 1992b)

$$r + \lambda\frac{\left(e^{\psi\tau}-1\right)B(\tau)}{\psi(\beta-\alpha)}(\alpha r - V). \qquad \text{J-5}$$