

## Gravitación

[Método, aproximaciones y recomendaciones](#)

### ● Satélites

- El Sentinel-1 es un satélite artificial de órbita circular polar de la Agencia Espacial Europea dentro del Programa Copérnico destinado a la monitorización terrestre y de los océanos. Está situado a 693 km sobre la superficie terrestre. Si su masa es de 200 kg:
  - Las velocidades lineal y angular del satélite en la órbita.
  - El período de la órbita del satélite. ¿Cuántas vueltas da a la Tierra cada día?
  - La masa de la Tierra.
  - El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
  - Las energías cinética, potencial y mecánica del satélite.
  - La energía mínima adicional que habría que comunicarle para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra y la velocidad de escape a la atracción terrestre a esa altura.
  - ¿Qué velocidad hubo que proporcionarle en el lanzamiento para ponerlo en órbita?
  - La velocidad de escape desde el suelo.
  - El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.
  - La fuerza con que la Tierra atrae al satélite.

Datos:  $R = 6,37 \cdot 10^6$  m;  $g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup>

*Problema con datos de A.B.A.U. extr. 23*

**Rta.:** a)  $v = 7,51$  km/s;  $\omega = 1,06 \cdot 10^{-3}$  rad/s; b)  $T = 1$  h 39 min,  $f = 14,6$  día<sup>-1</sup>; c) Faltan datos;  
 d)  $|\vec{L}_O| = 1,06 \cdot 10^{13}$  kg·m<sup>2</sup>/s; e)  $E_c = 5,64 \cdot 10^9$  J;  $E_p = -1,13 \cdot 10^{10}$  J;  $E = -5,64 \cdot 10^9$  J;  
 f)  $\Delta E = -E = 5,64 \cdot 10^9$  J;  $v_{eo} = 7,51$  km/s; f)  $v_s = 8,3$  km/s; g)  $g_h/g_0 = 0,824$ ; h)  $v_{es} = 11,2$  km/s;  
 i)  $g = 0,81$   $g_0$ ; j)  $F = 1,6 \cdot 10^3$  N

#### **Datos**

Masa del satélite

Altura de la órbita

Radio de la Tierra

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

#### **Incógnitas**

Valor de las velocidades lineal y angular del satélite

Período y frecuencia orbital del satélite

Módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Energía cinética, potencial y mecánica del satélite en órbita

Energía para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra

Velocidad de escape desde esa altura

Velocidad desde la superficie para ponerlo en órbita

Cociente entre los valores de  $g$  en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Fuerza con que la Tierra atrae al satélite

#### **Otros símbolos**

Masa de la Tierra

Constante de la gravitación universal

#### **Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

Velocidad de un satélite a una distancia  $r$  del centro de un astro de masa  $M$

Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$

Velocidad angular en un movimiento circular uniforme de período  $T$

Energía cinética

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

#### **Cifras significativas: 3**

$m = 200$  kg

$h = 693$  km =  $6,93 \cdot 10^5$  m

$R = 6,37 \cdot 10^6$  m

$g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup>

$v, \omega$

$T, f$

$|\vec{L}_O|$

$E_c, E_p, E$

$E_\infty$

$v_e$

$v_s$

$g_h/g_0$

$F$

$M$

$G$

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

**Ecuaciones**

Energía mecánica

$$E = E_c + E_p$$

Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia  $r$  del centro

$$g = \frac{F_G}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

Momento angular  $\vec{L}_O$  de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  a una distancia  $\vec{r}$  de un punto O que se toma como origen

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

**Solución:**

a) El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular de radio

$$r = R + h = 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6,93 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7,06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$m g_0 = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se calcula la velocidad orbital sustituyendo en la ecuación  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$ .

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 7,51 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7,51 \text{ km/s}$$

*Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

La velocidad angular podría calcularse conociendo el período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

b) El período se calcula con la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{7,51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 5,91 \cdot 10^3 \text{ s} = 1,64 \text{ h}$$

Ahora ya se puede calcular la velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \text{ [rad]}}{5,91 \cdot 10^3 \text{ [s]}} = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

La frecuencia es la inversa al período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,64 \text{ [h]}} \cdot \frac{24,0 \text{ [h]}}{1 \text{ [día]}} = 14,6 \text{ día}^{-1}$$

*Análisis: Los períodos de los satélites terrestres en órbita baja son del orden de hora y media, parecido al resultado.*

c) No se puede calcular la masa de la Tierra si no se tiene como dato el valor de la constante de la gravitación universal.

En ese caso se usaría la expresión « $G \cdot M = g_0 \cdot R^2$ » que se obtuvo antes:

$$M = \frac{g_0 \cdot R^2}{G} = \frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}\text{]}} = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

d) El momento angular  $\vec{L}_O$  de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es:

$$|\vec{L}_O| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha = 7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]} \cdot 200 \text{ [kg]} \cdot 7,51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]} \cdot \sin 90^\circ = 1,06 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

e) La energía potencial en la órbita vale:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 200 \text{ [kg]}}{7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = -1,13 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La energía cinética vale:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = [200 \text{ [kg]} (7,51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2] / 2 = 5,64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = 5,64 \cdot 10^9 \text{ [J]} + (-1,13 \cdot 10^{10} \text{ [J]}) = -5,64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

*Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo  $G \cdot M / r$  por  $v^2$  en la expresión de la energía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

f) La energía mínima adicional que habría que comunicarle para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra sería la diferencia entre la energía a una distancia muy grande y la que tiene en la órbita:

$$\Delta E = E_\infty - E$$

Al ser la energía mínima, se toma que el objeto llega al infinito con velocidad nula. Como el origen de energía potencial gravitatoria está en el infinito, la energía potencial gravitatoria de un objeto en el infinito es nula.

$$E_\infty = 0$$

$$\Delta E = -E = 5,64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía necesaria sería:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e_o} = \sqrt{2G \frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la velocidad del satélite en la órbita, esta es la velocidad perpendicular que hay que suministrarle.

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.

Si el sentido de la velocidad de escape fuese el mismo que el del movimiento del satélite, habrá que proporcionarle una velocidad adicional igual a la diferencia entre la velocidad de escape y la que ya tiene.

$$v_e = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81 \text{ [m/s}^2] \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 7,51 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 7,51 \text{ km/s}$$

*Análisis: La velocidad de escape en la superficie de la Tierra es de 11,2 km/s. El resultado está de acuerdo con este dato teniendo en cuenta que al estar el satélite lejos de la superficie, su velocidad de escape será menor.*

g) La velocidad que hubo que proporcionarle en el lanzamiento para ponerlo en órbita, se puede calcular suponiendo que, una vez comunicada esa velocidad, la energía se conserva hasta la órbita.

Teniendo en cuenta que la energía potencial en la superficie de la Tierra vale:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R} = g_0 \cdot R \cdot m = -9,81 \text{ [m/s}^2] \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} \cdot 200 \text{ [kg]} = -1,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La energía cinética del satélite cuando tiene la velocidad necesaria valdrá:

$$E_{cs} = E - E_{ps} = -5,64 \cdot 10^9 \text{ [J]} - (-1,25 \cdot 10^{10} \text{ [J]}) = 6,9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

*Análisis: [Se pierde una cifra significativa al restar.](#)*

Su velocidad será:

$$v_s = \sqrt{\frac{2 E_{cs}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,9 \cdot 10^9 \text{ [J]}}{200 \text{ [kg]}}} = 8,3 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 8,3 \text{ km/s}$$

*Análisis: La velocidad tiene que ser menor que la velocidad de escape desde el suelo, que es de 11,2 km/s. El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

h) La velocidad de escape desde el suelo.

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a

una distancia infinita del centro del astro.

La velocidad de escape le proporcionaría la energía,  $\Delta E$ , necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.

La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa  $m$  situado en la superficie de un astro de masa  $M$  y radio  $R$  es:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula.

La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape  $v_e$  le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s \\ \frac{1}{2} m v_e^2 &= 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = G \frac{M \cdot m}{R} \end{aligned}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}}$$

(La velocidad de un punto del suelo, en el ecuador, respecto al centro de la Tierra sería:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{24 \text{ [h]}} \frac{1 \text{ [h]}}{3600 \text{ [s]}} = 463 \text{ m/s}$$

En un punto situado a una latitud  $\lambda$ , el radio (distancia al eje de la Tierra) sería  $r = R \cos \lambda$ , y la velocidad,  $v = 463 \cos \lambda$ .

Si se lanzase en dirección paralela al suelo, la velocidad de escape dependería del sentido lanzamiento. Habría que restarle, hacia el este, o sumarle, hacia el oeste, la velocidad de rotación del punto de lanzamiento). Suponiendo que se lanza verticalmente, y sustituyendo  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$ :

$$v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{2 g_0 \cdot R^2}{R}} = \sqrt{2 g_0 \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$$

i) La intensidad del campo gravitatorio en un punto que dista  $r$  del centro de la Tierra es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m} / r^2}{\cancel{m}} = G \frac{M}{r^2}$$

La gravedad a una altura  $h$  vale:

$$g_h = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

En la superficie de la Tierra vale:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

Dividiendo la primera entre la segunda queda:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{M} / (R+h)^2}{\cancel{G} \cdot \cancel{M} / R^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{(6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{(7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2} = 0,814$$

*Análisis: El valor de la aceleración de la gravedad disminuye con la altura. El resultado está de acuerdo con esto.*

j) La fuerza con que la Tierra atrae al satélite vale:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot m = g_0 \cdot 0,824 \cdot m = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot 0,84 \cdot 200 \text{ [kg]} = 1,60 \cdot 10^3 \text{ N}$$

También puede calcularse sin tener en cuenta el apartado anterior.

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = \frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 200 \text{ [kg]}}{(7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2} = 1,60 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Las respuestas y su cálculo pueden verse con la hoja de cálculo [Satélites \(es\)](#). Escribiendo los datos en las celdas de color blanco y borde azul, y haciendo clic y eligiendo las magnitudes y unidades en las celdas de color salmón:

Enunciado		Datos:	
Un satélite de masa		$m =$	200 kg
gira alrededor de un astro de masa		$M =$	kg
y radio		$R =$	$6,37 \cdot 10^6$ m
en el que la gravedad en el suelo es		$g_0 =$	9,81 m/s <sup>2</sup>
La órbita es circular de	altura	$h =$	693 km

**Calcula:**

- El período de la órbita del satélite y su velocidad
- El peso del satélite en la órbita
- Las energías cinética, potencial y mecánica del satélite.

Pueden verse los siguientes resultados, eligiendo en las celdas de color salmón las opciones «km/s» para la velocidad de la órbita, «Período» y «s» para sus unidades, «Energía en la órbita», «Velocidad» en el suelo para «ponerlo en órbita» y «Momento angular» en la órbita.

Respuestas		Cifras significativas:	
	Radio	Velocidad	Período
a) y b) Órbita	$7,06 \cdot 10^6$ m	7,51 km/s	$5,90 \cdot 10^3$ s
	cinética	potencial	mecánica
e) Energía en la órbita	$5,64 \cdot 10^9$ J	$-1,13 \cdot 10^{10}$ J	$-5,64 \cdot 10^9$ J
c) Tierra		$M =$	$5,96 \cdot 10^{24}$ kg
g) Velocidad en el suelo para		ponerlo en órbita	8,28 km/s
d) Momento angular en la órbita			$1,06 \cdot 10^{13}$ kg·m <sup>2</sup> /s

Otros resultados pueden verse en esta pestaña, modificando la elección en las celdas de color salmón.

b) Frecuencia. Cambiar «Período» por «Frecuencia» y elegir la unidad «día<sup>-1</sup>»

Órbita		clic ↓	Velocidad	clic ↓	Frecuencia
					14,6 día <sup>-1</sup>

c) Aparece el resultado de la masa de la Tierra, porque la hoja contiene el dato de la constante  $G$ .

h) La velocidad de escape desde el suelo. Cambiar «ponerlo en órbita» por «mandarlo al infinito».

Velocidad en el suelo para	mandarlo al infinito	$1,12 \cdot 10^4$ m/s
----------------------------	----------------------	-----------------------

i) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra. Cambiar «Momento angular» por «Gravedad relativa».

Gravedad relativa en la órbita **0,813 g<sub>0</sub>**

j) La fuerza con que la Tierra atrae al satélite. Cambiar «Gravedad relativa» por «Fuerza gravitatoria».

Fuerza gravitatoria en la órbita **1,60·10<sup>3</sup> N**

Los cálculos pueden verse en las pestañas «Periodo», «Peso» y «Energía».

a) Las velocidades lineal y angular del satélite en la órbita. Pestaña «Periodo»

Velocidad del satélite	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$	$v = \sqrt{\frac{3,99 \cdot 10^{14}}{7,06 \cdot 10^6}} = 7,52 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
Velocidad angular del satélite	$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$	$\omega = \frac{2 \cdot 3,14}{5,91 \cdot 10^3} = 0,00106 \text{ rad/s}$

b) El período de la órbita del satélite. ¿Cuántas vueltas da a la Tierra cada día? Pestaña «Periodo»

Período del satélite	$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$	$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,06 \cdot 10^6}{7,52 \cdot 10^3} = 5,90 \cdot 10^3 \text{ s}$
Frecuencia del satélite	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{86\,400 \text{ s} \cdot \text{día}^{-1}}{5,91 \cdot 10^3 \text{ s}} = 14,6 \text{ día}^{-1}$

d) El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. Pestaña «Energía»

Momento angular	$L_o = r \cdot m \cdot v$	$L_o = 7,06 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 7,51 \cdot 10^3 = 1,06 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
-----------------	---------------------------	---

f) La energía mínima adicional que habría que comunicarle para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra y la velocidad de escape a la atracción terrestre a esa altura. Pestaña «Energía».

No presenta el resultado de la energía mínima, pero es la diferencia entre la energía en el infinito, 0, y la energía mecánica en la órbita.

Velocidad de escape en la órbita	$v_e = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$	$v_e = \sqrt{\frac{3,98 \cdot 10^{14}}{7,06 \cdot 10^6}} = 7,51 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
----------------------------------	------------------------------------	---

h) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra. En la pestaña «Enunciado» debe aparecer como última opción «Gravedad relativa».

Gravedad relativa en la órbita **0,813 g<sub>0</sub>**

En la pestaña «Peso» puede verse:

Gravedad en la altura	$g = \frac{G \cdot M}{r^2}$	$g = \frac{3,99 \cdot 10^{14}}{(7,06 \cdot 10^6)^2} = 7,98 \text{ m/s}^2$
Gravedad relativa	$\frac{g}{g_0}$	$= \frac{8,00}{9,81} = 0,813$

2. La luz del Sol tarda  $5 \cdot 10^2 \text{ s}$  en llegar a la Tierra y  $2,6 \cdot 10^3 \text{ s}$  en llegar a Júpiter. Calcula:

a) El período de Júpiter girando alrededor del Sol.

b) La velocidad orbital de Júpiter.

c) La masa del Sol.

Datos:  $T$  (Tierra) alrededor del Sol:  $3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . (Se suponen las órbitas circulares)

(P.A.U. Sep. 12)

**Rta.:** a)  $T = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}$ ;  $v = 1,31 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ ; b)  $M = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

### Datos

Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra

Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Júpiter

### Cifras significativas: 3

$t_1 = 5,00 \cdot 10^2 \text{ s} = 500 \text{ s}$

$t_2 = 2,60 \cdot 10^3 \text{ s}$

**Datos**

Período orbital de la Tierra alrededor del Sol

Velocidad de la luz en el vacío

Constante de la gravitación universal

**Incógnitas**

Período orbital de Júpiter

Velocidad orbital de Júpiter

Masa del Sol

**Otros símbolos**

Masa de Júpiter o la Tierra

Distancia de un planeta al Sol

**Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$ Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$ **Cifras significativas: 3**

$$T_1 = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$T_2$$

$$v$$

$$M$$

$$m$$

$$r$$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

**Solución:**

Se calculan las distancias de la Tierra al Sol y de Júpiter al Sol, teniendo en cuenta la velocidad de la luz.

$$\text{Tierra: } r_1 = c \cdot t_1 = 3,00 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \cdot 5,00 \cdot 10^2 \text{ [s]} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$\text{Júpiter: } r_2 = c \cdot t_2 = 3,00 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \cdot 2,60 \cdot 10^3 \text{ [s]} = 7,80 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Se resuelve primero el último apartado.

c) La masa del Sol puede calcularse de la expresión de la velocidad de un satélite que gira a una distancia  $r$  alrededor del centro de un astro de masa  $M$ .La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$



$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad de la Tierra alrededor del Sol se calcula a partir de su período orbital:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{3,15 \cdot 10^7 [\text{s}]} = 2,99 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Se despeja la masa del Sol de la velocidad orbital de la Tierra como satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \Rightarrow M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(2,99 \cdot 10^4 [\text{m/s}])^2 \cdot 1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]} = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

b) Se emplea la ecuación anterior para calcular la velocidad de Júpiter:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 2,01 \cdot 10^{30} [\text{kg}]}{7,80 \cdot 10^{11} [\text{m}]} = 1,31 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 13,1 \text{ km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi \cdot r_2}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,80 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{1,31 \cdot 10^4 [\text{m/s}]} = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

*Análisis: La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los radiovectores que unen al Sol con los planetas. A mayor distancia al Sol, mayor período. Este método, daría:*

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = 3,15 \cdot 10^7 [\text{s}] \cdot \sqrt{\frac{(7,8 \cdot 10^{11} [\text{m}])^3}{(1,5 \cdot 10^{11} [\text{m}])^3}} = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s} .$$

Las respuestas y su cálculo pueden verse con la hoja de cálculo [Satélites \(es\)](#). Escribiendo los datos en las celdas de color blanco y borde azul, y haciendo clic y eligiendo las magnitudes y unidades en las celdas de color salmón:

Se calcula primero la masa del Sol escribiendo los datos de la Tierra.

**Introducción de datos.** (Pestaña: «Enunciado»)

Un satélite de masa		$m =$	<input type="text"/>	kg
gira alrededor de un astro de masa		$M =$	<input type="text"/>	kg
y radio		$R =$	<input type="text"/>	
en el que la gravedad en el suelo es		$g_o =$	<input type="text"/>	m/s <sup>2</sup>
La órbita es circular de	radio	$r =$	5,00E+02	s luz
El satélite gira con un	período	$T =$	3,15E+07	s

El resultado se encuentra debajo, en la región de «**Respuestas**».

<b>Respuestas</b>	Cifras significativas:	<input type="text" value="3"/>
Sol	$M =$	<b>2,01·10<sup>30</sup> kg</b>

**Cálculo de la masa del Sol.** (Pestaña: «Periodo»)

Masa del astro	$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$	$M = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot (1,50 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3,15 \cdot 10^7)^2} =$	<b>2,01·10<sup>30</sup> kg</b>
----------------	---	---	--------------------------------

Se escriben ahora la masa del Sol y los datos de Júpiter:

**Introducción de datos.** (Pestaña: «Enunciado»)

Un satélite de masa	$m =$		kg
gira alrededor de un astro de masa	$M =$	2,01E+30	kg
y radio	$R =$		
			m/s <sup>2</sup>
La órbita es circular de	radio	$r =$	2,60E+03 s luz
El satélite gira con una			

Respuestas	<span style="color: red;">clic ↓</span>	Cifras significativas:
	<span style="color: red;">clic ↓</span>	Velocidad
Órbita		13,1 km/s
		Período
		11,8 años

**Cálculo del período y de la velocidad.** (Pestaña: «Periodo»)

Radio de la órbita	$r = 2,60 \cdot 10^3 \cdot 3,00 \cdot 10^8 = 7,79 \cdot 10^{11} \text{ m}$
	$G \cdot M = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,01 \cdot 10^{30} = 1,34 \cdot 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Velocidad del satélite	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{1,34 \cdot 10^{20}}{7,79 \cdot 10^{11}}} = 1,31 \cdot 10^4 \text{ m/s}$
Período del satélite	$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,79 \cdot 10^{11}}{1,31 \cdot 10^4} = 3,73 \cdot 10^8 \text{ s}$

3. Un satélite GPS describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, dando dos vueltas a la Tierra cada 24 h. Calcula:

- La altura de su órbita sobre la superficie terrestre.
  - La energía mecánica.
  - El tiempo que tardaría en dar una vuelta a la Tierra si lo hacemos orbitar a una altura doble.
- Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ; masa del satélite = 150 kg.

(A.B.A.U. extr. 17)

**Rta.:** a)  $h = 2,03 \cdot 10^7 \text{ m}$ ; b)  $E = -1,12 \cdot 10^9 \text{ J}$ ; c)  $T_c = 28 \text{ h}$ .

#### Datos

Frecuencia de la órbita

Radio de la Tierra

Masa del satélite

Masa de la Tierra

Constante de la gravitación universal

#### Incógnitas

Altura de la órbita

Energía mecánica

El período, si la altura fuera el doble

#### Otros símbolos

Radio de la órbita original

Valor de la velocidad del satélite en la órbita original

Nuevo radio de la órbita

#### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

#### Cifras significativas: 3

$f = 2 \text{ vueltas}/24 \text{ h}$

$R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$m = 150 \text{ kg}$

$M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$h$

$E$

$T_c$

$r$

$v$

$r_c$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

**Ecuaciones**

2.ª ley de Newton de la Dinámica

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$ 

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$ 

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$ 

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Energía mecánica

$$E = E_c + E_p$$

**Solución:**

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Se despeja el radio de la órbita,  $r$ , y se sustituyen valores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

La frecuencia es la inversa del período. El período orbital se calcula a partir de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{24 \text{ h}}{2} = 12 \text{ h} = 4,32 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Se calcula el radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] (4,32 \cdot 10^4 [\text{s}])^2}{4 \cdot 3,14^2}} = 2,66 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra al radio de la órbita:

$$h = r - R = 2,66 \cdot 10^7 - 6,37 \cdot 10^6 = 2,02 \cdot 10^7 \text{ m}$$

*Análisis: Aunque no se puede prever un valor, la altura obtenida es positiva.*

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 150 [\text{kg}]}{2,66 \cdot 10^7 [\text{m}]} = -2,25 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética sustituyendo  $v^2$  por  $GM/r$ :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} = 1,12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.

La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_c + E_p = 1,12 \cdot 10^9 [\text{J}] - 2,25 \cdot 10^9 [\text{J}] = -1,12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c) Si la altura fuera el doble, el nuevo radio de la órbita valdría:

$$r_c = R + 2h = 6,37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2,0 \cdot 10^7 = 4,7 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La velocidad del satélite valdría:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}]}{4,7 \cdot 10^7 [\text{m}]}} = 2,9 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 2,9 \text{ km/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 4,7 \cdot 10^7 [\text{m}]}{2,9 \cdot 10^3 [\text{m/s}]} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ s} = 28 \text{ h}$$

*Análisis: El período de un satélite aumenta con la altura. El valor obtenido es mayor que el de la altura inicial.*

Las respuestas y su cálculo pueden verse con la hoja de cálculo [Satélites \(es\)](#). Escribiendo los datos en las celdas de color blanco y borde azul, y haciendo clic y eligiendo las magnitudes y unidades en las celdas de color salmón:

**Enunciado**

Un satélite de masa

**Datos:**  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

$m =$    $\text{kg}$

gira alrededor de un astro de masa  
y radio

$$M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

El satélite gira con una

frecuencia

$$f = 2 \text{ día}^{-1}$$

**Calcula:**

- El radio/la altura de la órbita.
- El peso del satélite en la órbita.
- Las energías cinética, potencial y mecánica del satélite.

Pueden verse los siguientes resultados:

**Respuestas**

Cifras significativas: 3

	Altura	Velocidad	
Órbita	2,03·10 <sup>7</sup> m	<a href="#">clíc ↓</a>	
	cinética	potencial	mecánica
Energía en la órbita	1,12·10 <sup>9</sup> J	-2,25·10 <sup>9</sup> J	-1,12·10 <sup>9</sup> J

Para el apartado c) hay que borrar la opción «frecuencia», su valor y unidades y elegir encima de ella la opción «altura», escribir en la celda blanca de borde azul «=2\*2,03E7» (sin las comillas pero con el signo =, o calcularlo a mano y escribir el resultado en cualquiera de las formas: 4,06E7 o 4,06·10<sup>7</sup>) y elegir la unidad «m».

La órbita es circular de altura  $h = 40\,600\,000 \text{ m}$

En «Respuestas», elegir «Período» debajo de «Cifras significativas:» y elegir «h» como unidad.

**Respuestas**

Cifras significativas: 3

	Altura	Velocidad	Período
Órbita	4,06·10 <sup>7</sup> m	<a href="#">clíc ↓</a>	28,1 h

## ● Campo gravitatorio

- Una nave sitúa un objeto de 20 kg de masa entre la Tierra y el Sol en un punto donde la fuerza gravitatoria neta sobre el objeto es nula. Calcula en ese punto:

a) La distancia del objeto al centro de la Tierra.

b) La aceleración de la Tierra debida a la fuerza que el objeto ejerce sobre ella.

DATOS:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $M(T) = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ;  $M(S) = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$ ;

distancia Tierra-Sol =  $1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ .

(A.B.A.U. ord. 24)

**Rta.:** a)  $r = 2,59 \cdot 10^8 \text{ m}$ ; b)  $a = 1,99 \cdot 10^{-26} \text{ m/s}^2$ .

**Datos**

Masa de la Tierra

Masa del Sol

Masa del objeto

Distancia Tierra-Sol

Constante de la gravitación universal

**Cifras significativas: 3**

$$M(T) = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M(S) = 2,00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$m = 20,0 \text{ kg}$$

$$d = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

**Incógnitas**

Distancia del objeto al centro de la Tierra.

$r$

Aceleración de la Tierra debida a la fuerza que el objeto ejerce sobre ella

$la$

**Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal.  
(Fuerza entre cuerpos esféricos o puntuales)

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

2.ª ley de Newton de la Dinámica

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

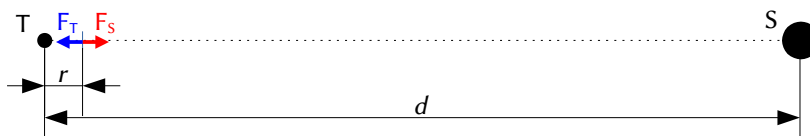
**Solución:**

a) La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales o esféricas,  $M$  y  $m$ , viene dada por la ley de la gravitación de Newton.  $G$  es la constante de la gravitación universal y  $\vec{u}_r$  el vector unitario en la línea que une las masas.

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Se escribe la ecuación de la fuerza gravitatoria sobre el objeto, que es nula;

$$-G \frac{M(S) \cdot m}{(d-r)^2} \vec{u}_{rS} + \left( -G \frac{M(T) \cdot m}{r^2} \vec{u}_{rT} \right) = \vec{0}$$



Se elige un sistema de coordenadas con la Tierra en el origen, porque el punto donde se anula la fuerza tiene que estar mucho más cerca de la Tierra que del Sol, que tiene una masa mucho mayor. El Sol se sitúa en un punto del sentido positivo del eje X.

El vector unitario de la posición del Sol en este sistema  $\vec{u}_{rS}$  es el vector  $\vec{i}$ , unitario del eje X en sentido positivo. El vector unitario de la Tierra  $\vec{u}_{rT}$ , tomando el Sol como origen, es el vector unitario contrario  $-\vec{i}$ .

Se sustituyen los vectores unitarios en la ecuación y se reordena:

$$\begin{aligned} -G \frac{M(S) \cdot m}{(d-r)^2} \vec{i} + \left( -G \frac{M(T) \cdot m}{r^2} (-\vec{i}) \right) &= 0 \vec{i} \\ -G \frac{M(S) \cdot m}{(d-r)^2} + G \frac{M(T) \cdot m}{r^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{M(S)}{(d-r)^2} = \frac{M(T)}{r^2} \Rightarrow (d-r)^2 = \frac{M(S)}{M(T)} r^2 \Rightarrow d-r = \sqrt{\frac{M(S)}{M(T)}} r \Rightarrow d = r \left( 1 + \sqrt{\frac{M(S)}{M(T)}} \right)$$

Se despeja  $r$  y se sustituyen los valores:

$$r = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{M(S)}{M(T)}}} = \frac{1,50 \cdot 10^{11} \text{ [m]}}{1 + \sqrt{\frac{2,00 \cdot 10^{30} \text{ [kg]}}{5,98 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}}}} = 2,59 \cdot 10^8 \text{ m}$$

**Análisis:** La distancia obtenida es mucho menor que la que hay entre el Sol y la Tierra y el punto se sitúa cerca de la Tierra.

b) Se aplica a 2.ª ley de Newton de la Dinámica en módulos y se despeja la aceleración que produce la masa de 20 kg sobre el planeta Tierra:

$$a = \frac{F}{M(T)} = \frac{G \frac{m \cdot M(T)}{r^2}}{M(T)} = G \frac{m}{r^2} = 6,667 \cdot 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{20 \text{ [kg]}}{(2,59 \cdot 10^8 \text{ [m]})^2} = 1,99 \cdot 10^{-26} \text{ m/s}^2$$

Una de las respuestas puede verse con la hoja de cálculo [FisicaBachEs.ods](#), en la pestaña Equil2QoM.

Escribiendo los datos en las celdas de color blanco y borde azul, y haciendo clic y eligiendo las magnitudes y unidades en las celdas de color salmón.

Constante		$G =$	$6,67 \cdot 10^{-11}$	$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	
Masa	kg		$x$		$y$
$5,98 \times 10^{24}$	M		0		0 m
$2,00 \times 10^{30}$	N		$1,50 \times 10^{11}$		0
Equilibrio en	A				
M móvil	Punto				
20					
En el punto	A		Potencial (J/kg)		Campo (N/kg) $u$
					0 $i$

Puede verse el siguiente resultado, si ha dejado 3 como número de cifras significativas:

	$x$	$y$
Posición del punto A:	$2,59 \cdot 10^8$	0 m

La aceleración no la calcula la hoja. Para obtenerla debe escribir en OTROS CÁLCULOS la fórmula:

$=\text{NUMFORMA}(\text{AVALOR}(\text{I2}) \cdot \text{F10} / (\text{AVALOR}(\text{I6}) - \text{AVALOR}(\text{J17}))^2 + (\text{AVALOR}(\text{K6}) - \text{AVALOR}(\text{K17}))^2)$

que corresponde a:  $G \cdot m / ((x(M) - x(A))^2 + (y(M) - y(A))^2)$

Tiene que haber seleccionado uno de los dos valores de la constante G. No es suficiente con que se vea el valor en la hoja.

2. La masa del planeta Marte es 0,107 veces la masa de la Tierra y su radio es 0,533 veces el radio de la Tierra. Calcula:
- El tiempo que tarda un objeto en llegar a la superficie de Marte si se deja caer desde una altura de 50 m.
  - La velocidad de escape de ese objeto desde la superficie del planeta.
- Datos:  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;  $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ . (A.B.A.U. ord. 21)
- Rta.:** a)  $t = 5,21 \text{ s}$ ; b)  $v_e = 5,01 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ .

### Datos

Masa de Marte

Radio de Marte

Altura desde la que se deja caer

Aceleración de la gravedad en la Tierra

Radio de la Tierra

### Incógnitas

Tiempo que tarda en caer a la superficie de Marte desde una altura de 50 m.  $t$

Velocidad de escape en Marte

### Otros símbolos

Masa de la Tierra

Constante de la gravitación universal

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal, en módulos.

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

Peso de un objeto de masa  $m$  en la superficie de un planeta cuya aceleración de la gravedad es  $g_0$

Ecuación de la caída libre (movimiento uniformemente acelerado)

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$

### Cifras significativas: 3

$$M_M = 0,107 M_T$$

$$R_M = 0,533 R_T$$

$$h = 50,0 \text{ m}$$

$$g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M_T$$

$$G$$

$$F_G = G \frac{M m}{r^2}$$

$$P = m \cdot g_0$$

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Energía mecánica

$$E = E_c + E_p$$

### Solución:

a) Hay que calcular el valor de la gravedad en la superficie de Marte.

El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m \cdot g_T = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto cerca de la superficie de Marte es la fuerza con la que a Marte lo atrae:

$$m \cdot g_M = G \frac{M_M \cdot m}{R_M^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{m \cdot g_M}{m \cdot g_T} = \frac{G \frac{M_M \cdot m}{R_M^2}}{G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{M_M / M_T}{(R_M / R_T)^2} = \frac{0,107}{0,533^2} = 0,375$$

Despejando:

$$g_M = 3,69 \text{ m/s}^2$$

*Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de Marte es unas 3 veces menor que en la superficie de la Tierra.*

Se calcula el tiempo de la ecuación de la caída libre, sin velocidad inicial:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50,0}{3,69}} = 5,21 \text{ s}$$

b)

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.

La velocidad de escape le proporcionaría la energía,  $\Delta E$ , necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.

La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa  $m$  situado en la superficie de un astro de masa  $M$  y radio  $R$  es:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula.

La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$



La velocidad de escape  $v_e$  le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$m g_0 = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Hay que calcular también el radio de Marte:

$$R_M = 0,533 R_T = 0,533 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 3,40 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Se calcula la velocidad de escape sustituyendo  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$ .

$$v_e = \sqrt{\frac{2 g_0 \cdot R_M^2}{R_M}} = \sqrt{2 g_0 \cdot R_M} = \sqrt{2 \cdot 3,69 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (3,40 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2} = 5,01 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 5,01 \text{ km/s}$$

Una de las respuestas puede verse con la hoja de cálculo [Física \(es\)](#), en la pestaña «Satelites».

Escriba en la celda de color naranja situada a la derecha de «Astro» la palabra Marte. Recibirá un aviso: «Sin datos» (La pestaña solo tiene los datos de la Tierra, la Luna y el Sol). Pulse el botón [Aceptar](#).

En la celda contigua de color naranja, elija «Tierra».

Siga escribiendo los datos en las celdas de color blanco y borde azul, y haciendo clic y eligiendo las magnitudes y unidades en las celdas de color salmón.

Constante gravitación	$G =$	6,67·10 <sup>-11</sup>	N·m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>			Relación
Astro 1		Marte	Tierra	Astro 2		$A_1 / A_2$
Masa $M =$					$M_1 / M_2 =$	0,107
Radio $R =$			6,37×10 <sup>6</sup>	m	$R_1 / R_2 =$	0,533
Gravedad en el suelo	$g_0 =$		9,81	m/s <sup>2</sup>		
Satélite	Masa $m =$					

En RESULTADOS se ve la gravedad en Marte:

$$\text{Marte} \quad g_0 = \quad 3,69 \text{ m/s}^2$$

El tiempo que tarda en llegar al suelo no lo calcula esta hoja. Debe hacerse con la ecuación del MRUA  $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ . Despejando y sustituyendo:  $t = \sqrt{(2 s / a)}$

En OTROS CÁLCULOS escriba a la derecha de «Fórmula» =RAIZ(2\*50/3,69)

OTROS CÁLCULOS							
Etiqueta:	t (caer)						
Fórmula:	5,21						

b) La velocidad de escape de ese objeto desde la superficie del planeta se obtiene eligiendo en RESULTADOS las opciones «Velocidad» y «alcanzar el infinito» en la línea de «en el suelo para»:

$$\text{Velocidad} \quad \text{en el suelo para} \quad \text{alcanzar el infinito} \quad v(\text{esc.}) = \quad 5,01 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Cuestiones y problemas de las [Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad](#) (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.

[Respuestas](#) y composición de [Alfonso J. Barbadillo Marán](#).

Algunos cálculos se hicieron con una [hoja de cálculo](#) de [LibreOffice](#) del mismo autor.

Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión [CLC09](#) de Charles Lalanne-Cassou.

La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de [traducindote](#), y del [traductor de la CIXUG](#).

Se procuró seguir las [recomendaciones](#) del Centro Español de Metrología (CEM).

Se consultó al Copilot de Microsoft Edge y se tuvieron en cuenta algunas de sus respuestas en las cuestiones.

Actualizado: 30/06/24

## Sumario

### GRAVITACIÓN

<i>Satélites.....</i>	<i>1</i>
1. El Sentinel-1 es un satélite artificial de órbita circular polar de la Agencia Espacial Europea dentro del Programa Copérnico destinado a la monitorización terrestre y de los océanos. Está situado a 693 km sobre la superficie terrestre. Si su masa es de 200 kg:.....	1
a) Las velocidades lineal y angular del satélite en la órbita.....	
b) El período de la órbita del satélite. ¿Cuántas vueltas da a la Tierra cada día?.....	
c) La masa de la Tierra.....	
d) El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.....	
e) Las energías cinética, potencial y mecánica del satélite.....	
f) La energía mínima adicional que habría que comunicarle para mandarlo a una distancia muy grande de la Tierra y la velocidad de escape a la atracción terrestre a esa altura.....	
g) ¿Qué velocidad hubo que proporcionarle en el lanzamiento para ponerlo en órbita?.....	
h) La velocidad de escape desde el suelo.....	
i) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.....	
j) La fuerza con que la Tierra atrae al satélite.....	
2. La luz del Sol tarda $5 \cdot 10^2$ s en llegar a la Tierra y $2,6 \cdot 10^3$ s en llegar a Júpiter. Calcula:.....	7
a) El período de Júpiter girando alrededor del Sol.....	
b) La velocidad orbital de Júpiter.....	
c) La masa del Sol.....	
3. Un satélite GPS describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, dando dos vueltas a la Tierra cada 24 h. Calcula:.....	10
a) La altura de su órbita sobre la superficie terrestre.....	
b) La energía mecánica.....	
c) El tiempo que tardaría en dar una vuelta a la Tierra si lo hacemos orbitar a una altura doble.....	
<i>Campo gravitatorio.....</i>	<i>13</i>
1. Una nave sitúa un objeto de 20 kg de masa entre la Tierra y el Sol en un punto donde la fuerza gravitatoria neta sobre el objeto es nula. Calcula en ese punto:.....	13
a) La distancia del objeto al centro de la Tierra.....	
b) La aceleración de la Tierra debida a la fuerza que el objeto ejerce sobre ella.....	
2. La masa del planeta Marte es 0,107 veces la masa de la Tierra y su radio es 0,533 veces el radio de la Tierra. Calcula:.....	15
a) El tiempo que tarda un objeto en llegar a la superficie de Marte si se deja caer desde una altura de 50 m.....	
b) La velocidad de escape de ese objeto desde la superficie del planeta.....	