Gravitación

Método, aproximacións e recomendacións

◊ PROBLEMAS

● Satélites

1. Un satélite artificial de masa 10^2 kg xira arredor da Terra a unha altura de $4\cdot10^3$ km sobre a superficie terrestre. Calcula:
   a) A súa velocidade orbital, aceleración e período, suposta a órbita circular.
   b) Acha o módulo do momento angular do satélite respecto do centro da Terra.
   c) Enuncia as leis de Kepler.
   Datos: $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $g_0 = 9{,}81$ m/s². *(P.A.U. set. 16)*
   Rta.: a) $v = 6{,}20$ km/s; $T = 2$ h 55 min; a = 3,70 m/s²; b) $L_O = 6{,}42\cdot10^{12}$ kg·m²/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio da Terra	$R = 6{,}37\cdot10^6$ m
Altura da órbita	$h = 4{,}00\cdot10^3$ km $= 4{,}00\cdot10^6$ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	$g_0 = 9{,}81$ m/s²
Masa do satélite	$m = 100$ kg
Incógnitas	
Valor da velocidade do satélite na súa órbita arredor da Terra	v
Período de rotación do satélite arredor da Terra	T
Valor da aceleración do satélite	a
Módulo do momento angular do satélite respecto do centro dela Terra	L_O
Outros símbolos	
Constante da gravitación universal	G
Masa da Terra	M
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\dfrac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\dfrac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N=\dfrac{v^2}{r}$
Momento angular dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade, $\vec{v}$, a unha distancia, $\vec{r}$, dun punto O que se toma como orixe	$\vec{L}_O = \vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Solución:

a) Calcúlase o raio da órbita:

$$r = R + h = 6{,}37\cdot10^6\ [\text{m}] + 4{,}00\cdot10^6\ [\text{m}] = 1{,}04\cdot10^7\ \text{m}$$

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0=G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G\cdot M = g_0\cdot R^2$$

Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na ecuación da velocidade orbital.

$$v=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{1{,}04\cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}}=6{,}20\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=6{,}20\ \mathrm{km/s}$$

Análise: Agárdase que un obxecto que se mova arredor da Terra teña unha velocidade duns poucos km/s. *O resultado de* 6,20 km/s *está de acordo con esta suposición.*

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}04\cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}{6{,}20\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=1{,}05\cdot 10^4\ \mathrm{s}=2\ \mathrm{h}\ 55\ \mathrm{min}$$

Análise: O período dun satélite en órbita baixa (300 – 400 km) *é de hora e media. O valor obtido é maior, porque a altura da órbita* 4000 km *tamén o é.*

A única forza que actúa sobre o astronauta é o seu peso, ou sexa, a atracción gravitacional da Terra. Pola lei de Newton da gravitación universal, na órbita de raio r:

$$F=G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r^2}$$

A aceleración será:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{g_0\cdot R^2}{r^2}=\frac{9{,}81\,[\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\,[\mathrm{m}])^2}{(1{,}04\cdot 10^7\,[\mathrm{m}])^2}=3{,}70\ \mathrm{m/s^2}$$

b) O momento angular dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade, $\overline{\boldsymbol{v}}$, a unha distancia, $\overline{\boldsymbol{r}}$, dun punto O que se toma como orixe é:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O=\overline{\boldsymbol{r}}\times m\cdot\overline{\boldsymbol{v}}$$

O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra é:

$$|\overline{\boldsymbol{L}}_O|=|\overline{\boldsymbol{r}}|\cdot m\cdot|\overline{\boldsymbol{v}}|\cdot \operatorname{sen}\alpha = 1{,}04\cdot 10^7\ [\mathrm{m}]\cdot 100\ [\mathrm{kg}]\cdot 6{,}20\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]\cdot \operatorname{sen} 90° = 6{,}42\cdot 10^{12}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

c) As leis de Kepler poden enunciarse así:
1.ª lei: Os planetas móvense en órbitas elípticas arredor do Sol que ocupa un dos focos da elipse.
2.ª lei: O raiovector que une o Sol cun planeta varre áreas iguais en tempos iguais.
3.ª lei: Os cadrados dos períodos dos planetas arredor do Sol son directamente proporcionais aos cubos dos semieixes maiores das elipses.

2. A nave espacial Discovery, lanzada en outubro de 1998, describía arredor da Terra unha órbita circular cunha velocidade de 7,62 km·s⁻¹:
   a) A que altura sobre a superficie da Terra atopábase?
   b) Canto tempo tardaba en dar unha volta completa?
   c) Cantos amenceres vían cada 24 horas os astronautas que ían no interior da nave?
   Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; R_T = 6370 km; M_T = 5,98·10²⁴ kg. *(P.A.U. xuño 16)*
   Rta.: a) h = 503 km; b) T = 1 h 34 min; c) n = 15.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidade do satélite na súa órbita arredor da Terra.	v = 7,62 km/s = 7,62·10³ m/s
Raio da Terra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Masa da Terra	M = 5,93·10²⁴ kg
Constante da gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Altura da órbita	h
Tempo dunha volta completa	T
Número de voltas en 24 horas	n
Outros símbolos	
Masa do satélite	m
Raio da órbita	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}}=m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

a) Despéxase o raio da órbita dea expresión da velocidade orbital:

$$r = \frac{G \cdot M}{v^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2\text{·kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}}{(7,62 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2} = 6,87 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Calcúlase a altura restando o raio da Terra do raio da órbita:

$$h = r - R = 6,87·10^6 \text{ [m]} - 6,37·10^6 \text{ [m]} = 5,0·10^5 \text{ m} = 500 \text{ km}$$

Análise: Agárdase que a altura dun satélite en órbita baixa arredor da Terra sexa arredor de 400 km. *O resultado de* 500 km *está de acordo con esta suposición.*

b) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,87 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{7,62 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 5,67 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 34 \text{ min}$$

c) O número de amenceres que ven os astronautas en 24 h é:

$$n = \frac{24 \text{ h}}{1,57 \text{ h}} = 15$$

3. Un satélite artificial de 500 kg de masa xira nunha órbita circular a 5000 km de altura sobre a superficie da Terra. Calcula:

a) A súa velocidade orbital.
b) A súa enerxía mecánica na órbita.
c) A enerxía que hai que comunicarlle para que, partindo da órbita, chegue ao infinito.
Datos: R = 6370 km; g_0 = 9,8 m·s⁻². *(P.A.U. set. 15)*
Rta.: a) v = 5,91 km/s; b) E = −8,74·10⁹ J; c) ΔE = 8,74·10⁹ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa do satélite	m = 500 kg
Altura da órbita	h = 5000 km = 5,00·10⁶ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,80 m/s²
Raio da Terra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Incógnitas	
Velocidade orbital	v
Enerxía mecánica do satélite en órbita	E
Enerxía que hai que comunicarlle para que chegue ao infinito	ΔE
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Calcúlase o raio da órbita:

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 5{,}00 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 11{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na ecuación da velocidade orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{11{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}} = 5{,}91 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 5{,}91\ \mathrm{km/s}$$

Análise: Agárdase que un obxecto que se mova arredor da Terra teña unha velocidade duns poucos km/s. *O resultado de* 5,91 km/s *está de acordo con esta suposición.*

b) Calculase a enerxía potencial:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 500\ [\mathrm{kg}]}{11{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]} = -1{,}75 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Calculase a enerxía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 500\ [\mathrm{kg}] \cdot (5{,}91 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 8{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial.

$$E = E_c + E_p = 8{,}74 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}] + (-17{,}5 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = -8{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análise: Pódese demostrar que a enerxía mecánica ten o valor oposto ao da enerxía cinética substituíndo $G \cdot M / r$ *por* v^2 *na expresión da enerxía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G\frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

c) A enerxía potencial no infinito é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais. Supoñendo que chega ao infinito con velocidade nula, a enerxía que terá no infinito será nula. A enerxía que hai que comunicarlle é:

$$\Delta E = E(\infty) - E(\text{órbita}) = 0 - (-8{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}) = 8{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

4. O vehículo espacial Apolo VIII estivo en órbita circular arredor da Lúa a 113 km sobre a súa superficie. Calcula:
   a) O período da órbita.
   b) As velocidades lineal e angular do vehículo.
   c) A velocidade de escape á atracción lunar desde esa posición.
   Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; R(Lúa) = 1740 km; M(Lúa) = 7,36·10²² kg. *(P.A.U. xuño 15)*
   Rta.: a) T = 1 h 59 min; b) v = 1,63 km/s; ω = 8,79·10⁻⁴ rad/s; c) v_e = 1,68 km/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa da Lúa	$M = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg
Raio da Lúa	$R = 1740$ km $= 1{,}74 \cdot 10^6$ m
Altura da órbita	$h = 113$ km $= 1{,}13 \cdot 10^5$ m
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período da órbita	T
Valor da velocidade lineal do satélite	v
Velocidade angular do satélite	ω
Velocidade de escape na órbita da Lúa	v_e
Outros símbolos	
Masa do satélite	m
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Velocidade angular nun movemento circular de período T	$\omega = 2\pi / T$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

b) Calcúlase o raio da órbita do Apolo VIII:

$$r = R + h = 1{,}74 \cdot 10^6\ [\text{m}] + 1{,}13 \cdot 10^5\ [\text{m}] = 1{,}85 \cdot 10^6\ \text{m}$$

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, *m*, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Substitúense os datos na ecuación da velocidade orbital:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ [\mathrm{kg}]}{1{,}85 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}} = 1{,}63 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 1{,}63\ \mathrm{km/s}$$

a) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}85 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{1{,}63 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]} = 7{,}15 \cdot 10^3\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 59\ \mathrm{min}$$

b) Calcúlase a velocidade angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\mathrm{rad}]}{7{,}15 \cdot 10^3\ [\mathrm{s}]} = 8{,}79 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{rad/s}$$

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right) = G\frac{M \cdot m}{r}$$

Despexando, a velocidade de escape dun satélite en órbita, queda:

$$v_{e\,o} = \sqrt{2G\frac{M}{r}}$$

Se a dirección de escape é perpendicular á velocidade do satélite, esta é a velocid perpendicular que hai que proporcionarlle.
Se a dirección de escape é paralela á dirección do movemento do satélite, hai que ter en conta a súa enerxía cinética.

Se o sentido de velocidade de escape fose o mesmo que o de avance do satélite,haberá que proporcionarlle unha velocidade adicional igual á diferenza entre a velocidade de escape e a que xa ten.

c) Calcúlase a velocidade de escape:

$$v_e=\sqrt{G\frac{M}{R}}=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot\frac{7{,}36\cdot 10^{22}\ [\mathrm{kg}]}{1{,}74\cdot 10^{6}\ [\mathrm{m}]}}=1{,}68\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s}=1{,}68\ \mathrm{km/s}$$

5. Ceres é o planeta anano máis pequeno do sistema solar e ten un período orbital arredor do Sol de 4,60 anos, unha masa de $9{,}43\cdot 10^{20}$ kg e un raio de 477 km. Calcula:
   a) O valor da intensidade do campo gravitacional que Ceres crea na súa superficie.
   b) A enerxía mínima que ha de ter unha nave espacial de 1000 kg de masa para que, saíndo da superficie, poida escapar totalmente da atracción gravitacional do planeta.
   c) A distancia media entre Ceres e o Sol, tendo en conta que a distancia media entre a Terra e o Sol é de $1{,}50\cdot 10^{11}$ m e que o período orbital da Terra arredor do Sol é dun ano.

   Dato: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$. *(P.A.U. set. 14)*

   Rta.: a) $g = 0{,}277\ \mathrm{m/s^2}$; b) $E = 1{,}32\cdot 10^{8}$ J; c) $r = 4{,}15\cdot 10^{11}$ m.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período orbital de Ceres	$T_1 = 4{,}60$ anos $= 1{,}45\cdot 10^{8}$ s
Masa de Ceres	$M = 9{,}43\cdot 10^{20}$ kg
Raio de Ceres	$R = 477$ km $= 4{,}77\cdot 10^{5}$ m
Masa da nave espacial	$m = 1000$ kg
Distancia da Terra ao Sol	$r_2 = 1{,}50\cdot 10^{11}$ m
Período orbital da Terra	$T_2 = 1{,}00$ anos $= 3{,}16\cdot 10^{7}$ s
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Incógnitas	
Intensidade do campo gravitacional na superficie de Ceres	g
Enerxía da nave espacial na superficie de Ceres para escapar	ΔE
Distancia media entre Ceres e o Sol	r_1
Outros símbolos	
Masa do Sol	M
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Intensidade do campo gravitacional terrestre a unha distancia r do centro	$g=\frac{F_G}{m}=G\frac{M}{r^2}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m\cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) A intensidade do campo gravitacional creado pola masa esférica, M, do planeta (anano) Ceres na súa superficie, a unha distancia, R, do seu centro é a forza gravitacional sobre a unidade de masa:

$$g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}}{\cancel{m}}=G\frac{M}{R^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{9{,}43\cdot 10^{20}\ [\text{kg}]}{(4{,}77\cdot 10^5\ [\text{m}])^2}=0{,}277\ \text{m/s}^2$$

b) Calcúlase a enerxía potencial da nave espacial na superficie de Ceres:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}=-6{,}67\cdot 10^{-11}[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{9{,}43\cdot 10^{20}\ [\text{kg}]\cdot 1\,000\ [\text{kg}]}{4{,}77\cdot 10^5\ [\text{m}]}=-1{,}32\cdot 10^8\ \text{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial.
A enerxía potencial da nave espacial a unha distancia moi grande de Ceres será nula, porque tómase o infinito coma orixe de enerxías potenciais.
A enerxía mínima que ha de ter na superficie será a que corresponde a unha enerxía cinética nula moi lonxe de Ceres.
Por tanto a enerxía mecánica que terá a nave espacial moi lonxe de Ceres será nula.
A enerxía mínima será a diferenza entre a enerxía no infinito e que ten na superficie:

$$\Delta E = E_\infty - E_p = 0 - (-1{,}32\cdot 10^8\ [\text{J}]) = 1{,}32\cdot 10^8\ \text{J}$$

c) Tanto a Terra como Ceres describen traxectorias aproximadamente circulares arredor do Sol, podéndose considerar satélites do mesmo.
A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos, T, dos planetas no seu movemento arredor do Sol, son directamente proporcionais aos cubos dos semieixes maiores das súas órbitas elípticas.
Se se fai a aproximación de que as órbitas son practicamente circulares de raio r, a expresión matemática desta lei sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Isto pódese demostrar para órbitas circulares.
A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{F}\right|=m\cdot|\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dous planetas, 1 e 2, dividimos as expresións correspondentes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G \cdot M} \cdot T_1^2}{\cancel{G \cdot M} \cdot T_2^2}$$

Aplícase esta lei á Terra e a Ceres:

$$\frac{r_1^3}{(4{,}60\ [\text{ano}])^2} = \frac{(1{,}50 \cdot 10^{11}\ [\text{m}])^3}{(1\ [\text{ano}])^2}$$

Calcúlase a distancia media de Ceres ao Sol:

$$r_1 = 1{,}50 \cdot 10^{11}\ [\text{m}] \sqrt[3]{4{,}60^2} = 4{,}15 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

Análise: O raio calculado da órbita de Ceres sae maior que o da Terra, como é de esperar.

$$(r_1 = 4{,}15 \cdot 10^{11}\ \text{m}) > (r_2 = 1{,}50 \cdot 10^{11}\ \text{m})$$

6. Deséxase poñer un satélite de masa 10^3 kg en órbita arredor da Terra e a unha altura dúas veces o raio terrestre. Calcula:
   a) A enerxía que hai que comunicarlle desde a superficie da Terra.
   b) A forza centrípeta necesaria para que describa a órbita.
   c) O período do satélite en devandita órbita.
   Datos: R = 6370 km; g_0 = 9,8 m/s². *(P.A.U. set. 13)*
   Rta.: a) $\Delta E = 5{,}20 \cdot 10^{10}$ J; b) $F = 1{,}09 \cdot 10^3$ N; c) T = 7 h 19 min.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa do satélite	$m = 10^3$ kg $= 1{,}00 \cdot 10^3$ kg
Raio da Terra	R = 6370 km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m
Altura da órbita	$h = 2 \cdot 6370$ km $= 1{,}27 \cdot 10^7$ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	$g_0 = 9{,}80$ m/s²
Incógnitas	
Enerxía que hai que comunicarlle desde a superficie da Terra	ΔE
Forza centrípeta necesaria para que describa a órbita	F
Período orbital do satélite	T
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Constante da gravitación universal	G

Ecuacións

Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\overline{F} = m\cdot\overline{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m\cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{F} = \overline{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{F} = m\cdot\overline{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{F}\right|=m\cdot|\vec{a}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

c) Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na ecuación da velocidade orbital:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{3 \cdot R}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R}{3}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{3}} = 4{,}56 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 4{,}56\ \mathrm{km/s}$$

Análise: Agárdase que un satélite en órbita arredor da Terra teña unha velocidade duns poucos km/s. *O resultado está de acordo con esta suposición.*

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}91 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}{4{,}56 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]} = 2{,}63 \cdot 10^4\ \mathrm{s} = 7\ \mathrm{h}\ 18\ \mathrm{min}$$

b) Calcúlase a forza centrípeta:

$$F = m \cdot a_N = m \frac{v^2}{r} = m \frac{\frac{g_0 \cdot \cancel{R}}{3}}{3 \cdot \cancel{R}} = \frac{m \cdot g_0}{9} = \frac{1{,}00 \cdot 10^3\ [\mathrm{kg}] \cdot 9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}]}{9} = 1{,}09 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

c) Calcúlase a enerxía potencial no chan:

$$E_p(\text{chan}) = -G \frac{M \cdot m}{R} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R} = -g_0 \cdot R \cdot m = -9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] \cdot 1{,}00 \cdot 10^3\ [\mathrm{kg}] = -6{,}24 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Suponse que na superficie da Terra o satélite está en repouso[a], polo que só ten enerxía potencial, que vale:
Calcúlase o raio da órbita: ***

$$r = R + h = R + 2\,R = 3\,R = 3 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] = 1{,}91 \cdot 10^7\ \mathrm{m}$$

Calcúlase a enerxía potencial na órbita:

$$E_p(\text{órbita}) = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{3\,R} = -\frac{g_0 \cdot R \cdot m}{3} = \frac{E_{p\,s}}{3} = \frac{-6{,}24 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}}{3} = -2{,}08 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Calcúlase a enerxía cinética en órbita:

$$E_c(\text{órbita}) = m \cdot v^2 / 2 = [1{,}00 \cdot 10^3\ [\mathrm{kg}] \cdot (4{,}56 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2] / 2 = 1{,}04 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial.

$$E(\text{órbita}) = E_c(\text{órbita}) + E_p(\text{órbita}) = 1{,}04 \cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}] + (-2{,}08 \cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}]) = -1{,}04 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Análise: Pódese demostrar que a enerxía mecánica ten o valor oposto ao da enerxía cinética substituíndo $G \cdot M / r$ *por* v^2 *na expresión da enerxía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

A enerxía que hai que comunicarlle ao satélite na superficie da Terra é a diferenza entre a que terá en órbita e a que ten no chan:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{chan}) = -1{,}04 \cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}] - (-6{,}24 \cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}]) = 5{,}20 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

[a] Para un sistema de referencia no centro da Terra, calquera punto da superficie ten velocidade debido á rotación terrestre. A velocidade dun punto da superficie terrestre vale: $v = \omega \cdot R = 2\,\pi\,R\,/\,T = 463$ m/s. Para un obxecto de 1000 kg, a enerxía cinética sería $E_c = ½\ m \cdot v^2 = 1{,}07 \cdot 10^8$ J moito menor que o valor absoluto da enerxía potencial ($6{,}24 \cdot 10^{10}$ J)

7. Un satélite de 200 kg describe unha órbita circular a 600 km sobre a superficie terrestre:
   a) Deduce a expresión da velocidade orbital.
   b) Calcula o período de xiro.
   c) Calcula a enerxía mecánica.
   Datos: R = 6400 km; g_0 = 9,81 m/s². *(P.A.U. xuño 13)*
   Rta.: a) $v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$; b) T = 1 h 37 min; b) E = −5,74·10⁹ J.

Datos	**Cifras significativas: 3**
Masa do satélite	m = 200 kg
Altura da órbita	h = 600 km = 6,00·10⁵ m
Raio da Terra	R = 6400 km = 6,40·10⁶ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,81 m/s²
Incógnitas	
Velocidade do satélite na súa órbita arredor da Terra	v
Período orbital do satélite	T
Enerxía mecánica do satélite en órbita	E
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\sum\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m\cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Calcúlase o raio da órbita:

$$r = R + h = 6,40\cdot10^6\ [\text{m}] + 6,00\cdot10^5\ [\text{m}] = 7,00\cdot10^6\ \text{m}$$

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, *m*, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, *G*, ou da masa do astro, *M*, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na ecuación da velocidade orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}40 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{7{,}00 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}} = 7{,}58 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 7{,}58\ \mathrm{km/s}$$

Análise: Agárdase que un satélite en órbita arredor da Terra teña unha velocidade duns poucos km/s. *O resultado está de acordo con esta suposición.*
Especificamente o enunciado do problema non pide que se calcule a velocidade, pero mellor é calculala. Ademais, vaise necesitar no cálculo do período orbital.

b) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}00 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{7{,}58 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]} = 5{,}81 \cdot 10^3\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 37\ \mathrm{min}$$

c) Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_p = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}40 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{7{,}00 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]} = -1{,}15 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Calcúlase a enerxía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 200\ [\mathrm{kg}]\ (7{,}58 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 = 5{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial:

$$E = E_c + E_p = 5{,}74 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}] - 1{,}15 \cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}] = -5{,}8 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análise: Pódese demostrar que a enerxía mecánica ten o valor oposto ao da enerxía cinética substituíndo $G \cdot M / r$ *por* v^2 *na expresión da enerxía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

Sabendo isto, pódese escribir o valor da enerxía mecánica con tres cifras significativas, en vez das dúas cifras do resultado anterior obtido seguindo as regras de operacións con cifras significativas:

$$E = -5{,}74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

8. A luz do Sol tarda $5 \cdot 10^2$ s en chegar á Terra e $2{,}6 \cdot 10^3$ s en chegar a Xúpiter. Calcula:
   a) O período de Xúpiter orbitando arredor do Sol.
   b) A velocidade orbital de Xúpiter.
   c) A masa do Sol.
   Datos: T (Terra) arredor do Sol: $3{,}15 \cdot 10^7$ s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². (Supóñense as órbitas circulares). *(P.A.U. set. 12)*
   Rta.: a) $T = 3{,}74 \cdot 10^8$ s; $v = 1{,}31 \cdot 10^4$ m/s; b) $M = 2{,}01 \cdot 10^{30}$ kg.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Tempo que tarda a luz do Sol en chegar á Terra	$t_1 = 5{,}00 \cdot 10^2$ s = 500 s
Tempo que tarda a luz do Sol en chegar a Xúpiter	$t_2 = 2{,}60 \cdot 10^3$ s
Período orbital da Terra arredor do Sol	$T_1 = 3{,}15 \cdot 10^7$ s
Velocidade da luz no baleiro	$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período orbital de Xúpiter	T_2
Velocidade orbital de Xúpiter	v
Masa do Sol	M
Outros símbolos	
Masa de Xúpiter ou a Terra	m
Distancia dun planeta ao Sol	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:

Calcúlanse as distancias da Terra ao Sol e de Xúpiter ao Sol, tendo en conta a velocidade da luz.

Terra: $r_1 = c \cdot t_1 = 3{,}00 \cdot 10^8$ [m/s] · $5{,}00 \cdot 10^2$ [s] = $1{,}50 \cdot 10^{11}$ m

Xúpiter: $r_2 = c \cdot t_2 = 3{,}00 \cdot 10^8$ [m/s] · $2{,}60 \cdot 10^3$ [s] = $7{,}80 \cdot 10^{11}$ m

Resólvese primeiro o último apartado.

c) A masa do Sol pode calcularse da expresión da velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor do centro dun astro de masa M.

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade da Terra arredor do Sol calcúlase a partir do seu período orbital:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{3{,}15 \cdot 10^7\ [\mathrm{s}]} = 2{,}99 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s}$$

Despéxase a masa do Sol da velocidade orbital da Terra como satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \Rightarrow M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(2{,}99 \cdot 10^4\ [\mathrm{m/s}])^2 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}]} = 2{,}01 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

b) Emprégase a ecuación anterior para calcular a velocidade de Xúpiter:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 2{,}01 \cdot 10^{30}\ [\mathrm{kg}]}{7{,}80 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}} = 1{,}31 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s} = 13{,}1\ \mathrm{km/s}$$

a) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi \cdot r_2}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}80 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{1{,}31 \cdot 10^4\ [\mathrm{m/s}]} = 3{,}74 \cdot 10^8\ \mathrm{s}$$

Análise: A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos son directamente proporcionais aos cubos dos raiovectores que unen ao Sol cos planetas. A maior distancia ao Sol, maior período. Este método daría:

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = 3{,}15 \cdot 10^7\ [\mathrm{s}] \cdot \sqrt{\frac{(7{,}8 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}{(1{,}5 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}} = 3{,}74 \cdot 10^8\ \mathrm{s}$$

9. Un satélite artificial de 200 kg describe unha órbita circular a unha altura de 650 km sobre a Terra. Calcula:
   a) O período e a velocidade do satélite na órbita.
   b) A enerxía mecánica do satélite.
   c) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na

superficie da Terra.

Datos: M = 5,98·10²⁴ kg; R = 6,37·10⁶ m; G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. set. 11)*

Rta.: a) v = 7,54 km/s; T = 1 h 38 min; b) E = −5,68·10⁹ J; c) g_h/g_0 = 0,824.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa do satélite	m = 200 kg
Altura da órbita	h = 650 km = 6,50·10⁵ m
Masa da Terra	M = 5,98·10²⁴ kg
Raio da Terra	R = 6,37·10⁶ m
Constante da gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Valor da velocidade do satélite na súa órbita arredor da Terra	v
Período orbital do satélite	T
Enerxía mecánica do satélite en órbita	E
Cociente entre os valores de g no satélite e na superficie da Terra.	g_h/g_0
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Intensidade do campo gravitacional terrestre a unha distancia r do centro	$g = \frac{F_G}{m} = G \frac{M}{r^2}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Calcúlase o raio da órbita:

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] + 6{,}50 \cdot 10^5\ [\text{m}] = 7{,}02 \cdot 10^6\ \text{m}$$

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.

A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Calcúlase a velocidade:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} [\text{kg}]}{7{,}02 \cdot 10^6 [\text{m}]}} = 7{,}54 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7{,}54 \text{ km/s}$$

Análise: Agárdase que un obxecto que se mova arredor da Terra teña unha velocidade duns poucos km/s. *O resultado está de acordo con esta suposición.*

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}02 \cdot 10^6 [\text{m}]}{7{,}54 \cdot 10^3 [\text{m/s}]} = 5{,}85 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 38 \text{ min}$$

b) Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 200 [\text{kg}]}{7{,}02 \cdot 10^6 [\text{m}]} = -1{,}14 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Calcúlase a enerxía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = [200 \text{ [kg]} (7{,}54·10^3 \text{ [m/s]})^2] / 2 = 5{,}68·10^9 \text{ J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial:

$$E = E_c + E_p = 5{,}68·10^9 \text{ [J]} + (-1{,}14·10^{10} \text{ [J]}) = -5{,}68·10^9 \text{ J}$$

Análise: Pódese demostrar que a enerxía mecánica ten o valor oposto ao da enerxía cinética substituíndo $G \cdot M / r$ por v^2 na expresión da enerxía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

c) A intensidade do campo gravitacional nun punto que dista r do centro da Terra é a forza sobre a unidade de masa situada nese punto.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m} / r^2}{\cancel{m}} = G \frac{M}{r^2}$$

A gravidade a unha altura, h, vale: $$g_h = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

Na superficie da Terra vale: $g_0 = G\frac{M}{R^2}$

Dividindo a primeira entre a segunda, queda:

$$\frac{g_h}{g_0}=\frac{\cancel{G \cdot M}/(R+h)^2}{\cancel{G \cdot M}/R^2}=\frac{R^2}{(R+h)^2}=\frac{(6{,}37\cdot 10^6\,[\mathrm{m}])^2}{(7{,}02\cdot 10^6\,[\mathrm{m}])^2}=0{,}824$$

10. Un satélite artificial de 500 kg describe unha órbita circular arredor da Terra cun raio de $2\cdot 10^4$ km. Calcula:
 a) A velocidade orbital e o período.
 b) A enerxía mecánica e a potencial.
 c) Se por fricción pérdese algo de enerxía, que lle ocorre ao raio e á velocidade?
 Datos g_0 = 9,8 m/s²; R = 6370 km. *(P.A.U. set. 10)*
 Rta.: a) v = 4,46 km/s; T = 7 h 50 min; b) E = $-4{,}97\cdot 10^9$ J; E_p = $-9{,}94\cdot 10^9$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa do satélite	m = 500 kg
Raio da órbita	$r = 2{,}00\cdot 10^4$ km $= 2{,}00\cdot 10^7$ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,80 m/s²
Raio da Terra	R = 6370 km = $6{,}37\cdot 10^6$ m
Incógnitas	
Valor da velocidade do satélite na súa órbita arredor da Terra	v
Período orbital do satélite	T
Enerxía mecánica do satélite en órbita	E
Enerxía potencial do satélite en órbita	E_p
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\, m\cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.

A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

a) Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na ecuación da velocidade orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{2{,}00 \cdot 10^7\ [\text{m}]}} = 4{,}46 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 4{,}46\ \text{km/s}$$

Análise: Agárdase que un obxecto que se mova arredor da Terra teña unha velocidade duns poucos km/s. *O resultado de* 4,46 km/s *está de acordo con esta suposición.*

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}00 \cdot 10^7\ [\text{m}]}{4{,}46 \cdot 10^3\ [\text{m/s}]} = 2{,}82 \cdot 10^4\ \text{s} = 7\ \text{h}\ 50\ \text{min}$$

b) Calculase a enerxía potencial:

$$E_p = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}])^2 \cdot 500\ [\text{kg}]}{2{,}00 \cdot 10^7\ [\text{m}]} = -9{,}94 \cdot 10^9\ \text{J}$$

Calculase a enerxía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 500\ [\text{kg}] \cdot (4{,}46 \cdot 10^3\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 4{,}97 \cdot 10^9\ \text{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial.

$$E = E_c + E_p = 4{,}97 \cdot 10^9\ [\text{J}] + (-9{,}94 \cdot 10^9\ [\text{J}]) = -4{,}97 \cdot 10^9\ \text{J}$$

Análise: A enerxía mecánica vale a metade da enerxía potencial como se ve no apartado seguinte.

c) A enerxía mecánica pódese expresar en función do raio da órbita. Substituíndo v² por G M / r na expresión da enerxía mecánica, queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Se diminúe a enerxía mecánica, (é máis negativa), o raio da órbita tamén se fai máis pequeno, polo que o satélite achégase á superficie da Terra.
A velocidade, pola contra, aumentará, pois a súa relación co raio é:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Canto máis pequeno é o raio da órbita máis grande é a súa velocidade.

Análise: É o mesmo que lle ocorre a calquera corpo que se move preto da superficie da Terra. Ao perder enerxía perde altura, e cae cara ao chan, gañando velocidade.

11. As relacións entre as masas e os raios da Terra e a Lúa son: M_T/M_L= 79,63 e R_T/R_L = 3,66.
    a) Calcula a gravidade na superficie da Lúa.
    b) Calcula a velocidade dun satélite xirando arredor da Lúa nunha órbita circular de 2300 km de raio.
    c) Onde é maior o período dun péndulo de lonxitude L, na Terra ou na Lúa?
    Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_L = 1700 km. *(P.A.U. xuño 10)*
    Rta.: a) g_L = 1,65 m/s²; b) v = 1,44 km/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Relación entre as masas da Terra e da Lúa	M_T/M_L = 79,63
Relación entre os raios da Terra e da Lúa	R_T/R_L = 3,66
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,80 m/s²
Raio da órbita do satélite arredor da Lúa	r = 2300 km
Raio da Lúa	R_L = 1700 km
Incógnitas	
Gravidade na superficie da Lúa	g_L
Velocidade do satélite arredor da Lúa	v
Outros símbolos	
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Peso	$P = m\cdot g$
Período dun péndulo simple de lonxitude L nun punto onde a aceleración da gravidade é g	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Solución:

a) O peso dun obxecto preto da superficie da Terra é a forza coa que a Terra o atrae:

$$m\cdot g_T=G\frac{M_T\cdot m}{R_T^2}$$

Analogamente para a Lúa:

$$m \cdot g_L = G \frac{M_L \cdot m}{R_L^2}$$

Dividindo a primeira ecuación entre a segunda, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_T}{\cancel{m} \cdot g_L} = \frac{\cancel{G} \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T^2}}{\cancel{G} \frac{M_L \cdot \cancel{m}}{R_L^2}}$$

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{M_T / M_L}{(R_T / R_L)^2} = \frac{79{,}63}{3{,}66^2} = 5{,}94$$

Despéxase a aceleración da gravidade na Lúa:

$$g_L = 9{,}80 \text{ [m/s}^2\text{]} / 5{,}94 = 1{,}65 \text{ m/s}^2$$

Análise: O resultado é razoable, xa que sabemos que a gravidade na superficie da Lúa é unhas 6 veces menor que na superficie da Terra.

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left| \sum \vec{\boldsymbol{F}} \right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

b) Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na ecuación da velocidade orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{1{,}65\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (1{,}70 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{2{,}30 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}} = 1{,}44 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 1{,}44\ \mathrm{km/s}$$

c) O período dun péndulo de lonxitude L nun lugar onde a gravidade é g, vén dado pola ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividindo as expresións correspondentes á Terra e a Lúa:

$$\frac{T_\mathrm{T}}{T_\mathrm{L}} = \frac{\cancel{2\pi} \sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_\mathrm{T}}}}{\cancel{2\pi} \sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_\mathrm{L}}}} = \sqrt{\frac{g_\mathrm{L}}{g_\mathrm{T}}} = \sqrt{\frac{1}{5{,}94}} = 0{,}410 < 1$$

O período do péndulo na Terra é menor que na Lúa.

Análise: O resultado é razoable. A gravidade na superficie da Lúa é menor que na superficie da Terra, e canto máis pequena é a gravidade, máis lentamente se move o péndulo, e maior é o seu período.

12. Deséxase poñer en órbita un satélite de 1800 kg que xire a razón de 12,5 voltas por día. Calcula:
    a) O período do satélite.
    b) A distancia do satélite á superficie terrestre.
    c) A enerxía cinética do satélite nesa órbita.
    Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $R = 6378$ km; $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. *(P.A.U. set. 09)*
    Rta.: a) T = 1 h 55 min; b) h = 1470 km; c) $E_c = 4{,}58 \cdot 10^{10}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio da Terra	$R = 6378\ \mathrm{km} = 6{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$
Frecuencia de xiro do satélite na órbita arredor da Terra	$f = 12{,}5\ \text{voltas/día} = 1{,}45 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}$
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
Masa da Terra	$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Masa do satélite	$m = 1\,800\ \mathrm{kg}$
Incógnitas	
Período do satélite	T
Distancia do satélite á superficie terrestre (altura de órbita)	h
Enerxía cinética do satélite na órbita	E_c
Outros símbolos	
Raio da órbita	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

Ecuacións

Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$

Solución:

a) Calcúlase o período, que é a inversa da frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}45 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{s}^{-1}]} = 6{,}91 \cdot 10^3\ \mathrm{s} = 1{,}92\ \mathrm{h} = 1\ \mathrm{h}\ 55\ \mathrm{min}$$

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\ \pi^2\cdot r^3 = G\cdot M\cdot T^2$$

b) Despéxase o raio da órbita, *r*, e substitúense os datos:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\ \pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5,98\cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}]\cdot(6,91\cdot 10^3\ [\mathrm{s}])^2}{4\pi^2}}=7,84\cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

Calcúlase a altura restando o raio da Terra do raio da órbita:

$$h = r - R = 7,84\cdot10^6\ [\mathrm{m}] - 6,38\cdot10^6\ [\mathrm{m}] = 1,47\cdot10^6\ \mathrm{m} = 1470\ \mathrm{km}$$

c) Calcúlase a velocidade do satélite na súa órbita:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}\ \frac{2\cdot 3,14\cdot 7,86\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{6,91\cdot 10^3\ [\mathrm{s}]}=7,13\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

Calcúlase a enerxía cinética:

$$E_c = m\cdot v^2 / 2 = 1,80\cdot10^3\ [\mathrm{kg}]\cdot(7,13\cdot10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 4,58\cdot10^{10}\ \mathrm{J}$$

13. Os satélites Meteosat son satélites xeoestacionarios (situados sobre o ecuador terrestre e con período orbital dun día). Calcula:
   a) A altura á que se atopan, respecto da superficie terrestre.
   b) A forza exercida sobre o satélite.
   c) A enerxía mecánica.
   Datos: $R = 6,38\cdot10^6$ m; $M = 5,98\cdot10^{24}$ kg; $m = 8\cdot10^2$ kg; $G = 6,67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. set. 08)*
   Rta.: a) $h = 3,59\cdot10^7$ m; b) $F = 179$ N; c) $E_c = 3,78\cdot10^9$ J; $E_p = -7,56\cdot10^9$ J; $E = -3,78\cdot10^9$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Satélite xeoestacionario (período *T* igual ao da Terra)	$T = 24\ \mathrm{h} = 8,64\cdot10^4\ \mathrm{s}$
Constante da gravitación universal	$G = 6,67\cdot10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Masa da Terra	$M = 5,98\cdot10^{24}\ \mathrm{kg}$
Masa do satélite	$m = 8,00\cdot10^2\ \mathrm{kg}$
Raio da Terra	$R = 6,38\cdot10^6\ \mathrm{m}$
Incógnitas	
Altura do satélite	h
Forza sobre o satélite	F
Enerxías cinética, potencial e total do satélite en órbita	E_c, E_p, E
Outros símbolos	
Raio da órbita	r
Valor da velocidade do satélite na órbita xeoestacionaria	v
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio *r* e período *T*	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, *v*, nunha traxectoria circular de raio *r*	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, *m*, que se move cunha velocidade, *v*	$E_c = ½\ m\cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Despéxase o raio da órbita, r, e substitúense os datos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,[\mathrm{kg}](8{,}64 \cdot 10^4\,[\mathrm{s}])^2}{4 \cdot 3{,}14^2}} = 4{,}23 \cdot 10^7\ \mathrm{m}$$

Calcúlase a altura restando o raio da Terra do raio da órbita:

$$h = r - R = 4{,}23{\cdot}10^7 - 6{,}38{\cdot}10^6 = 3{,}59\cdot 10^7\ \mathrm{m}$$

b) A forza que exerce a Terra sobre o satélite é a forza gravitacional.

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 800 [\text{kg}]}{(4{,}23 \cdot 10^7 [\text{m}])^2} = 179 \text{ N}$$

Análise: O peso diminúe coa altura, sendo inversamente proporcional ao cadrado da distancia ao centro da Terra. A unha distancia $r \approx 7$ R, o peso debería ser unhas $7^2 \approx 50$ veces menor que no chan $m \cdot g_0 \approx 8 \cdot 10^3$ N, *ou sexa uns* 160 N.

c) Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 800 [\text{kg}]}{4{,}23 \cdot 10^7 [\text{m}]} = -7{,}56 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Calcúlase a enerxía cinética substituíndo v^2 por $G\,M / r$:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} = 3{,}78 \cdot 10^9 \text{ J}$$

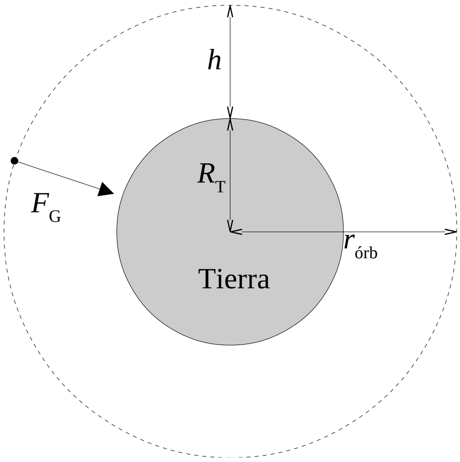
A enerxía cinética é a metade e de signo contrario que a enerxía potencial.
A enerxía (mecánica) total é a suma das enerxías cinética e potencial, e vale o mesmo que a enerxía cinética, pero é negativa.

$$E = E_c + E_p = 3{,}78 \cdot 10^9 [\text{J}] - 7{,}56 \cdot 10^9 [\text{J}] = -3{,}78 \cdot 10^9 \text{ J}$$

14. Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a unha altura de 6000 km sobre a superficie da Terra. Calcula:
 a) O tempo que tarda en dar unha volta completa.
 b) O peso do satélite a esa altura.
 Datos: Terra: g_0 = 9,80 m/s²; R = 6400 km. *(P.A.U. xuño 06)*
 Rta.: a) T = 3 h 48 min.; b) P_h = 261 N.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio da Terra	R = 6400 km = 6,40·10⁶ m
Altura da órbita	h = 6000 km = 6,00·10⁶ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,80 m/s²
Masa do satélite	m = 100 kg
Incógnitas	
Tempo que tarda en dar unha volta completa	T
Peso do satélite a esa altura = forza gravitacional que actúa sobre o satélite	P_h
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Valor da velocidade do satélite na órbita arredor da Terra	v
Constante da gravitación universal	G
Raio da órbita	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:



a) Calcúlase o raio da órbita:

$$r = R + h = 6{,}40·10^6 \text{ [m]} + 6{,}00·10^6 \text{ [m]} = 1{,}24·10^7 \text{ m}$$

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na ecuación da velocidade orbital.

$$v=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9,80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6,40 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{1,24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}}=5,69 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T=\frac{2\pi \cdot r}{v}=\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}{5,69 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=1,37 \cdot 10^4\ \mathrm{s}=3\ \mathrm{h}\ 48\ \mathrm{min}$$

Análise: Pola terceira lei de Kepler, tamén aplicable a satélites que xiran arredor dun astro, os cadrados dos períodos son directamente proporcionais aos cubos dos semieixes maiores das elipses, ou, se as traxectorias son circulares, aos raios das órbitas. O período dun satélite de órbita baixa (h = 400 km) é de hora e media. O raio da órbita deste satélite é aproximadamente o dobre, polo que o período debería ser $\sqrt{2^3} \approx 3$ veces maior, dunhas catro horas e media.

b) Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na expresión da forza gravitacional, que coincide coa forza peso:

$$P_\mathrm{h}=G\frac{M \cdot m}{r^2}=\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2}=\frac{4,01 \cdot 10^{12}\ [\mathrm{m^3/s^2}] \cdot 100\ [\mathrm{kg}]}{(1,24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}])^2}=261\ \mathrm{N}$$

Análise: O peso diminúe coa altura, sendo inversamente proporcional ao cadrado da distancia ao centro da Terra. A unha distancia $r \approx 2\ R$, o peso debería ser unhas $2^2 = 4$ veces menor que no chan $m \cdot g_0$ = 980 N, ou sexa uns 250 N.

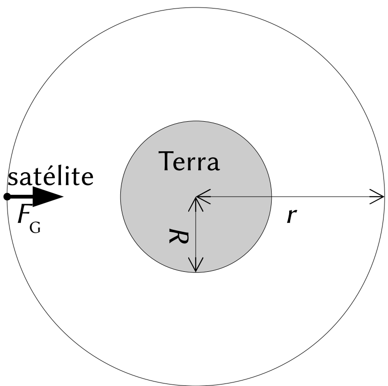
15. Un satélite artificial de 64,5 kg xira arredor da Terra nunha órbita circular de raio r = 2,32 R. Calcula:
    a) O período de rotación do satélite.
    b) O peso do satélite na órbita.
    Datos: Terra: g_0 = 9,80 m/s²; R = 6370 km. *(P.A.U. xuño 05)*
    Rta.: a) T = 4 h 58 min.; b) P_h = 117 N.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio da Terra	R = 6370 km = $6,37 \cdot 10^6$ m
Raio da órbita	r = 2,32 R
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,80 m/s²
Masa do satélite	m = 64,5 kg
Incógnitas	
Período de rotación do satélite arredor da Terra	T
Peso do satélite na órbita = forza gravitacional que actúa sobre o satélite	P_h
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Valor da velocidade do satélite na órbita arredor da Terra	v
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$

Solución:

a) Calcúlase o raio da órbita:

$$r = 2,32\ R = 2,32 \cdot 6,37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] = 1,48 \cdot 10^7\ \mathrm{m}$$



A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2\cdot r^3 = G\cdot M\cdot T^2$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m\cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}g_0=G\frac{M\cdot\cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$4 \pi^2 \cdot r^3 = g_0 \cdot R^2 \cdot T^2$$

Despéxase o período e substitúense os datos:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R^2}}=2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{(1{,}84\cdot 10^7\ [\mathrm{m}])^3}{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}](6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}}=1{,}79\cdot 10^4\ \mathrm{s}=4\ \mathrm{h}\ 58\ \mathrm{min}$$

Análise: Pola terceira lei de Kepler, tamén aplicable a satélites que xiran arredor dun astro, os cadrados dos períodos son directamente proporcionais aos cubos dos semieixes maiores das elipses, ou, se as traxectorias son practicamente circulares, aos raios das órbitas. O período da Lúa, que dista uns 60 *R da Terra, é de* 28 *días. O período deste satélite, que está a uns* 2,4 *R (*25 *veces menor) sería de* $\sqrt{25^3} \approx 125$ *veces menor* ≈ 0,25 *días* ≈ 6 *horas.*

b) Substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ na expresión da forza gravitacional, que coincide coa forza peso:

$$P_{\mathrm{h}}=F_{\mathrm{G}}=G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r^2}=\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}](6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2\cdot 64{,}5\ [\mathrm{kg}]}{(1{,}84\cdot 10^7\ [\mathrm{m}])^2}=117\ \mathrm{N}$$

Análise: O peso diminúe coa altura, sendo inversamente proporcional ao cadrado da distancia ao centro da Terra. A unha distancia $r \approx 2{,}4\ R$, o peso debería ser unhas $2{,}4^2 = 6$ veces menor que no chan $m \cdot g_0 = 632$ N, ou sexa uns 100 N.

● Campo gravitacional

1. Se a masa da Lúa é 0,012 veces a da Terra e o seu raio é 0,27 o terrestre, acha:
   a) O campo gravitacional na Lúa.
   b) A velocidade de escape na Lúa.
   c) O período de oscilación, na superficie lunar, dun péndulo cuxo período na Terra é 2 s.
   Datos: g_0 = 9,8 m/s²; R_L = 1,7·10⁶ m. *(P.A.U. xuño 12)*
   Rta.: a) g_L = 1,6 m/s²; b) v_e = 2,3 km/s; c) T = 4,9 s.

Datos	***Cifras significativas: 2***
Relación entre as masas da Lúa e da Terra	$M_L/M_T = 0{,}012$
Relación entre os raios da Lúa e da Terra	$R_L/R_T = 0{,}27$
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	$g_T = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$
Raio da Lúa	$R_L = 1{,}7\cdot 10^6\ \mathrm{m}$
Período do péndulo na Terra	$T_T = 2{,}0\ \mathrm{s}$
Incógnitas	
Campo gravitacional na Lúa	g_L
Velocidade de escape na Lúa	v_e
Período de oscilación na Lúa dun péndulo cuxo T_T = 2 s	T_L
Outros símbolos	
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Peso dun obxecto	$P = m \cdot g$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional dun obxecto de masa m situado a unha distancia r do centro dun astro de masa M (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Ecuacións

Período dun péndulo simple de lonxitude L nun punto onde a aceleración da gravidade é g $$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Solución:

a) O peso dun obxecto preto da superficie da Terra é a forza coa que a Terra o atrae:

$$m\,g_\text{T}=G\frac{M_\text{T}\,m}{R_\text{T}^2}$$

Analogamente para a Lúa:

$$m\,g_\text{L}=G\frac{M_\text{L}\,m}{R_\text{L}^2}$$

Dividindo a segunda ecuación entre a primeira, queda:

$$\frac{\cancel{m}\cdot g_\text{L}}{\cancel{m}\cdot g_\text{T}}=\frac{\cancel{G}\frac{M_\text{L}\cdot \cancel{m}}{R_\text{L}^2}}{\cancel{G}\frac{M_\text{T}\cdot \cancel{m}}{R_\text{T}^2}}$$

$$\frac{g_\text{L}}{g_\text{T}}=\frac{M_\text{L}/M_\text{T}}{(R_\text{L}/R_\text{T})^2}=\frac{0{,}012}{0{,}27^2}=0{,}16$$

Despexando:

$$g_\text{L} = 0{,}16 \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2] = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

Análise: O resultado é razoable, xa que sabemos que a gravidade na superficie da Lúa é unhas 6 *veces menor que na superficie da Terra.*

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_\text{c} + E_\text{p})_\infty - (E_\text{c} + E_\text{p})_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_\text{c} + E_\text{p})_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_\text{p}=-G\frac{M\cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_\text{s}=(E_\text{c}+E_\text{p})_\text{s}=0+\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=-G\frac{M\cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_\text{e}^2 = (E_\text{c} + E_\text{p})_\infty - (E_\text{c} + E_\text{p})_\text{s}$$

$$\frac{1}{2}m\,v_\text{e}^2=0-\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=G\frac{M\cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\,g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

b) A velocidade de escape na Lúa obtense substituíndo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$, e os valores dos datos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2\,g_L\,R_L^2}{R_L}} = \sqrt{2\,g_L\,R_L} = \sqrt{2 \cdot 1{,}6\,[\mathrm{m/s^2}] \cdot 1{,}7 \cdot 10^6\,[\mathrm{m}]} = 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 2{,}3\ \mathrm{km/s}$$

c) O período, T, dun péndulo de lonxitude L nun lugar onde a gravidade é g, vén dado pola ecuación:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividindo as expresións correspondentes á Terra e a Lúa, queda:

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_L}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{1{,}6}} = 2{,}5$$

Substitúese o dato T_T = 2,0 s:

$$T_L = 2{,}5 \cdot 2{,}0\ [\mathrm{s}] = 4{,}9\ \mathrm{s}$$

Análise: O resultado é razoable. A gravidade na superficie da Lúa é menor que na superficie da Terra, e canto máis pequena, máis lentamente se move o péndulo e maior é o seu período.

● Masas puntuais

1. Dúas masas de 150 kg están situadas en A(0, 0) e B(12, 0) metros. Calcula:
   a) O vector campo e o potencial gravitacional en C(6, 0) e D(6, 8).
   b) Se unha masa de 2 kg posúe no punto D unha velocidade de $-10^{-4}\,\bar{\mathbf{j}}$ m/s, calcula a súa velocidade no punto C.
   c) Razoa se o movemento entre C e D é rectilíneo uniforme, rectilíneo uniformemente acelerado, ou de calquera outro tipo.
   Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. xuño 14)*
   Rta.: a) $\bar{\mathbf{g}}_C = \bar{\mathbf{0}}$; $\bar{\mathbf{g}}_D = -1{,}6 \cdot 10^{-10}\,\bar{\mathbf{j}}$ N/kg; $V_C = -3{,}34 \cdot 10^{-9}$ J/kg; $V_D = -2{,}00 \cdot 10^{-9}$ J/kg; b) $\bar{\boldsymbol{v}} = -1{,}13 \cdot 10^{-4}\,\bar{\mathbf{j}}$ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Cada unha das masas no eixo X	$M_A = M_B = M = 150$ kg
Vector de posición da masa en A	$\bar{\boldsymbol{r}}_A = (-0, 0)$ m
Vector de posición da masa en B	$\bar{\boldsymbol{r}}_B = (12{,}0, 0)$ m
Vector de posición do punto C	$\bar{\boldsymbol{r}}_C = (6{,}00, 0)$ m
Vector de posición do punto D	$\bar{\boldsymbol{r}}_D = (6{,}00, 8{,}00)$ m
Masa no punto D	$m_D = 2{,}00$ kg
Velocidade no punto D	$\bar{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00 \cdot 10^{-4}\,\bar{\mathbf{j}}$ m/s
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

Incógnitas

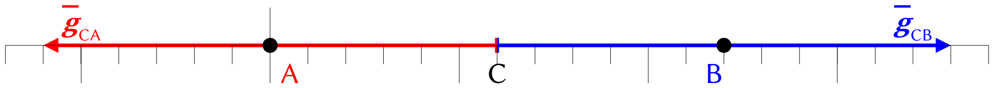
Campo gravitacional en C e en D	$\overline{\boldsymbol{g}}_C$, $\overline{\boldsymbol{g}}_D$
Potencial gravitacional en C e en D	V_C, V_D
Velocidade en C da masa que sae de D	$\overline{\boldsymbol{v}}_C$

Ecuacións

Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce cada masa puntual sobre cada unha das outras)	$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Campo gravitacional nun punto a unha distancia, *r*, dunha masa, *M*	$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitacional nun punto a unha distancia, *r*, dunha masa, *M*	$V = -G\frac{M}{r}$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = m \cdot V = -G\frac{M \cdot m}{r}$
Traballo do campo cando se despraza unha masa desde o punto 1 ao punto 2	$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$
Enerxía cinética dunha masa, *m*, que se move cunha velocidade, *v*	$E_c = ½\, m \cdot v^2$

Solución:

a) Faise un debuxo no que se sitúan os puntos A(0, 0), B(12, 0) e C(6, 0). Debúxanse os vectores de campo gravitacional creados polas masas no punto C, un vector por cada masa. Dado que os seus valores son iguais, porque as masas e as distancias son iguais, os vectores terán a mesma medida e, polo tanto, a resultante será cero.



Os cálculos realízanse a continuación, pero non son necesarios.
A distancia do punto A ao punto C é: $r_{AC} = |(6{,}00,\ 0)\ [\text{m}] - (0,\ 0)| = 6{,}00$ m.
O vector unitario do punto C, tomando coma orixe o punto A, é $\overline{\mathbf{i}}$, o vector unitario do eixe *X*.
Calcúlase o campo gravitacional no punto C creado pola masa situada no punto A:

$$\vec{g}_{CA} = -G\frac{M_A}{r_{AC}^2}\vec{u}_r = -6{,}67\cdot10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150{,}0\ [\text{kg}]}{(6{,}00\ [\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}} = -2{,}78\cdot10^{-10}\ \vec{\mathbf{i}}\ \text{N/kg}$$

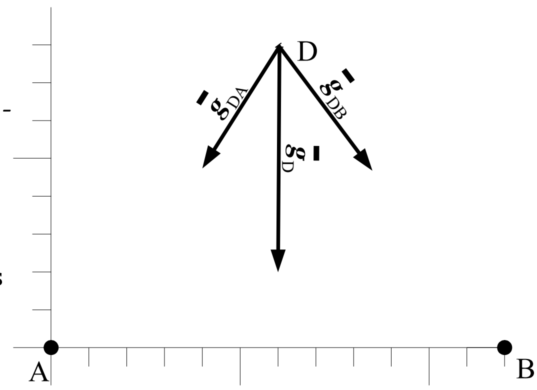
O campo gravitacional no punto C, creado pola masa situada no punto B é simétrico ao creado pola masa situada no punto A:

$$\overline{\boldsymbol{g}}_{CB} = 2{,}78\cdot10^{-10}\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/kg}$$

Polo principio de superposición, o campo resultante no punto C é a suma vectorial dos campos creados nese punto por cada masa.

$$\overline{\boldsymbol{g}}_C = \overline{\boldsymbol{g}}_{CA} + \overline{\boldsymbol{g}}_{CB} = \overline{\mathbf{0}}$$

Faise un debuxo no que se sitúan os puntos A(0, 0), B(12, 0) e D(6, 8). Debúxanse os vectores de campo gravitacional creados polas masas no punto D, un vector por cada masa.
Como os seus valores son os mesmos, porque as masas e as distancias son iguais, os vectores serán da mesma medida.
Debúxase o vector suma, que é o campo resultante, $\overline{\boldsymbol{g}}_D$.
As compoñentes horizontais dos campos creados polas masas cancelan e a resultante dirixirase na dirección negativa do eixe *Y*. O valor da resultante será a suma das compoñentes verticais de cada campo e, ao ser dous deles, o vector campo resultante medirá o dobre da compoñente vertical dun deles.
Calcúlase a distancia do punto A ao punto D:



$$r_{AD} = |\vec{r}_{AD}| = |\vec{r}_D - \vec{r}_A| = |6{,}00\ \vec{\mathbf{i}} + 8{,}00\ \vec{\mathbf{j}}| = \sqrt{(6{,}00\ [\text{m}])^2 + (8{,}00\ [\text{m}])^2} = 10{,}0\ \text{m}$$

Calcúlase o vector unitario do punto D tomando como orixe o punto A.

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{(6{,}00\,\vec{i} + 8{,}00\,\vec{j})\,[\text{m}]}{10{,}0\,[\text{m}]} = 0{,}600\,\vec{i} + 0{,}800\,\vec{j}$$

Calcúlase o campo gravitacional no punto D creado pola masa situada no punto A:

$$\vec{g}_{DA} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150\,[\text{kg}]}{(10{,}0\,[\text{m}])^2}(0{,}600\,\vec{i} + 0{,}800\,\vec{j}) = (-6{,}00\cdot10^{-11}\,\vec{i} - 8{,}00\cdot10^{-11}\,\vec{j})\text{ N/kg}$$

O campo gravitacional no punto D, creado pola masa situada no punto B, é simétrico ao do punto A. Os valores dos seus compoñentes son iguais, pero o signo da compoñente horizontal é oposto, porque está dirixido en sentido contrario:

$$\bar{g}_{DB} = (6{,}00\cdot10^{-11}\,\bar{i} - 8{,}00\cdot10^{-11}\,\bar{j})\text{ N/kg}$$

Polo principio de superposición, o campo resultante no punto C é a suma vectorial dos campos creados nese punto por cada masa.

$$\bar{g}_D = \bar{g}_{DA} + \bar{g}_{DB} = -1{,}60\cdot10^{-10}\,\bar{j}\text{ N/kg}$$

O potencial gravitacional nun punto, debido á presencia de varias masas, é a suma dos potenciais producidos nese punto por cada masa, coma se o resto das masas non estivese presente.
Para determinar o potencial gravitacional nun punto, calcúlanse os potenciais creados nese punto por cada masa, e despois súmanse.
A ecuación do potencial gravitacional, V, nun punto situado a unha distancia, r, dunha masa puntual, Q, é:

$$V = -G\frac{M}{r}$$

G é a constante da gravitación universal.
Calcúlase o potencial gravitacional no punto C, creado pola masa situada no punto A:

$$V_{CA} = -G\frac{M}{r_{AC}} = -6{,}67\cdot10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150{,}0\,[\text{kg}]}{6{,}00\,[\text{m}]} = -1{,}17\cdot10^{-9}\text{ J/kg}$$

O potencial gravitacional no punto C, creado pola masa situada no punto B, vale o mesmo, porque a masa e a distancia son iguais.
O potencial gravitacional no punto C é a suma:

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = 2\,V_{CA} = 2\cdot(-1{,}17\cdot10^{-9}\,[\text{J/kg}]) = -3{,}34\cdot10^{-9}\text{ J/kg}$$

Calcúlase o potencial gravitacional no punto D creado pola masa situada no punto A:

$$V_{DA} = -G\frac{M}{r_{AD}} = -6{,}67\cdot10^{-11}\,[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150{,}0\,[\text{kg}]}{10{,}0\,[\text{m}]} = -1{,}00\cdot10^{-9}\text{ J/kg}$$

O potencial gravitacional no punto D, creado pola masa situada no punto B, vale o mesmo, porque a masa e a distancia son iguais.
O potencial gravitacional do punto D é a suma:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = 2\,V_{DA} = 2\cdot(-1{,}00\cdot10^{-9}\,[\text{J/kg}]) = -2{,}00\cdot10^{-9}\text{ J/kg}$$

b) Xa que a aceleración non é constante, non se pode resolver dunha maneira sinxela por cinemática. (Non se pode usar a ecuación $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}_0\,t + ½\,\bar{a}\,t^2$, que só é válida se o vector aceleración, $\bar{a}$, é un vector constante).
Como o campo gravitacional é un campo conservativo, aplícase o principio de conservación da enerxía mecánica aos puntos C e D.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_C^2 + 2\left(-G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r_{AC}}\right) = \frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_D^2 + 2\left(-G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r_{AD}}\right)$$

Despexando o valor da velocidade en C, queda:

$$v_C=\sqrt{v_D^2+4\,G\,M\left(\frac{1}{r_{AC}}-\frac{1}{r_{AD}}\right)}=$$

$$=\sqrt{(1{,}00\cdot 10^{-4}[\mathrm{m/s}])^2+4\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N\,m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 150\,[\mathrm{kg}]\left(\frac{1}{6{,}00\,[\mathrm{m}]}-\frac{1}{10{,}0\,[\mathrm{m}]}\right)}=1{,}13\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s}$$

Como a velocidade é un vector, hai que deducir a dirección e sentido.
Como tanto a aceleración como a velocidade no punto D teñen a dirección do eixo Y en sentido negativo, a dirección da velocidade no punto C é a do eixo Y en sentido negativo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_C = -1{,}13\cdot 10^{-4}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$$

Análise: O valor da velocidade é moi pequeno, pero isto é lóxico, se temos en conta que a forza gravitacional é unha forza de moi baixa intensidade (se as masas non son de tipo planetario).

c) A aceleración da masa que se move de D a C está dirixida en todo momento cara a C. Como a velocidade en D tamén tiña esa dirección, o movemento é rectilíneo, paralelo ao eixe Y. Pero o valor do campo gravitacional nos puntos polos que pasa a masa que se move non é constante. Vemos que non é o mesmo no punto C que no punto D. Por tanto a aceleración non é constante.
O movemento é rectilíneo e acelerado, pero con aceleración variable.

O que segue é a demostración da relación entre o campo gravitacional, que vale o mesmo que a aceleración, e a coordenada y nos puntos polos que pasa a masa móbil entre D e C.
Para un punto G calquera entre C e D, o campo gravitacional creado pola masa situada en A é:

$$\vec{g}_{GA}=-G\frac{M}{r_{AG}^2}\vec{u}_r=-6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\,[\mathrm{kg}]}{\left(\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\,[\mathrm{m}]\right)^2}\frac{(6{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+y_G\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\,[\mathrm{m}]}$$

Por simetría, o campo creado nese punto G pola masa situada en B é:

$$\vec{g}_{GB}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\,[\mathrm{kg}]}{\left(\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\,[\mathrm{m}]\right)^2}\frac{(-6{,}00\,\vec{\mathbf{i}}+y_G\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\,[\mathrm{m}]}$$

O vector resultante valería

$$\vec{g}_G=\vec{g}_{GA}+\vec{g}_{GB}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{150\,[\mathrm{kg}]}{\left((6{,}00^2+y_G^2)^{3/2}\,[\mathrm{m}]^3\right)}\,(2\,y_G\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]$$

$$\vec{g}_G=\frac{-2{,}00\cdot 10^{-8}\ y_G}{(6{,}00^2+y_G^2)^{3/2}}\ \vec{\mathbf{j}}\ [\mathrm{N/m}]$$

2. Tres masas de 100 kg están situadas nos puntos A(0, 0), B(2, 0), C(1, $\sqrt{3}$) (en metros). Calcula:
   a) O campo gravitacional creado por estas masas no punto D(1, 0)
   b) A enerxía potencial que tería unha masa de 5 kg situada en D.
   c) Quen tería que realizar traballo para trasladar esa masa desde D ao infinito, o campo ou forzas externas?

   Dato: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. set. 09)*

   Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{g}}_D = 2{,}22\cdot 10^{-9}\ \overline{\mathbf{j}}$ N/kg; b) $E_p = -8{,}60\cdot 10^{-8}$ J; c) externas.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de cada un dos corpos	$M_A = M_B = M_C = M = 100$ kg
Vector de posición da masa en A	$\overline{\boldsymbol{r}}_A = (0{,}00,\ 0{,}00)$ m
Vector de posición da masa en B	$\overline{\boldsymbol{r}}_B = (2{,}00,\ 0{,}00)$ m
Vector de posición da masa en C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (1{,}00,\ 1{,}73)$ m
Vector de posición do punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (1{,}00,\ 0{,}00)$ m
Masa no punto D	$m_D = 5{,}00$ kg
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$
Incógnitas	
Vector campo gravitacional no punto D	$\overline{\boldsymbol{g}}_D$
Enerxía potencial gravitacional no punto D	$E_{p\,D}$

Ecuacións

Lei de Newton da gravitación universal (aplicada á forza que exerce cada masa puntual sobre cada unha das outras) $\vec{F}=-G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r$

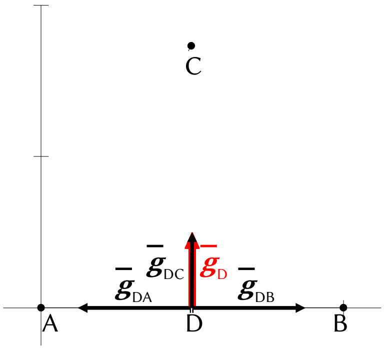
Campo gravitacional nun punto a unha distancia, *r*, dunha masa, *M* $\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$

Potencial gravitacional nun punto a unha distancia, *r*, dunha masa, *M* $V=-G\frac{M}{r}$

Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito) $E_p=m\cdot V=-G\frac{M\cdot m}{r}$

Traballo do campo cando se despraza unha masa desde o punto 1 ao punto 2 $W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$

Solución:



a) Faise un debuxo no que se sitúan os puntos A(0, 0), B(2, 0), C(1, 1,7) e D(1, 0). Debúxanse os vectores de campo gravitacional creados polas masas no punto D, un vector por cada masa.
Os valores dos campos producidos polas masas situadas nos puntos A e B son iguais, porque as masas e as distancias son iguais. Os vectores serán da mesma medida, e anularanse entre si.
O vector suma, que é o campo resultante, $\bar{g}_D$, coincide co vector campo producido pola masa situada no punto C.
O principio de superposición di que a intensidade de campo gravitacional nun punto, debido á presencia de varias masas, é a suma vectorial dos campos producidos nese punto por cada masa, coma se o resto das masas non estivese presente.
Para determinar o campo nun punto, calcúlanse os campos creados nese punto por cada masa, e despois súmanse os vectores.
A forza de atracción gravitacional entre dúas masas puntuais ou esféricas, *M* e *m*, vén dada pola lei da gravitación de Newton. *G* é a constante da gravitación universal e $\bar{u}_r$ o vector unitario na liña que une as masas.

$$\vec{F}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

O campo gravitacional nun punto situado a unha distancia, *r*, dunha masa puntual, *M*, é a forza sobre a unidade de masa situada nese punto.

$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{-G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{m}}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

A distancia do punto A ao punto D é: r_{AD} = |(1,00, 0) [m] – (0, 0) [m]| = 1,00 m.
O vector unitario do punto D, tomando coma orixe o punto A, é $\bar{\mathbf{i}}$, o vector unitario do eixe *X*.
Calcúlase o campo gravitacional no punto D, creado pola masa de 100 kg situada no punto A:

$$\vec{g}_{DA}=-6{,}67\cdot10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2kg^{-2}}]\cdot\frac{100\,[\mathrm{kg}]}{(1{,}00\,[\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=-6{,}67\cdot10^{-9}\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/kg}$$

O campo gravitacional no punto D, creado pola masa situada no punto B, é simétrico ao creado pola masa situada no punto A:

$$\bar{g}_{DB} = 6{,}67\cdot10^{-9}\ \bar{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/kg}$$

A distancia do punto C ao punto D é: r_{CD} = |(1,00, 0) [m] – (1, 1,73) [m]| = 1,73 m.
O vector unitario do punto D, tomando coma orixe o punto C, é -$\bar{\mathbf{j}}$, o vector unitario do eixe *Y* en sentido negativo.
Calcúlase a intensidade de campo gravitacional no punto D creado pola masa situada no punto C:

$$\vec{g}_{DC}=-6{,}67\cdot10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2kg^{-2}}]\cdot\frac{100\,[\mathrm{kg}]}{(1{,}73\,[\mathrm{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=2{,}22\cdot10^{-9}\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/kg}$$

Polo principio de superposición o campo resultante no punto D é a suma vectorial dos campos creados nese punto por cada masa.

$$\overline{\mathbf{g}}_D = \overline{\mathbf{g}}_{DA} + \overline{\mathbf{g}}_{DB} + \overline{\mathbf{g}}_{DC} = 2{,}22·10^{-9}\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/kg}$$

b) A enerxía potencial gravitacional dunha masa m situada nun punto, debida á influencia de varias masas M_i, cada unha delas a unha distancia r_i do punto, é a suma das enerxías potenciais de cada unha das interaccións da masa m con cada unha das masas M_i. Pero pódese tamén calcular a enerxía potencial a partir da definición de potencial gravitacional do punto onde se atopa a masa m:

$$E_p = m \cdot V$$

O potencial gravitacional nun punto, debido á presencia de varias masas, é a suma dos potenciais producidos nese punto por cada masa, coma se o resto das masas non estivese presente.
Para determinar o potencial gravitacional nun punto, calcúlanse os potenciais creados nese punto por cada masa, e despois súmanse.

$$V=\sum\left(-G\frac{M_i}{r_i}\right)=-G\sum\frac{M_i}{r_i}$$

Se as masas M_i son todas iguais, ($M = M_i$) entón queda:

$$V=-G M\sum\frac{1}{r_i}$$

A expresión da enerxía potencial sería:

$$E_p=-G M m\sum\frac{1}{r_i}$$

$$E_p=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 100\ [\text{kg}]\cdot 5{,}00\ [\text{kg}]\left(\frac{1}{1\ [\text{m}]}+\frac{1}{1\ [\text{m}]}+\frac{1}{1{,}73\ [\text{m}]}\right)=-8{,}60\cdot 10^{-8}\ \text{J}$$

c)
O campo gravitacional é un campo conservativo, porque o traballo realizado pola forza do campo, cando unha masa se move entre dous puntos, é independente do camiño seguido e depende só dos puntos inicial e final. Defínese unha función escalar chamada enerxía potencial, E_p, asociada ao campo vectorial de forzas, de tal xeito que o traballo realizado pola forza do campo ao mover unha masa entre dous puntos é igual á variación da enerxía potencial entre estes dous puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

Tamén se define outra magnitude escalar, chamada potencial gravitacional, que é igual á enerxía potencial da unidade de masa.

$$V=\frac{E_p}{m}$$

O traballo realizado pola forza de campo, cando unha masa se move do punto A ao punto B, é:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = m \cdot V_A - m \cdot V_B = m\,(V_A - V_B)$$

O traballo da resultante das forzas gravitacionais cando leva a masa en D ata o infinito, sen variación de enerxía cinética (suponse), é igual á diferenza (cambiada de signo) de enerxía potencial que posúe a masa de 5,00 kg neses dous puntos. Por definición, a enerxía potencial (e o potencial) no infinito é nula, polo que:

$$W_{D\to\infty} = -\Delta E_p = -(E_{p\infty} - E_{pD}) = E_{pD} - E_{p\infty} = E_{pD} = -8{,}60·10^{-8}\ \text{J}$$

Por tanto, o traballo das forzas gravitacionais é negativo, (a forza do campo oponse ao desprazamento cara ao infinito) e o traballo deberá facelo algunha forza externa.

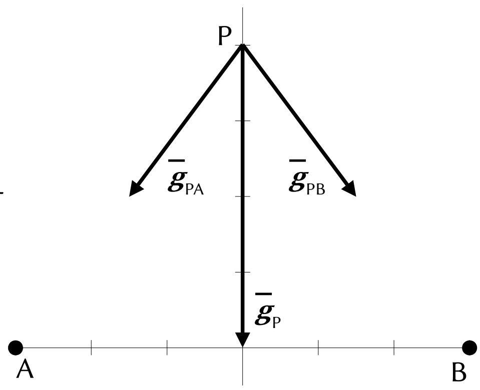
3. Dúas masas de 50 kg están situadas en A(–30, 0) e B(30, 0) respectivamente (coordenadas en metros). Calcula:
   a) O campo gravitacional en P(0, 40) e en D(0, 0).
   b) O potencial gravitacional en P e D.
   c) Para unha masa m, onde é maior a enerxía potencial gravitacional, en P ou en D?

Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$. *(P.A.U. set. 08)*
Rta.: a) $\bar{\mathbf{g}}_P = -2{,}13\cdot10^{-12}\ \bar{\mathbf{j}}$ N/kg; $\bar{\mathbf{g}}_D = \bar{\mathbf{0}}$; b) $V_P = -1{,}33\cdot10^{-10}$ J/kg; $V_D = -2{,}22\cdot10^{-10}$ J/kg; c) En P.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Cada unha das masas no eixo *X*	$M_A = M_B = M = 50{,}0$ kg
Vector de posición da masa en A	$\bar{\mathbf{r}}_A = (-30{,}0,\ 0)$ m
Vector de posición da masa en B	$\bar{\mathbf{r}}_B = (30{,}0,\ 0)$ m
Vector de posición do punto P	$\bar{\mathbf{r}}_P = (0,\ 40{,}0)$ m
Vector de posición do punto D	$\bar{\mathbf{r}}_D = (0,\ 0)$ m
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$
Incógnitas	
Campo gravitacional en P e en D	$\bar{\mathbf{g}}_P$, $\bar{\mathbf{g}}_D$
Potencial gravitacional en P e en D	V_P, V_D
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce cada masa puntual sobre cada unha das outras)	$\vec{F}_G = -G\dfrac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\bar{\mathbf{F}} = m\cdot\bar{\mathbf{a}}$
Campo gravitacional nun punto a unha distancia, *r*, dunha masa, *M*	$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_G}{m} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitacional nun punto a unha distancia, *r*, dunha masa, *M*	$V = -G\dfrac{M}{r}$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = m\cdot V = -G\dfrac{M\cdot m}{r}$

Solución:

a) Faise un debuxo no que se sitúan os puntos A(-30, 0), B(30, 0) e P(0, 40). Debúxanse os vectores de campo gravitacional creados polas masas no punto P, un vector por cada masa.
Como os seus valores son os mesmos, porque as masas e as distancias son iguais, os vectores serán da mesma medida.
Debúxase o vector suma, que é o campo resultante, $\bar{\mathbf{g}}_P$.
As compoñentes horizontais dos campos creados polas masas cancelan e a resultante dirixirase na dirección negativa do eixe *Y*. O valor da resultante será a suma das compoñentes verticais de cada campo e, ao ser dous deles, o vector campo resultante medirá o dobre da compoñente vertical dun deles.



O principio de superposición di que a intensidade de campo gravitacional nun punto, debido á presencia de varias masas, é a suma vectorial dos campos producidos nese punto por cada masa, coma se o resto das masas non estivese presente.
Para determinar o campo nun punto, calcúlanse os campos creados nese punto por cada masa, e despois súmanse os vectores.
A forza de atracción gravitacional entre dúas masas puntuais ou esféricas, *M* e *m*, vén dada pola lei da gravitación de Newton. *G* é a constante da gravitación universal e $\bar{\mathbf{u}}_r$ o vector unitario na liña que une as masas.

$$\vec{F} = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

O campo gravitacional nun punto situado a unha distancia, *r*, dunha masa puntual, *M*, é a forza sobre a unidade de masa situada nese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\dfrac{M\cdot \cancel{m}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{m}} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Calcúlase a distancia do punto A ao punto P:

$$\vec{r}_{AP}=\vec{r}_P-\vec{r}_A=40{,}0\,\vec{\mathbf{j}}-(-30{,}0)\,\vec{\mathbf{i}}=30{,}0\,\vec{\mathbf{i}}+40{,}0\,\vec{\mathbf{j}}$$
$$|\vec{r}_{AP}|=\sqrt{(30{,}0\,[\mathrm{m}])^2+(40{,}0\,[\mathrm{m}])^2}=50{,}0\ \mathrm{m}$$

Calcúlase o vector unitario do punto P tomando como orixe o punto A:

$$\vec{u}_{AP}=\frac{\vec{r}_{AP}}{|\vec{r}_{AP}|}=\frac{(30{,}0\,\vec{\mathbf{i}}+40{,}0\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{50{,}0\,[\mathrm{m}]}=0{,}600\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}800\,\vec{\mathbf{j}}$$

Calcúlase o campo gravitacional no punto P, creado pola masa situada no punto A:

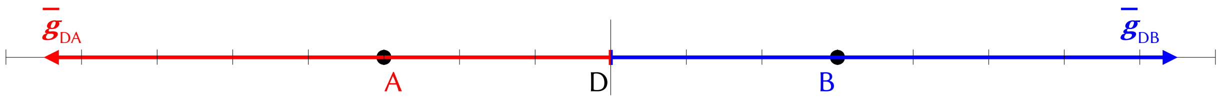
$$\vec{g}_{PA}=-G\frac{M}{r_{AP}^2}\vec{u}_r=-6{,}67\cdot10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\,[\mathrm{kg}]}{(50{,}0\,[\mathrm{m}])^2}(0{,}600\,\vec{\mathbf{i}}+0{,}800\,\vec{\mathbf{j}})=(-8{,}00\cdot10^{-13}\,\vec{\mathbf{i}}-10{,}7\cdot10^{-13}\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/kg}$$

O campo gravitacional no punto P, creado pola masa situada no punto B, é simétrico ao do punto A. Os valores dos seus compoñentes son iguais, pero o signo da compoñente horizontal é oposto, porque está dirixido en sentido contrario:

$$\bar{g}_{PB}=(8{,}00\cdot10^{-13}\,\bar{\mathbf{i}}-10{,}7\cdot10^{-13}\,\bar{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/kg}$$

Polo principio de superposición, o campo gravitacional resultante no punto P é a suma vectorial dos campos creados nese punto por cada masa.

$$\bar{g}_P=\bar{g}_{PA}+\bar{g}_{PB}=-2{,}13\cdot10^{-12}\,\bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/kg}$$



No punto D(0, 0) os campos gravitacionais que exercen ambas as masas son opostas (mesmo módulo, mesma dirección e sentido contrario), e, por tanto, a resultante é nula.

$$\bar{g}_D=0\,\bar{\mathbf{i}}+0\,\bar{\mathbf{j}}=\bar{\mathbf{0}}$$

b)
O potencial gravitacional nun punto, debido á presencia de varias masas, é a suma dos potenciais producidos nese punto por cada masa, coma se o resto das masas non estivese presente.
Para determinar o potencial gravitacional nun punto, calcúlanse os potenciais creados nese punto por cada masa, e despois súmanse.
A ecuación do potencial gravitacional, V, nun punto situado a unha distancia, r, dunha masa puntual, Q, é:

$$V=-G\frac{M}{r}$$

G é a constante da gravitación universal.
Calcúlase o potencial gravitacional no punto P, creado pola masa situada no punto A:

$$V_{PA}=-G\frac{M}{r_{AP}}=-6{,}67\cdot10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\,[\mathrm{kg}]}{50{,}0\,[\mathrm{m}]}=-6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{J/kg}$$

Por simetría, o potencial creado pola masa situada no punto B vale o mesmo.
O potencial gravitacional no punto P é la suma dos potenciais creados por cada masa:

$$V_P=V_{PA}+V_{PB}=2\,V_{PA}=2\cdot(-6{,}67\cdot10^{-11}\,[\mathrm{J/kg}])=-1{,}33\cdot10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

Calcúlase o potencial gravitacional no punto D, creado pola masa situada no punto A:

$$V_{DA}=-G\frac{M}{r_{AD}}=-6{,}67\cdot10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{50{,}0\,[\mathrm{kg}]}{30{,}0\,[\mathrm{m}]}=-1{,}11\cdot10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

Por simetría, o potencial creado pola masa do punto B vale o mesmo.
A enerxía potencial gravitacional do punto D é a suma:

$$V_D=V_{DA}+V_{DB}=2\,V_{DA}=2\cdot(-1{,}11\cdot10^{-10}\,[\mathrm{J/kg}])=-2{,}22\cdot10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

c) A enerxía potencial dun obxecto de masa m situado nun punto de potencial V é proporcional ao potencial do punto:

$$E_p=m\cdot V$$

Canto maior sexa a enerxía potencial do punto, maior será a enerxía potencial do obxecto. Por tanto, a enerxía potencial será maior no punto P ($-1{,}33\cdot10^{-10} > -2{,}22\cdot10^{-10}$)

Análise: Canto máis preto dunha masa atópese un obxecto, menor será a súa enerxía potencial. O punto D está máis preto das masas que o punto P. Un obxecto en D terá menor enerxía potencial que en P.

◊ CUESTIÓNS

● Satélites.

1. Arredor dun planeta xiran dous satélites, M e N, cuxos períodos de revolución son 32 e 256 días respectivamente. Se o raio da órbita do satélite M é 10^4 km, o raio do satélite N será:
A) $4\cdot10^4$ km.
B) $1{,}6\cdot10^5$ km.
C) $3{,}2\cdot10^5$ km.

(P.A.U. set. 16)

Solución: A

A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos, T, dos planetas no seu movemento arredor do Sol, son directamente proporcionais aos cubos dos semieixes maiores das súas órbitas elípticas.
Se se fai a aproximación de que as órbitas son practicamente circulares de raio r, a expresión matemática desta lei sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Isto pódese demostrar para órbitas circulares.
A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dous planetas, 1 e 2, dividimos as expresións correspondentes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G \cdot M} \cdot T_1^2}{\cancel{G \cdot M} \cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow R_2 = R_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 1{,}00 \cdot 10^4\ [\text{km}] \sqrt[3]{\left(\frac{256\ [\text{días}]}{32\ [\text{días}]}\right)^2} = 4{,}00 \cdot 10^7\ \text{km}$$

2. Supoñamos que a masa da Lúa diminuíse á metade do seu valor real. Xustifique se a frecuencia con que veriamos a Lúa chea sería:
   A) Maior que agora.
   B) Menor que agora.
   C) Igual que agora.

(P.A.U. xuño 16)

Solución: C

A velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor do centro dun astro de masa M é:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade é independente da masa do satélite (a Lúa), xa que só depende da masa do astro (a Terra) e do raio da órbita.
A velocidade nun movemento circular uniforme de raio, r, e período, T, é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Como a traxectoria é practicamente circular, se a velocidade e o raio son os mesmos, o período orbital tamén será igual. Como a frecuencia é a inversa do período, tampouco variaría a frecuencia.

3. Un satélite artificial de masa m que xira arredor da Terra nunha órbita de raio r ten unha velocidade v. Se cambia de órbita pasando a outra máis próxima á Terra, a súa velocidade debe:

A) Aumentar.
B) Diminuír.
C) Non necesita cambiar de velocidade.

(P.A.U. xuño 15)

Solución: A

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tangencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left| \sum \vec{\boldsymbol{F}} \right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade é inversamente proporcional á raíz cadrada do raio da órbita.
Se o raio, r, é menor, a velocidade, v, na nova órbita será maior.

4. Un planeta xira arredor do Sol cunha traxectoria elíptica. O punto de devandita traxectoria no que a velocidade orbital do planeta é máxima é:
   A) No punto máis próximo ao Sol.
   B) No punto máis afastado do Sol.
   C) Ningún dos puntos citados.

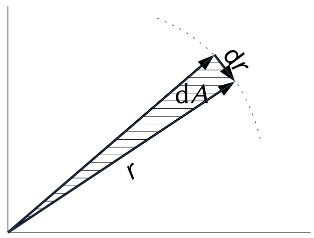
(P.A.U. set. 14)

Solución: A

A velocidade areolar dun planeta é a área que varre o raiovector que une o Sol co planeta na unidade de tempo.
A segunda lei de Kepler pode enunciarse así:
«O raiovector que une o Sol cun planeta varre áreas iguais en tempos iguais»
Nun sistema de referencia co Sol na orixe de coordenadas, a velocidade areolar será a derivada da área varrida polo vector de posición do planeta na unidade de tempo:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

A área varrida nun tempo moi pequeno dt, é a metade do produto vectorial do vector de posición, $\vec{r}$, do planeta polo seu vector desprazamento, d$\vec{r}$.



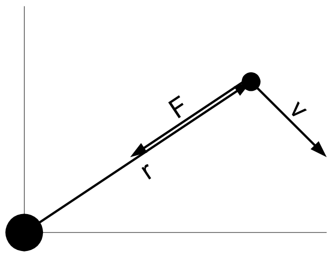
$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

A velocidade areolar pode expresarse así:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

Sendo $\vec{v}$ o vector velocidade do planeta.
Se derivamos $\vec{v}_A$ respecto ao tempo:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}\right)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{a}$$



O produto vectorial dun vector, $\vec{v}$, por si mesmo é cero.

$$|\vec{v} \times \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } 0° = 0$$

O vector de posición, $\vec{r}$, e o vector forza, $\vec{F}$, son paralelos de sentido oposto, e a aceleración, $\vec{a}$, ten a mesma dirección e sentido que aa forza de atracción entre o Sol e o planeta.
O produto vectorial de dous vectores paralelos tamén é cero, porque o seu módulo vale:

$$|\vec{r} \times \vec{a}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{a}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

O resultado é o vector $\vec{\mathbf{0}}$ (cero).

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Se a derivada é nula, a velocidade areolar é constante.

Como a velocidade areolar é constante, pódese escribir en módulos:

$$|\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \varphi = \text{constante}$$

Desprezando as variacións do ángulo φ, entre o vector de posición e o vector velocidade, canto menor sexa a distancia, r, entre o planeta e o Sol, maior será a súa velocidade.
O punto da traxectoria no que a velocidade orbital do planeta é máxima é o perihelio, o punto máis próximo ao Sol.

5. Se un satélite artificial describe órbitas circulares arredor da Terra, xustifica cal das seguintes afirmacións é correcta en relación coa súa enerxía mecánica E e as súas velocidades orbital v e de escape v_e:
   A) $E = 0$, $v = v_e$
   B) $E < 0$, $v < v_e$
   C) $E > 0$, $v > v_e$

(P.A.U. xuño 14)

Solución: Ningunha

Tal como está enunciada a pregunta, parece que a velocidade de escape del satélite refírese a cando o satélite atópase na órbita. Nese caso a velocidade de escape do satélite en órbita e a súa velocidade orbital coinciden, como se ve a continuación. A opción B non se cumpre.
A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despexando, a velocidade de escape dun satélite en órbita, queda:

$$v_{e\ o} = \sqrt{2\, G \frac{M}{r}}$$

Se a dirección de escape é perpendicular á velocidade do satélite, esta é a velocid perpendicular que hai que proporcionarlle.
Se a dirección de escape é paralela á dirección do movemento do satélite, hai que ter en conta a súa enerxía cinética.

Se o sentido de velocidade de escape fose o mesmo que o de avance do satélite,haberá que proporcionarlle unha velocidade adicional igual á diferenza entre a velocidade de escape e a que xa ten.

A velocidade de escape é igual que a velocidade orbital. Pero ningunha das opcións coincide cos resultados obtidos. $E < 0$ e $v = v_e$.

Análise: Imaxínome que aínda que a enunciado fala da velocidade de escape do satélite, o autor da cuestión daba por feito que a velocidade de escape referíase a un proxectil na superficie da Terra: $v_e = \sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$ *que dá un valor superior a calquera velocidade orbital* $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ *, xa que, á parte do factor* 2, *$r < R$ (raio da Terra). Nese caso, a opción B sería correcta, pero, na miña opinión non o é.*

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$$

A opcións A e B non se cumpren.
A enerxía mecánica é negativa: $E < 0$.

6. Un planeta describe unha órbita plana e elíptica en torno ao Sol. Cal das seguintes magnitudes é constante?
A) O momento lineal.
B) A velocidade areolar.
C) A enerxía cinética.

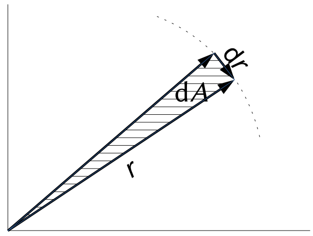
(P.A.U. xuño 13)

Solución: B

A velocidade areolar dun planeta é a área que varre o raiovector que une o Sol co planeta na unidade de tempo.
A segunda lei de Kepler pode enunciarse así:
«O raiovector que une o Sol cun planeta varre áreas iguais en tempos iguais»
Nun sistema de referencia co Sol na orixe de coordenadas, a velocidade areolar será a derivada da área varrida polo vector de posición do planeta na unidade de tempo:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

A área varrida nun tempo moi pequeno dt, é a metade do produto vectorial do vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, do planeta polo seu vector desprazamento, d$\overline{\boldsymbol{r}}$.



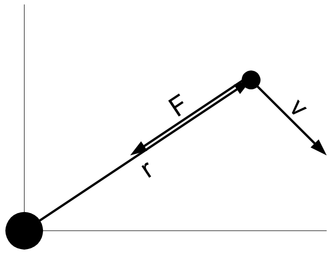
$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

A velocidade areolar pode expresarse así:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

Sendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ o vector velocidade do planeta.
Se derivamos $\overline{\boldsymbol{v}}_A$ respecto ao tempo:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}\right)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{a}$$



O produto vectorial dun vector, $\overline{\boldsymbol{v}}$, por si mesmo é cero.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0° = 0$$

O vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, e o vector forza, $\overline{\boldsymbol{F}}$, son paralelos de sentido oposto, e a aceleración, $\overline{\boldsymbol{a}}$, ten a mesma dirección e sentido que aa forza de atracción entre o Sol e o planeta.
O produto vectorial de dous vectores paralelos tamén é cero, porque o seu módulo vale:

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{a}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{a}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

O resultado é o vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ (cero).

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Se a derivada é nula, a velocidade areolar é constante.

As outras opcións:
A. Falsa.
O momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ dun obxecto de masa m que se move a unha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

A dirección cambia a medida que o planeta se despraza arredor do Sol.

C. Falsa. Nunha órbita elíptica, co Sol situado nun dos focos, a distancia do planeta ao Sol non é constante.
A enerxía potencial gravitacional, tomando como orixe de enerxía o infinito, vén dada pola expresión:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Sendo M a masa que orixina o campo gravitacional, (neste caso a do Sol), m é a masa do obxecto situado nel (o planeta), r a distancia entre ambas as masas e G a constante da gravitación universal.
A enerxía potencial é negativa e será tanto maior canto maior sexa a distancia r.
Como a enerxía mecánica consérvase, pero a enerxía potencial gravitacional depende da distancia, a enerxía cinética varía coa distancia e non se mantén constante.

7. Dous satélites idénticos, 1 e 2, describen órbitas circulares de diferente raio arredor da Terra ($r_1 < r_2$). Polo que:
A) 2 ten maior enerxía cinética.
B) 2 ten maior enerxía potencial.
C) Os dous teñen a mesma enerxía mecánica.

(P.A.U. set. 12)

Solución: B

A enerxía potencial gravitacional para un satélite de masa m, que xira arredor da Terra nunha órbita de raio r, é inversamente proporcional ao raio da órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Pero como é negativa, canto maior sexa o raio da órbita, maior será a enerxía potencial.

$$E_{p2} > E_{p1}$$

As outras opcións:
A. Falsa.
A velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor dun astro de masa M é:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A enerxía cinética dun satélite de masa m que xira arredor da Terra con velocidade v é directamente proporcional ao cadrado da velocidade.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

Por tanto, a enerxía cinética de cada satélite é inversamente proporcional ao raio da súa órbita: a maior raio, menor enerxía cinética.

C. Falsa. A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right)$$

Substituíndo v^2 na expresión da enerxía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

A enerxía mecánica dun satélite nunha órbita é inversamente proporcional ao raio da órbita. Non poden ser iguais porque os satélites teñen a mesma masa.

8. No movemento dos planetas en órbitas elípticas e planas arredor do Sol mantense constante:
A) A enerxía cinética.
B) O momento angular.
C) O momento lineal.

(P.A.U. xuño 12)

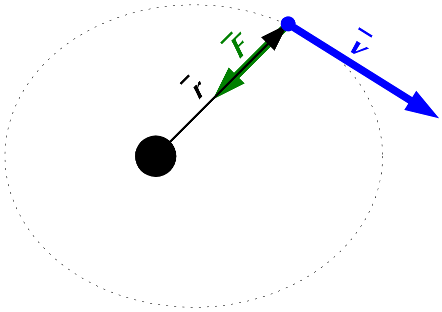
Solución: B

O campo gravitacional é un campo de forzas centrais, nas que a forza gravitacional que exerce o Sol sobre un planeta ten a mesma dirección (e sentido contrario) que o vector de posición do planeta colocando a orixe de coordenadas no Sol.
Nun campo de forzas centrais o momento angular (momento cinético) é constante.
O momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto dun punto O que se toma como orixe é:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudar a súa variación, derívase con respecto ao tempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mathrm{d}(m\cdot\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$$



O primeiro sumando dá o vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ (cero) porque a velocidade, $\overline{\boldsymbol{v}}$, e o momento lineal, $m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$, son paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0 = 0$$

O segundo sumando tamén dá o vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ porque, ao ser o campo de forzas un campo central, o vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, con orixe no punto orixe do campo e o vector forza (dirixido cara a esa orixe) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

A derivada é cero.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{0}}+\vec{\boldsymbol{0}}=\vec{\boldsymbol{0}}$$

Cando unha partícula se move nun campo de forzas centrais, o momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, respecto ao punto orixe da forza é un vector constante, xa que a súa derivada é cero.

As outras opcións:
A. Falsa. Nunha órbita elíptica, co Sol situado nun dos focos, a distancia do planeta ao Sol non é constante.
O campo gravitacional é un campo de forzas conservativo, xa que é un campo de forzas centrais, nas que a forza gravitacional que exerce o Sol sobre un planeta ten a mesma dirección (e sentido contrario) que o vector de posición do planeta colocando a orixe de coordenadas no Sol.
A enerxía potencial gravitacional, tomando como orixe de enerxía o infinito, vén dada pola expresión:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Sendo M a masa que orixina o campo gravitacional, (neste caso a do Sol), m é a masa do obxecto situado nel (o planeta), r a distancia entre ambas as masas e G a constante da gravitación universal.
A enerxía potencial é negativa e será tanto maior canto maior sexa a distancia r.
Como a enerxía mecánica consérvase, pero a enerxía potencial gravitacional depende da distancia, a enerxía cinética varía coa distancia e non se mantén constante.

C. Falsa. O momento lineal, $\overline{\boldsymbol{p}}$, dun obxecto de masa m que se move a unha velocidade, $\overline{\boldsymbol{v}}$, vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Como se dixo para a opción A, a rapidez varía coa distancia do planeta ao Sol. Ademais, a dirección cambia a medida que o planeta se despraza.

9. Plutón describe unha órbita elíptica arredor do Sol. Indica cal das seguintes magnitudes é maior no afelio (punto máis afastado do Sol) que no perihelio (punto máis próximo ao Sol):
 A) Momento angular respecto da posición do Sol.

B) Momento lineal.
C) Enerxía potencial.

(P.A.U. set. 11)

Solución: C

A enerxía potencial gravitacional, tomando como orixe de enerxía o infinito, vén dada pola expresión:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Sendo M a masa que orixina o campo gravitacional, (neste caso a do Sol), m é a masa do obxecto situado nel (Plutón), r a distancia entre ambas as masas e G a constante da gravitación universal.
A enerxía potencial é negativa e será tanto maior canto maior sexa a distancia r, porque, aínda que a división dea un número máis pequeno, é negativo ($1 < 2$, pero $-1 > -2$)

As outras opcións:
A. Falsa. Nas forzas centrais, como a gravitacional, na que a dirección da forza é a da liña que une as masas, o momento cinético (ou angular) $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ respecto ao punto O onde se atopa a masa M que crea o campo gravitacional dun obxecto de masa m que se move a unha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ é un vector constante.

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

B. Falsa. O momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ dun obxecto de masa m que se move a unha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Pola 2.ª lei de Kepler, que di que as áreas descritas polo raiovector que une o Sol cun planeta varre áreas iguais en tempos iguais, a velocidade nas proximidades do Sol (perihelio) é maior que cando está máis afastado do el (afelio).

10. Dous satélites 1 e 2 de masas m_1 e m_2 ($m_1 < m_2$), xiran arredor da Terra nunha órbita circular de raio r:
    A) Os dous teñen a mesma enerxía mecánica.
    B) 1 ten menor enerxía potencial e menor enerxía cinética que 2.
    C) 1 ten maior enerxía potencial e menor enerxía cinética que 2.

(P.A.U. xuño 10)

Solución: C

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial.

$$E = E_c + E_p$$

A enerxía cinética dun satélite de masa m, que xira arredor da Terra con velocidade v, directamente proporcional á masa.

$$E_c = ½\, m \cdot v^2$$

Como $m_1 < m_2$:

$$E_{c1} < E_{c2}$$

A enerxía potencial gravitacional para un satélite de masa m, que xira arredor da Terra nunha órbita de raio r, tamén é directamente proporcional á masa.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Pero como é negativa, canto maior sexa a masa, menor será a enerxía potencial.

$$E_{p1} > E_{p2}$$

11. Se dous planetas distan do Sol r e 4 r respectivamente, os seus períodos de revolución son:
    A) T e 4 T.

B) T e T / 4.
C) T e 8 T.

(P.A.U. set. 07)

Solución: C

A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos, T, dos planetas no seu movemento arredor do Sol, son directamente proporcionais aos cubos dos semieixes maiores das súas órbitas elípticas.
Se se fai a aproximación de que as órbitas son practicamente circulares de raio r, a expresión matemática desta lei sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Isto pódese demostrar para órbitas circulares.
A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\ \pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dous planetas, 1 e 2, dividimos as expresións correspondentes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2}\cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2}\cdot r_2^3}=\frac{\cancel{G\cdot M}\cdot T_1^2}{\cancel{G\cdot M}\cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{r_2^3}{r_1^3}=\frac{(4\ r)^3}{r^3}=(2^2)^3$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{(2^2)^3}=2^3=8$$

12. Dous satélites de comunicación 1 e 2 con diferentes masas ($m_1 > m_2$) xiran arredor da Terra con órbitas estables de diferente raio sendo $r_1 < r_2$
    A) 1 xira con maior velocidade lineal.
    B) 2 ten menor período de revolución.
    C) Os dous teñen a mesma enerxía mecánica.

(P.A.U. xuño 07)

Solución: A

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right|=m\cdot|\vec{a}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

A velocidade lineal dun satélite nunha órbita é inversamente proporcional á raíz cadrada do raio da órbita. Como o raio da órbita 1 é menor que o da órbita 2, a velocidade do satélite na órbita 1 será maior.

As outras opcións:
B. O período de revolución depende do raio da órbita e da velocidade.
Como a velocidade lineal v dun obxecto que se move nunha órbita circular de raio r con velocidade constante está relacionada co período T (tempo que tarda en dar unha volta completa) pola expresión:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}$$

O período do movemento circular é:

$$T=\frac{2\pi\cdot r}{v}$$

Ao ser maior o raio de órbita 2, $r_2 > r_1$, e menor a súa velocidade, $v_2 < v_1$, o período de revolución do satélite na órbita 2 será maior que o da órbita 1.

C. A enerxía mecánica dun satélite de masa m en órbita circular de raio r arredor da Terra de masa M é a suma das enerxías cinética e potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

Substituíndo v^2 na expresión da enerxía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

A enerxía mecánica dun satélite nunha órbita é directamente proporcional á masa do satélite e inversamente proporcional ao raio da órbita. Non poden ser iguais porque iso só ocorrería se se cumprise a relación:

$$\frac{m_1}{r_1}=\frac{m_2}{r_2}$$

Esta relación non pode darse porque $m_1 > m_2$ e $r_1 < r_2$.

13. Se por unha causa interna, a Terra sufrise un colapso gravitacional e reducise o seu raio á metade, mantendo constante a masa, o seu período de revolución arredor do Sol sería:
A) O mesmo.
B) 2 anos.
C) 0,5 anos.

(P.A.U. xuño 07)

Solución: A

O período de revolución da Terra que segue unha traxectoria aproximadamente circular arredor do Sol non depende do raio da Terra, xa que se pode considerar que se trata dunha masa puntual.

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Despexando o período, queda:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

O período depende da masa do Sol (non do da Terra) e de r. que é o raio da órbita da Terra arredor do Sol, ou sexa, a distancia do centro da Terra ao centro do Sol. O raio do planeta Terra non inflúe no período.

14. Dous satélites artificiais 1 e 2 de masas m_1 e m_2 ($m_1 = 2\ m_2$), xiran arredor da Terra nunha órbita circular de raio r.
A) Teñen a mesma velocidade de escape.
B) Teñen diferente período de rotación.
C) Teñen a mesma enerxía mecánica.

(P.A.U. xuño 05)

Solución: A

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despexando, a velocidade de escape dun satélite en órbita, queda:

$$v_{e\ o} = \sqrt{2 G \frac{M}{r}}$$

Se a dirección de escape é perpendicular á velocidade do satélite, esta é a velocid perpendicular que hai que proporcionarlle.
Se a dirección de escape é paralela á dirección do movemento do satélite, hai que ter en conta a súa enerxía cinética.

Se o sentido de velocidade de escape fose o mesmo que o de avance do satélite,haberá que proporcionarlle unha velocidade adicional igual á diferenza entre a velocidade de escape e a que xa ten.

A velocidade de escape é independente da masa do satélite. M é a masa do astro arredor do que xiran.

As outras opcións:
B. Falsa. O período de rotación é tamén independente da masa do satélite.
C. Falsa. A enerxía mecánica se depende da masa do satélite.

15. En torno ao Sol xiran dous planetas cuxos períodos de revolución son $3{,}66 \cdot 10^2$ días e $4{,}32 \cdot 10^2$ días respectivamente. Se o raio da órbita do primeiro é $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m, a órbita do segundo é:
A) A mesma.
B) Menor.
C) Maior.

(P.A.U. xuño 04)

Solución: C

A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos, *T*, dos planetas no seu movemento arredor do Sol, son directamente proporcionais aos cubos dos semieixes maiores das súas órbitas elípticas.
Se se fai a aproximación de que as órbitas son practicamente circulares de raio *r*, a expresión matemática desta lei sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Isto pódese demostrar para órbitas circulares.
A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa *M* sobre un satélite de masa *m* que xira arredor del nunha órbita de radio *r*, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, *G* é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, *v*, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio *r*, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, *m*, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio *r* e período *T* é:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\ \pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dous planetas, 1 e 2, dividimos as expresións correspondentes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G \cdot M} \cdot T_1^2}{\cancel{G \cdot M} \cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow R_2 = R_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 1{,}49 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}] \sqrt[3]{\left(\frac{4{,}32 \cdot 10^2\ [\text{días}]}{3{,}66 \cdot 10^2\ [\text{días}]}\right)^2} = 1{,}57 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$$

16. Para un satélite xeoestacionario o raio da súa órbita obtense mediante a expresión:
    A) $R = (T^2\ G\ M\ /\ 4\pi^2)^{1/3}$
    B) $R = (T^2\ g_0\ R\ /\ 4\pi^2)^{1/2}$
    C) $R = (T\ G\ m^2\ /\ 4\pi^2)^{1/3}$

(P.A.U. xuño 04)

Solución: A

Un satélite xeoestacionario é o que se atopa na vertical do mesmo punto da Terra, ou sexa, que ten o mesmo período de rotación arredor da Terra que o da Terra sobre o seu eixo.
A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v=\frac{2 \pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2 \pi \cdot r}{T}\right)^2=\frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4 \pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Despexando o raio, r, da órbita

$$r=\sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4 \pi^2}}$$

Nun satélite xeoestacionario, o período é de 24 horas, M é a masa da Terra e G a constante da gravitación universal. Se dispoñemos destes dous últimos datos, o valor do raio é: $r = 4{,}22 \cdot 10^7$ m.

● Campo gravitacional.

1. Para unha partícula sometida a unha forza central verifícase que:
   A) Consérvase o seu momento angular respecto ao centro de forzas.
   B) O traballo realizado por devandita forza depende da traxectoria seguida entre dous puntos dados.
   C) Consérvase o vector momento lineal.

(P.A.U. set. 15)

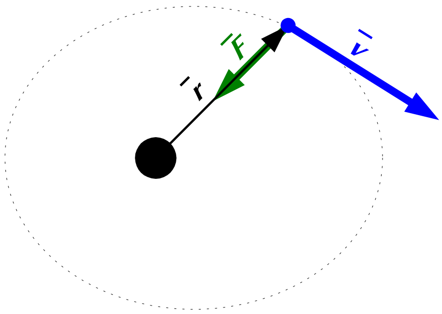
Solución: A

O momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto dun punto O que se toma como orixe é:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudar a súa variación, derívase con respecto ao tempo:

$$\frac{\mathrm{d} \vec{L}_O}{\mathrm{d} t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d} t}=\frac{\mathrm{d} \vec{r}}{\mathrm{d} t} \times m \cdot \vec{v}+\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d} t}=\vec{v} \times m \cdot \vec{v}+\vec{r} \times \vec{F}$$



O primeiro sumando dá o vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) porque a velocidade, $\overline{\boldsymbol{v}}$, e o momento lineal, $m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$, son paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0 = 0$$

O segundo sumando tamén dá o vector $\overline{\mathbf{0}}$ porque, ao ser o campo de forzas un campo central, o vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, con orixe no punto orixe do campo e o vector forza (dirixido cara a esa orixe) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

A derivada é cero.

$$\frac{\mathrm{d} \vec{L}_O}{\mathrm{d} t}=\vec{v} \times m \cdot \vec{v}+\vec{r} \times \vec{F}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

Cando unha partícula se move nun campo de forzas centrais, o momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, respecto ao punto orixe da forza é un vector constante, xa que a súa derivada é cero.

As outras opcións:
B: Falsa. Unha forza central é unha forza conservativa.
O traballo dunha forza conservativa, cando a partícula desprázase desde un punto 1 a un punto 2, é independente do camiño seguido e só depende dos puntos inicial e final. Defínese unha magnitude chamada enerxía potencial, E_p, de forma que o traballo, W, da forza conservativa é igual á variación (cambiada de signo) da enerxía potencial.

$$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

C. Falsa. Se a forza central é a forza resultante, pola 2.ª lei de Newton, varía o momento lineal:

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\, m\cdot\vec{v}}{\mathrm{d}t}\neq\vec{0}$$

2. Se a Terra contráese reducindo o seu raio á metade e mantendo a masa:
   A) A órbita arredor do Sol será a metade.
   B) O período dun péndulo será a metade.
   C) O peso dos corpos será o dobre.

(P.A.U. set. 10)

Solución: B

O período, T, dun péndulo de lonxitude L, nun lugar onde a gravidade sexa g, vén dado pola ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M e radio R, sobre un obxecto de masa m na súa superficie, réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{R^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o obxecto co centro do planeta.
A aceleración da gravidade é a forza sobre a unidade de masa:

$$g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M_T \cancel{m}}{R_T^2}}{\cancel{m}}=G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Se o raio da Terra fose a metade, mantendo a masa, a aceleración, g, da gravidade na súa superficie sería catro veces maior.

$$g'=G\frac{M_T}{(R_T/2)^2}=4G\frac{M_T}{R_T^2}=4g$$

O período, T, dun péndulo en tal caso sería a metade.

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}}=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{T}{2}$$

As outras opcións:
C: Como a gravidade sería catro veces maior, o peso dos corpos sería catro (e non dous) veces maior.
A: O período de revolución da Terra que segue unha traxectoria aproximadamente circular arredor do Sol non depende do raio da Terra, xa que se pode considerar que se trata dunha masa puntual.

3. Cando se compara a forza eléctrica entre dúas masas, coa gravitacional entre dúas masas (cargas e masas unitarias e a distancia unidade):
   A) Ambas son sempre atractivas.

B) Son dunha orde de magnitude semellante.
C) As dúas son conservativas.

(P.A.U. set. 10)

Solución: C

Unha forza é conservativa cando o traballo que realiza cando se despraza unha magnitude sensible (masa para as forzas gravitacionais, carga para as forzas eléctricas) entre dous puntos, é independente do camiño seguido, e só depende das posicións inicial e final. Neses casos pódese definir unha magnitude chamada enerxía potencial que depende, ademais da magnitude sensible, só das posicións inicial e final. Por tanto o traballo da forza é a variación (cambiada de signo) da enerxía potencial.

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

É o caso das forzas gravitacional e eléctrica.

	Gravitacional	***Eléctrica***
Forza	$\vec{F}_G = -G\dfrac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F}_E = K\dfrac{Q \cdot q}{r^2}\vec{u}_r$
Enerxía potencial	$E_p = -G\dfrac{M \cdot m}{r}$	$E_{pE} = K\dfrac{Q \cdot q}{r}$

As outras opcións:
A. Falsa. A forza gravitacional é sempre atractiva, pero a forza eléctrica é atractiva para cargas de distinto signo, pero repulsiva para cargas do mesmo signo.
B. Falsa. Dado o valor tan diferente das constantes ($K = 9·10^9$ N·m²·C⁻² e $G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²), a forza entre masas ou cargas unitarias separadas pola distancia unidade, será ≈ 10^{20} maior no caso da forza eléctrica, aínda que esta comparación non teña moito sentido.

4. Se unha masa móvese estando sometida só á acción dun campo gravitacional:
A) Aumenta a súa enerxía potencial.
B) Conserva a súa enerxía mecánica.
C) Diminúe a súa enerxía cinética.

(P.A.U. xuño 09)

Solución: B

O campo gravitacional é un campo de forzas conservativo. O traballo da forza gravitacional, cando unha masa se despraza dun punto 1 a un punto 2, é independente do camiño seguido e só depende dos puntos inicial e final.
Defínese unha magnitude chamada enerxía potencial, E_p, de forma que o traballo, W, da forza gravitacional é igual á variación (cambiada de signo) da enerxía potencial.

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

O traballo da forza resultante é, polo principio da enerxía cinética, igual á variación da enerxía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Se a única forza que realiza traballo é a forza gravitacional, ámbolos dous traballos son iguais:

$$W_{1\to 2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

Agrupando termos:

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

Consérvase a enerxía mecánica (suma das enerxías cinética e potencial).

5. O traballo realizado por unha forza conservativa:
   A) Diminúe a enerxía potencial.
   B) Diminúe a enerxía cinética.
   C) Aumenta a enerxía mecánica.

(P.A.U. xuño 08)

Solución: A

O traballo que fai unha forza conservativa entre dous puntos 1 e 2 é igual á diminución da enerxía potencial:

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

É o traballo que fai a forza do campo.
As masas móvense nun campo gravitacional no sentido dos potenciais decrecentes, que é o sentido da forza do campo, polo que o traballo é positivo.

6. En relación coa gravidade terrestre, unha masa *m*:
   A) Pesa más na superficie da Terra que a 100 km de altura.
   B) Pesa menos.
   C) Pesa igual.

(P.A.U. xuño 08)

Solución: A

O peso *P* dun obxecto de masa *m* na Terra é a forza *F* con que a Terra o atrae, que vén dada pola lei de Newton da gravitación universal:

$$P = F = G\frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Na ecuación, G é a constante da gravitación universal, MT é a masa da Terra, e r é a distancia entre o obxecto, suposto puntual, e o centro da Terra.
Cando o obxecto se atopa na superficie da Terra, esa distancia *r* é o raio de la Tierra R_T. Cando se atope a unha altura h = 100 km, a distancia é maior:

$$r = R_T + h > R_T$$

Por tanto, ao ser maior o denominador da expresión, a forza peso será menor.

7. No campo gravitacional:
   A) O traballo realizado pola forza gravitacional depende da traxectoria.
   B) As liñas de campo pódense cortar.
   C) Consérvase a enerxía mecánica.

(P.A.U. set. 06)

Solución: C

O campo gravitacional é un campo de forzas conservativo. O traballo da forza gravitacional, cando unha masa se despraza dun punto 1 a un punto 2, é independente do camiño seguido e só depende dos puntos inicial e final.
Defínese unha magnitude chamada enerxía potencial, E_p, de forma que o traballo, *W*, da forza gravitacional é igual á variación (cambiada de signo) da enerxía potencial.

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

O traballo da forza resultante é, polo principio da enerxía cinética, igual á variación da enerxía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Se a única forza que realiza traballo é a forza gravitacional, ámbolos dous traballos son iguais:

$$W_{1\to 2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

Agrupando termos:

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

Consérvase a enerxía mecánica (suma das enerxías cinética e potencial).

8. No movemento da Terra arredor do Sol:
   A) Consérvanse o momento angular e o momento lineal.
   B) Consérvanse o momento lineal e o momento da forza que os une.
   C) Varía o momento lineal e consérvase o angular.

(P.A.U. set. 04)

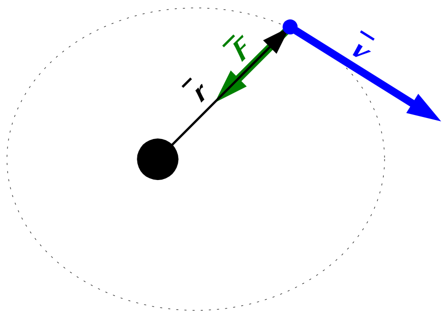
Solución: C

O momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto dun punto O que se toma como orixe é:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudar a súa variación, derívase con respecto ao tempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$



O primeiro sumando dá o vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) porque a velocidade, $\overline{\boldsymbol{v}}$, e o momento lineal, $m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$, son paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0 = 0$$

O segundo sumando tamén dá o vector $\overline{\mathbf{0}}$ porque, ao ser o campo de forzas un campo central, o vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, con orixe no punto orixe do campo e o vector forza (dirixido cara a esa orixe) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

A derivada é cero.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Cando unha partícula se move nun campo de forzas centrais, o momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, respecto ao punto orixe da forza é un vector constante, xa que a súa derivada é cero.
O momento lineal: $\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$ non será constante, xa que o vector $\overline{\boldsymbol{v}}$, que é tanxente a traxectoria da órbita do planeta, cambia de dirección.

ACLARACIÓNS

Os datos dos enunciados dos problemas non adoitan ter un número adecuado de cifras significativas, ben porque o redactor pensa que a Física é unha rama das Matemáticas e os números enteiros son números «exactos» (p. ex. a velocidade da luz: $3 \cdot 10^8$ m/s cre que é 300 000 000,000000 000 000 000... m/s) ou porque aínda non se decatou de que se pode usar calculadora no exame e parécelle máis sinxelo usar $3 \cdot 10^8$ que 299 792 458 m/s).
Por iso supuxen que os datos teñen un número de cifras significativas razoables, case sempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en certos casos, cunha incerteza desmedida. Así que cando tomo un dato como $c = 3 \cdot 10^8$ m/s e reescríboo como:
Cifras significativas: 3

$c = 3{,}00·10^8$ m/s
O que quero indicar é que supoño que o dato orixinal ten tres cifras significativas (non que as teña en realidade) para poder realizar os cálculos cunha incerteza máis pequena que a que tería nese caso.
($3·10^8$ m/s ten unha soa cifra significativa, e unha incerteza relativa do 30 %. Como as incertezas adóitanse acumular ao longo do cálculo, a incerteza final sería inadmisible. Entón, para que realizar os cálculos? Cunha estimación sería suficiente).

Cuestións e problemas das Probas de avaliación de Bacharelato para o acceso á Universidade (A.B.A.U. e P.A.U.) en Galiza.
Respostas e composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algúns cálculos fixéronse cunha folla de cálculo de LibreOffice do mesmo autor.
Algunhas ecuacións e as fórmulas orgánicas construíronse coa extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
A tradución ao/desde o galego realizouse coa axuda de *traducindote*, e de o tradutor da CIXUG.
Procurouse seguir as recomendacións do Centro Español de Metrología (CEM).
Consultouse ao Copilot de Microsoft Edge e tivéronse en conta algunhas das súas respostas nas cuestións.

Actualizado: 30/06/24

Sumario

Índice de probas P.A.U.