Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

Código: 23

SETEMBRO 2017

FÍSICA

Puntuación máxima: Cuestiones 4 puntos (1 cada cuestión, teórica o práctica). Problemas 6 puntos (1 cada apartado).
No se valorará la simple anotación de un ítem cómo solución a las cuestiones. Las respuestas deben ser razonadas.
Se puede usar calculadora siempre que no sea programable ni memorice texto. El alumno elegirá una de las dos opciones.

OPCIÓN A

C.1. La masa de un planeta es el doble que la de la Tierra y su radio es la mitad del terrestre. Sabiendo que la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es g, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta será: A) 4 g. B) 8 g. C) 2 g.

C.2. La orientación que debe tener la superficie de una espira en un campo magnético uniforme para que el flujo magnético sea nulo es: A) Paralela al campo magnético. B) Perpendicular al campo magnético.
C) Formando un ángulo de 45° con el campo magnético.

C.3. El efecto fotoeléctrico se produce si: A) La intensidad de la radiación incidente es muy grande. B) La longitud de onda de la radiación es grande. C) La frecuencia de la radiación es superior a la frecuencia umbral.

C.4. Se midieron en el laboratorio los siguientes valores para las distancias objeto e imagen de una lente convergente:

s (cm)	50	60	70	90
s' (cm)	200	125	95	70

Determina el valor de la potencia de la lente y estima su incertidumbre.

P.1. Dada una esfera maciza conductora de 30 cm de radio y carga q = +4,3 µC, calcula el campo eléctrico y el potencial en los siguientes puntos: a) A 20 cm del centro de la esfera. b) A 50 cm del centro de la esfera. c) Haz una representación gráfica del campo eléctrico y del potencial en función de la distancia al centro de la esfera.
Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N·m²·C⁻².

P.2. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es $y(x, t) = 10$ sen $\pi(x - 0,2\ t)$, donde las longitudes se expresan en metros y el tiempo en segundos. Calcula: a) La amplitud, longitud de onda y frecuencia de la onda. b) La velocidad de propagación de la onda e indica en qué sentido se propaga. c) Los valores máximos de la velocidad y aceleración de las partículas de la cuerda.

OPCIÓN B

C.1. Por un conductor recto muy largo circula una corriente de 1 A. El campo magnético que se origina en sus cercanías se hace más intenso cuanto: A) Más grueso sea el conductor. B) Mayor sea su longitud. C) Más cerca del conductor esté el punto donde se determina.

C.2. Un movimiento ondulatorio transporta: A) Materia. B) Energía. C) Depende del tipo de onda.

C.3. Cuando la luz pasa de un medio a otro de distinto índice de refracción, el ángulo de refracción es:
A) Siempre mayor que lo de incidente. B) Siempre menor que lo de incidente. C) Depende de los valores de los índices de refracción. Justifica la respuesta haciendo un esquema de la marcha de los rayos.

C.4. Explica como se puede determinar la aceleración de la gravedad utilizando un péndulo simple e indica el tipo de precauciones que debes tomar a la hora de realizar la experiencia.

P.1. Un satélite GPS describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, dando dos vueltas a la Tierra cada 24 h. Calcula: a) La altura de su órbita sobre la superficie terrestre. b) La energía mecánica. c) El tiempo que tardaría en dar una vuelta a la Tierra si lo hacemos orbitar a una altura doble.
Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m; masa del satélite = 150 kg.

P.2. En 2012 se encontró en el Sáhara un meteorito que contenía restos de U-238. Sabemos que en el momento de su formación había una concentración de $5,00 \cdot 10^{12}$ átomos de U-238 por cm³, mientras que en la actualidad la concentración medida es de $2,50 \cdot 10^{12}$ átomos de U-238 por cm³. Si el tiempo de semidesintegración de este isótopo es de $4,51 \cdot 10^9$ años, determina: a) La constante de desintegración del U-238. b) La edad del meteorito. c) Sabiendo que el gas radón resulta de la desintegración del U-238, completa la siguiente serie radiactiva con las correspondientes partículas hasta llegar al gas radón:
$^{238}_{92}\text{U} + \ldots \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + \ldots \longrightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + \ldots \longrightarrow {}^{234}_{92}\text{U} + \ldots \longrightarrow {}^{230}_{90}\text{Th} + \ldots \longrightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra} + \ldots \longrightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn}.$

Soluciones

OPCIÓN A

C.1. La masa de un planeta es el doble que la de la Tierra y su radio es la mitad del terrestre. Sabiendo que la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es g, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta será:
A) 4 g.
B) 8 g.
C) 2 g.

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución: B

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un objeto de masa M, sobre otro objeto de masa m que se encuentra a una distancia r, se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une ambos objetos.
La intensidad del campo gravitatorio es la fuerza sobre la unidad de masa:

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_G}{m} = \frac{-G \frac{M \cancel{m}}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r}{\cancel{m}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

El valor de la intensidad, g, del campo gravitatorio producido por un planeta de masa M, y radio R, en un punto de su superficie, es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado de su radio. En módulos:

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

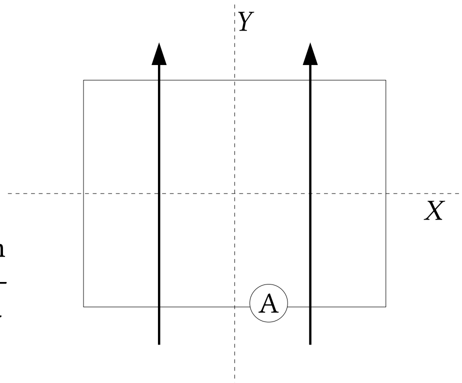
Si la masa de un planeta P es el doble de la masa de la Tierra y su radio es la mitad que el de la Tierra, la aceleración, g, de la gravedad en su superficie será la ocho veces mayor que la gravedad en la Tierra.

$$g_P = G \frac{M_P}{R_P^2} = G \frac{2 \cdot M_T}{(R_T/2)^2} = \frac{2}{(1/4)} G \frac{M_T}{R_T^2} = 8\, g_T$$

C.2. La orientación que debe tener la superficie de una espira en un campo magnético uniforme para que el flujo magnético sea nulo es:
A) Paralela al campo magnético.
B) Perpendicular al campo magnético.
C) Formando un ángulo de 45° con el campo magnético.

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución: A



El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$, campo magnético, por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$, perpendicular a la superficie delimitada por la espira.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B \cdot S \cdot \cos \varphi$$

Las líneas de campo no atraviesan la superficie de la espira, dando un flujo magnético 0, cuando el vector $\overline{\boldsymbol{B}}$, campo magnético, es perpendicular al vector $\overline{\boldsymbol{S}}$, superficie. Como el vector superficie es perpendicular a la superficie, el flujo es nulo cuando la superficie es paralela al campo magnético.

C.3. El efecto fotoeléctrico se produce si:

A) La intensidad de la radiación incidente es muy grande.

B) La longitud de onda de la radiación es grande.

C) La frecuencia de la radiación es superior a la frecuencia umbral.

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución: C

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).
Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.
Para que se produzca efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.
La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación, E_f representa la energía del fotón incidente, W_e el trabajo de extracción del metal y E_c la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.
La energía que lleva un fotón de frecuencia f es:

$$E_f = h \cdot f$$

h es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Las otras opciones:
A. Falsa. Si la intensidad de la luz es muy grande habrá un gran número de fotones. Pero si cada uno de ellos no tiene energía suficiente, no se producirá efecto fotoeléctrico.
B. Falsa. La longitud de onda es inversamente proporcional a la frecuencia. A mayor longitud de onda, menor frecuencia y, por tanto, menor energía de los fotones. Con menos energía es menos probable que se supere el trabajo de extracción.

C.4. Se midieron en el laboratorio los siguientes valores para las distancias objeto e imagen de una lente convergente:

s (cm)	50	60	70	90
s' (cm)	200	125	95	70

Determina el valor de la potencia de la lente y estima su incertidumbre.

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución:

Se sustituyen los valores de s y s' en la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se calcula el inverso de la distancia focal (potencia) y el valor de la distancia focal para cada par de datos.

s (cm)	s' (cm)		s (m)	s' (m)		$1/s$ (m⁻¹)	$1/s'$ (m⁻¹)		$1/f$ (m⁻¹)	f (m)
−50	200		−0,50	2,00		−2,00	0,50		2,50	0,40
−60	125		−0,60	1,25		−1,67	0,80		2,47	0,41
−70	95		−0,70	0,95		−1,43	1,05		2,48	0,40
−90	70		−0,90	0,70		−1,11	1,43		2,54	0,39

Se calcula el valor medio de la potencia:

$$\overline{P} = (2{,}50 + 2{,}47 + 2{,}48 + 2{,}54) / 4 = 2{,}49 \text{ m}^{-1} = 2{,}50 \text{ dioptrías.}$$

Como los datos solo tienen 2 cifras significativas se estima la incertidumbre para que el resultado tenga el mismo número de cifras significativas.

La potencia de la lente sería:

$$\overline{P} = (2{,}5 \pm 0{,}1) \text{ dioptrías.}$$

P.1. Dada una esfera maciza conductora de 30 cm de radio y carga q = +4,3 µC, calcula el campo eléctrico y el potencial en los siguientes puntos:

a) A 20 cm del centro de la esfera.

b) A 50 cm del centro de la esfera.

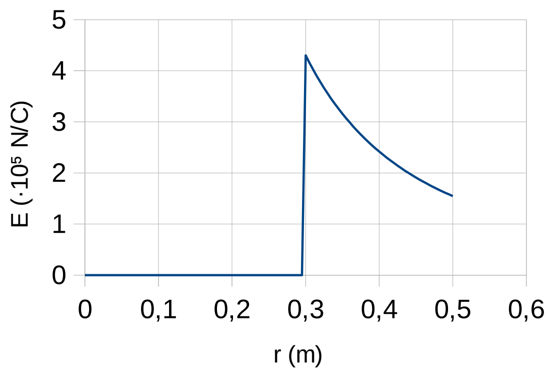
c) Haz una representación gráfica del campo eléctrico y del potencial en función de la distancia al centro de la esfera.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N·m²·C⁻². *(A.B.A.U. extr. 17)*

Rta.: a) $|\overline{\boldsymbol{E}}_1| = 0$; $V_1 = 1{,}29 \cdot 10^5$ V; b) $|\overline{\boldsymbol{E}}_2| = 1{,}55 \cdot 10^5$ N/C; $V_2 = 7{,}74 \cdot 10^4$ V.

Datos		***Cifras significativas: 3***
Carga de la esfera		Q = 4,30 µC = $4{,}30 \cdot 10^{-6}$ C
Radio de la esfera		R = 30,0 cm = 0,300 m
Distancias al centro de la esfera:	punto interior	r_1 = 20,0 cm = 0,200 m
	punto exterior	r_2 = 50,0 cm = 0,500 m
Constante eléctrica		$K = 9{,}00 \cdot 10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas		
Intensidad del campo electrostático en los puntos 1 y 2		$\overline{\boldsymbol{E}}_1, \overline{\boldsymbol{E}}_2$
Potencial electrostático en los puntos 1 y 2		V_1, V_2
Ecuaciones		
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r		$\vec{\boldsymbol{E}}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r		$V=K\dfrac{Q}{r}$

Solución:



a) La intensidad de campo electrostático en el punto 1 a 20 cm del centro de la esfera es nulo porque el conductor se encuentra en equilibrio y todas las cargas se encuentran en la superficie de la esfera.
El potencial electrostático en el punto 1 es el mismo que en la superficie de la esfera, que vale lo mismo que el creado por una carga puntual, Q, situada en el centro de la esfera:
La ecuación del potencial eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

K es la constante de Coulomb.

$$V_1=9{,}00\cdot 10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{4{,}30\cdot 10^{-6}\ [\text{C}]}{(0{,}300\ [\text{m}])}=1{,}29\cdot 10^5\ \text{V}$$

b) El módulo de la intensidad de campo electrostático en el punto 2 a 50 cm del centro de la esfera es el mismo que si la carga fuera puntual.
La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales, Q y q, separadas por una distancia, r, viene dada por la ley de Coulomb, en la que K es la constante de Coulomb y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las cargas.

$$\vec{\boldsymbol{F}}_E=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

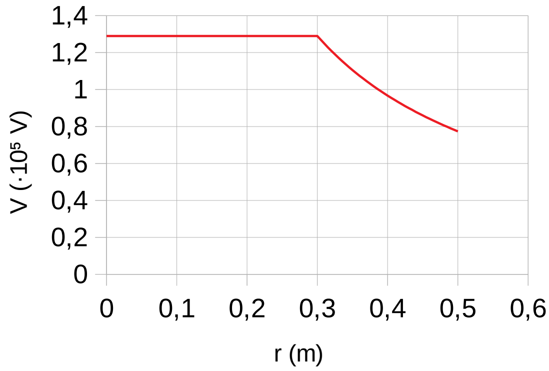
El campo eléctrico en un punto situado a una distancia, r, de una carga puntual, Q, es la fuerza sobre la unidad de carga positiva situada en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot \cancel{q}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{q}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$|\vec{E}_2| = 9{,}00 \cdot 10^9 \text{ [N·m}^2\text{·C}^{-2}] \frac{4{,}30 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(0{,}500 \text{ [m]})^2} = 1{,}55 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

El potencial electrostático en el punto 2 es el mismo que si la carga fuera puntual:

$$V_2 = 9{,}00 \cdot 10^9 \text{ [N·m}^2\text{·C}^{-2}] \frac{4{,}30 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}}{(0{,}500 \text{ [m]})} = 7{,}74 \cdot 10^4 \text{ V}$$



c) La gráfica de la variación de la intensidad del campo electrostático da un valor 0 para distancias inferiores al radio de la esfera, se hace máxima para el radio y disminuye de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera para distancias mayores.
La gráfica de la variación del potencial electrostático tiene un valor constante para distancias inferiores al radio de la esfera y disminuye de forma inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera para distancias mayores.

P.2. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es $y(x, t) = 10 \text{ sen } \pi(x - 0{,}2\ t)$, donde las longitudes se expresan en metros y el tiempo en segundos. Calcula:
a) La amplitud, longitud de onda y frecuencia de la onda.
b) La velocidad de propagación de la onda e indica en qué sentido se propaga.
c) Los valores máximos de la velocidad y aceleración de las partículas de la cuerda.

(A.B.A.U. extr. 17)

Rta.: a) A = 10 m; λ = 2,00 m; f = 0,100 Hz; b) v = 0,200 m/s; sentido $+X$;
c) v_m = 6,28 m/s; la_m= 3,95 m/s².

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de la onda	$y = 10{,}0 \cdot \text{sen } \pi(x - 0{,}200 \cdot t)$ [m]
Incógnitas	
Amplitud	A
Longitud de onda	λ
Frecuencia	f
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se obtienen la amplitud, la frecuencia angular y el número de onda comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación del problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 10{,}0 \cdot \text{sen } \pi(x - 0{,}200 \cdot t) \text{ [m]}$$

Amplitud: A = 10,0 m

Frecuencia angular: $\omega = 0{,}200\ \pi = 0{,}628\ \text{rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = \pi = 3{,}14\ \text{rad·m}^{-1}$
Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{k} = \frac{2\cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{3{,}14\ [\text{rad·m}^{-1}]}=2{,}00\ \text{m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega=2\pi\cdot f \Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}628\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2\cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}=0{,}100\ \text{s}^{-1}=0{,}100\ \text{Hz}$$

b) Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 2{,}00\ [\text{m}] \cdot 0{,}100\ [\text{s}^{-1}] = 0{,}200\ \text{m·s}^{-1}$$

El signo opuesto de los términos en x y t indica que la onda se propaga en sentido positivo del eje X.

c) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v=\frac{\text{d}y}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\{10{,}0\cdot \text{sen}\,\pi(x-0{,}200\cdot t)\}}{\text{d}t}=10{,}0\cdot\pi\cdot(-0{,}200)\cdot\cos\pi(x-0{,}200\cdot t)\ [\text{m/s}]$$

$$v = -2{,}00 \cdot \pi \cdot \cos \pi(x - 0{,}200 \cdot t) = -6{,}28 \cdot \cos \pi(x - 0{,}200 \cdot t)\ [\text{m/s}]$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 6{,}28\ \text{m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a=\frac{\text{d}v}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\{-2{,}00\cdot\pi\cdot\cos\pi(x-0{,}200\cdot t)\}}{\text{d}t}=-2{,}00\cdot\pi\cdot\pi\cdot(-0{,}200)\cdot(-\text{sen}\,\pi(x-0{,}200\cdot t))\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -0{,}400 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\,\pi(x - 0{,}200 \cdot t) = -\ 3{,}95 \cdot \text{sen}\,\pi(x - 0{,}200 \cdot t)\ [\text{m/s}^2]$$

La aceleración es máxima cuando $\text{sen}(\varphi) = -1$

$$a_m = 3{,}95\ \text{m/s}^2$$

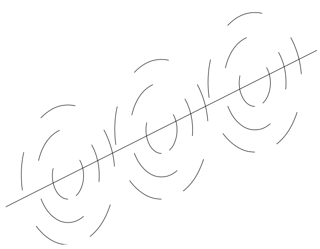
OPCIÓN B

C.1. Por un conductor recto muy largo circula una corriente de 1 A. El campo magnético que se origina en sus cercanías se hace más intenso cuanto:
A) Más grueso sea el conductor.
B) Mayor sea su longitud.
C) Más cerca del conductor esté el punto donde se determina.

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución: C

La dirección del campo magnético, $\overline{\boldsymbol{B}}$, creado por una intensidad, I, de corriente que circula por un conductor recto indefinido es circular alrededor del hilo y su valor en un punto la una distancia, r, del hilo viene dada por la ley de Biot - Savart:



$$B=\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi\cdot r}$$

El sentido del campo magnético viene dado por la regla de la mano derecha (el sentido del campo magnético es el del cierre de la mano derecha cuando el pulgar apunta en el sentido de la corriente eléctrica).

Como se ve en la expresión, cuanto menor sea la distancia, r, del punto al hilo, mayor será la intensidad del campo magnético.

C.2. Un movimiento ondulatorio transporta:
A) Materia.
B) Energía.
C) Depende del tipo de onda.

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución: B

Una onda es una forma de transporte de energía sin desplazamiento neto de materia.
En una onda material, las partículas del medio oscilan alrededor del punto de equilibrio. Es la energía a que se va desplazando de una partícula a la siguiente.
En las ondas electromagnéticas lo que se desplaza es un campo magnético perpendicular a un campo eléctrico.

C.3. Cuando la luz pasa de un medio a otro de distinto índice de refracción, el ángulo de refracción es:
A) Siempre mayor que el incidente.
B) Siempre menor que el incidente.
C) Depende de los valores de los índices de refracción. Justifica la respuesta haciendo un esquema de la marcha de los rayos.

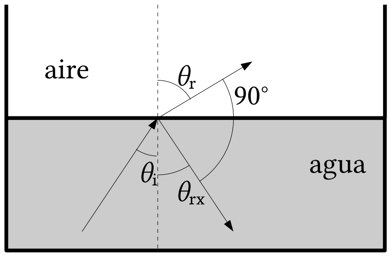
(A.B.A.U. extr. 17)

Solución: B

Cuando la luz pasa de un medio más denso ópticamente (con mayor índice de refracción) a otro menos denso (por ejemplo del agua al aire) el rayo refractado se aleja de la normal. Por la segunda ley de Snell de la refracción:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

Si $n_i > n_r$, entonces sen $\theta_r >$ sen θ_i, y $\theta_r > \theta_i$



C.4. Explica como se puede determinar la aceleración de la gravedad utilizando un péndulo simple e indica el tipo de precauciones que debes tomar a la hora de realizar la experiencia.

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución:

Se cuelga una esfera maciza de un hilo de unos 2,00 m, haciendo pasar el otro extremo por una pinza en el extremo de un vástago horizontal, sujeto a una varilla vertical encajada en una base plana.
Se ajusta la longitud del hilo a uno 60 cm y se mide su longitud desde el punto de suspensión hasta el centro de la esfera. Se aparta ligeramente de la posición de equilibrio y se suelta. Se comprueba que oscila en un plano y a partir de la 2ª o 3ª oscilación se mide el tiempo de 10 oscilaciones. Se calcula el período dividiendo el tiempo entre 10. Se repite la experiencia para comprobar que el tiempo es prácticamente el mismo. Se halla el valor medio del período.
Se ajusta sucesivamente la longitud a 80, 100, 120, 150, 180 y 200 cm y se repite la experiencia para cada una de ellas.
Una vez obtenidos los valores de los períodos T para cada longitud L del péndulo, se puede usar la ecuación del período del péndulo simple para calcular g, la aceleración de la gravedad.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

De los valores obtenidos (que deben ser muy parecidos) se halla el valor medio.

La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña. En teoría una aproximación aceptable es que sean menores de 15º. Como no usamos un transportador de ángulos, separaremos lo menos posible el hilo de la vertical, especialmente cuando la longitud del péndulo sea pequeña.

Se suelen medir 10 o 20 oscilaciones para aumentar la precisión del período, y disminuir el error relativo que daría la medida de una sola oscilación.
Un número demasiado grande de oscilaciones puede dar lugar a que cometamos errores al contarlas.

P.1. Un satélite GPS describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, dando dos vueltas a la Tierra cada 24 h. Calcula:
a) La altura de su órbita sobre la superficie terrestre.
b) La energía mecánica.
c) El tiempo que tardaría en dar una vuelta a la Tierra si lo hacemos orbitar a una altura doble.
Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; masa del satélite = 150 kg.

(A.B.A.U. extr. 17)

Rta.: a) $h = 2{,}03\cdot10^7$ m; b) $E = -1{,}12\cdot10^9$ J; c) $T_c = 28$ h.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia de la órbita	$f = 2$ vueltas/24 h
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37\cdot10^6$ m
Masa del satélite	$m = 150$ kg
Masa de la Tierra	$M = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Altura de la órbita	h
Energía mecánica	E
El período, si la altura fuera el doble	T_c
Otros símbolos	
Radio de la órbita original	r
Valor de la velocidad del satélite en la órbita original	v
Nuevo radio de la órbita	r_c
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m\cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Se despeja el radio de la órbita, r, y se sustituyen valores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

La frecuencia es la inversa del período. El período orbital se calcula a partir de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{24 \text{ h}}{2} = 12 \text{ h} = 4{,}32 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Se calcula el radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,[\text{kg}]\,(4{,}32 \cdot 10^4\,[\text{s}])^2}{4 \cdot 3{,}14^2}} = 2{,}66 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra al radio de la órbita:

$$h = r - R = 2{,}66 \cdot 10^7 - 6{,}37 \cdot 10^6 = 2{,}02 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Análisis: Aunque no se puede prever un valor, la altura obtenida es positiva.

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,[\text{kg}] \cdot 150\,[\text{kg}]}{2{,}66 \cdot 10^7\,[\text{m}]} = -2{,}25 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética sustituyendo v^2 por $G\,M\,/\,r$:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} = 1{,}12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.
La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_c + E_p = 1{,}12 \cdot 10^9 \text{ [J]} - 2{,}25 \cdot 10^9 \text{ [J]} = -1{,}12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c) Si la altura fuera el doble, el nuevo radio de la órbita valdría:

$$r_c = R + 2\ h = 6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^7 = 4{,}7 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La velocidad del satélite valdría:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}}{4{,}7 \cdot 10^7 \text{ [m]}}} = 2{,}9 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 2{,}9 \text{ km/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2 \pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}7 \cdot 10^7 \text{ [m]}}{2{,}9 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 1{,}0 \cdot 10^5 \text{ s} = 28 \text{ h}$$

Análisis: El período de un satélite aumenta con la altura. El valor obtenido es mayor que el de la altura inicial.

P.2. En 2012 se encontró en el Sáhara un meteorito que contenía restos de U-238. Sabemos que en el momento de su formación había una concentración de $5{,}00 \cdot 10^{12}$ átomos de U-238 por cm³, mientras que en la actualidad a concentración medida es de $2{,}50 \cdot 10^{12}$ átomos de U-238 por cm³. Si el tiempo de semidesintegración de este isótopo es de $4{,}51 \cdot 10^9$ años, determina:

a) La constante de desintegración del U-238.
b) La edad del meteorito.
c) Sabiendo que el gas radón resulta de la desintegración del U-238, completa la siguiente serie radiactiva con las correspondientes partículas hasta llegar al gas radón:
$^{238}_{92}\text{U} + \ldots \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + \ldots \longrightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + \ldots \longrightarrow {}^{234}_{92}\text{U} + \ldots \longrightarrow {}^{230}_{90}\text{Th} + \ldots \longrightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra} + \ldots \longrightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn}$.

(A.B.A.U. extr. 17)

Rta.: a) $\lambda = 4{,}87 \cdot 10^{-18}$ s⁻¹; b) $t = 4{,}51 \cdot 10^9$ años; c) $^{238}_{92}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}\text{Th} \xrightarrow{\beta} {}^{234}_{91}\text{Pa} \xrightarrow{\beta} {}^{234}_{92}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{230}_{90}\text{Th} \xrightarrow{\alpha} {}^{226}_{88}\text{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{222}_{86}\text{Rn}$

Datos	**Cifras significativas: 3**
Período de semidesintegración	$T_{½} = 4{,}51 \cdot 10^9$ años $= 1{,}42 \cdot 10^{17}$ s
Átomos iniciales	$N_0 = 5{,}00 \cdot 10^{12}$ átomos/cm³
Átomos actuales	$N = 2{,}50 \cdot 10^{12}$ átomos/cm³
Número de Avogadro	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹
Incógnitas	
Constante de desintegración radiactiva	λ
Edad del meteorito	t
Ecuaciones	
Ley de la desintegración radiactiva	$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
Relación entre el período de semidesintegración y la constante de desintegración	$T_{½} = \ln 2 / \lambda$
Actividad radiactiva	$A = -\text{d}\,N / \text{d}\,t = \lambda \cdot N$

Solución:

a) Se deduce la relación entre el período de semidesintegración y la constante de desintegración:
El período de semidesintegración de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre hasta que solo queda la mitad de la muestra original. Cuando $t = T_{1/2}$, $N = N_0 / 2$.
Poniendo en la ecuación logarítmica: ($2\ N$) en lugar de N_0, y $T_{1/2}$ en vez de t, queda:

$$\ln (2\ N / N) = \lambda \cdot T_{1/2} \qquad \Rightarrow \lambda \cdot T_{1/2} = \ln 2$$

Se calcula el período de semidesintegración en segundos:

$$T_{1/2}=4,51\cdot 10^9\ [\text{años}]\ \frac{365,25\ [\text{días}]}{1\ [\text{año}]}\ \frac{24,0\ [\text{h}]}{1\ [\text{día}]}\ \frac{3600\ [\text{s}]}{1\ [\text{h}]}=1,42\cdot 10^{17}\ \text{s}$$

Se calcula la constante radiactiva a partir del período de semidesintegración:

$$\lambda=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}=\frac{0,693}{1,42\cdot 10^{17}\ [\text{s}]}=4,87\cdot 10^{-18}\ \text{s}^{-1}$$

b) Se calcula el tiempo en la ecuación de la ley de desintegración radiactiva en forma logarítmica.

$$-\ln (N / N_0) = \ln (N_0 / N) = \lambda \cdot t$$

$$t=\frac{\ln(N_0/N)}{\lambda}=\frac{\ln(5,00\cdot 10^{12}/2,50\cdot 10^{12})}{4,87\cdot 10^{-18}\ [\text{s}^{-1}]}=1,42\cdot 10^{17}\ \text{s}=4,51\cdot 10^9\ \text{años}$$

Análisis: Puesto que en ese tiempo la muestra se redujo a la mitad, transcurrió 1 *período de semidesintegración que son* $4,51\cdot 10^9$ *años.*

c) Los procesos de emisión de partículas son

$${}^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

$${}^{234}_{90}\text{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + {}^{0}_{-1}\text{e}$$

$${}^{234}_{91}\text{Pa} \longrightarrow {}^{234}_{92}\text{U} + {}^{0}_{-1}\text{e}$$

$${}^{234}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{230}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

$${}^{230}_{90}\text{Th} \longrightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

$${}^{226}_{88}\text{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

Estas ecuaciones cumplen las leyes de conservación del número bariónico (o número másico) y de la carga eléctrica en los procesos nucleares.
Sabiendo que una partícula alfa es un núcleo de helio-4 (α = ${}^{4}_{2}\text{He}$) y una partícula beta(-) es un electrón (β^- = ${}^{0}_{-1}\text{e}$), el proceso puede resumirse en la siguiente expresión:

$${}^{238}_{92}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}\text{Th} \xrightarrow{\beta} {}^{234}_{91}\text{Pa} \xrightarrow{\beta} {}^{234}_{92}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{230}_{90}\text{Th} \xrightarrow{\alpha} {}^{226}_{88}\text{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{222}_{86}\text{Rn}$$

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM).
Se consultó al Copilot de Microsoft Edge y se tuvieron en cuenta algunas de sus respuestas en las cuestiones.

Actualizado: 22/03/24