Vibracións e ondas

Método e recomendacións

◊ PROBLEMAS

● M.H.S.

1. Unha masa de 200 g está unida a un resorte e oscila nun plano horizontal cun movemento harmónico simple (M.H.S). A amplitude do movemento é A = 40 cm, e a elongación no instante inicial é x = -40 cm. A enerxía total é 8 J. Calcula:
   a) A constante elástica do resorte.
   b) A ecuación do M.H.S.
   c) A velocidade e aceleración máximas, indicando os puntos da traxectoria nos que se alcanzan devanditos valores.

   (P.A.U. Xuño 15)

   Rta.: a) k = 100 N/kg; b) x = 0,400 sen(22,4 t + 4,71) [m]; c) v_m = 8,94 m/s; a_m = 200 m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza o M.H.S.	m = 200 g = 0,200 kg
Amplitude	A = 40,0 cm = 0,400 m
Elongación inicial	x_0 = −40,0 cm = −0,400 m
Enerxía mecánica	E = 8,00 J
Incógnitas	
Constante elástica do resorte	k
Ecuación do movemento (frecuencia angular e fase inicial)	ω, φ_0
Velocidade máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Enerxía mecánica	$E = ½\ k \cdot A^2$
Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$

Solución:

a) Calcúlase a constante elástica do resorte a partir da enerxía e da amplitude.

$$E = ½\ k \cdot A^2 \Rightarrow k = \frac{2 \cdot E}{A^2} = \frac{2 \cdot 8{,}00\ [\text{J}]}{(0{,}400\ [\text{m}])^2} = 100\ \text{N/kg}$$

b) A ecuación de movemento dun M.H.S. é

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.H.S.: obter a ecuación de movemento» exponse o fundamento teórico)
A amplitude é a máxima separación da posición de equilibrio e é un dato: A = 0,400 m
A frecuencia angular calcúlase a partir da constante elástica do resorte e da masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\ [\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]}{0{,}200\ [\text{kg}]}} = 22{,}4\ \text{rad/s}$$

Para calcular a fase inicial substitúense na ecuación de movemento os datos e os valores da posición inicial:

$$-0{,}400\ [\text{m}] = 0{,}400\ [\text{m}]\ \text{sen}(22{,}4 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = -1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(-1) = 3\ \pi / 2\ [\text{rad}] = 4{,}71\ \text{rad}$$

A ecuación de movemento queda:

$$x = 0{,}400 \operatorname{sen}(22{,}4\ t + 4{,}71)\ [\text{m}]$$

Análise: A ecuación de movemento cumpre a condición da posición inicial (para $t = 0$, $x_0 = -0{,}400$ m).

c) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo.

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot \operatorname{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}\,t}=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Ten o valor máximo cando $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$

$$v_m = A \cdot \omega = 0{,}400\ [\text{m}] \cdot 22{,}4\ [\text{rad/s}] = 8{,}94\ \text{m/s}$$

Esta velocidade máxima alcánzase cando a masa pasa polo punto medio da súa traxectoria (orixe), porque cando $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$, entón $\operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0$ e $x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0$

A aceleración obtense derivando a velocidade con respecto ao tempo.

$$a=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}\,t}=-A\cdot\omega^2\cdot\operatorname{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

Ten o valor máximo cando $\operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = -1$

$$a_m = A \cdot \omega^2 = 0{,}400\ [\text{m}] \cdot (22{,}4\ [\text{rad/s}])^2 = 200\ \text{m/s}^2$$

Esta aceleración máxima alcánzase cando a masa pasa polos extremos da súa traxectoria ($x = \pm A$), porque a aceleración é proporcional á elongación, $a = -\omega^2 \cdot x$. A aceleración é máxima cando é máxima a elongación.

2. Un obxecto de 100 g, unido a un resorte de $k = 500\ \text{N·m}^{-1}$, realiza un movemento harmónico simple. A enerxía total é de 5 J. Calcula:
   a) A amplitude.
   b) A velocidade máxima e a frecuencia da oscilación.
   c) Indica cualitativamente nunha gráfica como varían a enerxía total, cinética e potencial coa elongación.

   (P.A.U. Set. 10)

   Rta.: a) $A = 0{,}141$ m; b) $v_m = 10{,}0$ m/s; $f = 11{,}3$ Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza o M.H.S.	$m = 100\ \text{g} = 0{,}100\ \text{kg}$
Constante elástica do resorte	$k = 500\ \text{N·m}^{-1}$
Enerxía mecánica	$E = 5{,}00\ \text{J}$
Incógnitas	
Amplitude (elongación máxima)	A
Velocidade máxima	v_m
Frecuencia de oscilación	f
Outros símbolos	
Valor da velocidade	v
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Elongación	x
Forza recuperadora elástica	F
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Enerxía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía mecánica	$E = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) Calcúlase a amplitude partir da enerxía e da constante elástica do resorte.

$$E=\frac{1}{2}\,k\cdot A^2 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2\cdot E}{k}}=\sqrt{\frac{2\cdot 5{,}00\,[\mathrm{J}]}{500\,[\mathrm{N\cdot m^{-1}}]}}=0{,}141\ \mathrm{m}$$

b) Para calcular a frecuencia de oscilación calcúlase antes a frecuencia angular a partir da constante elástica do resorte e da masa oscilante.

$$k=m\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{500\,[\mathrm{N\cdot m^{-1}}]}{0{,}100\,[\mathrm{kg}]}}=70{,}7\ \mathrm{rad/s}$$

A frecuencia de oscilación obtense da frecuencia angular.

$$\omega = 2\,\pi\cdot f \Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{70{,}7\,[\mathrm{rad/s}]}{2\cdot 3{,}14\,[\mathrm{rad}]}=11{,}3\ \mathrm{s^{-1}}$$

A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo.

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{A\cdot\mathrm{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)\}}{\mathrm{d}\,t}=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi_0)$$

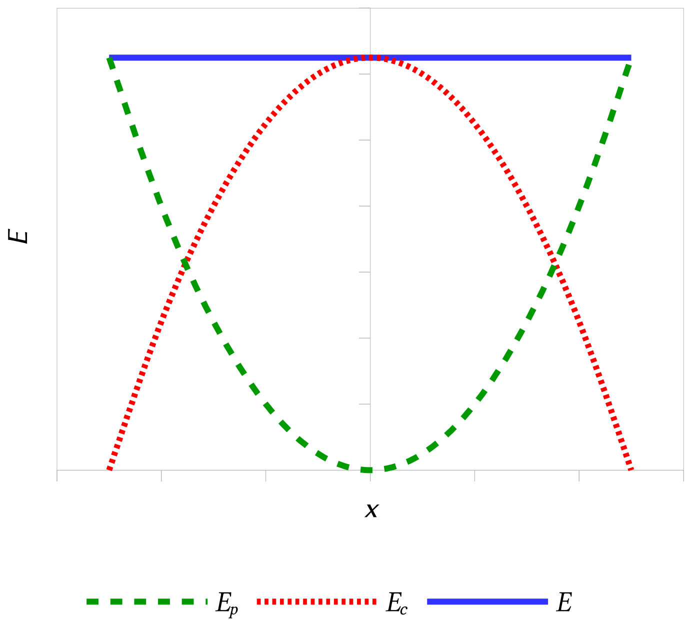
Ten o valor máximo cando $\cos(\omega\cdot t+\varphi_0) = 1$

$v_m = A\cdot\omega = 0{,}141\ [\mathrm{m}]\cdot 70{,}7\ [\mathrm{rad/s}] = 10{,}0\ \mathrm{m/s}$

c) A enerxía mecánica $E=\frac{1}{2}\,k\cdot A^2$ é constante e, por tanto, a súa representación é unha liña recta horizontal.
A representación gráfica da enerxía potencial é unha parábola co vértice na orixe.
A enerxía cinética pódese expresar como a diferenza entre a enerxía mecánica e a enerxía potencial

$E_c = E - E_p = \frac{1}{2}\,k\cdot A^2 - \frac{1}{2}\,k\cdot x^2 = \frac{1}{2}\,k\,(A^2 - x^2)$

A súa representación gráfica tamén é unha parábola pero invertida.



3. Un corpo de masa 100 gramos está unido a un resorte que oscila nun plano horizontal. Cando se estira 10 cm e se solta, oscila cun período de 2 s. Calcula:
   a) A velocidade cando se atopa a 5 cm da súa posición de equilibrio.
   b) A aceleración nese momento.
   c) A enerxía mecánica.

(P.A.U. Set. 08)

Rta.: a) $|v| = 0{,}272$ m/s; b) $|a| = 0{,}493$ m/s²; c) $E = 4{,}93\cdot10^{-3}$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que colga	$m = 100$ g $= 0{,}100$ kg
Amplitude	$A = 10{,}0$ cm $= 0{,}100$ m
Período	$T = 2{,}00$ s
Posición para calcular a velocidade e aceleración	$x = 5{,}00$ cm $= 0{,}0500$ m
Incógnitas	
Velocidade cando se atopa a 5 cm da súa posición de equilibrio	v
Aceleración nese momento	a
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A\cdot\mathrm{sen}(\omega\cdot t+\varphi_0)$
Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m\cdot\omega^2$
Relación entre a frecuencia angular e o período	$\omega = 2\,\pi\,/\,T$
Enerxía potencial elástica	$E_p = \frac{1}{2}\,k\cdot x^2$

Ecuacións

Enerxía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$
Relación entre a aceleración e a elongación	$a = -\omega^2 \cdot x$

Solución:

a) Calcúlase a frecuencia angular a partir do período.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{2{,}00\ [\text{s}]} = 3{,}14\ \text{rad/s}$$

Calcúlase a constante elástica do resorte a partir da frecuencia angular e da masa

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot (3{,}14\ [\text{rad/s}])^2 = 0{,}987\ \text{N / m}$$

Calcúlase a velocidade aplicando o principio de conservación da enerxía, porque a única forza (elástica) é conservativa,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$½\ m \cdot v_1^2 + ½\ k \cdot x_1^2 = ½\ m \cdot v_2^2 + ½\ k \cdot x_2^2$$

Multiplícase todo por 2 e substitúense valores

$$0{,}100\ [\text{kg}] \cdot 0^2 + 0{,}987\ [\text{N/m}]\ (0{,}100\ [\text{m}])^2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot v^2 + 0{,}987\ [\text{N/m}]\ (0{,}0500\ [\text{m}])^2$$

$$|v| = 0{,}272\ \text{m/s}$$

O signo da velocidade non pode determinarse a partir dos datos.

b) A aceleración é proporcional e de sentido contrario á elongación:

$$a = -\omega^2 \cdot x = \pm(3{,}14\ [\text{rad/s}])^2 \cdot 0{,}0500\ [\text{m}] = \pm 0{,}493\ \text{m/s}^2$$

O signo da aceleración depende de a que lado da posición de equilibrio se atope.

c) A enerxía mecánica é constante e vale o mesmo que no punto de máxima elongación, no que a velocidade é nula:

$$E = (E_c + E_p) = 0 \cdot v^2 / 2 + k \cdot A^2 / 2 = 0{,}987\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}100\ [\text{m}])^2 / 2 = 4{,}93 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

4. Unha masa de 10 g está unida a un resorte e oscila nun plano horizontal cun movemento harmónico simple. A amplitude do movemento é A = 20 cm, e a elongación no instante inicial é x = -20 cm. Se a enerxía total é 0,5 J, calcula:
   a) A constante elástica do resorte.
   b) A ecuación do movemento.
   c) A enerxía cinética na posición x = 15 cm.

   (P.A.U. Set. 12)

   Rta.: a) k = 25,0 N/m; b) $x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(50{,}0 \cdot t + 4{,}71)$ [m]; c) E_c = 0,219 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que oscila	m = 10,0 g = 0,0100 kg
Amplitude	A = 20,0 cm = 0,200 m
Posición inicial	x_0 = −20,0 cm = −0,200 m
Enerxía mecánica	E = 0,500 J
Posición para calcular a enerxía cinética	x = 15,0 cm = 0,150 m
Incógnitas	
Constante elástica do resorte	k
Ecuación do movemento (frecuencia angular e fase inicial)	ω, φ_0
Enerxía cinética na posición x = 15 cm	E_c
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Ecuacións

Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Enerxía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) Calcúlase a constante elástica do resorte a partir da enerxía e da amplitude.

$$E = ½\ k \cdot A^2 \Rightarrow k = \frac{2 \cdot E}{A^2} = \frac{2 \cdot 0{,}500\ [\mathrm{J}]}{(0{,}200\ [\mathrm{m}])^2} = 25{,}0\ \mathrm{N/m}$$

b) A ecuación de movemento dun M.H.S. pode escribirse

$$x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.H.S.: obter a ecuación de movemento» expone o fundamento teórico.)
A amplitude é a máxima separación da posición de equilibrio e é un dato: $A = 0{,}200$ m
A frecuencia angular calcúlase a partir da constante elástica do resorte e da masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25{,}0\ [\mathrm{N/m}]}{0{,}010\ 0\ [\mathrm{kg}]}} = 50{,}0\ \mathrm{rad/s}$$

Para calcular a fase inicial elíxese un sistema de referencia con orixe O na posición de equilibrio e o eixe X+ vertical no sentido do alongamento (cara abaixo) e substitúense na ecuación de movemento os datos e os valores da posición inicial:

$$-0{,}200\ [\mathrm{m}] = 0{,}200\ [\mathrm{m}]\ \mathrm{sen}(50{,}0 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\mathrm{sen}(\varphi_0) = -1$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arcsen}(-1) = 3\ \pi\ /\ 2\ [\mathrm{rad}] = 4{,}71\ \mathrm{rad}$$

A ecuación de movemento queda:

$$x = 0{,}200 \cdot \mathrm{sen}(50{,}0 \cdot t + 4{,}71)\ [\mathrm{m}]$$

Análise: A ecuación de movemento cumpre a condición da posición inicial (para $t = 0$, $x_0 = -0{,}200$ m).

c) Pódese calcular a enerxía cinética a partir da enerxía potencial.

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = 25{,}0\ [\mathrm{N/m}] \cdot (0{,}150\ [\mathrm{m}])^2 / 2 = 0{,}281\ \mathrm{J}$$

Tendo en conta que a única forza (elástica) é conservativa,

$$E_c = E - E_p = 0{,}500\ [\mathrm{J}] - 0{,}281\ [\mathrm{J}] = 0{,}219\ \mathrm{J}$$

5. A enerxía total dun corpo de masa 0,5 kg que realiza un movemento harmónico simple é $6{,}0 \cdot 10^{-3}$ J e a forza máxima que actúa sobre el é 0,3 N.
   a) Escribe a ecuación da elongación en función do tempo, se no instante inicial atópase no punto de máxima elongación positiva.
   b) Calcula no instante T/4 a enerxía cinética e a enerxía potencial.
   c) Acha a frecuencia coa que oscilaría se se duplica a súa masa.

   (P.A.U. Set. 16)

   Rta.: a) $x = 0{,}0400 \cos(3{,}87\ t)$ (m); b) $E_p = 0$; $E_c = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ J; c) $f' = 0{,}436$ Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa	$m = 0{,}500$ kg
Forza recuperadora elástica máxima	$F_m = 0{,}300$ N
Enerxía mecánica	$E = 6{,}00 \cdot 10^{-3}$ J
Período de oscilación	$T = 4{,}00$ s
Posición inicial	$x_0 = A$

Incógnitas

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación do movemento (frecuencia angular e amplitude)	ω, A
Enerxía potencial no instante $T/4$	E_p
Enerxía cinética no instante $T/4$	E_c
Frecuencia coa que oscilaría se se duplica a súa masa	f'
Outros símbolos	
Amplitude	A
Constante elástica do resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Masa da partícula	m
Elongación	x
Amplitude (elongación máxima)	A
Ecuacións	
Ecuación do movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Lei de Hooke: forza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Enerxía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Enerxía mecánica	$E = ½\, k \cdot A^2$
Relación entre a frecuencia angular e o período	$\omega = 2\pi / T$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$

Solución:

a) Expone un sistema de dúas ecuacións para calcular dúas das incógnitas: a amplitude e a constante elástica do resorte. A enerxía mecánica elástica é $E = ½\, k \cdot A^2$. A forza é máxima cando a elongación é igual á amplitude.

$$\left.\begin{array}{l} E=\frac{1}{2}k\cdot A^2 \\ F_m = k\cdot A \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}k\cdot A^2 = 6{,}00\cdot 10^{-3}\text{ J} \\ k\cdot A = 0{,}300\text{ N} \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 0{,}040\ 0\text{m} \\ k = 7{,}50\text{ N/m} \end{array}$$

A frecuencia angular calcúlase a partir da constante elástica do resorte e da masa oscilante.

$$k = m\cdot\omega^2 \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{7{,}50\,[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]}{0{,}500\,[\text{kg}]}} = 3{,}87\text{ rad/s}$$

A ecuación do M.H.S. é indistintamente $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ ou $x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi'_0)$ pero o valor da fase inicial depende da expresión. (En «M.H.S.: obter a ecuación de movemento» expone o fundamento teórico.)

Para calcular a fase inicial substitúense na ecuación de movemento os datos e os valores da posición inicial:

$$0{,}0400\ [\text{m}] = 0{,}0400\ [\text{m}]\ \text{sen}(3{,}87 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(-1) = \pi / 2\ [\text{rad}] = 1{,}57\text{ rad}$$

A ecuación de movemento queda:

$$x = 0{,}0400\ \text{sen}(3{,}87 \cdot t + 1{,}57)\ [\text{m}]$$

Esta ecuación é equivalente a:

$$x = 0{,}0400\ \cos(3{,}87 \cdot t)\ [\text{m}]$$

b) Para calcular a enerxía potencial necesitamos coñecer a posición nese instante.
Calcúlase o período T de oscilación a partir da frecuencia angular.

$$\omega = 2\pi / T \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{3{,}87\ [\text{rad/s}]} = 1{,}62\text{ s}$$

$$t = T / 4 = 1{,}62\ [\text{s}] / 4 = 0{,}405\text{ s}$$

$$x = 0{,}0400 \cos(3{,}87 \cdot 0{,}405) = 0$$

Enerxía potencial para $x = 0$ m:

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = 7{,}50 \text{ [N/m] } (0 \text{ [m]})^2 / 2 = 0$$

A enerxía cinética calcúlase a partir da enerxía mecánica, xa que a forza é conservativa.
Enerxía cinética para $x = 0$ m:

$$E_c = E - E_p = 6{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ [J]} - 0 \text{ [J]} = 6{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

c) Da ecuación que relaciona a constante elástica coa frecuencia angular pódese despexar a frecuencia.

$$k = m \cdot \omega^2 = m\,(2\,\pi \cdot f)^2 = 4\,\pi^2 \cdot f^2 \cdot m$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f\,' = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{3{,}87 \text{ [N/m]}}{2 \cdot 0{,}500 \text{ [kg]}}} = 0{,}436 \text{ s}^{-1}$$

A frecuencia é inversamente proporcional á raíz cadrada da masa. Se a masa se duplica, a frecuencia diminúe nun factor $\sqrt{2}$.

6. Cólgase un corpo de 10 kg de masa dun resorte e alárgase 2,0 cm. Despois engádenselle outros 10 kg e dáselle un tirón cara abaixo, de modo que o sistema comeza a oscilar cunha amplitude de 3,0 cm.
   a) Calcula a constante elástica do resorte e a frecuencia do movemento.
   b) Escribe, en función do tempo, as ecuacións da elongación, velocidade, aceleración e forza.
   c) Calcula a enerxía cinética e a enerxía potencial elástica aos 2 s de empezar a oscilar.
   Dato: $g = 9{,}8$ m/s² *(P.A.U. Set. 14)*
   Rta.: a) $k = 4{,}90 \cdot 10^3$ N/m; $f = 2{,}49$ Hz; b) $x = 0{,}0300 \cos(15{,}7\ t)$ [m]; $v = -0{,}470 \text{ sen}(15{,}7\ t)$ m/s]; $a = -7{,}35 \cos(15{,}7\ t)$ [m/s²]; $F = -147 \cos(15{,}7\ t)$ [N]; c) $E_c = 0{,}0270$ J; $E_p = 2{,}18$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que se colga do resorte	$m_0 = 10{,}0$ kg
Alongamento	$\Delta x = 2{,}00$ cm $= 0{,}0200$ m
Masa que realiza o M.H.S.	$m = 20{,}0$ kg
Posición inicial	$x_0 = 3{,}00$ cm $= 0{,}0300$ m
Amplitude (elongación máxima)	$A = x_0 = 0{,}0300$ m
Tempo para calcular a enerxía	$t = 2{,}00$ s
Aceleración da gravidade	$g = 9{,}80$ m/s²
Incógnitas	
Constante elástica do resorte	k
Frecuencia do movemento	f
Ecuacións do movemento harmónico:	x, v, a, F
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Velocidade máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Forza máxima	F_m
Enerxía cinética cando $t = 2$ s	E_c
Enerxía potencial cando $t = 2$ s	E_p
Outros símbolos	
Forza recuperadora elástica	F
Ecuacións	
Peso	$P = m \cdot g$
Lei de Hooke: forza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Enerxía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) Calcúlase a constante elástica do resorte da situación de equilibrio, cando os valores do peso da masa colgada e a forza elástica son iguais:

$$k \cdot \Delta x = m \cdot g$$

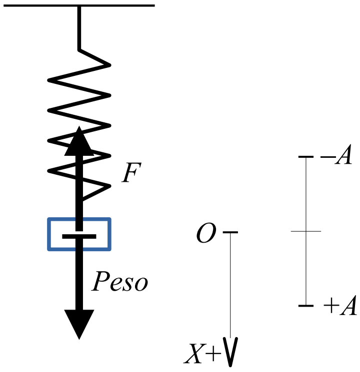
$$k=\frac{m \cdot g}{\Delta x}=\frac{10{,}0\,[\mathrm{kg}]\cdot 9{,}80\,[\mathrm{m/s^2}]}{0{,}020\,0\,[\mathrm{m}]}=4{,}90\cdot 10^3\ \mathrm{N/m}$$

Calcúlase a frecuencia a partir da pulsación, que se obtén da constante elástica do resorte e da masa oscilante.

$$k=m\cdot\omega^2 \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4{,}90\cdot 10^3\,[\mathrm{N\cdot m^{-1}}]}{20{,}0\,[\mathrm{kg}]}}=15{,}7\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega = 2\,\pi\cdot f = \quad f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{15{,}7\ \mathrm{rad/s}}{2\cdot 3{,}14\ \mathrm{rad}}=2{,}49\ \mathrm{s^{-1}}=2{,}49\ \mathrm{Hz}$$

b) En «M.H.S.: obter a ecuación de movemento» exponse o fundamento teórico.
Para calcular a fase inicial elíxese un sistema de referencia con orixe O na posición de equilibrio e o eixe X+ vertical no sentido do alongamento (cara abaixo) e substitúense na ecuación de movemento os datos e os valores da posición inicial:



$$0{,}0300\ [\mathrm{m}] = 0{,}0300\ [\mathrm{m}]\cdot \mathrm{sen}(\ 15{,}7\cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\mathrm{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arcsen}(1) = \pi\ /\ 2\ [\mathrm{rad}] = 1{,}57\ \mathrm{rad}$$

A ecuación de movemento queda:

$$x = 0{,}0300 \cdot \mathrm{sen}(15{,}7\cdot t + \pi\ /2)\ [\mathrm{m}]$$

Como sen(φ + π /2) = cos φ, a ecuación pode escribirse máis brevemente:

$$x = 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7\cdot t)\ [\mathrm{m}]$$

Análise: A ecuación de movemento cumpre a condición da posición inicial (para t = 0, x_0 = 0,0300 m).

A velocidade é a derivada da posición con respecto ao tempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}030\ 0\cos(15{,}7\cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t}=-15{,}7\cdot 0{,}030\ 0\,\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)=-0{,}470\cdot\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)\ \ \mathrm{m/s}$$

A aceleración é a derivada da velocidade con respecto ao tempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{-0{,}470\cdot\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t}=-0{,}470\cdot 15{,}7\cdot\cos(15{,}7\cdot t)=-7{,}35\cdot\cos(15{,}7\cdot t)\ \ \mathrm{m/s^2}$$

A forza elástica é:

$$F = -k\cdot x$$

$$F = -4{,}90\cdot 10^3\ [\mathrm{N/m}]\cdot 0{,}0300\cdot\cos(15{,}7\cdot t)\ [\mathrm{m}] = -147\ \cos(15{,}7\cdot t)\ [\mathrm{N}]$$

c) Aos 2,00 s a súa posición é:

$$x = 0{,}0300\ [\mathrm{m}]\cdot\cos(15{,}7\ [\mathrm{rad/s}]\cdot 2{,}00\ [\mathrm{s}]) = 0{,}0298\ \mathrm{m}$$

Enerxía potencial para x = 0,0298 m:

$$E_\mathrm{p} = k\cdot x^2\ /\ 2 = 4{,}90\cdot 10^3\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}0298\ [\mathrm{m}])^2\ /\ 2 = 2{,}18\ \mathrm{J}$$

Aos 2,00 s a súa velocidade é:

$$v = -0{,}470\ [\mathrm{m/s}]\cdot\ \mathrm{sen}(15{,}7\ [\mathrm{rad/s}]\cdot 2{,}00\ [\mathrm{s}]) = 0{,}0520\ \mathrm{m/s}$$

Enerxía cinética para v = 0,0520 m/s

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 20{,}0 \text{ [kg]} \cdot (0{,}0520 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 0{,}0270 \text{ J}$$

Análise: Pódese calcular a enerxía mecánica $E=½\ k \cdot A^2 = k \cdot A^2 / 2 = 4{,}90 \cdot 10^3$ [N/m] (0,0300 [m])² / 2 = 2,21 J *e comprobar que é igual á suma das enerxías cinética e potencial:* 2,21 J = 0,027 J + 2,18 J

7. Un resorte de masa desprezable estírase 0,1 m cando se lle aplica unha forza de 2,45 N. Fíxase no seu extremo libre unha masa de 0,085 kg e estírase 0,15 m ao longo dunha mesa horizontal a partir da súa posición de equilibrio e sóltase deixándoo oscilar libremente sen rozamento. Calcula:
   a) A constante elástica do resorte e o período de oscilación.
   b) A enerxía total da oscilación e as enerxías potencial e cinética cando x = 0,075 m.

   (P.A.U. Xuño 04)

   Rta.: a) k = 24,5 N/m; T = 0,370 s; b) E = 0,276 J; $E_p = 6{,}89 \cdot 10^{-2}$ J; E_c = 0,207 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza o M.H.S.	m = 0,085 kg
Forza aplicada	F_a = 2,45 N
Alongamento	Δx = 0,100 m
Posición inicial	x_0 = 0,150 m
Amplitude (elongación máxima)	$A = x_0$ = 0,150 m
Posición para calcular a enerxía cinética e potencial	x = 0,0750 m
Incógnitas	
Constante elástica do resorte	k
Período de oscilación	T
Enerxía mecánica	E
Enerxía cinética para x = 0,0750 m	E_c
Enerxía potencial para x = 0,0750 m	E_p
Outros símbolos	
Elongación	x
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Forza recuperadora elástica	F
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Lei de Hooke: forza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Relación entre a frecuencia angular ω e a constante elástica k	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre a frecuencia angular e o período	$\omega = 2\pi / T$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Enerxía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) Calcúlase a constante elástica do resorte a partir do equilibrio no que a forza elástica contrarresta á forza aplicada

$$F_a = k \cdot \Delta x$$

$$k = \frac{F_a}{\Delta x} = \frac{2{,}45 \text{ [N]}}{0{,}100 \text{ [m]}} = 24{,}5 \text{ N/m}$$

O período calcúlase da frecuencia angular que se obtén a partir da constante elástica do resorte e da masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24{,}5 \text{ [N·m}^{-1}\text{]}}{0{,}085 \text{ [kg]}}} = 17{,}0 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi / T \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}{17{,}0 \text{ [rad/s]}} = 0{,}370 \text{ s}$$

b) Enerxía mecánica

$$E=½\ k\cdot A^2 = k \cdot A^2 / 2 = 24{,}5\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}150\ [\text{m}])^2 / 2 = 0{,}276\ \text{J}$$

Enerxía potencial para x = 0,075 m:

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = 24{,}5\ [\text{N/m}]\ (0{,}075\ [\text{m}])^2 / 2 = 6{,}89 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

A enerxía cinética calcúlase a partir da enerxía mecánica, xa que a forza é conservativa.

$$E_c = E - E_p = 0{,}276 - 6{,}89 \cdot 10^{-2} = 0{,}207\ \text{J}$$

8. Unha masa de 0,01 kg realiza un movemento harmónico simple de ecuación $x = 5 \cos(2\ t + \pi/6)$. (Magnitudes no S.I.). Calcula:
   a) Posición, velocidade e aceleración en t = 1 s.
   b) Enerxía potencial en x = 2 m.
   c) A enerxía potencial, é negativa nalgún instante?

(P.A.U. Xuño 07)

Rta.: a) $x_1 = -4{,}08$ m; $v_1 = -5{,}79$ m/s; $a_1 = 16{,}3$ m/s²; b) $E_p = 0{,}0800$ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza o M.H.S.	m = 0,0100 kg
Ecuación do movemento	$x = 5{,}00 \cdot \cos(2{,}00 \cdot t + \pi/6)$ [m]
Incógnitas	
Posición en t = 1,00 s.	x_1
Velocidade en t = 1,00 s.	v_1
Aceleración en t = 1,00 s.	a_1
Enerxía potencial en x = 2,00 m	E_p
Outros símbolos	
Elongación	x
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre a frecuencia angular ω e a constante elástica k	$k = m \cdot \omega^2$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Enerxía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) A posición para t = 1,00 s obtense substituíndo o valor do tempo na ecuación de movemento:

$$x_1 = 5{,}00 \cdot \cos(2{,}00 \cdot 1{,}00 + \pi/6)\ [\text{m}] = -4{,}08\ \text{m}$$

A velocidade é a derivada da posición con respecto ao tempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{5{,}00\cdot\cos(2{,}00\cdot t+\pi/6)\}}{\mathrm{d}\,t}=-5{,}00\cdot 2{,}00\cdot \operatorname{sen}(2{,}00\cdot t+\pi/6)=-10{,}0\cdot\operatorname{sen}(2{,}00\cdot t+\pi/6)\quad[\text{m/s}]$$

Substituíndo o valor do tempo, t = 1,00 s

$$v_1 = -10{,}0 \cdot \operatorname{sen}(2{,}00 \cdot 1{,}00 + \pi/6)\ [\text{m/s}] = -5{,}79\ \text{m/s}$$

A aceleración é a derivada da velocidade con respecto ao tempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=\frac{d\{-10{,}0\cdot\operatorname{sen}(2{,}00\cdot t+\pi/6)\}}{\mathrm{d}\,t}=-10{,}0\cdot 2{,}00\cdot\cos(2{,}00\,t+\pi/6)=-20{,}0\cdot\cos(2{,}00\,t+\pi/6)\quad[\text{m/s}^2]$$

Substituíndo o valor do tempo, t = 1,00 s

$$a_1 = -20{,}0 \cdot \cos(2{,}00 \cdot 1{,}00 + \pi/6)\ [\text{m/s}^2] = 16{,}3\ \text{m/s}^2$$

Análise: A posición inicial era $x_0 = 5{,}00 \cdot \cos(\pi/6) = 4{,}33$ m *e movíase cara á orixe, xa que a velocidade inicial era* $v_0 = -10{,}0 \cdot \operatorname{sen}(\pi/6) < 0$*. Como o período* $T = 2\pi / \omega = 3{,}14$ s*, para* t = 1,00 s *aínda non describiu medio* *ciclo, polo que ten que atoparse nas zonas de elongacións negativas, polo que a aceleración ($a = -\omega^2 \cdot x$) ten que ser positiva. Con estes sinxelos cálculos non podemos determinar se a súa velocidade é cara á orixe (+) ou en sentido contrario.*

b) Para calcular a enerxía potencial necesítase a constante elástica do resorte que se obtén a partir da pulsación e da masa oscilante: $k = m \cdot \omega^2$

$$E_p = k \cdot x^2 / 2 = m \cdot \omega^2 \cdot x^2 / 2 = 0{,}0100 \text{ [kg] } (2{,}00 \text{ [rad/s]})^2 (2{,}00 \text{ [m]})^2 / 2 = 8{,}00 \cdot 10^{-2} \text{ J} = 0{,}0800 \text{ J}$$

Análise: A enerxía mecánica consérvase, porque a forza elástica é unha forza conservativa. A enerxía potencial elástica podería calcularse restando a enerxía cinética da enerxía mecánica: $E_p = E - E_c$.
Aínda que a enerxía mecánica pódese calcular facilmente sen coñecer a constante elástica, xa que: $E = E_{p\,m} = E_{c\,m} = ½\, m \cdot v^2_m$, calcular a enerxía cinética para $x = 2{,}00$ m é máis complicado e non compensa facelo.

c) A enerxía potencial, é negativa nalgún instante? Non, xa que a constante elástica é un número positivo e a elongación, aínda que pode ser positiva ou negativa, está elevada ao cadrado, polo que a enerxía potencial elástica é sempre positiva.

$$E_p = ½\, k \cdot x^2$$

9. Dun resorte de 40 cm de lonxitude cólgase un peso de 50 g de masa e, alcanzado o equilibrio, a lonxitude do resorte é de 45 cm. Estírase coa man a conxunto masa-resorte 6 cm e sóltase. Acha:
   a) A constante do resorte.
   b) A ecuación do M.H.S. que describe o movemento.
   c) Deduce a ecuación da enerxía potencial elástica.
   Dato: $g = 9{,}8$ m·s⁻² *(P.A.U. Set. 07)*
   Rta.: a) $k = 9{,}8$ N/m; b) $x = 0{,}060 \cdot \cos(14 \cdot t)$ [m]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Lonxitude inicial do resorte	$L_0 = 40{,}0$ cm $= 0{,}400$ m
Masa que colga	$m = 50{,}0$ g $= 0{,}0500$ kg
Lonxitude ao colgarlle os 50 g	$L = 45{,}0$ cm $= 0{,}450$ m
Amplitude	$A = 6{,}00$ cm $= 0{,}0600$ m
Aceleración da gravidade	$g = 9{,}80$ m·s^{-2}
Incógnitas	
Constante elástica do resorte	k
Ecuación do movemento (frecuencia angular e fase inicial)	ω, φ_0
Outros símbolos	
Elongación	x
Traballo	W
Ecuacións	
Peso	$P = m \cdot g$
Lei de Hooke: forza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre a frecuencia angular ω e a constante elástica k	$k = m \cdot \omega^2$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$

Solución:

a) Calcúlase a constante elástica do resorte da situación de equilibrio, cando os valores do peso da masa colgada e a forza elástica son iguais:

$$k \cdot \Delta x = m \cdot g$$

O alongamento vale

$$\Delta x = L - L_0 = 0{,}450 \text{ [m]} - 0{,}400 \text{ [m]} = 0{,}050 \text{ m}$$

A constante é

$$k=\frac{m \cdot g}{\Delta x}=\frac{0{,}050\,0\,[\text{kg}]\cdot 9{,}80\,[\text{m/s}^2]}{0{,}050\,[\text{m}]}=9{,}8\ \text{N/m}$$

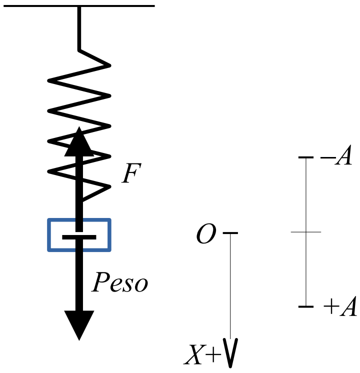
b) A ecuación de movemento dun M.H.S. pode escribirse

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.H.S.: obter a ecuación de movemento» exponse o fundamento teórico.)
A amplitude é a máxima separación da posición de equilibrio e é un dato: A = 0,0600 m
A frecuencia angular calcúlase a partir da constante elástica do resorte e da masa oscilante.

$$k=m\cdot\omega^2 \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{9{,}8\,[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]}{0{,}050\,0\,[\text{kg}]}}=14\ \text{rad/s}$$

Para calcular a fase inicial elíxese un sistema de referencia con orixe O na posición de equilibrio e o eixe X+ vertical no sentido do alongamento (cara abaixo) e substitúense na ecuación de movemento os datos e os valores da posición inicial:



$$0{,}0600\ [\text{m}] = 0{,}0600\ [\text{m}] \cdot \text{sen}(14 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1) = \pi/2\ [\text{rad}] = 1{,}57\ \text{rad}$$

A ecuación de movemento queda:

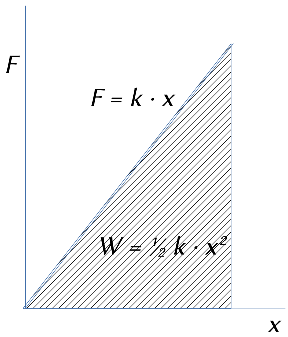
$$x = 0{,}0600 \cdot \text{sen}(14\ t + \pi/2)\ [\text{m}]$$

Como sen(φ + π /2) = cos φ, a ecuación pode escribirse máis brevemente:

$$x = 0{,}0600 \cdot \cos(14\ t)\ [\text{m}]$$

Análise: A ecuación de movemento cumpre a condición da posición inicial (para t = 0, x_0 = 0,0600 m).

c) Para obter a ecuación de enerxía potencial elástica, sen cálculo integral, debúxase a gráfica F / x e admítese que o traballo da forza elástica entre a orixe e un punto calquera de elongación é a área baixa a gráfica.
Para un desprazamento elemental, d x, o traballo da forza valería a área elemental baixo a gráfica F / x.



$$\text{d}\ W = F \cdot \text{d}\ x$$

O traballo da forza elástica cando un obxecto sometido a ela desprázase entre a orixe e un punto de coordenada x vale:

$$W = \text{Área do triángulo} = x \cdot F / 2 = x \cdot k \cdot x / 2 = ½\ k \cdot x^2$$

Como o traballo é a variación da enerxía potencial cambiada de signo

$$W = -\Delta E_p$$

Asignando á orixe enerxía potencial nula, a expresión da enerxía potencial é

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

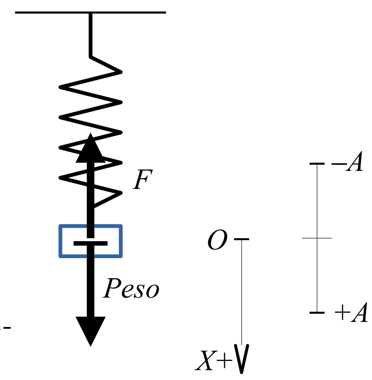
10. Unha masa de 5 g realiza un movemento harmónico simple de frecuencia 1 Hz e amplitude 10 cm. Se en t = 0 a elongación é a metade da amplitude, calcula:
a) A ecuación do movemento.
b) A enerxía mecánica.
c) En que puntos da traxectoria é máxima a enerxía cinética e en cales é máxima a enerxía potencial?
(P.A.U. Xuño 09)

Rta.: a) x = 0,100 · sen(2 π · t + π / 6) [m] b) E = 9,87·10⁻⁴ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza o M.H.S.	m = 5,00 g = 0,00500 kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitude	A = 10,0 cm = 0,100 m
Posición inicial	x_0 = ±A / 2 = ±0,0500 m
Frecuencia	f = 1,00 Hz
Incógnitas	
Ecuación do movemento (frecuencia angular e fase inicial)	ω, φ_0
Enerxía mecánica	E
Outros símbolos	
Constante elástica do resorte	k
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Forza recuperadora elástica	F
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Enerxía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:



a) A ecuación de movemento dun M.H.S. pode escribirse

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.H.S.: obter a ecuación de movemento» exponse o fundamento teórico.)
A amplitude é un dato: A = 0,100 m
A frecuencia angular calcúlase a partir da frecuencia:

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2\ \pi\ [\text{rad}] \cdot 1{,}00\ [\text{Hz}] = 2\ \pi\ [\text{rad/s}] = 6{,}28\ \text{rad/s}$$

Para calcular a fase inicial elíxese un sistema de referencia con orixe O na posición de equilibrio e o eixe X+ vertical no sentido do alongamento (cara abaixo) e substitúense na ecuación de movemento os datos e os valores da posición inicial:

$$A / 2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1 / 2$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1/2)$$

Hai dúas solucións: $\varphi_{01} = \pi / 6$ e $\varphi_{02} = 5\ \pi / 6$.
Necesitaríase coñecer o sentido do movemento para poder elixir entre elas. A falta dese dato, elíxese arbitrariamente, por exemplo: $\varphi_{01} = \pi / 6$, que corresponde ao desprazamento en sentido positivo.
A ecuación de movemento queda:

$$x = 0{,}100 \cdot \text{sen}(2\ \pi \cdot t + \pi / 6)\ [\text{m}]$$

(No caso de elixir a ecuación $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, tamén habería dúas solucións para a fase inicial: $\varphi_{01} = -\pi / 3$ e $\varphi_{02} = \pi / 3$)
Análise: Calquera das ecuacións de movemento propostas cumpre a condición da posición inicial (para t = 0, x_0 = 0,0500 m ou x_0 = −0,0500 m*).*

b) A enerxía mecánica pode calcularse como a suma das enerxías cinética e potencial en calquera instante, a enerxía cinética máxima ou a enerxía potencial máxima:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ k \cdot A^2$$

No caso de optar pola última, hai que calcular o valor da constante elástica.

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}00500\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ [\text{rad/s}])^2 = 0{,}197\ \text{N/m}$$

Enerxía mecánica:

$$E = k \cdot A^2 / 2 = 0{,}197\ [\text{N/m}]\ (0{,}0500\ [\text{m}])^2 / 2 = 9{,}87 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

Poderíase calcular a enerxía mecánica como a enerxía cinética máxima. A velocidade nun instante é a derivada da posición con respecto ao tempo. Derivando a ecuación de movemento queda:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}100 \cdot \text{sen}(2\,\pi \cdot t + \pi/6)\}}{\mathrm{d}\,t} = 0{,}100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \cos(2\,\pi \cdot t + \pi/6) = 0{,}628 \cdot \cos(2\,\pi \cdot t + \pi/6)\ \text{m/s}$$

A velocidade ten un valor máximo cando o coseno da fase vale 1.

$$v_\text{m} = 0{,}628\ \text{m/s}$$

$$E_{\text{c m}} = m \cdot v^2_\text{m} / 2 = 0{,}00500\ [\text{kg}] \cdot (0{,}628\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 9{,}87 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

c) A enerxía cinética é máxima cando a enerxía potencial é mínima, ou sexa nula. É dicir na orixe ou centro da traxectoria $x = 0$.
A enerxía potencial é máxima cando a elongación é máxima, ou sexa igual á amplitude. É dicir

$$x = \pm A = \pm 0{,}100\ \text{m}$$

11. Unha partícula de masa $m = 0{,}1$ kg, suxeita no extremo dun resorte, oscila nun plano horizontal cun M.H.S., sendo a amplitude $A = 0{,}20$ m e a frecuencia $f = 5\ \text{s}^{-1}$. No instante inicial a posición é $x = A$. Calcula para $t = T / 8$ s:
    a) A velocidade e aceleración.
    b) A enerxía mecánica.
    a) A frecuencia con que oscilaría se se duplica a masa.

(P.A.U. Xuño 13)

Rta.: a) $v = -4{,}44$ m/s; $a = -140\ \text{m/s}^2$; b) $E = 1{,}97$ J; c) $f = 3{,}54$ Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza o M.H.S.	$m = 0{,}100$ kg
Amplitude	$A = 0{,}200$ m
Frecuencia	$f = 5{,}00\ \text{s}^{-1}$
Posición inicial	$x_0 = A = 0{,}200$ m
Incógnitas	
Velocidade para $t = T / 8$	v
Aceleración para $t = T / 8$	a
Enerxía mecánica	E
Frecuencia se se duplica a masa	f_2
Outros símbolos	
Constante elástica do resorte	k
Período	T
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Forza recuperadora elástica	F
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre frecuencia e o período	$f = 1 / T$
Enerxía potencial elástica	$E_\text{p} = ½\ k \cdot x^2$
Enerxía cinética	$E_\text{c} = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía mecánica	$E = (E_\text{c} + E_\text{p}) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

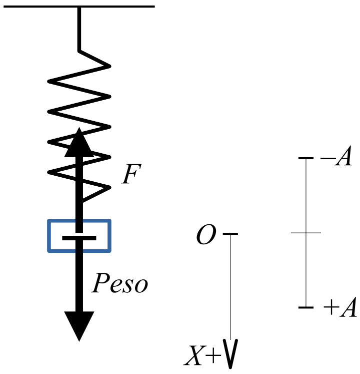
a) A ecuación de movemento dun M.H.S. pode escribirse

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.H.S.: obter a ecuación de movemento» expone o fundamento teórico)
A amplitude é un dato: A = 0,200 m
A frecuencia angular calcúlase a partir da frecuencia:

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2\ \pi\ [\text{rad}] \cdot 5{,}00\ [\text{Hz}] = 10\ \pi\ [\text{rad/s}] = 31{,}4\ \text{rad/s}$$

Para calcular a fase inicial elíxese un sistema de referencia con orixe O na posición de equilibrio e o eixe X+ vertical no sentido do alongamento (cara abaixo) e substitúense na ecuación de movemento os datos e os valores da posición inicial:



$$A = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1) = \pi\ /\ 2\ [\text{rad}] = 1{,}57\ \text{rad}$$

A ecuación de movemento queda:

$$x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(10\ \pi \cdot t + \pi\ /\ 2)\ [\text{m}]$$

Como sen(φ + π /2) = cos φ, a ecuación pode escribirse máis brevemente:

$$x = 0{,}200 \cdot \cos(10\ \pi \cdot t)\ [\text{m}]$$

Obtense a expresión da velocidade derivando a ecuación de movemento:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}200 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t} = -0{,}200 \cdot 31{,}4 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t) = -6{,}28 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t)\ [\text{m/s}]$$

Necesítase calcular o período:

$$T = 1\ /\ f = 1\ /\ (5{,}00\ [\text{s}^{-1}]) = 0{,}200\ \text{s}$$

O tempo é

$$t = T\ /\ 8 = 0{,}200\ [\text{s}]\ /\ 8 = 0{,}0250\ \text{s}$$

Substitúese para calcular a velocidade nese instante:

$$v = -6{,}28 \cdot \text{sen}\ (10\ \pi\ [\text{rad/s}] \cdot 0{,}0250\ [\text{s}])\ [\text{m/s}] = -6{,}28 \cdot \text{sen}\ (\pi/\ 4)\ [\text{m/s}] = -4{,}44\ \text{m/s}$$

Obtense a expresión da aceleración derivando a ecuación da velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{-6{,}28 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t} = -6{,}28 \cdot 31{,}4 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t) = -197 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t)\ [\text{m/s}^2]$$

Substituíndo o valor do tempo obtense a aceleración para $t = T\ /\ 8$:

$$a = -197 \cdot \cos(10\ \pi\ [\text{rad/s}] \cdot 0{,}0250\ [\text{s}])\ [\text{m/s}^2] = -197 \cdot \cos(\pi\ /\ 4)\ [\text{m/s}^2] = -140\ \text{m/s}^2$$

b) A enerxía mecánica pode calcularse como a enerxía potencial máxima, a enerxía cinética máxima ou a suma das enerxías cinética e potencial en calquera instante:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

No caso de optar pola primeira, hai que calcular o valor da constante elástica.

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot (31{,}4\ [\text{rad/s}])^2 = 98{,}7\ \text{N/m}$$

Enerxía mecánica:

$$E = E_{p\ m} = k \cdot A^2\ /\ 2 = 98{,}7\ [\text{N/m}]\ (0{,}200\ [\text{m}])^2\ /\ 2 = 1{,}97\ \text{J}$$

Poderíase calcular a enerxía mecánica como a enerxía cinética máxima.
A velocidade ten un valor máximo cando o seno da fase vale −1.

$$v_m = -6{,}28\ \text{sen}\ (10\ \pi \cdot t)\ [\text{m/s}] = 6{,}28\ \text{m/s}$$

$$E_{c\ m} = m \cdot v^2_m\ /\ 2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ [\text{m/s}])^2\ /\ 2 = 1{,}97\ \text{J}$$

Tamén se podería calcular a enerxía mecánica como a suma das enerxías cinética e potencial, pero sería un proceso máis longo xa que habería que calcular o valor da constante elástica e o da posición. (Só se tiña calculada a velocidade)

c) Da ecuación que relaciona a constante elástica coa frecuencia angular pódese despexar a frecuencia.

$$k = m \cdot \omega^2 = m\,(2\,\pi \cdot f)^2 = 4\,\pi^2 \cdot f^2 \cdot m$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_2=\frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{98{,}7\ [\mathrm{N/m}]}{0{,}2\ [\mathrm{kg}]}}=3{,}54\ \mathrm{s}^{-1}$$

A frecuencia é inversamente proporcional á raíz cadrada da masa. Se a masa se duplica, a frecuencia diminúe nun factor $\sqrt{2}$.

12. Unha masa de 0,5 kg está unida ao extremo dun resorte (de masa desprezable) situado sobre un plano horizontal, permanecendo fixo o outro extremo do resorte. Para estirar o resorte unha lonxitude de 4 cm requírese unha forza de 5 N. Déixase o sistema masa-resorte en liberdade. Calcula:
    a) O traballo realizado pola forza elástica desde a posición inicial x = 4 cm ata a súa posición de equilibrio x = 0.
    b) O módulo da velocidade da masa cando se atopa a 2 cm da súa posición de equilibrio.
    c) A frecuencia de oscilación do citado resorte se inicialmente estírase 6 cm.

    (P.A.U. Set. 15)

    Rta.: a) W = 0,100 J; b) $|v_2|$ = 0,548 m/s; f = 2,52 Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa	m = 0,500 kg
Alongamento do resorte	x = 4,00 cm = 0,0400 m
Forza necesaria para alargar o resorte 4 cm	F_a = 5,00 N
Amplitude	A = 4,00 cm = 0,0400 m
Posición para calcular a velocidade	x_2 = 2,00 cm = 0,0200 m
Amplitude se se estira 6 cm	A_6 = 6,00 cm = 0,0600 m
Incógnitas	
Traballo da forza elástica desde x = 4 cm ata a orixe	W
Módulo da velocidade para x = 2 cm	$\|v_2\|$
Frecuencia da oscilación se A = 6 cm	f
Ecuacións	
Traballo dunha forza conservativa	$W = -\Delta E_p$
Enerxía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Lei de Hooke: forza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Enerxía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Relación entre a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$

Solución:

a) O traballo que realiza unha forza conservativa como a forza elástica é igual e de signo contrario á variación de enerxía potencial. Para calcular a enerxía potencial elástica é necesario coñecer a constante elástica do resorte.
Calcúlase a constante elástica do resorte na situación de equilibrio, cando os valores da forza aplicada e a forza elástica son iguais:

$$F_a = k \cdot \Delta x \Rightarrow k=\frac{F_a}{\Delta x}=\frac{5{,}00\ [\mathrm{N}]}{0{,}040\ 0\ [\mathrm{m}]}=125\ \mathrm{N/m}$$

A enerxía potencial na orixe é nula E_{p0} = 0.
A enerxía potencial no punto no que x = 4 cm vale:

$$E_{p4} = k \cdot x^2 / 2 = 125\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}0400\ [\mathrm{m}])^2 / 2 = 0{,}100\ \mathrm{J}$$

O traballo da forza elástica desde x = 4 cm ata a orixe vale:

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p0} - E_{p4}) = E_{p4} = 0{,}100 \text{ J}$$

Análise: A forza recuperadora elástica realiza un traballo positivo porque ten o mesmo sentido que o desprazamento: cara á orixe.

b) Calcúlase a velocidade aplicando o principio de conservación da enerxía, porque a única forza (elástica) é conservativa,

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$½\, m \cdot v_1^2 + ½\, k \cdot x_1^2 = ½\, m \cdot v_2^2 + ½\, k \cdot x_2^2$$

Multiplícase todo por 2 e substitúense valores, tomando como punto 1 o de x = 4 cm e como punto 2 o de x = 2 cm.

$$0{,}500 \text{ [kg]} \cdot 0^2 + 125 \text{ [N/m]} (0{,}0400 \text{ [m]})^2 = 0{,}500 \text{ [kg]} \cdot v_2^2 + 125 \text{ [N/m]} (0{,}0200 \text{ [m]})^2$$

$$|v_2| = 0{,}548 \text{ m/s}$$

c) A frecuencia, que se obtén da frecuencia angular ou pulsación, é independente da amplitude, só depende da masa e da constante elástica do resorte:

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{125{,}0 \text{ [N/m]}}{0{,}500 \text{ [kg]}}} = 15{,}8 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\,\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{15{,}8 \text{ [rad/s]}}{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}} = 2{,}52 \text{ s}^{-1}$$

● Péndulo

1. Un péndulo simple de lonxitude L = 2,5 m, desvíase do equilibrio ata un punto a 0,03 m de altura e sóltase. Calcula:
   a) A velocidade máxima.
   b) O período.
   c) A amplitude do movemento harmónico simple descrito polo péndulo.
   Dato g = 9,8 m·s^{-2} *(P.A.U. Xuño 11)*
   Rta.: a) v_m = 0,77 m/s; b) t = 3,2 s; c) A = 0,39 m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Lonxitude do péndulo	L = 2,50 m
Altura inicial	h_1 = 0,0300 m
Velocidade inicial	v_1 = 0
Aceleración da gravidade	g = 9,80 m·s^{-2}
Incógnitas	
Velocidade máxima	v_m
Período	T
Amplitude do M.H.S.	
A Outros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Ecuacións	
Ecuación de movemento no M.H.S.	$\theta = \theta_0 \text{ sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$ $s = A \text{ sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Período de un péndulo de lonxitude L	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
Relación entre o arco s e o ángulo central θ nunha circunferencia de radio R	$s = \theta \cdot R$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Enerxía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$

Ecuacións

Enerxía potencial do peso	$E_p = m \cdot g \cdot h$
Principio de conservación da enerxía mecánica	$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$

Solución:

a) Como a única forza que realiza traballo é o peso (o traballo da tensión da corda é nulo porque a tensión é perpendicular ao desprazamento en todo momento), a enerxía mecánica consérvase:

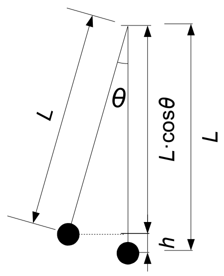
$$½\ m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = ½\ m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2$$

$$v_2=\sqrt{2\, g \cdot h_1}=\sqrt{2 \cdot 9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 0{,}030\ 0\ [\mathrm{m}]}=0{,}767\ \mathrm{m/s}$$

b) O período vale

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ =\ 2\pi\sqrt{\frac{2{,}50\ [\mathrm{m}]}{9{,}80\ [\mathrm{m \cdot s^{-2}}]}}=3{,}17\ \mathrm{s}$$

c) Na figura vese a forma de calcular o ángulo θ correspondente á amplitude a partir da altura h_1 e a lonxitude L:



$$L - L \cdot \cos\theta = h_1$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{L-h_1}{L}\right)=\arccos\left(1-\frac{h_1}{L}\right)=\arccos\left(1-\frac{0{,}030\ 0\ [\mathrm{m}]}{2{,}50\ [\mathrm{m}]}\right)=\arccos 0{,}988=0{,}155\ \mathrm{rad}$$

$$A = L \cdot \theta = 2{,}50\ [\mathrm{m}] \cdot 0{,}155\ [\mathrm{rad}] = 0{,}388\ \mathrm{m}$$

O movemento de péndulo é harmónico simple porque θ (= 0,155) ≈ sen θ (= 0,154)

2. Unha bóla colgada dun fío de 2 m de lonxitude desvíase da vertical un ángulo de 4°, sóltase e obsérvanse as súas oscilacións. Acha:
   a) A ecuación do movemento harmónico simple.
   b) A velocidade máxima da bóla cando pasa pola posición de equilibrio.
   c) Comproba o resultado obtido no apartado anterior, utilizando a ecuación da conservación da enerxía mecánica.

(P.A.U. Set. 13)

Rta.: a) $s = 0{,}140 \operatorname{sen}(2{,}21 \cdot t + 4{,}71)$ [m]; b) $v_m = 0{,}309$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Lonxitude do fío	$L = 2{,}00$ m
Amplitude angular (elongación angular máxima)	$\theta_0 = 4{,}00° = 0{,}0698$ rad
Aceleración da gravidade (non a dan pero sen ela non se pode resolver)	$g = 9{,}81$ m/s²
Incógnitas	
Elongación en función do tempo	θ
Velocidade máxima da bóla	v_m
Outros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Ecuacións	
De movemento no M.H.S.	$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$ $s = A \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Período do péndulo	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
Relación entre o arco s e o ángulo central θ nunha circunferencia de radio R	$s = \theta \cdot R$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia e o período	$\omega=2\pi \cdot f=\frac{2\pi}{T}$

Solución:

a) Tomando o movemento de péndulo como harmónico simple porque $\theta \approx$ sen θ

$$\text{sen } 0{,}0698 = 0{,}0697 \approx 0{,}0698$$

Calcúlase o período e a frecuencia angular

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}00\ [\text{m}]}{9{,}81\ [\text{m/s}^2]}}=2{,}84\ \text{s}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi\ [\text{rad}]}{2{,}84\ [\text{s}]}=2{,}21\ \text{rad/s}$$

A ecuación de movemento queda

$$\theta = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(2{,}21 \cdot t + \varphi_0)\ [\text{rad}]$$

Cando $t = 0$, $\theta = 0{,}0698$ (está na posición de máxima elongación),

$$0{,}0698 = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen } \varphi_0=1\begin{cases}\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}\\ \varphi_0=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Tomando como positivo o sentido en que se mova ao principio, queda

$$\theta = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(2{,}21\ \text{t} + 4{,}71)\ [\text{rad}]$$

A elongación máxima ou amplitude:

$$A = s_\text{m} = \theta_0 \cdot R = \theta_0 \cdot L = 0{,}0698\ [\text{rad}] \cdot 2{,}00\ [\text{m}] = 0{,}140\ \text{m}$$

A ecuación de movemento quedaría

$$s = 0{,}140\ \text{sen}(2{,}21 \cdot t + 4{,}71)\ [\text{m}]$$

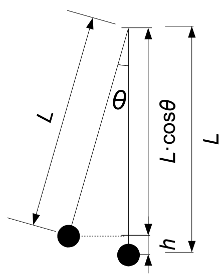
b) A velocidade máxima cando pasa pola posición de equilibrio, calcúlase derivando a ecuación de movemento

$$v=\frac{\text{d}s}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\{0{,}140\,\text{sen}(2{,}21\cdot t+4{,}71)\}}{\text{d}t}=0{,}309\cos(2{,}21\cdot t+4{,}71)\ \text{m/s}$$

Alcanza un valor máximo cando o coseno da fase é 1.

$$v_\text{m} = 0{,}309\ \text{m/s}$$

c) No punto máis alto, a altura vale:



$$h_\text{m} = L - L\cos\theta_0 = L\,(1 - \cos\theta_0) = 2{,}00\ [\text{m}]\ (1 - \cos 0{,}0698) = 4{,}87\cdot10^{-3}\ \text{m}$$

Como a única forza non conservativa (a tensión do fío) non realiza traballo (porque o desprazamento é perpendicular sempre á dirección da forza), a enerxía mecánica consérvase. Entre a posición máis alta (punto 1) e a máis baixa (punto 2)

$$(E_\text{c} + E_\text{p})_1 = (E_\text{c} + E_\text{p})_2$$

$$½\ m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = ½\ m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2$$

$$½\ \cancel{m} \cdot 0^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot h_1 = ½\ \cancel{m} \cdot v_2^2 + \cancel{m} \cdot g \cdot 0$$

$$2\ g \cdot h_1 = v_2^2$$

$$v_2=\sqrt{2\,g\cdot h_1}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot 4{,}87\cdot 10^{-3}\ [\text{m}]}=0{,}309\ \text{m/s}$$

● Ecuación de onda

1. Unha onda cuxa amplitude é 0,3 m percorre 300 m en 20 s. Calcula:
   a) A máxima velocidade dun punto que vibra coa onda se a frecuencia é 2 Hz.
   b) A lonxitude de onda.
   c) Constrúe a ecuación de onda, tendo en conta que o seu avance é no sentido negativo do eixe *X*.
   (P.A.U. xuño 16)

   Rta.: a) v_m = 3,77 m/s; b) λ = 7,50 m; c) $y(x, t)$ = 0,300 · sen(12,6 · t + 0,838 · x) [m]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitude	A = 0,0300 m
Distancia percorrida pola onda en 20 s	Δx = 300 m
Tempo que tarda en percorrer 300 m	Δt = 20,0 s
Frecuencia	f = 2,00 Hz = 2,00 s^{-1}
Velocidade de propagación	v_p = 20,0 m/s
Incógnitas	
Máxima velocidade dun punto que vibra coa onda	v_m
Lonxitude de onda	λ
Ecuación da onda (frecuencia angular e número de onda)	ω, k
Outros símbolos	
Posición do punto (distancia ao foco)	x
Período	T
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$
Velocidade de propagación	$v_p = \Delta x / \Delta t$

Solución:

b) Calcúlase a velocidade de propagación a partir da distancia percorrida e o tempo empregado;

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{300\ [\text{m}]}{20{,}0\ [\text{s}]} = 15{,}0\ \text{m/s}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir da velocidade de propagación da onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{15{,}0\ [\text{m/s}]}{2{,}00\ [\text{s}^{-1}]} = 7{,}50\ \text{m}$$

c) Tómase a ecuación dunha onda harmónica en sentido negativo do eixe *X*:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Calcúlase a frecuencia angular a partir da frecuencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 4{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 12{,}6\ \text{rad·s}^{-1}$$

Calcúlase o número de onda a partir da lonxitude de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{7{,}50\ [\text{m}]} = 0{,}838\ \text{rad/m}$$

A ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}300 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t + 0{,}838 \cdot x)\ [\text{m}]$$

a) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{0{,}300 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t + 0{,}838 \cdot x)\}}{\text{d}t} = 0{,}300 \cdot 12{,}6 \cos(12{,}6 \cdot t + 0{,}838 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = 3{,}77 \cdot \cos(12{,}6 \cdot t - 0{,}838 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

A velocidade é máxima cando cos(φ) = 1

$$v_m = 3{,}77 \text{ m/s}$$

2. Unha onda harmónica transversal propágase na dirección do eixe X e vén dada pola seguinte expresión (en unidades do sistema internacional): $y(x,t) = 0{,}45 \cos(2\ x - 3\ t)$. Determina:
   a) A velocidade de propagación.
   b) A velocidade e aceleración máximas de vibración das partículas.
   c) A diferenza de fase entre dous estados de vibración da mesma partícula cando o intervalo de tempo transcorrido é de 2 s.

(P.A.U. xuño 15)

Rta.: a) v_p = 1,50 m/s; b) $|v_m|$ = 1,35 m/s; $|a_m|$ = 4,05 m/s²; c) $\Delta\varphi$ = 6,0 rad

Datos	**Cifras significativas: 3**
Ecuación da onda	$y = 0{,}450 \cdot \cos(2{,}00 \cdot x - 3{,}00 \cdot t)$ [m]
Intervalo de tempo transcorrido	Δt = 2,00 s
Incógnitas	
Velocidade de propagación	v_p
Velocidade máxima de vibración	v_m
Aceleración máxima de vibración	a_m
Diferenza de fase entre dous estados separados por Δt= 2 s	$\Delta\varphi$
Outros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Frecuencia	f
Lonxitude de onda	λ
Número de onda	k
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}450 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: ω = 3,00 rad/s
Número de onda: k = 2,00 rad/m
Calcúlanse a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.
Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}00\ [\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]} = 0{,}477\ \text{s}^{-1} = 0{,}477\ \text{Hz}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{2{,}00\ [\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}]} = 3{,}14\ \text{m}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}14\ [\text{m}] \cdot 0{,}477\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{0{,}450 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x)\}}{\text{d}t} = 0{,}450 \cdot (-3{,}00) \cdot (-\text{sen}(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x))\ [\text{m/s}]$$

$$v = 1{,}35\cdot \text{sen}(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

A velocidade é máxima cando sen(φ) = 1

$$v_m = 1{,}35 \text{ m/s}$$

A aceleración obtense derivando a velocidade con respecto ao tempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{1{,}35\cdot \text{sen}(-3{,}00\cdot t+2{,}00\cdot x)\}}{\mathrm{d}t}=1{,}35\cdot(-3{,}00)\cdot\cos(-3{,}00\cdot t+2{,}00\cdot x)\,[\text{m/s}^2]$$

$$a = -4{,}05 \cdot \cos(-3{,}00 \cdot t + 2{,}00 \cdot x) \text{ [m/s}^2]$$

A aceleración é máxima cando cos(φ) = −1

$$a_m = 4{,}05 \text{ m/s}^2$$

c) Nun punto x, a diferenza de fase entre dous instantes t_1 e t_2 é:

$$\Delta\varphi = [-3{,}00 \cdot t_2 + 2{,}00 \cdot x] - [-3{,}00 \cdot t_1 + 2{,}00 \cdot x)] = -3{,}00 \cdot (t_2 - t_1) = -3{,}00 \cdot \Delta t = -3{,}00 \cdot 2{,}00 = 6{,}00 \text{ rad}$$

Análise: Como os instantes que están en fase ou cuxa diferencia de fase é múltiplo de 2 π atópanse a unha distancia temporal que é múltiplo do período, un intervalo de tempo de 2,00 s, *que é algo inferior ao período, corresponde a unha diferenza de fase algo inferior a 2 π* = 6,3 rad. *O resultado de* 6,0 rad *é aceptable.*

3. Unha onda harmónica transversal propágase no sentido positivo do eixe x con velocidade v = 20 m·s⁻¹. A amplitude da onda é A = 0,10 m e a súa frecuencia é f = 50 Hz.
   a) Escribe a ecuación da onda.
   b) Calcula a elongación e a aceleración do punto situado en x = 2 m no instante t = 0,1 s.
   c) Cal é a distancia mínima entre dous puntos situados en oposición de fase?

(P.A.U. set. 11)

Rta.: a) $y = 0{,}100 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) $y(2, 0{,}1) = 0$; $a(2, 0{,}1) = 0$; c) $\Delta x = 0{,}200$ m
a′) $y = 0{,}100 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b′) $y(2, 0{,}1) = 0{,}100$ m; $a(2, 0{,}1) = -9{,}87\cdot10^3$ m/s²

Datos		**Cifras significativas: 3**
Amplitude		$A = 0{,}100$ m
Frecuencia		$f = 50{,}0$ Hz = 50,0 s⁻¹
Velocidade de propagación		$v_p = 20{,}0$ m/s
Para o cálculo da elongación e aceleración:	Posición	$x = 2{,}00$ m
	Tempo	$t = 0{,}100$ s
Incógnitas		
Ecuación da onda		ω, k
Elongación do punto situado en x = 2 m no instante t = 0,1 s.		$y(2, 0{,}1)$
Aceleración do punto situado en x = 2 m no instante t = 0,1 s.		a (2, 0,1)
Distancia mínima entre dous puntos situados en oposición de fase		Δx
Outros símbolos		
Posición do punto (distancia ao foco)		x
Período		T
Lonxitude de onda		λ
Ecuacións		
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional		$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda		$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia		$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación		$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Tómase a ecuación dunha onda harmónica en sentido positivo do eixe X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Calcúlase a frecuencia angular a partir da frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0 \text{ [s}^{-1}] = 100 \cdot \pi \text{ [rad·s}^{-1}] = 314 \text{ rad·s}^{-1}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir da velocidade de propagación da onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{20{,}0\ [\text{m/s}]}{50{,}0\ [\text{s}^{-1}]} = 0{,}400\ \text{m}$$

Calcúlase o número de onda a partir da lonxitude de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{0{,}400\ [\text{m}]} = 5{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad/m}] = 15{,}7\ \text{rad/m}$$

A ecuación de onda queda:

$$y(x,\ t) = 0{,}100 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}] = 0{,}100 \cdot \text{sen}(314 \cdot t - 15{,}7 \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) Para $x = 2{,}00$ m e $t = 0{,}100$ s, a elongación é:

$$y(2,\ 0{,}1) = 0{,}100 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot 0{,}100 - 5{,}00 \cdot \pi \cdot 2{,}00) = 0{,}100 \cdot \text{sen}(0) = 0\ \text{m}$$

A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{0{,}100 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\}}{\text{d}t} = 0{,}100 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = 31{,}4 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

A aceleración obtense derivando a velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{\text{d}v}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{31{,}4 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\}}{\text{d}t} = -31{,}4 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -9{,}87 \cdot 10^3\ \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

Para $x = 2{,}00$ m e $t = 0{,}100$ s, a aceleración é:

$$a(2{,}0{,}1) = -9{,}87 \cdot 10^3\ \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot 0{,}100 - 5{,}00 \cdot \pi \cdot 2{,}00) = -9{,}87 \cdot 10^3 \cdot \text{sen}(0) = 0\ \text{m/s}^2$$

(Se a ecuación de onda escríbese en función do coseno, en vez do seno, as respostas serían:
$y(2,\ 0{,}1) = 0{,}100$ m e $a(2{,}0{,}1) = -9{,}87 \cdot 10^3$ m/s²)
Análise: A aceleración é proporcional e de sentido contrario á elongación. Se a elongación é nula tamén o é a aceleración.

c) Nun instante t, a diferenza de fase entre dous puntos situados en x_1 e x_2 é:

$$\Delta\varphi = [(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x_2)] - [(100 \cdot \pi \cdot t - 5{,}00 \cdot \pi \cdot x_1)] = 5{,}00 \cdot \pi\ (x_1 - x_2) = 5{,}00 \cdot \pi \cdot \Delta x$$

Como están en oposición de fase, a diferenza de fase é π [rad]

$$5{,}00\ [\text{rad/m}] \cdot \pi \cdot \Delta x = \pi\ [\text{rad}]$$

$$\Delta x = 1\ [\text{rad}]\ /\ (5{,}00\ [\text{rad/m}]) = 0{,}200\ \text{m}$$

Análise: A lonxitude de onda é a distancia mínima entre dous puntos que están en fase. A distancia mínima entre dous puntos que están en oposición é fase é: $\Delta x = \lambda / 2 = 0{,}200$ m, *que coincide co calculado.*

4. Unha onda harmónica propágase en dirección x con velocidade $v = 10$ m/s, amplitude $A = 3$ cm e frecuencia $f = 50$ s⁻¹. Calcula:
   a) A ecuación da onda.
   b) A velocidade e aceleración máxima dun punto da traxectoria.
   c) Para un tempo fixo t, que puntos da onda están en fase co punto $x = 10$ m?

   (P.A.U. set. 10)

   Rta.: a) $y = 0{,}0300\ \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) $v_m = 9{,}42$ m/s; $a_m = 2{,}96 \cdot 10^3$ m/s²
   c) $x' = 10{,}0 + 0{,}200 \cdot n$ [s], ($n = 0, 1, 2$ ...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidade de propagación	$v_p = 10{,}0$ m/s
Amplitude	$A = 3{,}00$ cm $= 0{,}0300$ m
Frecuencia	$f = 50{,}0$ s^{-1}

Datos	***Cifras significativas: 3***
Posición do punto	$x_2 = 10{,}0$ m
Incógnitas	
Ecuación dá onda	ω, k
Velocidade máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Puntos da onda que están en fase co punto en $x = 10$ m	x'
Outros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Número de onda	k
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Tómase a ecuación dunha onda harmónica en sentido positivo do eixe X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Calcúlase a frecuencia angular a partir da frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 100 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 314\ \text{rad·s}^{-1}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir da velocidade de propagación da onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{10{,}0\ [\text{m/s}]}{50{,}0\ [\text{s}^{-1}]} = 0{,}200\ \text{m}$$

Calcúlase o número de onda a partir da lonxitude de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{0{,}200\ [\text{m}]} = 10{,}0 \cdot \pi\ [\text{rad/m}] = 31{,}4\ \text{rad/m}$$

A ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}0300 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}0300 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = 0{,}0300 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = 9{,}42 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

A velocidade é máxima cando $\cos(\varphi) = 1$

$$v_m = 9{,}42\ \text{m/s}$$

A aceleración obtense derivando a velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{9{,}42 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -9{,}42 \cdot 100 \cdot 3{,}14 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -2{,}96 \cdot 10^3 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

A aceleración é máxima cando sen $(\varphi) = -1$

$$a_m = 2{,}96 \cdot 10^3\ \text{m/s}^2$$

c) Nun instante t, a diferenza de fase entre dous puntos situados en x_1 e x_2 é:

$$\Delta\varphi = (100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x_2) - (100 \cdot \pi \cdot t - 10{,}0 \cdot \pi \cdot x_1) = 10 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2)$$

Dous puntos atópanse en fase cando a diferenza de fase é múltiplo de $2\,\pi$:

$$\Delta\varphi = 2\,\pi \cdot n \text{ (sendo } n = 0, 1, 2\ldots)$$

No caso de atoparse en fase cúmprese:

$$10 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2) = 2\,\pi \cdot n$$

$$x_1 - x_2 = 0{,}200 \cdot n \text{ [m]}$$

Substitúese o valor do punto x_2 = 10,0 m e despéxase x_1

$$x_1 = 20{,}0 \cdot n + x_2 = 10{,}0 + 0{,}200 \cdot n \text{ [m]}$$

Como a elección de cal é o punto 1 e cal o punto 2 é arbitraria, é máis xeral a expresión:

$$x' = 10{,}0 \pm 0{,}200 \cdot n \text{ [m]}$$

Análise: Os puntos que están en fase atópanse a unha distancia que é múltiplo da lonxitude de onda, $\Delta x = n \cdot \lambda = 0{,}200 \cdot n$ [m]

5. A ecuación dunha onda é $y(t, x) = 0{,}2 \text{ sen } \pi\,(100\,t - 0{,}1\,x)$. Calcula:
   a) A frecuencia, o número de ondas k, a velocidade de propagación e a lonxitude de onda.
   b) Para un tempo fixo t, que puntos da onda están en fase co punto que se atopa en x = 10 m?
   c) Para unha posición fixa x, para que tempos o estado de vibración dese punto está en fase coa vibración para t = 1 s?

   (P.A.U. xuño 10)

   Rta.: a) f = 50,0 Hz; k = 0,314 rad/m; $v = 1{,}00 \cdot 10^3$ m/s; λ = 20,0 m ; b) $x = 10{,}0 + 20{,}0 \cdot n$ [m]
   c) $t = 1{,}00 + 0{,}0200 \cdot n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación da onda	$y = 0{,}200 \cdot \text{sen } \pi(100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x)$ [m]
Posición do punto	x_2 = 10,0 m
Tempo de referencia	t_1 = 1,00 s
Incógnitas	
Frecuencia	f
Número de ondas	k
Velocidade de propagación	v_p
Lonxitude de onda	λ
Puntos da onda que están en fase co punto que se atopa en x = 10 m	x'
Tempos nos que a vibración está en fase coa vibración para t = 1 s	t'
Outros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Número de onda	k
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre a frecuencia e o período	$f = 1 / T$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}200 \cdot \text{sen } \pi(100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x) = 0{,}200 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 0{,}100 \cdot \pi \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 100 \cdot \pi$ [rad/s] = 314 rad/s
Número de onda: $k = 0{,}100 \cdot \pi$ [rad/m] = 0,314 rad/m
Calcúlanse a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.
Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{100 \cdot \pi\,[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}{2\pi\,[\text{rad}]} = 50{,}0\ \text{s}^{-1} = 50{,}0\ \text{Hz}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi\ [\text{rad}]}{0{,}100\cdot\pi\ [\text{rad}\cdot\text{m}^{-1}]}=20{,}0\ \text{m}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 20{,}0\ [\text{m}] \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}00\cdot10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) Nun instante t, a diferenza de fase entre dous puntos situados en x_1 e x_2 é:

$$\Delta\varphi = [\pi\ (100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x_2)] - [\pi\ (100 \cdot t - 0{,}100 \cdot x_1)] = 0{,}100 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2)$$

Dous puntos atópanse en fase cando a diferenza de fase é múltiplo de 2 π:

$$\Delta\varphi = 2\ \pi \cdot n \text{ (sendo } n = 0, 1, 2\dots)$$

Se se atopan en fase cúmprese:

$$0{,}100 \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2) = 2\ \pi \cdot n$$

Substitúese o valor do punto x_2 = 10,0 m e despéxase x_1

$$x_1 = 20{,}0 \cdot n + x_2 = 10{,}0 + 20{,}0 \cdot n\ [\text{m}]$$

Como a elección de cal é o punto 1 e cal o punto 2 é arbitraria, é máis xeral a expresión:

$$x' = 10{,}0 \pm 20{,}0 \cdot n\ [\text{m}]$$

Análise: Os puntos que están en fase atópanse a unha distancia que é múltiplo da lonxitude de onda, $\Delta x = n \cdot \lambda = 20{,}0 \cdot n$ [m]

c) Nun punto x, a diferenza de fase entre dous instantes t_1 e t_2 é

$$\Delta\varphi = [\pi\ (100 \cdot t_2 - 0{,}100 \cdot x)] - [\pi\ (100 \cdot t_1 - 0{,}100 \cdot x)] = 100\ \pi\ (t_2 - t_1)$$

Se se atopan en fase cúmprese:

$$100 \cdot \pi\ (t_2 - t_1) = 2\ \pi \cdot n$$

Substitúese o valor do instante t_1 = 1,00 s e despéxase t_2.

$$t_2 = 0{,}0200 \cdot n + t_1 = 1{,}00 \pm 0{,}0200 \cdot n\ [\text{s}]$$

Como a elección de cal é o instante 1 e cal o instante 2 é arbitraria, é máis xeral a expresión:

$$t' = 1{,}00 \pm 0{,}0200 \cdot n\ [\text{s}]$$

Análise: O período pode calcularse a partir da frecuencia: $T = 1 / f = 1 / (50{,}0\ \text{s}^{-1}) = 0{,}0200$ s. *Os instantes en que están en fase son múltiplos do período.* $\Delta t = n \cdot T = 0{,}0200 \cdot n$ [s]

6. A ecuación dunha onda é $y(x, t) = 2 \cos 4\pi\ (5\ t - x)$ (S.I.). Calcula:
   a) A velocidade de propagación.
   b) A diferenza de fase entre dous puntos separados 25 cm.
   c) Na propagación dunha onda que se transporta materia ou enerxía? Xustifícao cun exemplo.

   (P.A.U. xuño 09)

   Rta.: a) v_p = 5,00 m/s; b) $\Delta\varphi = \pi$ rad

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación da onda	$y = 2{,}00 \cdot \cos 4\ \pi\ (5{,}00 \cdot t - x)$ [m]
Distancia entre os puntos	Δx = 25,0 cm = 0,250 m
Incógnitas	
Velocidade de propagación	v_p
Diferenza de fase entre dous puntos separados 25 cm	$\Delta\varphi$
Outros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Frecuencia	f
Lonxitude de onda	λ

Datos	**Cifras significativas: 3**
Número de onda	k
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 2{,}00 \cdot \cos 4\,\pi\,(5{,}00 \cdot t - x) = 2{,}00 \cdot \cos(20{,}0 \cdot \pi \cdot t - 4{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 20{,}0 \cdot \pi$ [rad/s] = 62,8 rad/s
Número de onda: $k = 4{,}00 \cdot \pi$ [rad/m] = 12,6 rad/m
Calcúlanse a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.
Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20{,}0 \cdot \pi\,[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}{2\pi\,[\text{rad}]} = 10{,}0\ \text{s}^{-1} = 10{,}0\ \text{Hz}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\,[\text{rad}]}{4{,}00 \cdot \pi\,[\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}]} = 0{,}500\ \text{m}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}500\ [\text{m}] \cdot 10{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 5{,}00\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Nun instante t, a diferenza de fase entre dous puntos situados en x_1 e x_2 é:

$$\Delta\varphi = [4\,\pi\,(5{,}00 \cdot t - x_2)] - [4\,\pi\,(5{,}00 \cdot t - x_1)] = 4\,\pi\,(x_1 - x_2) = 4\,\pi\,\Delta x = 4\,\pi \cdot 0{,}250 = \pi\ \text{rad}$$

Análise: A distancia entre os puntos é 0,250 m *que é a metade da lonxitude de onda. Como os puntos que están en fase ou cuxa diferencia de fase é múltiplo de* 2 π *atópanse a unha distancia que é múltiplo da lonxitude de onda, unha distancia de media lonxitude de onda corresponde a unha diferenza de fase da metade de* 2 π*, ou sexa,* π rad.

c) Unha onda é un mecanismo de transporte de enerxía sen desprazamento neto de materia. Nunha onda lonxitudinal dunha corda vibrante, as partículas do medio volven á súa posición inicial mentres a perturbación que provoca a elevación e depresión desprázase ao longo da corda.

7. Unha onda harmónica transversal propágase na dirección do eixe X: $y(x, t) = 0{,}5$ sen $(4\,x - 6\,t)$ (S.I.). Calcula:
   a) A lonxitude de onda, a frecuencia coa que vibran as partículas do medio e a velocidade de propagación da onda.
   b) A velocidade dun punto situado en x = 1 m no instante t = 2 s
   c) Os valores máximos da velocidade e a aceleración.

   (P.A.U. set. 08)

   Rta.: a) λ = 1,57 m; f = 0,955 Hz; v_p = 1,50 m/s; b) v_1 = 0,437 m/s; c) v_m = 3,00 m/s; a_m = 18,0 m/s²

Datos	**Cifras significativas: 3**
Ecuación da onda	$y = 0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x)$ [m]
Incógnitas	
Lonxitude de onda	λ
Frecuencia	f
Velocidade de propagación	v_p

Incógnitas

Velocidade dun punto situado en x = 1 m no instante t = 2 s	v_1
Velocidade máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Outros símbolos	
Posición do punto (distancia ao foco)	x
Amplitude	A
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2 \pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2 \pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 6{,}00 \text{ rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = 4{,}00 \text{ rad·m}^{-1}$
Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}{4{,}00 \text{ [rad·m}^{-1}]}=1{,}57 \text{ m}$$

Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega=2\pi \cdot f \Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi} = \frac{6{,}00 \text{ [rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}=0{,}955 \text{ s}^{-1}=0{,}955 \text{ Hz}$$

A frecuencia coa que vibran as partículas do medio é a mesma que a da onda.
Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 1{,}57 \text{ [m]} \cdot 0{,}955 \text{ [s}^{-1}] = 1{,}50 \text{ m·s}^{-1}$$

b) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}500 \cdot \text{sen}(-6{,}00 \cdot t+4{,}00 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t}=0{,}500 \cdot (-6{,}00) \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t+4{,}00 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

$$v = -3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

Substituíndo os valores de x = 1,00 m e t = 2,00 s

$$v_1 = -3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot 2{,}00 + 4{,}00 \cdot 1{,}00) = 0{,}437 \text{ m/s}$$

c) A velocidade é máxima cando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 3{,}00 \text{ m/s}$$

A aceleración obtense derivando a velocidade con respecto ao tempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{-3{,}00 \cdot \cos(-6{,}00 \cdot t+4{,}00 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t}=-3{,}00 \cdot (-6{,}00) \cdot [-\text{sen}(-6{,}00 \cdot t+4{,}00 \cdot x)] \text{ [m/s}^2]$$

$$a = -18{,}0 \text{ sen}(-6{,}00 \cdot t + 4{,}00 \cdot x) \text{ [m/s}^2]$$

A aceleración é máxima cando $\text{sen}(\varphi) = -1$

$$a_m = 18{,}0 \text{ m/s}^2$$

8. A ecuación dunha onda sonora que se propaga na dirección do eixe X é:

$y = 4$ sen 2π $(330\ t - x)$ (S.I.). Acha:

a) A velocidade de propagación.
b) A velocidade máxima de vibración dun punto do medio no que se transmite a onda.
c) Define a enerxía dunha onda harmónica.

(P.A.U. set. 07)

Rta.: a) $v_p = 330\ m \cdot s^{-1}$; b) $v_m = 8{,}29 \cdot 10^3$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación da onda	$y = 4{,}00 \cdot \text{sen}[2\ \pi(330 \cdot t - x)]$ [m]
Incógnitas	
Velocidade de propagación	v_p
Velocidade máxima de vibración dun punto do medio	v_m
Outros símbolos	
Amplitude	A
Frecuencia	f
Posición do punto (distancia ao foco)	x
Período	T
Lonxitude de onda	λ
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 4{,}00 \cdot \text{sen}[2\ \pi(330 \cdot t - x)] = 4{,}00 \cdot \text{sen}(660 \cdot \pi \cdot t - 2{,}00 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 660 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] = 2{,}07 \cdot 10^3\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Número de onda: $k = 2{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}] = 6{,}28\ \text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$

Calcúlanse a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.
Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{2{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}]} = 1{,}00\ \text{m}$$

Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{660 \cdot \pi\ [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 330\ \text{s}^{-1} = 330\ \text{Hz}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 1{,}00\ [\text{m}] \cdot 330\ [\text{s}^{-1}] = 330\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = \frac{\text{d}\{4{,}00 \cdot \text{sen}[2\pi(330 \cdot t - x)]\}}{\text{d}t} = 4{,}00 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 330 \cdot \cos[2\pi(330 \cdot t - x)]\ [\text{m/s}]$$

$$v = 8{,}29 \cdot 10^3 \cdot \cos[2\ \pi(330 \cdot t - x)]\ [\text{m/s}]$$

A velocidade é máxima cando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 8{,}29 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

c) A enerxía que transmite unha onda harmónica produce un movemento harmónico simple das partículas do medio. A enerxía dun M.H.S. é:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ k \cdot A^2$$

A velocidade máxima dun movemento harmónico simple é:

$$v_m = \omega \cdot A = 2\ \pi \cdot f \cdot A$$

A enerxía que transporta unha onda é directamente proporcional ao cadrado da amplitude e ao cadrado da frecuencia.

$$E = ½\ m \cdot v^2_m = 2\ \pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2$$

9. A ecuación dunha onda transversal é $y(t, x) = 0{,}05 \cos(5\ t - 2\ x)$ (magnitudes no S.I.). Calcula:
   a) Os valores de t para os que un punto situado en $x = 10$ m ten velocidade máxima.
   b) Que tempo ten que transcorrer para que a onda percorra unha distancia igual a 3 λ?
   c) Esta onda é estacionaria?

(P.A.U. xuño 07)

Rta.: a) $t_1 = 4{,}3 + 0{,}63\ n$ [s], (n = 0, 1, 2 ...); b) $t_2 = 3{,}8$ s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación da onda	$y = 0{,}0500 \cdot \cos(5{,}00 \cdot t - 2{,}00 \cdot x)$ [m]
Posición do punto (distancia ao foco)	$x = 10{,}0$ m
Incógnitas	
Tempos para os que un punto en x = 10 m ten velocidade máxima	t_1
Tempo para que a onda percorra unha distancia igual a 3 λ	t_2
Outros símbolos	
Período	T
Lonxitude de onda	λ
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre a frecuencia e o período	$f = 1 / T$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}050\ \theta\cos(5{,}00\cdot t+2{,}00\cdot x)\}}{\mathrm{d}t}=-0{,}050\ \theta 5{,}00\cdot \operatorname{sen}(5{,}00\cdot t+2{,}00\cdot x)\ [\mathrm{m/s}]$$

$$v = -0{,}250 \cdot \operatorname{sen}(5{,}00 \cdot t - 2{,}00 \cdot x)\ [\mathrm{m/s}]$$

A velocidade é máxima cando sen(φ) = −1

$$v_m = 0{,}250\ \mathrm{m/s}$$

Este valor do seno corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi/2$ ou $3\ \pi/2$ [rad] na primeira circunferencia, e, en xeral

$$\varphi = n \cdot \pi + \pi / 2\ [\mathrm{rad}]$$

Sendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)
Igualando e substituíndo x = 10,0 m

$$(5{,}00\ t - 2{,}00 \cdot 10{,}0) = n \cdot \pi + \pi / 2$$

$$t_1 = 4{,}00 + 0{,}100 \cdot \pi + 0{,}200 \cdot n \cdot \pi = 4{,}31 + 0{,}628 \cdot n\ [\mathrm{s}]$$

Análise: A primeira vez que a velocidade é máxima para x = 10 m *é* (n = 0) *para* t = 4,31 s. *O período pode calcularse a partir da frecuencia no apartado b:* $T = 1 / f = 1 / (0{,}796\ \mathrm{s}^{-1}) = 1{,}26$ s. *O tempo volverá ser máximo cada vez que pase polo punto de equilibrio, ou sexa, cada medio período:* 0,628 s.

b) Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y(t, x) = 0{,}0500 \cdot \cos(5{,}00 \cdot t - 2{,}00 \cdot x)$$

Frecuencia angular: $\omega = 5{,}00$ rad/s
Número de onda: $k = 2{,}00$ rad/m
Calcúlanse a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.
Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5{,}00\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]} = 0{,}796\ \text{s}^{-1} = 0{,}796\ \text{Hz}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{2{,}00\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 3{,}14\ \text{m}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}14\ [\text{m}] \cdot 0{,}796\ [\text{s}^{-1}] = 2{,}50\ \text{m·s}^{-1}$$

Calcúlase o tempo que tarda en percorrer unha distancia igual a $\Delta x = 3 \cdot \lambda = 3 \cdot 3{,}14$ [m] = 9,42 m a partir da velocidade de propagación constante da onda

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow t_2 = \frac{\Delta x}{v_p} = \frac{9{,}42\ [\text{m}]}{2{,}50\ [\text{m/s}]} = 3{,}77\ \text{s}$$

Análise: Pódese definir o período como o tempo que tarda unha onda en percorrer unha distancia igual á lonxitude de onda. Por tanto o tempo necesario para que a onda percorra unha distancia igual a $3 \cdot \lambda$*, será o triplo do período:* $t_2 = 3 \cdot T = 3 \cdot 1{,}26$ [s] = 3,77 s.

c) As ondas estacionarias non se propagan e non hai unha transmisión neta de enerxía.
Nas ondas estacionarias existen uns puntos, chamados nodos, que non oscilan. O seu elongación é nula en todo instante.
A onda do enunciado non é unha onda estacionaria xa que a ecuación da onda non coincide coa das ondas estacionarias e non existe ningún punto da onda que sexa un nodo, que teña unha elongación nula en calquera instante.

10. Unha onda transmítese ao longo dunha corda. O punto situado en $x = 0$ oscila segundo a ecuación $y = 0{,}1 \cos(10\ \pi\ t)$ e outro punto situado en x = 0,03 m oscila segundo a ecuación $y = 0{,}1 \cos(10\ \pi\ t - \pi / 4)$. Calcula:
    a) A constante de propagación, a velocidade de propagación e a lonxitude de onda.
    b) A velocidade de oscilación dun punto calquera da corda.

(P.A.U. xuño 06)

Rta.: a) $k = 26{,}2$ rad/m; $v_p = 1{,}20$ m/s; $\lambda = 0{,}240$ m; b) v −3,14 · sen(31,4 · t − 26,2 · x) [m/s]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de oscilación na orixe $x = 0$	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Ecuación de oscilación en $x = 0{,}03$ m	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4{,}00)$ [m]
Incógnitas	
Número de onda (constante de propagación?)	k
Velocidade de propagación	v_p
Lonxitude de onda	λ
Velocidade da partícula nun punto calquera da corda.	v
Outros símbolos	
Posición do punto (distancia ao foco)	x
Amplitude	A
Frecuencia	f
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Calcúlase a amplitude e a frecuencia angular comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación de vibración na orixe:

Ecuación xeral dunha onda harmónica:	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Ecuación da onda harmónica na orixe ($x = 0$):	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Amplitude:	$A = 0{,}100$ m
Frecuencia angular:	$\omega = 10{,}0 \cdot \pi$ [rad/s] = 31,4 rad/s

Calcúlase o número de onda comparando a ecuación da onda harmónica unidimensional, na que se substituíron a amplitude e a frecuencia angular, coa ecuación de vibración no punto $x = 0{,}0300$ m:

Ecuación da onda harmónica:	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t \pm k \cdot x)$ [m]
Ecuación da onda harmónica no punto $x = 0{,}0300$ m:	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4{,}00)$ [m]

$$k \cdot x = \frac{\pi}{4{,}00} \Rightarrow k = \frac{\pi}{4{,}00 \cdot x} = \frac{3{,}14\,[\text{rad}]}{4{,}00 \cdot 0{,}030\,0\,[\text{m}]} = 26{,}2 \text{ rad/m}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\,[\text{rad}]}{26{,}2\,[\text{rad/m}]} = 0{,}240 \text{ m}$$

Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10{,}0 \cdot \pi}{2\pi} = 5{,}00 \text{ s}^{-1} = 5{,}00 \text{ Hz}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}240\,[\text{m}] \cdot 5{,}00\,[\text{s}^{-1}] = 1{,}20 \text{ m/s}$$

b) A ecuación de movemento queda:

$$y = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x) \text{ [m]}$$

A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -0{,}100 \cdot 31{,}4 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\,[\text{m/s}]$$

$$v = -3{,}14 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

11. Unha onda periódica vén dada pola ecuación $y(t, x) = 10 \text{ sen } 2\pi(50\,t - 0{,}2\,x)$ en unidades do S.I. Calcula:
    a) Frecuencia, velocidade de fase e lonxitude de onda.
    b) A velocidade máxima dunha partícula do medio e os valores do tempo t para os que esa velocidade é máxima (nun punto que dista 50 cm da orixe)

(P.A.U. set. 05)

Rta.: a) $f = 50{,}0$ Hz; $\lambda = 5{,}00$ m; $v_p = 250$ m/s; b) $v_m = 3{,}14$ km/s; $t = 0{,}00200 + 0{,}0100 \cdot n$ [s], (n = 0, 1...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación da onda (S.I.)	$y = 10{,}0 \text{ sen}[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]$ [m]
Posición do punto (distancia ao foco)	$x = 50{,}0$ cm = 0,500 m
Incógnitas	
Frecuencia	f
Velocidade de fase	v_p
Lonxitude de onda	λ
Tempo para os que $y(t, x)$ é máxima na posición $x = 50$ cm	t
Outros símbolos	
Período	T
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$

Ecuacións

Número de onda	$k = 2\ \pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia e o período	$f = 1 / T$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 10{,}0 \cdot \text{sen}[2\ \pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)] = 4{,}00 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 0{,}400 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 100 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 314\ \text{rad·s}^{-1}$

Número de onda: $k = 0{,}400 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}] = 1{,}26\ \text{rad·m}^{-1}$

Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 50{,}0\ \text{s}^{-1} = 50{,}0\ \text{Hz}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{0{,}400 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 5{,}00\ \text{m}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 5{,}00\ [\text{m}] \cdot 50{,}0\ [\text{s}^{-1}] = 250\ \text{m·s}^{-1}$$

b) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\text{d}\,y}{\text{d}\,t} = \frac{\text{d}\{10{,}0 \cdot \text{sen}[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\}}{\text{d}\,t} = 10{,}0 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50{,}0 \cdot \cos[2\pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\ [\text{m/s}]$$

$$v = 3{,}14 \cdot 10^3 \cdot \cos[2\ \pi(50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot x)]\ [\text{m/s}]$$

A velocidade é máxima cando $\cos(\varphi) = -1$

$$v_m = 3{,}14 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

Este valor do coseno corresponde a un ángulo de $\varphi = 0$ ou π [rad] na primeira circunferencia, e, en xeral

$$\varphi = n \cdot \pi\ [\text{rad}]$$

Sendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)

Igualando e substituíndo x = 0,500 m

$$2\ \pi\ (50{,}0 \cdot t - 0{,}200 \cdot 0{,}500) = n \cdot \pi$$

$$t = 0{,}00200 + 0{,}0100 \cdot n\ [\text{s}],\ (n = 0, 1, 2...)$$

Análise: A primeira vez que a velocidade é máxima para x = 0,500 m *é* (n = 0) t_1 = 0,00200 s. *Como o período é* T = 1 / 50,0 [s^{-1}] = 0,0200 s, *volverá ser máxima cada vez que pase pola orixe, ou sexa, cada medio período, ou sexa cada* 0,00100 s.

12. Unha onda plana propágase na dirección X positiva con velocidade v = 340 m/s, amplitude A = 5 cm e frecuencia f = 100 Hz (fase inicial φ_0 = 0)
    a) Escribe a ecuación da onda.
    b) Calcula a distancia entre dous puntos cuxa diferencia de fase nun instante dado é 2 π/3.

(P.A.U. xuño 05)

Rta.: a) $y = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x)$ [m]; b) Δx = 1,13 m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitude	A = 5,00 cm = 0,0500 m

Datos	**Cifras significativas: 3**
Frecuencia	$f = 100$ Hz = 100 s⁻¹
Velocidade de propagación da onda polo medio	$v_p = 340$ m/s
Incógnitas	
Ecuación de onda	ω, k
Distancia entre dous puntos cuxa diferencia de fase é 2 π/3	Δx
Outros símbolos	
Posición do punto (distancia ao foco)	x
Período	T
Lonxitude de onda	λ
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Tómase a ecuación dunha onda harmónica en sentido positivo do eixe X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Calcúlase a frecuencia angular a partir da frecuencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 100\ [\text{s}^{-1}] = 200 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 628\ \text{rad·s}^{-1}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir da velocidade de propagación da onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{340\ [\text{m/s}]}{100\ [\text{s}^{-1}]} = 3{,}40\ \text{m}$$

Calcúlase o número de onda a partir da lonxitude de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{3{,}40\ [\text{m}]} = 1{,}85\ \text{rad/m}$$

A ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0{,}0500 \cdot \text{sen}(628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x)\ [\text{m}]$$

b) Nun instante t, a diferenza de fase entre dous puntos situados en x_1 e x_2 é:

$$\Delta\varphi = (628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x_2) - (628 \cdot t - 1{,}85 \cdot x_1) = 1{,}85 \cdot \Delta x$$

Se a diferenza de fase é 2 π/3 = 2,09 rad

$$1{,}85\ [\text{rad/m}] \cdot \Delta x = 2{,}09\ \text{rad}$$

$$\Delta x = \frac{2{,}09\ [\text{rad}]}{1{,}85\ [\text{rad/m}]} = 1{,}13\ \text{m}$$

Análise: Se a diferenza de fase fose de 2 π rad, *a distancia entre os puntos sería unha lonxitude de onda* λ. *A unha diferenza de fase de* 2 π/3 rad *correspóndelle unha distancia de* λ / 3 = 3,40 [m] / 3 = 1,13 m.

13. A función de onda que describe a propagación dun son é $y(x) = 6 \cdot 10^{-2} \cos(628\ t - 1{,}90\ x)$ (magnitudes no sistema internacional). Calcula:
    a) A frecuencia, lonxitude de onda e velocidade de propagación.
    b) A velocidade e a aceleración máximas dun punto calquera do medio no que se propaga a onda.

    (P.A.U. set. 04)

    Rta.: a) $f = 100$ Hz; $\lambda = 3{,}31$ m; $v_p = 331$ m/s; b) $v_m = 37{,}7$ m/s; $a_m = 2{,}37 \cdot 10^4$ m/s²

Datos	**Cifras significativas: 3**
Ecuación da onda	$y = 6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)$ [m]
Incógnitas	
Frecuencia	f

Incógnitas

Lonxitude de onda	λ
Velocidade de propagación	v_p
Velocidade máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m

Outros símbolos

Posición do punto (distancia ao foco)	x
Amplitude	A

Ecuacións

Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m]}$$

Frecuencia angular: $\omega = 628 \text{ rad·s}^{-1}$
Número de onda: $k = 1{,}90 \text{ rad·m}^{-1}$
Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628 \text{ [rad·s}^{-1}\text{]}}{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}} = 100 \text{ s}^{-1} = 100 \text{ Hz}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ [rad]}}{1{,}90 \text{ [rad·m}^{-1}\text{]}} = 3{,}31 \text{ m}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 3{,}31 \text{ [m]} \cdot 100 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 331 \text{ m·s}^{-1}$$

b) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot 628 \cdot \operatorname{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

$$v = -37{,}7 \cdot \operatorname{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s]}$$

A velocidade é máxima cando $\operatorname{sen}(\varphi) = -1$

$$v_m = 37{,}7 \text{ m/s}$$

A aceleración obtense derivando a velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{-37{,}7 \cdot \operatorname{sen}(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -37{,}7 \cdot 628 \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$a = -2{,}37 \cdot 10^{4} \cdot \cos(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x) \text{ [m/s}^2\text{]}$$

A aceleración é máxima cando $\cos(\varphi) = -1$

$$a_m = 2{,}37 \cdot 10^{4} \text{ m/s}^2$$

14. Por unha corda tensa propágase unha onda transversal con amplitude 5 cm, frecuencia 50 Hz e velocidade de propagación 20 m/s. Calcula:
    a) A ecuación de onda $y(x, t)$
    b) Os valores do tempo para os que $y(x, t)$ é máxima na posición $x = 1$ m

(P.A.U. xuño 04)

Rta.: a) $y = 0,0500 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5,00 \cdot \pi \cdot x)$ [m]; b) $t = 0,0550 + 0,0100 \cdot n$ [s], (n = 0, 1, 2...)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Amplitude	A = 5,00 cm = 0,0500 m
Frecuencia	f = 50,0 Hz = 50,0 s^{-1}
Velocidade de propagación	v_p = 20,0 m/s
Posición para calcular os valores do tempo nos que y é máxima	x = 1,00 m
Incógnitas	
Ecuación da onda (frecuencia angular e número de onda)	ω, k
Tempo para os que $y(x, t)$ é máxima na posición x = 1 m	t
Outros símbolos	
Posición do punto (distancia ao foco)	x
Período	T
Lonxitude de onda	λ
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2 \pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia e o período	$f = 1 / T$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2 \pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Tómase a ecuación dunha onda harmónica en sentido positivo do eixe X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Calcúlase a frecuencia angular a partir da frecuencia:

$$\omega = 2 \pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50,0 \text{ [s}^{-1}] = 100 \cdot \pi \text{ [rad·s}^{-1}] = 314 \text{ rad·s}^{-1}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir da velocidade de propagación da onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{20,0 \text{ [m/s]}}{50,0 \text{ [s}^{-1}]} = 0,400 \text{ m}$$

Calcúlase o número de onda a partir da lonxitude de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14 \text{ [rad]}}{0,400 \text{ [m]}} = 5,00 \cdot \pi \text{ [rad/m]} = 15,7 \text{ rad/m}$$

A ecuación de onda queda:

$$y(x, t) = 0,0500 \cdot \text{sen}(100 \cdot \pi \cdot t - 5,00 \cdot \pi \cdot x) \text{ [m]} = 0,0500 \cdot \text{sen}(314 \cdot t - 15,7 \cdot x) \text{ [m]}$$

b) y é máxima cando sen(φ) = 1, o que corresponde a un ángulo de $\varphi = \pi / 2$ [rad] na primeira circunferencia. Supoñendo que se refire a unha y máxima en valor absoluto, $\varphi = \pm \pi / 2$ [rad], e, en xeral:

$$\varphi = \pi / 2 + n \cdot \pi \text{ [rad]}$$

Sendo n un número natural (n = 0, 1, 2....)
Igualando e substituíndo x = 1,00 m

$$100 \cdot \pi \cdot t - 5,00 \cdot \pi = \pi / 2 + n \cdot \pi$$

$$t = 0,0550 + 0,0100 \cdot n \text{ [s]}$$

Análise: A primeira vez que a elongación é máxima para x = 1,00 m *é (*n = 0*) cando* t_1 = 0,0550 s. Como o período é T = 1 / f = 1 / (50,0 s^{-1}) = 0,0200 s, volverá ser máxima cada 0,0200 s, e máxima en valor absoluto cada medio ciclo, ou sexa cada 0,0100 s.

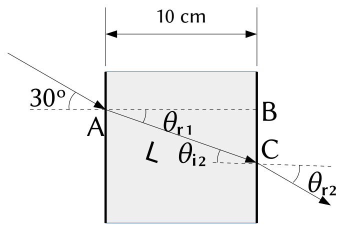
● Dioptrio plano

1. Un raio de luz de frecuencia $5·10^{14}$ Hz incide cun ángulo de incidencia de 30° sobre unha lámina de vidro de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabendo que o índice de refracción do vidro é 1,50 e o do aire 1,00:
   a) Enuncia as leis da refracción e debuxa a marcha dos raios no aire e no interior da lámina de vidro.
   b) Calcula a lonxitude de onda da luz no aire e no vidro, e a lonxitude percorrida polo raio no interior da lámina.
   c) Acha o ángulo que forma o raio de luz coa normal cando emerxe de novo ao aire.
   Dato: $c = 3{,}00·10^8$ m/s *(P.A.U. set. 14)*
   Rta.: b) λ(aire) = 600 nm; λ(vidro) = 400 nm; L = 10,6 cm; c) θ_{r2} = 30°

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia do raio de luz	$f = 5{,}00·10^{14}$ Hz
Ángulo de incidencia	$\theta_{i1} = 30{,}0°$
Espesor da lámina de vidro	e = 10,0 cm = 0,100 m
Índice de refracción do vidro	$n_v = 1{,}50$
Índice de refracción do aire	$n_a = 1{,}00$
Velocidade da luz no baleiro	$c = 3{,}00·10^8$ m/s
Incógnitas	
Lonxitude de onda de luz no aire e no vidro	λ_a, λ_v
Lonxitude percorrida polo raio de luz no interior da lámina	L
Ángulo de desviación do raio ao saír da lámina	θ_{r2}
Ecuacións	
Índice de refracción dun medio $_i$ no que a luz se despraza á velocidade v_i	$n_i = \dfrac{c}{v_i}$
Relación entre a velocidade v, a lonxitude de onda λ e a frecuencia f	$v = \lambda \cdot f$
Lei de Snell da refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) As leis de Snell da refracción son:
1.ª O raio incidente, o raio refractado e a normal están no mesmo plano.
2.ª A relación matemática entre os índices de refracción n_i e n_r dos medios incidente e refractado e os ángulos de incidencia e refracción θ_i e θ_r, é:



$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

Represéntase a traxectoria da luz. O raio incidente no punto A cun ángulo de incidencia θ_{i1} = 30° pasa do aire ao vidro dando un raio refractado que forma o primeiro ángulo de refracción θ_{r1} e o segundo ángulo de incidencia θ_{i2} entre o vidro e o aire. Finalmente sae da lámina de vidro polo punto B co segundo ángulo de refracción θ_{r2}.

b) A velocidade da luz no aire é:

$$v_a = \frac{c}{n_a} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}00} = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Por tanto, a lonxitude de onda da luz no aire é:

$$\lambda_a = \frac{v_a}{f} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5{,}00 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 6{,}00 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

A velocidade da luz no vidro é:

$$v_v = \frac{c}{n_v} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}50} = 2{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Por tanto, a lonxitude de onda da luz no vidro é:

$$\lambda_v = \frac{v_v}{f} = \frac{2{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5{,}00 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4{,}00 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 400 \text{ nm}$$

Como o espesor da lámina é de 10 cm, a lonxitude percorrida polo raio é a hipotenusa L do triángulo ABC. O primeiro ángulo de refracción θ_{r1} pódese calcular aplicando a lei de Snell

$$1{,}00 \cdot \text{sen } 30° = 1{,}50 \cdot \text{sen } \theta_{r1}$$

$$\text{sen } \theta_{r1} = \frac{1{,}00 \cdot \text{sen } 30°}{1{,}50} = 0{,}333$$

$$\theta_{r1} = \text{arcsen } 0{,}333 = 19{,}5°$$

Por tanto a hipotenusa L vale:

$$L = \frac{e}{\cos \theta_{r1}} = \frac{10{,}0 \text{ [cm]}}{\cos 19{,}5°} = 10{,}6 \text{ cm}$$

c) Como a lámina de vidro é de caras paralelas, o segundo ángulo de incidencia a_{i2} é igual ao primeiro ángulo de refracción:

$$\theta_{i2} = \theta_{r1} = 19{,}5°$$

Para calcular o ángulo co que sae da lámina, vólvese a aplicar a lei de Snell entre o vidro (que agora é o medio incidente) e o aire (que é o medio refractado):

$$1{,}50 \cdot \text{sen } 19{,}5° = 1{,}00 \cdot \text{sen } \theta_{r2}$$

$$\text{sen } \theta_{r2} = \frac{1{,}50 \cdot \text{sen } 19{,}5°}{1{,}00} = 0{,}500$$

$$\theta_{r2} = \text{arcsen } 0{,}500 = 30{,}0°$$

Análise: Este resultado é correcto porque o raio sae paralelo ao raio incidente orixinal.

2. Un raio de luz pasa da auga (índice de refracción n = 4/3) ao aire (n = 1). Calcula:
   a) O ángulo de incidencia se os raios reflectido e refractado son perpendiculares entre si.
   b) O ángulo límite.
   c) Hai ángulo límite se a luz incide do aire á auga?

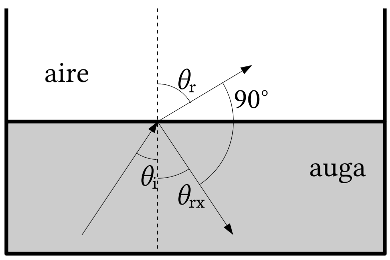
   (P.A.U. xuño 13)

   Rta.: a) θ_i = 36,9°; b) λ = 48,6°

Datos	***Cifras significativas: 3***
Índice de refracción do aire	n = 1,00
Índice de refracción da auga	n_a = 4 / 3 = 1,33
Ángulo entre o raio refractado e o reflectido	$\Delta\theta_{rr}$ = 90,0°
Incógnitas	
Ángulo de incidencia	θ_i
Ángulo límite	λ
Ecuacións	
Lei de Snell da refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) Aplicando a lei de Snell da refracción:



$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = 1{,}00 \cdot \text{sen } \theta_r$$

Á vista do debuxo debe cumprirse que

$$\theta_r + 90° + \theta_{rx} = 180°$$

Como o ángulo de reflexión θ_{rx} é igual ao ángulo de incidencia θ_i, a ecuación anterior convértese en:

$$\theta_i + \theta_r = 90°$$

É dicir, que o ángulo de incidencia θ_i e o de refracción θ_r son complementarios.
O seno dun ángulo é igual ao coseno do seu complementario. Entón a primeira ecuación queda:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r = \cos \theta_i$$

$$\tan \%itheta_i = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$$

$$\theta_i = \arctan 0{,}75 = 36{,}9°$$

b) Ángulo límite λ é o ángulo de incidencia que produce un ángulo de refracción de 90°

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \lambda = 1{,}00 \cdot \text{sen } 90{,}0°$$

$$\text{sen } \lambda = 1{,}00 / 1{,}33 = 0{,}75$$

$$\lambda = \text{arcsen } 0{,}75 = 48{,}6°$$

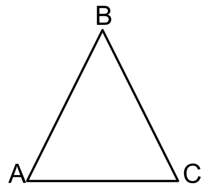
c) Non. Cando a luz pasa do aire á auga, o ángulo de refracción é menor que o de incidencia. Para conseguir un ángulo de refracción de 90° o ángulo de incidencia tería que ser maior que 90° e non estaría no aire. Tamén pode deducirse da lei de Snell.

$$1{,}00 \cdot \text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 \cdot \text{sen } 90°$$

$$\text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 / 1{,}00 > 1$$

É imposible. O seno dun ángulo non pode ser maior que uno.

3. Sobre un prisma equilátero de ángulo 60° (ver figura), incide un raio luminoso monocromático que forma un ángulo de 50° coa normal á cara AB. Sabendo que no interior do prisma o raio é paralelo á base AC:



a) Calcula o índice de refracción do prisma.
b) Determina o ángulo de desviación do raio ao saír do prisma, debuxando a traxectoria que segue o raio.
c) Explica se a frecuencia e a lonxitude de onda correspondentes ao raio luminoso son distintas, ou non, dentro e fóra do prisma.

Dato: n(aire) = 1 *(P.A.U. set. 11)*

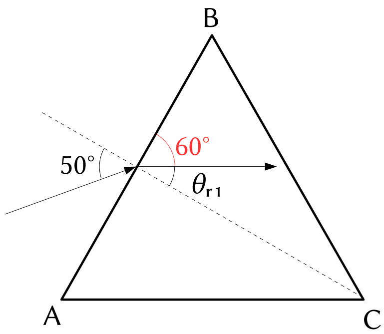
Rta.: a) n_p = 1,5; b) θ_{r2} = 50°

Datos	**Cifras significativas: 2**
Ángulos do triángulo equilátero	θ = 60°
Ángulo de incidencia	θ_i = 50°
Índice de refracción do aire	n_a = 1,0
Incógnitas	
Índice de refracción do prisma	n_p
Ángulo de desviación do raio ao saír do prisma	θ_{r2}
Ecuacións	
Lei de Snell da refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) Na lei de Snell da refracción

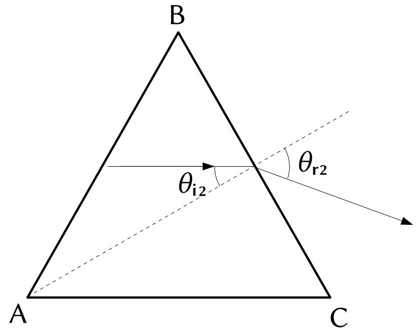
$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$



n_i e n_r representan os índices de refracción dos medios incidente e refractado
θ_i e θ_r representan os ángulos de incidencia e refracción que forma cada raio coa normal á superficie de separación entre os dous medios.
O primeiro ángulo de refracción θ_{r1}, que forma o raio de luz refractado paralelo á base do prisma, vale 30°, xa que é o complementario ao de 60° do triángulo equilátero.

$$n_p = n_r = \frac{n_i \cdot \operatorname{sen} \theta_{i1}}{\operatorname{sen} \theta_{r1}} = \frac{1,0 \cdot \operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 30°} = 1,5$$

b) Cando o raio sae do prisma, o ángulo de incidencia θ_{i2} do raio coa normal ao lado BC vale 30°. Volvendo aplicar a lei de Snell



$$\operatorname{sen} \theta_{r2} = \frac{n_i \cdot \operatorname{sen} \theta_{i2}}{n_r} = \frac{1,5 \cdot \operatorname{sen} 30°}{1,0} = 0,77$$

$$\theta_{r2} = \operatorname{arcsen} 0,77 = 50°$$

c) A frecuencia f dunha onda electromagnética é unha característica da mesma e non varía co medio.
A lonxitude de onda λ está relacionada con ela por

$$c = \lambda \cdot f$$

A velocidade da luz nun medio transparente é sempre menor que no baleiro. O índice de refracción do medio é o cociente entre ambas as velocidades.

$$n = \frac{c}{v}$$

A velocidade da luz no aire é practicamente igual á do baleiro, mentres que no prisma é 1,5 veces menor. Como a frecuencia é a mesma, a lonxitude de onda (que é inversamente proporcional á frecuencia) no prisma é 1,5 veces menor que no aire.

◊ CUESTIÓNS

● M.H.S..

1. Un obxecto realiza un M.H.S., cales das seguintes magnitudes son proporcionais entre si?:
   A) A elongación e a velocidade.
   B) A forza recuperadora e a velocidade.
   C) A aceleración e a elongación.

(P.A.U. Set. 06)

Solución: C

Por definición, un obxecto realiza un movemento harmónico simple cando a aceleración recuperadora é proporcional á separación da posición de equilibrio.

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Isto é equivalente a dicir que a ecuación de movemento é de tipo senoidal ou cosenoidal.

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)\}}{\mathrm{d}t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Volvendo a derivar

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)\}}{\mathrm{d}t} = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

2. Nun oscilador harmónico cúmprese que:
   A) A velocidade v e a elongación x son máximas simultaneamente.
   B) O período de oscilación T depende da amplitude A.
   C) A enerxía total E cuadriplícase cando se duplica a frecuencia.

(P.A.U. Xuño 12)

Solución: C

A forza recuperadora é unha forza conservativa (o traballo que realiza entre dous puntos é independente do camiño seguido) e dá lugar a unha enerxía potencial en cada punto de elongación x cuxa expresión é:

$$E_p = ½\, k \cdot x^2$$

Sendo unha forza conservativa, a enerxía mecánica valerá o mesmo para calquera elongación: é constante.

$$E = (E_c + E_p) = ½\, m \cdot v^2 + ½\, k \cdot x^2 = ½\, m \cdot v^2_m = ½\, k \cdot A^2$$

Para o punto de equilibrio:

$$E = E_c + E_p = ½\, m \cdot v^2_m + ½\, k \cdot 0^2 = ½\, m \cdot v^2_m$$

$$E = ½\, m \cdot v^2_m$$

Por definición, un obxecto realiza un movemento harmónico simple cando a aceleración recuperadora é proporcional á separación da posición de equilibrio.

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Isto é equivalente a dicir que a ecuación de movemento é de tipo senoidal ou cosenoidal.

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

A velocidade é máxima cando $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$

$$v_m = A \cdot \omega$$

A pulsación ou fase angular, ω está relacionada coa frecuencia f pola expresión

$$\omega = 2\, \pi \cdot f$$

Substituíndo na ecuación da enerxía total

$$E = ½\, m \cdot v^2_m = m \cdot (A \cdot 2\, \pi\, f)^2 / 2 = 2\, \pi^2\, m \cdot A^2 \cdot f^2$$

É directamente proporcional ao cadrado da frecuencia. Se a frecuencia faise o dobre, a enerxía total cuadriplícase.

As outras opcións:
A: Falsa. Como se dixo antes, a velocidade é máxima cando o coseno da fase é 1 ($\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$). A expresión da elongación amosa que é máxima cando o seno da fase é 1 ($\varphi = \pi/2$ ó $\varphi = 3\, \pi/2$)
B: Falsa. A forza recuperadora elástica é:

$$F = -k \cdot x$$

Se só actúa esta forza elástica, pola 2ª lei de Newton:

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

Para obter a expresión da aceleración derívase a expresión da velocidade:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)\}}{\mathrm{d}t} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

Substituíndo na expresión anterior:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

Queda

$$k = m \cdot \omega^2$$

A pulsación ou fase angular, ω está relacionada co período T pola expresión

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Substituíndo queda

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Despexando o período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

O período depende da masa e da constante elástica do resorte, pero non da amplitude.

3. Un punto material describe un movemento harmónico simple de amplitude A .Cal das seguintes afirmacións é correcta?:
   A) A enerxía cinética é máxima cando a elongación é nula.
   B) A enerxía potencial é constante.
   C) A enerxía total depende da elongación x.

(P.A.U. Set. 12)

Solución: A

A ecuación dun movemento harmónico simple é:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Onde x é a elongación (separación da posición de equilibrio), A é a amplitude (máxima elongación), ω é a constante harmónica, t é o tempo e φ_0 é a fase inicial.
Derivando obtense a expresión da velocidade:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)\}}{\mathrm{d}\,t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

A velocidade é máxima cando o $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$.
A enerxía cinética tamén será máxima nese caso.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

Cando o coseno dun ángulo é 1, o seno dese ángulo vale 0.
Se o seno do ángulo vale 0, a elongación tamén vale 0. Por tanto a enerxía cinética é máxima cando a elongación x é nula

As outras opcións:
B: Falsa. A forza que produce un movemento harmónico simple é unha forza conservativa (o traballo que realiza entre dous puntos é independente do camiño seguido) e dá lugar a unha enerxía potencial en cada punto de elongación x que depende do valor da elongación:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

C: Falsa. Sendo unha forza conservativa, a enerxía mecánica vale o mesmo en calquera elongación: é constante.

4. A enerxía mecánica dun oscilador harmónico simple é función de:
   A) A velocidade.
   B) A aceleración.
   C) É constante.

(P.A.U. Xuño 08)

Solución: C

Un oscilador harmónico é aquel cuxa posición cumpre a ecuación:

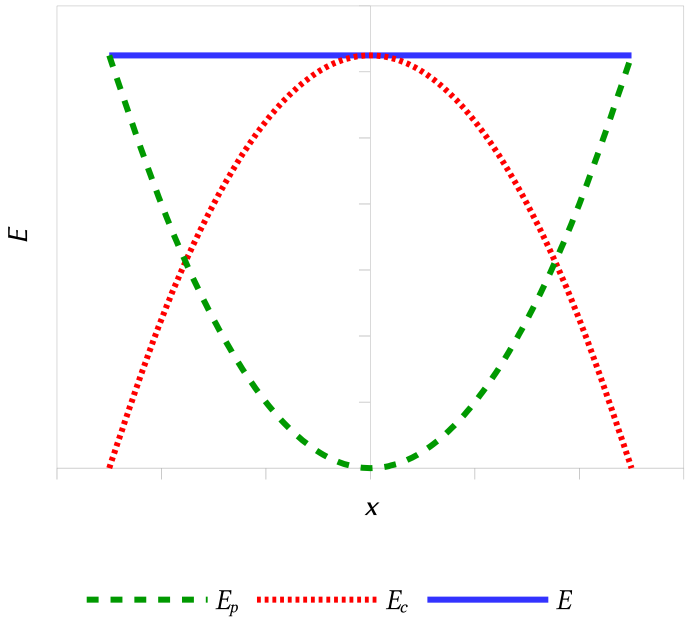
$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Isto é equivalente a dicir que está sometido a unha forza recuperadora proporcional e de sentido contrario á separación da posición de equilibrio.

$$F = -k \cdot x$$

Onde k é a constante elástica do oscilador. Esta é unha forza conservativa (o traballo que realiza entre dous puntos é independente do camiño seguido) e dá lugar a unha enerxía potencial en cada punto de elongación x cuxa expresión é:

$$E_p = ½ \, k \cdot x^2$$



Sendo unha forza conservativa, a enerxía mecánica vale o mesmo para calquera elongación: é constante.

$$E = (E_c + E_p) = ½ \, m \cdot v^2 + ½ \, k \cdot x^2$$

Para a elongación máxima ou amplitude:

$$E = ½ \, m \cdot 0^2 + ½ \, k \cdot A^2 = ½ \, k \cdot A^2$$

$$E = ½ \, k \cdot A^2$$

5. Se un oscilador harmónico atópase nun instante dado nunha posición x que é igual á metade da súa amplitude ($x = A/2$), a relación entre a enerxía cinética e a potencial é:
   A) $E_c = 3 \, E_p$
   B) $E_c = 2 \, E_p$
   C) $E_c = E_p /2$

(P.A.U. Xuño 14, Set. 04)

Solución: A

A enerxía potencial dun oscilador harmónico cando a elongación vale x é:

$$E_p = ½ \, k \cdot x^2$$

Onde k é a constante elástica do oscilador.
Como a enerxía cinética é:

$$E_c = ½ \, m \cdot v^2$$

A enerxía mecánica do oscilador vale:

$$E = (E_c + E_p) = ½ \, m \cdot v^2 + ½ \, k \cdot x^2$$

Para a elongación máxima ou amplitude:

$$E = ½ \, m \cdot 0^2 + ½ \, k \cdot A^2 = ½ \, k \cdot A^2$$

Como a forza elástica é unha forza conservativa, a enerxía mecánica é unha constante e valerá o mesmo para calquera elongación. Por tanto:

$$E = ½ \, k \cdot A^2$$

Para o caso no que $x = A / 2$,

$$E_p = ½\ k \cdot x^2 = ½\ k\ (A / 2)^2 = (½\ k \cdot A^2) / 4 = E / 4$$

$$E_c = E - E_p = E - E / 4 = 3\ E / 4$$

$$E_c = 3\ E_p$$

6. Unha masa de 600 g oscila no extremo dun resorte vertical con frecuencia 1 Hz e amplitude 5 cm. Se engadimos unha masa de 300 g sen variar a amplitude, a nova frecuencia será:
   A) 0,82 Hz.
   B) 1,00 Hz.
   C) 1,63 Hz.

(P.A.U. Xuño 16)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia inicial	f_0 = 1,00 Hz = 1,00 s⁻¹
Masa inicial que colga	m_0 = 600 g = 0,600 kg
Amplitude	A = 5,00 cm = 0,0500 m
Masa engadida	Δm = 300 g = 0,300 kg
Incógnitas	
Nova frecuencia	$f´$
Ecuacións	
Relación entre l a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\ \pi \cdot f$
Relación entre l a frecuencia angular e a constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$

Solución: A

A frecuencia angular calcúlase a partir da frecuencia.

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}] \cdot 1\ [\text{s}^{-1}] = 6{,}28\ \text{rad/s}$$

A constante elástica do resorte calcúlase a partir da frecuencia angular e da masa oscilante.

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}600\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ [\text{rad/s}])^2 = 23{,}7\ \text{N/m}$$

Para calcular a nova frecuencia, despexamos primeiro a nova frecuencia angular coa nova masa:

$$m´ = m + \Delta m = 0{,}600\ [\text{kg}] + 0{,}300\ [\text{kg}] = 0{,}900\ \text{kg}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{23{,}7\ [\text{N·m}^{-1}]}{0{,}900\ [\text{kg}]}} = 5{,}13\ \text{rad/s}$$

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{5{,}13\ [\text{rad/s}]}{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]} = 0{,}817\ \text{s}^{-1}$$

● Características e ecuacións das ondas

1. A intensidade nun punto dunha onda esférica que se propaga nun medio homoxéneo e isótropo:
   A) É inversamente proporcional ao cadrado da distancia ao foco emisor.
   B) É inversamente proporcional á distancia ao foco emisor.
   C) Non varía coa distancia ao foco emisor.

(P.A.U. set. 16)

Solución: A

A intensidade dunha onda é a enerxía na unidade de tempo por unidade de superficie perpendicular á dirección de propagación da onda.

$$I=\frac{E}{S\cdot t}$$

Se a onda é esférica, a superficie é: $S = 4\,\pi\, r^2$, na que r é a distancia ao foco.

$$I=\frac{E}{4\pi r^2\cdot t}$$

2. Cando un movemento ondulatorio se reflicte, a súa velocidade de propagación:
   A) Aumenta.
   B) Depende da superficie de reflexión.
   C) Non varía.

(P.A.U. set. 15)

Solución: C

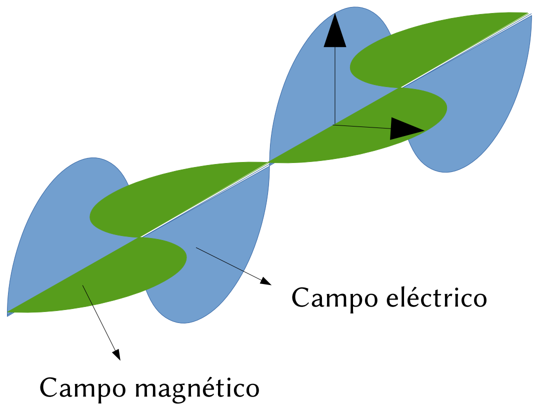
A velocidade de propagación dunha onda depende dalgunhas características do medio (temperatura e masa molar nos gases, densidade lineal nas cordas...). Cando unha onda se reflicte, mantense no medio do que procedía despois de rebotar. Por tanto, como o medio non varía, a velocidade de propagación mantense.

3. Nunha onda de luz:
   A) Os campos eléctrico $\overline{\boldsymbol{E}}$ e magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ vibran en planos paralelos.
   B) Os campos $\overline{\boldsymbol{E}}$ e $\overline{\boldsymbol{B}}$ vibran en planos perpendiculares entre si.
   C) A dirección de propagación é a de vibración do campo eléctrico.
   (Debuxa a onda de luz).

(P.A.U. xuño 14)

Solución: B

Unha onda electromagnética é unha combinación dun campo eléctrico e un campo magnético oscilante que se propagan en direccións perpendiculares entre si.

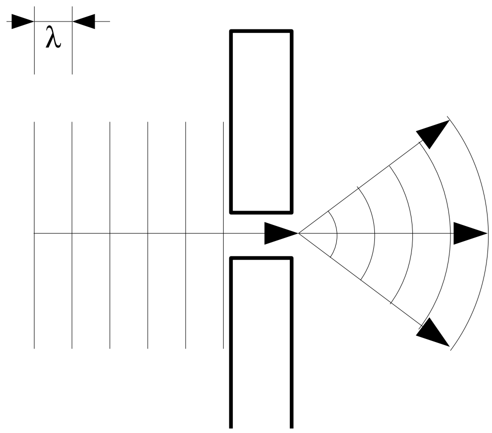


4. Se unha onda atravesa unha abertura de tamaño comparable á súa lonxitude de onda:
   A) Refráctase.
   B) Polarízase.
   C) Difráctase.
   (Debuxa a marcha dos raios)

(P.A.U. xuño 14, set. 09)

Solución: C

Prodúcese difracción cando unha onda «ábrese» cando atravesa unha abertura de tamaño comparable á súa lonxitude de onda. É un fenómeno característico das ondas.
Pode representarse tal como na figura para unha onda plana.



5. A ecuación dunha onda transversal de amplitude 4 cm e frecuencia 20 Hz que se propaga no sentido negativo do eixe X cunha velocidade de 20 m·s⁻¹ é:
   A) $y(x, t) = 4\cdot 10^{-2} \cos \pi\,(40 \cdot t + 2 \cdot x)$ [m]

B) $y(x, t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos \pi (40 \cdot t - 2 \cdot x)$ [m]
C) $y(x, t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos 2 \pi (40 \cdot t + 2 \cdot x)$ [m]

(P.A.U. set. 13)

Solución: A

A ecuación dunha onda harmónica unidimensional pode escribirse como:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

Na que
y é a elongación do punto que oscila (separación da posición de equilibrio)
A é a amplitude (elongación máxima)
ω é a frecuencia angular que está relacionada coa frecuencia f por $\omega = 2 \pi \cdot f$.
t é o tempo
k é o número de onda, a cantidade de ondas que entran nunha lonxitude de 2 π metros. Está relacionada coa lonxitude de onda λ por $k = 2 \pi / \lambda$
x é a distancia do punto ao foco emisor.
O signo ± entre $\omega \cdot t$ e $k \cdot x$ é negativo se a onda propágase en sentido positivo do eixe X, e positivo se o fai en sentido contrario.
Como di que se propaga en sentido negativo do eixe X podemos descartar a opción B.
A frecuencia angular ω da ecuación da opción A é $\omega_1 = \pi \cdot 40$ [rad/s], que corresponde a unha frecuencia de 20 Hz.

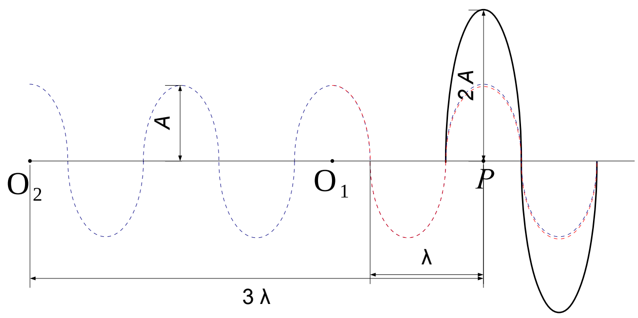
$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi\,[\text{rad/s}]}{2\pi\,[\text{rad}]} = 20\ \text{s}^{-1}$$

6. Dous focos O_1 e O_2 emiten ondas en fase da mesma amplitude (A), frecuencia (f) e lonxitude de onda (λ) que se propagan á mesma velocidade, interferindo nun punto P que está a unha distancia λ m de O_1 e 3 λ m de O_2. A amplitude resultante en P será:
A) Nula.
B) A.
C) 2 A.

(P.A.U. xuño 13)

Solución: C

Represéntanse dúas ondas que se propagan de esquerda a dereita desde dous puntos O_1 e O_2 de forma que o punto P atópase a unha distancia λ de O_1 e a unha distancia 3 λ de O_2.
Como a diferenza de camiños é un número enteiro de lonxitudes de onda os máximos coinciden e amplifícanse e a interferencia é construtiva.
Como a frecuencia, a fase e amplitude son a mesma, a onda resultante será:



$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x_1) + A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$

$$y = 2 A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t - k \frac{(x_1 + x_2)}{2}\right) \cos\left(k \frac{(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

Como $x_1 - x_2 = 2 \lambda$ e $k = 2 \pi / \lambda$, queda unha onda da mesma frecuencia, en fase coas iniciais e cuxa amplitude é o dobre:

$$y = 2 A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - 4 \pi) \cdot \cos(2 \pi) = 2 A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

7. A ecuación dunha onda é $y = 0,02 \cdot \text{sen}\,(50 \cdot t - 3 \cdot x)$; isto significa que:
   A) $\omega = 50\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ e $\lambda = 3$ m.
   B) A velocidade de propagación $u = 16,67\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ e a frecuencia $f = 7,96\ \text{s}^{-1}$.
   C) $t = 50$ s e o número de onda $k = 3\ \text{m}^{-1}$.

(P.A.U. xuño 12)

Solución: B

A ecuación dunha onda harmónica unidimensional pode escribirse como:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

Na que
y é a elongación do punto que oscila (separación da posición de equilibrio)
A é a amplitude (elongación máxima)
ω é a frecuencia angular que está relacionada coa frecuencia f por $\omega = 2\,\pi \cdot f$.
t é o tempo
k é o número de onda, a cantidade de ondas que entran nunha lonxitude de $2\,\pi$ metros. Está relacionada coa lonxitude de onda λ por $k = 2\,\pi / \lambda$
x é a distancia do punto ao foco emisor.
O signo ± entre $\omega \cdot t$ e $k \cdot x$ é negativo se a onda propágase en sentido positivo do eixe X, e positivo se o fai en sentido contrario.
A velocidade u de propagación dunha onda é $u = \lambda \cdot f$
Comparando a ecuación xeral coa do problema obtemos:
$A = 0,02$ m
$\omega = 50$ rad/s
$k = 3$ rad/m

Para elixir a opción correcta calcúlanse algúns dos parámetros da ecuación (usando 2 cifras significativas).

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{k} = \frac{2\,\pi\,[\text{rad}]}{3,0\,[\text{rad/m}]} = 2,1\ \text{m}$$

Iso permite descartar a opción A.

$$f = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{50\,[\text{rad/s}]}{2\,\pi\,[\text{rad}]} = 8,0\ \text{s}^{-1} = 8,0\ \text{Hz}$$

$$ou = \lambda \cdot f = 2,1\,[\text{m}] \cdot 8,0\,[\text{s}^{-1}] = 17\ \text{m/s}$$

Coincide coa opción B (se se redondean os valores que aparecen na devandita opción ás cifras significativas que hai que usar).
A opción C non é correcta porque a frecuencia é a inversa do período:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8,0\,[\text{s}^{-1}]} = 0,13\ \text{s}$$

8. Razoa cal das seguintes afirmacións referidas á enerxía dun movemento ondulatorio é correcta:
   A) É proporcional á distancia ao foco emisor de ondas.
   B) É inversamente proporcional á frecuencia da onda.
   C) É proporcional ao cadrado da amplitude da onda.

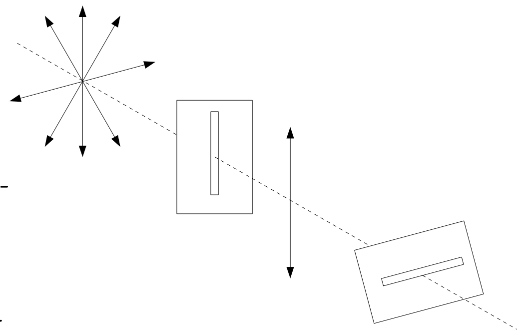
(P.A.U. set. 11)

Solución: C. Véxase unha cuestión parecida na proba de setembro de 2009

9. Unha onda de luz é polarizada por un polarizador A e atravesa un segundo polarizador B colocado despois de A. Cal das seguintes afirmacións é correcta con respecto á luz despois de B?
   A) Non hai luz se A e B son paralelos entre si.
   B) Non hai luz se A e B son perpendiculares entre si.
   C) Hai luz independentemente da orientación relativa da e B.

(P.A.U. xuño 11)

Solución: B



O fenómeno de polarización só ocorre nas ondas transversais. A luz é un conxunto de oscilacións de campo eléctrico e campo magnético que vibran en planos perpendiculares que se cortan na liña de avance o raio de luz. A luz do Sol ou dunha lámpada eléctrica vibra nunha multitude de planos.
O primeiro polarizador só permite pasar a luz que vibra nun determinado plano. Se o segundo polarizador está colocado en dirección perpendicular ao primeiro, a luz que chega a el non ten compoñentes na dirección desta segunda polarización polo que non pasará ningunha luz.

10. Unha onda harmónica estacionaria caracterízase por:
 A) Ter frecuencia variable.
 B) Transportar enerxía.
 C) Formar nodos e ventres.

(P.A.U. xuño 10)

Solución: C

Unha onda estacionaria é xerada por interferencia de dúas ondas de iguais características pero con distinto sentido de desprazamento. Nela existen puntos que non vibran e chámense nodos. Un exemplo sería a onda estacionaria ancorada á corda dun instrumento musical como unha guitarra ou violín. Os extremos da corda están fixos (son os nodos) e a amplitude da vibración é máxima no punto central. Nesta onda a lonxitude da corda sería a metade da lonxitude de onda e a situación correspondería ao modo fundamental de vibración.

11. A luz visible abarca un rango de frecuencias que van desde (aproximadamente) $4,3·10^{14}$ Hz (vermello) até $7,5·10^{14}$ Hz (ultravioleta). Cal das seguintes afirmacións é correcta?
 A) A luz vermella ten menor lonxitude de onda que a ultravioleta.
 B) A ultravioleta é a máis enerxética do espectro visible.
 C) Ambas aumentan a lonxitude de onda nun medio con maior índice de refracción que aire.

(P.A.U. xuño 10)

Solución: B

Fago a excepción de que, estritamente, a luz ultravioleta non é visible, pero limita coa violeta, que se o é, nesa frecuencia.
Na teoría clásica, a enerxía dunha onda é directamente proporcional ao cadrado da amplitude e da frecuencia. Como a frecuencia da luz ultravioleta é maior que da luz vermella, terá maior enerxía.
(Na teoría cuántica, a luz pódese considerar como un fai de partículas chamadas fotóns. A enerxía E que leva un fotón de frecuencia f é:

$$E = h \cdot f$$

Sendo h a constante de Planck, que ten un valor moi pequeno: $h = 6,63·10^{-34}$ J·s
Nese caso, canto maior sexa a frecuencia, maior será a enerxía do fotón).

As outras opcións:
A. Falsa. A lonxitude de onda λ está relacionada coa velocidade de propagación v e a frecuencia f por:

$$v = \lambda \cdot f$$

Nun medio homoxéneo, a lonxitude de onda e a frecuencia son inversamente proporcionais. Como

$$f_u = 7,5·10^{14} > 4,3·10^{14} = f_v \Longrightarrow \lambda_u < \lambda_v$$

C. Falsa. O índice de refracción dun medio respecto ao baleiro n_m é o cociente entre a velocidade da luz no baleiro c e a velocidade da luz no medio v_m.

$$n_m = c \,/\, v_m$$

Se o índice de refracción do medio é maior que o do aire, a velocidade da luz nese medio ten que ser menor, por ser inversamente proporcionais.

$$n_m > n_a \Longrightarrow v_m < v_a$$

Como a frecuencia da luz é característica (non varía ao cambiar de medio) e está relacionada coa velocidade de propagación da luz no medio por:

$$v_m = \lambda_m \cdot f$$

Como son directamente proporcionais, ao ser menor a velocidade, tamén ten que ser menor a lonxitude de onda.

12. Cando unha onda harmónica plana propágase no espazo, a súa enerxía é proporcional:
    A) A $1/f$ (f é a frecuencia)
    B) Ao cadrado da amplitude A^2.
    C) A $1/r$ (r é a distancia ao foco emisor)

(P.A.U. set. 09)

Solución: B

A enerxía que transporta unha onda material harmónica unidimensional é a suma da cinética e de potencial:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ k \cdot A^2$$

A ecuación da onda harmónica unidimensional é: $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Derivando con respecto ao tempo: $v = \mathrm{d}\, y \,/\, \mathrm{d}\, t = -A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
É máxima cando $-\mathrm{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x) = 1$, $v_m = A \cdot \omega$
Substituíndo na ecuación da enerxía: $E = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ m \cdot A^2 \cdot \omega^2$
Como a pulsación ω ou frecuencia angular é proporcional á frecuencia f: $\omega = 2\ \pi \cdot f$

$$E = ½\ m \cdot A^2 \cdot \omega^2 = ½\ m \cdot A^2\ (2\ \pi \cdot f)^2 = 2\ \pi^2\ m \cdot A^2 \cdot f^2$$

A enerxía que transporta unha onda é proporcional aos cadrados da frecuencia e da amplitude.

13. Unha onda luminosa:
    A) Non se pode polarizar.
    B) A súa velocidade de propagación é inversamente proporcional ao índice de refracción do medio.
    C) Pode non ser electromagnética.

(P.A.U. xuño 09)

Solución: B

Defínese índice de refracción n dun medio con respecto ao baleiro como o cociente entre a velocidade c da luz no baleiro e a velocidade v da luz en devandito medio.

$$n = \frac{c}{v}$$

Como a velocidade da luz no baleiro é unha constante universal, a velocidade de propagación da luz nun medio é inversamente proporcional ao seu índice de refracción.

As outras opcións:
A. Falsa. A luz é unha onda electromagnética transversal que vibra en moitos planos. Cando atravesa un medio polarizador, só o atravesa a luz que vibra nun determinado plano.

C. Falsa. Maxwell demostrou que a luz é unha perturbación eléctrica harmónica que xera un campo magnético harmónico perpendicular ao eléctrico e perpendiculares ambos á dirección de propagación.

14. Se a ecuación de propagación dun movemento ondulatorio é $y(x, t) = 2 \cdot \text{sen}(8\,\pi \cdot t - 4\,\pi \cdot x)$ (S.I.), a súa velocidade de propagación é:
A) 2 m/s
B) 32 m/s
C) 0,5 m/s

(P.A.U. xuño 08)

Solución: A

Obtéñense a frecuencia angular e o número de onda comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación do problema:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

$$y = 2 \cdot \text{sen}(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x)\ [\text{m}]$$

Frecuencia angular: $\omega = 8 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}]$
Número de onda: $k = 4 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}]$
Calcúlanse a lonxitude de onda e a frecuencia para determinar a velocidade de propagación.
Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\ [\text{rad}]}{4 \cdot \pi\ [\text{rad·m}^{-1}]} = 0{,}5\ \text{m}$$

Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}]}{2\pi\ [\text{rad}]} = 4\ \text{s}^{-1}$$

Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}5\ [\text{m}] \cdot 4\ [\text{s}^{-1}] = 2\ \text{m·s}^{-1}$$

15. Se un feixe de luz láser incide sobre un obxecto de pequeno tamaño (da orde da súa lonxitude de onda),
A) Detrás do obxecto hai sempre escuridade.
B) Hai zonas de luz detrás do obxecto.
C) Reflíctese cara ao medio de incidencia.

(P.A.U. set. 07)

Solución: B

Chámase difracción ao fenómeno polo cal unha onda «rodea» obstáculos de tamaño similar a se lonxitude de onda. Prodúcense interferencias construtivas e destrutivas detrás do obstáculo, polo que existirán zonas «iluminadas» e zonas escuras.

16. Unha onda electromagnética que se atopa cun obstáculo de tamaño semellante á súa lonxitude de onda:
A) Forma nunha pantalla, colocada detrás do obstáculo, zonas claras e escuras.
B) Polarízase e o seu campo eléctrico oscila sempre no mesmo plano.
C) Reflíctese no obstáculo.

(P.A.U. xuño 07)

Solución: A

Difracción é o fenómeno que se produce cando unha onda mecánica ou electromagnética «rodea» un obstáculo de dimensións parecidas á lonxitude de onda. É un fenómeno característico das ondas. Isto producirá un patrón de interferencias que, no caso da luz, dará lugar a unha sucesión de zonas claras e escuras nunha pantalla.

17. Na polarización lineal da luz:
    A) Modifícase a frecuencia da onda.
    B) O campo eléctrico oscila sempre nun mesmo plano.
    C) Non se transporta enerxía.

(P.A.U. set. 06)

Solución: B

A luz emitida por un foco (unha lámpada, o Sol…) é unha onda electromagnética transversal que vibra en moitos planos. Cando atravesa un medio polarizador, só o atravesa a luz que vibra nun determinado plano.

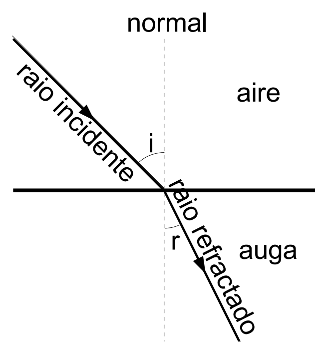
As outras opcións:
A. Falsa. A frecuencia dunha onda electromagnética é unha característica da mesma e non depende do medio que atravesa.
B. As ondas, excepto as estacionarias, transmiten enerxía sen transporte neto de materia.

18. Cando a luz atravesa a zona de separación de dous medios, experimenta:
    A) Difracción.
    B) Refracción.
    C) Polarización.

(P.A.U. xuño 06)

Solución: B

A refracción é o cambio de dirección que experimenta unha onda cando pasa dun medio a outro no que se transmite a distinta velocidade.
Unha medida da densidade óptica dun medio é o seu índice de refracción n, o cociente entre a velocidade c da luz no baleiro e a velocidade v da luz no medio.



$$n=\frac{c}{v}$$

O índice de refracción n é sempre maior que a unidade, porque a velocidade da luz no baleiro é o límite de calquera velocidade, segundo a teoría da relatividade restrinxida.
Cando un raio de luz pasa dun medio óptico menos «denso» (aire) a outro máis «denso» (auga), o raio desvíase achegándose á normal.
Leis da refracción:
1ª.- O raio incidente, o raio refractado e a normal á superficie de separación están no mesmo plano.
2ª.- Os senos dos ángulos i (o que forma o raio incidente coa normal á superficie de separación) e r (o que forma o raio refractado con esa mesma normal) son directamente proporcionais ás velocidades da luz en cada medio, e inversamente proporcionais aos seus índices de refracción.

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\frac{v_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{r}}}=\frac{n_{\mathrm{r}}}{n_{\mathrm{i}}}$$

19. O son dunha guitarra propágase como:
    A) Unha onda mecánica transversal.
    B) Unha onda electromagnética.
    C) Unha onda mecánica lonxitudinal.

(P.A.U. set. 05)

Solución: C

O son é unha onda mecánica, xa que necesita un medio, (aire, auga, unha parede) para propagarse. É unha onda lonxitudinal porque as partículas do medio vibran na mesma dirección na que se propaga o son.

20. Nunha onda estacionaria xerada por interferencia de dúas ondas, cúmprese:
A) A amplitude é constante.
B) A onda transporta enerxía.
C) A frecuencia é a mesma que a das ondas que interfiren.

(P.A.U. xuño 05)

Solución: C

Unha onda estacionaria xerada por interferencia de dúas ondas de iguais características pero con distinto sentido de desprazamento.
A ecuación da onda incidente, supoñendo que viaxa cara á dereita, é

$$y_1 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

A onda incidente ao reflectirse no extremo fixo, sofre un cambio de fase de π rad e a onda reflectida que viaxa cara á dereita ten por ecuación:

$$y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x + \pi) = -A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Cando as ondas interfiren, a onda resultante ten por ecuación

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) - A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Usando

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Queda

$$y = 2\,A \cdot \cos\,(\omega \cdot t) \cdot \text{sen}\,(k \cdot x)$$

É a ecuación dunha onda que ten unha frecuencia angular ω igual.

$$y = A_x \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

As outras opcións:
A. A amplitude depende do punto x: $A_x = 2 \cdot A\,\text{sen}(\,k \cdot x)$
B. Unha onda estacionaria non transporta enerxía.

21. Tres cores da luz visible, o azul o amarelo e o vermello, coinciden en que:
A) Posúen a mesma enerxía.
B) Posúen a mesma lonxitude de onda.
C) Propáganse no baleiro coa mesma velocidade.

(P.A.U. xuño 04)

Solución: C

As cores da luz visible son ondas electromagnéticas que, por definición, propáganse no baleiro coa velocidade c de 300 000 km/s.

As outras opcións:
A e B: Falsas. Distínguense entre eles na súa frecuencia f e na súa lonxitude de onda $\lambda = c / f$. A enerxía dunha onda depende do cadrado da frecuencia e do cadrado da amplitude, polo que a enerxía que transporta non ten por que ser a mesma.

● Dioptrio plano

1. Un raio de luz láser propágase nun medio acuoso (índice de refracción n = 1,33) e incide na superficie de separación co aire (n = 1). O ángulo límite é:
   A) 36,9°
   B) 41,2°
   C) 48,8°

(P.A.U. xuño 15)

Solución: C

A lei de Snell da refracción pode expresarse

$$n_i \text{ sen } \theta_i = n_r \text{ sen } \theta_r$$

n_i e n_r representan os índices de refracción dos medios incidente e refractado.
θ_i e θ_r son os ángulos de incidencia e refracción que forma cada raio coa normal á superficie de separación entre os dous medios.
Ángulo límite λ é o ángulo de incidencia que produce un ángulo de refracción de 90°. Aplicando a lei de Snell

$$1{,}33 \text{ sen } \lambda = 1{,}00 \text{ sen } 90{,}0°$$

$$\text{sen } \lambda = 1{,}00 \text{ / } 1{,}33 = 0{,}75$$

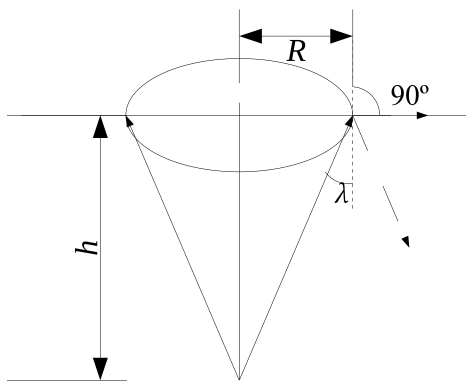
$$\lambda = \text{arcsen } 0{,}75 = 48{,}6°$$

2. No fondo dunha piscina hai un foco de luz. Observando a superficie da auga veríase luz:
   A) En toda a piscina.
   B) Só no punto encima do foco.
   C) Nun círculo de radio R ao redor do punto encima do foco.

(P.A.U. set. 10)

Solución: C

A superficie circular iluminada débese a que os raios que veñen desde a auga e inciden na superficie de separación con un ángulo superior ao ángulo límite non saen ao exterior, porque sofren reflexión total.
O ángulo límite é o ángulo de incidencia para que produce un raio refractado que sae cun ángulo de refracción de 90°.
Pola 2.ª lei de Snell



$$n(\text{auga}) \cdot \text{sen } \theta_i = n(\text{aire}) \cdot \text{sen } \theta_r$$

$$n(\text{auga}) \cdot \text{sen } \lambda = 1 \cdot \text{sen } 90°$$

$$\lambda = \text{arcsen } (1/n(\text{auga}))$$

Do triángulo rectángulo do debuxo dedúcese que:

$$R = h \cdot \tan \lambda$$

3. Cando un raio de luz monocromática pasa desde o aire á auga prodúcese un cambio:
   A) Na frecuencia.
   B) Na lonxitude de onda.
   C) Na enerxía.
   Dato: n(auga) = 4/3

(P.A.U. set. 10)

Solución: B?

O índice de refracción n_i dun medio é o cociente entre a velocidade da luz c no baleiro e a velocidade da luz v_i nese medio.

$$n_i = \frac{c}{v_i}$$

Do valor n(auga) = 4/3, dedúcese que a velocidade da luz na auga é

$$v(\text{agua}) = \frac{c}{4/3} = \frac{3}{4} c < c$$

A frecuencia dunha onda harmónica é característica e independente do medio polo que se propaga. É o número de oscilacións (no caso da luz como onda electromagnética) do campo eléctrico ou magnético na unidade de tempo e corresponde ao número de ondas que pasan por un punto na unidade de tempo.
Ao pasar dun medio (aire) a outro (auga) no que a velocidade de propagación é menor, a frecuencia f mantense pero a lonxitude de onda, λ diminúe proporcionalmente, pola relación entre a velocidade de propagación v e a lonxitude de onda λ,

$$v = \lambda \cdot f$$

A enerxía dunha luz monocromática é proporcional á frecuencia (h é a constante de Planck), segundo a ecuación de Planck,

$$E_f = h \cdot f$$

Non variaría ao cambiar de medio se este non absorbese a luz. A auga vai absorbendo a enerxía da luz, polo que se produciría unha perda da enerxía, que ao longo dunha certa distancia faría que a luz deixase de propagarse pola auga.

4. Un raio de luz incide desde o aire (n = 1) sobre unha lámina de vidro de índice de refracción n = 1,5. O ángulo límite para a reflexión total deste raio é:
A) 41,8°
B) 90°
C) Non existe.

(P.A.U. set. 08)

Solución: C

Para que exista ángulo límite, a luz debe pasar dun medio máis denso opticamente (con maior índice de refracción) a un menos denso.
Pola lei de Snell

$$n_1 \cdot \text{sen } \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen } \theta_2$$

O ángulo límite é o ángulo de incidencia para o que o ángulo de refracción vale 90°.

$$n_1 \cdot \text{sen } \lambda_1 = n_2 \cdot \text{sen } 90° = n_2$$

Se $n_2 > n_1$ entón:

$$\text{sen } \lambda_1 = n_2 / n_1 > 1$$

É imposible. O seno dun ángulo non pode ser maior que uno.

5. Cando un raio de luz incide nun medio de menor índice de refracción, o raio refractado:
A) Varía a súa frecuencia.
B) Achégase á normal.
C) Pode non existir raio refractado.

(P.A.U. set. 07)

Solución: C

Cando a luz pasa dun medio máis denso opticamente (con maior índice de refracción) a outro menos denso (por exemplo da auga ao aire) o raio refractado afástase da normal. Pola segunda lei de Snell da refracción:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

Se $n_i > n_r$, entón sen θ_r > sen θ_i, e $\theta_r > \theta_i$
Pero existe un valor de θ_i, chamado ángulo límite λ, para o que o raio refractado forma un ángulo de 90° coa normal. Para un raio incidente cun ángulo maior que o ángulo límite, non aparece raio refractado. Prodúcese unha reflexión total.

6. Cando a luz incide na superficie de separación de dous medios cun ángulo igual ao ángulo límite iso significa que:
A) O ángulo de incidencia e o de refracción son complementarios.
B) Non se observa raio refractado.
C) O ángulo de incidencia é maior que o de refracción.

(P.A.U. set. 05)

Solución: B

Cando un raio pasa do medio máis denso ao menos denso e incide na superficie de separación cun ángulo superior ao ángulo límite, o raio non sae refractado senón que sofre reflexión total. Se o ángulo de incidencia é igual ao ángulo límite, o raio refractado sae cun ángulo de 90° e non se observa.

7. Se o índice de refracción do diamante é 2,52 e o do vidro 1,27.
A) A luz propágase con maior velocidade no diamante.
B) O ángulo límite entre o diamante e o aire é menor que entre o vidro e o aire.
C) Cando a luz pasa de diamante ao vidro o ángulo de incidencia é maior que o ángulo de refracción.

(P.A.U. xuño 05)

Solución: B

O ángulo límite λ é o ángulo de incidencia para o que o ángulo de refracción vale 90°.
Aplicando a 2.ª lei de Snell da refracción:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

O índice de refracción do aire n_a é o cociente entre a velocidade da luz no baleiro c e a velocidade da luz no aire v_a. Como son practicamente iguais

$$n_a = c \;/\; v_a = 1$$

O ángulo límite entre o diamante e o aire é λ_d :

$$n_d \cdot \text{sen } \lambda_d = n_a \cdot \text{sen } 90° = 1$$

$$\lambda_d = \text{arcsen } (1 \;/\; n_d) = \text{arcsen } (1 \;/\; 2{,}52) = 23°$$

Analogamente para o vidro:

$$\lambda_v = \text{arcsen } (1 \;/\; 1{,}27) = 52°$$

As outras opcións:
A. Pódense calcular as velocidades da luz no diamante e no vidro a partir da definición de índice de refracción,

$$n = c \;/\; v$$

$$v_d = c \;/\; n_d = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \;/\; 2{,}52 = 1{,}2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$v_v = c \;/\; n_v = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \;/\; 1{,}27 = 2{,}4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

C. Cando a luz pasa dun medio máis denso opticamente (diamante) a outro menos denso (vidro) o raio refractado afástase da normal (o ángulo de incidencia é menor que o ángulo de refracción)

8. O ángulo límite na refracción auga/aire é de 48,61°. Se se posúe outro medio no que a velocidade da luz sexa *v*(medio) = 0,878 *v*(auga), o novo ángulo límite (medio/aire) será:
   A) Maior.
   B) Menor.
   C) Non se modifica.

(P.A.U. xuño 04)

Solución: B

O ángulo límite é o ángulo de incidencia para o que o ángulo de refracción vale 90°
Aplicando a 2.ª lei de Snell da refracción:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\frac{v_i}{v_r}$$

Para o ángulo límite *λ*(auga) :

$$\frac{\operatorname{sen} \lambda(\text{auga})}{\operatorname{sen} 90°}=\frac{v(\text{auga})}{v(\text{aire})}$$

$$\operatorname{sen} \lambda(\text{auga})=\frac{v(\text{auga})}{v(\text{aire})}$$

Cos datos:

$$v(\text{auga}) = v(\text{aire}) \cdot \operatorname{sen} \lambda(\text{auga}) = 0,75\ v(\text{aire})$$

Para un novo medio no que *v*(medio) = 0,878 *v*(auga),

$$v(\text{medio}) < v(\text{auga})$$

$$\operatorname{sen} \lambda(\text{medio})=\frac{v(\text{medio})}{v(\text{aire})} < \operatorname{sen} \lambda(\text{auga})=\frac{v(\text{auga})}{v(\text{aire})}$$

$$\lambda(\text{medio}) < \lambda(\text{auga})$$

Cos datos:

$$\operatorname{sen} \lambda(\text{medio})=\frac{v(\text{medio})}{v(\text{aire})}=\frac{0,878 \cdot v(\text{auga})}{v(\text{aire})}=\frac{0,878 \cdot 0,75 \cdot v(\text{aire})}{v(\text{aire})}=0,66$$

$$\lambda(\text{medio}) = 41° < 48,61°$$

● LABORATORIO

● Resorte

1. Fai unha descrición do material e do desenvolvemento experimental na determinación da constante elástica dun resorte polo método dinámico.

(P.A.U. Xuño 13, Set. 09)

Solución:

Na medida da constante elástica dun resorte polo método dinámico tírase cara abaixo dunha masa de valor coñecido que colga dun resorte e déixase oscilar, medindo o tempo de varias oscilacións (10, por exemplo).
Calcúlase o período dividindo o tempo entre o número de oscilacións.
Repítese o procedemento para outras masas coñecidas.
A ecuación do período do resorte,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Pode escribirse como:

$$T^2=\frac{4\pi^2\cdot m}{k}$$

A partir dela determínase o valor de constante.
No método gráfico represéntanse os cadrados dos períodos no eixe de ordenadas fronte ás masas no de abscisas. A gráfica debería dar unha liña recta de pendente:

$$\text{pendente estudo dinámico} = p_d = \frac{\Delta T^2}{\Delta m}=\frac{4\pi^2}{k}$$

Determinando a pendente, pódese calcular o valor de constante:

$$k=\frac{4\pi^2}{p_d}$$

No método analítico calcúlase a constante do resorte k para cada masa e áchase o valor medio. Este método ten o problema de que se a masa do resorte non é desprezable fronte á masa colgada, os resultados levan un erro sistemático.

2. Na práctica para medir a constante elástica k polo método dinámico, obtense a seguinte táboa. Calcula a constante do resorte.

M (g)	5	10	15	20	25
T (s)	0,20	0,28	0,34	0,40	0,44

(P.A.U. Xuño 11)

Solución:

A forza recuperadora é:

$$F = -k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Por tanto

$$k=m\cdot\omega^2=\frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Calcúlase o valor da constante para cada unha das experiencias

M (kg)	$5{,}0\cdot10^{-3}$	$10\cdot10^{-3}$	$15\cdot10^{-3}$	$20\cdot10^{-3}$	$25\cdot10^{-3}$
T (s)	0,20	0,28	0,34	0,40	0,44
k (N/m)	4,9	5,0	5,1	4,9	5,1

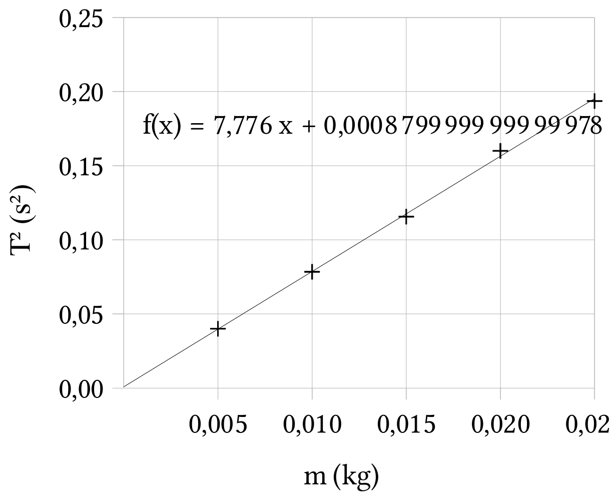
O valor medio é:

$$k_m = 5,0 \text{ N/m}$$

En caso de ter papel milimetrado, ou mellor aínda unha folla de cálculo, poderíanse representar os cadrados dos períodos fronte ás masas, obténdose unha recta.

M (kg)	$5,0·10^{-3}$	$10·10^{-3}$	$15·10^{-3}$	$20·10^{-3}$	$25·10^{-3}$
T^2(s²)	0,04	0,08	0,12	0,16	0,19

Da pendente (7,78 s²/kg) da recta calcularíase a constante do resorte.



$$T^2=\frac{4\pi^2}{k}m$$

$$k=\frac{4\pi^2}{7{,}78 \text{ s}^2/\text{kg}}=5{,}1 \text{ kg/s}^2=5{,}1 \text{ N/m}$$

Este é un valor algo máis exacto que o obtido como valor medio.

3. Emprégase un resorte para medir o seu constante elástica polo método estático e polo dinámico, aplicando a lei de Hooke e o período en función da masa, respectivamente. Obsérvase unha certa diferenza entre os resultados obtidos por un e outro método. A que pode ser debido?

(P.A.U. Xuño 11)

Solución:

O método estático consiste en medir os alongamentos producidos nun resorte ao colgar del pesas de valor coñecido e aplicar a lei de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

A constante k de forza do resorte calcúlase a partir da pendente da recta obtida ao representar os alongamentos Δx fronte ás forzas F peso das pesas colgadas.
O método dinámico consiste en facer oscilar masas coñecidas colgadas do resorte e determinar o período de oscilación medindo o tempo dun número determinado de oscilacións.
Aínda que na oscilación vertical actúa a forza peso, ademais da forza recuperadora elástica, a forza resultante que actúa sobre a masa oscilante dá lugar a un movemento harmónico simple ao redor da posición de equilibrio na que as forzas elástica e peso anúlanse
Combinando a ecuación de Hooke coa 2ª lei de Newton

$$F = -k \cdot x$$

$$F = m \cdot a$$

Tendo en conta que no M.H.S., a aceleración é proporcional e de sentido contrario á elongación,

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Queda

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k=m\cdot\omega^2=\frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

A constante k de forza do resorte calcúlase a partir da pendente da recta obtida ao representar os cadrados T^2 dos períodos fronte ás masas m das pesas colgadas.
Na gráfica $T^2 - m$, se os valores de m son os das masas das pesas, a recta obtida non pasa pola orixe de coordenadas senón que aparece desprazada cara á esquerda. Aínda que a constante de forza do resorte é a mesma en ambas as expresións, a masa m oscilante é maior que a masa que colga e inclúe parte da masa do resorte.

Se o cálculo da constante no método dinámico realízase a partir da pendente, a masa non debe afectar o valor da constante obtida. Pero se se calcula a constante coa ecuación anterior, o resultado pode ser diferente se a masa do resorte non é desprezable fronte ás masas colgadas.

4. No estudo estático dun resorte represéntanse variacións de lonxitude (Δl_i) fronte ás forzas aplicadas (f_i), obténdose unha liña recta. No estudo dinámico do mesmo resorte represéntanse as masas (m_i) fronte aos cadrados dos períodos (T_i^2), obténdose tamén unha recta. Teñen as dúas a mesma pendente? Razoa a resposta.

(P.A.U. Set. 04)

Solución:

No estudo estático úsase a lei de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

F é a forza peso e x o alongamento producido.
Se x represéntase no eixe de ordenadas, e as forzas F no eixe de abscisas, a pendente da recta será igual ao inverso da constante elástica do resorte:

$$\text{pendente estudo estático} = p_e = \Delta x \,/\, \Delta F = 1 \,/\, k$$

No estudo dinámico, a ecuación empregada é a relación entre a constante elástica k e a constante harmónica ω^2

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Na representación, as masas están no eixe de ordenadas e os cadrados dos períodos no de abscisas. Entón:

$$\text{pendente estudo dinámico} = p_d = \frac{\Delta m}{\Delta T^2} = \frac{k}{4\pi^2}$$

Por tanto a pendente da representación derivada do estudo dinámico debería ser distinta á obtida polo método estático:

$$p_d = \frac{k}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot p_e}$$

5. Na determinación da constante elástica dun resorte podemos utilizar dous tipos de procedementos. En ambos os casos, obtense unha recta a partir da cal se calcula a constante elástica. Explica como se determina o valor da constante a partir de dita gráfica para cada un dos dous procedementos, indicando que tipo de magnitudes hai que representar nos eixos de abscisas e de ordenadas.

(P.A.U. Xuño 12)

Solución:

No estudo estático úsase a lei de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

Na que F é a forza peso, e x o alongamento producido.
Se x represéntase no eixe de ordenadas, e as forzas F no eixe de abscisas, a pendente da recta será igual ao inverso da constante elástica do resorte:

$$\text{pendente estudo estático} = p_e = \Delta x \,/\, \Delta F = 1 \,/\, k$$

O valor da constante será o inverso da pendente do estudo estático.

No estudo dinámico, a ecuación empregada é a relación entre a constante elástica k e a constante harmónica ω^2

$$k=m\cdot\omega^2=\frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Na representación, as masas están no eixe de ordenadas e os cadrados dos períodos no de abscisas. Entón:

$$\text{pendente estudo dinámico} = p_d = \frac{\Delta m}{\Delta T^2}=\frac{k}{4\pi^2}$$

O valor da constante será 4 π^2 veces a pendente do estudo dinámico.

$$k = 4\,\pi^2\,p_d$$

6. Na práctica para a medida da constante elástica dun resorte polo método dinámico,
   a) Que precaucións debes tomar con respecto o número e amplitude das oscilacións?
   b) Como varía a frecuencia de oscilación se se duplica a masa oscilante?

(P.A.U. Xuño 06)

Solución:

a) O número de oscilacións debe ser da orde de 10 ou 20. Aínda que a precisión do cálculo do período aumenta co número de oscilacións ($T = t / N$), un número maior aumenta a probabilidade de equivocarse ao contar. A amplitude das oscilacións debe ser pequena (se a amplitude é moi grande, as pesas «saltan» fóra do portapesas), pero non tanto que sexa difícil contalas. Debe comprobarse que a oscilación é vertical.
b) No movemento vertical, a forza resultante entre a forza recuperadora elástica e o peso é unha forza recuperadora do tipo $F = -k \cdot y$

$$-k\cdot y = m\cdot a = m\,(-\omega^2\cdot y)$$

$$k = m\cdot\omega^2$$

Se $m_2 = 2\ m_1$

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{\omega_2/2\pi}{\omega_1/2\pi}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{k/m_2}{k/m_1}}=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}=\sqrt{\frac{m_1}{2\,m_1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_2=\frac{f_1}{\sqrt{2}}$$

A frecuencia será $\sqrt{2}$ = 1,4 veces menor.

7. Na determinación da constante elástica dun resorte polo método dinámico, o período de oscilación é independente da amplitude? Depende da lonxitude e da masa do resorte? Que gráfica se constrúe a partir das magnitudes medidas?

(P.A.U. Set. 11)

Solución:

O período do resorte só depende da masa que oscila e da constante elástica.
Na expresión do período dun M.H.S.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Esta ecuación pode demostrarse así.
Un movemento harmónico simple cumpre que a forza elástica é proporcional á elongación.

$$F = -k\cdot x$$

Pero tamén cumpre que a aceleración recuperadora é proporcional á elongación x

$$a = -\omega^2\cdot x$$

Pola segunda lei de Newton

$$\Sigma F = m \cdot a$$

Se a forza resultante é a elástica

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Como a pulsación é

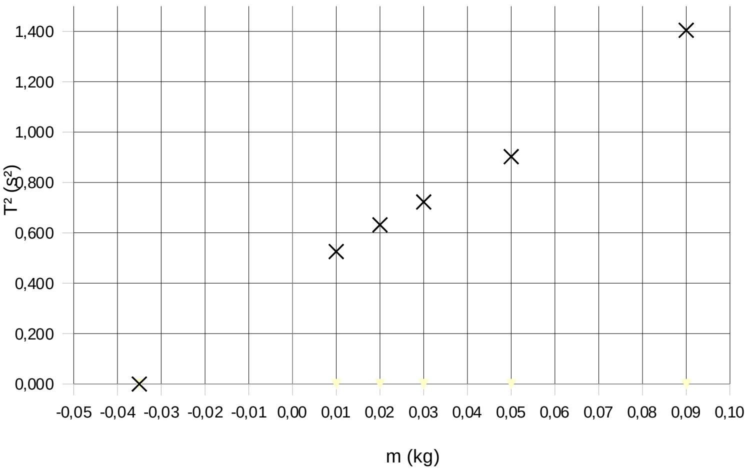
$$\omega = 2\,\pi \,/\, T$$

$$T = 2\,\pi \,/\, \omega$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Na ecuación obsérvase que a amplitude non intervén, aínda que se se alonga o resorte de forma esaxerada as masas colgantes salguen disparadas.

O período de oscilación non depende da lonxitude, pero si da masa do resorte.
A dependencia coa masa do resorte non é sinxela, xa que non todo o resorte oscila do mesmo xeito. Pódese demostrar que o resorte contribúe á masa oscilante nun sumando que vale a terceira parte da masa do resorte.
m(oscilante) = m(colgada) + m(resorte) / 3
Ao facer unha representación gráfica dos cadrados dos períodos fronte á masa colgada, a recta non pasa pola orixe. A contribución da masa do resorte é a abscisa na orixe da gráfica. (Na gráfica que aparece a continuación, a contribución da masa do resorte sería de 0,035 kg)



A gráfica que se constrúe é a dos cadrados dos períodos fronte á masa colgada, xa que, ao elevar ao cadrado a expresión do período queda

$$T^2=\frac{4\pi^2 m}{k}$$

É a ecuación dunha recta que pasa pola orixe e ten unha pendente = $4\,\pi^2 \,/\, k$

8. Na determinación da constante elástica dun resorte de lonxitude inicial 21,3 cm, polo método estático, obtivéronse os seguintes valores: (g = 9,8 m/s²)

masa (g)	20,2	30,2	40,3	50,3	60,4	70,5
lonxitude (cm)	27,6	30,9	34,0	37,2	40,5	43,6

Calcula a constante elástica coa súa incerteza en unidades do sistema internacional.

(P.A.U. Xuño 15)

Solución:

O método estático, baséase na lei de Hooke:

$$F = -k \cdot \Delta x$$

Calcúlanse
- os alongamentos $\Delta x = L - L_0$ restando as lonxitudes da lonxitude inicial (L_0 = 21,3 cm), e pásanse os resultados a metros

- os pesos, da expresión $P = m \cdot g$, usando os valores das masas en kg
- os valores da constante do resorte da expresión da lei de Hooke, $k = P / \Delta x$

Masa	(g)	m	20,2	30,2	40,3	50,3	60,4	70,5
Lonxitude	(cm)	L	27,6	30,9	34	37,2	40,5	43,6
Alongamento	(cm)	$\Delta x = L - L_0$	6,3	9,6	12,7	15,9	19,2	22,3
Masa	(kg)	m	0,0202	0,0302	0,0403	0,0503	0,0604	0,0705
Peso	(N)	$P = m \cdot g$	0,198	0,296	0,395	0,493	0,592	0,691
Alongamento	(m)	Δx	0,063	0,096	0,127	0,159	0,192	0,223
Constante	(N/m)	$k = P / \Delta x$	3,1422	3,0829	3,1098	3,1003	3,0829	3,0982

O valor medio da constante é:

$$k = (3{,}14 + 3{,}08 + 3{,}11 + 3{,}10 + 3{,}08 + 3{,}10) / 6 = 3{,}10 \text{ N/m}$$

O cálculo da incerteza limítase ao uso apropiado das cifras significativas.
El valor de la constante, tendo en conta que o valor de g e algúns valores de alongamentos só teñen dúas cifras significativas, é:

$$k = (3{,}1 \pm 0{,}1) \text{ N/m}$$

9. Se temos un resorte de constante elástica coñecida, como podemos saber o valor dunha masa descoñecida? Describe as experiencias que debemos realizar para logralo.

(P.A.U. Xuño 16)

Solución:

Colgaríase o resorte cun prato de balanza e anotaríase a posición do prato, medida cunha regra vertical: y_1
Sen mover a regra, colocaríase a masa no prato e mediríase e anotaríase a nova posición do prato: y_2
Calcularíase o alongamento $\Delta y = y_2 - y_1$.
Coñecido o valor da constante podería calcularse a forza de recuperación elástica pola ecuación de Hooke

$$F = - k \cdot \Delta y$$

Como no equilibrio estático entre a forza elástica e o peso do obxecto son iguais:

$$k \cdot \Delta y = m \cdot g$$

A masa calcúlase despexándoa na ecuación anterior.

$$m = \frac{k \cdot \Delta y}{g}$$

10. Unha vez realizada a experiencia do resorte para determinar a constante elástica, como indagarías o valor dunha masa descoñecida (método estático e dinámico)?

(P.A.U. Set. 13)

Solución:

Método estático.
Ver solución ao exercicio de xuño de 2016

Método dinámico.
Cólgase o obxecto do resorte, tírase cara abaixo un pouco e sóltase. Comprobado que o resorte só se move no eixe vertical, mídese o tempo de dez oscilacións completas t.
Calcúlase o período $T = t / 10$.
Calculando a constante elástica do resorte k, a masa do obxecto calcúlase da ecuación do período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$m=\frac{k\,T^2}{4\,\pi^2}$$

11. A constante elástica dun resorte medida polo método estático:
    a) Depende do tipo de material?
    b) Varía co período de oscilación?
    c) Depende da masa e lonxitude do resorte?

(P.A.U. Set. 05)

Solución:

a) Pódese dicir que dous resortes do mesmo material poden ter distinta constante elástica.

b) O método estático consiste en medir o alongamento que sofre un resorte cando colga del un obxecto de masa coñecida. Non se fai oscilar, polo que non se mide a relación entre o período de oscilación e a constante elástica. (No método dinámico o cálculo da constante elástica do resorte dá un resultado que se pode considerar constante)

c) Tampouco se comproba no laboratorio a dependencia entre a constante dun resorte e a súa masa nin a súa lonxitude. Damos por suposto que se mantén constante ao variar a lonxitude, xa que o resorte alárgase ao colgarlle un peso.

12. Na medida da constante elástica polo método dinámico:
    a) Inflúe a lonxitude do resorte?
    b) Aféctalle o número de oscilacións e a súa amplitude?
    c) Varía a frecuencia de oscilación ao colgarlle diferentes masas?

(P.A.U. Set. 06)

Solución:

Na medida da constante elástica dun resorte polo método dinámico mídese o tempo de varias oscilacións (10, por exemplo) para cada unha de varias masas colgadas do resorte. Da ecuación do período do resorte, determínase o valor de constante.

$$T=2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Na ecuación anterior vese que o período de oscilación dunha masa non depende nin da lonxitude do resorte, nin do número de oscilacións nin da amplitude, só da masa que oscila.
Como a frecuencia é a inversa do período, tamén a frecuencia depende da masa que oscila.

13. Explica, brevemente, as diferenzas no procedemento para calcular a constante elástica dun resorte (k) polo método estático e polo método dinámico.

(P.A.U. Set. 12, Xuño 08)

Solución:

No método estático cólganse varias masas m coñecidas, por exemplo pesas dunha balanza, dun resorte e mídense os alongamentos Δy producidos.
A constante determínase a partir a lei de Hooke:

$$F = -k \cdot \Delta y$$

$$k = m \cdot g \,/\, \Delta y$$

Calcúlase numericamente o valor medio.

No método dinámico apártase unha masa que colga dun resorte da posición de equilibrio e déixase oscilar, medindo o tempo de 10 oscilacións, calculando o período de oscilación, T, a constante harmónica $\omega^2 = 4\,\pi^2 / T^2$, e a constante do resorte k, da ecuación que relaciona a constante do resorte k coa a constante harmónica ω^2:

$$k = m \cdot \omega^2$$

Repítese con varias masas coñecidas e áchase o valor medio.

14. Describe brevemente o procedemento empregado no laboratorio para medir a constante elástica dun resorte polo método estático.

(P.A.U. Xuño 14, Xuño 10)

Solución:

O método estático, baséase na lei de Hooke:

$$F = -k \cdot \Delta y$$

Cólganse pesas de masa coñecida dun resorte e mídense os alongamentos producidos. A constante determínase:

- numericamente da media dos cocientes $k = m \cdot g / \Delta y$
- graficamente representando os alongamentos producidos fronte ás masas colgadas. O valor da constante obtense da pendente da recta da gráfica pola relación.

$$\text{pendente} = \; p_e = \frac{\Delta y}{\Delta m} = \frac{g\,\Delta y}{\Delta m\, g} = g\frac{\Delta y}{\Delta F} = \frac{g}{k}$$

● PÉNDULO SIMPLE

1. Na determinación de g cun péndulo simple, describe brevemente o procedemento e o material empregado.

(P.A.U. Xuño 06)

Solución:

Cólgase unha esfera maciza dun fío duns 2,00 m, facendo pasar o outro extremo por unha pinza no extremo dunha pola horizontal, suxeito a vareta vertical encaixada nunha base plana.
Axústase a lonxitude do fío a un 60 cm e mídese a súa lonxitude desde o punto de suspensión ata o centro da esfera. Apártase lixeiramente da posición de equilibrio e sóltase. Compróbase que oscila nun plano e a partir da 2ª ou 3ª oscilación mídese o tempo de 10 oscilacións. Calcúlase o período dividindo o tempo entre 10. Repítese a experiencia para comprobar que o tempo é practicamente o mesmo. Áchase o valor medio do período.
Axústase sucesivamente a lonxitude a 80, 100, 120, 150, 180 e 200 cm e repítese a experiencia para cada unha delas.
Unha vez obtidos os valores dos períodos T para cada lonxitude L do péndulo, pódese usar a ecuación do período do péndulo simple para calcular g, a aceleración da gravidade.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dos valores obtidos (que deben ser moi parecidos) áchase o valor medio.

2. Que influencia teñen na medida experimental de g cun péndulo simple, as seguintes variables?
   a) A masa.
   b) O número de oscilacións.
   c) A amplitude das oscilacións.

(P.A.U. Set. 04)

Solución:

A medida experimental de g baséase na medida de tempos dun número de oscilacións para calcular o período do péndulo, e, a partir da ecuación, calcular o valor de g.

a) Ningunha. A expresión do período T dun péndulo de lonxitude L é:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Onde g é a aceleración da gravidade.
A masa non aparece na expresión e non afecta o valor do período.

b) Ningunha. É conveniente que o número de oscilacións sexa da orde de 10 ou 20 para aumentar a precisión da medida.

c) Ningunha. Considérase que o comportamento se pode tomar como harmónico para ángulos menores de 15°. Sempre que as amplitudes sexan pequenas non influirán na medida de g.

3. Determina a aceleración da gravidade a partir dos seguintes datos experimentais.

EXPERIENCIA	1ª	2ª	3ª	4ª
Lonxitude do péndulo (m)	0,90	1,10	1,30	1,50
Tempo de 10 oscilacións (s)	18,93	21,14	22,87	24,75

(P.A.U. Set. 14)

Solución:

A ecuación do período dun péndulo é:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ao representar os cadrados dos períodos T^2 fronte ás lonxitudes L obtense unha recta.
Constrúese unha táboa para calcular os valores de T^2 e g ($g = 4\ \pi^2\ L\ /\ T^2$)

L (m)	t_{10} (s)	T (s)	T^2 (s²)	g (m·s⁻²)
0,90	18,93	1,893	3,59	9,92
1,10	21,14	2,114	4,47	9,72
1,30	22,87	2,287	5,23	9,81
1,50	24,75	2,475	6,13	9,67

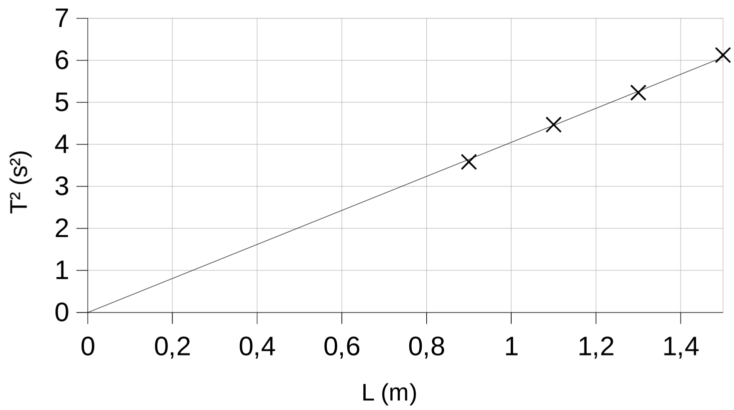
O valor medio de g calculado dos valores da táboa é:

$$g_m = 9{,}78\ \text{m·s}^{-2}$$

A pendente da recta obtida mediante un axuste por mínimos cadrados vale:

$$p = 4{,}05\ \text{s}^2/\text{m}$$

Da ecuación do período, a relación da pendente co valor da aceleración da gravidade é:



$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow p=\frac{\Delta T^2}{\Delta L}=\frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g=\frac{4\pi^2}{p}$$

$$g = 9{,}75 \text{ m·s}^{-2}$$

É un resultado similar ao do valor medio de g.

4. Quérese obter a aceleración da gravidade mediante un péndulo simple obténdose os seguintes valores:

Lonxitude do péndulo (cm)	60	70	80	90
Tempo en realizar 10 oscilacións (s)	15,5	16,8	17,9	19,0

Representa de forma aproximada, T^2 fronte a L calcula, a partir de dita gráfica, a aceleración da gravidade.

(P.A.U. Set. 16)

Solución:

A ecuación do período dun péndulo é:

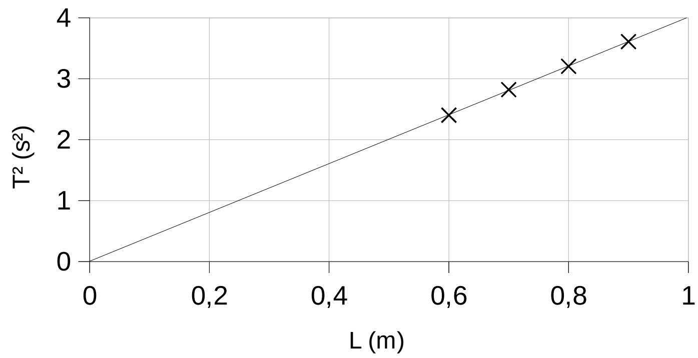
$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ao representar os cadrados dos períodos T^2 fronte ás lonxitudes L obtense unha recta.
Constrúese unha táboa para calcular os valores de T^2 e g ($g = 4\ \pi^2\ L\ /\ T^2$)

L (m)	t_{10} (s)	T (s)	T^2 (s²)	g (m·s⁻²)
0,60	15,5	1,55	2,40	9,86
0,70	16,8	1,68	2,82	9,79
0,80	17,9	1,79	3,20	9,86
0,90	19,0	1,90	3,61	9,84

O valor medio de g calculado dos valores da táboa é:

$$g_m = 9{,}84 \text{ m·s}^{-2}$$



A pendente da recta obtida mediante un axuste por mínimos cadrados vale:

$$p = 4{,}00 \text{ s}^2/\text{m}$$

Da ecuación do período, a relación da pendente co valor da aceleración da gravidade é:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow p=\frac{\Delta T^2}{\Delta L}=\frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g=\frac{4\pi^2}{p}$$

$$g = 9{,}87 \text{ m·s}^{-2}$$

É un resultado similar ao do valor medio de g.

5. Fanse 5 experiencias cun péndulo simple. En cada unha realízanse 50 oscilacións de pequena amplitude e mídese cun cronómetro o tempo empregado. A lonxitude do péndulo é L = 1 m. Con estes datos calcula a aceleración da gravidade.

Experiencia	1	2	3	4	5
Tempo(s) empregado en 50 oscilacións	101	100	99	98	102

(P.A.U. Xuño 09)

Solución:

Como só hai datos para unha lonxitude de péndulo só se pode calcular o valor medio do período e aplicar a ecuación do período do péndulo:

Experiencia	1	2	3	4	5
Tempo(s) empregado en 50 oscilacións	101	100	99	98	102
Período	2,02	2,00	1,98	1,96	2,04

O valor medio do período é:

$$T=\frac{\sum T_i}{N}=\frac{10,00\,[\text{s}]}{5}=2,00\text{ s}$$

O valor da aceleración g da gravidade calculado coa ecuación do período do péndulo é bastante aproximado ao valor real.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g=4\pi^2\frac{L}{T^2}=4\pi^2\frac{1,00\,[\text{m}]}{(2,00\,[\text{s}])^2}=\pi^2\text{ m/s}^2=9,87\text{ m/s}^2$$

6. Disponse dun péndulo simple de 1,5 m de lonxitude. Mídese no laboratorio o tempo de 3 series de 10 oscilacións obtendo 24,56 s, 24,58 s, 24,55 s. cal é o valor de g coa súa incerteza?

(P.A.U. Xuño 12)

Solución:

Como só hai datos para unha lonxitude de péndulo só se pode calcular o valor medio do período e aplicar a ecuación do período do péndulo:

Experiencia	1	2	3
Tempo(s) empregado en 10 oscilacións	24,56	24,58	24,55
Período	2,456	2,458	2,455

O valor medio do período é:

$$T=\frac{\sum T_i}{N}=\frac{7,369\,[\text{s}]}{3}=2,456\text{ s}$$

O valor da aceleración g da gravidade calculado da ecuación do período do péndulo:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g=4\pi^2\frac{L}{T^2}=4\pi^2\frac{1,5\,[\text{m}]}{(2,456\,[\text{s}])^2}=9,8\text{ m/s}^2$$

O cálculo da incerteza limítase ao uso apropiado das cifras significativas.

$$g = (9,8 \pm 0,1)\text{ m/s}^2$$

7. Determina a aceleración da gravidade coa súa incerteza a partir dos seguintes datos experimentais:

Lonxitude do péndulo (m)	0,60	0,82	0,90	1,05	1,33
Tempo de 20 oscilacións (s)	31,25	36,44	38,23	41,06	46,41

(P.A.U. Set. 15)

Solución:

Calcúlanse os valores de
- os períodos dividindo os tempos de 20 oscilacións entre 20.

- a aceleración da gravidade despexados da ecuación do período do péndulo: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Lonxitude do péndulo	(m)	L		0,60	0,82	0,90	1,05	1,33
Tempo de 20 oscilacións	(s)	t_{20}		31,25	36,44	38,23	41,06	46,41
Período	(s)	T	$= t_{20} / 20$	1,563	1,822	1,912	2,053	2,321
Aceleración da gravidade	(m·s⁻²)	g	$=\frac{4\pi^2 L}{T^2}$	9,702	9,752	9,724	9,835	9,751

O valor medio da aceleración da gravidade é:

$$\overline{g} = (9{,}702 + 9{,}752 + 9{,}724 + 9{,}835 + 9{,}751) / 5 = 9{,}753 \text{ m·s}^{-2}$$

O cálculo da incerteza limítase ao uso apropiado das cifras significativas.

$$g = (9{,}8 \pm 0{,}1) \text{ m·s}^{-2}$$

8. Na práctica de medida de g cun péndulo, como conseguirías (sen variar o valor de g) que o péndulo duplique o número de oscilacións por segundo?

(P.A.U. Set. 12, Set. 11, Xuño 04)

Solución:

Para conseguir duplicar a frecuencia, ou o que é o mesmo, diminuír á metade o período, habería que facer a lonxitude do péndulo 4 veces menor, xa que o período dun péndulo ideal vén dado pola ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Se $L' = L / 4$

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{L/4}{g}}=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{T}{2}$$

9. Cando no laboratorio mides g cun péndulo simple:
   a) Cantas oscilacións convén medir?
   b) Que precaucións débense tomar coa amplitude das oscilacións?
   c) Inflúe a masa do péndulo na medida de g?

(P.A.U. Xuño 05)

Solución:

a) Adóitanse medir 10 ou 20 oscilacións para aumentar a precisión do período, xa que este calcúlase dividindo o tempo de N oscilacións entre o número delas

$$T = t / N$$

Un número demasiado grande de oscilacións pode dar lugar a que cometamos erros ao contalas.

b) A amplitude das oscilacións debe ser pequena. En teoría unha aproximación aceptable é que sexan menores de 15°. Como non usamos un transportador de ángulos, separaremos o menos posible o fío da vertical, especialmente cando a lonxitude do péndulo sexa pequena.

c) Non inflúe. A ecuación do período T do péndulo é independente da masa:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Só depende da lonxitude L do péndulo. Compróbase isto no laboratorio substituíndo a masa e volvendo medir o período (ou medindo os períodos de distintos péndulos da mesma lonxitude pero dos que colgan distintas masas)

10. Comenta brevemente a influencia que teñen na medida de *g* cun péndulo: a amplitude de oscilacións, o número de medidas, a masa do péndulo.

(P.A.U. Set. 10)

Solución:

O péndulo describe un movemento oscilatorio circular ao redor da posición de equilibrio. Cando o ángulo é moi pequeno e sexa aplicable a aproximación sen $\varphi = \varphi$, o movemento será harmónico simple cun período

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Onde L é a lonxitude do péndulo.
No laboratorio mídese a lonxitude dun péndulo e faise oscilar cunha amplitude pequena. Mídese o tempo de dez oscilacións, calcúlase o período e a partir del, o valor da aceleración da gravidade despexada da ecuación anterior:

$$g=\frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Nesa ecuación pode verse que o valor de g non depende nin da amplitude da oscilación nin da masa do péndulo. Pero se a amplitude das oscilacións non é pequena, o movemento xa non é harmónico simple e a ecuación anterior deixa de ser válida.
En canto ao número de medidas, canto maior sexa, menor será o erro do valor medio e máis exacto o resultado.

11. Na medida experimental da aceleración da gravidade *g* cun péndulo simple, que precaucións débense tomar con respecto á amplitude das oscilacións e con respecto á medida do período de oscilación?

(P.A.U. Xuño 13)

Solución:

A amplitude das oscilacións debe ser pequena. En teoría unha aproximación aceptable é que sexan menores de 15°. Como non usamos un transportador de ángulos, separaremos o menos posible o fío da vertical, especialmente cando a lonxitude do péndulo sexa pequena.

Adóitanse medir 10 ou 20 oscilacións para aumentar a precisión do período, e diminuír o erro relativo que daría a medida dunha soa oscilación.
Un número demasiado grande de oscilacións pode dar lugar a que cometamos erros ao contalas.

12. Explica como se pode determinar a aceleración da gravidade utilizando un péndulo simple, e indica o tipo de precaucións que debes tomar á hora de realizar a experiencia.

(P.A.U. Xuño 16, Xuño 15)

Solución:

Cólgase unha esfera maciza dun fío duns 2,00 m, facendo pasar o outro extremo por unha pinza no extremo dun brazo horizontal, suxeito a unha vareta vertical encaixada nunha base plana.
Axústase a lonxitude do fío a un 60 cm e mídese a súa lonxitude desde o punto de suspensión ata o centro da esfera. Apártase lixeiramente da posición de equilibrio e sóltase. Compróbase que oscila nun plano e a partir da 2ª ou 3ª oscilación mídese o tempo de 10 oscilacións. Calcúlase o período dividindo o tempo entre 10. Repítese a experiencia para comprobar que o tempo é practicamente o mesmo. Áchase o valor medio do período.

Axústase sucesivamente a lonxitude a 80, 100, 120, 150, 180 e 200 cm e repítese a experiencia para cada unha delas.
Unha vez obtidos os valores dos períodos T para cada lonxitude L do péndulo, pódese usar a ecuación do período do péndulo simple para calcular g, a aceleración da gravidade.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dos valores obtidos (que deben ser moi parecidos) áchase o valor medio.

A amplitude das oscilacións debe ser pequena. En teoría unha aproximación aceptable é que sexan menores de 15º. Como non usamos un transportador de ángulos, separaremos o menos posible o fío da vertical, especialmente cando a lonxitude do péndulo sexa pequena.
Adóitanse medir 10 ou 20 oscilacións para aumentar a precisión do período, e diminuír o erro relativo que daría a medida dunha soa oscilación.
Un número demasiado grande de oscilacións pode dar lugar a que cometamos erros ao contalas.

Actualizado: 21/02/24

Cuestións e problemas das [Probas de avaliación de Bacharelato para o acceso á Universidade] (A.B.A.U. e P.A.U.) en Galiza.
[Respostas] e composición de [Alfonso J. Barbadillo Marán].

Sumario

VIBRACIÓNS E ONDAS

PROBLEMAS....................1
M.H.S.....................*1*
Péndulo....................*17*
Ecuación de onda....................*20*
Dioptrio plano....................*37*
CUESTIÓNS....................40
M.H.S.....................*40*
Características e ecuacións das ondas....................*44*
Dioptrio plano....................*53*
LABORATORIO....................*56*
Resorte....................*56*
PÉNDULO SIMPLE....................*64*

Índice de probas P.A.U.

2004
1. (xuño) 9, 36, 52, 56, 68
2. (set.) 34, 43, 59, 65
2005
1. (xuño) 33, 52, 55, 68
2. (set.) 32, 51, 55, 63
2006
1. (xuño) 31, 51, 60, 64
2. (set.) 40, 51, 63
2007
1. (xuño) 10, 30, 50
2. (set.) 11, 29, 50, 54
2008
1. (xuño) 43, 50, 63
2. (set.) 3, 27, 54
2009
1. (xuño) 12, 26, 49, 66
2. (set.) 45, 49, 56
2010
1. (xuño) 25, 48, 64
2. (set.) 2, 23, 53, 69
2011
1. (xuño) 17, 48, 57 s.
2. (set.) 22, 39, 47, 60, 68
2012
1. (xuño) 41, 47, 59, 67
2. (set.) 4, 42, 63, 68
2013
1. (xuño) 14, 38, 46, 56, 69
2. (set.) 18, 46, 62
2014
1. (xuño) 43, 45, 64
2. (set.) 7, 37, 65
2015
1. (xuño) 1, 21, 53, 61, 69
2. (set.) 16, 45, 67
2016
1. (xuño) 20, 44, 62, 69
2. (set.) 5, 44, 66