Gravitación

Método, aproximacións e recomendacións

◊ PROBLEMAS

● Satélites

1. O Sentinel-1 é un satélite artificial de órbita circular polar da Axencia Espacial Europea dentro do Programa Copérnico destinado á monitorización terrestre e dos océanos. Está situado a 693 km sobre a superficie terrestre.
   a) Cantas voltas dá á Terra cada día?
   b) Que velocidade houbo que proporcionarlle no lanzamento para poñelo en órbita?
   Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N m² kg⁻²; M(T) = 5,97·10²⁴ kg; R(T) = 6,37·10⁶ m. *(A.B.A.U. extr. 23)*
   Rta.: a) f = 14,6 día⁻¹; b) v = 8,29·10³ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Altura da órbita	h = 693 km = 6,93·10⁵ m
Masa da Terra	M = 5,97·10²⁴ kg
Raio da Terra	R = 6,37·10⁶ m
Constante da gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Voltas que dá á Terra cada día (frecuencia)	f
Velocidade desde a superficie para poñelo en órbita	v
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, *m*, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

a) O raio da órbita é:

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6{,}93 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Calcúlase la velocidade orbital substituíndo os valores dos datos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}}{7{,}06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 7{,}51 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{7{,}51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 5{,}91 \cdot 10^3 \text{ s} = 1{,}64 \text{ h}$$

A frecuencia é a inversa o período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}64 \text{ [h]}} \frac{24{,}0 \text{ [h]}}{1 \text{ [día]}} = 14{,}6 \text{ día}^{-1}$$

b) A enerxía que hai que comunicarlle ao satélite na superficie dun planeta é a diferenza entre a que terá en órbita e a que ten no chan:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{chan})$$

Calcúlase a enerxía potencial na órbita, en función da masa do satélite:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ [kg]} \cdot m}{7{,}06 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = -5{,}64 \cdot 10^7 m \text{ J}$$

Calcúlase a enerxía cinética na órbita, en función da masa do satélite:

$$E_c = m \cdot (7{,}51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 2{,}82 \cdot 10^7 \; m \text{ J}$$

A enerxía cinética é a metade e de signo contrario que a enerxía potencial.
A enerxía (mecánica) total é a suma das enerxías cinética e potencial, e vale o mesmo que a enerxía cinética, pero é negativa.

$$E = E_c + E_p = 2{,}82 \cdot 10^7 \; m \text{ [J]} - 5{,}64 \cdot 10^7 \; m \text{ [J]} = -2{,}82 \cdot 10^7 \; m \text{ J}$$

No chan, a enerxía cinética é desprezable. A enerxía potencial no chan, en función da masa do satélite, é:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{R}=-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5,97\cdot 10^{24}\,[\mathrm{kg}]\cdot m}{6,37\cdot 10^{6}\,[\mathrm{m}]}=-6,25\cdot 10^{7}\,m\ \mathrm{J}$$

A enerxía que hai que comunicarlle ao satélite na superficie, en función da masa do satélite, é:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{chan}) = -2,82\cdot 10^{7}\ m\ [\mathrm{J}] - (-6,25\cdot 10^{7}\ m\ [\mathrm{J}]) = 3,43\cdot 10^{7}\ m\ \mathrm{J}$$

A velocidade que se lle debe comunicar é:

$$v=\sqrt{\frac{2\,E}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3,43\cdot 10^{7}\,m}{m}}=8,29\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

2. Un pequeno satélite xira ao redor da Lúa orbitando nunha circunferencia de 3 veces o raio da Lúa.
   a) Calcula o período do satélite e determina a enerxía mecánica total que posúe o satélite na súa órbita.
   b) Deduce e calcula a velocidade de escape dende a Lúa.
   DATOS: G = 6,67·10⁻¹¹ N m² kg⁻²; M(L) = 7,35·10²² kg; R(L) = 1740 km; m(satélite) = 1500 kg.
   (A.B.A.U. ord. 23)
   Rta.: a) $T = 3,38\cdot 10^{4}$ s = 9 h 24 min; $E = -7,0\cdot 10^{8}$ J; b) v_e = 2,37 km/s (chan) ou 969 m/s desde a órbita.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio da órbita	$r = 3\cdot 1,74\cdot 10^{6}$ m = $5,22\cdot 10^{6}$ m
Masa da Lúa	$M = 7,35\cdot 10^{22}$ kg
Raio da Lúa	R = 1740 km = $1,74\cdot 10^{6}$ m
Constante da gravitación universal	$G = 6,67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$
Masa del satélite	m = 1500 kg = $1,50\cdot 10^{3}$ kg
Incógnitas	
Período da órbita	T
Enerxía mecánica do satélite	E
Velocidade de escape desde a Lúa	v_e
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = \frac{1}{2}\, m\cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tangencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}}=\overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}}=m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

a) Calcúlase la velocidade orbital substituíndo os valores dos datos:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot7{,}35\cdot10^{22}\ [\mathrm{kg}]}{5{,}22\cdot10^{6}\ [\mathrm{m}]}}=969\ \mathrm{m/s}$$

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot3{,}14\cdot1{,}75\cdot10^{6}\ [\mathrm{m}]}{969\ [\mathrm{m/s}]}=3{,}38\cdot10^{4}\ \mathrm{s}=9\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$$

Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot7{,}25\cdot10^{22}\ [\mathrm{kg}]\cdot1{,}50\cdot10^{3}\ [\mathrm{kg}]}{969\ [\mathrm{m}]}=-1{,}41\cdot10^{9}\ \mathrm{J}$$

Calcúlase a enerxía cinética:

$$E_c=1{,}50\cdot10^3\ [\mathrm{kg}]\cdot(969\ [\mathrm{m/s}])^2/2=7{,}04\cdot10^8\ \mathrm{J}$$

A enerxía cinética é a metade e de signo contrario que a enerxía potencial.
A enerxía (mecánica) total é a suma das enerxías cinética e potencial, e vale o mesmo que a enerxía cinética, pero é negativa.

$$E=E_c+E_p=7{,}04\cdot10^8\ [\mathrm{J}]-1{,}41\cdot10^9\ [\mathrm{J}]=-7{,}0\cdot10^8\ \mathrm{J}$$

b) Se se entende a pregunta como «velocidade de escape desde a superficie da Lúa».
A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E=(E_c+E_p)_\infty-(E_c+E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.

Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$$

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ [\mathrm{kg}]}{1{,}74 \cdot 10^{6}\ [\mathrm{m}]}} = 2{,}37 \cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s} = 2{,}37\ \mathrm{km/s}$$

Se, polo contrario, deséxase saber a velocidade de escape desde a órbita:
Se a dirección de escape é perpendicular á dirección do movemento do satélite, só hai que ter en conta a súa enerxía potencial, xa que a compoñente da súa velocidade na dirección de escape é cero.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despexando, a velocidade de escape dun satélite, nunha dirección perpendicular á órbita, queda:

$$v_{e\ o\uparrow} = \sqrt{2\, G \frac{M}{r}}$$

Se a dirección de escape é paralela á dirección do movemento do satélite, hai que ter en conta a súa enerxía cinética.
A enerxía cinética dun obxecto de masa m, que se move con velocidade v, é directamente proporcional ao cadrado da súa velocidade.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

A enerxía potencial gravitacional dun satélite de masa m, que xira arredor dun astro de masa M, nunha órbita de radio r, é inversamente proporcional ao raio da órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Onde G é a constante da gravitación universal.
A enerxía mecánica de un corpo de masa m, que se atopa en órbita de raio r arredor dun astro de masa M, é a suma das súas enerxías cinética e potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right)$$

A velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor dun astro de masa M é:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Substituíndo v^2, a expresión da enerxía cinética queda:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

A expresión da enerxía mecánica queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Se o sentido de escape é o mesmo que o de avance do satélite, a enerxía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m\cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}\right)=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despexando a velocidade de escape no sentido de avance dun satélite en órbita, queda:

$$v_{e\,o\rightarrow}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Se o sentido de escape fose oposto ao do avance do satélite, o que suporía un desperdicio de enerxía, habería que comunicarlle unha velocidade dobre da que tiña en órbita, para que alcance o mesmo valor de velocidade pero en na dirección oposta, máis esta velocidade adicional:

$$v_{e\,o\leftarrow}=\sqrt{\frac{3}{2}G\frac{M}{r}}$$

Tendo en conta que a velocidade de escape é a velocidade mínima, o lóxico é tomar a velocidade de escape no sentido de avance dun satélite:

$$v_{e\,o}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

$$v_{e\,o}=\sqrt{G\frac{M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\,[\mathrm{kg}]}{5{,}22\cdot 10^{6}\,[\mathrm{m}]}}=969\ \mathrm{m/s}$$

3. Un satélite artificial ten unha masa de 200 kg e unha velocidade constante de 7,00 km·s⁻¹.
   a) Calcula a altura á que orbita.
   b) Se nese momento se lle fornece unha enerxía igual á enerxía cinética que xa ten, calcula a que distancia da Terra podería chegar.

   Datos: g = 9,81 m·s⁻²; R(T) = 6,37·10⁶ m. *(A.B.A.U. extr. 22)*

   Rta.: a) h = 1750 km; b) r = ∞.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidade do satélite na súa órbita arredor da Terra.	v = 7,00 km/s = 7,00·10³ m/s
Raio da Terra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,80 m/s²
Incógnitas	
Altura da órbita	h
A que distancia podería chegar cunha enerxía igual á enerxía cinética	r_b
Outros símbolos	
Masa do satélite	m
Raio da órbita	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$

Ecuacións

Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio *r* e período *T*	$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, *v*, nunha traxectoria circular de radio *r*	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, *m*, que se move cunha velocidade, *v*	$E_c = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa *M* sobre un satélite de masa *m* que xira arredor del nunha órbita de radio *r*, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, *G* é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, *v*, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio *r*, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, *m*, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right|=m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, *G*, ou da masa do astro, *M*, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0=G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

a) Despéxase o raio da órbita, na expresión da velocidade orbital, e substitúese $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \Rightarrow r=\frac{G \cdot M}{v^2}=\frac{g_0 \cdot R^2}{v^2}=\frac{9,81\,[\mathrm{m \cdot s^{-2}}] \cdot (6,37 \cdot 10^6\,[\mathrm{m}])^2}{(7,00 \cdot 10^3\,[\mathrm{m/s}])^2}=8,12 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

Calcúlase a altura restando o raio da Terra ao raio da órbita:

$$h = r - R = 8,12 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] - 6,37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] = 1,75 \cdot 10^6\ \mathrm{m} = 1750\ \mathrm{km}$$

Análise: Aínda que non se pode prever un valor, a altura obtida é positiva.

b) A enerxía mecánica dun satélite en órbita é igual a súa enerxía cinética cambiada de signo.

$$E = -E_c$$

A enerxía cinética dun obxecto de masa m, que se move con velocidade v, é directamente proporcional ao cadrado da súa velocidade.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

A enerxía potencial gravitacional dun satélite de masa m, que xira arredor dun astro de masa M, nunha órbita de radio r, é inversamente proporcional ao raio da órbita.

$$E_p=-G\frac{M \cdot m}{r}$$

Onde G é a constante da gravitación universal.
A enerxía mecánica de un corpo de masa m, que se atopa en órbita de raio r arredor dun astro de masa M, é a suma das súas enerxías cinética e potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m \cdot v^2+\left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right)$$

A velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor dun astro de masa M é:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Substituíndo v^2, a expresión da enerxía cinética queda:

$$E_c=\frac{1}{2}m \cdot v^2=\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}$$

A expresión da enerxía mecánica queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m \cdot v^2-G\frac{M \cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}-G\frac{M \cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}$$

Ao comunicarlle unha enerxía de igual valor ao da súa enerxía cinética, a enerxía que terá será cero. Con ela poderá afastarse da Terra a unha distancia «infinita», posto que no infinito, a enerxía potencial é nula:

$$E_p=-G\frac{M \cdot m}{r}=0 \Rightarrow r=-G\frac{M \cdot m}{E_p}=-G\frac{M \cdot m}{0}=\infty$$

4. O período de Xúpiter na súa órbita arredor do Sol é aproximadamente 12 veces maior que o da Terra na súa correspondente órbita. Considerando circulares as órbitas dos dous planetas, determine:
   a) A relación entre os raios das devanditas órbitas.
   b) A relación entre as aceleracións dos dous planetas nas súas respectivas órbitas.

(A.B.A.U. ord. 22)

Rta.: a) $r_2 / r_1 = 5,2$; b) $a_2 / a_1 = 0,036$.

Datos	***Cifras significativas: 2***
Período de Xúpiter na súa órbita arredor do Sol	$T_2 = 12\ T_1$
Incógnitas	
Relación entre os raios das órbitas de Xúpiter e da Tierra	r_2 / r_1
Relación entre as aceleracións nas súas respectivas órbitas.	a_2 / a_1
Outros símbolos	
Período da Terra arredor do Sol	T_1
Masa do Sol	M
Distancias de Xúpiter (2) e da Terra (1) ao Sol	r_2, r_1
Aceleracións de Xúpiter (2) e dea Tierra (1) nas súas respectivas órbitas.	a_2, a_1
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \overline{F} = m \cdot \overline{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:

A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos, T, dos planetas no seu movemento arredor do Sol, son directamente proporcionais aos cubos dos semieixes maiores das súas órbitas elípticas.
Se se fai a aproximación de que as órbitas son practicamente circulares de raio r, a expresión matemática desta lei sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Isto pódese demostrar para órbitas circulares.
A forza gravitacional, $\overline{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{F} = \overline{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dous planetas, 1 e 2, dividimos as expresións correspondentes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G \cdot M} \cdot T_1^2}{\cancel{G \cdot M} \cdot T_2^2}$$

a) Substitúese o dato:

$$\frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{(12\,T_1)^2}{T_1^2} = \frac{144\,\cancel{T_1^2}}{\cancel{T_1^2}} = 144$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{144} = 5{,}2$$

Análise: O raio da órbita de Xúpiter é maior que o da Terra, como era de esperar.

b) Da lei da gravitación universal e da 2.ª lei de dinámica, ambas de Newton, pódese establecer unha relación entre a aceleración, a, dun planeta na súa órbita e a súa distancia, r, ao Sol.

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot a$$

Despéxase a aceleración:

$$a = \frac{F_G}{m} = \frac{G\frac{M\,\cancel{m}}{r^2}}{\cancel{m}} = \frac{G\,M}{r^2}$$

Divídense as expresións de Xúpiter (2) e da Terra (1):

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{\cancel{G\,M}}{r_2^2}}{\frac{\cancel{G\,M}}{r_1^2}} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Substitúese o resultado do apartado anterior:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{1}{5{,}2^2}=0{,}036$$

5. En 1969 a nave Apolo 11 orbitou arredor da Lúa a unha distancia media do centro da Lúa de 1850 km. Se a masa da Lúa é de 7,36·10²² kg e supoñendo que a órbita foi circular, calcula:
 a) A velocidade orbital do Apolo 11.
 b) O período con que a nave describe a órbita.
 Dato: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻². *(A.B.A.U. extr. 21)*
 Rta.: a) v = 1630 m/s; b) T = 7,15·10³ s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa da Lúa	M = 7,36·10²² kg
Raio da órbita	r = 1850 km = 1,85·10⁶ m
Constante da gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Valor da velocidade lineal do satélite	v
Período da órbita	T
Outros símbolos	
Masa do satélite	m
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$

Solución:

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\vec{F}=\vec{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

a) Calcúlase a velocidade orbital substituíndo os valores dos datos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ [\text{kg}]}{1{,}85 \cdot 10^6\ [\text{m}]}} = 1{,}63 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 1{,}63\ \text{km/s}$$

b) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}85 \cdot 10^6\ [\text{m}]}{1{,}63 \cdot 10^3\ [\text{m/s}]} = 7{,}15 \cdot 10^3\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 59\ \text{min}$$

6. A aceleración da gravidade na superficie dun planeta esférico de 4100 km de raio é 7,2 m·s⁻². Calcula:
   a) A masa do planeta.
   b) A enerxía mínima necesaria que hai que comunicar a un minisatélite de 3 kg de masa para lanzalo dende a superficie do planeta e situalo a 1000 km de altura sobre a mesma, nunha órbita circular arredor do planeta.

   Dato: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m² ·kg⁻². *(A.B.A.U. extr. 20)*

   Rta.: a) $M = 1{,}8 \cdot 10^{24}$ kg; b) $\Delta E = 5{,}30 \cdot 10^7$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio do planeta	R = 4100 km = 4,10·10⁶ m
Aceleración da gravidade na superficie do planeta	g_0 = 7,20 m/s²
Masa do satélite	m = 3,00 kg
Altura da órbita	h = 1000 km = 1,00·10⁶ m
Constante da gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Masa do planeta	M
Enerxía que hai que comunicarlle desde a superficie do planeta	ΔE
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Peso dun obxecto de masa m na superficie dun planeta cuxa aceleración da gravidade é g_0	$P = m \cdot g_0$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Na superficie do planeta, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

Despéxase a masa do planeta:

$$M = \frac{g_0 \cdot R^2}{G} = \frac{7{,}20\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (4{,}10 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}]} = 1{,}81 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

b) A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial.
A expresión da enerxía potencial é:

$$E_\mathrm{p} = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Suponse que o satélite está en repouso na superficie do planeta, polo que só ten enerxía potencial. Calcúlase esta enerxía potencial:

$$E_\mathrm{p}(\text{chan}) = -G \frac{M \cdot m}{R} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot \frac{1{,}81 \cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}] \cdot 3{,}00\ [\mathrm{kg}]}{4{,}10 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]} = -8{,}86 \cdot 10^7\ \mathrm{J}$$

Calcúlase o raio da órbita circular sumando a altura de 1000 km ao raio do planeta:

$$r = R + h = 4{,}10 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] + 1{,}00 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] = 5{,}10 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

Calcúlase a enerxía potencial na órbita:

$$E_\mathrm{p}(\text{órbita}) = -G \frac{M \cdot m}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot \frac{1{,}81 \cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}] \cdot 3{,}00\ [\mathrm{kg}]}{5{,}10 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]} = -7{,}12 \cdot 10^7\ \mathrm{J}$$

Para calcular a enerxía cinética na órbita necesítase calcular a velocidade orbital.
A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_\mathrm{r}$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_\mathrm{G} = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_\mathrm{N} = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left| \sum \vec{\boldsymbol{F}} \right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_\mathrm{G} = m \cdot a_\mathrm{N}$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Substitúense os valores:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 1{,}81\cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}]}{5{,}10\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}}=4{,}87\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=4{,}87\ \mathrm{km/s}$$

Calcúlase a enerxía cinética en órbita:

$$E_c(\text{órbita}) = m \cdot v^2 / 2 = [3{,}00\ [\mathrm{kg}] \cdot (4{,}87\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2] / 2 = 3{,}56\cdot 10^7\ \mathrm{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das súas enerxías cinética e potencial:

$$E(\text{órbita}) = E_c(\text{órbita}) + E_p(\text{órbita}) = 3{,}56\cdot 10^7\ [\mathrm{J}] + (-7{,}12\cdot 10^7\ [\mathrm{J}]) = -3{,}56\cdot 10^7\ \mathrm{J}$$

Análise: Pódese demostrar que a enerxía mecánica ten o valor oposto ao da enerxía cinética substituíndo $G \cdot M / r$ por v^2 na expresión da enerxía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}m\cdot v^2-m\cdot v^2=-\frac{1}{2}m\cdot v^2=-E_c$$

A enerxía que hai que comunicarlle ao satélite na superficie dun planeta é a diferenza entre a que terá en órbita e a que ten no chan:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{chan}) = -3{,}56\cdot 10^7\ [\mathrm{J}] - (-8{,}86\cdot 10^7[\mathrm{J}]) = 5{,}30\cdot 10^7\ \mathrm{J}$$

7. Un satélite artificial describe órbitas circulares arredor da Terra a unha altura de 350 km respecto da superficie terrestre. Calcula:
   a) A velocidade orbital do satélite.
   b) O seu período de revolución.
   c) Compara o valor da súa aceleración centrípeta co valor da intensidade do campo gravitacional g a esa distancia da Terra. Que consecuencias pódense extraer deste resultado?
   Datos: $R(\mathrm{T}) = 6{,}37\cdot 10^6$ m; $g_0 = 9{,}81$ m/s². *(A.B.A.U. ord. 19)*
   Rta.: a) $v = 7{,}70$ km/s m; b) $T = 1$ h 31 min.; c) $g = 8{,}81$ m/s².

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio da Terra	$R = 6{,}37\cdot 10^6$ m
Altura da órbita	$h = 350$ km $= 3{,}50\cdot 10^5$ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	$g_0 = 9{,}81$ m/s²
Incógnitas	
Velocidade orbital do satélite	v
Período de revolución	T
Aceleración centrípeta	a
Intensidade do campo gravitacional a esa distancia da Terra	g_h
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Valor da velocidade do satélite na órbita arredor da Terra	v
Constante da gravitación universal	G
Raio da órbita	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$

Ecuacións

Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Intensidade do campo gravitacional terrestre a unha distancia r do centro	$g = \frac{F_G}{m} = G \frac{M}{r^2}$

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

a) Calcúlase o raio da órbita vale:

$$r = R + h = 6{,}37·10^6\ [\text{m}] + 3{,}50·10^5\ [\text{m}] = 6{,}72·10^6\ \text{m}$$

Calcúlase a velocidade orbital substituíndo $G · M$ por $g_0 · R^2$.

$$=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{6{,}72\cdot 10^6\ [\text{m}]}}=7{,}70\cdot 10^3\ \text{m/s} \quad v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

b) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T} \Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v} =\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}72\cdot 10^7\ [\text{m}]}{7{,}70\cdot 10^3\ [\text{m/s}]}=5{,}49\cdot 10^3\ \text{s}=1\ \text{h}\ 31\ \text{min}$$

c) A intensidade do campo gravitacional calcúlase substituíndo $G · M$ por $g_0 · R^2$:

$$g_\text{h}=\frac{F_\text{G}}{m}=G\frac{M}{r^2} =\frac{g_0\cdot R^2}{r^2}=\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{(6{,}72\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}=8{,}81\ \text{m/s}^2$$

Calcúlase a aceleración centrípeta:

$$a_\text{N}=\frac{v^2}{r} =\frac{(7{,}70\cdot 10^3\ [\text{m/s}])^2}{6{,}72\cdot 10^6\ [\text{m}]}=8{,}81\ \text{m/s}^2$$

Análise: O resultado ten que ser o mesmo porque a velocidade calcúlase supoñendo que a única forza sobre o satélite é a forza gravitacional e, pola 2.ª lei de Newton, igualando a forza gravitacional ao produto masa por aceleración centrípeta.

8. Un satélite GPS describe órbitas circulares arredor da Terra, dando dúas voltas á Terra cada 24 h. Calcula:
   a) A altura da súa órbita sobre a superficie terrestre.
   b) A enerxía mecánica.
   c) O tempo que tardaría en dar unha volta á Terra se o facemos orbitar a unha altura dobre.
   Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; M_T = 5,98·10²⁴ kg; R_T = 6,37·10⁶ m; masa do satélite = 150 kg.
   (A.B.A.U. extr. 17)

   Rta.: a) h = 2,02·10⁷ m; b) E = −1,12·10⁹ J; c) T_c = 28 h.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia da órbita	f = 2 voltas/24 h
Raio da Terra	$R = 6{,}37·10^6$ m
Masa do satélite	m = 150 kg
Masa da Terra	$M = 5{,}98·10^{24}$ kg
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Altura da órbita	h
Enerxía mecánica	E
O período, se a altura fose o dobre	T_c
Outros símbolos	
Raio da órbita orixinal	r
Valor da velocidade do satélite na órbita orixinal	v
Novo raio da órbita	r_c
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_\text{G}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\overline{F} = m · \overline{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_\text{N}=\frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m · v^2$

Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito) $E_p = -G \dfrac{M \cdot m}{r}$

Enerxía mecánica $E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Despéxase o raio da órbita, r, e substitúense valores:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

A frecuencia é a inversa do período. O período orbital calcúlase a partir da frecuencia:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{24\text{ h}}{2}=12\text{ h}=4{,}32\cdot 10^4\text{ s}$$

Calcúlase o raio da órbita:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}](4{,}32\cdot 10^4\,[\text{s}])^2}{4\cdot 3{,}14^2}}=2{,}66\cdot 10^7\text{ m}$$

Calcúlase a altura restando o raio da Terra ao raio da órbita:

$$h = r - R = 2{,}66\cdot10^7 - 6{,}37\cdot10^6 = 2{,}02\cdot10^7\text{ m}$$

Análise: Aínda que non se pode prever un valor, a altura obtida é positiva.

b) Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_\text{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}]\cdot 150\,[\text{kg}]}{2{,}66\cdot 10^7\,[\text{m}]}=-2{,}25\cdot 10^9\text{ J}$$

Calcúlase a enerxía cinética, substituíndo v^2 por $G\,M\,/\,r$:

$$E_\text{c}=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}=1{,}12\cdot10^9\text{ J}$$

A enerxía cinética é a metade e de signo contrario que a enerxía potencial.
A enerxía (mecánica) total é a suma das enerxías cinética e potencial, e vale o mesmo que a enerxía cinética, pero é negativa.

$$E = E_\text{c} + E_\text{p} = 1{,}12\cdot10^9\text{ [J]} - 2{,}25\cdot10^9\text{ [J]} = -1{,}12\cdot10^9\text{ J}$$

c) Se a altura fose o dobre, o novo raio da órbita valería:

$$r_\text{c} = R + 2\,h = 6{,}37\cdot10^6 + 2\cdot 2{,}0\cdot10^7 = 4{,}7\cdot10^7\text{ m}$$

A velocidade do satélite valería:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}]}{4{,}7\cdot 10^7\,[\text{m}]}}=2{,}9\cdot 10^3\text{ m/s}=2{,}9\text{ km/s}$$

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 4{,}7\cdot 10^7\,[\text{m}]}{2{,}9\cdot 10^3\,[\text{m/s}]}=1{,}0\cdot 10^5\text{ s}=28\text{ h}$$

Análise: O período dun satélite aumenta coa altura. O valor obtido é maior que o da altura inicial.

9. Un astronauta está no interior dunha nave espacial que describe unha órbita circular de raio 2 R_T. Calcula:
   a) A velocidade orbital da nave.
   b) A aceleración da gravidade na órbita da nave.
   c) Se nun instante dado, pasa á beira da nave espacial un obxecto de 60 kg en dirección á Terra cunha velocidade de 40 m·s⁻¹, acha a velocidade do obxecto ao chegar á superficie terrestre.

   Datos: R_T = 6370 km; g = 9,81 m·s⁻². *(A.B.A.U. ord. 17)*

   Rta.: a) v = 5,59 km/s; b) g_h = 2,45 m/s²; c) v_2 = 7,91·10³ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio da órbita	$r = 2\cdot R$
Raio da Terra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,81 m/s²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa do obxecto	$m = 60{,}0$ kg
Velocidade do obxecto ao pasar xunto á nave	$v_0 = 40{,}0$ m/s
Incógnitas	
Valor da velocidade da nave espacial na súa órbita arredor da Terra	v
Aceleración da gravidade na órbita da nave.	g_h
Valor da velocidade do obxecto ao chegar á superficie terrestre.	v_2
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \dfrac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G \dfrac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0=G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

a) Calcúlase a velocidade orbital substituíndo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{2\cdot R}}=\sqrt{\frac{g_0\cdot R}{2}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot 6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{2}}=5{,}59\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=5{,}59\ \mathrm{km/s}$$

Análise: Agárdase que un obxecto que se mova arredor da Terra teña unha velocidade duns poucos km/s. *O resultado de* 5,59 km/s *está de acordo con esta suposición.*

b) Calcúlase a aceleración da gravidade na órbita da nave a partir da 2.ª lei de Newton, substituíndo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$, e o raio, r, da órbita, por 2 R:

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}} \Rightarrow F_G = m \cdot g \Rightarrow \quad g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M\,\cancel{m}}{r^2}}{\cancel{m}}=\frac{G\,M}{r^2}=\frac{g_0\cdot R^2}{(2\cdot R)^2}=\frac{g_0}{4}=\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{4}=2{,}45\ \mathrm{m/s^2}$$

c) Como a forza gravitacional é unha forza conservativa, la enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, consérvase.
Calcúlase a enerxía potencial do obxecto ando pasa xunto á nave espacial:

$$E_{p1}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{2\cdot R}=-\frac{g_0\cdot R\cdot m}{2}=-\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot 6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]\cdot 60{,}0\ [\mathrm{kg}]}{2}=-1{,}87\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Calcúlase a súa enerxía cinética:

$$E_{c\,1} = m \cdot v_0^2 / 2 = 60{,}0\ [\mathrm{kg}] \cdot (40{,}0\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 4{,}80\cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

A enerxía mecánica do obxecto cando pasa xunto á nave espacial é a suma das súas enerxías cinética e potencial:

$$E = E_{c\,1} + E_{p\,1} = 4{,}80\cdot 10^4\ [\mathrm{J}] + (-1{,}87\cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = -1{,}87\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Calcúlase a enerxía potencial do obxecto cando chega á superficie da Terra:

$$E_{p2}=-G\frac{M\cdot m}{r}=--\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{R}=-g_0\cdot R\cdot m=-9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot 6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]\cdot 60{,}0\ [\mathrm{kg}]=-3{,}75\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Calcúlase a enerxía cinética do obxecto cando chega á superficie da Terra aplicando o principio de conservación da enerxía:

$$E_{c\,2} = E - E_{p\,2} = (-1{,}87\cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) - (-3{,}75\cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = 1{,}87\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Calcúlase a velocidade do obxecto ao chegar á superficie da Terra a partir da súa enerxía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 \Rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{2\cdot E_{c2}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}87\cdot 10^9\ [\mathrm{J}]}{60{,}0\ [\mathrm{kg}]}}=7{,}91\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

● Campo gravitacional

1. Unha nave sitúa un obxecto de 20 kg de masa entre a Terra e o Sol nun punto onde a forza gravitacional neta sobre o obxecto é nula. Calcula nese punto:
   a) A distancia do obxecto ao centro da Terra.
   b) A aceleración da Terra debida á forza que o obxecto exerce sobre ela.
   DATOS: G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; M(T) = 5,98×10²⁴ kg; M(S) = 2,00×10³⁰ kg;
   distancia Terra-Sol = 1,50×10¹¹ m. *(A.B.A.U. ord. 24)*
   Rta.: a) r = 2,59·10⁸ m; b) a = 1,99·10⁻²⁶ m/s².

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa da Terra	$M(\text{T}) = 5{,}98·10^{24}$ kg
Masa do Sol	$M(\text{S}) = 2{,}00·10^{30}$ kg
Masa do obxecto	$m = 20{,}0$ kg
Distancia Terra-Sol	$d = 1{,}50·10^{11}$ m
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Distancia do obxecto ao centro da Terra.	r
Aceleración da Terra debida á forza que o obxecto exerce sobre ela	a
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal. (Forza entre corpos esféricos ou puntuais)	$\vec{F} = -G\dfrac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

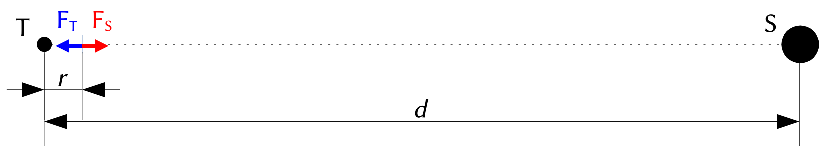
Solución:

a) A forza de atracción gravitacional entre dúas masas puntuais ou esféricas, M e m, vén dada pola lei da gravitación de Newton. G é a constante da gravitación universal e $\vec{u}_r$ o vector unitario na liña que une as masas.

$$\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Escríbese a ecuación da forza gravitacional sobre o obxecto, que é nula;

$$-G\frac{M(\text{S}) \cdot m}{(d-r)^2}\vec{u}_{r\text{S}} + \left(-G\frac{M(\text{T}) \cdot m}{r^2}\vec{u}_{r\text{T}}\right) = \vec{0}$$



Elíxese un sistema de coordenadas coa Terra na orixe, porque o punto onde se anula a forza ten que estar moito mías cerca da Terra que do Sol, que ten unha masa moito maior. O Sol sitúase no sentido positivo do eixe X.
O vector unitario da posición do Sol neste sistema $\vec{u}_{r\text{S}}$ é o vector $\vec{\mathbf{i}}$, unitario do eixe X en sentido positivo.
O vector unitario da Terra $\vec{u}_{r\text{T}}$, tomando o Sol coma orixe, é o vector unitario contrario $-\vec{\mathbf{i}}$.
Substitúense os vectores unitarios na ecuación e reordénase:

$$-G\frac{M(\text{S}) \cdot m}{(d-r)^2}\vec{\mathbf{i}} + \left(-G\frac{M(\text{T}) \cdot m}{r^2}(-\vec{\mathbf{i}})\right) = 0\,\vec{\mathbf{i}}$$

$$-\cancel{G}\frac{M(\text{S}) \cdot \cancel{m}}{(d-r)^2} + \cancel{G}\frac{M(\text{T}) \cdot \cancel{m}}{r^2} = 0$$

$$\frac{M(\text{S})}{(d-r)^2} = \frac{M(\text{T})}{r^2} \Rightarrow (d-r)^2 = \frac{M(\text{S})}{M(\text{T})}r^2 \Rightarrow d-r = \sqrt{\frac{M(\text{S})}{M(\text{T})}}\,r \Rightarrow d = r\left(1+\sqrt{\frac{M(\text{S})}{M(\text{T})}}\right)$$

Despéxase r e substitúense os valores:

$$r=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{M(\text{S})}{M(\text{T})}}}=\frac{1{,}50\cdot 10^{11}\ [\text{m}]}{1+\sqrt{\frac{2{,}00\cdot 10^{30}\ [\text{kg}]}{5{,}98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]}}}=2{,}59\cdot 10^{8}\ \text{m}$$

Análise: A distancia obtida é moito menor que a que hai entre o Sol e a Terra e o punto sitúase cerca da Terra.

b) Aplícase a 2.ª lei de Newton da Dinámica en módulos e despéxase a aceleración que produce a masa de 20 kg sobre o planeta Terra:

$$a=\frac{F}{M(\text{T})}=\frac{G\frac{m\cdot \cancel{M(\text{T})}}{r^2}}{\cancel{M(\text{T})}}=G\frac{m}{r^2}=6{,}667\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{20\ [\text{kg}]}{(2{,}59\cdot 10^{8}\ [\text{m}])^2}=1{,}99\cdot 10^{-26}\ \text{m/s}^2$$

2. A masa do planeta Marte é 0,107 veces a masa da Terra e o seu raio é 0,533 veces o raio da Terra. Calcula:
   a) O tempo que tarda un obxecto en chegar á superficie de Marte se se deixa caer desde unha altura de 50 m.
   b) A velocidade de escape dese obxecto desde a superficie do planeta.
   Datos: g = 9,81 m·s⁻²; R_T = 6,37·10⁶ m. *(A.B.A.U. ord. 21)*
   Rta.: a) t = 5,21 s; b) v_e = 5,01·10³ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de Marte	M_M = 0,107 M_T
Raio de Marte	R_M = 0,533 R_T
Altura desde a que se deixa caer	h = 50,0 m
Aceleración da gravidade na Terra	g_0 = 9,81 m/s²
Raio da Terra	R_T = 6,37·10⁶ m
Incógnitas	
Tempo que tarda en caer á superficie de Marte desde unha altura de 50 m	t
Velocidade de escape en Marte	v_e
Outros símbolos	
Masa da Terra	M_T
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal, en módulos. (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$
Peso dun obxecto de masa m na superficie dun planeta cuxa aceleración da gravidade é g_0	$P = m \cdot g_0$
Ecuación da caída libre (movemento uniformemente acelerado)	$h = v_0 \cdot t + ½\, g \cdot t^2$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Hai que calcular o valor da gravidade na superficie de Marte.
O peso dun obxecto preto da superficie da Terra é a forza coa que a Terra o atrae:

$$m\cdot g_T=G\frac{M_T\cdot m}{R_T^2}$$

Analogamente, o peso dun obxecto preto da superficie de Marte é a forza coa que a Marte o atrae:

$$m\cdot g_M=G\frac{M_M\cdot m}{R_M^2}$$

Dividindo a segunda ecuación entre a primeira, queda:

$$\frac{\cancel{m}\cdot g_M}{\cancel{m}\cdot g_T}=\frac{\cancel{G}\dfrac{M_M\cdot \cancel{m}}{R_M^2}}{\cancel{G}\dfrac{M_T\cdot \cancel{m}}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_M}{g_T}=\frac{M_M/M_T}{(R_M/R_T)^2}=\frac{0,107}{0,533^2}=0,375$$

Despexando:

$$g_M = 3,69 \text{ m/s}^2$$

Análise: O resultado é razoable, xa que sabemos que a gravidade na superficie de Marte é unhas 3 *veces menor que na superficie da Terra.*

Calcúlase o tempo da ecuación da caída libre, sen velocidade inicial:

$$h = ½\ g \cdot t^2 \Rightarrow\ t=\sqrt{\frac{2\cdot h}{g_M}}=\sqrt{\frac{2\cdot 50,0}{3,69}}=5,21 \text{ s}$$

b)
A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s=(E_c+E_p)_s=0+\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=-G\frac{M\cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2=0-\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=G\frac{M\cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e=\sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0=G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.

A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Hai que calcular tamén o raio de Marte:

$$R_M = 0,533\ R_T = 0,533 \cdot 6,37\cdot10^6\ [\text{m}] = 3,40\cdot10^6\ \text{m}$$

Calcúlase a velocidade de escape substituíndo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v_e=\sqrt{\frac{2\,g_0\cdot R_M^2}{R_M}}=\sqrt{2\,g_0\cdot R_M}=\sqrt{2\cdot 3,69\ [\text{m/s}^2]\cdot(3,40\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}=5,01\cdot 10^3\ \text{m/s}=5,01\ \text{km/s}$$

3. Un meteorito de 150 kg de masa achégase á Terra e acada unha velocidade de 30 km·s⁻¹ cando está a unha altura sobre a superficie da Terra igual a 6 veces o raio desta. Calcula:
   a) O seu peso a esa altura.
   b) A súa enerxía mecánica a esa altura.
   Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m² ·kg⁻²; M(T) = 5,98·10²⁴ kg; R(T) = 6,37·10⁶ m. *(A.B.A.U. ord. 20)*
   Rta.: a) P_h = 30,1 N; b) E = 6,61·10¹⁰ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Raio da Terra	$R = 6,37\cdot10^6$ m
Masa da Terra	$M = 5,98\cdot10^{24}$ kg
Constante da gravitación universal	$G = 6,67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Masa do meteorito	m = 150 kg
Velocidade do meteorito	$v = 30,0$ km·s⁻¹ $= 3,00\cdot10^4$ m/s
Altura	$h = 6\ R = 3,82\cdot10^7$ m
Incógnitas	
Peso do meteorito a esa altura = forza gravitacional que actúa sobre el	P_h
Enerxía mecánica do meteorito a esa altura	E
Outros símbolos	
Raio da órbita	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal, en módulos. (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Calcúlase a distancia do meteorito coa Tera:

$$r = R + h = R + 6\ R = 7\ R = 7 \cdot 6,37\cdot10^6\ [\text{m}] = 4,46\cdot10^7\ \text{m}$$

Calcúlase o peso, que é a forza gravitacional:

$$P_h=F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5,98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]\cdot 150\ [\text{kg}]}{(4,46\cdot 10^7\ [\text{m}])^2}=30,1\ \text{N}$$

b) Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5,98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]\cdot 150\ [\text{kg}]}{4,46\cdot 10^7\ [\text{m}]}=-1,34\cdot 10^9\ \text{J}$$

Calcúlase a enerxía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 150\ [\text{kg}] \cdot (3,00\cdot10^4\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 6,75\cdot10^{10}\ \text{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial.

$$E = E_c + E_p = 6,75\cdot10^{10}\ [\text{J}] + (-1,34\cdot10^9\ [\text{J}]) = 6,61\cdot10^{10}\ \text{J}$$

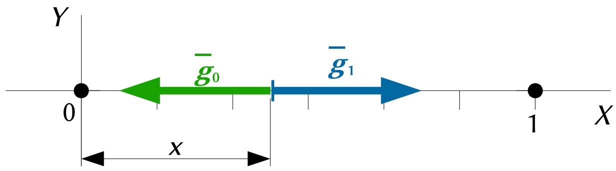
● Masas puntuais

1. Considera dúas masas de 2 kg e 4 kg fixas sobre o eixe X na orixe e a x = 6 m, respectivamente. Calcula:
   a) As coordenadas dun punto no que o campo gravitacional resultante valla cero.
   b) O potencial gravitacional en x = 2 m.
   c) O traballo realizado pola forza do campo gravitacional para levar unha masa de 6 kg desde ese punto ata o infinito. Interpreta o signo do resultado.
   Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(A.B.A.U. extr. 19)*
   Rta.: a) x = 2,48 m; b) $V = -1{,}3\cdot10^{-10}$ J/kg; c) $W = -8{,}0\cdot10^{-10}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa na orixe	M_0 = 2,00 kg
Masa no eixo X	M_1 = 4,00 kg
Coordenada x da masa na orixe	x_0 = 0 m
Coordenada x da masa no eixo X	x_1 = 6,00 m
Coordenada x para calcular o potencial	x_2 = 2,00 m
Masa que se leva ao infinito	m = 6,00 kg
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Coordenadas dun punto no que o campo gravitacional resultante valla cero	x, y
Potencial gravitacional en x = 2 m	V_2
Traballo da forza do campo para levar 6 kg desde x = 2 m ata o infinito	W
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce cada masa puntual sobre cada unha das outras)	$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
Intensidade do campo gravitacional que exerce unha masa M puntual nun punto a unha distancia r	$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitacional nun punto debido a unha masa M que dista r do punto	$V = -G\frac{M}{r}$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = m\cdot V = -G\frac{M\cdot m}{r}$
Traballo do campo cando se despraza unha masa desde o punto 1 ao punto 2	$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$

Solución:

a) O punto deberá estar no eixe X entre as dúas masas.
A súa coordenada y será y = 0.



O principio de superposición di que a intensidade de campo gravitacional nun punto, debido á presencia de varias masas, é a suma vectorial dos campos producidos nese punto por cada masa, coma se o resto das masas non estivese presente.
Para determinar o campo nun punto, calcúlanse os campos creados nese punto por cada masa, e despois súmanse os vectores.
A forza de atracción gravitacional entre dúas masas puntuais ou esféricas, M e m, vén dada pola lei da gravitación de Newton. G é a constante da gravitación universal e $\bar{u}_r$ o vector unitario na liña que une as masas.

$$\vec{F} = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

O campo gravitacional nun punto situado a unha distancia, r, dunha masa puntual, M, é a forza sobre a unidade de masa situada nese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{m}} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Para calcular a súa coordenada *x*. escríbense as expresións dos campos gravitacionais creados nese punto polas masas, e aplícase a condición de que o campo resultante é nulo.
O campo gravitacional nese punto creado pola masa situada na orixe é:

$$\vec{\mathbf{g}}_0=-G\frac{M_0}{r_0^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{2{,}00\ [\mathrm{kg}]}{x^2}\vec{\mathbf{i}}=\frac{-1{,}33\cdot 10^{-10}}{x^2}\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

O campo gravitacional nese punto creado pola masa situada en x_1 = 6 [m] é:

$$\vec{\mathbf{g}}_1=-G\frac{M_1}{r_1^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{4{,}00\ [\mathrm{kg}]}{(6{,}00-x)^2}(-\vec{\mathbf{i}})=\frac{2{,}67\cdot 10^{-10}}{(6{,}00-x)^2}\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{m/s^2}$$

Polo principio de superposición, o campo gravitacional é a suma vectorial dos dous campos.

$$\overline{\mathbf{g}} = \overline{\mathbf{g}}_0 + \overline{\mathbf{g}}_1 = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\frac{-1{,}33\cdot 10^{-10}}{x^2}+\frac{2{,}67\cdot 10^{-10}}{(6{,}00-x)^2}=0$$

$$\frac{(6{,}00-x)^2}{x^2}=\frac{2{,}67\cdot 10^{-10}}{1{,}33\cdot 10^{-10}}=2{,}00$$

$$6{,}00 - x = \pm\sqrt{2{,}00}\ x$$

$$x=\frac{6{,}00}{1+\sqrt{2{,}00}}=2{,}48\ \mathrm{m}$$

Análise: A solución é aceptable, posto que se atopa entre as dúas masas. A outra solución, $x=\frac{6{,}00}{1-\sqrt{2{,}00}}=-14{,}5\ \mathrm{m}$ *estaría nun punto no que ambos os campos serían do mesmo sentido e non se anularían.*

O potencial gravitacional nun punto, debido á presencia de varias masas, é a suma dos potenciais producidos nese punto por cada masa, coma se o resto das masas non estivese presente.
Para determinar o potencial gravitacional nun punto, calcúlanse os potenciais creados nese punto por cada masa, e despois súmanse.
A ecuación do potencial gravitacional, *V*, nun punto situado a unha distancia, *r*, dunha masa puntual, *Q*, é:

$$V=-G\frac{M}{r}$$

G é a constante da gravitación universal.

b) Calcúlase o potencial gravitacional no punto x = 2 [m] creado pola masa situada na orixe:

$$V_0=-G\frac{M_0}{r_0}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{2{,}00\ [\mathrm{kg}]}{2{,}00\ [\mathrm{m}]}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J/kg}$$

Calcúlase o potencial gravitacional no punto x = 2 [m] creado pola masa situada no punto x = 6 [m]:

$$V_1=-G\frac{M_1}{r_1}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{4{,}00\ [\mathrm{kg}]}{6{,}00-2{,}00\ [\mathrm{m}]}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J/kg}$$

O potencial gravitacional é a suma.

$$V = V_0 + V_1 =(-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{J/kg}]) + (-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{J/kg}])= -1{,}33\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J/kg}$$

O campo gravitacional é un campo conservativo, porque o traballo realizado pola forza do campo, cando unha masa se move entre dous puntos, é independente do camiño seguido e depende só dos puntos inicial e final. Defínese unha función escalar chamada enerxía potencial, E_p, asociada ao campo vectorial de forzas, de tal xeito que o traballo realizado pola forza do campo ao mover unha masa entre dous puntos é igual á variación da enerxía potencial entre estes dous puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

Tamén se define outra magnitude escalar, chamada potencial gravitacional, que é igual á enerxía potencial da unidade de masa.

$$V=\frac{E_p}{m}$$

O traballo realizado pola forza de campo, cando unha masa se move do punto A ao punto B, é:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = m \cdot V_A - m \cdot V_B = m\,(V_A - V_B)$$

c) Por definición, a enerxía potencial (e o potencial) no infinito é nula, polo que o traballo da resultante das forzas gravitacionais cando se leva a masa en $x = 2$ [m] ata o infinito é:

$$W_{2\to\infty} = -\Delta E_p = -(E_{p\infty} - E_{p2}) = E_{p2} - E_{p\infty} = E_{p2} = m \cdot V_2 = 6{,}00\ [\text{kg}] \cdot (-1{,}33\cdot10^{-10}\ [\text{J/kg}]) = -8{,}00\cdot10^{-10}\ \text{J}$$

O traballo das forzas gravitacionais é negativo, (a forza do campo oponse ao desprazamento cara ao infinito) e o traballo deberá facelo algunha forza externa.

◊ CUESTIÓNS

● Satélites.

1. Un satélite artificial describe unha órbita circular arredor da Terra. O traballo que realiza a forza da gravidade sobre o satélite ao longo de media órbita é:
A) Positivo.
B) Negativo
C) Nulo.

(A.B.A.U. ord. 23)

Solución: C

O traballo realizado por unha forza sobre un corpo é igual ao produto escalar da forza polo desprazamento do corpo:

$$W = \overline{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{r}}$$

La forza gravitacional é unha forza central que actúa sempre na dirección do centro da Terra, mentres que o desprazamento do satélite é tanxencial á súa órbita. Como a órbita é circular, a forza e o desprazamento son perpendiculares entre si en todo momento.
Dado que o produto escalar de dous vectores perpendiculares é cero, o traballo realizado pola forza gravitacional sobre o satélite ao longo de calquera traxectoria, por exemplo media órbita, é cero.

2. Dous satélites artificiais describen órbitas circulares arredor dun planeta de raio R, sendo os raios das súas órbitas respectivas 1,050 R e 1,512 R. A relación entre as súas velocidades de xiro é:
A) 1,2
B) 2,07
C) 4,4

(A.B.A.U. ord. 21)

Solución: A

A velocidade dun satélite que xira a unha distancia, r, arredor dun astro de masa M, é:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

A velocidade lineal dun satélite nunha órbita é inversamente proporcional á raíz cadrada do raio da órbita.

$$v_1 \cdot \sqrt{r_1} = v_2 \cdot \sqrt{r_2} = \sqrt{G\cdot M} = \text{constante}$$

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}=\sqrt{\frac{1{,}512 \cdot R}{1{,}050\, R}}=1{,}2$$

Como o raio da órbita 1 é menor que o da órbita 2, a velocidade do satélite na órbita 1 será maior.

3. Un satélite xira arredor dun planeta nunha traxectoria elíptica. Cal das seguintes magnitudes permanece constante?:
   A) O momento angular.
   B) O momento lineal.
   C) A enerxía potencial.

(A.B.A.U. extr. 20)

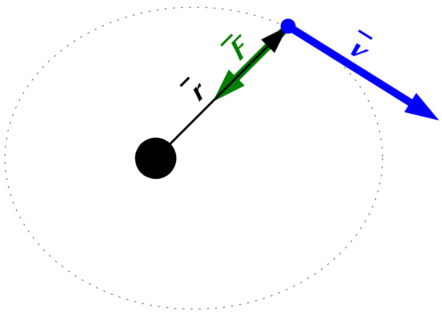
Solución: A

O campo gravitacional é un campo de forzas centrais, nas que a forza gravitacional que exerce o planeta sobre un satélite ten a mesma dirección (e sentido contrario) que o vector de posición do satélite colocando a orixe de coordenadas no planeta.
O momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto dun punto O que se toma como orixe é:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudar a súa variación, derívase con respecto ao tempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}}\times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$$



O primeiro sumando dá o vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) porque a velocidade, $\overline{\boldsymbol{v}}$, e o momento lineal, $m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$, son paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0 = 0$$

O segundo sumando tamén dá o vector $\overline{\mathbf{0}}$ porque, ao ser o campo de forzas un campo central, o vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, con orixe no punto orixe do campo e o vector forza (dirixido cara a esa orixe) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

A derivada é cero.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$$

Cando unha partícula se move nun campo de forzas centrais, o momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, respecto ao punto orixe da forza é un vector constante, xa que a súa derivada é cero.

As outras opcións:
B. Falsa. O momento lineal, $\overline{\boldsymbol{p}}$, dun obxecto de masa m que se move a unha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$, vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Como o momento angular é constante, ao variar a distancia, $\overline{\boldsymbol{r}}$, do satélite ao planeta, tamén variará a súa velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$. Ademais, a dirección cambia a medida que o satélite se despraza arredor do planeta.
C. Falsa.
A enerxía potencial gravitacional, tomando como orixe de enerxía o infinito, vén dada pola expresión:

$$E_p=-G\frac{M \cdot m}{r}$$

Sendo M a masa que orixina o campo gravitacional, (neste caso a do planeta), m é a masa do obxecto que xira arredor del (o satélite), r a distancia entre ambas os corpos e G a constante da gravitación universal.
Nunha órbita elíptica, co planeta situado nun dos focos, a distancia do satélite ao planeta non é constante. Polo tanto, a enerxía potencial tampouco é constante.

4. A expresión que relaciona a enerxía mecánica dun satélite que describe unha órbita circular arredor dun planeta e a súa enerxía potencial é:
A) $E_m = -E_p$.
B) $E_m = -½\ E_p$.
c) $E_m = ½\ E_p$.
(A.B.A.U. extr. 19)

Solución: C

A enerxía cinética dun obxecto de masa *m*, que se move con velocidade *v*, é directamente proporcional ao cadrado da súa velocidade.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

A enerxía potencial gravitacional dun satélite de masa *m*, que xira arredor dun astro de masa *M*, nunha órbita de radio *r*, é inversamente proporcional ao raio da órbita.

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

Onde *G* é a constante da gravitación universal.
A enerxía mecánica de un corpo de masa *m*, que se atopa en órbita de raio *r* arredor dun astro de masa *M*, é a suma das súas enerxías cinética e potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m \cdot v^2 + \left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right)$$

A velocidade dun satélite que xira a unha distancia *r* arredor dun astro de masa *M* é:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Substituíndo v^2, a expresión da enerxía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}$$

A expresión da enerxía mecánica queda:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m \cdot v^2 - G\frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r} - G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}$$

A enerxía mecánica dun satélite en órbita é igual á metade da súa enerxía potencial.

$$E = \frac{1}{2}E_p$$

5. Un satélite describe unha órbita elíptica arredor da Terra. Considerando a súa posición en dous puntos da órbita, cúmprese:
A) A velocidade orbital do satélite é a mesma en ambos os puntos.
B) A enerxía mecánica do satélite é a mesma en ambos os puntos.
C) O momento angular do satélite respecto ao centro da Terra é distinto en ambos os puntos.
(A.B.A.U. ord. 18)

Solución: B

O campo gravitacional é un campo de forzas conservativo. O traballo da forza gravitacional, cando unha masa se despraza dun punto 1 a un punto 2, é independente do camiño seguido e só depende dos puntos inicial e final.

Defínese unha magnitude chamada enerxía potencial, E_p, de forma que o traballo, W, da forza gravitacional é igual á variación (cambiada de signo) da enerxía potencial.

$$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

O traballo da forza resultante é, polo principio da enerxía cinética, igual á variación da enerxía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Se a única forza que realiza traballo é a forza gravitacional, ámbolos dous traballos son iguais:

$$W_{1\to2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

Agrupando termos:

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

Consérvase a enerxía mecánica (suma das enerxías cinética e potencial).

As outras opcións:
A e C. Falsas. O momento angular do satélite respecto da Terra é constante.
Como o momento angular é constante, ao variar a distancia, $\overline{\boldsymbol{r}}$, do satélite á Terra, tamén variará a súa velocidade, $\overline{\boldsymbol{v}}$.

6. Para saber a masa do Sol, coñecidos o raio da órbita e o período orbital da Terra respecto ao Sol, necesítase dispor do dato de:
A) A masa da Terra.
B) A constante de gravitación G.
C) O raio da Terra.

(A.B.A.U. ord. 17)

Solución: B

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Despexando a masa do Sol, queda:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$$

● Campo gravitacional.

1. Se o peso dunha masa m na superficie dun planeta esférico de raio r vale 80 N, o peso desa mesma masa m na superficie dun novo planeta esférico de raio 2 r será:
   A) 20 N
   B) 40 N
   C) 160 N
   Nota: A densidade dos dous planetas é a mesma. *(A.B.A.U. extr. 23)*

Solución: C

O peso dunha masa nun planeta é a forza que exerce o planeta sobre ela, que vén dada pola lei de Newton da gravitación universal:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, M é a masa do planeta, m é a masa do corpo e r é a distancia do obxecto ao centro do planeta, ou sexa, o raio do planeta.
Se a densidade dos dous planetas é a mesma, iso significa que a masa do planeta de raio 2 r será oito veces maior que a masa do planeta de raio r, xa que a masa é proporcional ao volume e o volume dunha esfera de raio r é $V = 4/3\ \pi\ r^3$, proporcional ao cubo do seu raio.
Por tanto, chamando ρ á densidade, M_1 e r_1 á masa e ao raio do primeiro planeta, e M_2 e r_2 á masa e ao raio do segundo planeta, temos que:

$$M_1 = \rho\ 4/3\ \pi\ r_1^3$$

$$r_2 = 2 \cdot r_1$$

$$M_2 = \rho\ 4/3\ \pi\ r_2^3 = \rho\ 4/3\ \pi\ (2 \cdot r_1)^3 = 2^3 \cdot (\rho\ 4/3\ \pi\ r_1^3) = 8\ M_1$$

Substituíndo estes valores na fórmula da forza de gravitación, obtemos que o peso no primeiro planeta é:

$$F_1 = G\frac{M_1 \cdot m}{r_1^2}$$

O peso no segundo planeta é:

$$F_2 = G\frac{M_2 \cdot m}{r_2^2} = G\frac{8 \cdot M_1 \cdot m}{(2 \cdot r_1)^2} = \frac{8}{2^2} G\frac{M_1 \cdot m}{r_1^2} = 2 F_1$$

O peso no segundo planeta é o dobre que no primeiro planeta. Se no primeiro planeta pesa 80 N, no segundo pesará 2 · 80 = 160 N.

2. Onde se atopará o punto no que se anulan as intensidades de campo gravitacional da Lúa e da Terra?:
   A) No punto medio entre a Terra e a Lúa.
   B) Máis cerca da Terra.
   C) Máis cerca da Lúa.

(A.B.A.U. extr. 22)

Solución: C

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que se atopa a unha distancia, r, réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite.
A intensidade, $\overline{\boldsymbol{g}}$, do campo gravitacional debido a unha masa, M, nun punto que se atopa a unha distancia r dela, é directamente proporcional á masa e inversamente proporcional ao cadrado da distancia.

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_G}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Polo principio de superposición, o campo gravitacional nun punto, debido a dúas masas, é a suma vectorial dos campos producidos polas masas. Nun punto 0, situado entre a Terra e a Lúa, virá dado pola expresión:

$$\vec{\boldsymbol{g}}_0 = \vec{\boldsymbol{g}}_{0T} + \vec{\boldsymbol{g}}_{0L} = -G\frac{M_T}{r_T^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r + \left(-G\frac{M_L}{r_L^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r\right)$$

O punto en que se anulan estará situado na liña que une ámbolos dous astros a unhas distancias deles que anulen o campo:

$$G\frac{M_T}{r_T^2} = G\frac{M_L}{r_L^2}$$

Como a masa da Terra é moito maior que a da Lúa, a distancia do punto á Terra debe ser maior que á Lúa.

$$r_T^2 = \frac{M_T}{M_L} r_L^2 \Rightarrow r_T = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}\, r_L > r_L$$

O punto atoparase máis preto da Lúa.

3. Dado un planeta esférico de masa M, con raio a metade do raio terrestre e igual densidade que a Terra, a relación entre a velocidade de escape dun obxecto desde a superficie do planeta respecto á velocidade de escape do devandito obxecto desde a superficie da Terra é:
   A) 0,5
   B) 0,7
   C) 4

(A.B.A.U. extr. 21)

Solución: A

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$$

A densidade é a masa da unidade de volume dun corpo. Como o volume dunha esfera de raio R é $V = 4/3\ \pi\ R^3$, a masa, M, dunha esfera de raio R e densidade ρ é:

$$M = V \cdot \rho = 4/3\ \pi\ R^3 \cdot \rho$$

Substituíndo esta expresión na velocidade de escape da Terra:

$$v_{eT} = \sqrt{2\, G \frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2\, G \frac{4/3\, \pi\, R_T^3 \cdot \rho}{R_T}} = \sqrt{8/3 \pi\, G\, R_T^2 \cdot \rho}$$

A expresión semellante para o planeta P de masa M sería:

$$v_{eP} = \sqrt{8/3 \pi\, G\, R_P^2 \cdot \rho}$$

Dividindo a segunda expresión entre a primeira, quedaría:

$$\frac{v_{eP}}{v_{eT}} = \sqrt{\frac{\cancel{8/3 \pi\, G\, \rho} \cdot R_P^2}{\cancel{8/3 \pi\, G\, \rho} \cdot R_T^2}} = \frac{R_P}{R_T}$$

Como $R_P = ½\ R_T$

$$\frac{v_{eP}}{v_{eT}} = \frac{R_P}{R_T} = \frac{1/2\, \cancel{R_T}}{\cancel{R_T}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

4. Para escalar unha montaña podemos seguir dúas rutas diferentes: unha de pendentes moi suaves e outra con pendentes moi pronunciadas. O traballo realizado pola forza gravitacional sobre o corpo do montañeiro é:
A) Maior na ruta de pendentes moi pronunciadas.
B) Maior na ruta de pendentes moi suaves.
C) Igual en ámbalas rutas.

(A.B.A.U. ord. 20)

Solución: C

A forza gravitacional é unha forza conservativa. Pódese definir unha magnitude, chamada enerxía potencial, que depende só da posición, ademais da masa. No caso da forza gravitacional preto da superficie da Terra.

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

O traballo realizado por unha forza conservativa é independente do camiño, só depende dos puntos inicial e final.

$$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

$$W_{1\to2} = m \cdot g \cdot (-\Delta h)$$

O traballo só depende das alturas inicial e final.

5. Se un planeta, mantendo a súa masa, aumentase o seu raio, a velocidade de escape desde a superficie de planeta:
A) Aumentaría.
B) Diminuiría.
C) Non variaría.

(A.B.A.U. extr. 18)

Solución: B

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{R} \right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$$

Se aumentase o raio do planeta, mantendo a súa masa constante, a velocidade de escape diminuiría.

6. Se a masa dun planeta é o dobre da masa da Terra e o raio é catro veces maior que o da Terra, a aceleración da gravidade nese planeta con respecto á da Terra é:
   A) 1/4
   B) 1/8
   C) 1/16.

(A.B.A.U. ord. 18)

Solución: B

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un obxecto de masa *M*, sobre outro obxecto de masa *m* que se atopa a unha distancia *r*, réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, *G* é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une os dous obxectos.
Para un planeta de masa *M*, e raio *R*, a expresión, en módulos, da forza gravitacional nun punto da súa superficie é:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Se a única forza é a gravitacional, a aceleración da gravidade obtense da segunda lei de Newton, que di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a masa, *m*, do obxecto a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left| \sum \vec{\boldsymbol{F}} \right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}| \quad \Rightarrow \quad F_G = m \cdot g$$

Substituíndo a expresión do módulo F_G, da forza gravitacional, queda:

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}}{\cancel{m}} = G \frac{M}{R^2}$$

A aceleración da gravidade, *g*, nun punto da superficie dun planeta de masa *M*, e raio *R*, é directamente proporcional á masa do planeta e inversamente proporcional ao cadrado do seu raio.
Se a masa dun planeta é o dobre da masa da Terra e o raio é catro veces maior que o da Terra, a aceleración, *g*, da gravidade na súa superficie será a oitava parte da gravidade na Terra.

$$g_P = G \frac{M_P}{R_P^2} = G \frac{2 \cdot M_T}{(4 \cdot R_T)^2} = \frac{2}{16} G \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{g_T}{8}$$

7. A masa dun planeta é o dobre que a da Terra e o seu radio é a metade do terrestre. Sabendo que a intensidade do campo gravitacional na superficie terrestre é *g*, a intensidade do campo gravitacional na superficie do planeta será:
   A) 4 *g*

B) 8 *g*
C) 2 *g*

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución: B

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un obxecto de masa *M*, sobre outro obxecto de masa *m* que se atopa a unha distancia *r*, réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, *G* é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une os dous obxectos.
A intensidade do campo gravitacional é a forza sobre a unidade de masa:

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_G}{m} = \frac{-G\frac{M\cancel{m}}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r}{\cancel{m}} = -G\frac{M}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

O valor da intensidade, *g*, do campo gravitacional producido por un planeta de masa *M* e raio *R*, nun punto da súa superficie, é directamente proporcional á masa do planeta e inversamente proporcional ao cadrado do seu raio. En módulos:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Se a masa dun planeta P é o dobre da masa da Terra e o seu raio é a metade que o da Terra, a aceleración, *g*, da gravidade na súa superficie será a oito veces maior ca gravidade na Terra.

$$g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} = G\frac{2 \cdot M_T}{(R_T/2)^2} = \frac{2}{(1/4)}G\frac{M_T}{R_T^2} = 8\,g_T$$

◊ LABORATORIO

1. a) A partir dos seguintes datos de satélites que orbitan arredor da Terra determina o valor da masa da Terra.
b) Se o valor indicado nos libros de texto para a masa da Terra é de 5,98×10²⁴ kg, que incerteza relativa obtivemos a partir do cálculo realizado?

Satélites	Distancia media ao centro da Terra / km	Período orbital medio /min
DELTA 1-R/B	7595	158
O3B PFM	14 429	288
GOES 2	36 005	1449
NOAA	7258	102

DATO: G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻². *(A.B.A.U. ord. 24)*

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa *M* sobre un satélite de masa *m* que xira arredor del nunha órbita de radio *r*, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, *G* é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

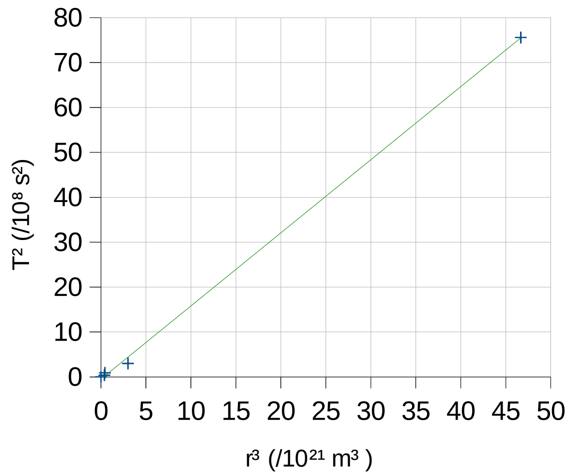
Reescribindo esta ecuación para expresar a relación entre os cubos dos raios das órbitas e os cadrados dos períodos queda:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

A pendente da recta da gráfica obtida nunha folla de cálculo é:

$$pendente = 1{,}03 \cdot 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2 = 6{,}14 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Despexando a masa M da Terra queda:



$$M=\frac{4\pi^2\cdot pendente}{G}=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 6{,}14\cdot 10^{12}\,[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]}=3{,}63\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Análise: O resultado é bastante diferente ao valor dos libros 5,98·10^{24} kg, aínda que da mesma orde de magnitude.

Pero na proba non dispoñemos dunha folla de cálculo. A pendente da recta debuxada nun papel pode aproximarse ao cociente dos datos máis altos:

$$\frac{r_4^3}{T_4^2}=\frac{4{,}67\cdot 10^{13}\,[\mathrm{km}]^3}{2{,}10\cdot 10^6\,[\mathrm{min}]^2}=2{,}22\cdot 10^7\ \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2}\ \frac{(10^3\,\mathrm{m})^3}{(1\,\mathrm{km})^3}=6{,}18\cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

Que é case o mesmo resultado que a pendente obtida na folla de cálculo.

Outro valor similar ao da pendente sería a media dos cocientes.

	T^2	r^3	r^3/T^2
Satélite	(s^2)	(m^3)	(m^3/s^2)
DELTA 1-R/B	8,99·10^7	4,38·10^{20}	4,87·10^{12}
O3B PFM	2,99·10^8	3,00·10^{21}	1,01·10^{13}
GOES 2	7,56·10^9	4,67·10^{22}	6,18·10^{12}
NOAA	3,75·10^7	3,82·10^{20}	1,02·10^{13}
		r^3/T^2 (media) =	7,83·10^{12} m^3/s^2

O valor medio é 7,83·10^{12} m^3/s^2 que daría unha masa da Terra:

$$M=\frac{4\pi^2}{G}\ \frac{r^3}{T^2}=\frac{4\cdot 3{,}14^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]}\cdot 7{,}83\cdot 10^{12}\,[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]=4{,}63\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Este valor é bastante diferente ao da pendente, o que fai sospeitar da validez dos datos.

b) A incerteza é o cociente da diferenza entre o valor calculado e o «correcto» entre o valor «correcto»:

$$\delta=\frac{|M_{\mathrm{calc}}-M|}{M}=\frac{|3{,}63\cdot 10^{24}-5{,}98\cdot 10^{24}|}{5{,}98\cdot 10^{24}}=0{,}39=39\ \%$$

Analise: Resolvín o exercicio coa folla de cálculo [Física Lab (gal)] pero a incerteza obtida, era do 39 %!
Buscando na web atopei un erro no raio medio dos satélites GOES. Resulta que son satélites xeoestacionarios, pero a distancia que da o enunciado do problema é: a altura! en vez da distancia ao centro da Terra.
Os datos do satélite DELTA 1-R/B non coinciden cos da páxina web: [DELTA 1 R/B Satellite details 1969-101B NORAD 4251 (n2yo.com)], nin o período (312 min) nin o raio medio da órbita (na páxina non da o valor do raio medio, senón o perixeo, 375 km, e o apoxeo, 17 342 km, pero a media destes valores é 8860 km). Substituín os valores do enunciado polos da páxina web, e entón a incerteza foi do 0,7 %.

2. A partir de medidas do raio, *r*, e do período, *T*, de catro satélites que orbitan a Terra obtense a táboa anexa. Representa eses datos nunha gráfica e determina a partir dela a masa da Terra.

Satélite	T^2/s^2	r^3/km^3
1	3,18·10^7	3,29·10^{11}
2	3,89·10^7	4,05·10^{11}
3	4,75·10^7	4,93·10^{11}
4	1,44·10^8	1,48·10^{12}

Dato: G = 6,67·10^{-11} N·m²·kg⁻². *(A.B.A.U. ord. 19)*

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

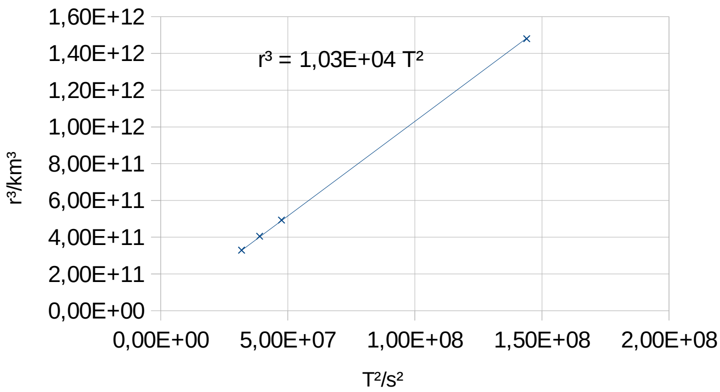
Reescribindo esta ecuación para expresar a relación entre os cubos dos raios das órbitas e os cadrados dos períodos queda:

$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

A pendente da recta da gráfica obtida nunha folla de cálculo é:

pendente = $1{,}03 \cdot 10^4$ km³/s² = $1{,}03 \cdot 10^{13}$ m³/s²

Despexando a masa *M* da Terra queda:



$$M=\frac{4\pi^2 \cdot pendente}{G}=\frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}03 \cdot 10^{13}\ [\mathrm{m^2/s^2}]}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}]}=6{,}06 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Análise: O resultado é semellante ao valor correcto $5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg.

Pero na proba non dispoñemos dunha folla de cálculo. A pendente da recta debuxada nun papel pode aproximarse ao cociente dos datos máis altos:

$$\frac{r_4^3}{T_4^2}=\frac{1{,}48 \cdot 10^{12}\ [\mathrm{km}]^3}{1{,}44 \cdot 10^8\ [\mathrm{s}]^2}=1{,}03 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2}\ \frac{(10^3\ \mathrm{m})^3}{(1\ \mathrm{km})^3}=1{,}03 \cdot 10^{13}\ \mathrm{m^3/s^2}$$

Que é o mesmo resultado que a pendente obtida na folla de cálculo.
Un valor mellor sería a media dos cocientes.

Satélite	T^2/s²	r^3/km³	r^3/T^2 (km³/s²)
1	$3{,}18 \cdot 10^7$	$3{,}29 \cdot 10^{11}$	$1{,}03 \cdot 10^4$
2	$3{,}89 \cdot 10^7$	$4{,}05 \cdot 10^{11}$	$1{,}04 \cdot 10^4$
3	$4{,}75 \cdot 10^7$	$4{,}93 \cdot 10^{11}$	$1{,}04 \cdot 10^4$
4	$1{,}44 \cdot 10^8$	$1{,}48 \cdot 10^{12}$	$1{,}03 \cdot 10^4$

O valor medio é $1{,}04 \cdot 10^4$ km³/s² = $1{,}04 \cdot 10^{13}$ m³/s² que daría unha masa da Terra $6{,}13 \cdot 10^{24}$ kg.

Actualizado: 13/06/24

ACLARACIÓNS

Os datos dos enunciados dos problemas non adoitan ter un número adecuado de cifras significativas, ben porque o redactor pensa que a Física é unha rama das Matemáticas e os números enteiros son números «exactos» (p. ex. a velocidade da luz: $3 \cdot 10^8$ m/s cre que é 300 000 000,000000 000 000 000... m/s) ou porque aínda non se decatou de que se pode usar calculadora no exame e parécelle máis sinxelo usar $3 \cdot 10^8$ que 299 792 458 m/s).
Por iso supuxen que os datos teñen un número de cifras significativas razoables, case sempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en certos casos, cunha incerteza desmedida. Así que cando tomo un dato como $c = 3 \cdot 10^8$ m/s e reescríboo como:
Cifras significativas: 3
$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
O que quero indicar é que supoño que o dato orixinal ten tres cifras significativas (non que as teña en realidade) para poder realizar os cálculos cunha incerteza máis pequena que a que tería nese caso.
($3 \cdot 10^8$ m/s ten unha soa cifra significativa, e unha incerteza relativa do 30 %. Como as incertezas adóitanse acumular ao longo do cálculo, a incerteza final sería inadmisible. Entón, para que realizar os cálculos? Cunha estimación sería suficiente).

Cuestións e problemas das Probas de avaliación de Bacharelato para o acceso á Universidade (A.B.A.U. e P.A.U.) en Galiza.
Respostas e composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.

Algúns cálculos fixéronse cunha folla de cálculo de LibreOffice do mesmo autor.
Algunhas ecuacións e as fórmulas orgánicas construíronse coa extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
A tradución ao/desde o galego realizouse coa axuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Procurouse seguir as recomendacións do Centro Español de Metrología (CEM).
Consultouse ao Copilot de Microsoft Edge e tivéronse en conta algunhas das súas respostas nas cuestións.

Sumario

GRAVITACIÓN

Índice de probas A.B.A.U.