ONDAS

Método y recomendaciones

● Ecuación y características de las ondas

1. Una onda se transmite a lo largo de una cuerda. El punto situado en $x = 0$ oscila según la ecuación $y = 0,1 \cos(10 \pi t)$ y otro punto situado en $x = 0,03$ m oscila según la ecuación $y = 0,1 \cos(10 \pi t - \pi / 4)$. Calcula:
   a) La amplitud, la longitud de onda, el número de onda k, el período, la frecuencia y pulsación ω de la onda.
   b) La velocidad de propagación de la onda e indica en qué sentido se propaga.
   c) El tiempo que ha de transcurrir para que la onda recorra una distancia igual a 2λ.
   d) Escribe la ecuación de onda.
   e) La velocidad de oscilación de un punto de la cuerda y su aceleración en función del tiempo.
   f) La elongación, velocidad y aceleración de un punto situado en $x = 0,03$ m en el instante $t = 0,05$ s.
   g) Los valores máximos de la velocidad y aceleración de las partículas de la cuerda.
   h) Los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03$ m.
   i) Los valores del tiempo para los que un punto situado en $x = 0,03$ m tiene velocidad máxima.
   j) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es $2 \pi/3$.
   k) La diferencia de fase entre dos puntos separados 15 cm.
   l) La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 0,05 s.
   m) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en $x = 0,03$ m?
   n) Para una posición fija x, ¿para qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase con la vibración para $t = 0,05$ s?

Problema modelo basado en P.A.U. Jun. 06

Rta.: a) $A = 0,100$ m; $\lambda = 0,240$ m; $k = 26,2$ rad/m; $f = 5,00$ Hz; $\omega = 31,4$ rad/s. b) $v_p = 1,20$ m/s; c) $t_2 = 0,400$ s; d) $y = 0,100 \cdot \cos(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x)$ [m]; e) $v = -3,14 \cdot \text{sen}(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x)$ [m/s]; $a = -98,7 \cdot \cos(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x)$ [m/s²]; f) $y_3 = 0,0707$ m; $v_3 = 2,22$ m/s; $a_3 = -69,8$ m/s²; g) $v_m = 3,14$ m/s; $a_m = 98,7$ m/s²; h) $t_{my} = 0,0750 + 0,100\, n$ (s); i) $t_{mv} = 0,0250 + 0,100\, n$ (s); j) $\Delta x = 0,0800 + 0,240 \cdot n$ [m]; k) $\Delta\varphi_x = 3,93$ rad; l) $\Delta\varphi_t = 1,57$ rad; m) $x_3 = 0,0300 + 0,240\, n$ [m]; n) $t_3 = 0,0500 + 0,200\, n$ [s], $n = 0, 1, 2...$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de oscilación en el origen $x = 0$	$y = 0,100 \cdot \cos(10,0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Ecuación de oscilación en $x = 0,03$ m	$y = 0,100 \cdot \cos(10,0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4,00)$ [m]
Incógnitas	
Amplitud	A
Longitud de onda	λ
Número de onda	k
Período	T
Frecuencia	f
Pulsación	ω
Velocidad de propagación	v_p
Tiempo para que la onda recorra una distancia igual a 2λ	t_2
Ecuación de onda	$y(x, t)$
Velocidad de la partícula en un punto en función del tiempo	v
Aceleración de la partícula en un punto en función del tiempo	a
Elongación en $x = 0,03$ m en $t = 0,05$ s.	y_3
Velocidad en $x = 0,03$ m en $t = 0,05$ s.	v_3
Aceleración en $x = 0,03$ m en $t = 0,05$ s.	a_3
Velocidad máxima de las partículas	v_m
Aceleración máxima de las partículas	a_m
Los valores del tiempo para los que y es máxima en $x = 0,03$ m	t_{my}
Los valores del tiempo para los que v es máxima en $x = 0,03$ m	t_{mv}

Incógnitas	
La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es 2 π/3.	Δx
La diferencia de fase entre dos puntos separados 15 cm.	$\Delta\varphi_x$
La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 0,05 s	$\Delta\varphi_t$
Puntos de la onda que están en fase con el punto en x = 0,03 m	x_3
En qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase con la vibración para t = 0,05 s	t_3
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Amplitud	A
Frecuencia	f
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre el período y la frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se calcula la amplitud y la frecuencia angular comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación de vibración en el origen:

Ecuación general de una onda armónica:	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Ecuación de la onda armónica en el origen (x = 0):	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Amplitud:	A = 0,100 m
Frecuencia angular:	$\omega = 10{,}0 \cdot \pi$ [rad/s] = 31,4 rad/s

Se calcula el número de onda comparando la ecuación de la onda armónica unidimensional, en la que se han sustituido la amplitud y la frecuencia angular, con la ecuación de vibración en el punto x = 0,0300 m:

Ecuación de la onda armónica:	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t \pm k \cdot x)$ [m]
Ecuación de la onda armónica en el punto x = 0,0300 m:	$y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4{,}00)$ [m]

$$k \cdot x = \pi / 4{,}00 \Rightarrow k = \frac{\pi}{4{,}00 \cdot x} = \frac{3{,}14\ [\text{rad}]}{4{,}00 \cdot 0{,}030\ 0[\text{m}]} = 26{,}2\ \text{rad/m}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2\pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{26{,}2\ [\text{rad/m}]} = 0{,}240\ \text{m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10{,}0 \cdot \pi}{2\pi} = 5{,}00\ \text{s}^{-1}$$

Se calcula el período a partir de la frecuencia:

$$f = 1 / T \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5{,}00\ \text{s}^{-1}} = 0{,}200\ \text{s}$$

b) Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}240\ [\text{m}] \cdot 5{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}20\ \text{m/s}$$

Como la onda en el punto x = 0,0300 m está retrasada en π / 4,00 rad porque en la ecuación aparece el signo «−», la onda se desplaza en el sentido positivo del eje X.

c) Se calcula el tiempo que tarda en recorrer una distancia igual a $\Delta x = 2 \cdot \lambda = 2 \cdot 0{,}240$ [m] = 0,480 m a partir de la velocidad de propagación constante de la onda

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow t_3=\frac{\Delta x}{v_{\mathrm{p}}}=\frac{0{,}480\ [\mathrm{m}]}{1{,}20\ [\mathrm{m/s}]}=0{,}400\ \mathrm{s}$$

Análisis: Se puede definir el período como el tiempo que tarda una onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda. Por tanto el tiempo necesario para que la onda recorra una distancia igual a 2 · λ, será el doble del período: $t_2 = 2 \cdot T = 2 \cdot 0{,}200\ [\mathrm{s}] = 0{,}400\ \mathrm{s}$.

d) La ecuación de movimiento se obtiene sustituyendo los valores de k y ω:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 0{,}120 \cdot x) = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\mathrm{m}]$$

Análisis: Se puede comprobar que esta ecuación da las ecuaciones para $x = 0$, $y = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t)$ *y para* $x = 0{,}03$ m, $y = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 0{,}786) = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - \pi / 4)$

e) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t}=-0{,}100 \cdot 31{,}4 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\mathrm{m/s}]$$

$$v = -3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\mathrm{m/s}]$$

La aceleración se obtiene derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\{-3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t}=-3{,}14 \cdot 31{,}4 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\mathrm{m/s^2}]$$

$$a = -98{,}7 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\mathrm{m/s^2}]$$

f) Se sustituyen en las ecuaciones los valores de la posición $x = 0{,}03$ m y el tiempo $t = 0{,}05$ s.

$$y_3 = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot 0{,}0500 - 26{,}2 \cdot 0{,}0300) = 0{,}0707\ \mathrm{m}$$
$$v_3 = -3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot 0{,}0500 - 26{,}2 \cdot 0{,}0300) = 2{,}22\ \mathrm{m/s}$$
$$a_3 = -98{,}7 \cdot \cos(31{,}4 \cdot 0{,}0500 - 26{,}2 \cdot 0{,}0300) = -69{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

g) La velocidad es máxima cuando el seno de la fase vale −1:

$$v_{\mathrm{m}} = -3{,}14 \cdot (-1) = 3{,}14\ \mathrm{m/s}$$

La aceleración es máxima cuando el coseno de la fase vale −1:

$$a_{\mathrm{m}} = -98{,}7 \cdot (-1) = 98{,}7\ \mathrm{m/s^2}$$

h) Para obtener los valores del tiempo para los que y es máxima en $x = 0{,}03$ m, se impone la condición de que el coseno de la fase en ese punto valga 1, lo que corresponde a una fase de 0 rad:

$$\cos(31{,}4 \cdot t_{\mathrm{m}y} - 26{,}2 \cdot 0{,}03) = 1$$
$$31{,}4 \cdot t_{\mathrm{m}y} - 26{,}2 \cdot 0{,}03 = 0$$
$$t_{\mathrm{m}y}=\frac{26{,}2 \cdot 0{,}030\ 0}{31{,}4}=0{,}025\ 0\ (\mathrm{s})$$

Esta situación vuelve a repetirse transcurridos un número n de semiperíodos, si sólo nos atenemos a que el valor de la elongación sea máxima.

$$t_{\mathrm{m}y} = 0{,}0250 + 0{,}100\ n\ (\mathrm{s});\ n = 0, 1, 2\ldots$$

Si entendemos que máximo se refiere también al signo, entonces se repite cada n períodos:

$$t_{\mathrm{m}y} = 0{,}0250 + 0{,}200\ n\ (\mathrm{s});\ n = 0, 1, 2\ldots$$

i) De forma análoga, la velocidad será máxima cuando el seno de la fase en ese punto valga 1, lo que corresponde a una fase de π / 2 rad:

$$\operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t_{\mathrm{m}} - 26{,}2 \cdot 0{,}0300) = 1$$
$$31{,}4 \cdot t_{\mathrm{m}} - 26{,}2 \cdot 0{,}0300 = \pi / 2$$
$$t_{\mathrm{m}}=\frac{26{,}2 \cdot 0{,}030\ 0 + 3{,}14/2}{31{,}4}=0{,}075\ 0\ (\mathrm{s})$$

Esta situación vuelve a repetirse transcurridos un número n de semiperíodos, si sólo nos atenemos a que el valor de la velocidad sea máxima.

$$t_{\mathrm{m}v} = 0{,}0750 + 0{,}100\ n\ (\mathrm{s});\ n = 0, 1, 2\ldots$$

Si entendemos que máximo se refiere también al signo, entonces se repite cada n períodos:

$$t_{mv} = 0{,}0750 + 0{,}200\ n\ \text{(s)};\ n = 0, 1, 2\ldots$$

j) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es 2 π/3 se obtiene restando las expresiones de las fases de ambos puntos e igualando el resultado a 2 π/3.

$$(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x_2) - (31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x_1) = 2\ \pi/3$$
$$26{,}2 \cdot (x_1 - x_2) = 2\ \pi/3$$
$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{2 \cdot 3{,}14/3}{26{,}2} = 0{,}080\ 0\ (\text{m})$$

Si la diferencia de fase hubiese sido de 2 π rad, *la distancia entre los puntos habría sido una longitud de onda* λ. *A una diferencia de fase de* 2 π/3 rad *le corresponde una distancia de* λ / 3 = 0,240 [m] / 3 = 0,0800 m

Todos los puntos que disten un múltiplo n de longitudes de onda del más próximo, también tendrán una diferencia de fase de 2 π/3 con el punto de referencia.

$$\Delta x = 0{,}0800 + 0{,}240 \cdot n\ [\text{m}]$$

k) La diferencia de fase entre dos puntos que disten 25 cm se obtiene restando las expresiones de las fases de ambos puntos

$$\Delta\varphi_x = (31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x_2) - (31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x_1)$$
$$\Delta\varphi_x = 26{,}2 \cdot (x_1 - x_2) = 26{,}2 \cdot 0{,}150 = 3{,}93\ \text{rad}$$

l) La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 0,05 s se obtiene restando las expresiones de las fases de ambos puntos

$$\Delta\varphi_t = (31{,}4 \cdot t_2 - 26{,}2 \cdot x) - (31{,}4 \cdot t_1 - 26{,}2 \cdot x)$$
$$\Delta\varphi_t = 31{,}4 \cdot (t_2 - t_1) = 31{,}4 \cdot 0{,}0500 = 1{,}57\ \text{rad}$$

m) Todos los puntos que disten un múltiplo n de longitudes de onda λ del punto en x = 0,03 m estarán en fase con él:

$$x_3 = 0{,}0300 + 0{,}240\ n\ [\text{m}],\ n = 0, 1, 2\ldots$$

m) En todos los tiempos que disten un múltiplo n de períodos T del tiempo en t = 0,05 s, el estado de vibración estará en fase con ese instante:

$$t_3 = 0{,}0500 + 0{,}200\ n\ [\text{s}],\ n = 0, 1, 2\ldots$$

Puede obtener las respuestas en la pestaña «Ondas» de la hoja de cálculo Fisica (es), Instrucciones.
En DATOS, escriba:

Ecuación		$y = A$	cos	$(\omega\ t \pm k\ x + \varphi_0)$
Amplitud	A =	0,1	m	
Frecuencia angular	ω =	10 π	rad/s	
Distancia entre puntos	Δx =	0,03	m	
en el instante	t =		s	
Diferencia de fase	Δφ =	π / 4	rad	

Para escribir el símbolo π, teclee :pi:
Puede escribir =10*PI() en vez de 10 π o =PI()/4 en vez de π / 4
Para ver los resultados, haga clic en las celdas de color naranja y elija las opciones como se muestra:

			Cifras significativas:	3
	Ecuación	general		
d)	Elongación	y = 0,100 con los(31,4 t − 26,2 x) (m)		
	Valor			
a)	Período	T = 0,200 s		

a)	Longitud de onda	λ =	0,240 m
b)	Velocidad de propagación	v =	1,20 m/s

Haciendo clic en las celdas de color naranja de «Período» y «Longitud de onda», podemos obtener otros resultados eligiendo

a)	Frecuencia	f =	5,00 Hz
a)	Número de onda k	k =	26,2 rad/m

Y también

a)	Frecuencia angular	ω =	31,4 rad/s

Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a 2 · λ) la hoja no le va a dar la solución. Puede escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»

OTROS CÁLCULOS					
Etiqueta:		Tiempo 2 λ			
Fórmula:		0,400			

La fórmula puede ser =2*0,24/1,2
poñendo os valores obtenidos.
También puede escribir =2*AVALOR(
Hacer clic en la celda que contiene «0,240» a la derecha de «λ =».
Verá ahora: =2*AVALOR(H19
Siga escribiendo =2*AVALOR(H19)/AVALOR(
Haga clic en la celda que contiene «1,20» a la derecha de «v =» y escriba el paréntesis final
=2*AVALOR(H18)/AVALOR(H20)
Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo «Ecuación» y eligiendo:

e)	Velocidad	$v = -3{,}14 \sin(31{,}4\ t - 26{,}2\ x)$ (m/s)

Y haciendo clic en la misma celda, elija

e)	Aceleración	$a = -98{,}7$ con los$(31{,}4\ t - 26{,}2\ x)$ (m/s²)

Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concretos, tenemos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. Tenemos que cambiar Δx por x, y escribir el valor del tiempo junto a t, y borrar el valor de la «Diferencia de fase»

Ecuación		$y = A$	cos	$(\omega\ t \pm k\ x)$
Amplitud	A =	0,1	m	
Frecuencia angular	ω =	10 π	rad/s	
Longitud de onda	λ =	0,24	m	
Posición del punto	x =	0,03	m	
en el instante	t =	0,05	s	
Diferencia de fase	Δφ =		rad	

Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos

	Valor		Máximo	En x = 0,03 m a los 0,05 s	
f)	Elongación	y_m =	0,100 m	y =	0,0707 m

En la misma celda,

f), g)	Velocidad	v_m =	3,14 m/s	v =	−2,22 m/s

También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:

f), g)	Aceleración	a_m =	98,7 m/s²	a =	−69,8 m/s²

Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición x = 0,03 m, borrando el valor del tiempo en los datos

en el instante	t =		s

y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo

h)	Tiempo de elongación máxima, t =	0,0250 + 0,100 n (s)

Haciendo clic en la misma celda, podemos ver

i)	Tiempo de velocidad máxima, t =	0,0750 + 0,100 n (s)

Para ver la distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es 2 π/3, solo habrá que escribir en los datos:

Diferencia de fase	$\Delta\varphi$ =	2 π / 3	rad

Aparecerá en la última línea de los resultados:

j)	Distancia entre puntos Δx =	0,0800 m/s	$\Delta\varphi$ = 2,09 rad	

Para el apartado siguiente, cambiamos en los datos x por Δx, escribimos la distancia, elegimos la unidad y borramos el valor de la «Diferencia de fase»

Distancia entre puntos	Δx =	15	cm
en el instante	t =		s
Diferencia de fase	$\Delta\varphi$ =		rad

La última línea de RESULTADOS mostrará:

k)	Diferencia de fase $\Delta\varphi$ =	3,93 rad/s	Δx = 15 cm	

Podemos hacer clic en la celda de color naranja, para que la diferencia de fase aparezca en función de π.

k)	Diferencia de fase $\Delta\varphi$ =	5 π/4 rad/s	Δx = 15 cm	π

Para ver la diferencia de fase cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 0,05 s, esta hoja no le da el resultado.

Para ver qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en x = 0,03 m, volvemos a cambiar en los datos Δx por x, escribimos la posición y elegimos la unidad.

Posición del punto	x =	0,03	m

Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» y eligiendo

m)	Posiciones de puntos en fase, x =	0,0300 + 0,240 n (m)

Para ver en qué tiempos el estado de vibración del punto está en fase con la vibración para t = 0,05 s, borramos los datos de x, y escribimos el tiempo.

en el instante	t =	0,05	s

Faceme los clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo

n)	Tiempos de puntos en fase, t =	0,0500 + 0,200 n (s)

2. Una onda armónica transversal de frecuencia 2 Hz, longitud de onda 20 cm y amplitud 4 cm, se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje X. En el instante t = 0, la elongación en el punto x = 0 es y = 2,83 cm.
   a) Expresa matemáticamente la onda y represéntala gráficamente en (t = 0; 0 < x < 40 cm)
   b) Calcula la velocidad de propagación de la onda y determina, en función del tiempo, la velocidad de oscilación transversal de la partícula situada en x = 5 cm.

(A.B.A.U. Jul. 21)

Rta.: a) $y = 0{,}0400 \text{ sen}(4\,\pi\, t - 10\,\pi\, x + \pi / 4)$ [m]; b) v_p = 0,400 m/s; $v = 0{,}503 \cos(4\,\pi\, t - \pi / 4)$ [m/s]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia	f = 2,00 Hz = 2,00 s⁻¹
Longitud de onda	λ = 20,0 cm = 0,200 m
Amplitud	A = 0,0400 m = 0,0400 m
Elongación en x = 0 para t = 0	y = 2,83 cm = 0,0283 m
Incógnitas	
Ecuación de la onda (frecuencia angular y número de onda)	ω, k
Velocidad de propagación	v_p
Velocidad de la partícula en x = 5 cm en función del tiempo	v
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Frecuencia angular	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 4{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 12{,}6\ \text{rad·s}^{-1}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{0{,}200\ [\text{m}]}=10\,\pi\ \text{rad/m}=31{,}4\ \text{rad/m}$$

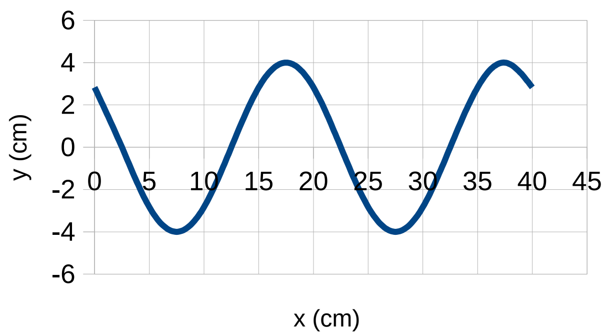
Se calcula la fase inicial a partir de la elongación en $x = 0$ para $t = 0$.

$$y(x,\ t) = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot x + \varphi_0)\ [\text{m}]$$
$$0{,}0283\ [\text{m}] = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot 0 - 31{,}4 \cdot 0 + \varphi_0)\ [\text{m}] = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(\varphi_0)$$
$$\text{sen}(\varphi_0) = 0{,}0283\ /\ 0{,}0400 = 0{,}721$$
$$\varphi_0 = \text{arcsen}\ 0{,}721 = 0{,}786\ \text{rad} = \pi\ /\ 4\ \text{rad}$$

La ecuación de onda queda:

$$y(x,\ t) = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot x + 0{,}786)\ [\text{m}] = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(4\ \pi \cdot t - 10\ \pi \cdot x + \pi\ /\ 4)\ [\text{m}]$$

La representación gráfica es la de la figura:



b) Se calcula la velocidad de propagación a partir de la longitud de onda y la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}200\ [\text{m}] \cdot 2{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 0{,}400\ \text{m/s}$$

La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respeto al tiempo:

$$v=\frac{\text{d}\,y}{\text{d}\,t}=\frac{\text{d}\{0{,}040\ 0\,\text{sen}(12{,}6\cdot t-31{,}4\cdot x+0{,}786)\}}{\text{d}\,t}=0{,}040\ 0\,12{,}6\cos(12{,}6\cdot t-31{,}4\cdot x+0{,}786)\ [\text{m/s}]$$
$$v = 0{,}503 \cdot \cos(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot x + 0{,}786)\ [\text{m/s}]$$

Para x = 5 cm (=0,05 m), la expresión queda:

$$v = 0{,}503 \cdot \cos(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot 0{,}0500 + 0{,}786) = 0{,}503 \cdot \cos(12{,}6 \cdot t - 0{,}786) = 0{,}503 \cdot \cos(4\ \pi \cdot t - \pi\ /\ 4)\ [\text{m/s}]$$

Puede obtener las respuestas en la pestaña «Ondas» de la hoja de cálculo Fisica (es), Instrucciones.

Ecuación		$y = A$	sen	$(\omega\ t \pm k\ x + \varphi_0)$
Amplitud	A =	4	cm	
Frecuencia	f =	2	Hz	
Longitud de onda	λ =	0,2	m	
Posición del punto	x =	5	cm	
en el instante	t =	0	s	
Elongación inicial	y_0 =	2,83	cm	
Diferencia de fase	$\Delta\varphi$ =		rad	

Para ver los resultados, haga clic en las celdas de color naranja y elija las opciones como se muestra:

		Cifras significativas:	3
Ecuación	general		
Elongación	y = 0,0400 sen(12,6 t − 31,4 x + 0,786) (m)		

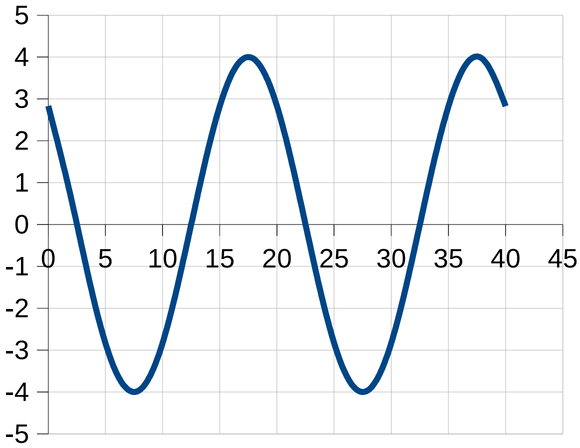
Más abajo verá:

Velocidad de propagación	v =	0,400 m/s

Para la representación gráfica elija «Tiempo (s)» en la celda de color naranja y teclee los datos del tiempo y las posiciones inicial y final.

Tiempo (s)		mín	máx
0	Posición (cm)	0	40

La gráfica será como la siguiente:



Para ver los resultados de apartado b) cambie «general» por «en x = 5 cm» y «Elongación» por «Velocidad».

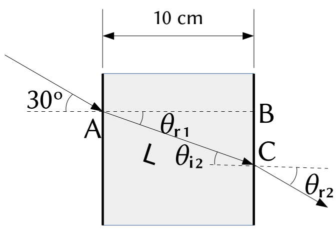
Ecuación	en x = 5 cm
Velocidad	v = 0,503 cos(12,6 t − 1,57) (m/s)

● Dioptrio plano

1. Un rayo de luz de frecuencia 5·10¹⁴ Hz incide con un ángulo de incidencia de 30° sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,50 y el del aire 1,00:
   a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la lámina de vidrio.
   b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.
   c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire.
   Dato: c = 3,00·10⁸ m/s *(P.A.U. Sep. 14)*
   Rta.: b) λ(aire) = 600 nm; λ(vidrio) = 400 nm; L = 10,6 cm; c) θ_{r2} = 30°

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia del rayo de luz	$f = 5{,}00\cdot 10^{14}$ Hz
Ángulo de incidencia	θ_{i1} = 30,0°
Espesor de la lámina de vidrio	e = 10,0 cm = 0,100 m
Índice de refracción del vidrio	n_v = 1,50
Índice de refracción del aire	n_a = 1,00
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3{,}00\cdot 10^8$ m/s
Incógnitas	
Longitud de onda de luz en el aire y en el vidrio	λ_a, λ_v
Longitud recorrida por el rayo de luz en el interior de la lámina	L
Ángulo de desviación del rayo al salir de la lámina	θ_{r2}
Ecuaciones	
Índice de refracción de un medio $_i$ en el que la luz se desplaza a la velocidad v_i	$n_i = \frac{c}{v_i}$
Relación entre la velocidad v, la longitud de onda λ y la frecuencia f	$v = \lambda \cdot f$
Ley de Snell de la refracción	$n_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i = n_r \cdot \operatorname{sen} \theta_r$

Solución:



a) Las leyes de Snell de la refracción son:
1.ª El rayo incidente, el rayo refractado y la normal están en el mismo plano.
2.ª La relación matemática entre los índices de refracción n_i y n_r de los medios incidente y refractado y los ángulos de incidencia y refracción θ_i y θ_r, es:

$$n_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i = n_r \cdot \operatorname{sen} \theta_r$$

En la figura se representa la trayectoria de la luz. El rayo incidente en el punto A con un ángulo de incidencia θ_{i1} = 30° pasa del aire al vidrio dando un rayo refractado que forma el primer ángulo de refracción θ_{r1} y el segundo ángulo de incidencia θ_{i2} entre el vidrio y el aire. Finalmente, sale de la lámina de vidrio por el punto B con el segundo ángulo de refracción θ_{r2}.

b) La velocidad de la luz en el aire es:

$$v_a=\frac{c}{n_a}=\frac{3{,}00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{1{,}00}=3{,}00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el aire es:

$$\lambda_a=\frac{v_a}{f}=\frac{3{,}00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{5{,}00\cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}}=6{,}00\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}=600\ \mathrm{nm}$$

La velocidad de la luz en el vidrio es:

$$v_v=\frac{c}{n_v}=\frac{3{,}00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{1{,}50}=2{,}00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el vidrio es:

$$\lambda_v=\frac{v_v}{f}=\frac{2{,}00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{5{,}00\cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}}=4{,}00\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}=400\ \mathrm{nm}$$

Como el espesor de la lámina es de 10 cm, la longitud recorrida por el rayo es la hipotenusa L del triángulo ABC.
El primer ángulo de refracción θ_{r1} se puede calcular aplicando la ley de Snell

$$1{,}00 \cdot \operatorname{sen} 30° = 1{,}50 \cdot \operatorname{sen} \theta_{r1}$$

$$\operatorname{sen}\theta_{r1}=\frac{1{,}00\cdot \operatorname{sen} 30°}{1{,}50}=0{,}333$$

$$\theta_{r1} = \operatorname{arcsen} 0{,}333 = 19{,}5°$$

Por tanto, la hipotenusa L vale

$$L=\frac{e}{\cos\theta_{r1}}=\frac{10{,}0\ [\mathrm{cm}]}{\cos 19{,}5°}=10{,}6\ \mathrm{cm}$$

c) Como la lámina de vidrio es de caras paralelas, el segundo ángulo de incidencia α_{i2} es igual al primer ángulo de refracción:

$$\theta_{i2} = \theta_{r1} = 19{,}5°$$

Para calcular el ángulo con el que sale de la lámina, se vuelve a aplicar la ley de Snell entre el vidrio (que ahora es el medio incidente) y el aire (que es el medio refractado):

$$1{,}50 \cdot \operatorname{sen} 19{,}5° = 1{,}00 \cdot \operatorname{sen} \theta_{r2}$$

$$\operatorname{sen}\theta_{r2}=\frac{1{,}50\cdot \operatorname{sen} 19{,}5°}{1{,}00}=0{,}500$$

$$\theta_{r2} = \operatorname{arcsen} 0{,}500 = 30{,}0°$$

Análisis: Este resultado es correcto porque el rayo sale paralelo al rayo incidente original.

Puede obtener las respuestas en la pestaña «Dioptrio» de la hoja de cálculo Fisica (es), Instrucciones.

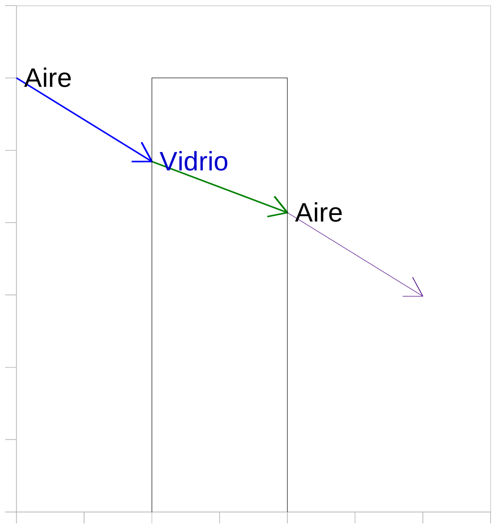
Índice de refracción					
Medios	n		Ángulo de	Aire-Vidrio	
Aire	1		incidencia	30	°
Vidrio	1,5		Espesor	10	cm
Aire	1				
		Frecuencia		$5\cdot 10^{14}$	Hz

Los resultados son:

	Ángulo	refractado	límite
	Aire-Vidrio	19,5°	
	Vidrio-Aire	30,0°	41,8°

Longitud recorrida por el rayo en la lámina			10,6 cm

	Aire	Vidrio	Aire	
Longitud de onda	$6{,}00·10^{-7}$	$4{,}00·10^{-7}$	$6{,}00·10^{-7}$	m



2. Un rayo de luz pasa del agua (índice de refracción n = 4/3) al aire (n = 1). Calcula:
   a) El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.
   b) El ángulo límite.
   c) ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?

(P.A.U. Jun. 13)

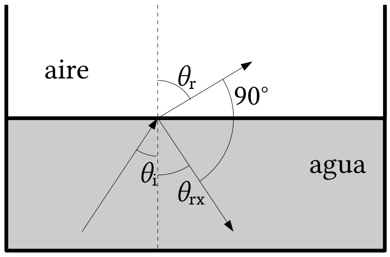
Rta.: a) θ_i = 36,9°; b) λ = 48,6°

Datos	***Cifras significativas: 3***
Índice de refracción del aire	n = 1,00
Índice de refracción del agua	n_a = 4 / 3 = 1,33
Ángulo entre el rayo refractado y el reflejado	θ_i = 90,0°
Incógnitas	
Ángulo de incidencia	θ_i
Ángulo límite	λ
Ecuaciones	
Ley de Snell de la refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = 1{,}00 \cdot \text{sen } \theta_r$$



A la vista del dibujo debe cumplirse que

$$\theta_r + 90° + \theta_{rx} = 180°$$

Como el ángulo de reflexión θ_{rx} es igual al ángulo de incidencia θ_i, la ecuación anterior se convierte en:

$$\theta_i + \theta_r = 90°$$

Es decir, que el ángulo de incidencia θ_i y el de refracción θ_r son complementarios.
El seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario. Entonces la primera ecuación queda:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r = \cos \theta_i$$

$$\tan \theta_i = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$$

$$\theta_i = \arctan 0{,}75 = 36{,}9°$$

b) Ángulo límite λ es el ángulo de incidencia tal que el de refracción vale 90°

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \lambda = 1{,}00 \cdot \text{sen } 90{,}0°$$

$$\text{sen } \lambda = 1{,}00 / 1{,}33 = 0{,}75$$

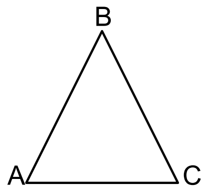
$$\lambda = \arcsin 0{,}75 = 48{,}6°$$

c) No. Cuando la luz pasa del aire al agua, el ángulo de refracción es menor que el de incidencia. Para conseguir un ángulo de refracción de 90° el ángulo de incidencia tendría que ser mayor que 90° y no estaría en el aire.
También puede deducirse de la ley de Snell.

$$1{,}00 \cdot \text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 \cdot \text{sen } 90°$$
$$\text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 \,/\, 1{,}00 > 1$$

Es imposible. El seno de un ángulo no puede ser mayor que uno.

3. Sobre un prisma equilátero de ángulo 60° (ver figura), incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de 50° con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base AC:



a) Calcula el índice de refracción del prisma.
b) Determina el ángulo de desviación del rayo al salir del prisma, dibujando la trayectoria que sigue el rayo.
c) Explica si la frecuencia y la longitud de onda correspondientes al rayo luminoso son distintas, o no, dentro y fuera del prisma.

Dato: n(aire) = 1 *(P.A.U. Sep. 11)*

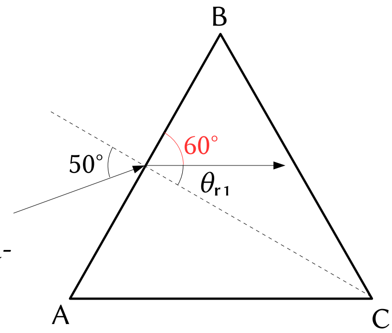
Rta.: a) $n_p = 1{,}5$; b) $\theta_{r2} = 50°$

Datos	***Cifras significativas: 2***
Ángulos del triángulo equilátero	$\theta = 60°$
Ángulo de incidencia	$\theta_i = 50°$
Índice de refracción del aire	$n_a = 1{,}0$
Incógnitas	
Índice de refracción del prisma	n_p
Ángulo de desviación del rayo al salir del prisma	θ_{r2}
Ecuaciones	
Ley de Snell de la refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) En la ley de Snell de la refracción

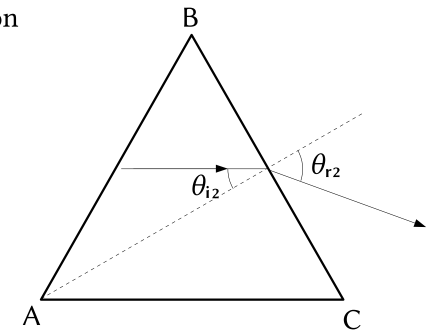
$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$



n_i y n_r representan los índices de refracción de los medios incidente y refractado
θ_i y θ_r representan los ángulos de incidencia y refracción que forma cada rayo con la normal a la superficie de separación entre los dos medios.
El primer ángulo de refracción θ_{r1}, que forma el rayo de luz refractado paralelo a la base del prisma, vale 30°, ya que es el complementario al de 60° del triángulo equilátero.

$$n_p = n_r = \frac{n_i \cdot \text{sen}\,\theta_{i1}}{\text{sen}\,\theta_{r1}} = \frac{1{,}0 \cdot \text{sen}\,50°}{\text{sen}\,30°} = 1{,}5$$

b) Cuando el rayo sale del prisma, el ángulo de incidencia θ_{i2} del rayo con la normal al lado BC vale 30°. Volviendo a aplicar la ley de Snell



$$\text{sen}\,\theta_{r2} = \frac{n_i \cdot \text{sen}\,\theta_{i2}}{n_r} = \frac{1{,}5 \cdot \text{sen}\,30°}{1{,}0} = 0{,}77$$
$$\theta_{r2} = \text{arcsen } 0{,}77 = 50°$$

c) La frecuencia f de una onda electromagnética es una característica de la misma y no varía con el medio.
La longitud de onda λ está relacionada con ella por

$$c = \lambda \cdot f$$

La velocidad de la luz en un medio transparente es siempre menor que en el vacío. El índice de refracción del medio es el cociente entre ambas velocidades.

$$n=\frac{c}{v}$$

La velocidad de la luz en el aire es prácticamente igual a la del vacío, mientras que en el prisma es 1,5 veces menor. Como la frecuencia es la misma, la longitud de onda (que es inversamente proporcional a la frecuencia) en el prisma es 1,5 veces menor que en el aire.

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, y del traductor de la CIXUG.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM).
Se consultó al Copilot de Microsoft Edge y se tuvieron en cuenta algunas de sus respuestas en las cuestiones.

Actualizado: 07/10/24

Sumario

ONDAS