Gravitación

MÉTODO, APROXIMACIONES Y RECOMENDACIONES

● MÉTODO

1. En general:
   a) Se dibujan las fuerzas que actúan sobre el sistema.
   b) Se calcula cada fuerza o vector intensidad de campo.
   c) Se calcula la resultante por el principio de superposición.
   d) Se aplica la 2.ª ley de Newton (ley Fundamental de la Dinámica)
   e) Se calculan las energías potenciales en los puntos de origen 1 y destino 2.
   f) Se calcula el trabajo de las fuerzas del campo.
   g) El trabajo de la fuerza exterior será, si no hay variación de energía cinética:

2. En los problemas de satélites:

La fuerza gravitatoria, $\vec{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\vec{\boldsymbol{F}}=m\cdot\vec{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

De ella podemos obtener la ecuación del radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

También se puede obtenerr la ecuación del período:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M}}$$

Y también la tercera ley de Kepler. Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G \cdot M} \cdot T_1^2}{\cancel{G \cdot M} \cdot T_2^2}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

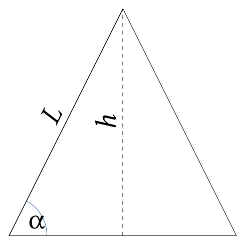
3. Cálculo del vector intensidad de campo gravitatorio en un punto creado por una única masa.
La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales o esféricas, M y m, viene dada por la ley de la gravitación de Newton. G es la constante de la gravitación universal y $\bar{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las masas.

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

El campo gravitatorio en un punto situado a una distancia, r, de una masa, M, puntual es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r}{\cancel{m}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

a) Se determina la distancia, r, entre la masa M (situada en el punto 1) que crea el campo y el punto 2, donde se pide calcular el vector intensidad de campo gravitatorio.



(a.1) Si los datos son las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de los puntos, la distancia, r_{12}, entre ellos es:

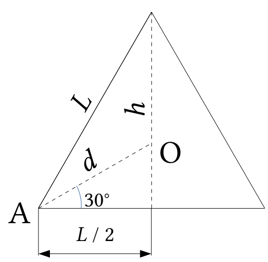
$$r_{12} = |\vec{\boldsymbol{r}}_{12}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(a.2) En el caso de puntos en un triángulo, la altura, h, se calcula:

$$h = L \cdot \text{sen}\ \alpha$$

(a.3) Y si el triángulo es equilátero, la distancia, d, desde el punto medio, O, a un vértice, A, se puede calcular como:

$$d = \frac{L/2}{\cos 30°}$$



b) Se determina el vector unitario a partir del vector de posición del punto 2 respecto al punto 1 donde se encuentra la masa, M, que crea el campo.

(b.1) Si los datos son las coordenadas de los puntos, el vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}_{12}$ es:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{12}=\Delta\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_2-\vec{\boldsymbol{r}}_1=(x_2-x_1)\vec{\mathbf{i}}+(y_2-y_1)\vec{\mathbf{j}}$$

El vector unitario será:

$$\vec{\boldsymbol{u}}_r=\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{|\Delta\vec{\boldsymbol{r}}|}$$

(b.2) En caso de conocer el ángulo α que forma el vector $\overline{\boldsymbol{r}}_{12}$ con el eje X horizontal, el vector unitario se calcula con la expresión:

$$\overline{\boldsymbol{u}}_r = \cos\alpha\,\overline{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\alpha\,\overline{\mathbf{j}}$$

c) Se calcula el vector intensidad de campo con la ecuación:

$$\vec{\boldsymbol{g}}=-G\frac{M}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Sin olvidar escribir las unidades (N/kg) en el resultado.

d) Se calcula el módulo del vector intensidad de campo, $|\vec{\boldsymbol{g}}|=\sqrt{g_x^2+g_y^2}$, sin olvidar escribir las unidades (N/kg) en el resultado.

4. Cálculo del vector intensidad de campo gravitatorio en un punto creado por varias masas.
La intensidad de campo gravitatorio en un punto debido a varias masas puntuales es la suma vectorial de las intensidades de campo gravitatorio creadas por cada masa como si las otras no estuviesen.
   a) Se dibujan los vectores intensidad de campo gravitatorio producidos en el punto por cada una de las masas, y se dibuja también el vector intensidad de campo resultante, que es la suma vectorial de ellos (principio de superposición).
   b) Se calculan cada uno de los vectores intensidad de campo creados por las masas del mismo modo que se indicó en el apartado anterior, aunque a veces no es necesario repetir cálculos porque se pueden deducir los resultados a partir del primero, a la vista de la simetría de la situación.
   c) Se calcula el vector fuerza o intensidad de campo gravitatorio resultante en el punto como la suma vectorial de las fuerzas o intensidades de campo gravitatorio producidas por cada masa, aplicando el principio de superposición.
   d) Se analiza el resultado comparándolo con el croquis dibujado.
   e) Se calcula el módulo del vector intensidad de campo resultante sin olvidar escribir las unidades.

5. Cálculo del vector fuerza gravitatoria sobre una masa m en un punto creado por varias masas:
La fuerza gravitatoria $\overline{\boldsymbol{F}}_G$ entre dos masas, M y m, puntuales separadas una distancia r se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Se realiza de forma análoga a la del campo gravitatorio, usando la expresión de la fuerza en vez de la intensidad de campo, y teniendo en cuenta que las unidades son newtons (N).

6. Cálculo del trabajo necesario para desplazar una masa m entre dos puntos A y B.
Suponiendo que la masa parte del reposo desde el punto A y que llega a punto B con velocidad nula, el trabajo de la fuerza resultante es nulo, y el trabajo de la fuerza exterior será igual y de signo contrario al trabajo de las fuerzas del campo:

$$W_{(ext)} = -W_{A\to B}$$

El trabajo que hacen las fuerzas del campo conservativo es igual al valor de la masa m que se desplaza por la diferencia de potencial entre los puntos de partida A y llegada B:

$$W_{A\to B} = -(E_{p\,B} - E_{p\,A}) = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

La energía potencial de un objeto de masa m que está a una distancia r de un astro es el trabajo que hace la fuerza gravitatoria cuando el objeto se traslada desde su posición hasta el infinito

$$E_P = W_{r\to\infty} = \int_r^\infty \vec{F}_G \, d\vec{r} = \int_r^\infty -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r \, d\vec{r} = \int_r^\infty -G\frac{M\cdot m}{r^2} \, dr = \left[G\frac{M\cdot m}{r}\right]_r^\infty = -G\frac{M\cdot m}{r}$$

a) Para el punto de partida se calculan las distancias entre el punto en el que hay que calcular la energía potencial y los puntos en los que se encuentran las masas, si no se han calculado antes.
b) Se calcula la energía potencial en el punto producido por cada masa M, con la ecuación:

$$E_p = -G\frac{M\cdot m}{r}$$

c) Se suman las energías potenciales producidas por cada masa en ese punto.
d) Se repite el proceso para el punto de llegada.
e) Se calcula el trabajo de las fuerzas del campo.

$$W_{A\to B} = -(E_{p\,B} - E_{p\,A}) = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

f) Se explica que el trabajo de las fuerzas exteriores es igual y de signo contrario.

7. Cálculo de la velocidad de escape desde el suelo.
La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa m situado en la superficie de un astro de masa M y radio R es:

$$E_p = -G\frac{M\cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula.
La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right) = -G\frac{M\cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right) = G\frac{M\cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

8. Cálculo de la velocidad de escape desde la órbita.
La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{e\ o\uparrow} = \sqrt{2 G \frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.
La energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve con velocidad v, es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa m, que gira alrededor de un astro de masa M, en una órbita de radio r, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Donde G es la constante de la gravitación universal.
La energía mecánica de un cuerpo de masa m, que se encuentra en órbita de radio r alrededor de un astro de masa M, es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2, la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}\right) = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e\ o\rightarrow} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{\mathrm{e\,o}\leftarrow}=\sqrt{\frac{3}{2}G\frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{\mathrm{e\,o}}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

● APROXIMACIONES

1. Los astros se consideran como cuerpos esféricos homogéneos. Así se puede considerar el campo y la fuerza gravitatoria en su exterior como si toda la masa del astro estuviese concentrada en su centro.

2. Solo se tiene en cuenta la influencia gravitatoria del astro más próximo respecto al satélite.

3. En las transferencias de órbitas, lanzamientos, caídas, se supone que la única fuerza que actúa es la fuerza gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto la energía mecánica se conserva

● RECOMENDACIONES

1. Se hará una lista con los datos, pasándolos al Sistema Internacional si no lo estuviesen.

2. Se hará otra lista con las incógnitas.

3. Se dibujará un croquis de la situación, procurando que las distancias del croquis sean coherentes con ella. Se deberá incluir cada una de las fuerzas o de las intensidades de campo, y su resultante.

4. Se hará una lista de las ecuaciones que contengan las incógnitas y alguno de los datos, mencionando a la ley o principio al que se refieren.

5. En caso de tener alguna referencia, al terminar los cálculos se hará un análisis del resultado para ver si es el esperado. En particular, comprobar que los vectores campo gravitatorio tienen la dirección y el sentido acorde con el croquis.

6. En muchos problemas las cifras significativas de los datos son incoherentes. Se resolverá el problema suponiendo que los datos que aparecen con una o dos cifras significativas tienen la misma precisión que el resto de los datos (por lo general tres cifras significativas), y al final se hará un comentario sobre las cifras significativas del resultado.

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.