

## Gravitación

[Método, aproximaciones y recomendaciones](#)

### ◊ PROBLEMAS

#### ● Satélites

1. Un satélite artificial de masa  $10^2$  kg gira en torno a la Tierra a una altura de  $4 \cdot 10^3$  km sobre la superficie terrestre. Calcula:
- Su velocidad orbital, aceleración y período, supuesta la órbita circular.
  - Halla el módulo del momento angular del satélite respecto del centro de la Tierra.
  - Enuncia las leyes de Kepler.
- Datos:  $R_T = 6,37 \cdot 10^6$  m;  $g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. (P.A.U. sep. 16)
- Rta.:** a)  $v = 6,20$  km/s;  $T = 2$  h 55 min;  $a = 3,70$  m/s<sup>2</sup>; b)  $L_O = 6,42 \cdot 10^{12}$  kg·m<sup>2</sup>/s.

#### Datos

Radio de la Tierra

Altura de la órbita

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

Masa del satélite

#### Cifras significativas: 3

$$R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = 4,00 \cdot 10^3 \text{ km} = 4,00 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$m = 100 \text{ kg}$$

#### Incógnitas

Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra

$v$

Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra

$T$

Valor de la aceleración del satélite

$a$

Módulo del momento angular del satélite respecto del centro de la Tierra

$L_O$

#### Otros símbolos

Constante de la gravitación universal

$G$

Masa de la Tierra

$M$

#### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

2.ª ley de Newton de la Dinámica

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Momento angular de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad,  $\vec{v}$ , a una distancia,  $\vec{r}$ , de un punto O que se toma como origen

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

#### Solución:

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 4,00 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 1,04 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{1,04 \cdot 10^7 \text{ [m]}}} = 6,20 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 6,20 \text{ km/s}$$

*Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 6,20 km/s está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,04 \cdot 10^7 \text{ [m]}}{6,20 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 1,05 \cdot 10^4 \text{ s} = 2 \text{ h } 55 \text{ min}$$

*Análisis: El período de un satélite en órbita baja (300-400 km) es de hora y media. El valor obtenido es mayor, porque la altura de la órbita 4000 km también lo es.*

La única fuerza que actúa sobre el astronauta es su peso, o sea, la atracción gravitatoria de la Tierra. Por la ley de Newton de la gravitación universal, en la órbita de radio  $r$ :

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2}$$

La aceleración será:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{g_0 \cdot R^2}{r^2} = \frac{9,81 \text{ [m/s}^2] \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{(1,04 \cdot 10^7 \text{ [m]})^2} = 3,70 \text{ m/s}^2$$

b) El momento angular de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad,  $\vec{v}$ , a una distancia,  $\vec{r}$ , de un punto O que se toma como origen es:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es:

$$|\vec{L}_O| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha = 1,04 \cdot 10^7 \text{ [m]} \cdot 100 \text{ [kg]} \cdot 6,20 \cdot 10^3 \text{ [m/s]} \cdot \sin 90^\circ = 6,42 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

c) Las leyes de Kepler pueden enunciarse así:

- 1.ª ley: Los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol que ocupa uno de los focos de la elipse.
- 2.ª ley: El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
- 3.ª ley: Los cuadrados de los períodos de los planetas alrededor del Sol son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses.

2. La nave espacial Discovery, lanzada en octubre de 1998, describía alrededor de la Tierra una órbita circular con una velocidad de  $7,62 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ :

- a) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se encontraba?
- b) ¿Cuánto tiempo tardaba en dar una vuelta completa?
- c) ¿Cuántos amaneceres veían cada 24 horas los astronautas que iban en el interior de la nave?

Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $R_T = 6370 \text{ km}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

(P.A.U. jun. 16)

**Rta.:** a)  $h = 503 \text{ km}$ ; b)  $T = 1 \text{ h } 34 \text{ min}$ ; c)  $n = 15$ .

### Datos

Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.

Radio de la Tierra

Masa de la Tierra

Constante de la gravitación universal

### Incógnitas

Altura de la órbita

Tiempo de una vuelta completa

Número de vueltas en 24 horas

### Otros símbolos

Masa del satélite

Radio de la órbita

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$   $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$   $a_N = \frac{v^2}{r}$

### Cifras significativas: 3

$v = 7,62 \text{ km/s} = 7,62 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

$R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$M = 5,93 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$h$

$T$

$n$

$m$

$r$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

### Solución:

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

a) Se despeja el radio de la órbita de la expresión de la velocidad orbital:

$$r = \frac{G \cdot M}{v^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{m/s}^2] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{m}]}{(7,62 \cdot 10^3 [\text{m/s}])^2} = 6,87 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra del radio de la órbita:

$$h = r - R = 6,87 \cdot 10^6 [\text{m}] - 6,37 \cdot 10^6 [\text{m}] = 5,0 \cdot 10^5 \text{ m} = 500 \text{ km}$$

*Análisis: Se espera que la altura de un satélite en órbita baja alrededor de la Tierra sea alrededor de 400 km. El resultado de 500 km está de acuerdo con esta suposición.*

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,87 \cdot 10^6 [\text{m}]}{7,62 \cdot 10^3 [\text{m/s}]} = 5,67 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 34 \text{ min}$$

c) El número de amaneceres que ven los astronautas en 24 h es:

$$n = \frac{24 \text{ h}}{1,57 \text{ h}} = 15$$

3. Un satélite artificial de 500 kg de masa gira en una órbita circular a 5000 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Calcula:

- a) Su velocidad orbital.  
 b) Su energía mecánica en la órbita.  
 c) La energía que hay que comunicarle para que, partiendo de la órbita, llegue al infinito.

Datos:  $R = 6370 \text{ km}$ ;  $g_0 = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

(P.A.U. sep. 15)

**Rta.:** a)  $v = 5,91 \text{ km/s}$ ; b)  $E = -8,74 \cdot 10^9 \text{ J}$ ; c)  $\Delta E = 8,74 \cdot 10^9 \text{ J}$ .

### Datos

Masa del satélite

Altura de la órbita

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

Radio de la Tierra

### Incógnitas

Velocidad orbital

Energía mecánica del satélite en órbita

Energía que hay que comunicarle para que llegue al infinito

### Otros símbolos

Masa de la Tierra

Constante de la gravitación universal

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

Energía mecánica

### Cifras significativas: 3

$m = 500 \text{ kg}$

$h = 5000 \text{ km} = 5,00 \cdot 10^6 \text{ m}$

$g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$

$R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$v$

$E$

$\Delta E$

$M$

$G$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

### Solución:

- a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 5,00 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 11,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,80 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{11,37 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 5,91 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 5,91 \text{ km/s}$$

*Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 5,91 km/s está de acuerdo con esta suposición.*

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9,80 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 500 \text{ [kg]}}{11,37 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = -1,75 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 500 \text{ [kg]} \cdot (5,91 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 8,74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = 8,74 \cdot 10^9 \text{ [J]} + (-17,5 \cdot 10^9 \text{ [J]}) = -8,74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

*Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo  $G \cdot M / r$  por  $v^2$  en la expresión de la energía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

c) La energía potencial en el infinito es nula, porque se toma como origen de energías potenciales. Suponiendo que llega al infinito con velocidad nula, la energía que tendrá en el infinito será nula. La energía que hay que comunicarle es:

$$\Delta E = E(\infty) - E(\text{órbita}) = 0 - (-8,74 \cdot 10^9 \text{ J}) = 8,74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

4. El vehículo espacial Apolo VIII estuvo en órbita circular alrededor de la Luna a 113 km sobre su superficie. Calcula:
- El período de la órbita.
  - Las velocidades lineal y angular del vehículo.
  - La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.
- Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $R(\text{Luna}) = 1740 \text{ km}$ ;  $M(\text{Luna}) = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ . (P.A.U. jun. 15)
- Rta.:** a)  $T = 1 \text{ h } 59 \text{ min}$ ; b)  $v = 1,63 \text{ km/s}$ ;  $\omega = 8,79 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ ; c)  $v_e = 1,68 \text{ km/s}$ .

**Datos**

Masa de la Luna

Radio de la Luna

Altura de la órbita

Constante de la gravitación universal

**Incógnitas**

Período de la órbita

Valor de la velocidad lineal del satélite

Velocidad angular del satélite

Velocidad de escape en la órbita de la Luna

**Otros símbolos**

Masa del satélite

**Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$ Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$ Velocidad angular en un movimiento circular de período  $T$ Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$ 

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

Energía mecánica

**Cifras significativas: 3** $M = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$  $R = 1740 \text{ km} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$  $h = 113 \text{ km} = 1,13 \cdot 10^5 \text{ m}$  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  $T$  $v$  $\omega$  $v_e$  $m$ 

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$\omega = 2\pi / T$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

**Solución:**

b) Se calcula el radio de la órbita del Apolo VIII:

$$r = R + h = 1,74 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 1,13 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 1,85 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{\cancel{r}^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Se sustituyen los datos en la ecuación de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 7,36 \cdot 10^{22} [\text{kg}]}{1,85 \cdot 10^6 [\text{m}]}} = 1,63 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 1,63 \text{ km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,85 \cdot 10^6 [\text{m}]}{1,63 \cdot 10^3 [\text{m/s}]} = 7,15 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 59 \text{ min}$$

b) Se calcula la velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 [\text{rad}]}{7,15 \cdot 10^3 [\text{s}]} = 8,79 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.

La velocidad de escape le proporcionaría la energía,  $\Delta E$ , necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.

La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{e \circ \uparrow} = \sqrt{2G \frac{M}{r}}$$



Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.

La energía cinética de un objeto de masa  $m$ , que se mueve con velocidad  $v$ , es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa  $m$ , que gira alrededor de un astro de masa  $M$ , en una órbita de radio  $r$ , es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Donde  $G$  es la constante de la gravitación universal.

La energía mecánica de un cuerpo de masa  $m$ , que se encuentra en órbita de radio  $r$  alrededor de un astro de masa  $M$ , es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right)$$

La [velocidad de un satélite](#) que gira a una distancia  $r$  alrededor de un astro de masa  $M$  es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituyendo  $v^2$ , la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} \right) = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e \rightarrow} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{e \leftarrow} = \sqrt{\frac{3}{2} G \frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{e \rightarrow} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

c) Se calcula la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot \frac{7,36 \cdot 10^{22} [\text{kg}]}{1,74 \cdot 10^6 [\text{m}]}} = 1,68 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 1,68 \text{ km/s}$$

5. Ceres es el planeta enano más pequeño del sistema solar y tiene un período orbital alrededor del Sol de 4,60 años, una masa de  $9,43 \cdot 10^{20} \text{ kg}$  y un radio de 477 km. Calcula:

- a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio que Ceres crea en su superficie.  
 b) La energía mínima que ha de tener una nave espacial de 1000 kg de masa para que, saliendo de la superficie, pueda escapar totalmente de la atracción gravitatoria del planeta.  
 c) La distancia media entre Ceres y el Sol, teniendo en cuenta que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de  $1,50 \cdot 10^{11}$  m y que el período orbital de la Tierra alrededor del Sol es de un año.

Dato:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

(P.A.U. sep. 14)

**Rta.:** a)  $g = 0,277 \text{ m/s}^2$ ; b)  $E = 1,32 \cdot 10^8 \text{ J}$ ; c)  $r = 4,15 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

### Datos

Período orbital de Ceres

Masa de Ceres

Radio de Ceres

Masa de la nave espacial

Distancia de la Tierra al Sol

Período orbital de la Tierra

Constante de la gravitación universal

### Incógnitas

Intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Ceres

Energía de la nave espacial en la superficie de Ceres para escapar

Distancia media entre Ceres y el Sol

### Otros símbolos

Masa del Sol

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$

Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia  $r$  del centro

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

Energía mecánica

### Cifras significativas: 3

$T_1 = 4,60 \text{ años} = 1,45 \cdot 10^8 \text{ s}$

$M = 9,43 \cdot 10^{20} \text{ kg}$

$R = 477 \text{ km} = 4,77 \cdot 10^5 \text{ m}$

$m = 1000 \text{ kg}$

$r_2 = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$

$T_2 = 1,00 \text{ años} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$g$

$\Delta E$

$r_1$

$M$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$g = \frac{F_G}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

### Solución:

a) La intensidad del campo gravitatorio creado por la masa esférica,  $M$ , del planeta (enano) Ceres en su superficie, a una distancia,  $R$ , de su centro es la fuerza gravitatoria sobre la unidad de masa:

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}}{\cancel{m}} = G \frac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{9,43 \cdot 10^{20} [\text{kg}]}{(4,77 \cdot 10^5 [\text{m}])^2} = 0,277 \text{ m/s}^2$$

b) Se calcula la energía potencial de la nave espacial en la superficie de Ceres:

$$= -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{9,43 \cdot 10^{20} [\text{kg}] \cdot 1000 [\text{kg}]}{4,77 \cdot 10^5 [\text{m}]} = -1,32 \cdot 10^8 \text{ J} \quad E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

La energía potencial de la nave espacial a una distancia muy grande de Ceres será nula, porque se toma el infinito como origen de energías potenciales.

La energía mínima que ha de tener en la superficie será la que corresponde a una energía cinética nula muy lejos de Ceres.

Por tanto, la energía mecánica que tendrá la nave espacial muy lejos de Ceres será nula.

La energía mínima será la diferencia entre la energía en el infinito y la que tiene en la superficie:

$$\Delta E = E_{\infty} - E_p = 0 - (-1,32 \cdot 10^8 \text{ [J]}) = 1,32 \cdot 10^8 \text{ J}$$

c) Tanto la Tierra como Ceres describen trayectorias aproximadamente circulares alrededor del Sol, pudiéndose considerar satélites del mismo.

La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos,  $T$ , de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas. Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio  $r$ , la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{\cancel{r}^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{4\pi^2 \cdot r_1^3}{4\pi^2 \cdot r_2^3} = \frac{G \cdot M \cdot T_1^2}{G \cdot M \cdot T_2^2}$$

Se aplica esta ley a la Tierra y a Ceres:

$$\frac{r_1^3}{(4,60 [\text{año}])^2} = \frac{(1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}])^3}{(1 [\text{año}])^2}$$

Se calcula la distancia media de Ceres al Sol:

$$r_1 = 1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}] \sqrt[3]{4,60^2} = 4,15 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

*Análisis: El radio calculado de la órbita de Ceres sale mayor que el de la Tierra, como cabe esperar.*

$$(r_1 = 4,15 \cdot 10^{11} \text{ m}) > (r_2 = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m})$$

6. Se desea poner un satélite de masa  $10^3 \text{ kg}$  en órbita alrededor de la Tierra y a una altura dos veces el radio terrestre. Calcula:

- La energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra.
- La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita.
- El período del satélite en dicha órbita.

Datos:  $R = 6370 \text{ km}$ ;  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

(P.A.U. sep. 13)

**Rta.:** a)  $\Delta E = 5,20 \cdot 10^{10} \text{ J}$ ; b)  $F = 1,09 \cdot 10^3 \text{ N}$ ; c)  $T = 7 \text{ h } 19 \text{ min.}$

### Datos

Masa del satélite

Radio de la Tierra

Altura de la órbita

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

### Incógnitas

Energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra

Fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita

Período orbital del satélite

### Otros símbolos

Masa de la Tierra

Constante de la gravitación universal

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$   $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$   $a_N = \frac{v^2}{r}$

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$   $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)  $E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$

Energía mecánica  $E = E_c + E_p$

### Cifras significativas: 3

$$m = 10^3 \text{ kg} = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = 2 \cdot 6370 \text{ km} = 1,27 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$$

$\Delta E$

$F$

$T$

$M$

$G$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

**Solución:**

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$m g_0 = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

c) Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la ecuación de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{3 \cdot R}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R}{3}} = \sqrt{\frac{9,80 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{3}} = 4,56 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 4,56 \text{ km/s}$$

*Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,91 \cdot 10^7 [\text{m}]}{4,56 \cdot 10^3 [\text{m/s}]} = 2,63 \cdot 10^4 \text{ s} = 7 \text{ h } 18 \text{ min}$$

b) Se calcula la fuerza centrípeta:

$$F = m \cdot a_N = m \frac{v^2}{r} = m \frac{\frac{g_0 \cdot R}{3}}{3 \cdot R} = \frac{m \cdot g_0}{9} = \frac{1,00 \cdot 10^3 [\text{kg}] \cdot 9,80 [\text{m/s}^2]}{9} = 1,09 \cdot 10^3 \text{ N}$$

a) Se calcula la energía potencial en el suelo:

$$E_p(\text{suelo}) = -G \frac{M \cdot m}{R} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R} = -g_0 \cdot R \cdot m = -9,80 [\text{m/s}^2] \cdot 6,37 \cdot 10^6 [\text{m}] \cdot 1,00 \cdot 10^3 [\text{kg}] = -6,24 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Se supone que en la superficie de la Tierra el satélite está en reposo<sup>a</sup>, por lo que su energía cinética es nula. Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = R + 2 R = 3 R = 3 \cdot 6,37 \cdot 10^6 [\text{m}] = 1,91 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Se calcula la energía potencial en la órbita:

$$E_p(\text{órbita}) = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{3 R} = -\frac{g_0 \cdot R \cdot m}{3} = \frac{E_{ps}}{3} = \frac{-6,24 \cdot 10^{10} \text{ J}}{3} = -2,08 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética en órbita:

$$E_c(\text{órbita}) = m \cdot v^2 / 2 = [1,00 \cdot 10^3 [\text{kg}] \cdot (4,56 \cdot 10^3 [\text{m/s}])^2] / 2 = 1,04 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E(\text{órbita}) = E_c(\text{órbita}) + E_p(\text{órbita}) = 1,04 \cdot 10^{10} [\text{J}] + (-2,08 \cdot 10^{10} [\text{J}]) = -1,04 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

*Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo  $G \cdot M / r$  por  $v^2$  en la expresión de la energía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie de la Tierra es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{suelo}) = -1,04 \cdot 10^{10} [\text{J}] - (-6,24 \cdot 10^{10} [\text{J}]) = 5,20 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

7. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre:

a) Deduce la expresión de la velocidad orbital.

b) Calcula el período de giro.

c) Calcula la energía mecánica.

Datos:  $R = 6400 \text{ km}$ ;  $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

(P.A.U. jun. 13)

**Rta.:** a)  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ ; b)  $T = 1 \text{ h } 37 \text{ min}$ ; c)  $E = -5,74 \cdot 10^9 \text{ J}$ .

### Datos

Masa del satélite

Altura de la órbita

Radio de la Tierra

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

### Incógnitas

Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra

Período orbital del satélite

### Cifras significativas: 3

$m = 200 \text{ kg}$

$h = 600 \text{ km} = 6,00 \cdot 10^5 \text{ m}$

$R = 6400 \text{ km} = 6,40 \cdot 10^6 \text{ m}$

$g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$

$v$

$T$

<sup>a</sup> Para un sistema de referencia en el centro de la Tierra, cualquier punto de la superficie tiene velocidad debido a la rotación terrestre. La velocidad de un punto de la superficie terrestre vale:  $v = \omega \cdot R = 2\pi R / T = 463 \text{ m/s}$ . Para un objeto de 1000 kg, la energía cinética sería  $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 1,07 \cdot 10^8 \text{ J}$  mucho menor que el valor absoluto de la energía potencial ( $6,24 \cdot 10^{10} \text{ J}$ )

**Datos**

Energía mecánica del satélite en órbita

**Otros símbolos**

Masa de la Tierra

Constante de la gravitación universal

**Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$ Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$ Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$ 

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

Energía mecánica

**Cifras significativas: 3** $E$  $M$  $G$ 

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

**Solución:**

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6,40 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6,00 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7,00 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,40 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{7,00 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 7,58 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7,58 \text{ km/s}$$

*Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

*Específicamente el enunciado del problema no pide que se calcule la velocidad, pero mejor es calcularla por si acaso. Además, se va a necesitar en el cálculo del período orbital.*

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,00 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{7,58 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 5,81 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 37 \text{ min}$$

c) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,40 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 200 \text{ [kg]}}{7,00 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = -1,15 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 200 \text{ [kg]} (7,58 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 = 5,74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = 5,74 \cdot 10^9 \text{ [J]} - 1,15 \cdot 10^{10} \text{ [J]} = -5,8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

*Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo  $G \cdot M / r$  por  $v^2$  en la expresión de la energía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

*Sabiendo esto se puede escribir el valor de la energía mecánica con tres cifras significativas, en vez de las dos cifras del resultado anterior obteniendo [las reglas de operaciones con cifras significativas](#):*

$$E = -5,74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

8. La luz del Sol tarda  $5 \cdot 10^2 \text{ s}$  en llegar a la Tierra y  $2,6 \cdot 10^3 \text{ s}$  en llegar a Júpiter. Calcula:

- El período de Júpiter orbitando alrededor del Sol.
- La velocidad orbital de Júpiter.
- La masa del Sol.

Datos:  $T$  (Tierra) alrededor del Sol:  $3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . (Se suponen las órbitas circulares).

**Rta.:** a)  $T = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}$ ;  $v = 1,31 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ ; b)  $M = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

(P.A.U. sep. 12)



**Datos**

Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra

Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Júpiter

Período orbital de la Tierra alrededor del Sol

Velocidad de la luz en el vacío

Constante de la gravitación universal

**Incógnitas**

Período orbital de Júpiter

Velocidad orbital de Júpiter

Masa del Sol

**Otros símbolos**

Masa de Júpiter o la Tierra

Distancia de un planeta al Sol

**Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$

**Cifras significativas: 3**

$$t_1 = 5,00 \cdot 10^2 \text{ s} = 500 \text{ s}$$

$$t_2 = 2,60 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$T_1 = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$T_2$$

$$v$$

$$M$$

$$m$$

$$r$$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

**Solución:**

Se calculan las distancias de la Tierra al Sol y de Júpiter al Sol, teniendo en cuenta la velocidad de la luz.

$$\text{Tierra: } r_1 = c \cdot t_1 = 3,00 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \cdot 5,00 \cdot 10^2 \text{ [s]} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$\text{Júpiter: } r_2 = c \cdot t_2 = 3,00 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \cdot 2,60 \cdot 10^3 \text{ [s]} = 7,80 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Se resuelve primero el último apartado.

c) La masa del Sol puede calcularse de la expresión de la velocidad de un satélite que gira a una distancia  $r$  alrededor del centro de un astro de masa  $M$ .

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\sum \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad de la Tierra alrededor del Sol se calcula a partir de su período orbital:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{3,15 \cdot 10^7 [\text{s}]} = 2,99 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Se despeja la masa del Sol de la velocidad orbital de la Tierra como satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \Rightarrow M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(2,99 \cdot 10^4 [\text{m/s}])^2 \cdot 1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]} = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

b) Se emplea la ecuación anterior para calcular la velocidad de Júpiter:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 2,01 \cdot 10^{30} [\text{kg}]}{7,80 \cdot 10^{11} [\text{m}]}} = 1,31 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 13,1 \text{ km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi \cdot r_2}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,80 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{1,31 \cdot 10^4 [\text{m/s}]} = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

*Análisis: La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los radiovectores que unen al Sol con los planetas. A mayor distancia al Sol, mayor período. Este método, daría:*

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = 3,15 \cdot 10^7 [\text{s}] \cdot \sqrt{\frac{(7,8 \cdot 10^{11} [\text{m}])^3}{(1,5 \cdot 10^{11} [\text{m}])^3}} = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}.$$

9. Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular a una altura de 650 km sobre la Tierra. Calcula:

- El período y la velocidad del satélite en la órbita.
- La energía mecánica del satélite.
- El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Datos:  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

(P.A.U. sep. 11)

**Rta.:** a)  $v = 7,54 \text{ km/s}$ ;  $T = 1 \text{ h } 38 \text{ min}$ ; b)  $E = -5,68 \cdot 10^9 \text{ J}$ ; c)  $g_h/g_0 = 0,824$ .

#### Datos

Masa del satélite

Altura de la órbita

Masa de la Tierra

Radio de la Tierra

Constante de la gravitación universal

#### Cifras significativas: 3

$m = 200 \text{ kg}$

$h = 650 \text{ km} = 6,50 \cdot 10^5 \text{ m}$

$M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

#### Incógnitas

Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra

$v$

Período orbital del satélite

$T$

Energía mecánica del satélite en órbita

$E$

Cociente entre los valores de  $g$  en el satélite y en la superficie de la Tierra.

$g_h/g_0$

**Otros símbolos**

Masa de la Tierra

 $M$ 

Constante de la gravitación universal

 $G$ **Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$ 

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$ 

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia  $r$  del centro

$$g = \frac{F_G}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$ 

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Energía mecánica

$$E = E_c + E_p$$

**Solución:**

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6,50 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7,02 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Se calcula la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}]}{7,02 \cdot 10^6 [\text{m}]}} = 7,54 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7,54 \text{ km/s}$$

*Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,02 \cdot 10^6 [\text{m}]}{7,54 \cdot 10^3 [\text{m/s}]} = 5,85 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 38 \text{ min}$$

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 200 [\text{kg}]}{7,02 \cdot 10^6 [\text{m}]} = -1,14 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = [200 [\text{kg}]] (7,54 \cdot 10^3 [\text{m/s}])^2 / 2 = 5,68 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = 5,68 \cdot 10^9 [\text{J}] + (-1,14 \cdot 10^{10} [\text{J}]) = -5,68 \cdot 10^9 \text{ J}$$

*Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo  $G \cdot M / r$  por  $v^2$  en la expresión de la energía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

c) La intensidad del campo gravitatorio en un punto que dista  $r$  del centro de la Tierra es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m} / r^2}{\cancel{m}} = G \frac{M}{r^2}$$

La gravedad a una altura,  $h$ , vale:  $g_h = G \frac{M}{(R+h)^2}$

En la superficie de la Tierra vale:  $g_0 = G \frac{M}{R^2}$

Dividiendo la primera entre la segunda, queda:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{M} / (R+h)^2}{\cancel{G} \cdot \cancel{M} / R^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{(6,37 \cdot 10^6 [\text{m}])^2}{(7,02 \cdot 10^6 [\text{m}])^2} = 0,824$$

10. Un satélite artificial de 500 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un radio de  $2 \cdot 10^4$  km. Calcula:

a) La velocidad orbital y el período.

b) La energía mecánica y la potencial.

c) Si por fricción se pierde algo de energía, ¿qué le ocurre al radio y a la velocidad?

Datos  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ;  $R = 6370 \text{ km}$ .

**Rta.:** a)  $v = 4,46 \text{ km/s}$ ;  $T = 7 \text{ h } 50 \text{ min}$ ; b)  $E = -4,97 \cdot 10^9 \text{ J}$ ;  $E_p = -9,94 \cdot 10^9 \text{ J}$ .

(P.A.U. sep. 10)

**Datos**

Masa del satélite

Radio de la órbita

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

Radio de la Tierra

**Incógnitas**

Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra

Período orbital del satélite

Energía mecánica del satélite en órbita

Energía potencial del satélite en órbita

**Otros símbolos**

Masa de la Tierra

Constante de la gravitación universal

**Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$ Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$ Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$ 

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

Energía mecánica

**Cifras significativas: 3**

$$m = 500 \text{ kg}$$

$$r = 2,00 \cdot 10^4 \text{ km} = 2,00 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$$

$$R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$v$$

$$T$$

$$E$$

$$E_p$$

$$M$$

$$G$$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

**Solución:**

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

a) Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,80 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{2,00 \cdot 10^7 \text{ [m]}}} = 4,46 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 4,46 \text{ km/s}$$

*Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 4,46 km/s está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 2,00 \cdot 10^7 \text{ [m]}}{4,46 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 2,82 \cdot 10^4 \text{ s} = 7 \text{ h } 50 \text{ min}$$

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9,80 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 500 \text{ [kg]}}{2,00 \cdot 10^7 \text{ [m]}} = -9,94 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 500 \text{ [kg]} \cdot (4,46 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 4,97 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = 4,97 \cdot 10^9 \text{ [J]} + (-9,94 \cdot 10^9 \text{ [J]}) = -4,97 \cdot 10^9 \text{ J}$$

*Análisis: La energía mecánica vale la mitad de la energía potencial como se ve en el apartado siguiente.*

c) La energía mecánica se puede expresar en función del radio de la órbita. Sustituyendo  $v^2$  por  $GM/r$  en la expresión de la energía mecánica, queda

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Si disminuye la energía mecánica, (es más negativa), el radio de la órbita también se hace más pequeño, por lo que el satélite se acerca a la superficie de la Tierra.

La velocidad, por el contrario, aumentará, pues su relación con el radio es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuanto más pequeño es el radio de la órbita más grande es su velocidad.

*Análisis: Es lo mismo que le ocurre a cualquier cuerpo que se mueve cerca de la superficie de la Tierra. Al perder energía pierde altura, y cae hacia el suelo, ganando velocidad.*

11. Las relaciones entre las masas y los radios de la Tierra y la Luna son:  $M_T/M_L = 79,63$  y  $R_T/R_L = 3,66$ .

a) Calcula la gravedad en la superficie de la Luna.

b) Calcula la velocidad de un satélite girando alrededor de la Luna en una órbita circular de 2300 km de radio.

c) ¿Dónde es mayor el período de un péndulo de longitud  $L$ , en la Tierra o en la Luna?

Datos:  $g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$ ;  $R_L = 1700 \text{ km}$ .

(P.A.U. jun. 10)

**Rta.:** a)  $g_L = 1,65 \text{ m/s}^2$ ; b)  $v = 1,44 \text{ km/s}$ .

### Datos

Relación entre las masas de la Tierra y de la Luna

Relación entre los radios de la Tierra y de la Luna

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

Radio de la órbita del satélite alrededor de la Luna

Radio de la Luna

### Incógnitas

Gravedad en la superficie de la Luna

Velocidad del satélite alrededor de la Luna

### Otros símbolos

Constante de la gravitación universal

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$   $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$   $a_N = \frac{v^2}{r}$

Peso

Período de un péndulo simple de longitud  $L$  en un punto donde la aceleración de la gravedad es  $g$   $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

### Cifras significativas: 3

$M_T/M_L = 79,63$

$R_T/R_L = 3,66$

$g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$

$r = 2300 \text{ km}$

$R_L = 1700 \text{ km}$

$g_L$

$v$

$G$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$P = m \cdot g$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

### Solución:

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m \cdot g_T = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Análogamente para la Luna:

$$m \cdot g_L = G \frac{M_L \cdot m}{R_L^2}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, queda:

$$\frac{m \cdot g_T}{m \cdot g_L} = \frac{G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}}{G \frac{M_L \cdot m}{R_L^2}}$$

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{M_T/M_L}{(R_T/R_L)^2} = \frac{79,63}{3,66^2} = 5,94$$

Se despeja la aceleración de la gravedad en la Luna:

$$g_L = 9,80 \text{ [m/s}^2\text{]} / 5,94 = 1,65 \text{ m/s}^2$$

*Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 veces menor que en la superficie de la Tierra.*

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

b) Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la ecuación de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{1,65 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (1,70 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{2,30 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 1,44 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 1,44 \text{ km/s}$$



c) El período de un péndulo de longitud  $L$  en un lugar donde la gravedad es  $g$ , viene dado por la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna:

$$\frac{T_T}{T_L} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{L}{g_T}}}{2\pi \sqrt{\frac{L}{g_L}}} = \sqrt{\frac{g_L}{g_T}} = \sqrt{\frac{1}{5,94}} = 0,410 < 1$$

El período del péndulo en la Tierra es menor que en la Luna.

*Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y al ser más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.*

12. Se desea poner en órbita un satélite de 1800 kg que gire a razón de 12,5 vueltas por día. Calcula:

- El período del satélite.
- La distancia del satélite a la superficie terrestre.
- La energía cinética del satélite en esa órbita.

Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $R = 6378 \text{ km}$ ;  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

(P.A.U. sep. 09)

**Rta.:** a)  $T = 1 \text{ h } 55 \text{ min}$ ; b)  $h = 1470 \text{ km}$ ; c)  $E_c = 4,58 \cdot 10^{10} \text{ J}$ .

### Datos

Radio de la Tierra

Frecuencia de giro del satélite en la órbita alrededor de la Tierra.

Constante de la gravitación universal

Masa de la Tierra

Masa del satélite

### Incógnitas

Período del satélite

Distancia del satélite a la superficie terrestre (altura de órbita)

Energía cinética del satélite en la órbita

### Otros símbolos

Radio de la órbita

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$

### Cifras significativas: 3

$R = 6378 \text{ km} = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$

$f = 12,5 \text{ rev./día} = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$m = 1800 \text{ kg}$

$T$

$h$

$E_c$

$r$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

### Solución:

a) Se calcula el período, que es la inversa de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,45 \cdot 10^{-4} [\text{s}^{-1}]} = 6,91 \cdot 10^3 \text{ s} = 1,92 \text{ h} = 1 \text{ h } 55 \text{ min}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

b) Se despeja el radio de la órbita,  $r$ , y se sustituyen los datos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot (6,91 \cdot 10^3 [\text{s}])^2}{4\pi^2}} = 7,84 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra del radio de la órbita:

$$h = r - R = 7,84 \cdot 10^6 [\text{m}] - 6,38 \cdot 10^6 [\text{m}] = 1,47 \cdot 10^6 \text{ m} = 1470 \text{ km}$$

c) Se calcula la velocidad del satélite en su órbita:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,86 \cdot 10^6 [\text{m}]}{6,91 \cdot 10^3 [\text{s}]} = 7,13 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 1,80 \cdot 10^3 \text{ [kg]} \cdot (7,13 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 4,58 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

13. Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios (situados sobre el ecuador terrestre y con período orbital de un día). Calcula:

- La altura a la que se encuentran, respecto a la superficie terrestre.
- La fuerza ejercida sobre el satélite.
- La energía mecánica.

Datos:  $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ ;  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $m = 8 \cdot 10^2 \text{ kg}$ ;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . (P.A.U. sep. 08)

Rta.: a)  $h = 3,59 \cdot 10^7 \text{ m}$ ; b)  $F = 179 \text{ N}$ ; c)  $E_c = 3,78 \cdot 10^9 \text{ J}$ ;  $E_p = -7,56 \cdot 10^9 \text{ J}$ ;  $E = -3,78 \cdot 10^9 \text{ J}$ .

### Datos

Satélite geoestacionario (período  $T$  igual al de la Tierra)

Constante de la gravitación universal

Masa de la Tierra

Masa del satélite

Radio de la Tierra

### Incógnitas

Altura del satélite

Fuerza sobre el satélite

Energías cinética, potencial y total del satélite en órbita

### Otros símbolos

Radio de la órbita

Valor de la velocidad del satélite en la órbita geoestacionaria

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$   $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$   $a_N = \frac{v^2}{r}$

Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$   $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)  $E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$

Energía mecánica  $E = E_c + E_p$

### Cifras significativas: 3

$T = 24 \text{ h} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$m = 8,00 \cdot 10^2 \text{ kg}$

$R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$

$h$

$F$

$E_c, E_p, E$

$r$

$v$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

### Solución:

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Se despeja el radio de la órbita,  $r$ , y se sustituyen los datos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] (8,64 \cdot 10^4 [\text{s}])^2}{4 \cdot 3,14^2}} = 4,23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra del radio de la órbita:

$$h = r - R = 4,23 \cdot 10^7 - 6,38 \cdot 10^6 = 3,59 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) La fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite es la fuerza gravitatoria.

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 800 [\text{kg}]}{(4,23 \cdot 10^7 [\text{m}])^2} = 179 \text{ N}$$

*Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia  $r \approx 7 R$ , el peso debería ser unas  $7^2 \approx 50$  veces menor que en el suelo  $m \cdot g_0 \approx 8 \cdot 10^3 \text{ N}$ , o sea unos 160 N.*

c) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 800 [\text{kg}]}{4,23 \cdot 10^7 [\text{m}]} = -7,56 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética sustituyendo  $v^2$  por  $G M / r$ :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} = 3,78 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.

La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_c + E_p = 3,78 \cdot 10^9 \text{ [J]} - 7,56 \cdot 10^9 \text{ [J]} = -3,78 \cdot 10^9 \text{ J}$$

14. Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a una altura de 6000 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:

- a) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa.  
b) El peso del satélite a esa altura.

Datos: Tierra:  $g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$ ;  $R = 6400 \text{ km}$ .

(P.A.U. jun. 06)

Rta.: a)  $T = 3 \text{ h } 48 \text{ min.}$ ; b)  $P_h = 261 \text{ N}$ .

### Datos

Radio de la Tierra

Altura de la órbita

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

Masa del satélite

### Incógnitas

Tiempo que tarda en dar una vuelta completa

Peso del satélite a esa altura

### Otros símbolos

Masa de la Tierra

Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra

Constante de la gravitación universal

Radio de la órbita

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$

### Cifras significativas: 3

$$R = 6400 \text{ km} = 6,40 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = 6000 \text{ km} = 6,00 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$$

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$T$$

$$P_h$$

$$M$$

$$v$$

$$G$$

$$r$$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

### Solución:

- a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6,40 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6,00 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 1,24 \cdot 10^7 \text{ m}$$

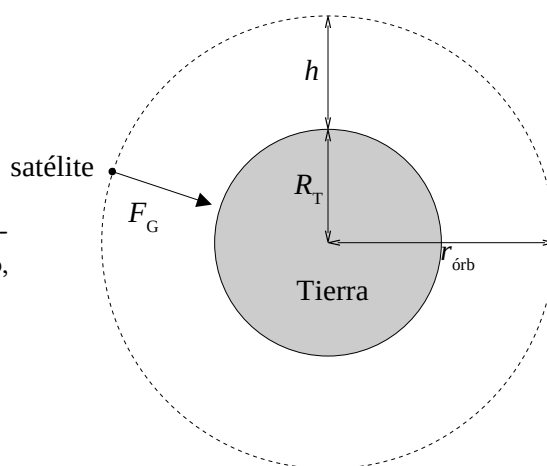
La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:



$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,80 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,40 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{1,24 \cdot 10^7 \text{ [m]}}} = 5,69 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,24 \cdot 10^7 \text{ [m]}}{5,69 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 1,37 \cdot 10^4 \text{ s} = 3 \text{ h } 48 \text{ min}$$

*Análisis: Por la [tercera ley de Kepler](#), también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son circulares, a los radios de las órbitas. El período de un satélite de órbita baja ( $h = 400 \text{ km}$ ) es de hora y media. El radio de la órbita de este satélite es aproximadamente el doble, por lo que el período debería ser  $\sqrt{2^3} \approx 3$  veces mayor, de unas cuatro horas y media.*

b) Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la expresión de la fuerza gravitatoria, que coincide con la fuerza peso:

$$P_h = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = \frac{4,01 \cdot 10^{12} \text{ [m}^3\text{/s}^2\text{]} \cdot 100 \text{ [kg]}}{(1,24 \cdot 10^7 \text{ [m]})^2} = 261 \text{ N}$$

*Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia  $r \approx 2 R$ , el peso debería ser unas  $2^2 = 4$  veces menor que en el suelo  $m \cdot g_0 = 980 \text{ N}$ , o sea unos 250 N.*

15. Un satélite artificial de 64,5 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio  $r = 2,32 R$ .

Calcula:

a) El período de rotación del satélite.

b) El peso del satélite en la órbita.

Datos: Tierra:  $g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$ ;  $R = 6370 \text{ km}$ .

(P.A.U. jun. 05)

Rta.: a)  $T = 4 \text{ h } 58 \text{ min.}$ ; b)  $P_h = 117 \text{ N}$ .

### Datos

Radio de la Tierra

Radio de la órbita

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra

Masa del satélite

### Cifras significativas: 3

$R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$r = 2,32 R$

$g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$

$m = 64,5 \text{ kg}$

### Incógnitas

Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra

$T$

Peso del satélite en la órbita = fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite  $P_h$

### Otros símbolos

Masa de la Tierra

$M$

Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra

$v$

Constante de la gravitación universal

$G$

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

2.ª ley de Newton de la Dinámica

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal,  $v$ , en una trayectoria circular de radio  $r$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

### Solución:

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = 2,32 R = 2,32 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 1,48 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite.

En módulos:

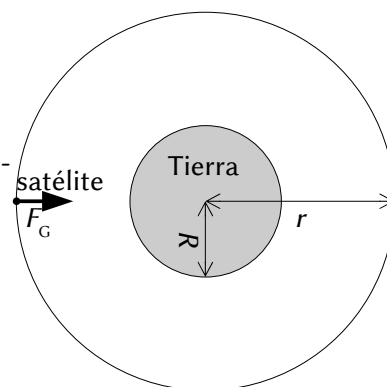
$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$



La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie. La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$ .

$$4\pi^2 \cdot r^3 = g_0 \cdot R^2 \cdot T^2$$

Se despeja el período y se sustituyen los datos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R^2}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{(1,84 \cdot 10^7 [\text{m}])^3}{9,80 [\text{m/s}^2] (6,37 \cdot 10^6 [\text{m}])^2}} = 1,79 \cdot 10^4 \text{ s} = 4 \text{ h } 58 \text{ min}$$

*Análisis: Por la [tercera ley de Kepler](#), también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son prácticamente circulares, a los radios de las órbitas. El período de la Luna, que dista unos 60  $R$  de la Tierra, es de 28 días. El período de este satélite, que está a unos 2,4  $R$  (25 veces menor) sería de  $\sqrt{25^3} \approx 125$  veces menor  $\approx 0,25$  días  $\approx 6$  horas.*

b) Se sustituye  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$  en la expresión de la fuerza gravitatoria, que coincide con la fuerza peso:

$$P_h = F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = \frac{9,80 [\text{m/s}^2] (6,37 \cdot 10^6 [\text{m}])^2 \cdot 64,5 [\text{kg}]}{(1,84 \cdot 10^7 [\text{m}])^2} = 117 \text{ N}$$



**Análisis:** El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia  $r \approx 2,4 R$ , el peso debería ser unas  $2,4^2 = 6$  veces menor que en el suelo  $m \cdot g_0 = 632 \text{ N}$ , o sea unos 100 N.

## ● Campo gravitatorio

- Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 el terrestre, halla:
  - El campo gravitatorio en la Luna.
  - La velocidad de escape en la Luna.
  - El período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es 2 s.
 Datos:  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ ;  $R_L = 1,7 \cdot 10^6 \text{ m}$ . (P.A.U. jun. 12)  
**Rta.:** a)  $g_L = 1,6 \text{ m/s}^2$ ; b)  $v_e = 2,3 \text{ km/s}$ ; c)  $T = 4,9 \text{ s}$ .

### **Datos**

Relación entre las masas de la Luna y de la Tierra  
 Relación entre los radios de la Luna y de la Tierra  
 Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra  
 Radio de la Luna  
 Período del péndulo en la Tierra

### **Incógnitas**

Campo gravitatorio en la Luna  
 Velocidad de escape en la Luna  
 Período de oscilación en la luna de un péndulo cuyo  $T_T = 2 \text{ s}$

### **Otros símbolos**

Constante de la gravitación universal

### **Ecuaciones**

Ley de Newton de la gravitación universal  
 (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)  
 Peso de un objeto  
 Energía cinética de un objeto de masa  $m$  que se mueve a la velocidad  $v$   
 Energía potencial gravitatoria de un objeto de masa  $m$  situado a una distancia  $r$  del centro de un astro de masa  $M$  (referida al infinito)  
 Energía mecánica  
 Período de un péndulo simple de longitud  $L$  en un punto donde la aceleración de la gravedad es  $g$

### **Cifras significativas: 2**

$M_L/M_T = 0,012$   
 $R_L/R_T = 0,27$   
 $g_T = 9,8 \text{ m/s}^2$   
 $R_L = 1,7 \cdot 10^6 \text{ m}$   
 $T_T = 2,0 \text{ s}$

$g_L$   
 $v_e$   
 $T_L$

$G$

$$F_G = G \frac{M m}{r^2}$$

$$P = m \cdot g$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

### **Solución:**

- a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m g_T = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

Análogamente para la Luna.

$$m g_L = G \frac{M_L m}{R_L^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{m \cdot g_L}{m \cdot g_T} = \frac{G \frac{M_L \cdot m}{R_L^2}}{G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{M_L / M_T}{(R_L / R_T)^2} = \frac{0,012}{0,27^2} = 0,16$$

Despejando:

$$g_L = 0,16 \cdot 9,8 \text{ [m/s}^2\text{]} = 1,6 \text{ m/s}^2$$

*Análisis: El resultado es razonable, porque sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 veces menor que en la superficie de la Tierra.*

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.

La velocidad de escape le proporcionaría la energía,  $\Delta E$ , necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.

La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa  $m$  situado en la superficie de un astro de masa  $M$  y radio  $R$  es:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula.

La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape  $v_e$  le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal,  $G$ , o de la masa,  $M$ , del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo,  $m \cdot g_0$ , es igual a la fuerza gravitatoria:

$$m g_0 = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$R$  representa el radio del astro y  $g_0$  el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

b) La velocidad de escape en la Luna se obtiene sustituyendo  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$ , y los valores de los datos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 g_L R_L^2}{R_L}} = \sqrt{2 g_L R_L} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot 1,7 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = 2,3 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 2,3 \text{ km/s}$$

c) El período,  $T$ , de un péndulo de longitud  $L$  en un lugar donde la gravedad es  $g$ , viene dado por la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna, queda:

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,6}} = 2,5$$

Se sustituye el dato  $T_T = 2,0$  s:

$$T_L = 2,5 \cdot 2,0 \text{ [s]} = 4,9 \text{ s}$$

*Análisis: El resultado es razonable. La gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y cuanto más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.*

## ● Masas puntuales

- Dos masas de 150 kg están situadas en A(0, 0) y B(12, 0) metros. Calcula:
  - El vector campo y el potencial gravitatorio en C(6, 0) y D(6, 8).
  - Si una masa de 2 kg posee en el punto D una velocidad de  $-10^{-4} \hat{j}$  m/s, calcula su velocidad en el punto C.
  - Razona si el movimiento entre C y D es rectilíneo uniforme, rectilíneo uniformemente acelerado, o de cualquiera otro tipo.

Dato:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . (P.A.U. jun. 14)

**Rta.:** a)  $\vec{g}_C = \vec{0}$ ;  $\vec{g}_D = -1,6 \cdot 10^{-10} \hat{j}$  N/kg;  $V_C = -3,34 \cdot 10^{-9}$  J/kg;  $V_D = -2,00 \cdot 10^{-9}$  J/kg; b)  $\vec{v} = -1,13 \cdot 10^{-4} \hat{j}$  m/s.

### Datos

Cada una de las masas en el eje X  
 Vector de posición de la masa en A  
 Vector de posición de la masa en B  
 Vector de posición del punto C  
 Vector de posición del punto D  
 Masa en el punto D  
 Velocidad en el punto D  
 Constante de la gravitación universal

### Incógnitas

Campo gravitatorio en C y en D  
 Potencial gravitatorio en C y en D  
 Velocidad en C de la masa que sale de D

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal  
 (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)  
 2.ª ley de Newton de la Dinámica

Campo gravitatorio en un punto a una distancia,  $r$ , de una masa,  $M$

Potencial gravitatorio en un punto a una distancia,  $r$ , de una masa,  $M$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

Trabajo del campo cuando se desplaza una masa desde el punto 1 al punto 2  
 Energía cinética de una masa,  $m$ , que se mueve con una velocidad,  $v$

### Cifras significativas: 3

$M_A = M_B = M = 150 \text{ kg}$   
 $\vec{r}_A = (0, 0) \text{ m}$   
 $\vec{r}_B = (12, 0) \text{ m}$   
 $\vec{r}_C = (6, 0) \text{ m}$   
 $\vec{r}_D = (6, 8) \text{ m}$   
 $m_D = 2,00 \text{ kg}$   
 $\vec{v}_D = -1,00 \cdot 10^{-4} \hat{j} \text{ m/s}$   
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$\vec{g}_C, \vec{g}_D$   
 $V_C, V_D$   
 $\vec{v}_C$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

$$V = -G \frac{M}{r}$$

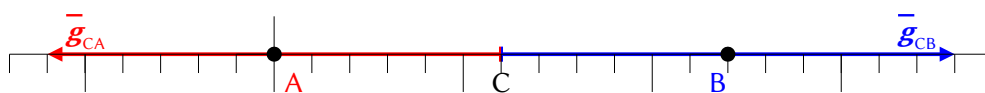
$$E_p = m \cdot V = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

### Solución:

a) Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A(0, 0), B(12, 0) y C(6, 0). Se dibujan los vectores de campo gravitatorio creados por las masas en el punto C, un vector por cada masa. Como sus valores son iguales, porque las masas y las distancias son iguales, los vectores serán de la misma medida, y, por lo tanto, la resultante será nula.



A continuación se realizan los cálculos aunque no son necesarios.

La distancia del punto A al punto C es:  $r_{AC} = |(6,00, 0) \text{ [m]} - (0, 0)| = 6,00 \text{ m}$ .

El vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A, es  $\vec{i}$ , el vector unitario del eje X.

Se calcula el campo gravitatorio en el punto C creado por la masa situada en el punto A:

$$\vec{g}_{CA} = -G \frac{M_A}{r_{AC}^2} \vec{u}_r = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{150,0 [\text{kg}]}{(6,00 [\text{m}])^2} \vec{i} = -2,78 \cdot 10^{-10} \vec{i} \text{ N/kg}$$

El campo gravitatorio en el punto C, creado por la masa situada en el punto B, es simétrico al creado por la masa situada en el punto A:

$$\vec{g}_{CB} = 2,78 \cdot 10^{-10} \vec{i} \text{ N/kg}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto C es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada masa.

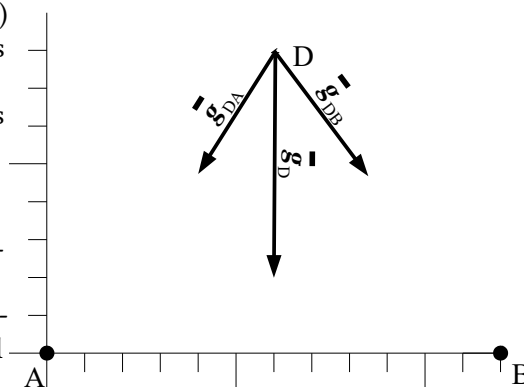
$$\vec{g}_C = \vec{g}_{CA} + \vec{g}_{CB} = \vec{0}$$

Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A(0, 0), B(12, 0) y D(6, 8). Se dibujan los vectores de campo gravitatorio creados por las masas en el punto D, un vector por cada masa.

Como sus valores son iguales, porque las masas y las distancias son iguales, los vectores serán de la misma medida.

Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante,  $\vec{g}_D$ .

Las componentes horizontales de los campos creados por las masas se anulan y la resultante estará dirigida en el sentido negativo del eje Y. El valor de la resultante será la suma de las componentes verticales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.



Se calcula la distancia del punto A al punto D:

$$r_{AD} = |\vec{r}_{AD}| = |\vec{r}_D - \vec{r}_A| = |6,00 \vec{i} + 8,00 \vec{j}| = \sqrt{(6,00 [\text{m}])^2 + (8,00 [\text{m}])^2} = 10,0 \text{ m}$$

Se calcula el vector unitario del punto D tomando como origen el punto A.

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{(6,00 \vec{i} + 8,00 \vec{j}) [\text{m}]}{10,0 [\text{m}]} = 0,600 \vec{i} + 0,800 \vec{j} \text{ N/kg}$$

Se calcula el campo gravitatorio en el punto D creado por la masa situada en el punto A:

$$\vec{g}_{DA} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{150 [\text{kg}]}{(10,0 [\text{m}])^2} (0,600 \vec{i} + 0,800 \vec{j}) = (-6,00 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 8,00 \cdot 10^{-11} \vec{j}) \text{ N/kg}$$

El campo gravitatorio en el punto D, creado por la masa situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\vec{g}_{DB} = (6,00 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 8,00 \cdot 10^{-11} \vec{j}) \text{ N/kg}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada masa.

$$\vec{g}_D = \vec{g}_{DA} + \vec{g}_{DB} = -1,60 \cdot 10^{-10} \vec{j} \text{ N/kg}$$

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.

Para determinar el potencial gravitatorio en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada masa, y luego se suman.

La ecuación del potencial gravitatorio en un punto situado a una distancia,  $r$ , de una masa puntual,  $M$ , es:

$$V = -G \frac{M}{r}$$

$G$  es la constante de gravitación universal.

Se calcula el potencial gravitatorio en el punto C, creado por la masa situada en el punto A:

$$V_{CA} = -G \frac{M}{r_{AC}} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{150,0 [\text{kg}]}{6,00 [\text{m}]} = -1,17 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

El potencial gravitatorio en el punto C, creado por la masa situada en el punto B vale lo mismo, porque la masa y la distancia son iguales.

El potencial gravitatorio en el punto C es la suma:

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = 2 V_{CA} = 2 \cdot (-1,17 \cdot 10^{-9} [\text{J/kg}]) = -3,34 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

Se calcula el potencial gravitatorio en el punto D, creado por la masa situada en el punto A:

$$V_{DA} = -G \frac{M}{r_{AD}} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{150,0 [\text{kg}]}{10,0 [\text{m}]} = -1,00 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

El potencial gravitatorio en el punto D creado por la masa situada en el punto B, vale lo mismo, porque la masa y la distancia son iguales.

El potencial gravitatorio del punto D es la suma:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = 2 V_{DA} = 2 \cdot (-1,00 \cdot 10^{-9} [\text{J/kg}]) = -2,00 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg}$$

b) Ya que la aceleración no es constante, no se puede resolver de una manera sencilla por cinemática. (No se puede usar la ecuación  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$ , que solo es válida si el vector aceleración,  $\vec{a}$ , es un vector constante).

Como el campo gravitatorio es un campo conservativo, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica a los puntos C y D.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_C^2 + 2 \left( -G \frac{M \cdot m}{r_{AC}} \right) = \frac{1}{2} m \cdot v_D^2 + 2 \left( -G \frac{M \cdot m}{r_{AD}} \right)$$

Despejando el valor de la velocidad en C, queda:

$$v_C = \sqrt{v_D^2 + 4 G M \left( \frac{1}{r_{AC}} - \frac{1}{r_{AD}} \right)} =$$

$$= \sqrt{(1,00 \cdot 10^{-4} [\text{m/s}])^2 + 4 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 150 [\text{kg}] \left( \frac{1}{6,00 [\text{m}]} - \frac{1}{10,0 [\text{m}]} \right)} = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.

Como tanto la aceleración como la velocidad en el punto D tienen la dirección del eje Y en sentido negativo, la dirección de la velocidad en el punto C es la del eje Y en sentido negativo

$$\vec{v}_C = -1,13 \cdot 10^{-4} \vec{j} \text{ m/s}$$

*Análisis: El valor de la velocidad es muy pequeño, pero esto es lógico, si tenemos en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza de muy baja intensidad (si las masas no son de tipo planetario).*

c) La aceleración de la masa que se mueve de D a C está dirigida en todo momento hacia C. Como la velocidad en D también tenía esa dirección, el movimiento es rectilíneo, paralelo al eje Y. Pero el valor del campo gravitatorio en los puntos por los que pasa la masa que se mueve no es constante. No es el mismo en el punto C que en el punto D. Por tanto, la aceleración no es constante.

El movimiento es rectilíneo y acelerado, pero con aceleración variable.

Lo que sigue es la demostración de la relación entre el campo gravitatorio, que vale lo mismo que la aceleración, y la coordenada y en los puntos por los que pasa la masa móvil entre D y C.

Para un punto G cualquiera entre C y D, el campo gravitatorio creado por la masa situada en A es:

$$\vec{g}_{GA} = -G \frac{M}{r_{AG}^2} \vec{u}_r = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{150 [\text{kg}]}{(\sqrt{6,00^2 + y_G^2} [\text{m}])^2} \frac{(6,00 \vec{i} + y_G \vec{j}) [\text{m}]}{\sqrt{6,00^2 + y_G^2} [\text{m}]}$$

Por simetría, el campo creado en ese punto G por la masa situada en B es:

$$\vec{g}_{GB} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{150 [\text{kg}]}{(\sqrt{6,00^2 + y_G^2} [\text{m}])^2} \frac{(-6,00 \vec{i} + y_G \vec{j}) [\text{m}]}{\sqrt{6,00^2 + y_G^2} [\text{m}]}$$

El vector resultante valdría

$$\vec{g}_G = \vec{g}_{GA} + \vec{g}_{GB} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{150 [\text{kg}]}{((6,00^2 + y_G^2)^{3/2} [\text{m}]^3)} (2 y_G \vec{j}) [\text{m}]$$

$$\vec{g}_G = \frac{-2,00 \cdot 10^{-8} y_G}{(6,00^2 + y_G^2)^{3/2}} \vec{j} [\text{N/m}]$$

2. Tres masas de 100 kg están situadas en los puntos A(0, 0), B(2, 0), C(1,  $\sqrt{3}$ ) (en metros). Calcula:

a) El campo gravitatorio creado por estas masas en el punto D(1, 0)

b) La energía potencial que tendría una masa de 5 kg situada en D.

c) ¿Quién tendría que realizar trabajo para trasladar esa masa desde D al infinito, el campo o fuerzas externas?

Dato:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

(P.A.U. sep. 09)

Rta.: a)  $\vec{g}_D = 2,22 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ N/kg}$ ; b)  $E_p = -8,60 \cdot 10^{-8} \text{ J}$ ; c) externas.

### Datos

Masa de cada uno de los cuerpos

Vector de posición de la masa en A

Vector de posición de la masa en B

Vector de posición de la masa en C

Vector de posición del punto D

Masa en el punto D

Constante de la gravitación universal

### Incógnitas

Vector campo gravitatorio en el punto D

Energía potencial gravitatoria en el punto D

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)

Campo gravitatorio en un punto a una distancia,  $r$ , de una masa,  $M$

Potencial gravitatorio en un punto a una distancia,  $r$ , de una masa,  $M$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

Trabajo del campo cuando se desplaza una masa desde el punto 1 al punto 2

### Cifras significativas: 3

$M_A = M_B = M_C = M = 100 \text{ kg}$

$\vec{r}_A = (0,00, 0,00) \text{ m}$

$\vec{r}_B = (2,00, 0,00) \text{ m}$

$\vec{r}_C = (1,00, 1,73) \text{ m}$

$\vec{r}_D = (1,00, 0,00) \text{ m}$

$m_D = 5,00 \text{ kg}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$\vec{g}_D$

$E_{pD}$

$$\vec{F} = -G \frac{M m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

$$V = -G \frac{M}{r}$$

$$E_p = m \cdot V = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

### Solución:

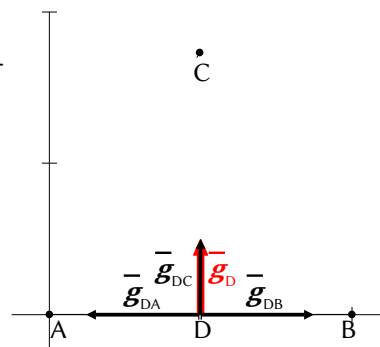
a) Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A(0, 0), B(2, 0), C(1, 1,7) y D(1, 0). Se dibujan los vectores de campo gravitatorio creados por las masas en el punto D, un vector por cada masa.

Los valores de los campos producidos por las masas situadas en los puntos A y B son iguales, porque las masas y las distancias son iguales. Los vectores serán de la misma medida, y se anularán entre sí.

El vector suma, que es el campo resultante,  $\vec{g}_D$ , coincide con el vector campo producido por la masa situada en el punto C.

El principio de superposición dice que la intensidad de campo gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.

Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada masa, y luego se suman los vectores.



La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales o esféricas,  $M$  y  $m$ , viene dada por la ley de la gravitación de Newton.  $G$  es la constante de la gravitación universal y  $\vec{u}_r$  el vector unitario en la línea que une las masas.

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo gravitatorio en un punto situado a una distancia,  $r$ , de una masa,  $M$ , puntual es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{m}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

La distancia del punto A al punto D es:  $r_{AD} = |(1,00, 0) [\text{m}] - (0, 0)| = 1,00 \text{ m}$ .

El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto A, es  $\vec{i}$ , el vector unitario del eje X.

Se calcula el campo gravitatorio en el punto D, creado por la masa de 100 kg situada en el punto A:

$$\vec{g}_{DA} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}] \cdot \frac{100 [\text{kg}]}{(1,00 [\text{m}])^2} \vec{i} = -6,67 \cdot 10^{-9} \vec{i} \text{ N/kg}$$

El campo gravitatorio en el punto D, creado por la masa situada en el punto B, es simétrico al creado por la masa situada en el punto A:

$$\vec{g}_{DB} = 6,67 \cdot 10^{-9} \vec{i} \text{ N/kg}$$

La distancia del punto C al punto D es:  $r_{CD} = |(1,00, 0) [\text{m}] - (1,00, 1,73) [\text{m}]| = 1,73 \text{ m}$ .

El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto C, es  $-\vec{j}$ , el vector unitario del eje Y en sentido negativo.

Se calcula la intensidad de campo gravitatorio en el punto D creado por la masa situada en el punto C:

$$\vec{g}_{DC} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}] \cdot \frac{100 [\text{kg}]}{(1,73 [\text{m}])^2} (-\vec{j}) = 2,22 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ N/kg}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada masa.

$$\vec{g}_D = \vec{g}_{DA} + \vec{g}_{DB} + \vec{g}_{DC} = 2,22 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ N/kg}$$

b) La energía potencial gravitatoria de una masa  $m$  situada en un punto, debida a la influencia de varias masas  $M_i$ , cada una de ellas a una distancia  $r_i$  del punto, es la suma de las energías potenciales de cada una de las interacciones de la masa  $m$  con cada una de las masas  $M_i$ . Pero también se puede calcular la energía potencial a partir de la definición del potencial gravitatorio del punto donde se encuentra la masa  $m$ :

$$E_p = m \cdot V$$

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.

Para determinar el potencial gravitatorio en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada masa, y luego se suman.

$$V = \sum \left( -G \frac{M_i}{r_i} \right) = -G \sum \frac{M_i}{r_i}$$

Si las masas  $M_i$  son todas iguales, ( $M = M_i$ ) entonces queda:

$$V = -G M \sum \frac{1}{r_i}$$

La expresión de la energía potencial sería:

$$E_p = -G M m \sum \frac{1}{r_i}$$

$$E_p = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 100 [\text{kg}] \cdot 5,00 [\text{kg}] \left( \frac{1}{1 [\text{m}]} + \frac{1}{1 [\text{m}]} + \frac{1}{1,73 [\text{m}]} \right) = -8,60 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

c)

El campo gravitatorio es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una masa se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial,  $E_p$ , asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una masa entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de masa.

$$V = \frac{E_p}{m}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una masa mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = m \cdot V_A - m \cdot V_B = m(V_A - V_B)$$

El trabajo de la resultante de las fuerzas gravitatorias cuando se lleva la masa en D hasta el infinito, sin variación de energía cinética (se supone), es igual a la diferencia (cambiada de signo) de energía potencial que posee la masa de 5,00 kg en esos dos puntos. Por definición, la energía potencial (y el potencial) en el infinito es nula, por lo que:

$$W_{D \rightarrow \infty} = -\Delta E_p = -(E_{p\infty} - E_{pD}) = E_{pD} - E_{p\infty} = E_{pD} = -8,60 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Por tanto, el trabajo de las fuerzas gravitatorias es negativo, (la fuerza del campo se opone al desplazamiento hacia el infinito) y el trabajo deberá hacerlo alguna fuerza externa.

3. Dos masas de 50 kg están situadas en A(-30, 0) y B(30, 0) respectivamente (coordenadas en metros). Calcula:

a) El campo gravitatorio en P(0, 40) y en D(0, 0).

b) El potencial gravitatorio en P y D.

c) Para una masa  $m$ , ¿dónde es mayor la energía potencial gravitatoria, en P o en D?

Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

(P.A.U. sep. 08)

Rta.: a)  $\vec{g}_P = -2,13 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ N/kg}$ ;  $\vec{g}_D = \vec{0}$ ; b)  $V_P = -1,33 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$ ;  $V_D = -2,22 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$ ; c) En P.

### Datos

Cada una de las masas en el eje X

Vector de posición de la masa en A

Vector de posición de la masa en B

Vector de posición del punto P

Vector de posición del punto D

Constante de la gravitación universal

### Incógnitas

Campo gravitatorio en P y en D

Potencial gravitatorio en P y en D

### Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal

(fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)

2.ª ley de Newton de la Dinámica

Campo gravitatorio en un punto a una distancia,  $r$ , de una masa,  $M$

Potencial gravitatorio en un punto a una distancia,  $r$ , de una masa,  $M$

Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)

### Cifras significativas: 3

$M_A = M_B = M = 50,0 \text{ kg}$

$\vec{r}_A = (-30, 0) \text{ m}$

$\vec{r}_B = (30, 0) \text{ m}$

$\vec{r}_P = (0, 40) \text{ m}$

$\vec{r}_D = (0, 0) \text{ m}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$\vec{g}_P, \vec{g}_D$   
 $V_P, V_D$

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

$$V = -G \frac{M}{r}$$

$$E_p = m \cdot V = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

### Solución:



a) Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A(-30, 0), B(30, 0) y P(0, 40). Se dibujan los vectores de campo gravitatorio creados por las masas en el punto P, un vector por cada masa.

Como sus valores son iguales, porque las masas y las distancias son iguales, los vectores serán de la misma medida.

Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante,  $\vec{g}_P$ .

Las componentes horizontales de los campos creados por las masas se anulan y la resultante estará dirigida en el sentido negativo del eje Y. El valor de la resultante será la suma de las componentes verticales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.

El principio de superposición dice que la intensidad de campo gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.

Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada masa, y luego se suman los vectores.

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales o esféricas,  $M$  y  $m$ , viene dada por la ley de la gravitación de Newton.  $G$  es la constante de la gravitación universal y  $\vec{u}_r$  el vector unitario en la línea que une las masas.

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo gravitatorio en un punto situado a una distancia,  $r$ , de una masa,  $M$ , puntual es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{m}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

Se calcula la distancia del punto A al punto P:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{AP} &= \vec{r}_P - \vec{r}_A = 40,0 \vec{j} - (-30,0) \vec{i} = 30,0 \vec{i} + 40,0 \vec{j} \\ |\vec{r}_{AP}| &= \sqrt{(30,0 \text{ [m]})^2 + (40,0 \text{ [m]})^2} = 50,0 \text{ m} \end{aligned}$$

Se calcula el vector unitario del punto P tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_{AP} = \frac{\vec{r}_{AP}}{|\vec{r}_{AP}|} = \frac{(30,0 \vec{i} + 40,0 \vec{j}) \text{ [m]}}{50,0 \text{ [m]}} = 0,600 \vec{i} + 0,800 \vec{j}$$

Se calcula el campo gravitatorio en el punto P, creado por la masa situada en el punto A:

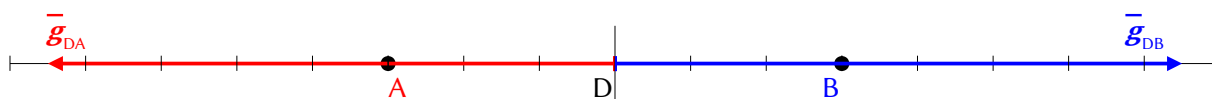
$$\vec{g}_{PA} = -G \frac{M}{r_{AP}^2} \vec{u}_r = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{50,0 \text{ [kg]}}{(50,0 \text{ [m]})^2} (0,600 \vec{i} + 0,800 \vec{j}) = (-8,00 \cdot 10^{-13} \vec{i} - 10,7 \cdot 10^{-13} \vec{j}) \text{ N/kg}$$

El campo gravitatorio en el punto P, creado por la masa situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\vec{g}_{PB} = (8,00 \cdot 10^{-13} \vec{i} - 10,7 \cdot 10^{-13} \vec{j}) \text{ N/kg}$$

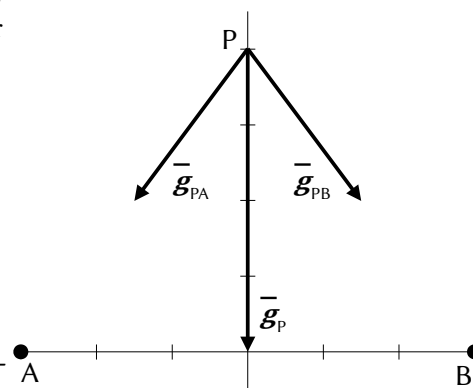
Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto P es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada masa.

$$\vec{g}_P = \vec{g}_{PA} + \vec{g}_{PB} = -2,13 \cdot 10^{-12} \vec{j} \text{ N/kg}$$



En el punto D(0, 0) los campos gravitatorios que ejercen ambas masas son opuestas (mismo módulo, misma dirección y sentido contrario), y, por lo tanto, la resultante es nula.

$$\vec{g}_D = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} = \vec{0}$$



b)

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.

Para determinar el potencial gravitatorio en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada masa, y luego se suman.

La ecuación del potencial gravitatorio en un punto situado a una distancia,  $r$ , de una masa puntual,  $M$ , es:

$$V = -G \frac{M}{r}$$

$G$  es la constante de gravitación universal.

Se calcula el potencial gravitatorio en el punto P, creado por la masa situada en el punto A:

$$V_{PA} = -G \frac{M}{r_{AP}} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{50,0 [\text{kg}]}{50,0 [\text{m}]} = -6,67 \cdot 10^{-11} \text{ J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa situada en el punto B vale lo mismo.

El potencial gravitatorio en el punto P es la suma de los potenciales creados por cada masa:

$$V_P = V_{PA} + V_{PB} = 2 V_{PA} = 2 \cdot (-6,67 \cdot 10^{-11} [\text{J/kg}]) = -1,33 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

Se calcula el potencial gravitatorio en el punto D, creado por la masa situada en el punto A:

$$V_{DA} = -G \frac{M}{r_{AD}} = -6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{50,0 [\text{kg}]}{30,0 [\text{m}]} = -1,11 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo.

El potencial gravitatorio del punto D es la suma:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = 2 V_{DA} = 2 \cdot (-1,11 \cdot 10^{-10} [\text{J/kg}]) = -2,22 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

c) La energía potencial de un objeto de masa  $m$  situado en un punto de potencial  $V$  es proporcional al potencial del punto:

$$E_p = m \cdot V$$

Cuanto mayor sea la energía potencial del punto, mayor será la energía potencial del objeto. Por tanto, la energía potencial será mayor en el punto P ( $-1,33 \cdot 10^{-10} > -2,22 \cdot 10^{-10}$ )

*Análisis: Cuanto más cerca de una masa se encuentre un objeto, menor será su energía potencial. El punto D está más cerca de las masas que el punto P. Un objeto en D tendrá menor energía potencial que en P.*

## ◇ CUESTIONES

### ● Satélites

- En torno a un planeta giran dos satélites, M y N, cuyos períodos de revolución son 32 y 256 días respectivamente. Si el radio de la órbita del satélite M es  $10^4$  km, el radio del satélite N será:

- $4 \cdot 10^4$  km.
- $1,6 \cdot 10^5$  km.
- $3,2 \cdot 10^5$  km.

(P.A.U. sep. 16)

**Solución:** A

La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos,  $T$ , de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas. Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio  $r$ , la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left( \frac{2\pi \cdot r}{T} \right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{4\pi^2 \cdot r_1^3}{4\pi^2 \cdot r_2^3} = \frac{G \cdot M \cdot T_1^2}{G \cdot M \cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow R_2 = R_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 1,00 \cdot 10^4 \text{ [km]} \sqrt[3]{\left(\frac{256 \text{ [días]}}{32 \text{ [días]}}\right)^2} = 4,00 \cdot 10^7 \text{ km}$$

2. Supongamos que la masa de la Luna disminuyese a la mitad de su valor real. Justifique si la frecuencia con que veríamos la luna llena sería:
- A) Mayor que ahora.
  - B) Menor que ahora.
  - C) Igual que ahora.

(P.A.U. jun. 16)

**Solución:** C

La [velocidad de un satélite](#) que gira a una distancia  $r$  alrededor del centro de un astro de masa  $M$  es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad es independiente de la masa del satélite (la Luna), ya que solo depende de la masa del astro (la Tierra) y del radio de la órbita.

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio,  $r$ , y período,  $T$ , es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Como la trayectoria es prácticamente circular, si la velocidad y el radio son los mismos, el período orbital también será igual. Como la frecuencia es la inversa del período, tampoco variaría la frecuencia.

3. Un satélite artificial de masa  $m$  que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio  $r$  tiene una velocidad  $v$ . Si cambia de órbita pasando a otra más próxima a la Tierra, su velocidad debe:
- A) Aumentar.
  - B) Disminuir.
  - C) No necesita cambiar de velocidad.

(P.A.U. jun. 15)

**Solución:** A

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita.  
Si el radio,  $r$ , es menor, la velocidad,  $v$ , en la nueva órbita será mayor.

4. Un planeta gira alrededor del Sol con una trayectoria elíptica. El punto de dicha trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es:
- En el punto más próximo al Sol.
  - En el punto más alejado del Sol.
  - Ninguno de los puntos citados.

(P.A.U. sep. 14)

**Solución:** A

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.

La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:

«El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales».

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño  $dt$ , es la mitad del producto vectorial del vector de posición,  $\vec{r}$ , del planeta por su vector desplazamiento,  $d\vec{r}$ .

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

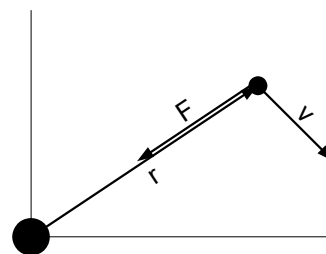
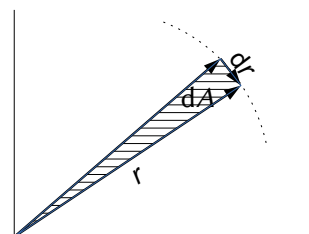
La velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

Siendo  $\vec{v}$  el vector velocidad del planeta.

Si derivamos  $\vec{v}_A$  respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}\right)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a}$$



El producto vectorial de un vector,  $\vec{v}$ , por sí mismo es cero.

$$|\vec{v} \times \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 0^\circ = 0$$

El vector de posición,  $\vec{r}$ , y el vector fuerza,  $\vec{F}$ , son paralelos de sentido opuesto, y la aceleración,  $\vec{a}$ , tiene la misma dirección y sentido que la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta.

El producto vectorial de dos vectores paralelos también es cero, porque su módulo vale:

$$|\vec{r} \times \vec{a}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 180^\circ = 0$$

El resultado es el vector  $\vec{0}$  (cero).

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Si la derivada es nula, la velocidad areolar es constante.

Como la velocidad areolar es constante, se puede escribir en módulos:

$$|\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi = \text{constante}$$

Despreciando las variaciones del ángulo  $\varphi$ , entre el vector de posición y el vector velocidad, cuanto menor sea la distancia,  $r$ , entre el planeta y el Sol, mayor será su velocidad.

El punto de la trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es el perihelio, el punto más próximo al Sol.

5. Si un satélite artificial describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, justifica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta en relación con su energía mecánica  $E$  y sus velocidades orbital  $v$  y de escape  $v_e$ :
- A)  $E = 0$ ,  $v = v_e$
  - B)  $E < 0$ ,  $v < v_e$
  - C)  $E > 0$ ,  $v > v_e$

(P.A.U. jun. 14)

**Solución:** Ninguna

Tal como está enunciada la pregunta, parece que la velocidad de escape del satélite se refiere a cuando el satélite se encuentra en órbita. En ese caso la velocidad de escape del satélite en órbita y su velocidad orbital coinciden, como se ve a continuación. La opción B no se cumple.

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.

La velocidad de escape le proporcionaría la energía,  $\Delta E$ , necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.

La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{e \perp} = \sqrt{2G \frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.

La energía cinética de un objeto de masa  $m$ , que se mueve con velocidad  $v$ , es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa  $m$ , que gira alrededor de un astro de masa  $M$ , en una órbita de radio  $r$ , es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Donde  $G$  es la constante de la gravitación universal.

La energía mecánica de un cuerpo de masa  $m$ , que se encuentra en órbita de radio  $r$  alrededor de un astro de masa  $M$ , es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right)$$

La [velocidad de un satélite](#) que gira a una distancia  $r$  alrededor de un astro de masa  $M$  es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituyendo  $v^2$ , la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} \right) = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e \rightarrow} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{e \leftarrow} = \sqrt{\frac{3}{2} G \frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{e \rightarrow} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

La velocidad de escape es igual que la velocidad orbital. Pero ninguna de las opciones coincide con los resultados obtenidos.  $E < 0$  y  $v = v_e$ .

*Análisis: Me imagino que aunque el enunciado habla de la velocidad de escape del satélite, el autor de la cuestión daba por hecho que la velocidad de escape se refería a un proyectil en la superficie de la Tierra:*

$v_e = \sqrt{2G \frac{M}{R}}$  que da un valor superior a cualquier velocidad orbital  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ , ya que, aparte del factor 2,  $r < R$  (radio de la Tierra). En ese caso la opción B sería correcta, pero, en mi opinión, no lo es.

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula. La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape  $v_e$  le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2G \frac{M}{R}}$$

Las opciones A y B no se cumplen.

La energía mecánica es negativa:  $E < 0$ .

6. Un planeta describe una órbita plana y elíptica en torno al Sol. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es constante?
- A) El momento lineal.  
B) La velocidad areolar.  
C) La energía cinética.

(P.A.U. jun. 13)

**Solución:** B

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.

La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:

«El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales».

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño  $dt$ , es la mitad del producto vectorial del vector de posición,  $\vec{r}$ , del planeta por su vector desplazamiento,  $d\vec{r}$ .

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{r})$$

La velocidad areolar puede expresarse así:

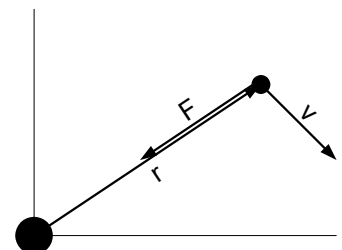
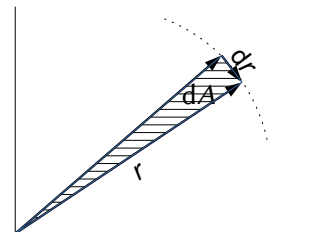
$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

Siendo  $\vec{v}$  el vector velocidad del planeta.

Si derivamos  $\vec{v}_A$  respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}\right)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a}$$

El producto vectorial de un vector,  $\vec{v}$ , por sí mismo es cero.





$$|\vec{v} \times \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 0^\circ = 0$$

El vector de posición,  $\vec{r}$ , y el vector fuerza,  $\vec{F}$ , son paralelos de sentido opuesto, y la aceleración,  $\vec{a}$ , tiene la misma dirección y sentido que la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta.

El producto vectorial de dos vectores paralelos también es cero, porque su módulo vale:

$$|\vec{r} \times \vec{a}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 180^\circ = 0$$

El resultado es el vector  $\vec{0}$  (cero).

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Si la derivada es nula, la velocidad areolar es constante.

Las otras opciones:

A. Falsa.

El momento lineal  $\vec{p}$  de un objeto de masa  $m$  que se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  vale:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

La dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.

C. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en uno de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.

La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Siendo  $M$  la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol),  $m$  es la masa del objeto situado en él (el planeta),  $r$  la distancia entre ambas masas y  $G$  la constante de la gravitación universal.

La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia  $r$ .

Como [la energía mecánica se conserva](#), pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

7. Dos satélites idénticos, 1 y 2, describen órbitas circulares de diferente radio en torno a la Tierra ( $r_1 < r_2$ ). Por lo que:

A) 2 tiene mayor energía cinética.

B) 2 tiene mayor energía potencial.

C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. sep. 12)

**Solución:** B

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa  $m$ , que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio  $r$ , es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Pero como es negativa, cuanto mayor sea el radio de la órbita, mayor será la energía potencial.

$$E_{p2} > E_{p1}$$

Las otras opciones:

A. Falsa.

La [velocidad de un satélite](#) que gira a una distancia  $r$  alrededor de un astro de masa  $M$  es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La energía cinética de un satélite de masa  $m$  que gira alrededor de la Tierra con velocidad  $v$  es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Por tanto, la energía cinética de cada satélite es inversamente proporcional al radio de su órbita: a mayor radio, menor energía cinética.

C. Falsa. La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right)$$

Sustituyendo  $v^2$  en la expresión de la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica de un satélite en una órbita es inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque los satélites tienen la misma masa.

8. En el movimiento de los planetas en órbitas elípticas y planas alrededor del Sol se mantiene constante:
- La energía cinética.
  - El momento angular.
  - El momento lineal.

(P.A.U. jun. 12)

**Solución:** B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del planeta colocando el origen de coordenadas en el Sol.

En un campo de fuerzas centrales el momento angular (momento cinético) es constante.

El momento angular,  $\vec{L}_O$ , de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

Para estudiar su variación, se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

El primer sumando da el vector  $\vec{0}$  (cero) porque la velocidad,  $\vec{v}$ , y el momento lineal,  $m \cdot \vec{v}$ , son paralelos.

$$|\vec{v} \times m \cdot \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 0 = 0$$

El segundo sumando también da el vector  $\vec{0}$  porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición,  $\vec{r}$ , con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin 180^\circ = 0$$

La derivada es cero.

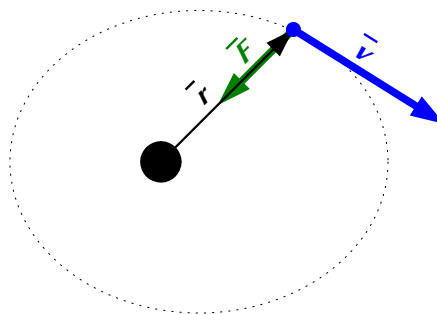
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular,  $\vec{L}_O$ , respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

Las otras opciones:

A. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en uno de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo, ya que es un campo de fuerzas centrales.



La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Siendo  $M$  la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol),  $m$  es la masa del objeto situado en él (el planeta),  $r$  la distancia entre ambas masas y  $G$  la constante de la gravitación universal.

La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia  $r$ .

Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

C. Falsa. El momento lineal,  $\vec{p}$ , de un objeto de masa  $m$  que se mueve a una velocidad,  $\vec{v}$ , vale:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Como se dijo para la opción A, la rapidez varía con la distancia del planeta al Sol. Además, la dirección cambia a medida que el planeta se desplaza.

9. Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica cuál de las siguientes magnitudes es mayor en el afelio (punto más alejado del Sol) que en el perihelio (punto más próximo al Sol):
- A) Momento angular respecto a la posición del Sol.
  - B) Momento lineal.
  - C) Energía potencial.

(P.A.U. sep. 11)

**Solución:** C

La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Siendo  $M$  la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol),  $m$  es la masa del objeto situado en él (Plutón),  $r$  la distancia entre ambas masas y  $G$  la constante de la gravitación universal.

La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia  $r$ , porque, aunque la división dé un número más pequeño, es negativo ( $1 < 2$ , pero  $-1 > -2$ )

Las otras opciones:

A. Falsa. En las fuerzas centrales, como la gravitatoria, en la que la dirección de la fuerza es la de la línea que une las masas, el momento cinético (o angular)  $\vec{L}_O$  respecto al punto O donde se encuentra la masa  $M$  que crea el campo gravitatorio de un objeto de masa  $m$  que se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  es un [vector constante](#).

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

B. Falsa. El momento lineal  $\vec{p}$  de un objeto de masa  $m$  que se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  vale:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Por la [2.ª ley de Kepler](#), que dice que las áreas descritas por el radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, la velocidad en las proximidades del Sol (perihelio) es mayor que cuando está más alejado del él (afelio).

10. Dos satélites 1 y 2 de masas  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ), giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio  $r$ :
- A) Los dos tienen la misma energía mecánica.
  - B) 1 tiene menor energía potencial y menor energía cinética que 2.
  - C) 1 tiene mayor energía potencial y menor energía cinética que 2.

(P.A.U. jun. 10)

**Solución:** C

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p$$

La energía cinética de un satélite de masa  $m$ , que gira alrededor de la Tierra con velocidad  $v$ , es directamente proporcional a la masa.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Como  $m_1 < m_2$ :

$$E_{c1} < E_{c2}$$

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa  $m$ , que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio  $r$ , también es directamente proporcional a la masa.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Pero como es negativa, cuanto mayor sea la masa, menor será la energía potencial.

$$E_{p1} > E_{p2}$$

11. Si dos planetas distan del Sol  $r$  y  $4r$  respectivamente sus períodos de revolución son:

- A)  $T$  y  $4T$ .
- B)  $T$  y  $T/4$ .
- C)  $T$  y  $8T$ .

(P.A.U. sep. 07)

**Solución:** C

La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos,  $T$ , de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas. Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio  $r$ , la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left( \frac{2\pi \cdot r}{T} \right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{M} \cdot T_1^2}{\cancel{G} \cdot \cancel{M} \cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{(4r)^3}{r^3} = (2^2)^3$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{(2^2)^3} = 2^3 = 8$$

12. Dos satélites de comunicación 1 y 2 con diferentes masas ( $m_1 > m_2$ ) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de diferente radio siendo  $r_1 < r_2$
- A) 1 gira con mayor velocidad lineal.
  - B) 2 tiene menor período de revolución.
  - C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. jun. 07)

**Solución:** A

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad lineal de un satélite en una órbita es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita. Como el radio de la órbita 1 es menor que el de la órbita 2, la velocidad del satélite en la órbita 1 será mayor.

Las otras opciones:

B. El período de revolución depende del radio de la órbita y de la velocidad.

Como la velocidad lineal  $v$  de un objeto que se mueve en una órbita circular de radio  $r$  con velocidad constante está relacionada con el período  $T$  (tiempo que tarda en dar una vuelta completa) por la expresión:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

El período del movimiento circular es:

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

Al ser mayor el radio de órbita 2,  $r_2 > r_1$ , y menor su velocidad,  $v_2 < v_1$ , el período de revolución del satélite en la órbita 2 será mayor que el de la órbita 1.

C. La energía mecánica de un satélite de masa  $m$  en órbita circular de radio  $r$  alrededor de la Tierra de masa  $M$  es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right)$$

Sustituyendo  $v^2$  en la expresión de la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica de un satélite en una órbita es directamente proporcional a la masa del satélite e inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque solo ocurriría si se cumpliera la relación:

$$\frac{m_1}{r_1} = \frac{m_2}{r_2}$$

Esta relación no puede cumplirse porque  $m_1 > m_2$  y  $r_1 < r_2$ .

13. Si por una causa interna, la Tierra sufriera un colapso gravitatorio y redujera su radio a la mitad, manteniendo constante la masa, su período de revolución alrededor del Sol sería:

- A) El mismo.  
B) 2 años.  
C) 0,5 años.

(P.A.U. jun. 07)

**Solución:** A

El período de revolución de la Tierra, que sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol, no depende del radio de la Tierra, ya que se puede considerar que se trata de una masa puntual. La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Despejando el período, queda:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

El período depende de la masa del Sol (no de la de la Tierra) y de  $r$ , que es el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, o sea, la distancia del centro de la Tierra al centro del Sol. El radio del planeta Tierra no influye en el período.

14. Dos satélites artificiales 1 y 2 de masas  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 = 2 m_2$ ), giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio  $r$ .
- A) Tienen la misma velocidad de escape.
  - B) Tienen diferente período de rotación.
  - C) Tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. jun. 05)

**Solución:** A

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.

La velocidad de escape le proporcionaría la energía,  $\Delta E$ , necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.

La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{e \perp} = \sqrt{2G \frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.



La energía cinética de un objeto de masa  $m$ , que se mueve con velocidad  $v$ , es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa  $m$ , que gira alrededor de un astro de masa  $M$ , en una órbita de radio  $r$ , es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Donde  $G$  es la constante de la gravitación universal.

La energía mecánica de un cuerpo de masa  $m$ , que se encuentra en órbita de radio  $r$  alrededor de un astro de masa  $M$ , es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right)$$

La [velocidad de un satélite](#) que gira a una distancia  $r$  alrededor de un astro de masa  $M$  es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituyendo  $v^2$ , la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} \right) = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e \rightarrow} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{e \leftarrow} = \sqrt{\frac{3}{2} G \frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{e \rightarrow} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

La velocidad de escape es independiente de la masa del satélite.  $M$  es la masa del astro alrededor del que giran.

Las otras opciones:

B. Falsa. El período de rotación es también independiente de la masa del satélite.

C. Falsa. La energía mecánica sí depende de la masa del satélite.

15. En torno al Sol giran dos planetas cuyos períodos de revolución son  $3,66 \cdot 10^2$  días y  $4,32 \cdot 10^2$  días respectivamente. Si el radio de la órbita del primero es  $1,49 \cdot 10^{11}$  m, la órbita del segundo es:
- A) La misma.  
B) Menor.  
C) Mayor.

(P.A.U. jun. 04)

**Solución:** C

La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos,  $T$ , de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas. Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio  $r$ , la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{4\pi^2 \cdot r_1^3}{4\pi^2 \cdot r_2^3} = \frac{G \cdot M \cdot T_1^2}{G \cdot M \cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow R_2 = R_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 1,49 \cdot 10^{11} [\text{m}] \sqrt[3]{\left(\frac{4,32 \cdot 10^2 [\text{días}]}{3,66 \cdot 10^2 [\text{días}]}\right)^2} = 1,57 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

16. Para un satélite geoestacionario el radio de su órbita se obtiene mediante la expresión:

A)  $R = (T^2 G M / 4\pi^2)^{1/3}$

B)  $R = (T^2 g_0 R / 4\pi^2)^{1/2}$

C)  $R = (T G m^2 / 4\pi^2)^{1/3}$

(P.A.U. jun. 04)

**Solución:** A

Un satélite geoestacionario es el que se encuentra en la vertical del mismo punto de la Tierra, o sea, que tiene el mismo período de rotación alrededor de la Tierra que el de la Tierra sobre su eje.

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que gira a su alrededor en una órbita de radio  $r$ , es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal,  $a_N$ . Al no tener aceleración tangencial, el módulo,  $v$ , de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio  $r$ , se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa,  $m$ , la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo,  $F_G$ , de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio  $r$  y período  $T$  es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left( \frac{2\pi \cdot r}{T} \right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Despejando el radio,  $r$ , de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

En un satélite geoestacionario, el período es de 24 horas,  $M$  es la masa de la Tierra y  $G$  la constante de la gravitación universal. Si disponemos de estos dos últimos datos, el valor de radio es:  $r = 4,22 \cdot 10^7$  m.

### ● Campo gravitatorio.

- Para una partícula sometida a una fuerza central se verifica que:
  - A) Se conserva su momento angular respecto al centro de fuerzas.
  - B) El trabajo realizado por dicha fuerza depende de la trayectoria seguida entre dos puntos dados.
  - C) Se conserva el vector momento lineal.

(P.A.U. sep. 15)

**Solución:** A

El momento angular,  $\vec{L}_O$ , de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

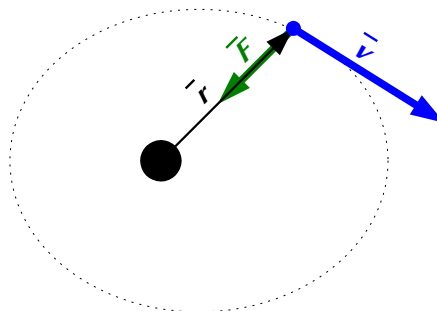
Para estudiar su variación, se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

El primer sumando da el vector  $\vec{0}$  (cero) porque la velocidad,  $\vec{v}$ , y el momento lineal,  $m \cdot \vec{v}$ , son paralelos.

$$|\vec{v} \times m \cdot \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 0 = 0$$

El segundo sumando también da el vector  $\vec{0}$  porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición,  $\vec{r}$ , con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos de sentido contrario.



$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin 180^\circ = 0$$

La derivada es cero.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular,  $\vec{L}_O$ , respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

Las otras opciones:

B: Falsa. Una fuerza central es una fuerza conservativa.

El trabajo de una fuerza conservativa, cuando la partícula se desplaza desde un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial,  $E_p$ , de forma que el trabajo,  $W$ , de la fuerza conservativa es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

C. Falsa. Si la fuerza central es la fuerza resultante, por la 2.ª ley de Newton, varía el momento lineal:

$$\vec{F} = \frac{d m \cdot \vec{v}}{dt} \neq \vec{0}$$

2. Si la Tierra se contrae reduciendo su radio a la mitad y manteniendo la masa:

A) La órbita alrededor del Sol será la mitad.

B) El período de un péndulo será la mitad.

C) El peso de los cuerpos será el doble.

(P.A.U. sep. 10)

**Solución:** B

El período,  $T$ , de un péndulo de longitud  $L$ , en un lugar donde la gravedad sea  $g$ , viene dado por la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

La fuerza gravitatoria,  $\vec{F}_G$ , que ejerce un astro de masa  $M$  y radio  $R$ , sobre un objeto de masa  $m$  en su superficie, se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{R^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión,  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\vec{u}_r$ , el vector unitario en la dirección de la línea que une el objeto con el centro del planeta.

La aceleración de la gravedad es la fuerza sobre la unidad de masa:

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \frac{M_T \cancel{m}}{R_T^2}}{\cancel{m}} = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Si el radio de la Tierra fuera la mitad, manteniendo la masa, la aceleración,  $g$  de la gravedad en su superficie sería cuatro veces mayor.

$$g' = G \frac{M_T}{(R_T/2)^2} = 4G \frac{M_T}{R_T^2} = 4g$$

El período,  $T$ , de un péndulo en tal caso sería la mitad.

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{4g}} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{T}{2}$$

Las otras opciones:

C: Como la gravedad sería cuatro veces mayor, el peso de los cuerpos sería cuatro (y no dos) veces mayor.

A: El período de revolución de la Tierra que sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol no depende del radio de la Tierra, ya que se puede considerar que se trata de una masa puntual.

3. Cuando se compara la fuerza eléctrica entre dos masas, con la gravitatoria entre dos masas (cargas y masas unitarias y a distancia unidad):

A) Ambas son siempre atractivas.

B) Son de un orden de magnitud semejante.

C) Las dos son conservativas.

(P.A.U. sep. 10)

**Solución:** C

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza cuando se desplaza una magnitud sensible (masa para las fuerzas gravitatorias, carga para las fuerzas eléctricas) entre dos puntos, es independiente del camino seguido, y solo depende de las posiciones inicial y final. En esos casos se puede definir una magnitud llamada energía potencial que depende, además de la magnitud sensible, únicamente de las posiciones inicial y final. Por tanto, el trabajo de la fuerza es la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Es el caso de las fuerzas gravitatoria y eléctrica.

	<b>Gravitatoria</b>	<b>Eléctrica</b>
Fuerza	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F}_E = K \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$
Energía potencial	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$	$E_{pE} = K \frac{Q \cdot q}{r}$

Las otras opciones:

A. Falsa. La fuerza gravitatoria es siempre atractiva, pero la fuerza eléctrica es atractiva para cargas de distinto signo, pero repulsiva para cargas del mismo signo.

B. Falsa. Dado el valor tan diferente de las constantes ( $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$  y  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ), la fuerza entre masas o cargas unitarias separadas por la distancia unidad, será  $\approx 10^{20}$  mayor en el caso de la fuerza eléctrica, aunque esta comparación no tenga mucho sentido.

4. Si una masa se mueve estando sometida solo a la acción de un campo gravitacional:

A) Aumenta su energía potencial.

B) Conserva su energía mecánica.

C) Disminuye su energía cinética.

(P.A.U. jun. 09)

**Solución:** B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo de la fuerza gravitatoria, cuando una masa se desplaza de un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial,  $E_p$ , de forma que el trabajo,  $W$ , de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{1 \rightarrow 2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

Agrupando términos:

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

5. El trabajo realizado por una fuerza conservativa:

- A) Disminuye la energía potencial.
- B) Disminuye la energía cinética.
- C) Aumenta la energía mecánica.

(P.A.U. jun. 08)

**Solución:** A

El trabajo que hace una fuerza conservativa entre dos puntos 1 y 2 es igual a la disminución de la energía potencial:

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Es el trabajo que hace la fuerza del campo.

Las masas se mueven en un campo gravitatorio en el sentido de los potenciales decrecientes, que es el sentido de la fuerza del campo, por lo que el trabajo es positivo.

6. En relación con la gravedad terrestre, una masa  $m$ :

- A) Pesa más en la superficie de la Tierra que a 100 km de altura.
- B) Pesa menos.
- C) Pesa igual.

(P.A.U. jun. 08)

**Solución:** A

El peso  $P$  de un objeto de masa  $m$  en la Tierra es la fuerza  $F$  con que la Tierra lo atrae, que viene dada por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$P = F = G \frac{M_T m}{r^2}$$

En la ecuación,  $G$  es la constante de la gravitación universal,  $M_T$  es la masa de la Tierra, y  $r$  es la distancia entre el objeto, supuesto puntual, y el centro de la Tierra.

Cuando el objeto se encuentra en la superficie de la Tierra, esa distancia  $r$  es el radio de la Tierra  $R_T$ . Cuando se encuentre a una altura  $h = 100$  km, la distancia es mayor:

$$r = R_T + h > R_T$$

Por tanto, al ser mayor el denominador de la expresión, la fuerza peso será menor.

7. En el campo gravitatorio:

- A) El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria depende de la trayectoria.
- B) Las líneas de campo se pueden cortar.
- C) Se conserva la energía mecánica.

(P.A.U. sep. 06)

**Solución:** C

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo de la fuerza gravitatoria, cuando una masa se desplaza de un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los

puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial,  $E_p$ , de forma que el trabajo,  $W$ , de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{1 \rightarrow 2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

Agrupando términos:

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

8. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:

- A) Se conservan el momento angular y el momento lineal.
- B) Se conservan el momento lineal y el momento de la fuerza que los une.
- C) Varía el momento lineal y se conserva el angular.

(P.A.U. sep. 04)

**Solución:** C

El momento angular,  $\vec{L}_O$ , de una partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

Para estudiar su variación, se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

El primer sumando da el vector  $\vec{0}$  (cero) porque la velocidad,  $\vec{v}$ , y el momento lineal,  $m \cdot \vec{v}$ , son paralelos.

$$|\vec{v} \times m \cdot \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 0 = 0$$

El segundo sumando también da el vector  $\vec{0}$  porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición,  $\vec{r}$ , con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos de sentido contrario.

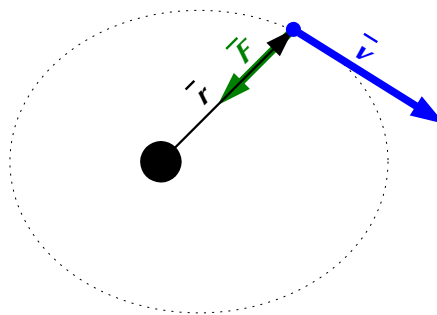
$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin 180^\circ = 0$$

La derivada es cero.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular,  $\vec{L}_O$ , respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

El momento lineal:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  no será constante, ya que el vector  $\vec{v}$ , que es tangente la trayectoria de la órbita del planeta, cambia de dirección.



ACLARACIONES



Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p. ej. la velocidad de la luz:  $3 \cdot 10^8$  m/s cree que es 300 000 000,000000 000 000 000... m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar  $3 \cdot 10^8$  que 299 792 458 m/s).

Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con una incertidumbre desmedida. Así que cuando tomo un dato como  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s y lo reescribo como:

***Cifras significativas: 3***

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con una incertidumbre más pequeña que la que tendría en ese caso. ( $3 \cdot 10^8$  m/s tiene una sola cifra significativa, y una incertidumbre relativa del 30 %. Como las incertidumbres se suelen acumular a lo largo del cálculo, la incertidumbre final sería inadmisibile. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

Cuestiones y problemas de las [Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad](#) (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.

[Respuestas](#) y composición de [Alfonso J. Barbadillo Marán](#).

Algunos cálculos se hicieron con una [hoja de cálculo](#) de [LibreOffice](#) del mismo autor.

Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión [CLC09](#) de Charles Lalanne-Cassou.

La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de [traducindote](#), de Óscar Hermida López.

Se procuró seguir las [recomendaciones](#) del Centro Español de Metrología (CEM).

Se consultó al Copilot de Microsoft Edge y se tuvieron en cuenta algunas de sus respuestas en las cuestiones.

Actualizado: 23/03/24

## Sumario

### GRAVITACIÓN

PROBLEMAS.....	1
<i>Satélites.....</i>	<i>1</i>
<i>Campo gravitatorio.....</i>	<i>33</i>
<i>Masas puntuales.....</i>	<i>35</i>
CUESTIONES.....	42
<i>Satélites.....</i>	<i>42</i>
<i>Campo gravitatorio.....</i>	<i>60</i>

### Índice de pruebas P.A.U.

2004.....	
1. (jun.).....	58 s.
2. (sep.).....	64
2005.....	
1. (jun.).....	31, 56
2006.....	
1. (jun.).....	29
2. (sep.).....	63
2007.....	
1. (jun.).....	53, 55
2. (sep.).....	52
2008.....	
1. (jun.).....	63
2. (sep.).....	27, 40
2009.....	
1. (jun.).....	62
2. (sep.).....	25, 38
2010.....	
1. (jun.).....	23, 51
2. (sep.).....	20, 61 s.
2011.....	
2. (sep.).....	18, 51
2012.....	
1. (jun.).....	33, 50
2. (sep.).....	16, 49
2013.....	
1. (jun.).....	14, 48
2. (sep.).....	12
2014.....	
1. (jun.).....	35, 46
2. (sep.).....	10, 45
2015.....	
1. (jun.).....	7, 44
2. (sep.).....	5, 60
2016.....	
1. (jun.).....	3, 44
2. (sep.).....	1, 42