Gravitación

Método, aproximacións e recomendacións

● Satélites

1. O Sentinel-1 é un satélite artificial de órbita circular polar da Axencia Espacial Europea dentro do Programa Copérnico destinado á monitorización terrestre e dos océanos. Está situado a 693 km sobre a superficie terrestre. Si a súa masa é de 200 kg:
 a) As velocidades lineal e angular do satélite na órbita.
 b) O período da órbita do satélite. Cantas voltas dá á Terra cada día?
 c) A masa da Terra.
 d) O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra.
 e) As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.
 f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra e a velocidade de escape á atracción terrestre a esa altura.
 g) Que velocidade houbo que proporcionarlle no lanzamento para poñelo en órbita?
 h) A velocidade de escape desde o chan.
 i) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra.
 j) A forza con que a Terra atrae ao satélite.
 Datos: R = 6,37·10⁶ m; g_0 = 9,81 m/s² *Problema con datos de A.B.A.U. extr. 23*
 Rta.: a) v = 7,51 km/s; ω = 1,06·10⁻³ rad/s; b) T = 1 h 39 min, f = 14,6 día⁻¹; c) Faltan datos;
 d) $|\overline{\boldsymbol{L}}_O|$ = 1,06·10¹³ kg·m²/s; e) E_c = 5,64·10⁹ J; E_p = −1,13·10¹⁰ J; E = −5,64·10⁹ J;
 f) $\Delta E = -E$ = 5,64·10⁹ J; v_{eo} = 7,51 km/s; f) v_s = 8,3 km/s; g) g_h/g_0 = 0,824; h) v_{es} = 11,2 km/s;
 i) g = 0,81 g_0; j) F = 1,6·10³ N

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa do satélite	m = 200 kg
Altura da órbita	h = 693 km = 6,93·10⁵ m
Raio da Terra	R = 6,37·10⁶ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,81 m/s²
Incógnitas	
Valor das velocidades lineal e angular do satélite	v, ω
Período e frecuencia orbital do satélite	T, f
Módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra.	$|\overline{\boldsymbol{L}}_O|$
Enerxía cinética, potencial e mecánica do satélite en órbita	E_c, E_p, E
Enerxía para mandalo a unha distancia moi grande da Terra	E_∞
Velocidade de escape desde esa altura	v_e
Velocidade desde a superficie para poñelo en órbita	v_s
Cociente entre os valores de g no satélite e na superficie da Terra.	g_h/g_0
Forza con que a Terra atrae ao satélite	F
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2}$
Velocidade dun satélite a unha distancia r do centro dun astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Velocidade angular nun movemento circular uniforme de período T	$\omega=\frac{2\pi}{T}$
Enerxía cinética	E_c = ½ $m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$

Ecuacións

Enerxía mecánica $E = E_c + E_p$

Intensidade do campo gravitacional terrestre a unha distancia r do centro $g=\frac{F_G}{m}=G\frac{M}{r^2}$

Momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ a unha distancia $\overline{\boldsymbol{r}}$ dun punto O que se toma como orixe $\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$

Solución:

a) O satélite describe unha traxectoria aproximadamente circular de raio

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6{,}93 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right|=m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0=G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Calcúlase a velocidade orbital substituíndo na ecuación $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9,81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6,37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{7,06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}}=7,51 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=7,51\ \mathrm{km/s}$$

Análise: Espérase que un obxecto que se mova ao redor da Terra teña unha velocidade dalgún km/s. *O resultado está de acordo con esta suposición.*

A velocidade angular podería calcularse coñecendo o período.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

b) O período calcúlase coa expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T=\frac{2\pi \cdot r}{v}=\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{7,51 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=5,91 \cdot 10^3\ \mathrm{s}=1,64\ \mathrm{h}$$

Agora xa se pode calcular a velocidade angular:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2 \cdot 3,14\ [\mathrm{rad}]}{5,91 \cdot 10^3 [\mathrm{s}]}=1,06 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad/s}$$

A frecuencia é a inversa o período:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{1,64\ [\mathrm{h}]}\ \frac{24,0\ [\mathrm{h}]}{1\ [\mathrm{día}]}=14,6\ \mathrm{día}^{-1}$$

Análise: Os períodos dos satélites terrestres en órbita baixa son da orde de hora e media, parecido ao resultado.

c) Non se pode calcular a masa da Terra se non se ten como dato o valor da constante da gravitación universal.
Nese caso usaríase a expresión «$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$» que se obtivo antes:

$$M=\frac{g_0 \cdot R^2}{G}=\frac{9,81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6,37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{6,67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}]}=5,96 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

d) O momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}$ dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto dun punto Ou que se toma como orixe é:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O} = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra é:

$$|\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \mathrm{sen}\ \alpha = 7,06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] \cdot 200\ [\mathrm{kg}] \cdot 7,51 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}] \cdot \mathrm{sen}\ 90° = 1,06 \cdot 10^{13}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$$

e) A enerxía potencial na órbita vale:

$$E_\mathrm{p}=-G\frac{M \cdot m}{r}=-\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r}=-\frac{9,81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6,37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{7,06 \cdot 10^6 [\mathrm{m}]}=-1,13 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

A enerxía cinética vale:

$$E_\mathrm{c} = m \cdot v^2 /2 = [200\ [\mathrm{kg}]\ (7,51 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2] / 2 = 5,64 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial:

$$E = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = 5,64 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}] + (-\ 1,13 \cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}]) = -5,64 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análise: Pódese demostrar que a enerxía mecánica ten o valor oposto ao da enerxía cinética substituíndo $G \cdot M / r$ por v^2 na expresión da enerxía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}m\cdot v^2-m\cdot v^2=-\frac{1}{2}m\cdot v^2=-E_c$$

f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra sería a diferenza entre a enerxía a unha distancia moi grande e a que ten na órbita:

$$\Delta E = E_\infty - E$$

Ao ser la enerxía mínima, tómase que o obxecto chega ao infinito con velocidade nula. Como a orixe de enerxía potencial gravitacional está no infinito, a enerxía potencial gravitacional dun obxecto no infinito é nula.

$$E_\infty = 0$$

$$\Delta E = -E = 5{,}64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Se a dirección de escape é perpendicular á dirección do movemento do satélite, só hai que ter en conta a súa enerxía potencial, xa que a compoñente da súa velocidade na dirección de escape é cero.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)=G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despexando, a velocidade de escape dun satélite, nunha dirección perpendicular á órbita, queda:

$$v_{e\,o\uparrow}=\sqrt{2G\frac{M}{r}}$$

Se a dirección de escape é paralela á dirección do movemento do satélite, hai que ter en conta a súa enerxía cinética.
A enerxía cinética dun obxecto de masa m, que se move con velocidade v, é directamente proporcional ao cadrado da súa velocidade.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

A enerxía potencial gravitacional dun satélite de masa m, que xira arredor dun astro de masa M, nunha órbita de radio r, é inversamente proporcional ao raio da órbita.

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Onde G é a constante da gravitación universal.
A enerxía mecánica de un corpo de masa m, que se atopa en órbita de raio r arredor dun astro de masa M, é a suma das súas enerxías cinética e potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

A velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor dun astro de masa M é:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Substituíndo v^2, a expresión da enerxía cinética queda:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

A expresión da enerxía mecánica queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Se o sentido de escape é o mesmo que o de avance do satélite, a enerxía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}\right)=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despexando a velocidade de escape no sentido de avance dun satélite en órbita, queda:

$$v_{e\ o\rightarrow}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Se o sentido de escape fose oposto ao do avance do satélite, o que suporía un desperdicio de enerxía, habería que comunicarlle unha velocidade dobre da que tiña en órbita, para que alcance o mesmo valor de velocidade pero en na dirección oposta, máis esta velocidade adicional:

$$v_{e\ o\leftarrow}=\sqrt{\frac{3}{2}G\frac{M}{r}}$$

Tendo en conta que a velocidade de escape é a velocidade mínima, o lóxico é tomar a velocidade de escape no sentido de avance dun satélite:

$$v_{e\ o}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

$$v_e=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9,81\ [m/s^2]\cdot(6,37\cdot 10^6\ [m])^2}{7,06\cdot 10^6\ [m]}}=7,51\cdot 10^4\ m/s=7,51\ km/s$$

Análise: A velocidade de escape na superficie da Terra é de 11,2 km/s. *O resultado está de acordo con este dato tendo en conta que ao estar o satélite lonxe da superficie, a súa velocidade de escape será menor.*

g) A velocidade que houbo que proporcionarlle no lanzamento para poñelo en órbita, pódese calcular supoñendo que, unha vez comunicada esa velocidade, a enerxía consérvase até a órbita.
Tendo en conta que a enerxía potencial na superficie da Terra vale:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}\quad=-\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{R}=g_0\cdot R\cdot m=-9,81\ [m/s^2]\cdot 6,37\cdot 10^6\ [m]\cdot 200\ [kg]=-1,25\cdot 10^{10}\ J$$

A enerxía cinética do satélite cando ten a velocidade necesaria valerá:

$$E_{cs} = E - E_{ps} = -5,64\cdot 10^9\ [J] - (-1,25\cdot 10^{10}\ [J]) = 6,9\cdot 10^9\ J$$

Análise: Pérdese unha cifra significativa ao restar.
A súa velocidade será:

$$v_s=\sqrt{\frac{2\,E_{cs}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6,9\cdot 10^9\ [J]}{200\ [kg]}}=8,3\cdot 10^3\ m/s=8,3\ km/s$$

Análise: A velocidade ten que ser menor que a velocidade de escape desde o chan, que é de 11,2 km/s. *O resultado está de acordo con esta suposición.*

h) La velocidade de escape desde o chan.
A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.

A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

(A velocidade dun punto no chan, no ecuador, con respecto ao centro da Terra sería:

$$v = \frac{2\pi\,R}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{24\ [\mathrm{h}]}\frac{1\ [\mathrm{h}]}{3600\ [\mathrm{s}]} = 463\ \mathrm{m/s}$$

Nun punto situado na latitude λ, o raio (distancia ao eixe da Terra) sería $r = R \cos \lambda$, e a velocidade, $v = 463 \cos \lambda$.
Se fose lanzada paralela ao chan, a velocidade de escape dependería do sentido do lanzamento. Habería que restar, cara ao leste, ou sumar, cara ao oeste, a velocidade de rotación do punto de lanzamento).
Supoñendo que se lanza verticalmente, e substituíndo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{2\,g_0 \cdot R^2}{R}} = \sqrt{2\,g_0 \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]} = 1{,}12 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s} = 11{,}2\ \mathrm{km/s}$$

i) A intensidade do campo gravitacional nun punto que dista r do centro da Terra é a forza sobre a unidade de masa situada nese punto.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m} / r^2}{\cancel{m}} = G\frac{M}{r^2}$$

A gravidade a unha altura h vale: $$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

Na superficie da Terra vale: $$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

Dividindo a primeira entre a segunda queda:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\cancel{G \cdot M} / (R+h)^2}{\cancel{G \cdot M} / R^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{(6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{(7{,}06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2} = 0{,}814$$

Análise: O valor da aceleración da gravidade diminúe coa altura. O resultado está de acordo con isto.

j) A forza con que a Terra atrae ao satélite vale:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot m = g_0 \cdot 0{,}824 \cdot m = 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 0{,}84 \cdot 200\ [\mathrm{kg}] = 1{,}60 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

Tamén pode calcularse sen ter en conta o apartado anterior.

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = \frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{(7{,}06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2} = 1{,}60 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

As respostas e o seu cálculo poden verse coa folla de cálculo Satélites (gal). Escribindo os datos nas celas de cor branca e bordo azul, e facendo clic e elixindo as magnitudes e unidades nas celas de cor salmón:

Enunciado	**Datos:**			
Un satélite de masa		m =	200	kg
xira arredor dun astro de masa		M =		kg
e raio		R =	$6{,}37 \cdot 10^6$	m
no que a gravidade no chan é		g_0 =	9,81	m/s²
A órbita é circular de	altura	h =	693	km

Calcula:

a) O período da órbita do satélite e a súa velocidade

b) O peso do satélite na órbita

c) As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.

Poden verse os seguintes resultados, elixindo nas celas de cor salmón as opcións «km/s» para a velocidade da órbita, «Periodo» e «s» para as súas unidades, «Enerxía na órbita», «Velocidade» no chan para «poñelo en órbita» e «Momento angular» na órbita.

	Respostas			Cifras significativas:	3	
		Raio	Velocidade	Periodo		
a) e b)	Órbita	$7{,}06 \cdot 10^6$ m	**7,51** km/s	**$5{,}90 \cdot 10^3$** s		
		cinética	potencial	mecánica		J
e)	Enerxía na órbita	**$5{,}64 \cdot 10^9$** J	**$-1{,}13 \cdot 10^{10}$** J	**$-5{,}64 \cdot 10^9$** J		
c)	Terra			M =	**$5{,}96 \cdot 10^{24}$** kg	
g)	Velocidade	no chan para	poñelo en órbita		**8,28** km/s	
d)		Momento angular	na órbita		**$1{,}06 \cdot 10^{13}$** kg·m²/s	

Outros resultados poden verse nesta pestana, modificando a elección nas celas de cor salmón.

b) Frecuencia. Cambiar «Periodo» por «Frecuencia» e elixir a unidade «día⁻¹».

		clic ↓	Velocidade	clic ↓	Frecuencia
Órbita					14,6 día⁻¹

c) Aparece o resultado da masa da Terra, porque a folla contén o dato da constante G.

h) A velocidade de escape desde o chan. Cambiar «poñelo en órbita» por «mandalo ao infinito».

Velocidade	no chan para	mandalo ao infinito	**$1{,}12 \cdot 10^4$** m/s

i) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra. Cambiar «Momento angular» por «Gravidade relativa».

Gravidade relativa	na órbita	**0,813** g_0

j) A forza con que a Terra atrae ao satélite. Cambiar «Gravidade relativa».por « Forza gravitacional».

Forza gravitacional	na órbita	**$1{,}60 \cdot 10^3$** N

Os cálculos poden verse nas pestanas «Periodo», «Peso» e «Enerxia».

a) As velocidades lineal e angular do satélite na órbita. Pestana «Periodo»

Velocidade do satélite	$v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$	$v = \sqrt{\dfrac{3{,}99 \cdot 10^{14}}{7{,}06 \cdot 10^{6}}} = 7{,}52 \cdot 10^3$ m/s
Velocidade angular do satélite	$\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}$	$\omega = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{5{,}91 \cdot 10^3} = 0{,}00106$ rad/s

b) O período da órbita do satélite. Cantas voltas dá á Terra cada día? Pestana «Periodo»

Periodo do satélite	$T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$	$T = \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}06 \cdot 10^6}{7{,}52 \cdot 10^3} = 5{,}90 \cdot 10^3$ s
Frecuencia do satélite	$f = \dfrac{1}{T}$	$f = \dfrac{86\,400 \text{ s} \cdot \text{día}^{-1}}{5{,}91 \cdot 10^3 \text{ s}} = 14{,}6 \text{ día}^{-1}$

d) O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra. Pestana «Enerxia»

Momento angular	$L_o = r \cdot m \cdot v$	$L_o = 7{,}06 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 7{,}51 \cdot 10^3 = 1{,}06 \cdot 10^{13}$ kg·m²/s

f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra e a velocidade de escape á atracción terrestre a esa altura. Pestana «Enerxia».
Non presenta o resultado da enerxía mínima, pero é a diferenza entre a enerxía no infinito, 0, e a enerxía mecánica na órbita.

Velocidade de escape na órbita	$v_e = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$	$v_e = \sqrt{\dfrac{3{,}98 \cdot 10^{14}}{7{,}06 \cdot 10^{6}}} = 7{,}51 \cdot 10^3$ m/s

h) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra. Nap estaña «Enunciado» debe aparecer como última opción «Gravidade relativa».

Gravidade relativa	na órbita	0,813 g_0

Na pestana «Peso» pode verse:

Gravidade na altura	$g = \dfrac{G \cdot M}{r^2}$	$g = \dfrac{3{,}99 \cdot 10^{14}}{(7{,}06 \cdot 10^6)^2} = 7{,}98$ m/s²
Gravidade relativa		$\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{8{,}00}{9{,}81} = 0{,}813$

2. A luz do Sol tarda $5 \cdot 10^2$ s en chegar á Terra e $2{,}6 \cdot 10^3$ s en chegar a Xúpiter. Calcula:
   a) O período de Xúpiter virando ao redor do Sol.
   b) A velocidade orbital de Xúpiter.
   c) A masa do Sol.
   Datos: T (Terra) ao redor do Sol: $3{,}15 \cdot 10^7$ s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². (Suponse as órbitas circulares) *(P.A.U. Sep. 12)*
   Rta.: a) $T = 3{,}74 \cdot 10^8$ s; $v = 1{,}31 \cdot 10^4$ m/s; b) $M = 2{,}01 \cdot 10^{30}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Tempo que tarda a luz do Sol en chegar á Terra	$t_1 = 5{,}00 \cdot 10^2$ s = 500 s
Tempo que tarda a luz do Sol en chegar a Xúpiter	$t_2 = 2{,}60 \cdot 10^3$ s
Período orbital da Terra arredor do Sol	$T_1 = 3{,}15 \cdot 10^7$ s
Velocidade da luz no baleiro	$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

Datos	***Cifras significativas: 3***
Incógnitas	
Período orbital de Xúpiter	T_2
Velocidade orbital de Xúpiter	v
Masa do Sol	M
Outros símbolos	
Masa de Xúpiter ou a Terra	m
Distancia dun planeta ao Sol	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:

Calcúlanse as distancias da Terra ao Sol e de Xúpiter ao Sol, tendo en conta a velocidade da luz.

Terra: $r_1 = c \cdot t_1 = 3{,}00 \cdot 10^8$ [m/s] $\cdot$ $5{,}00 \cdot 10^2$ [s] $= 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m

Xúpiter: $r_2 = c \cdot t_2 = 3{,}00 \cdot 10^8$ [m/s] $\cdot$ $2{,}60 \cdot 10^3$ [s] $= 7{,}80 \cdot 10^{11}$ m

Resólvese primeiro o último apartado.

c) A masa do Sol pode calcularse da expresión da velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor do centro dun astro de masa M.

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.

A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

A velocidade da Terra arredor do Sol calcúlase a partir do seu período orbital:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}50\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{3{,}15\cdot 10^{7}\ [\mathrm{s}]}=2{,}99\cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}$$

Despéxase a masa do Sol da velocidade orbital da Terra como satélite:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}\Rightarrow M=\frac{v^2\cdot r}{G}=\frac{(2{,}99\cdot 10^{4}\ [\mathrm{m/s}])^2\cdot 1{,}50\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]}=2{,}01\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

b) Emprégase a ecuación anterior para calcular a velocidade de Xúpiter:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 2{,}01\cdot 10^{30}\ [\mathrm{kg}]}{7{,}80\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}}=1{,}31\cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}=13{,}1\ \mathrm{km/s}$$

a) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T_2=\frac{2\pi\cdot r_2}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}80\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{1{,}31\cdot 10^{4}\ [\mathrm{m/s}]}=3{,}74\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$$

Análise: A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos son directamente proporcionais aos cubos dos raiovectores que unen ao Sol cos planetas. A maior distancia ao Sol, maior período. Este método daría:

$$T_2=T_1\sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}}=3{,}15\cdot 10^{7}\ [\mathrm{s}]\cdot\sqrt{\frac{(7{,}8\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}{(1{,}5\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}}=3{,}74\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$$

As respostas e o seu cálculo poden verse con a folla de cálculo Satélites (gal). Escribindo os datos nas celas de cor branca e bordo azul, e facendo clic e elixindo as magnitudes e unidades nas celas de cor salmón:
Calcúlase primeiro a masa do Sol escribindo os datos da Terra.

Introdución de datos. (Pestana: «Enunciado»)

Un satélite de masa		m =		kg
xira ao redor dun astro de masa		M =		kg
e raio		R =		
no que a gravidade no chan é		g_0 =		m/s²
A órbita é circular de	raio	r =	5,00E+02	s luz
O satélite xira cun	período	T =	3,15E+07	s

O resultado atópase debaixo, na rexión de «**Respostas**».

Respostas	Cifras significativas:	3
Sol	M =	**2,01·10³⁰** kg

Cálculo de la masa do Sol. (Pestana: «Periodo»)

Masa do astro	$M=\frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2}$	$M=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot(1{,}50\cdot 10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(3{,}15\cdot 10^{7})^2}$	= **2,01·10³⁰** kg

Escríbense agora a masa do Sol e os datos de Xúpiter:

Introdución de datos. (Pestana: «Enunciado»)

Un satélite de masa	m =		kg

xira ao redor dun astro de masa		M =	2,01E+30	kg
e raio		R =		
				m/s²
A órbita é circular de	raio	r =	2,60E+03	s luz
O satélite xira cunhas				

Respostas	clic ↓			Cifras significativas:		
		clic ↓	Velocidade		Periodo	
Órbita			**13,1**	**km/s**	**11,8**	anos

Cálculo del período e da velocidade. (Pestana: «Periodo»)

Raio da órbita $r = 2{,}60 \cdot 10^{3} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8} = 7{,}79 \cdot 10^{11}$ m

$G \cdot M = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}01 \cdot 10^{30} = 1{,}34 \cdot 10^{20}$ m³/s²

Velocidade do satélite $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$ $\quad v = \sqrt{\dfrac{1{,}34 \cdot 10^{20}}{7{,}79 \cdot 10^{11}}} = \mathbf{1{,}31 \cdot 10^{4}}$ m/s

Periodo do satélite $T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$ $\quad T = \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}79 \cdot 10^{11}}{1{,}31 \cdot 10^{4}} = \mathbf{3{,}73 \cdot 10^{8}}$ s

3. Un satélite GPS describe órbitas circulares ao redor da Terra, dando dúas voltas á Terra cada 24 h. Calcula:
   a) A altura da súa órbita sobre a superficie terrestre.
   b) A enerxía mecánica.
   c) O tempo que tardaría en dar unha volta á Terra si facémolo orbitar a unha altura dobre.
   Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m; masa do satélite = 150 kg.

(A.B.A.U. extr. 17)

Rta.: a) $h = 2{,}03 \cdot 10^{7}$ m; b) $E = -1{,}12 \cdot 10^{9}$ J; c) $T_c = 28$ h.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia da órbita	f = 2 voltas/24 h
Raio da Terra	$R = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m
Masa do satélite	m = 150 kg
Masa da Terra	$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Altura da órbita	h
Enerxía mecánica	E
O período, se a altura fose o dobre	T_c
Outros símbolos	
Raio da órbita orixinal	r
Valor da velocidade do satélite na órbita orixinal	v
Novo raio da órbita	r_c
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \dfrac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$

Ecuacións

Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2 \pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2 \pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Despéxase o raio da órbita, r, e substitúense valores:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

A frecuencia é a inversa do período. O período orbital calcúlase a partir da frecuencia:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{24\text{ h}}{2}=12\text{ h}=4{,}32\cdot 10^4\text{ s}$$

Calcúlase o raio da órbita:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}](4{,}32\cdot 10^4\,[\text{s}])^2}{4\cdot 3{,}14^2}}=2{,}66\cdot 10^7\text{ m}$$

Calcúlase a altura restando o raio da Terra ao raio da órbita:

$$h = r - R = 2{,}66\cdot 10^7 - 6{,}37\cdot 10^6 = 2{,}02\cdot 10^7\text{ m}$$

Análise: Aínda que non se pode prever un valor, a altura obtida é positiva.

b) Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_\text{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}]\cdot 150\,[\text{kg}]}{2{,}66\cdot 10^7\,[\text{m}]}=-2{,}25\cdot 10^9\text{ J}$$

Calcúlase a enerxía cinética, substituíndo v^2 por $G\,M\,/\,r$:

$$E_\text{c}=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}=1{,}12\cdot 10^9\text{ J}$$

A enerxía cinética é a metade e de signo contrario que a enerxía potencial.
A enerxía (mecánica) total é a suma das enerxías cinética e potencial, e vale o mesmo que a enerxía cinética, pero é negativa.

$$E = E_\text{c} + E_\text{p} = 1{,}12\cdot 10^9\,[\text{J}] - 2{,}25\cdot 10^9\,[\text{J}] = -1{,}12\cdot 10^9\text{ J}$$

c) Se a altura fose o dobre, o novo raio da órbita valería:

$$r_c = R + 2\,h = 6{,}37\cdot 10^6 + 2\cdot 2{,}0\cdot 10^7 = 4{,}7\cdot 10^7\text{ m}$$

A velocidade do satélite valería:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}]}{4{,}7\cdot 10^7\,[\text{m}]}}=2{,}9\cdot 10^3\text{ m/s}=2{,}9\text{ km/s}$$

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 4{,}7\cdot 10^7\,[\text{m}]}{2{,}9\cdot 10^3\,[\text{m/s}]}=1{,}0\cdot 10^5\text{ s}=28\text{ h}$$

Análise: O período dun satélite aumenta coa altura. O valor obtido é maior que o da altura inicial.

As respostas e o seu cálculo poden verse con a folla de cálculo Satélites (gal). Escribindo os datos nas celas de cor branca e bordo azul, e facendo clic e elixindo as magnitudes e unidades nas celas de cor salmón:

Enunciado	**Datos:** G =	$6{,}67\cdot 10^{-11}$	$\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$
Un satélite de masa	m =	150	kg
xira ao redor dun astro de masa	M =	$5{,}98\cdot 10^{24}$	kg
e raio	R =	$6{,}37\cdot 10^6$	m

O satélite xira cunha	frecuencia	f =	2	día⁻¹

Calcula:

a) O raio/a altura da órbita.
b) O peso do satélite na órbita.
c) As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.

Poden verse os seguintes resultados:

Respostas				Cifras significativas:	3
	Altura		Velocidade	clic ↓	
Órbita	$2{,}03 \cdot 10^7$	m			
	cinética		potencial	mecánica	J
Enerxía na órbita	$1{,}12 \cdot 10^9$ J		$-2{,}25 \cdot 10^9$ J	$-1{,}12 \cdot 10^9$ J	

Para o apartado c) hai que borrar a opción «frecuencia», o seu valor e unidades e elixir encima dela a opción «altura», escribir na cela branca de bordo azul «=2*2,03E7» (sen as comiñas pero co signo =, ou calculalo a man e escribir o resultado en calquera das formas: 4,06E7 ó $4{,}06 \cdot 10^7$) e elixir a unidade «m».

A órbita é circular de	altura	h =	40 600 000	m

En «**Respostas**», elixir «Periodo» debaixo de «Cifras significativas:» e elixir «h» como unidade.

Respostas					Cifras significativas:	3
	Altura		Velocidade	clic ↓	Periodo	
Órbita	$4{,}06 \cdot 10^7$	m			28,1	h

● Campo gravitacional

1. A masa do planeta Marte é 0,107 veces a masa da Terra e o seu raio é 0,533 veces o raio da Terra. Calcula:
   a) O tempo que tarda un obxecto en chegar á superficie de Marte se se deixa caer desde unha altura de 50 m.
   b) A velocidade de escape dese obxecto desde a superficie do planeta.
   Datos: g = 9,81 m·s⁻²; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m. *(A.B.A.U. ord. 21)*
   Rta.: a) t = 5,21 s; b) $v_e = 5{,}01 \cdot 10^3$ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de Marte	$M_M = 0{,}107\ M_T$
Raio de Marte	$R_M = 0{,}533\ R_T$
Altura desde a que se deixa caer	h = 50,0 m
Aceleración da gravidade na Terra	$g_0 = 9{,}81$ m/s²
Raio da Terra	$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m
Incógnitas	
Tempo que tarda en caer á superficie de Marte desde unha altura de 50 m	t
Velocidade de escape en Marte	v_e
Outros símbolos	
Masa da Terra	M_T
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal, en módulos. (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$

Ecuacións

Peso dun obxecto de masa m na superficie dun planeta cuxa aceleración da gravidade é g_0	$P = m \cdot g_0$
Ecuación da caída libre (movemento uniformemente acelerado)	$h = v_0 \cdot t + ½ \, g \cdot t^2$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½ \, m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G \dfrac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Hai que calcular o valor da gravidade na superficie de Marte.
O peso dun obxecto preto da superficie da Terra é a forza coa que a Terra o atrae:

$$m \cdot g_T = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Analogamente, o peso dun obxecto preto da superficie de Marte é a forza coa que a Marte o atrae:

$$m \cdot g_M = G \frac{M_M \cdot m}{R_M^2}$$

Dividindo a segunda ecuación entre a primeira, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_M}{\cancel{m} \cdot g_T} = \frac{\cancel{G} \dfrac{M_M \cdot \cancel{m}}{R_M^2}}{\cancel{G} \dfrac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{M_M / M_T}{(R_M / R_T)^2} = \frac{0{,}107}{0{,}533^2} = 0{,}375$$

Despexando:

$$g_M = 3{,}69 \text{ m/s}^2$$

Análise: O resultado é razoable, xa que sabemos que a gravidade na superficie de Marte é unhas 3 veces menor que na superficie da Terra.

Calcúlase o tempo da ecuación da caída libre, sen velocidade inicial:

$$h = ½ \, g \cdot t^2 \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50{,}0}{3{,}69}} = 5{,}21 \text{ s}$$

b)
A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Hai que calcular tamén o raio de Marte:

$$R_M = 0{,}533\ R_T = 0{,}533 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] = 3{,}40 \cdot 10^6\ \text{m}$$

Calcúlase a velocidade de escape substituíndo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v_e = \sqrt{\frac{2\, g_0 \cdot R_M^2}{R_M}} = \sqrt{2\, g_0 \cdot R_M} = \sqrt{2 \cdot 3{,}69\ [\text{m/s}^2] \cdot (3{,}40 \cdot 10^6\ [\text{m}])^2} = 5{,}01 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 5{,}01\ \text{km/s}$$

Cuestións e problemas das Probas de avaliación de Bacharelato para o acceso á Universidade (A.B.A.U. e P.A.U.) en Galiza.
Respostas e composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algúns cálculos fixéronse cunha folla de cálculo de LibreOffice do mesmo autor.
Algunhas ecuacións e as fórmulas orgánicas construíronse coa extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
A tradución ao/desde o galego realizouse coa axuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Procurouse seguir as recomendacións do Centro Español de Metroloxía (CEM).
Consultouse ao Copilot de Microsoft Edge e tivéronse en conta algunhas das súas respostas nas cuestións.

Actualizado: 21/02/24

Sumario