ONDAS

Método e recomendacións

● Ecuación e características das ondas

1. Unha onda transmítese ao longo dunha corda. O punto situado en $x = 0$ oscila segundo a ecuación $y = 0,1 \cos(10\ \pi\ t)$ e outro punto situado en $x = 0,03$ m oscila segundo a ecuación $y = 0,1 \cos(10\ \pi\ t - \pi / 4)$. Calcula:
   a) A amplitude, a lonxitude de onda, o número de onda k, o período, a frecuencia e pulsación ω da onda.
   b) A velocidade de propagación da onda e indica en que sentido se propaga.
   c) O tempo que ha de transcorrer para que a onda percorra unha distancia igual a 2 λ.
   d) Escribe a ecuación de onda.
   e) A velocidade de oscilación dun punto da corda e a súa aceleración en función do tempo.
   f) A elongación, velocidade e aceleración dun punto situado en $x = 0,03$ m no instante $t = 0,05$ s.
   g) Os valores máximos da velocidade e aceleración das partículas da corda.
   h) Os valores do tempo para os que $y(x, t)$ é máxima na posición $x = 0,03$ m.
   i) Os valores do tempo para os que un punto situado en $x = 0,03$ m ten velocidade máxima.
   j) A distancia entre dous puntos cuxa diferencia de fase nun instante dado é 2 π/3.
   k) A diferenza de fase entre dous puntos separados 15 cm.
   l) A diferenza de fase entre dous estados de vibración da mesma partícula cando o intervalo de tempo transcorrido é de 0,05 s.
   m) Para un tempo fixo t, que puntos da onda están en fase co punto que se atopa en x = 0,03 m?
   n) Para unha posición fixa x, para que tempos o estado de vibración dese punto está en fase coa vibración para $t = 0,05$ s?

Problema modelo basado en P.A.U. Xuño 06

Rta.: a) $A = 0,100$ m; $\lambda = 0,240$ m; $k = 26,2$ rad/m; $f = 5,00$ Hz; $\omega = 31,4$ rad/s. b) $v_p = 1,20$ m/s; c) $t_2 = 0,400$ s; d) $y = 0,100 \cdot \cos(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x)$ [m]; e) $v = -3,14 \cdot \text{sen}(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x)$ [m/s]; $a = -98,7 \cdot \cos(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x)$ [m/s²]; f) $y_3 = 0,0707$ m; $v_3 = 2,22$ m/s; $a_3 = -69,8$ m/s²; g) $v_m = 3,14$ m/s; $a_m = 98,7$ m/s²; h) $t_{my} = 0,0750 + 0,100\ n$ (s); i) $t_{mv} = 0,0250 + 0,100\ n$ (s); j) $\Delta x = 0,0800 + 0,240 \cdot n$ [m]; k) $\Delta\varphi_x = 3,93$ rad; l) $\Delta\varphi_t = 1,57$ rad; m) $x_3 = 0,0300 + 0,240\ n$ [m]; n) $t_3 = 0,0500 + 0,200\ n$ [s], $n = 0, 1, 2...$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Ecuación de oscilación na orixe $x = 0$	$y = 0,100 \cdot \cos(10,0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Ecuación de oscilación en $x = 0,03$ m	$y = 0,100 \cdot \cos(10,0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4,00)$ [m]
Incógnitas	
Amplitude	A
Lonxitude de onda	λ
Número de onda	k
Período	T
Frecuencia	f
Pulsación	ω
Velocidade de propagación	v_p
Tempo para que a onda percorra unha distancia igual a 2 λ	t_2
Ecuación de onda	$y(x, t)$
Velocidade da partícula nun punto en función do tempo	v
Aceleración da partícula nun punto en función do tempo	a
Elongación en $x = 0,03$ m en t = 0,05 s.	y_3
Velocidade en $x = 0,03$ m en t = 0,05 s.	v_3
Aceleración en $x = 0,03$ m en t = 0,05 s.	a_3
Velocidade máxima das partículas	v_m
Aceleración máxima das partículas	a_m
Os valores do tempo para os que y é máxima en $x = 0,03$ m	t_{my}
Os valores do tempo para os que v é máxima en $x = 0,03$ m	t_{mv}
A distancia entre dous puntos cuxa diferencia de fase nun instante dado é 2 π/3.	Δx

Incógnitas	
A diferenza de fase entre dous puntos separados 15 cm.	$\Delta\varphi_x$
A diferenza de fase entre dous estados de vibración da mesma partícula cando o intervalo de tempo transcorrido é de 0,05 s	$\Delta\varphi_t$
Puntos da onda que están en fase co punto *en* x = 0,03 m	x_3
En que tempos o estado de vibración dese punto está en fase coa vibración para t = 0,05 s	t_3
Outros símbolos	
Posición do punto (distancia ao foco)	x
Amplitude	A
Frecuencia	f
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Número de onda	$k = 2\pi / \lambda$
Relación entre a frecuencia angular e a frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre o período e a frecuencia	$f = 1 / T$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Calcúlase a amplitude e a frecuencia angular comparando a ecuación dunha onda harmónica unidimensional coa ecuación de vibración na orixe:

Ecuación xeral dunha onda harmónica: $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$
Ecuación da onda harmónica na orixe (x = 0): $y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t)$ [m]
Amplitude: A = 0,100 m
Frecuencia angular: $\omega = 10{,}0 \cdot \pi$ [rad/s] = 31,4 rad/s

Calcúlase o número de onda comparando a ecuación da onda harmónica unidimensional, na que se substituíron a amplitude e a frecuencia angular, coa ecuación de vibración en o punto x = 0,0300 m:
Ecuación da onda harmónica: $y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t \pm k \cdot x)$ [m]
Ecuación da onda harmónica no punto x = 0,0300 m: $y = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4{,}00)$ [m]

$$k \cdot x = \pi / 4{,}00 \Rightarrow k = \frac{\pi}{4{,}00 \cdot x} = \frac{3{,}14\ [\text{rad}]}{4{,}00 \cdot 0{,}030\ 0[\text{m}]} = 26{,}2\ \text{rad/m}$$

Calcúlase a lonxitude de onda a partir do número de onda:

$$k = 2\pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{26{,}2\ [\text{rad/m}]} = 0{,}240\ \text{m}$$

Calcúlase a frecuencia a partir da frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10{,}0 \cdot \pi}{2\pi} = 5{,}00\ \text{s}^{-1}$$

Calcúlase o período a partir da frecuencia:

$$f = 1 / T \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5{,}00\ \text{s}^{-1}} = 0{,}200\ \text{s}$$

b) Calcúlase a velocidade de propagación da onda a partir da lonxitude de onda e da frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}240\ [\text{m}] \cdot 5{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 1{,}20\ \text{m/s}$$

Como a onda no punto x = 0,0300 m está atrasada en π / 4,00 rad porque na ecuación aparece o signo «−», a onda desprázase no sentido positivo do eixo X.

c) Calcúlase o tempo que tarda en percorrer unha distancia igual a $\Delta x = 2 \cdot \lambda = 2 \cdot 0{,}240$ [m] = 0,480 m a partir da velocidade de propagación constante da onda

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow t_3 = \frac{\Delta x}{v_p} = \frac{0{,}480\ [\text{m}]}{1{,}20\ [\text{m/s}]} = 0{,}400\ \text{s}$$

Análise: Pódese definir o período como o tempo que tarda unha onda en percorrer unha distancia igual á lonxitude de onda. Por tanto o tempo necesario para que a onda percorra unha distancia igual a 2 · λ, será o dobre do período: $t_2 = 2 \cdot T = 2 \cdot 0{,}200\ [\text{s}] = 0{,}400\ \text{s}$.

d) A ecuación de movemento obtense substituíndo os valores de k e ω:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) = 0{,}100 \cdot \cos(10{,}0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 0{,}120 \cdot x) = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m}]$$

Análise: Pódese comprobar que esta ecuación dá as ecuacións para $x = 0$, $y = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t)$ *e para* $x = 0{,}03$ m, $y = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 0{,}786) = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - \pi / 4)$

e) A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo :

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -0{,}100 \cdot 31{,}4 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

$$v = -3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m/s}]$$

A aceleración obtense derivando a ecuación da velocidade con respecto ao tempo :

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{-3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\}}{\mathrm{d}t} = -3{,}14 \cdot 31{,}4 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

$$a = -98{,}7 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x)\ [\text{m/s}^2]$$

f) Substitúense nas ecuacións os valores da posición $x = 0{,}03$ m e o tempo $t = 0{,}05$ s.

$$y_3 = 0{,}100 \cdot \cos(31{,}4 \cdot 0{,}0500 - 26{,}2 \cdot 0{,}0300) = 0{,}0707\ \text{m}$$
$$v_3 = -3{,}14 \cdot \operatorname{sen}(31{,}4 \cdot 0{,}0500 - 26{,}2 \cdot 0{,}0300) = 2{,}22\ \text{m/s}$$
$$a_3 = -98{,}7 \cdot \cos(31{,}4 \cdot 0{,}0500 - 26{,}2 \cdot 0{,}0300) = -69{,}8\ \text{m/s}^2$$

g) A velocidade é máxima cando o seno da fase vale −1:

$$v_\text{m} = -3{,}14 \cdot (-1) = 3{,}14\ \text{m/s}$$

A aceleración é máxima cando o coseno da fase vale −1:

$$a_\text{m} = -98{,}7 \cdot (-1) = 98{,}7\ \text{m/s}^2$$

h) Para obter os valores do tempo para os que y é máxima en $x = 0{,}03$ m, imponse a condición de que o coseno da fase nese punto valla 1, o que corresponde a unha fase de 0 rad:

$$\cos(31{,}4 \cdot t_{\text{m}y} - 26{,}2 \cdot 0{,}03) = 1$$
$$31{,}4 \cdot t_{\text{m}y} - 26{,}2 \cdot 0{,}03 = 0$$
$$t_{\text{m}y} = \frac{26{,}2 \cdot 0{,}030\ 0}{31{,}4} = 0{,}025\ 0\ (\text{s})$$

Esta situación volve repetirse transcorridos un número n de semiperíodos, se só nos atemos a que o valor da elongación sexa máxima.

$$t_{\text{m}y} = 0{,}0250 + 0{,}100\ n\ (\text{s});\ n = 0, 1, 2\ldots$$

Se entendemos que máximo se refire tamén ao signo, entón repítese cada n períodos:

$$t_{\text{m}y} = 0{,}0250 + 0{,}200\ n\ (\text{s});\ n = 0, 1, 2\ldots$$

i) De forma análoga, a velocidade será máxima cando o seno da fase nese punto valla 1, o que corresponde a unha fase de π / 2 rad:

$$\operatorname{sen}(31{,}4 \cdot t_\text{m} - 26{,}2 \cdot 0{,}0300) = 1$$
$$31{,}4 \cdot t_\text{m} - 26{,}2 \cdot 0{,}0300 = \pi / 2$$
$$t_\text{m} = \frac{26{,}2 \cdot 0{,}030\ 0 + 3{,}14/2}{31{,}4} = 0{,}075\ 0\ (\text{s})$$

Esta situación volve repetirse transcorridos un número n de semiperíodos, se só nos atemos a que o valor da velocidade sexa máxima.

$$t_{\text{m}v} = 0{,}0750 + 0{,}100\ n\ (\text{s});\ n = 0, 1, 2\ldots$$

Se entendemos que máximo se refire tamén ao signo, entón repítese cada n períodos:

$$t_{mv} = 0{,}0750 + 0{,}200\ n\ (\text{s});\ n = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

j) A distancia entre dous puntos cuxa diferencia de fase nun instante dado é 2 π/3 obtense restando as expresións das fases de ambos os puntos e igualando o resultado a 2 π/3.

$$(31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x_2) - (31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x_1) = 2\ \pi/3$$

$$26{,}2 \cdot (x_1 - x_2) = 2\ \pi/3$$

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{2 \cdot 3{,}14/3}{26{,}2} = 0{,}080\ 0\ (\text{m})$$

Se a diferenza de fase fose de 2 π rad, *a distancia entre os puntos sería unha lonxitude de onda λ. A unha diferenza de fase de* 2 π/3 rad *correspóndelle unha distancia de λ* / 3 = 0,240 [m] / 3 = 0,0800 m

Todos os puntos que disten un múltiplo n de lonxitudes de onda do máis próximo, tamén terán unha diferenza de fase de 2 π/3 co punto de referencia.

$$\Delta x = 0{,}0800 + 0{,}240 \cdot n\ [\text{m}]$$

k) A diferenza de fase entre dous puntos que disten 15 cm obtense restando as expresións das fases de ambos os puntos

$$\Delta\varphi_x = (31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x_2) - (31{,}4 \cdot t - 26{,}2 \cdot x_1)$$

$$\Delta\varphi_x = 26{,}2 \cdot (x_1 - x_2) = 26{,}2 \cdot 0{,}150 = 3{,}93\ \text{rad}$$

l) A diferenza de fase entre dous estados de vibración da mesma partícula cando o intervalo de tempo transcorrido é de 0,05 s obtense restando as expresións das fases de ambos os puntos

$$\Delta\varphi_t = (31{,}4 \cdot t_2 - 26{,}2 \cdot x) - (31{,}4 \cdot t_1 - 26{,}2 \cdot x)$$

$$\Delta\varphi_t = 31{,}4 \cdot (t_2 - t_1) = 31{,}4 \cdot 0{,}0500 = 1{,}57\ \text{rad}$$

m) Todos os puntos que disten un múltiplo n de lonxitudes de onda λ do punto *en* x = 0,03 m estarán en fase con el:

$$x_3 = 0{,}0300 + 0{,}240\ n\ [\text{m}],\ n = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

m) En todos os tempos que disten un múltiplo n de períodos T do tempo en t = 0,05 s, o estado de vibración estará en fase con ese instante:

$$t_3 = 0{,}0500 + 0{,}200\ n\ [\text{s}],\ n = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Pode obter as respostas na pestana «Ondas» da folla de cálculo Fisica (gal). Instrucións.
En DATOS, escriba:

Ecuación		$y = A$	cos	$(\omega\ t \pm k\ x + \varphi_0)$
Amplitude	A =	0,1	m	
Frecuencia angular	ω =	10 π	rad/s	
Distancia entre puntos	Δx =	0,03	m	
no instante	t =		s	
Diferenza de fase	Δφ =	π / 4	rad	

Para escribir o símbolo π, teclee :pi:
Pode escribir =10*PI() en vez de 10 π ou =PI()/4 en vez de π / 4
Para ver os resultados, faga clic nas celas de cor laranxa e elixa as opcións como se mostra:

			Cifras significativas:	3
	Ecuación	xeral		
d)	Elongación	y = 0,100 cos(31,4 t − 26,2 x) (m)		
	Valor			
a)	Período	T = 0,200 s		
a)	Lonxitude de onda	λ = 0,240 m		

b)	Velocidade de propagación	v =	1,20 m/s

Facendo clic nas celas de cor laranxa de «Período» e «Lonxitude de onda», podemos obter outros resultados elixindo

a)	Frecuencia	f =	5,00 Hz
a)	Número de onda k	k =	26,2 rad/m

E tamén

a)	Frecuencia angular	ω =	31,4 rad/s

Para o apartado c (o tempo para percorrer unha distancia igual a 2 · λ) a folla non lle vai dar a solución. Pode escribir unha fórmula sinxela nunha das celas baixo «OUTROS CÁLCULOS»

OUTROS CÁLCULOS					
Etiqueta:		Tempo 2 λ			
Fórmula:		0,400			

A fórmula pode ser =2*0,24/1,2

poñendo os valores obtidos.

Pode escribir tamén =2*AVALOR(

e facer clic na cela que contén «0,240» á dereita de «λ =».

Agora verase: =2*AVALOR(H19

Siga escribindo =2*AVALOR(H19)/AVALOR(

Faga clic na cela que contén «1,20» á dereita de «v =» e escriba a paréntese final

=2*AVALOR(H18)/AVALOR(H20)

As ecuacións da velocidade e aceleración obtéñense facendo clic en «Elongación» baixo «Ecuación» e elixindo:

e)	Velocidade	v = −3,14 sen(31,4 t − 26,2 x) (m/s)

E facendo clic na mesma cela, elixa

e)	Aceleración	a = −98,7 cos(31,4 t − 26,2 x) (m/s²)

Para obter os valores da elongación, velocidade e aceleración nun tempo e posición concretos, temos que cambiar algúns dos datos, poñendo por exemplo o valor da lonxitude de onda. Temos que cambiar Δx por x, e escribir o valor do tempo xunto a t, e borrar o valor da «Diferenza de fase»

Ecuación	$y = A$	cos	$(\omega\, t \pm k\, x + \varphi_0)$
Amplitude	A =	0,1	m
Frecuencia angular	ω =	10 π	rad/s
Lonxitude de onda	λ =	0,24	m
Posición do punto	x =	0,03	m
no instante	t =	0,05	s
Diferenza de fase	Δφ =		rad

Facendo clic na cela de cor laranxa baixo «Valor» eliximos

	Valor		Máximo	En x = 0,03 m aos 0,05 s	
f)	Elongación	y_m =	0,100 m	y =	0,0707 m

Na mesma cela,

f), g)	Velocidade	v_m =	3,14 m/s	v =	−2,22 m/s

Vense tamén os valores máximos. Facendo clic outra vez na mesma cela:

f), g)	Aceleración	a_m =	98,7 m/s²	a =	−69,8 m/s²

Obtemos os valores do tempo para os que $y(x,\, t)$ é máxima na posición x = 0,03 m, borrando o valor do tempo nos datos

no instante	t =		s

e facendo clic na cela de cor laranxa baixo «Velocidade de propagación» elixindo

h)	Tempo de elongación máxima, t =	0,0250 + 0,100 n (s)

Facendo clic na mesma cela, podemos ver

i)	Tempo de velocidade máxima, t =	0,0750 + 0,100 n (s)

Para ver a distancia entre dous puntos cuxa diferencia de fase nun instante dado é 2 π/3, só haberá que escribir nos datos:

Diferenza de fase	Δφ =	2 π / 3	rad

Aparecerá na última liña dos resultados:

j)	Distancia entre puntos Δx =	0,0800 m se	$\Delta\varphi$ = 2,09 rad	

Para o apartado seguinte, cambiamos nos datos x por Δx, escribimos a distancia, eliximos a unidade e borramos o valor da «Diferenza de fase»

Distancia entre puntos	Δx =	15	cm
no instante	t =		s
Diferenza de fase	$\Delta\varphi$ =		rad

A última liña de RESULTADOS mostrará:

k)	Diferenza de fase $\Delta\varphi$ =	3,93 rad se	Δx = 15 cm	

Podemos facer clic na cela de cor laranxa, para que a diferencia de fase apareza en función de π.

k)	Diferenza de fase $\Delta\varphi$ =	5 π/4 rad se	Δx = 15 cm	π

Para ver a diferenza de fase cando o intervalo de tempo transcorrido é de 0,05 s, esta folla non lle dá o resultado.

Para ver que puntos da onda están en fase co punto que se atopa en x = 0,03 m, volvemos cambiar nos datos Δx por x, escribimos a posición e eliximos a unidade.

Posición do punto	x =	0,03	m

Facendo clic na cela de cor laranxa baixo «Velocidade de propagación» e elixindo

m)	Posicións de puntos en fase, x =	0,0300 + 0,240 n (m)

Para ver en que tempos o estado de vibración de ese punto está en fase coa vibración para t = 0,05 s, borramos os datos de x, e escribimos o tempo.

no instante	t =	0,05	s

Facemos clic na cela de cor laranxa baixo «Velocidade de propagación» elixindo

n)	Tempos de puntos en fase, t =	0,0500 + 0,200 n (s)

2. Unha onda harmónica transversal de frecuencia 2 Hz, lonxitude de onda 20 cm e amplitude 4 cm, propágase por unha corda no sentido positivo do eixe X. No intre t = 0, a elongación no punto x = 0 é y = 2,83 cm.
   a) Expresa matematicamente a onda e represéntaa graficamente en (t = 0; 0 < x < 40 cm).
   b) Calcula a velocidade de propagación da onda e determina, en función do tempo, a velocidade de oscilación transversal da partícula situada en x = 5 cm.

(A.B.A.U. Xul. 21)

Rta.: a) y = 0,0400 sen(4 π t – 10 π x + π / 4) [m]; b) v_p = 0,400 m/s; v = 0,503 cos(4 π t – π / 4) [m/s]

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia	f = 2,00 Hz = 2,00 s^{-1}
Lonxitude de onda	λ = 20,0 cm = 0,200 m
Amplitude	A = 0,0400 m = 0,0400 m
Elongación en x = 0 para t = 0	y = 2,83 cm = 0,0283 m
Incógnitas	
Ecuación da onda (frecuencia angular e número de onda)	ω, k
Velocidade de propagación	v_p
Velocidade da partícula en x = 5 cm en función do tempo	v
Outros símbolos	
Posición do punto (distancia ao foco)	x
Período	T
Ecuacións	
Ecuación dunha onda harmónica unidimensional	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)$
Número de onda	$k = 2\,\pi / \lambda$
Frecuencia angular	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Relación entre a lonxitude de onda e a velocidade de propagación	$v_p = \lambda \cdot f$

Solución:

a) Tómase a ecuación dunha onda harmónica en sentido positivo do eixe X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

Calcúlase a frecuencia angular a partir da frecuencia:

$$\omega = 2\,\pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 4{,}00 \cdot \pi\ [\text{rad·s}^{-1}] = 12{,}6\ \text{rad·s}^{-1}$$

Calcúlase o número de onda a partir da lonxitude de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ [\text{rad}]}{0{,}200\ [\text{m}]} = 10\,\pi\ \text{rad/m} = 31{,}4\ \text{rad/m}$$

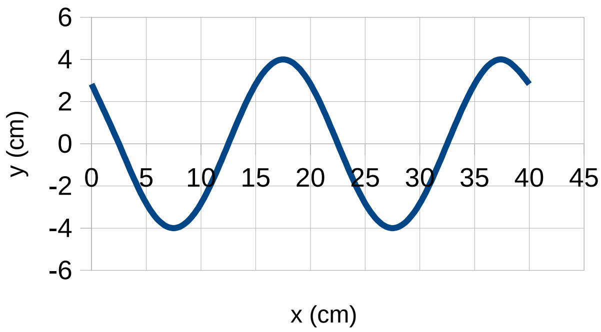
Calcúlase a fase inicial a partir da elongación en $x = 0$ para $t = 0$.

$$y(x,\,t) = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot x + \varphi_0)\ [\text{m}]$$
$$0{,}0283\ [\text{m}] = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot 0 - 31{,}4 \cdot 0 + \varphi_0)\ [\text{m}] = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(\varphi_0)$$
$$\text{sen}(\varphi_0) = 0{,}0283 \,/\, 0{,}0400 = 0{,}721$$
$$\varphi_0 = \text{arcsen}\ 0{,}721 = 0{,}786\ \text{rad} = \pi \,/\, 4\ \text{rad}$$

A ecuación de onda queda:

$$y(x,\,t) = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot x + 0{,}786)\ [\text{m}] = 0{,}0400 \cdot \text{sen}(4\,\pi \cdot t - 10\,\pi \cdot x + \pi \,/\, 4)\ [\text{m}]$$

A representación gráfica é a da figura:



b) Calcúlase a velocidade de propagación a partir da lonxitude de onda e a frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0{,}200\ [\text{m}] \cdot 2{,}00\ [\text{s}^{-1}] = 0{,}400\ \text{m/s}$$

A velocidade obtense derivando a ecuación de movemento con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}040\ 0\,\text{sen}(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot x + 0{,}786)\}}{\mathrm{d}\,t} = 0{,}040\ 0 \cdot 12{,}6 \cos(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot x + 0{,}786)\ [\text{m/s}]$$
$$v = 0{,}503 \cdot \cos(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot x + 0{,}786)\ [\text{m/s}]$$

Para $x = 5$ cm (=0,05 m), a expresión queda:

$$v = 0{,}503 \cdot \cos(12{,}6 \cdot t - 31{,}4 \cdot 0{,}0500 + 0{,}786) = 0{,}503 \cdot \cos(12{,}6 \cdot t - 0{,}786) = 0{,}503 \cdot \cos(4\,\pi \cdot t - \pi \,/\, 4)\ [\text{m/s}]$$

Pode obter as respostas na pestana «Ondas» da folla de cálculo Fisica (gal). Instrucións.

Ecuación		$y = A$	sen	$(\omega\, t \pm k\, x + \varphi_0)$
Amplitude	A =	4	cm	
Frecuencia	f =	2	Hz	
Lonxitude de onda	λ =	0,2	m	
Posición do punto	x =	5	cm	
no instante	t =	0	s	
Elongación inicial	y_0 =	2,83	cm	
Diferenza de fase	$\Delta\varphi$ =		rad	

Para ver os resultados, faga clic nas celas de cor laranxa e elixa as opcións como se mostra:

		Cifras significativas:	3	
a)	Ecuación	xeral		π
	Elongación	y = 0,0400 sen(4 π t − 10 π x + π/4) (m)		

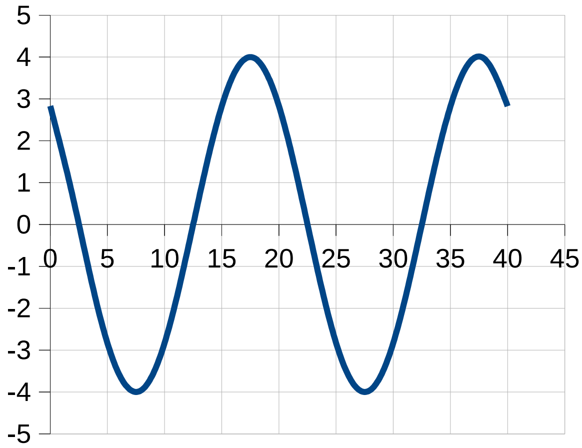
Máis abaixo verá:

Velocidade de propagación	v =	0,400 m/s

Para a representación gráfica elixa «Tempo (s)» na cela de cor laranxa e teclee os datos do tempo e as posicións inicial e final.

Tempo (s)		mín.	máx.
0	Posición (cm)	0	40

A gráfica será como a seguinte:



Para ver os resultados de apartado b) cambie «xeral» por «en x = 5 cm» e «Elongación» por «Velocidade»

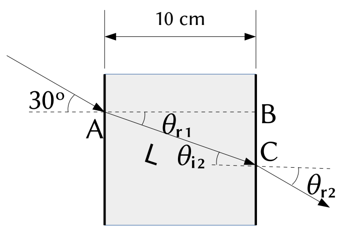
Ecuación	en x = 5 cm
Velocidade	v = 0,503 cos(4 π t – π/2) (m/s)

● Dioptrio plano

1. Un raio de luz de frecuencia 5·10¹⁴ Hz incide cun ángulo de incidencia de 30° sobre unha lámina de vidro de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabendo que o índice de refracción do vidro é 1,50 e o do aire 1,00:
   a) Enuncia as leis da refracción e debuxa a marcha dos raios no aire e no interior da lámina de vidro.
   b) Calcula a lonxitude de onda da luz no aire e no vidro, e a lonxitude percorrida polo raio no interior da lámina.
   c) Acha o ángulo que forma o raio de luz coa normal cando emerxe de novo ao aire.
   Dato: c = 3,00·10⁸ m/s *(P.A.U. Set. 14)*
   Rta.: b) λ(aire) = 600 nm; λ(vidro) = 400 nm; L = 10,6 cm; c) θ_{r2} = 30°

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia do raio de luz	$f = 5{,}00 \cdot 10^{14}$ Hz
Ángulo de incidencia	$\theta_{i1} = 30{,}0°$
Espesor da lámina de vidro	e = 10,0 cm = 0,100 m
Índice de refracción do vidro	$n_v = 1{,}50$
Índice de refracción do aire	$n_a = 1{,}00$
Velocidade da luz no baleiro	$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
Incógnitas	
Lonxitude de onda de luz no aire e no vidro	λ_a, λ_v
Lonxitude percorrida polo raio de luz no interior da lámina	L
Ángulo de desviación do raio ao saír da lámina	θ_{r2}
Ecuacións	
Índice de refracción dun medio $_i$ no que a luz se despraza á velocidade v_i	$n_i = \frac{c}{v_i}$
Relación entre a velocidade v, a lonxitude de onda λ e a frecuencia f	$v = \lambda \cdot f$
Lei de Snell da refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:



a) As leis de Snell da refracción son:
1.ª O raio incidente, o raio refractado e a normal están no mesmo plano.
2.ª A relación matemática entre os índices de refracción n_i e n_r dos medios incidente e refractado e os ángulos de incidencia e refracción θ_i e θ_r, é:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

Represéntase a traxectoria da luz. O raio incidente no punto A cun ángulo de incidencia θ_{i1} = 30° pasa do aire ao vidro dando un raio refractado que forma o primeiro ángulo de refracción θ_{r1} e o segundo ángulo de incidencia θ_{i2} entre o vidro e o aire. Finalmente sae da lámina de vidro polo punto B co segundo ángulo de refracción θ_{r2}.

b) A velocidade da luz no aire é:

$$v_a=\frac{c}{n_a}=\frac{3,00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{1,00}=3,00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$$

Por tanto, a lonxitude de onda da luz no aire é:

$$\lambda_a=\frac{v_a}{f}=\frac{3,00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{5,00\cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}}=6,00\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}=600\ \mathrm{nm}$$

A velocidade da luz no vidro é:

$$v_v=\frac{c}{n_v}=\frac{3,00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{1,50}=2,00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$$

Por tanto, a lonxitude de onda da luz no vidro é:

$$\lambda_v=\frac{v_v}{f}=\frac{2,00\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{5,00\cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}}=4,00\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}=400\ \mathrm{nm}$$

Como o espesor da lámina é de 10 cm, a lonxitude percorrida polo raio é a hipotenusa L do triángulo ABC. O primeiro ángulo de refracción θ_{r1} pódese calcular aplicando a lei de Snell

$$1,00 \cdot \text{sen } 30° = 1,50 \cdot \text{sen } \theta_{r1}$$

$$\text{sen}\,\theta_{r1}=\frac{1,00\cdot \text{sen}\,30°}{1,50}=0,333$$

$$\theta_{r1} = \text{arcsen } 0,333 = 19,5°$$

Por tanto a hipotenusa L vale:

$$L=\frac{e}{\cos\theta_{r1}}=\frac{10,0\ [\mathrm{cm}]}{\cos 19,5°}=10,6\ \mathrm{cm}$$

c) Como a lámina de vidro é de caras paralelas, o segundo ángulo de incidencia a_{i2} é igual ao primeiro ángulo de refracción:

$$\theta_{i2} = \theta_{r1} = 19,5°$$

Para calcular o ángulo co que sae da lámina, vólvese a aplicar a lei de Snell entre o vidro (que agora é o medio incidente) e o aire (que é o medio refractado):

$$1,50 \cdot \text{sen } 19,5° = 1,00 \cdot \text{sen } \theta_{r2}$$

$$\text{sen}\,\theta_{r2}=\frac{1,50\cdot \text{sen}\,19,5°}{1,00}=0,500$$

$$\theta_{r2} = \text{arcsen } 0,500 = 30,0°$$

Análise: Este resultado é correcto porque o raio sae paralelo ao raio incidente orixinal.

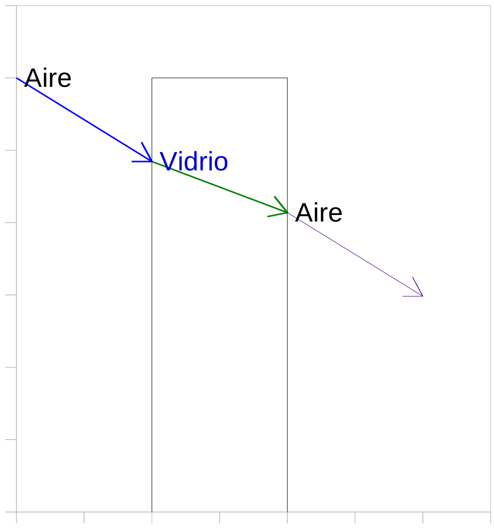
Pode obter as respostas na pestana «Dioptrio» da folla de cálculo Fisica (gal). Instrucións.

Índice de refracción

Medios	n		Ángulo de	Aire-Vidro	
Aire	1		incidencia	30	°
Vidro	1,5		Espesor	10	cm
Aire	1				
		Frecuencia		$5\cdot 10^{14}$	Hz

Os resultados son:

	Ángulo refractado	límite	
Aire-Vidro	19,5°		
Vidro-Aire	30,0°	41,8°	
Lonxitude recorrida polo raio na lámina			10,6 cm
	Aire	Vidro	Aire
Lonxitude de onda	$6{,}00 \cdot 10^{-7}$	$4{,}00 \cdot 10^{-7}$	$6{,}00 \cdot 10^{-7}$ m



2. Un raio de luz pasa da auga (índice de refracción n = 4/3) ao aire (n = 1). Calcula:
   a) O ángulo de incidencia se os raios reflectido e refractado son perpendiculares entre si.
   b) O ángulo límite.
   c) Hai ángulo límite se a luz incide do aire á auga?

(P.A.U. Xuño 13)

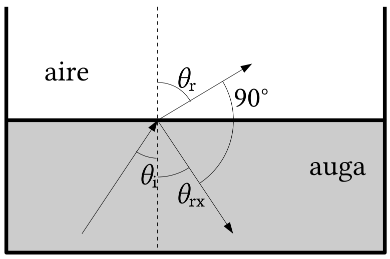
Rta.: a) θ_i = 36,9°; b) λ = 48,6°

Datos	***Cifras significativas: 3***
Índice de refracción do aire	n = 1,00
Índice de refracción da auga	n_a = 4 / 3 = 1,33
Ángulo entre o raio refractado e o reflectido	$\Delta\theta_{rr}$ = 90,0°
Incógnitas	
Ángulo de incidencia	θ_i
Ángulo límite	λ
Ecuacións	
Lei de Snell da refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) Aplicando a lei de Snell da refracción:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = 1{,}00 \cdot \text{sen } \theta_r$$



Á vista do debuxo debe cumprirse que

$$\theta_r + 90° + \theta_{rx} = 180°$$

Como o ángulo de reflexión θ_{rx} é igual ao ángulo de incidencia θ_i, a ecuación anterior convértese en:

$$\theta_i + \theta_r = 90°$$

É dicir, que o ángulo de incidencia θ_i e o de refracción θ_r son complementarios.
O seno dun ángulo é igual ao coseno do seu complementario. Entón a primeira ecuación queda:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r = \cos \theta_i$$

$$\tan \%itheta_i = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$$

$$\theta_i = \arctan 0{,}75 = 36{,}9°$$

b) Ángulo límite λ é o ángulo de incidencia que produce un ángulo de refracción de 90°

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \lambda = 1{,}00 \cdot \text{sen } 90{,}0°$$
$$\text{sen } \lambda = 1{,}00 / 1{,}33 = 0{,}75$$
$$\lambda = \arcsin 0{,}75 = 48{,}6°$$

c) Non. Cando a luz pasa do aire á auga, o ángulo de refracción é menor que o de incidencia. Para conseguir un ángulo de refracción de 90° o ángulo de incidencia tería que ser maior que 90° e non estaría no aire. Tamén pode deducirse da lei de Snell.

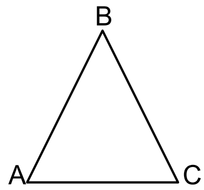
$$1{,}00 \cdot \text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 \cdot \text{sen } 90°$$
$$\text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 \text{ / } 1{,}00 > 1$$

É imposible. O seno dun ángulo non pode ser maior que uno.

3. Sobre un prisma equilátero de ángulo 60° (ver figura), incide un raio luminoso monocromático que forma un ángulo de 50° coa normal á cara AB. Sabendo que no interior do prisma o raio é paralelo á base AC:
   a) Calcula o índice de refracción do prisma.
   b) Determina o ángulo de desviación do raio ao saír do prisma, debuxando a traxectoria que segue o raio.
   c) Explica se a frecuencia e a lonxitude de onda correspondentes ao raio luminoso son distintas, ou non, dentro e fóra do prisma.

   Dato: n(aire) = 1 *(P.A.U. Set. 11)*

   Rta.: a) n_p = 1,5; b) θ_{r2} = 50°

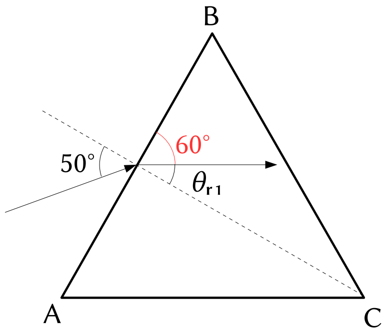


Datos	***Cifras significativas: 2***
Ángulos do triángulo equilátero	θ = 60°
Ángulo de incidencia	θ_i = 50°
Índice de refracción do aire	n_a = 1,0
Incógnitas	
Índice de refracción do prisma	n_p
Ángulo de desviación do raio ao saír do prisma	θ_{r2}
Ecuacións	
Lei de Snell da refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:

a) Na lei de Snell da refracción

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$



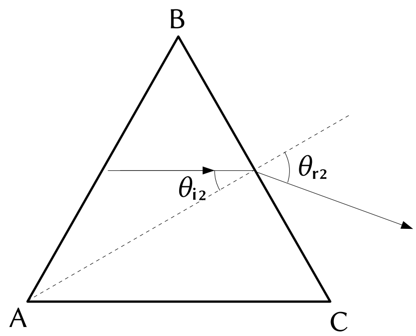
n_i e n_r representan os índices de refracción dos medios incidente e refractado

θ_i e θ_r representan os ángulos de incidencia e refracción que forma cada raio coa normal á superficie de separación entre os dous medios.

O primeiro ángulo de refracción θ_{r1}, que forma o raio de luz refractado paralelo á base do prisma, vale 30°, xa que é o complementario ao de 60° do triángulo equilátero.

$$n_p = n_r = \frac{n_i \cdot \text{sen } \theta_{i1}}{\text{sen } \theta_{r1}} = \frac{1{,}0 \cdot \text{sen } 50°}{\text{sen } 30°} = 1{,}5$$

b) Cando o raio sae do prisma, o ángulo de incidencia θ_{i2} do raio coa normal ao lado BC vale 30°. Volvendo aplicar a lei de Snell



$$\text{sen } \theta_{r2} = \frac{n_i \cdot \text{sen } \theta_{i2}}{n_r} = \frac{1{,}5 \cdot \text{sen } 30°}{1{,}0} = 0{,}77$$
$$\theta_{r2} = \text{arcsen } 0{,}77 = 50°$$

c) A frecuencia f dunha onda electromagnética é unha característica da mesma e non varía co medio.

A lonxitude de onda λ está relacionada con ela por

$$c = \lambda \cdot f$$

A velocidade da luz nun medio transparente é sempre menor que no baleiro. O índice de refracción do medio é o cociente entre ambas as velocidades.

$$n=\frac{c}{v}$$

A velocidade da luz no aire é practicamente igual á do baleiro, mentres que no prisma é 1,5 veces menor. Como a frecuencia é a mesma, a lonxitude de onda (que é inversamente proporcional á frecuencia) no prisma é 1,5 veces menor que no aire.

Cuestións e problemas das Probas de avaliación de Bacharelato para o acceso á Universidade (A.B.A.U. e P.A.U.) en Galiza.
Respostas e composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algúns cálculos fixéronse cunha folla de cálculo de LibreOffice do mesmo autor.
Algunhas ecuacións e as fórmulas orgánicas construíronse coa extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
A tradución ao/desde o galego realizouse coa axuda de *traducindote*, e de o tradutor da CIXUG.
Procurouse seguir as recomendacións do Centro Español de Metrología (CEM).
Consultouse ao Copilot de Microsoft Edge e tivéronse en conta algunhas das súas respostas nas cuestións.

Actualizado: 07/10/24

Sumario

ONDAS