Demostración de la relación entre la velocidad orbital y el radio de la órbita.

La fuerza gravitatoria $\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}$ que ejerce el astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r está dirigida hacia el astro, es una fuerza central, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal. Al no tener aceleración tangencial, el módulo de la velocidad es constante y el movimiento es circular uniforme.
El valor de la aceleración normal en un movimiento circular uniforme se obtiene de la expresión

$$a_{\mathrm{N}}=\frac{v^2}{r}$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa. La 2.ª ley de Newton, expresada para los módulos, queda

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=|\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{N}}|=m\frac{v^2}{r}$$

La expresión del módulo $|\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{G}}|$ de la fuerza gravitatoria, queda

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$