Gravitación

Método, aproximaciones y recomendaciones

◊ PROBLEMAS

● Satélites

1. Un satélite artificial de masa 10^2 kg gira en torno a la Tierra a una altura de $4\cdot10^3$ km sobre la superficie terrestre. Calcula:
   a) Su velocidad orbital, aceleración y período, supuesta la órbita circular.
   b) Halla el módulo del momento angular del satélite respecto del centro de la Tierra.
   c) Enuncia las leyes de Kepler.
   Datos: $R_T = 6{,}37\cdot10^6$ m; $g_0 = 9{,}81$ m/s². *(P.A.U. sep. 16)*
   Rta.: a) $v = 6{,}20$ km/s; $T = 2$ h 55 min; a = 3,70 m/s²; b) $L_O = 6{,}42\cdot10^{12}$ kg·m²/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37\cdot10^6$ m
Altura de la órbita	$h = 4{,}00\cdot10^3$ km $= 4{,}00\cdot10^6$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}81$ m/s²
Masa del satélite	$m = 100$ kg
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T
Valor de la aceleración del satélite	a
Módulo del momento angular del satélite respecto del centro dela Tierra	L_O
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Masa de la Tierra	M
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\dfrac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\dfrac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N=\dfrac{v^2}{r}$
Momento angular de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad, $\vec{v}$, a una distancia, $\vec{r}$, de un punto O que se toma como origen	$\vec{L}_O = \vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Solución:

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6{,}37\cdot10^6\ [\text{m}] + 4{,}00\cdot10^6\ [\text{m}] = 1{,}04\cdot10^7\ \text{m}$$

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{1{,}04 \cdot 10^7\ [\text{m}]}} = 6{,}20 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 6{,}20\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 6,20 km/s *está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}04 \cdot 10^7\ [\text{m}]}{6{,}20 \cdot 10^3\ [\text{m/s}]} = 1{,}05 \cdot 10^4\ \text{s} = 2\ \text{h}\ 55\ \text{min}$$

Análisis: El período de un satélite en órbita baja (300-400 km) *es de hora y media. El valor obtenido es mayor, porque la altura de la órbita* 4000 km *también lo es.*

La única fuerza que actúa sobre el astronauta es su peso, o sea, la atracción gravitatoria de la Tierra. Por la ley de Newton de la gravitación universal, en la órbita de radio r:

$$F=G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r^2}$$

La aceleración será:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{g_0\cdot R^2}{r^2}=\frac{9,81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6,37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{(1,04\cdot 10^7\ [\mathrm{m}])^2}=3,70\ \mathrm{m/s^2}$$

b) El momento angular de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad, $\overline{\boldsymbol{v}}$, a una distancia, $\overline{\boldsymbol{r}}$, de un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}=\overline{\boldsymbol{r}}\times m\cdot\overline{\boldsymbol{v}}$$

El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es:

$$|\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}|=|\overline{\boldsymbol{r}}|\cdot m\cdot|\overline{\boldsymbol{v}}|\cdot\operatorname{sen}\alpha=1,04\cdot 10^7\ [\mathrm{m}]\cdot 100\ [\mathrm{kg}]\cdot 6,20\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]\cdot\operatorname{sen}90^\circ=6,42\cdot 10^{12}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

c) Las leyes de Kepler pueden enunciarse así:
1.ª ley: Los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol que ocupa uno de los focos de la elipse.
2.ª ley: El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3.ª ley: Los cuadrados de los períodos de los planetas alrededor del Sol son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses.

2. La nave espacial Discovery, lanzada en octubre de 1998, describía alrededor de la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7,62 km·s⁻¹:
   a) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se encontraba?
   b) ¿Cuánto tiempo tardaba en dar una vuelta completa?
   c) ¿Cuántos amaneceres veían cada 24 horas los astronautas que iban en el interior de la nave?
   Datos: $G = 6,67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$; $R_\mathrm{T} = 6370$ km; $M_\mathrm{T} = 5,98\cdot 10^{24}$ kg. *(P.A.U. jun. 16)*
   Rta.: a) h = 503 km; b) T = 1 h 34 min; c) n = 15.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.	$v = 7,62\ \mathrm{km/s} = 7,62\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$
Radio de la Tierra	$R = 6370\ \mathrm{km} = 6,37\cdot 10^6\ \mathrm{m}$
Masa de la Tierra	$M = 5,93\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Constante de la gravitación universal	$G = 6,67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$
Incógnitas	
Altura de la órbita	h
Tiempo de una vuelta completa	T
Número de vueltas en 24 horas	n
Otros símbolos	
Masa del satélite	m
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}}=m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_\mathrm{N}=\frac{v^2}{r}$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_\text{G} = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_\text{r}$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_\text{G} = G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_\text{N} = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_\text{G}$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m\cdot|\vec{a}|$$

$$F_\text{G} = m\cdot a_\text{N}$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

a) Se despeja el radio de la órbita de la expresión de la velocidad orbital:

$$r = \frac{G\cdot M}{v^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{m/s}^2]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ [\text{m}]}{(7{,}62\cdot 10^3\ [\text{m/s}])^2} = 6{,}87\cdot 10^6\ \text{m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra del radio de la órbita:

$$h = r - R = 6{,}87\cdot 10^6\ [\text{m}] - 6{,}37\cdot 10^6\ [\text{m}] = 5{,}0\cdot 10^5\ \text{m} = 500\ \text{km}$$

Análisis: Se espera que la altura de un satélite en órbita baja alrededor de la Tierra sea alrededor de 400 km. *El resultado de* 500 km *está de acuerdo con esta suposición.*

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi\cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi\cdot r}{v} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}87\cdot 10^6\ [\text{m}]}{7{,}62\cdot 10^3\ [\text{m/s}]} = 5{,}67\cdot 10^3\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 34\ \text{min}$$

c) El número de amaneceres que ven los astronautas en 24 h es:

$$n = \frac{24\ \text{h}}{1{,}57\ \text{h}} = 15$$

3. Un satélite artificial de 500 kg de masa gira en una órbita circular a 5000 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Calcula:

a) Su velocidad orbital.
b) Su energía mecánica en la órbita.
c) La energía que hay que comunicarle para que, partiendo de la órbita, llegue al infinito.
Datos: R = 6370 km; g_0 = 9,8 m·s⁻². *(P.A.U. sep. 15)*
Rta.: a) v = 5,91 km/s; b) E = −8,74·10⁹ J; c) ΔE = 8,74·10⁹ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 500 kg
Altura de la órbita	h = 5000 km = 5,00·10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Radio de la Tierra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Incógnitas	
Velocidad orbital	v
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Energía que hay que comunicarle para que llegue al infinito	ΔE
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] + 5{,}00 \cdot 10^6\ [\text{m}] = 11{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}$$

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{11{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}} = 5{,}91 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 5{,}91\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 5,91 km/s *está de acuerdo con esta suposición.*

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 500\ [\mathrm{kg}]}{11{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]} = -1{,}75 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 500\ [\mathrm{kg}] \cdot (5{,}91 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 8{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = 8{,}74 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}] + (-17{,}5 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = -8{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo $G \cdot M / r$ por v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G\frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

c) La energía potencial en el infinito es nula, porque se toma como origen de energías potenciales. Suponiendo que llega al infinito con velocidad nula, la energía que tendrá en el infinito será nula. La energía que hay que comunicarle es:

$$\Delta E = E(\infty) - E(\text{órbita}) = 0 - (-8{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}) = 8{,}74 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

4. El vehículo espacial Apolo VIII estuvo en órbita circular alrededor de la Luna a 113 km sobre su superficie. Calcula:
   a) El período de la órbita.
   b) Las velocidades lineal y angular del vehículo.
   c) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.
   Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; R(Luna) = 1740 km; M(Luna) = 7,36·10²² kg. *(P.A.U. jun. 15)*
   Rta.: a) T = 1 h 59 min; b) v = 1,63 km/s; ω = 8,79·10⁻⁴ rad/s; c) v_e = 1,68 km/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la Luna	$M = 7{,}36\cdot10^{22}$ kg
Radio de la Luna	$R = 1740$ km $= 1{,}74\cdot10^{6}$ m
Altura de la órbita	$h = 113$ km $= 1{,}13\cdot10^{5}$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período de la órbita	T
Valor de la velocidad lineal del satélite	v
Velocidad angular del satélite	ω
Velocidad de escape en la órbita de la Luna	v_e
Otros símbolos	
Masa del satélite	m
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Velocidad angular en un movimiento circular de período T	$\omega = 2\pi / T$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\, m\cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

b) Se calcula el radio de la órbita del Apolo VIII:

$$r = R + h = 1{,}74\cdot10^{6}\text{ [m]} + 1{,}13\cdot10^{5}\text{ [m]} = 1{,}85\cdot10^{6}\text{ m}$$

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Se sustituyen los datos en la ecuación de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \left[\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}\right] \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22} [\mathrm{kg}]}{1{,}85 \cdot 10^6 [\mathrm{m}]}} = 1{,}63 \cdot 10^3 \mathrm{~m/s} = 1{,}63 \mathrm{~km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}85 \cdot 10^6 [\mathrm{m}]}{1{,}63 \cdot 10^3 [\mathrm{m/s}]} = 7{,}15 \cdot 10^3 \mathrm{~s} = 1 \mathrm{~h} \, 59 \mathrm{~min}$$

b) Se calcula la velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 [\mathrm{rad}]}{7{,}15 \cdot 10^3 [\mathrm{s}]} = 8{,}79 \cdot 10^{-4} \mathrm{~rad/s}$$

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}\, m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{e\,o\uparrow} = \sqrt{2 G \frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.
La energía cinética de un objeto de masa *m*, que se mueve con velocidad *v*, es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa *m*, que gira alrededor de un astro de masa *M*, en una órbita de radio *r*, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Donde *G* es la constante de la gravitación universal.
La energía mecánica de un cuerpo de masa *m*, que se encuentra en órbita de radio *r* alrededor de un astro de masa *M*, es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia *r* alrededor de un astro de masa *M* es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2, la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}\right)=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e\ o\rightarrow}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{e\ o\leftarrow}=\sqrt{\frac{3}{2}G\frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{e\ o}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

c) Se calcula la velocidad de escape:

$$v_e=\sqrt{G\frac{M}{R}}=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot\frac{7{,}36\cdot 10^{22}\ [\text{kg}]}{1{,}74\cdot 10^6\ [\text{m}]}}=1{,}68\cdot 10^3\ \text{m/s}=1{,}68\ \text{km/s}$$

5. Ceres es el planeta enano más pequeño del sistema solar y tiene un período orbital alrededor del Sol de 4,60 años, una masa de $9{,}43\cdot 10^{20}$ kg y un radio de 477 km. Calcula:

a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio que Ceres crea en su superficie.
b) La energía mínima que ha de tener una nave espacial de 1000 kg de masa para que, saliendo de la superficie, pueda escapar totalmente de la atracción gravitatoria del planeta.
c) La distancia media entre Ceres y el Sol, teniendo en cuenta que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1{,}50 \cdot 10^{11}$ m y que el período orbital de la Tierra alrededor del Sol es de un año.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. sep. 14)*

Rta.: a) $g = 0{,}277$ m/s²; b) $E = 1{,}32 \cdot 10^8$ J; c) $r = 4{,}15 \cdot 10^{11}$ m.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período orbital de Ceres	$T_1 = 4{,}60$ años $= 1{,}45 \cdot 10^8$ s
Masa de Ceres	$M = 9{,}43 \cdot 10^{20}$ kg
Radio de Ceres	$R = 477$ km $= 4{,}77 \cdot 10^5$ m
Masa de la nave espacial	$m = 1000$ kg
Distancia de la Tierra al Sol	$r_2 = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m
Período orbital de la Tierra	$T_2 = 1{,}00$ años $= 3{,}16 \cdot 10^7$ s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Ceres	g
Energía de la nave espacial en la superficie de Ceres para escapar	ΔE
Distancia media entre Ceres y el Sol	r_1
Otros símbolos	
Masa del Sol	M
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \dfrac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \overline{F} = m \cdot \overline{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$
Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia r del centro	$g = \dfrac{F_G}{m} = G \dfrac{M}{r^2}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \dfrac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La intensidad del campo gravitatorio creado por la masa esférica, M, del planeta (enano) Ceres en su superficie, a una distancia, R, de su centro es la fuerza gravitatoria sobre la unidad de masa:

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \dfrac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}}{\cancel{m}} = G \frac{M}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{9{,}43 \cdot 10^{20} \text{ [kg]}}{(4{,}77 \cdot 10^5 \text{ [m]})^2} = 0{,}277 \text{ m/s}^2$$

b) Se calcula la energía potencial de la nave espacial en la superficie de Ceres:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{9{,}43 \cdot 10^{20} \text{ [kg]} \cdot 1000 \text{ [kg]}}{4{,}77 \cdot 10^5 \text{ [m]}} = -1{,}32 \cdot 10^8 \text{ [J]}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La energía potencial de la nave espacial a una distancia muy grande de Ceres será nula, porque se toma el infinito como origen de energías potenciales.
La energía mínima que ha de tener en la superficie será la que corresponde a una energía cinética nula muy lejos de Ceres.
Por tanto, la energía mecánica que tendrá la nave espacial muy lejos de Ceres será nula.
La energía mínima será la diferencia entre la energía en el infinito y la que tiene en la superficie:

$$\Delta E = E_\infty - E_p = 0 - (-1{,}32\cdot 10^8\ [\mathrm{J}]) = 1{,}32\cdot 10^8\ \mathrm{J}$$

c) Tanto la Tierra como Ceres describen trayectorias aproximadamente circulares alrededor del Sol, pudiéndose considerar satélites del mismo.
La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos, T, de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas.
Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio r, la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.
La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\ \pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G \cdot M} \cdot T_1^2}{\cancel{G \cdot M} \cdot T_2^2}$$

Se aplica esta ley a la Tierra y a Ceres:

$$\frac{r_1^3}{(4{,}60\ [\text{año}])^2} = \frac{(1{,}50 \cdot 10^{11}\ [\text{m}])^3}{(1\ [\text{año}])^2}$$

Se calcula la distancia media de Ceres al Sol:

$$r_1 = 1{,}50 \cdot 10^{11}\ [\text{m}] \sqrt[3]{4{,}60^2} = 4{,}15 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

Análisis: El radio calculado de la órbita de Ceres sale mayor que el de la Tierra, como cabe esperar.

$$(r_1 = 4{,}15 \cdot 10^{11}\ \text{m}) > (r_2 = 1{,}50 \cdot 10^{11}\ \text{m})$$

6. Se desea poner un satélite de masa 10^3 kg en órbita alrededor de la Tierra y a una altura dos veces el radio terrestre. Calcula:
   a) La energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra.
   b) La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita.
   c) El período del satélite en dicha órbita.
   Datos: R = 6370 km; g_0 = 9,8 m/s². *(P.A.U. sep. 13)*
   Rta.: a) $\Delta E = 5{,}20 \cdot 10^{10}$ J; b) $F = 1{,}09 \cdot 10^3$ N; c) T = 7 h 19 min.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	$m = 10^3$ kg $= 1{,}00 \cdot 10^3$ kg
Radio de la Tierra	R = 6370 km = $6{,}37 \cdot 10^6$ m
Altura de la órbita	$h = 2 \cdot 6370$ km $= 1{,}27 \cdot 10^7$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80$ m/s²
Incógnitas	
Energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra	ΔE
Fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita	F
Período orbital del satélite	T
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

c) Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{3 \cdot R}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R}{3}} = \sqrt{\frac{9{,}80\,[\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\,[\mathrm{m}]}{3}} = 4{,}56 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 4{,}56\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}91\cdot 10^{7}\,[\mathrm{m}]}{4{,}56\cdot 10^{3}\,[\mathrm{m/s}]}=2{,}63\cdot 10^{4}\ \mathrm{s}=7\ \mathrm{h}\ 18\ \mathrm{min}$$

b) Se calcula la fuerza centrípeta:

$$F=m\cdot a_{\mathrm{N}}=m\frac{v^{2}}{r}=m\frac{\frac{g_{0}\cdot \cancel{R}}{3}}{3\cdot \cancel{R}}=\frac{m\cdot g_{0}}{9}=\frac{1{,}00\cdot 10^{3}\,[\mathrm{kg}]\cdot 9{,}80\,[\mathrm{m/s^{2}}]}{9}=1{,}09\cdot 10^{3}\ \mathrm{N}$$

a) Se calcula la energía potencial en el suelo:

$$E_{\mathrm{p}}(\text{suelo})=-G\frac{M\cdot m}{R}=-\frac{g_{0}\cdot R^{2}\cdot m}{R}=-g_{0}\cdot R\cdot m=-9{,}80\,[\mathrm{m/s^{2}}]\cdot 6{,}37\cdot 10^{6}\,[\mathrm{m}]\cdot 1{,}00\cdot 10^{3}\,[\mathrm{kg}]=-6{,}24\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Se supone que en la superficie de la Tierra el satélite está en reposo[a], por lo que su energía cinética es nula. Se calcula el radio de la órbita:

$$r=R+h=R+2\,R=3\,R=3\cdot 6{,}37\cdot 10^{6}\,[\mathrm{m}]=1{,}91\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}$$

Se calcula la energía potencial en la órbita:

$$E_{\mathrm{p}}(\text{órbita})=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{g_{0}\cdot R^{2}\cdot m}{3R}=-\frac{g_{0}\cdot R\cdot m}{3}=\frac{E_{\mathrm{ps}}}{3}=\frac{-6{,}24\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}}{3}=-2{,}08\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Se calcula la energía cinética en órbita:

$$E_{\mathrm{c}}(\text{órbita})=m\cdot v^{2}/2=[1{,}00\cdot 10^{3}\,[\mathrm{kg}]\cdot(4{,}56\cdot 10^{3}\,[\mathrm{m/s}])^{2}]/2=1{,}04\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E(\text{órbita})=E_{\mathrm{c}}(\text{órbita})+E_{\mathrm{p}}(\text{órbita})=1{,}04\cdot 10^{10}\,[\mathrm{J}]+(-2{,}08\cdot 10^{10}\,[\mathrm{J}])=-1{,}04\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo $G\cdot M/r$ por v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_{\mathrm{c}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}m\cdot v^{2}-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}m\cdot v^{2}-m\cdot v^{2}=-\frac{1}{2}m\cdot v^{2}=-E_{\mathrm{c}}$$

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie de la Tierra es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E=E(\text{órbita})-E(\text{suelo})=-1{,}04\cdot 10^{10}\,[\mathrm{J}]-(-6{,}24\cdot 10^{10}\,[\mathrm{J}])=5{,}20\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

7. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre:
   a) Deduce la expresión de la velocidad orbital.
   b) Calcula el período de giro.
   c) Calcula la energía mecánica.
   Datos: R = 6400 km; g_0 = 9,81 m/s². *(P.A.U. jun. 13)*
   Rta.: a) $v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$; b) T = 1 h 37 min; b) $E = -5{,}74\cdot 10^{9}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 200 kg
Altura de la órbita	h = 600 km = $6{,}00\cdot 10^{5}$ m
Radio de la Tierra	R = 6400 km = $6{,}40\cdot 10^{6}$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Incógnitas	
Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T

[a] Para un sistema de referencia en el centro de la Tierra, cualquier punto de la superficie tiene velocidad debido a la rotación terrestre. La velocidad de un punto de la superficie terrestre vale: $v=\omega\cdot R=2\,\pi\,R\,/\,T$ = 463 m/s. Para un objeto de 1000 kg, la energía cinética sería $E_{\mathrm{c}}=½\,m\cdot v^{2}=1{,}07\cdot 10^{8}$ J mucho menor que el valor absoluto de la energía potencial ($6{,}24\cdot 10^{10}$ J)

Datos	***Cifras significativas: 3***
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6{,}40 \cdot 10^6\ [\text{m}] + 6{,}00 \cdot 10^5\ [\text{m}] = 7{,}00 \cdot 10^6\ \text{m}$$

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left| \sum \vec{F} \right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0=G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}40\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{7{,}00\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}}=7{,}58\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=7{,}58\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está de acuerdo con esta suposición.
Específicamente el enunciado del problema no pide que se calcule la velocidad, pero mejor es calcularla por si acaso. Además, se va a necesitar en el cálculo del período orbital.

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}00\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{7{,}58\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=5{,}81\cdot 10^3\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}\ 37\ \mathrm{min}$$

c) Se calcula la energía potencial:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r}=-\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}40\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2\cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{7{,}00\cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}=-1{,}15\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 200\ [\mathrm{kg}]\ (7{,}58\cdot10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 = 5{,}74\cdot10^9\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = 5{,}74\cdot10^9\ [\mathrm{J}] - 1{,}15\cdot10^{10}\ [\mathrm{J}] = -5{,}8\cdot10^9\ \mathrm{J}$$

Sabiendo esto se puede escribir el valor de la energía mecánica con tres cifras significativas, en vez de las dos cifras del resultado anterior obtenido siguiendo las reglas de operaciones con cifras significativas:

$$E = -5{,}74\cdot10^9\ \mathrm{J}$$

8. La luz del Sol tarda $5\cdot10^2$ s en llegar a la Tierra y $2{,}6\cdot10^3$ s en llegar a Júpiter. Calcula:
   a) El período de Júpiter orbitando alrededor del Sol.
   b) La velocidad orbital de Júpiter.
   c) La masa del Sol.
   Datos: T (Tierra) alrededor del Sol: $3{,}15\cdot10^7$ s; $c = 3\cdot10^8$ m/s; $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². (Se suponen las órbitas circulares). *(P.A.U. sep. 12)*
   Rta.: a) $T = 3{,}74\cdot10^8$ s; $v = 1{,}31\cdot10^4$ m/s; b) $M = 2{,}01\cdot10^{30}$ kg.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra	$t_1 = 5{,}00\cdot10^2$ s = 500 s
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Júpiter	$t_2 = 2{,}60\cdot10^3$ s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período orbital de la Tierra alrededor del Sol	$T_1 = 3{,}15·10^7$ s
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3{,}00·10^8$ m/s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período orbital de Júpiter	T_2
Velocidad orbital de Júpiter	v
Masa del Sol	M
Otros símbolos	
Masa de Júpiter o la Tierra	m
Distancia de un planeta al Sol	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \overline{F} = m \cdot \overline{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:

Se calculan las distancias de la Tierra al Sol y de Júpiter al Sol, teniendo en cuenta la velocidad de la luz.

Tierra: $r_1 = c \cdot t_1 = 3{,}00·10^8$ [m/s] · $5{,}00·10^2$ [s] = $1{,}50·10^{11}$ m

Júpiter: $r_2 = c \cdot t_2 = 3{,}00·10^8$ [m/s] · $2{,}60·10^3$ [s] = $7{,}80·10^{11}$ m

Se resuelve primero el último apartado.

c) La masa del Sol puede calcularse de la expresión de la velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M.

La fuerza gravitatoria, $\overline{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{F} = \overline{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad de la Tierra alrededor del Sol se calcula a partir de su período orbital:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{3{,}15 \cdot 10^{7}\ [\mathrm{s}]} = 2{,}99 \cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}$$

Se despeja la masa del Sol de la velocidad orbital de la Tierra como satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \Rightarrow M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(2{,}99 \cdot 10^{4}\ [\mathrm{m/s}])^2 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}]} = 2{,}01 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

b) Se emplea la ecuación anterior para calcular la velocidad de Júpiter:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 2{,}01 \cdot 10^{30}\ [\mathrm{kg}]}{7{,}80 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}} = 1{,}31 \cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s} = 13{,}1\ \mathrm{km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi \cdot r_2}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}80 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{1{,}31 \cdot 10^{4}\ [\mathrm{m/s}]} = 3{,}74 \cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$$

Análisis: La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los radiovectores que unen al Sol con los planetas. A mayor distancia al Sol, mayor período. Este método, daría: $T_2 = T_1 \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = 3{,}15 \cdot 10^{7}\ [\mathrm{s}] \cdot \sqrt{\frac{(7{,}8 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}{(1{,}5 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}} = 3{,}74 \cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$.

9. Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular a una altura de 650 km sobre la Tierra. Calcula:
   a) El período y la velocidad del satélite en la órbita.
   b) La energía mecánica del satélite.
   c) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

   Datos: M = 5,98·10²⁴ kg; R = 6,37·10⁶ m; G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. sep. 11)*

   Rta.: a) v = 7,54 km/s; T = 1 h 38 min; b) E = −5,68·10⁹ J; c) g_h/g_0 = 0,824.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 200 kg
Altura de la órbita	h = 650 km = $6{,}50 \cdot 10^5$ m
Masa de la Tierra	M = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra	R = $6{,}37 \cdot 10^6$ m
Constante de la gravitación universal	G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Cociente entre los valores de g en el satélite y en la superficie de la Tierra.	g_h/g_0
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G

Ecuaciones

Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \overline{F} = m \cdot \overline{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia r del centro	$g = \frac{F_G}{m} = G \frac{M}{r^2}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6{,}50 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7{,}02 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria, $\overline{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{F} = \overline{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left| \sum \vec{F} \right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Se calcula la velocidad:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]}{7{,}02\cdot 10^{6}\ [\text{m}]}}=7{,}54\cdot 10^{3}\ \text{m/s}=7{,}54\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}02\cdot 10^{6}\ [\text{m}]}{7{,}54\cdot 10^{3}\ [\text{m/s}]}=5{,}85\cdot 10^{3}\ \text{s}=1\ \text{h}\ 38\ \text{min}$$

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_\text{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]\cdot 200\ [\text{kg}]}{7{,}02\cdot 10^{6}[\text{m}]}=-1{,}14\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_\text{c} = m\cdot v^2/2 = [200\ [\text{kg}]\ (7{,}54\cdot 10^3\ [\text{m/s}])^2]\ /\ 2 = 5{,}68\cdot 10^9\ \text{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_\text{c} + E_\text{p} = 5{,}68\cdot 10^9\ [\text{J}] + (-\ 1{,}14\cdot 10^{10}\ [\text{J}]) = -5{,}68\cdot 10^9\ \text{J}$$

Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo $G\cdot M / r$ por v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_\text{c}+E_\text{p}=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}m\cdot v^2-m\cdot v^2=-\frac{1}{2}m\cdot v^2=-E_\text{c}$$

c) La intensidad del campo gravitatorio en un punto que dista r del centro de la Tierra es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$g=\frac{F_\text{G}}{m}=\frac{G\cdot M\cdot \cancel{m}/r^2}{\cancel{m}}=G\frac{M}{r^2}$$

La gravedad a una altura, h, vale: $g_\text{h}=G\dfrac{M}{(R+h)^2}$

En la superficie de la Tierra vale: $g_0=G\dfrac{M}{R^2}$

Dividiendo la primera entre la segunda, queda:

$$\frac{g_\text{h}}{g_0}=\frac{\cancel{G\cdot M}/(R+h)^2}{\cancel{G\cdot M}/R^2}=\frac{R^2}{(R+h)^2}=\frac{(6{,}37\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{(7{,}02\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}=0{,}824$$

10. Un satélite artificial de 500 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un radio de $2\cdot 10^4$ km. Calcula:
    a) La velocidad orbital y el período.
    b) La energía mecánica y la potencial.
    c) Si por fricción se pierde algo de energía, ¿qué le ocurre al radio y a la velocidad?
    Datos g_0 = 9,8 m/s²; R = 6370 km. *(P.A.U. sep. 10)*
    Rta.: a) v = 4,46 km/s; T = 7 h 50 min; b) $E = -4{,}97\cdot 10^9$ J; $E_\text{p} = -9{,}94\cdot 10^9$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 500 kg
Radio de la órbita	$r = 2{,}00\cdot 10^4$ km $= 2{,}00\cdot 10^7$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80$ m/s²
Radio de la Tierra	R = 6370 km $= 6{,}37\cdot 10^6$ m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Incógnitas	
Valor de la velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Energía potencial del satélite en órbita	E_p
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left| \sum \vec{F} \right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, *G*, o de la masa, *M*, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0=G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

a) Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{2{,}00\cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}}=4{,}46\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=4{,}46\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 4,46 km/s *está de acuerdo con esta suposición.*

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\ \Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}\ =\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 2{,}00\cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}{4{,}46\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=2{,}82\cdot 10^4\ \mathrm{s}=7\ \mathrm{h}\ 50\ \mathrm{min}$$

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_\mathrm{p}=-\frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r}\ =-\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2\cdot 500\ [\mathrm{kg}]}{2{,}00\cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}=-9{,}94\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_\mathrm{c} = m \cdot v^2 / 2 = 500\ [\mathrm{kg}] \cdot (4{,}46\cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 4{,}97\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = 4{,}97\cdot 10^9\ [\mathrm{J}] + (-9{,}94\cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = -4{,}97\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análisis: La energía mecánica vale la mitad de la energía potencial como se ve en el apartado siguiente.

c) La energía mecánica se puede expresar en función del radio de la órbita. Sustituyendo v^2 por $G\, M / r$ en la expresión de la energía mecánica, queda

$$E=E_\mathrm{c}+E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Si disminuye la energía mecánica, (es más negativa), el radio de la órbita también se hace más pequeño, por lo que el satélite se acerca a la superficie de la Tierra.
La velocidad, por el contrario, aumentará, pues su relación con el radio es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Cuanto más pequeño es el radio de la órbita más grande es su velocidad.

Análisis: Es lo mismo que le ocurre a cualquier cuerpo que se mueve cerca de la superficie de la Tierra. Al perder energía pierde altura, y cae hacia el suelo, ganando velocidad.

11. Las relaciones entre las masas y los radios de la Tierra y la Luna son: M_T/M_L= 79,63 y R_T/R_L = 3,66.
    a) Calcula la gravedad en la superficie de la Luna.
    b) Calcula la velocidad de un satélite girando alrededor de la Luna en una órbita circular de 2300 km de radio.
    c) ¿Dónde es mayor el período de un péndulo de longitud L, en la Tierra o en la Luna?
    Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_L = 1700 km. *(P.A.U. jun. 10)*
    Rta.: a) g_L = 1,65 m/s²; b) v = 1,44 km/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Relación entre las masas de la Tierra y de la Luna	M_T/M_L = 79,63
Relación entre los radios de la Tierra y de la Luna	R_T/R_L = 3,66
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Radio de la órbita del satélite alrededor de la Luna	r = 2300 km
Radio de la Luna	R_L = 1700 km
Incógnitas	
Gravedad en la superficie de la Luna	g_L
Velocidad del satélite alrededor de la Luna	v
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Peso	$P = m \cdot g$
Período de un péndulo simple de longitud L en un punto donde la aceleración de la gravedad es g	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Solución:

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m \cdot g_T = G\frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Análogamente para la Luna:

$$m \cdot g_L = G\frac{M_L \cdot m}{R_L^2}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_T}{\cancel{m} \cdot g_L} = \frac{\cancel{G}\frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T^2}}{\cancel{G}\frac{M_L \cdot \cancel{m}}{R_L^2}}$$

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{M_T/M_L}{(R_T/R_L)^2} = \frac{79,63}{3,66^2} = 5,94$$

Se despeja la aceleración de la gravedad en la Luna:

$$g_L = 9,80\ [\text{m/s}^2] / 5,94 = 1,65\ \text{m/s}^2$$

Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 veces menor que en la superficie de la Tierra.

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

b) Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{1{,}65\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (1{,}70 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{2{,}30 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}} = 1{,}44 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 1{,}44\ \mathrm{km/s}$$

c) El período de un péndulo de longitud L en un lugar donde la gravedad es g, viene dado por la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna:

$$\frac{T_T}{T_L}=\frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_T}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_L}}}=\sqrt{\frac{g_L}{g_T}}=\sqrt{\frac{1}{5{,}94}}=0{,}410<1$$

El período del péndulo en la Tierra es menor que en la Luna.

Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y al ser más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.

12. Se desea poner en órbita un satélite de 1800 kg que gire a razón de 12,5 vueltas por día. Calcula:
 a) El período del satélite.
 b) La distancia del satélite a la superficie terrestre.
 c) La energía cinética del satélite en esa órbita.
 Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; R = 6378 km; M = 5,98·10²⁴ kg. *(P.A.U. sep. 09)*
 Rta.: a) T = 1 h 55 min; b) h = 1470 km; c) E_c = 4,58·10¹⁰ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R = 6378 km = 6,38·10⁶ m
Frecuencia de giro del satélite en la órbita alrededor de la Tierra.	f = 12,5 rev./día = 1,45·10⁻⁴ s⁻¹
Constante de la gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Masa de la Tierra	M = 5,98·10²⁴ kg
Masa del satélite	m = 1800 kg
Incógnitas	
Período del satélite	T
Distancia del satélite a la superficie terrestre (altura de órbita)	h
Energía cinética del satélite en la órbita	E_c
Otros símbolos	
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c=½\,m\cdot v^2$

Solución:

a) Se calcula el período, que es la inversa de la frecuencia:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{1{,}45\cdot10^{-4}\,[\mathrm{s}^{-1}]}=6{,}91\cdot10^3\ \mathrm{s}=1{,}92\ \mathrm{h}=1\ \mathrm{h}\,55\ \mathrm{min}$$

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

b) Se despeja el radio de la órbita, r, y se sustituyen los datos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}] \cdot (6{,}91 \cdot 10^3\ [\mathrm{s}])^2}{4\pi^2}} = 7{,}84 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra del radio de la órbita:

$$h = r - R = 7{,}84{\cdot}10^6\ [\mathrm{m}] - 6{,}38{\cdot}10^6\ [\mathrm{m}] = 1{,}47{\cdot}10^6\ \mathrm{m} = 1470\ \mathrm{km}$$

c) Se calcula la velocidad del satélite en su órbita:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}\ \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}86 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{6{,}91 \cdot 10^3\ [\mathrm{s}]} = 7{,}13 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 1{,}80{\cdot}10^3\ [\mathrm{kg}] \cdot (7{,}13{\cdot}10^3\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 4{,}58{\cdot}10^{10}\ \mathrm{J}$$

13. Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios (situados sobre el ecuador terrestre y con período orbital de un día). Calcula:
    a) La altura a la que se encuentran, respecto a la superficie terrestre.
    b) La fuerza ejercida sobre el satélite.
    c) La energía mecánica.
    Datos: $R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m; $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $m = 8 \cdot 10^2$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. sep. 08)*
    Rta.: a) $h = 3{,}59 \cdot 10^7$ m; b) $F = 179$ N; c) $E_c = 3{,}78 \cdot 10^9$ J; $E_p = -7{,}56 \cdot 10^9$ J; $E = -3{,}78 \cdot 10^9$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Satélite geoestacionario (período T igual al de la Tierra)	$T = 24$ h $= 8{,}64 \cdot 10^4$ s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Masa de la Tierra	$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Masa del satélite	$m = 8{,}00 \cdot 10^2$ kg
Radio de la Tierra	$R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m
Incógnitas	
Altura del satélite	h
Fuerza sobre el satélite	F
Energías cinética, potencial y total del satélite en órbita	E_c, E_p, E
Otros símbolos	
Radio de la órbita	r
Valor de la velocidad del satélite en la órbita geoestacionaria	v
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Se despeja el radio de la órbita, r, y se sustituyen los datos:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\mathrm{kg}](8{,}64\cdot 10^4\,[\mathrm{s}])^2}{4\cdot 3{,}14^2}}=4{,}23\cdot 10^7\ \mathrm{m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra del radio de la órbita:

$$h = r - R = 4{,}23\cdot10^7 - 6{,}38\cdot10^6 = 3{,}59\cdot10^7\ \mathrm{m}$$

b) La fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite es la fuerza gravitatoria.

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\mathrm{kg}]\cdot 800\,[\mathrm{kg}]}{(4{,}23\cdot 10^7\,[\mathrm{m}])^2}=179\ \mathrm{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r \approx 7\ R$, el peso debería ser unas $7^2 \approx 50$ veces menor que en el suelo $m \cdot g_0 \approx 8\cdot10^3$ N, o sea unos 160 N.

c) Se calcula la energía potencial:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\mathrm{kg}]\cdot 800\,[\mathrm{kg}]}{4{,}23\cdot 10^7\,[\mathrm{m}]}=-7{,}56\cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Se calcula la energía cinética sustituyendo v^2 por $G\,M / r$:

$$E_c=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}=3{,}78\cdot10^9\ \mathrm{J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.
La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_c + E_p = 3{,}78 \cdot 10^9 \text{ [J]} - 7{,}56 \cdot 10^9 \text{ [J]} = -3{,}78 \cdot 10^9 \text{ J}$$

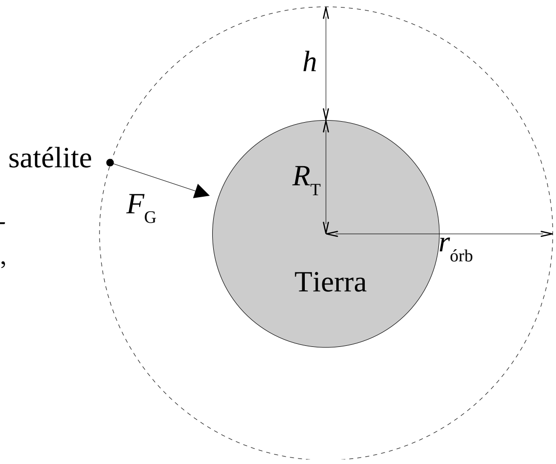
14. Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a una altura de 6000 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:
    a) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa.
    b) El peso del satélite a esa altura.
    Datos: Tierra: g_0 = 9,80 m/s²; R = 6400 km. *(P.A.U. jun. 06)*
    Rta.: a) T = 3 h 48 min.; b) P_h = 261 N.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R = 6400 \text{ km} = 6{,}40 \cdot 10^6$ m
Altura de la órbita	$h = 6000 \text{ km} = 6{,}00 \cdot 10^6$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80 \text{ m/s}^2$
Masa del satélite	m = 100 kg
Incógnitas	
Tiempo que tarda en dar una vuelta completa	T
Peso del satélite a esa altura	P_h
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \dfrac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$

Solución:

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6{,}40 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6{,}00 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 1{,}24 \cdot 10^7 \text{ m}$$



La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, *m*, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, *G*, o de la masa, *M,* del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}40 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{1{,}24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}} = 5{,}69 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}]}{5{,}69 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]} = 1{,}37 \cdot 10^4\ \mathrm{s} = 3\ \mathrm{h}\ 48\ \mathrm{min}$$

Análisis: Por la tercera ley de Kepler, también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son circulares, a los radios de las órbitas. El período de un satélite de órbita baja (h = 400 km) es de hora y media. El radio de la órbita de este satélite es aproximadamente el doble, por lo que el período debería ser $\sqrt{2^3} \approx 3$ veces mayor, de unas cuatro horas y media.

b) Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la expresión de la fuerza gravitatoria, que coincide con la fuerza peso:

$$P_h = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = \frac{4{,}01 \cdot 10^{12}\ [\mathrm{m^3/s^2}] \cdot 100\ [\mathrm{kg}]}{(1{,}24 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}])^2} = 261\ \mathrm{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia $r \approx 2\,R$, el peso debería ser unas $2^2 = 4$ veces menor que en el suelo $m \cdot g_0$ = 980 N, o sea unos 250 N.

15. Un satélite artificial de 64,5 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio *r* = 2,32 *R*.
Calcula:

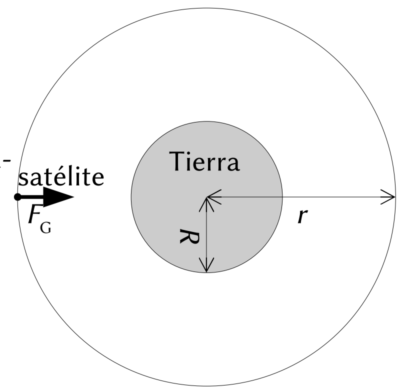
a) El período de rotación del satélite.
b) El peso del satélite en la órbita.
Datos: Tierra: g_0 = 9,80 m/s²; R = 6370 km. *(P.A.U. jun. 05)*
Rta.: a) T = 4 h 58 min.; b) P_h = 117 N.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Radio de la órbita	r = 2,32 R
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Masa del satélite	m = 64,5 kg
Incógnitas	
Período de rotación del satélite alrededor de la Tierra	T
Peso del satélite en la órbita = fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite	P_h
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = 2{,}32\ R = 2{,}32 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] = 1{,}48 \cdot 10^7\ \text{m}$$



La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite.
En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = g_0 \cdot R^2 \cdot T^2$$

Se despeja el período y se sustituyen los datos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 \cdot R^2}} = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{(1{,}84 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}])^3}{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}](6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}} = 1{,}79 \cdot 10^4\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{h}\ 58\ \mathrm{min}$$

Análisis: Por la tercera ley de Kepler, también aplicable a satélites que giran alrededor de un astro, los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las elipses, o, si las trayectorias son prácticamente circulares, a los radios de las órbitas. El período de la Luna, que dista unos 60 R de la Tierra, es de 28 días. El período de este satélite, que está a unos 2,4 R (25 veces menor) sería de $\sqrt{25^3} \approx 125$ *veces menor ≈ 0,25 días ≈ 6 horas.*

b) Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la expresión de la fuerza gravitatoria, que coincide con la fuerza peso:

$$P_h = F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = \frac{9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}](6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 64{,}5\ [\mathrm{kg}]}{(1{,}84 \cdot 10^7\ [\mathrm{m}])^2} = 117\ \mathrm{N}$$

Análisis: El peso disminuye con la altura, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A una distancia r ≈ 2,4 R, el peso debería ser unas $2{,}4^2 = 6$ *veces menor que en el suelo* $m \cdot g_0$ = 632 N, *o sea unos* 100 N.

● Campo gravitatorio

1. Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 el terrestre, halla:
   a) El campo gravitatorio en la Luna.
   b) La velocidad de escape en la Luna.
   c) El período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es 2 s.
   Datos: g_0 = 9,8 m/s²; R_L = 1,7·10⁶ m. *(P.A.U. jun. 12)*
   Rta.: a) g_L = 1,6 m/s²; b) v_e = 2,3 km/s; c) T = 4,9 s.

Datos	**Cifras significativas: 2**
Relación entre las masas de la Luna y de la Tierra	M_L/M_T = 0,012
Relación entre los radios de la Luna y de la Tierra	R_L/R_T = 0,27
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_T = 9,8 m/s²
Radio de la Luna	R_L = 1,7·10⁶ m
Período del péndulo en la Tierra	T_T = 2,0 s
Incógnitas	
Campo gravitatorio en la Luna	g_L
Velocidad de escape en la Luna	v_e
Período de oscilación en la luna de un péndulo cuyo T_T = 2 s	T_L
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G = G\frac{M\,m}{r^2}$
Peso de un objeto	$P = m \cdot g$
Energía cinética de un objeto de masa m que se mueve a la velocidad v	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria de una objeto de masa m situado a una distancia r del centro de un astro de masa M (referida al infinito)	$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$
Período de un péndulo simple de longitud L en un punto donde la aceleración de la gravedad es g	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Solución:

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m\,g_T = G\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

Análogamente para la Luna.

$$m\,g_L = G\frac{M_L\,m}{R_L^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_L}{\cancel{m} \cdot g_T} = \frac{\cancel{G}\frac{M_L \cdot \cancel{m}}{R_L^2}}{\cancel{G}\frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{M_L/M_T}{(R_L/R_T)^2} = \frac{0{,}012}{0{,}27^2} = 0{,}16$$

Despejando:

$$g_L = 0{,}16 \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2] = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

Análisis: El resultado es razonable, porque sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 *veces menor que en la superficie de la Tierra.*

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa m situado en la superficie de un astro de masa M y radio R es:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula.
La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

b) La velocidad de escape en la Luna se obtiene sustituyendo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$, y los valores de los datos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2\,g_L\,R_L^2}{R_L}} = \sqrt{2\,g_L\,R_L} = \sqrt{2 \cdot 1{,}6\ [\text{m/s}^2] \cdot 1{,}7 \cdot 10^6\ [\text{m}]} = 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 2{,}3\ \text{km/s}$$

c) El período, T, de un péndulo de longitud L en un lugar donde la gravedad es g, viene dado por la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna, queda:

$$\frac{T_L}{T_T}=\frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_L}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_T}}}=\sqrt{\frac{g_T}{g_L}}=\sqrt{\frac{9,8}{1,6}}=2,5$$

Se sustituye el dato T_T = 2,0 s:

$$T_L = 2,5 \cdot 2,0 \text{ [s]} = 4,9 \text{ s}$$

Análisis: El resultado es razonable. La gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y cuanto más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.

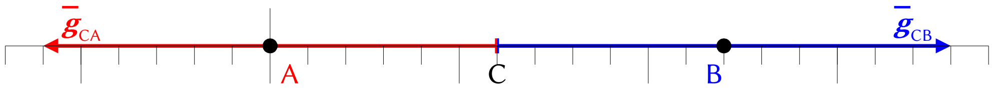
● Masas puntuales

1. Dos masas de 150 kg están situadas en A(0, 0) y B(12, 0) metros. Calcula:
   a) El vector campo y el potencial gravitatorio en C(6, 0) y D(6, 8).
   b) Si una masa de 2 kg posee en el punto D una velocidad de $-10^{-4}\ \bar{\mathbf{j}}$ m/s, calcula su velocidad en el punto C.
   c) Razona si el movimiento entre C y D es rectilíneo uniforme, rectilíneo uniformemente acelerado, o de cualquiera otro tipo.
   Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. jun. 14)*
   Rta.: a) $\bar{\mathbf{g}}_C = \bar{\mathbf{0}}$; $\bar{\mathbf{g}}_D = -1{,}6\cdot10^{-10}\ \bar{\mathbf{j}}$ N/kg; $V_C = -3{,}34\cdot10^{-9}$ J/kg; $V_D = -2{,}00\cdot10^{-9}$ J/kg; b) $\bar{\boldsymbol{v}} = -1{,}13\cdot10^{-4}\ \bar{\mathbf{j}}$ m/s.

Datos	**_Cifras significativas: 3_**
Cada una de las masas en el eje X	$M_A = M_B = M = 150$ kg
Vector de posición de la masa en A	$\bar{\boldsymbol{r}}_A = (0, 0)$ m
Vector de posición de la masa en B	$\bar{\boldsymbol{r}}_B = (12{,}0, 0)$ m
Vector de posición del punto C	$\bar{\boldsymbol{r}}_C = (6{,}00, 0)$ m
Vector de posición del punto D	$\bar{\boldsymbol{r}}_D = (6{,}00, 8{,}00)$ m
Masa en el punto D	$m_D = 2{,}00$ kg
Velocidad en el punto D	$\bar{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00\cdot10^{-4}\ \bar{\mathbf{j}}$ m/s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Campo gravitatorio en C y en D	$\bar{\boldsymbol{g}}_C$, $\bar{\boldsymbol{g}}_D$
Potencial gravitatorio en C y en D	V_C, V_D
Velocidad en C de la masa que sale de D	$\bar{\boldsymbol{v}}_C$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\bar{\boldsymbol{F}} = m\cdot\bar{\boldsymbol{a}}$
Campo gravitatorio en un punto a una distancia, r, de una masa, M	$\vec{g}=\frac{\vec{F}_G}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto a una distancia, r, de una masa, M	$V=-G\frac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=m\cdot V=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Trabajo del campo cuando se desplaza una masa desde el punto 1 al punto 2	$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m\cdot v^2$

Solución:

a) Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A(0, 0), B(12, 0) y C(6, 0). Se dibujan los vectores de campo gravitatorio creados por las masas en el punto C, un vector por cada masa. Como sus valores son iguales, porque las masas y las distancias son iguales, los vectores serán de la misma medida, y, por lo tanto, la resultante será nula.



A continuación se realizan los cálculos aunque no son necesarios.
La distancia del punto A al punto C es: r_{AC} = |(6,00, 0) [m] – (0, 0)| = 6,00 m.
El vector unitario del punto C, tomando como origen el punto A, es $\overline{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje *X*.
Se calcula el campo gravitatorio en el punto C creado por la masa situada en el punto A:

$$\vec{g}_{CA}=-G\frac{M_A}{r_{AC}^2}\vec{u}_r=-6,67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150,0\,[\text{kg}]}{(6,00\,[\text{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=-2,78\cdot 10^{-10}\vec{\mathbf{i}}\ \text{N/kg}$$

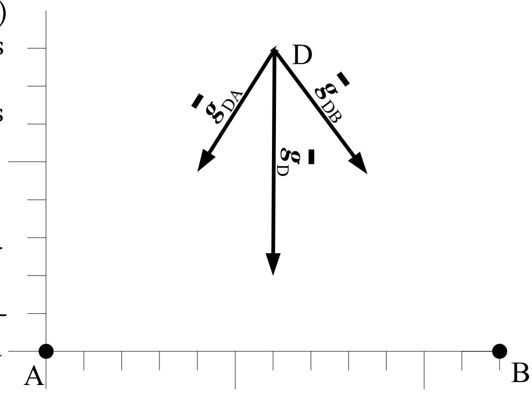
El campo gravitatorio en el punto C, creado por la masa situada en el punto B, es simétrico al creado por la masa situada en el punto A:

$$\overline{g}_{CB} = 2,78\cdot 10^{-10}\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/kg}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto C es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada masa.

$$\overline{g}_C = \overline{g}_{CA} + \overline{g}_{CB} = \overline{\mathbf{0}}$$

Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A(0, 0), B(12, 0) y D(6, 8). Se dibujan los vectores de campo gravitatorio creados por las masas en el punto D, un vector por cada masa.
Como sus valores son iguales, porque las masas y las distancias son iguales, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{g}_D$.
Las componentes horizontales de los campos creados por las masas se anulan y la resultante estará dirigida en el sentido negativo del eje *Y*. El valor de la resultante será la suma de las componentes verticales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.



Se calcula la distancia del punto A al punto D:

$$r_{AD}=|\vec{r}_{AD}|=|\vec{r}_D-\vec{r}_A|=|6,00\,\vec{\mathbf{i}}+8,00\,\vec{\mathbf{j}}|=\sqrt{(6,00\,[\text{m}])^2+(8,00\,[\text{m}])^2}=10,0\ \text{m}$$

Se calcula el vector unitario del punto D tomando cómo origen el punto A.

$$\vec{u}_{AD}=\frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|}=\frac{(6,00\,\vec{\mathbf{i}}+8,00\,\vec{\mathbf{j}})\,[\text{m}]}{10,0\,[\text{m}]}=0,600\,\vec{\mathbf{i}}+0,800\,\vec{\mathbf{j}}\ \text{N/kg}$$

Se calcula el campo gravitatorio en el punto D creado por la masa situada en el punto A:

$$\vec{g}_{DA}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r=-6,67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150\,[\text{kg}]}{(10,0\,[\text{m}])^2}(0,600\,\vec{\mathbf{i}}+0,800\,\vec{\mathbf{j}}) = (-6,00\cdot 10^{-11}\ \overline{\mathbf{i}} - 8,00\cdot 10^{-11}\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/kg}$$

El campo gravitatorio en el punto D, creado por la masa situada en el punto B, es simétrico al del punto A. Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{g}_{DB} = (6,00\cdot 10^{-11}\ \overline{\mathbf{i}} - 8,00\cdot 10^{-11}\ \overline{\mathbf{j}})\ \text{N/kg}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada masa.

$$\overline{g}_D = \overline{g}_{DA} + \overline{g}_{DB} = -1,60\cdot 10^{-10}\ \overline{\mathbf{j}}\ \text{N/kg}$$

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.
Para determinar el potencial gravitatorio en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada masa, y luego se suman.
La ecuación del potencial gravitatorio en un punto situado a una distancia, *r*, de una masa puntual, *M*, es:

$$V=-G\frac{M}{r}$$

G es la constante de gravitación universal.
Se calcula el potencial gravitatorio en el punto C, creado por la masa situada en el punto A:

$$V_{CA}=-G\frac{M}{r_{AC}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150{,}0\ [\text{kg}]}{6{,}00\ [\text{m}]}=-1{,}17\cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

El potencial gravitatorio en el punto C, creado por la masa situada en el punto B vale lo mismo, porque la masa y la distancia son iguales.
El potencial gravitatorio en el punto C es la suma:

$$V_C = V_{CA} + V_{CB} = 2\ V_{CA} = 2 \cdot (-1{,}17\cdot 10^{-9}\ [\text{J/kg}]) = -3{,}34\cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

Se calcula el potencial gravitatorio en el punto D, creado por la masa situada en el punto A:

$$V_{DA}=-G\frac{M}{r_{AD}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150{,}0\ [\text{kg}]}{10{,}0\ [\text{m}]}=-1{,}00\cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

El potencial gravitatorio en el punto D creado por la masa situada en el punto B, vale lo mismo, porque la masa y la distancia son iguales.
El potencial gravitatorio del punto D es la suma:

$$V_D = V_{DA} + V_{DB} = 2\ V_{DA} = 2 \cdot (-1{,}00\cdot 10^{-9}\ [\text{J/kg}]) = -2{,}00\cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

b) Ya que la aceleración no es constante, no se puede resolver de una manera sencilla por cinemática. (No se puede usar la ecuación $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}_0 + \bar{\boldsymbol{v}}_0\ t + ½\ \bar{\boldsymbol{a}}\ t^2$, que solo es válida si el vector aceleración, $\bar{\boldsymbol{a}}$, es un vector constante).
Como el campo gravitatorio es un campo conservativo, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica a los puntos C y D.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_C^2+2\left(-G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r_{AC}}\right)=\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_D^2+2\left(-G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r_{AD}}\right)$$

Despejando el valor de la velocidad en C, queda:

$$v_C=\sqrt{v_D^2+4\,G\,M\left(\frac{1}{r_{AC}}-\frac{1}{r_{AD}}\right)}\ =$$

$$=\sqrt{(1{,}00\cdot 10^{-4}[\text{m/s}])^2+4\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 150\ [\text{kg}]\left(\frac{1}{6{,}00\ [\text{m}]}-\frac{1}{10{,}0\ [\text{m}]}\right)}=1{,}13\cdot 10^{-4}\ \text{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.
Como tanto la aceleración como la velocidad en el punto D tienen la dirección del eje Y en sentido negativo, la dirección de la velocidad en el punto C es la del eje Y en sentido negativo

$$\bar{\boldsymbol{v}}_C = -1{,}13\cdot 10^{-4}\ \bar{\mathbf{j}}\ \text{m/s}$$

Análisis: El valor de la velocidad es muy pequeño, pero esto es lógico, si tenemos en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza de muy baja intensidad (si las masas no son de tipo planetario).

c) La aceleración de la masa que se mueve de D a C está dirigida en todo momento hacia C. Como la velocidad en D también tenía esa dirección, el movimiento es rectilíneo, paralelo al eje Y. Pero el valor del campo gravitatorio en los puntos por los que pasa la masa que se mueve no es constante. No es el mismo en el punto C que en el punto D. Por tanto, la aceleración no es constante.
El movimiento es rectilíneo y acelerado, pero con aceleración variable.

Lo que sigue es la demostración de la relación entre el campo gravitatorio, que vale lo mismo que la aceleración, y la coordenada y en los puntos por los que pasa la masa móvil entre D y C.
Para un punto G cualquiera entre C y D, el campo gravitatorio creado por la masa situada en A es:

$$\vec{\mathbf{g}}_{GA}=-G\frac{M}{r_{AG}^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{150\ [\text{kg}]}{\left(\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\ [\text{m}]\right)^2}\frac{(6{,}00\ \vec{\mathbf{i}}+y_G\ \vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{\sqrt{6{,}00^2+y_G^2}\ [\text{m}]}$$

Por simetría, el campo creado en ese punto G por la masa situada en B es:

$$\vec{g}_{GB} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}] \frac{150\ [\text{kg}]}{\left(\sqrt{6{,}00^2 + y_G^2}\ [\text{m}]\right)^2} \frac{(-6{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + y_G\,\vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{\sqrt{6{,}00^2 + y_G^2}\ [\text{m}]}$$

El vector resultante valdría

$$\vec{g}_G = \vec{g}_{GA} + \vec{g}_{GB} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}] \frac{150\ [\text{kg}]}{\left((6{,}00^2 + y_G^2)^{3/2}\ [\text{m}]^3\right)} (2\,y_G\,\vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]$$

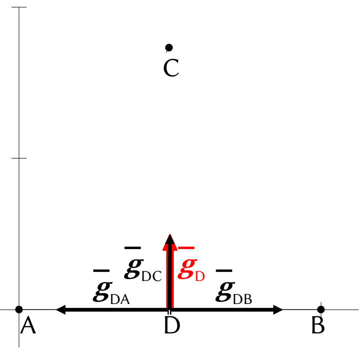
$$\vec{g}_G = \frac{-2{,}00 \cdot 10^{-8}\ y_G}{(6{,}00^2 + y_G^2)^{3/2}}\ \vec{\mathbf{j}}\ [\text{N/m}]$$

2. Tres masas de 100 kg están situadas en los puntos A(0, 0), B(2, 0), C(1, $\sqrt{3}$) (en metros). Calcula:
   a) El campo gravitatorio creado por estas masas en el punto D(1, 0)
   b) La energía potencial que tendría una masa de 5 kg situada en D.
   c) ¿Quién tendría que realizar trabajo para trasladar esa masa desde D al infinito, el campo o fuerzas externas?
   Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. *(P.A.U. sep. 09)*
   Rta.: a) $\overline{\mathbf{g}}_D = 2{,}22 \cdot 10^{-9}\ \bar{\mathbf{j}}$ N/kg; b) $E_p = -8{,}60 \cdot 10^{-8}$ J; c) externas.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de cada uno de los cuerpos	$M_A = M_B = M_C = M = 100$ kg
Vector de posición de la masa en A	$\overline{\mathbf{r}}_A = (0{,}00,\ 0{,}00)$ m
Vector de posición de la masa en B	$\overline{\mathbf{r}}_B = (2{,}00,\ 0{,}00)$ m
Vector de posición de la masa en C	$\overline{\mathbf{r}}_C = (1{,}00,\ 1{,}73)$ m
Vector de posición del punto D	$\overline{\mathbf{r}}_D = (1{,}00,\ 0{,}00)$ m
Masa en el punto D	$m_D = 5{,}00$ kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$
Incógnitas	
Vector campo gravitatorio en el punto D	$\overline{\mathbf{g}}_D$
Energía potencial gravitatoria en el punto D	$E_{p\,D}$
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F} = -G \frac{M\,m}{r^2} \vec{u}_r$
Campo gravitatorio en un punto a una distancia, *r*, de una masa, *M*	$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto a una distancia, *r*, de una masa, *M*	$V = -G \frac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = m \cdot V = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Trabajo del campo cuando se desplaza una masa desde el punto 1 al punto 2	$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$

Solución:

a) Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A(0, 0), B(2, 0), C(1, 1,7) y D(1, 0). Se dibujan los vectores de campo gravitatorio creados por las masas en el punto D, un vector por cada masa.
Los valores de los campos producidos por las masas situadas en los puntos A y B son iguales, porque las masas y las distancias son iguales. Los vectores serán de la misma medida, y se anularán entre sí.
El vector suma, que es el campo resultante, $\overline{\mathbf{g}}_D$, coincide con el vector campo producido por la masa situada en el punto C.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.



Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada masa, y luego se suman los vectores.

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales o esféricas, M y m, viene dada por la ley de la gravitación de Newton. G es la constante de la gravitación universal y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la línea que une las masas.

$$\vec{F}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

El campo gravitatorio en un punto situado a una distancia, r, de una masa, M, puntual es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{-G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^2}\vec{u}_r}{\cancel{m}}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

La distancia del punto A al punto D es: r_{AD} = |(1,00, 0) [m] – (0, 0)| = 1,00 m.
El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto A, es $\overline{\mathbf{i}}$, el vector unitario del eje X.
Se calcula el campo gravitatorio en el punto D, creado por la masa de 100 kg situada en el punto A:

$$\vec{g}_{DA}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2kg^{-2}}]\cdot\frac{100\ [\mathrm{kg}]}{(1{,}00\ [\mathrm{m}])^2}\vec{\mathbf{i}}=-6{,}67\cdot 10^{-9}\vec{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/kg}$$

El campo gravitatorio en el punto D, creado por la masa situada en el punto B, es simétrico al creado por la masa situada en el punto A:

$$\overline{\mathbf{g}}_{DB} = 6{,}67\cdot10^{-9}\ \overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/kg}$$

La distancia del punto C al punto D es: r_{CD} = |(1,00, 0) [m] – (1,00, 1,73) [m]| = 1,73 m.
El vector unitario del punto D, tomando como origen el punto C, es -$\overline{\mathbf{j}}$, el vector unitario del eje Y en sentido negativo.
Se calcula la intensidad de campo gravitatorio en el punto D creado por la masa situada en el punto C:

$$\vec{g}_{DC}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2kg^{-2}}]\cdot\frac{100\ [\mathrm{kg}]}{(1{,}73\ [\mathrm{m}])^2}(-\vec{\mathbf{j}})=2{,}22\cdot 10^{-9}\vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/kg}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto D es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada masa.

$$\overline{\mathbf{g}}_{D} = \overline{\mathbf{g}}_{DA} + \overline{\mathbf{g}}_{DB} + \overline{\mathbf{g}}_{DC} = 2{,}22\cdot10^{-9}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/kg}$$

b) La energía potencial gravitatoria de una masa m situada en un punto, debida a la influencia de varias masas M_i, cada una de ellas a una distancia r_i del punto, es la suma de las energías potenciales de cada una de las interacciones de la masa m con cada una de las masas M_i. Pero también se puede calcular la energía potencial a partir de la definición del potencial gravitatorio del punto donde se encuentra la masa m:

$$E_p = m \cdot V$$

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.
Para determinar el potencial gravitatorio en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada masa, y luego se suman.

$$V=\sum\left(-G\frac{M_i}{r_i}\right)=-G\sum\frac{M_i}{r_i}$$

Si las masas M_i son todas iguales, ($M = M_i$) entonces queda:

$$V=-G\,M\sum\frac{1}{r_i}$$

La expresión de la energía potencial sería:

$$E_p=-G\,M\,m\sum\frac{1}{r_i}$$

$$E_p=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 100\ [\mathrm{kg}]\cdot 5{,}00\ [\mathrm{kg}]\left(\frac{1}{1\ [\mathrm{m}]}+\frac{1}{1\ [\mathrm{m}]}+\frac{1}{1{,}73\ [\mathrm{m}]}\right)=-8{,}60\cdot 10^{-8}\ \mathrm{J}$$

c)
El campo gravitatorio es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una masa se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una masa entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de masa.

$$V=\frac{E_p}{m}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una masa mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = m \cdot V_A - m \cdot V_B = m\,(V_A - V_B)$$

El trabajo de la resultante de las fuerzas gravitatorias cuando se lleva la masa en D hasta el infinito, sin variación de energía cinética (se supone), es igual a la diferencia (cambiada de signo) de energía potencial que posee la masa de 5,00 kg en esos dos puntos. Por definición, la energía potencial (y el potencial) en el infinito es nula, por lo que:

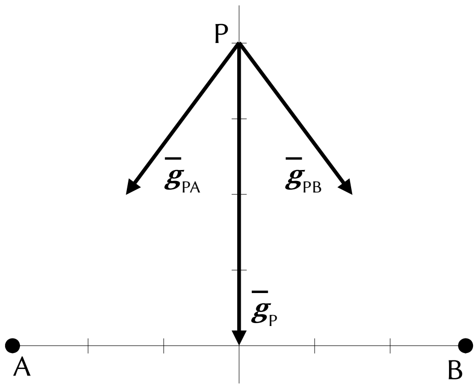
$$W_{D\to\infty} = -\Delta E_p = -(E_{p\infty} - E_{pD}) = E_{pD} - E_{p\infty} = E_{pD} = -8{,}60\cdot10^{-8}\text{ J}$$

Por tanto, el trabajo de las fuerzas gravitatorias es negativo, (la fuerza del campo se opone al desplazamiento hacia el infinito) y el trabajo deberá hacerlo alguna fuerza externa.

3. Dos masas de 50 kg están situadas en A(−30, 0) y B(30, 0) respectivamente (coordenadas en metros). Calcula:
   a) El campo gravitatorio en P(0, 40) y en D(0, 0).
   b) El potencial gravitatorio en P y D.
   c) Para una masa *m*, ¿dónde es mayor la energía potencial gravitatoria, en P o en D?
   Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. sep. 08)*
   Rta.: a) $\overline{\mathbf{g}}_P = -2{,}13\cdot10^{-12}\,\overline{\mathbf{j}}$ N/kg; $\overline{\mathbf{g}}_D = \overline{\mathbf{0}}$; b) $V_P = -1{,}33\cdot10^{-10}$ J/kg; $V_D = -2{,}22\cdot10^{-10}$ J/kg; c) En P.

Datos	**Cifras significativas: 3**
Cada una de las masas en el eje X	$M_A = M_B = M = 50{,}0$ kg
Vector de posición de la masa en A	$\overline{\mathbf{r}}_A = (-30{,}0,\ 0)$ m
Vector de posición de la masa en B	$\overline{\mathbf{r}}_B = (30{,}0,\ 0)$ m
Vector de posición del punto P	$\overline{\mathbf{r}}_P = (0,\ 40{,}0)$ m
Vector de posición del punto D	$\overline{\mathbf{r}}_D = (0,\ 0)$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Campo gravitatorio en P y en D	$\overline{\mathbf{g}}_P$, $\overline{\mathbf{g}}_D$
Potencial gravitatorio en P y en D	V_P, V_D
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\mathbf{F}} = m\cdot\overline{\mathbf{a}}$
Campo gravitatorio en un punto a una distancia, r, de una masa, M	$\vec{g}=\frac{\vec{F}_G}{m}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto a una distancia, r, de una masa, M	$V=-G\frac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=m\cdot V=-G\frac{M\cdot m}{r}$

Solución:



a) Se hace un dibujo en el que se sitúan los puntos A(-30, 0), B(30, 0) y P(0, 40). Se dibujan los vectores de campo gravitatorio creados por las masas en el punto P, un vector por cada masa.
Como sus valores son iguales, porque las masas y las distancias son iguales, los vectores serán de la misma medida.
Se dibuja el vector suma, que es el campo resultante, $\overline{g}_P$.
Las componentes horizontales de los campos creados por las masas se anulan y la resultante estará dirigida en el sentido negativo del eje *Y*. El valor de la resultante será la suma de las componentes verticales de cada campo, y, como son dos, el vector campo resultante medirá el doble de la componente vertical de uno de ellos.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada masa, y luego se suman los vectores.
La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales o esféricas, *M* y *m*, viene dada por la ley de la gravitación de Newton. *G* es la constante de la gravitación universal y $\overline{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las masas.

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo gravitatorio en un punto situado a una distancia, *r*, de una masa, *M*, puntual es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{m}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

Se calcula la distancia del punto A al punto P:

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A = 40{,}0\,\vec{\mathbf{j}} - (-30{,}0)\,\vec{\mathbf{i}} = 30{,}0\,\vec{\mathbf{i}} + 40{,}0\,\vec{\mathbf{j}}$$
$$|\vec{r}_{AP}| = \sqrt{(30{,}0\,[\mathrm{m}])^2 + (40{,}0\,[\mathrm{m}])^2} = 50{,}0\ \mathrm{m}$$

Se calcula el vector unitario del punto P tomando como origen el punto A:

$$\vec{u}_{AP} = \frac{\vec{r}_{AP}}{|\vec{r}_{AP}|} = \frac{(30{,}0\,\vec{\mathbf{i}} + 40{,}0\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{50{,}0\,[\mathrm{m}]} = 0{,}600\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}800\,\vec{\mathbf{j}}$$

Se calcula el campo gravitatorio en el punto P, creado por la masa situada en el punto A:

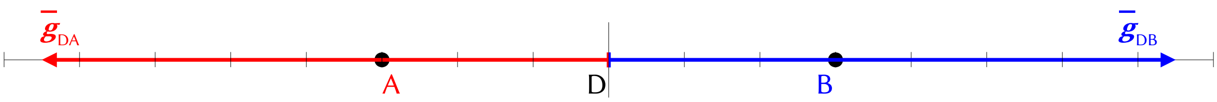
$$\vec{g}_{PA} = -G \frac{M}{r_{AP}^2} \vec{u}_r = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2 \cdot kg^{-2}}] \frac{50{,}0\,[\mathrm{kg}]}{(50{,}0\,[\mathrm{m}])^2} (0{,}600\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}800\,\vec{\mathbf{j}}) = (-8{,}00{\cdot}10^{-13}\,\bar{\mathbf{i}} - 10{,}7{\cdot}10^{-13}\,\bar{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/kg}$$

El campo gravitatorio en el punto P, creado por la masa situada en el punto B, es simétrico al del punto A.
Los valores de sus componentes son los mismos, pero el signo de la componente horizontal es opuesto, porque está dirigida en sentido contrario:

$$\overline{g}_{PB} = (8{,}00{\cdot}10^{-13}\,\bar{\mathbf{i}} - 10{,}7{\cdot}10^{-13}\,\bar{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/kg}$$

Por el principio de superposición, el campo resultante en el punto P es la suma vectorial de los campos creados en ese punto por cada masa.

$$\overline{g}_P = \overline{g}_{PA} + \overline{g}_{PB} = -2{,}13{\cdot}10^{-12}\,\bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/kg}$$



En el punto D(0, 0) los campos gravitatorios que ejercen ambas masas son opuestas (mismo módulo, misma dirección y sentido contrario), y, por lo tanto, la resultante es nula.

$$\overline{g}_D = 0\,\bar{\mathbf{i}} + 0\,\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{0}}$$

b)
El potencial gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.
Para determinar el potencial gravitatorio en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada masa, y luego se suman.
La ecuación del potencial gravitatorio en un punto situado a una distancia, r, de una masa puntual, M, es:

$$V=-G\frac{M}{r}$$

G es la constante de gravitación universal.
Se calcula el potencial gravitatorio en el punto P, creado por la masa situada en el punto A:

$$V_{\text{PA}}=-G\frac{M}{r_{\text{AP}}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{50{,}0\ [\text{kg}]}{50{,}0\ [\text{m}]}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa situada en el punto B vale lo mismo.
El potencial gravitatorio en el punto P es la suma de los potenciales creados por cada masa:

$$V_{\text{P}} = V_{\text{PA}} + V_{\text{PB}} = 2\ V_{\text{PA}} = 2\cdot(-6{,}67\cdot10^{-11}\ [\text{J/kg}]) = -1{,}33\cdot10^{-10}\ \text{J/kg}$$

Se calcula el potencial gravitatorio en el punto D, creado por la masa situada en el punto A:

$$V_{\text{DA}}=-G\frac{M}{r_{\text{AD}}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{50{,}0\ [\text{kg}]}{30{,}0\ [\text{m}]}=-1{,}11\cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

Por simetría, el potencial creado por la masa del punto B vale lo mismo.
El potencial gravitatorio del punto D es la suma:

$$V_{\text{D}} = V_{\text{DA}} + V_{\text{DB}} = 2\ V_{\text{DA}} = 2\cdot(-1{,}11\cdot10^{-10}\ [\text{J/kg}]) = -2{,}22\cdot10^{-10}\ \text{J/kg}$$

c) La energía potencial de un objeto de masa m situado en un punto de potencial V es proporcional al potencial del punto:

$$E_{\text{p}} = m\cdot V$$

Cuanto mayor sea la energía potencial del punto, mayor será la energía potencial del objeto. Por tanto, la energía potencial será mayor en el punto P ($-1{,}33\cdot10^{-10} > -2{,}22\cdot10^{-10}$)

Análisis: Cuanto más cerca de una masa se encuentre un objeto, menor será su energía potencial. El punto D está más cerca de las masas que el punto P. Un objeto en D tendrá menor energía potencial que en P.

◊ CUESTIONES

● Satélites

1. En torno a un planeta giran dos satélites, M y N, cuyos períodos de revolución son 32 y 256 días respectivamente. Si el radio de la órbita del satélite M es 10^4 km, el radio del satélite N será:
A) $4\cdot10^4$ km.
B) $1{,}6\cdot10^5$ km.
C) $3{,}2\cdot10^5$ km.

(P.A.U. sep. 16)

Solución: A

La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos, T, de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas.
Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio r, la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.
La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2\cdot r^3 = G\cdot M\cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2}\cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2}\cdot r_2^3}=\frac{\cancel{G\cdot M}\cdot T_1^2}{\cancel{G\cdot M}\cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow R_2=R_1\sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}}=1{,}00\cdot 10^4\ [\mathrm{km}]\sqrt[3]{\left(\frac{256\ [\text{días}]}{32\ [\text{días}]}\right)^2}=4{,}00\cdot 10^7\ \mathrm{km}$$

2. Supongamos que la masa de la Luna disminuyese a la mitad de su valor real. Justifique si la frecuencia con que veríamos la luna llena sería:
A) Mayor que ahora.
B) Menor que ahora.
C) Igual que ahora.

(P.A.U. jun. 16)

Solución: C

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad es independiente de la masa del satélite (la Luna), ya que solo depende de la masa del astro (la Tierra) y del radio de la órbita.
La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio, r, y período, T, es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Como la trayectoria es prácticamente circular, si la velocidad y el radio son los mismos, el período orbital también será igual. Como la frecuencia es la inversa del período, tampoco variaría la frecuencia.

3. Un satélite artificial de masa m que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio r tiene una velocidad v. Si cambia de órbita pasando a otra más próxima a la Tierra, su velocidad debe:
A) Aumentar.
B) Disminuir.
C) No necesita cambiar de velocidad.

(P.A.U. jun. 15)

Solución: A

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita
Si el radio, r, es menor, la velocidad, v, en la nueva órbita será mayor.

4. Un planeta gira alrededor del Sol con una trayectoria elíptica. El punto de dicha trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es:
A) En el punto más próximo al Sol.
B) En el punto más alejado del Sol.
C) Ninguno de los puntos citados.

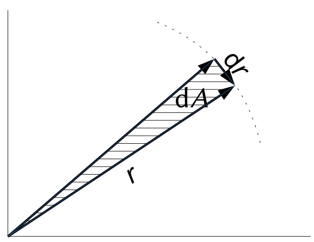
(P.A.U. sep. 14)

Solución: A

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
«El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales».
En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_A = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}t}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, del planeta por su vector desplazamiento, d$\overline{\boldsymbol{r}}$.

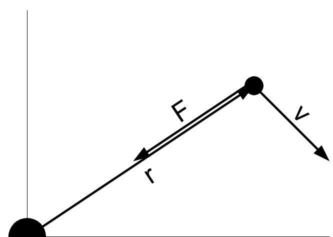


$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}})$$

La velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_A = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ el vector velocidad del planeta.
Si derivamos $\overline{\boldsymbol{v}}_A$ respecto al tiempo:



$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_A}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}\right)}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\times\vec{v}\;+\;\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{2}\vec{v}\times\vec{v}\;+\;\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{a}$$

El producto vectorial de un vector, $\overline{\boldsymbol{v}}$, por sí mismo es cero.

$$|\overline{\boldsymbol{v}}\times\overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0° = 0$$

El vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, y el vector fuerza, $\overline{\boldsymbol{F}}$, son paralelos de sentido opuesto, y la aceleración, $\overline{\boldsymbol{a}}$, tiene la misma dirección y sentido que la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta.
El producto vectorial de dos vectores paralelos también es cero, porque su módulo vale:

$$|\overline{\boldsymbol{r}}\times\overline{\boldsymbol{a}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{a}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

El resultado es el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero).

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_A}{\mathrm{d}\,t}=\frac{1}{2}\vec{v}\times\vec{v}\;+\;\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{a}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

Si la derivada es nula, la velocidad areolar es constante.
Como la velocidad areolar es constante, se puede escribir en módulos:

$$|\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } \varphi = \text{constante}$$

Despreciando las variaciones del ángulo φ, entre el vector de posición y el vector velocidad, cuanto menor sea la distancia, r, entre el planeta y el Sol, mayor será su velocidad.
El punto de la trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es el perihelio, el punto más próximo al Sol.

5. Si un satélite artificial describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, justifica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta en relación con su energía mecánica E y sus velocidades orbital v y de escape v_e:
   A) $E = 0$, $v = v_e$
   B) $E < 0$, $v < v_e$
   C) $E > 0$, $v > v_e$

(P.A.U. jun. 14)

Solución: Ninguna

Tal como está enunciada la pregunta, parece que la velocidad de escape del satélite se refiere a cuando el satélite se encuentra en órbita. En ese caso la velocidad de escape del satélite en órbita y su velocidad orbital coinciden, como se ve a continuación. La opción B no se cumple.
La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = ½\, m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)=G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{\mathrm{e\ o}\uparrow}=\sqrt{2\,G\frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.
La energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve con velocidad v, es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa m, que gira alrededor de un astro de masa M, en una órbita de radio r, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Donde G es la constante de la gravitación universal.
La energía mecánica de un cuerpo de masa m, que se encuentra en órbita de radio r alrededor de un astro de masa M, es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2, la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}\right)=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{\mathrm{e\ o}\rightarrow}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{\mathrm{e\ o}\leftarrow}=\sqrt{\frac{3}{2}G\frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{\mathrm{e\ o}}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

La velocidad de escape es igual que la velocidad orbital. Pero ninguna de las opciones coincide con los resultados obtenidos. $E < 0$ y $v = v_e$.

Análisis: Me imagino que aunque el enunciado habla de la velocidad de escape del satélite, el autor de la cuestión daba por hecho que la velocidad de escape se refería a un proyectil en la superficie de la Tierra: $v_e=\sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$ *que da un valor superior a cualquier velocidad orbital* $v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$ *, ya que, aparte del factor 2, r < R (radio de la Tierra). En ese caso la opción B sería correcta, pero, en mi opinión, no lo es.*

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula. La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s=(E_c+E_p)_s=0+\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=-G\frac{M\cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)=G\frac{M\cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e=\sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

Las opciones A y B no se cumplen.
La energía mecánica es negativa: $E < 0$.

6. Un planeta describe una órbita plana y elíptica en torno al Sol. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es constante?
A) El momento lineal.
B) La velocidad areolar.
C) La energía cinética.

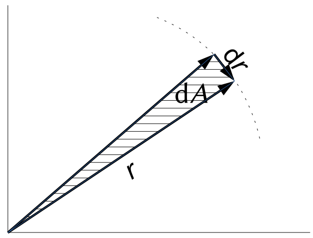
(P.A.U. jun. 13)

Solución: B

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
«El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales».
En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{v}_A=\frac{d\vec{A}}{dt}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, del planeta por su vector desplazamiento, d$\overline{\boldsymbol{r}}$.

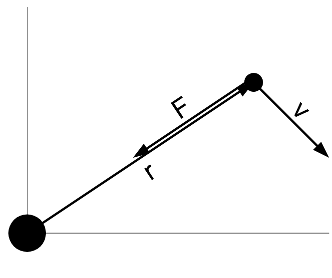


$$d\vec{A}=\frac{1}{2}(\vec{r}\times d\vec{r})$$

La velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{v}_A=\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\vec{r}\times d\vec{r}}{dt}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ el vector velocidad del planeta.
Si derivamos $\overline{\boldsymbol{v}}_A$ respecto al tiempo:



$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\vec{v}\times\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{a}$$

El producto vectorial de un vector, $\overline{\boldsymbol{v}}$, por sí mismo es cero.

$$|\overline{\boldsymbol{v}}\times\overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}|\cdot|\overline{\boldsymbol{v}}|\cdot \text{sen } 0° = 0$$

El vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, y el vector fuerza, $\overline{\boldsymbol{F}}$, son paralelos de sentido opuesto, y la aceleración, $\overline{\boldsymbol{a}}$, tiene la misma dirección y sentido que la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta.
El producto vectorial de dos vectores paralelos también es cero, porque su módulo vale:

$$|\overline{\boldsymbol{r}}\times\overline{\boldsymbol{a}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}|\cdot|\overline{\boldsymbol{a}}|\cdot \text{sen } 180° = 0$$

El resultado es el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero).

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\vec{v}\times\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{a}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

Si la derivada es nula, la velocidad areolar es constante.

Las otras opciones:
A. Falsa.
El momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{v}}$$

La dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.
C. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (el planeta), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

7. Dos satélites idénticos, 1 y 2, describen órbitas circulares de diferente radio en torno a la Tierra ($r_1 < r_2$). Por lo que:
   A) 2 tiene mayor energía cinética.
   B) 2 tiene mayor energía potencial.
   C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. sep. 12)

Solución: B

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa m, que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio r, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Pero como es negativa, cuanto mayor sea el radio de la órbita, mayor será la energía potencial.

$$E_{p2} > E_{p1}$$

Las otras opciones:
A. Falsa.
La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La energía cinética de un satélite de masa m que gira alrededor de la Tierra con velocidad v es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

Por tanto, la energía cinética de cada satélite es inversamente proporcional al radio de su órbita: a mayor radio, menor energía cinética.

C. Falsa. La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m \cdot v^2+\left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right)$$

Sustituyendo v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m \cdot v^2-G\frac{M \cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}-G\frac{M \cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica de un satélite en una órbita es inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque los satélites tienen la misma masa.

8. En el movimiento de los planetas en órbitas elípticas y planas alrededor del Sol se mantiene constante:
A) La energía cinética.
B) El momento angular.
C) El momento lineal.

(P.A.U. jun. 12)

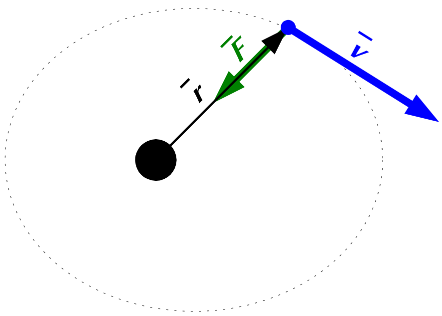
Solución: B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del planeta colocando el origen de coordenadas en el Sol.
En un campo de fuerzas centrales el momento angular (momento cinético) es constante.
El momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudiar su variación, se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}}\times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$$



El primer sumando da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) porque la velocidad, $\overline{\boldsymbol{v}}$, y el momento lineal, $m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$, son paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0 = 0$$

El segundo sumando también da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

La derivada es cero.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_{O}$, respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

Las otras opciones:
A. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo, ya que es un campo de fuerzas centrales.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (el planeta), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

C. Falsa. El momento lineal, $\overline{\boldsymbol{p}}$, de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad, $\overline{\boldsymbol{v}}$, vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Como se dijo para la opción A, la rapidez varía con la distancia del planeta al Sol. Además, la dirección cambia a medida que el planeta se desplaza.

9. Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indica cuál de las siguientes magnitudes es mayor en el afelio (punto más alejado del Sol) que en el perihelio (punto más próximo al Sol):
   A) Momento angular respecto a la posición del Sol.
   B) Momento lineal.
   C) Energía potencial.

(P.A.U. sep. 11)

Solución: C

La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (Plutón), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r, porque, aunque la división dé un número más pequeño, es negativo ($1 < 2$, pero $-1 > -2$)

Las otras opciones:
A. Falsa. En las fuerzas centrales, como la gravitatoria, en la que la dirección de la fuerza es la de la línea que une las masas, el momento cinético (o angular) $\overline{\boldsymbol{L}}_{O}$ respecto al punto O donde se encuentra la masa M que crea el campo gravitatorio de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ es un vector constante.

$$\overline{\boldsymbol{L}}_{O} = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

B. Falsa. El momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Por la 2.ª ley de Kepler, que dice que las áreas descritas por el radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, la velocidad en las proximidades del Sol (perihelio) es mayor que cuando está más alejado del él (afelio).

10. Dos satélites 1 y 2 de masas m_1 y m_2 ($m_1 < m_2$), giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r:
    A) Los dos tienen la misma energía mecánica.
    B) 1 tiene menor energía potencial y menor energía cinética que 2.
    C) 1 tiene mayor energía potencial y menor energía cinética que 2.

(P.A.U. jun. 10)

Solución: C

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p$$

La energía cinética de un satélite de masa m, que gira alrededor de la Tierra con velocidad v, es directamente proporcional a la masa.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

Como $m_1 < m_2$:

$$E_{c1} < E_{c2}$$

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa m, que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio r, también es directamente proporcional a la masa.

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

Pero como es negativa, cuanto mayor sea la masa, menor será la energía potencial.

$$E_{p1} > E_{p2}$$

11. Si dos planetas distan del Sol r y 4 r respectivamente sus períodos de revolución son:
    A) T y 4 T.
    B) T y T / 4.
    C) T y 8 T.

(P.A.U. sep. 07)

Solución: C

La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos, T, de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas.
Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio r, la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.
La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2\cdot r^3 = G\cdot M\cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2}\cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2}\cdot r_2^3}=\frac{\cancel{G\cdot M}\cdot T_1^2}{\cancel{G\cdot M}\cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{r_2^3}{r_1^3}=\frac{(4\,r)^3}{r^3}=(2^2)^3$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{(2^2)^3}=2^3=8$$

12. Dos satélites de comunicación 1 y 2 con diferentes masas ($m_1 > m_2$) giran alrededor de la Tierra con órbitas estables de diferente radio siendo $r_1 < r_2$
A) 1 gira con mayor velocidad lineal.
B) 2 tiene menor período de revolución.
C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. jun. 07)

Solución: A

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad lineal de un satélite en una órbita es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita. Como el radio de la órbita 1 es menor que el de la órbita 2, la velocidad del satélite en la órbita 1 será mayor.

Las otras opciones:
B. El período de revolución depende del radio de la órbita y de la velocidad.
Como la velocidad lineal v de un objeto que se mueve en una órbita circular de radio r con velocidad constante está relacionada con el período T (tiempo que tarda en dar una vuelta completa) por la expresión:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

El período del movimiento circular es:

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

Al ser mayor el radio de órbita 2, $r_2 > r_1$, y menor su velocidad, $v_2 < v_1$, el período de revolución del satélite en la órbita 2 será mayor que el de la órbita 1.
C. La energía mecánica de un satélite de masa m en órbita circular de radio r alrededor de la Tierra de masa M es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r} \right)$$

Sustituyendo v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica de un satélite en una órbita es directamente proporcional a la masa del satélite e inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque solo ocurriría si se cumpliese la relación:

$$\frac{m_1}{r_1} = \frac{m_2}{r_2}$$

Esta relación no puede cumplirse porque $m_1 > m_2$ y $r_1 < r_2$.

13. Si por una causa interna, la Tierra sufriera un colapso gravitatorio y redujera su radio a la mitad, manteniendo constante la masa, su período de revolución alrededor del Sol sería:
A) El mismo.
B) 2 años.
C) 0,5 años.

(P.A.U. jun. 07)

Solución: A

El período de revolución de la Tierra, que sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol, no depende del radio de la Tierra, ya que se puede considerar que se trata de una masa puntual.
La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Despejando el período, queda:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

El período depende de la masa del Sol (no de la de la Tierra) y de r, que es el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, o sea, la distancia del centro de la Tierra al centro del Sol. El radio del planeta Tierra no influye en el período.

14. Dos satélites artificiales 1 y 2 de masas m_1 y m_2 ($m_1 = 2\,m_2$), giran alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r.
    A) Tienen la misma velocidad de escape.
    B) Tienen diferente período de rotación.
    C) Tienen la misma energía mecánica.

(P.A.U. jun. 05)

Solución: A

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = \frac{1}{2}\,m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r} \right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{e\,o\uparrow} = \sqrt{2 G \frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.
La energía cinética de un objeto de masa *m*, que se mueve con velocidad *v*, es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = ½\, m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa *m*, que gira alrededor de un astro de masa *M*, en una órbita de radio *r*, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Donde *G* es la constante de la gravitación universal.
La energía mecánica de un cuerpo de masa *m*, que se encuentra en órbita de radio *r* alrededor de un astro de masa *M*, es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r} \right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia *r* alrededor de un astro de masa *M* es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2, la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\, m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} \right) = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e\,o\rightarrow} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{e\,o\leftarrow} = \sqrt{\frac{3}{2} G \frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{e\,o} = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

La velocidad de escape es independiente de la masa del satélite. M es la masa del astro alrededor del que giran.

Las otras opciones:
B. Falsa. El período de rotación es también independiente de la masa del satélite.
C. Falsa. La energía mecánica sí depende de la masa del satélite.

15. En torno al Sol giran dos planetas cuyos períodos de revolución son $3{,}66·10^2$ días y $4{,}32·10^2$ días respectivamente. Si el radio de la órbita del primero es $1{,}49·10^{11}$ m, la órbita del segundo es:
 A) La misma.
 B) Menor.
 C) Mayor.

(P.A.U. jun. 04)

Solución: C

La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos, T, de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas. Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio r, la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.
La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right|=m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G=m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T} \right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2} \cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2} \cdot r_2^3} = \frac{\cancel{G \cdot M} \cdot T_1^2}{\cancel{G \cdot M} \cdot T_2^2}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow R_2 = R_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 1{,}49 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}] \sqrt[3]{\left(\frac{4{,}32 \cdot 10^2\ [\text{días}]}{3{,}66 \cdot 10^2\ [\text{días}]} \right)^2} = 1{,}57 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$$

16. Para un satélite geoestacionario el radio de su órbita se obtiene mediante la expresión:
 A) $R = (T^2\ G\ M / 4\pi^2)^{1/3}$
 B) $R = (T^2\ g_0\ R / 4\pi^2)^{1/2}$
 C) $R = (T\ G\ m^2 / 4\pi^2)^{1/3}$

(P.A.U. jun. 04)

Solución: A

Un satélite geoestacionario es el que se encuentra en la vertical del mismo punto de la Tierra, o sea, que tiene el mismo período de rotación alrededor de la Tierra que el de la Tierra sobre su eje.
La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Despejando el radio, r, de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

En un satélite geoestacionario, el período es de 24 horas, M es la masa de la Tierra y G la constante de la gravitación universal. Si disponemos de estos dos últimos datos, el valor de radio es: $r = 4{,}22 \cdot 10^7$ m.

● Campo gravitatorio.

1. Para una partícula sometida a una fuerza central se verifica que:
   A) Se conserva su momento angular respecto al centro de fuerzas.
   B) El trabajo realizado por dicha fuerza depende de la trayectoria seguida entre dos puntos dados.
   C) Se conserva el vector momento lineal.

(P.A.U. sep. 15)

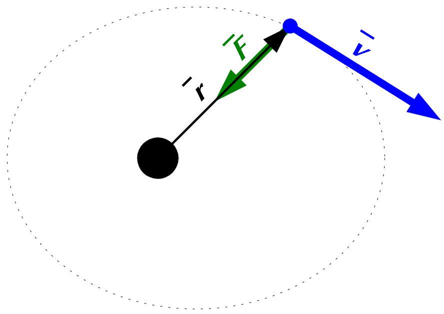
Solución: A

El momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudiar su variación, se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times m\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}$$



El primer sumando da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) porque la velocidad, $\overline{\boldsymbol{v}}$, y el momento lineal, $m\cdot\overline{\boldsymbol{v}}$, son paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}}\times m\cdot\overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}|\cdot m\cdot|\overline{\boldsymbol{v}}|\cdot \text{sen } 0 = 0$$

El segundo sumando también da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\overline{\boldsymbol{r}}\times\overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}|\cdot|\overline{\boldsymbol{F}}|\cdot \text{sen } 180° = 0$$

La derivada es cero.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

Las otras opciones:
B: Falsa. Una fuerza central es una fuerza conservativa.
El trabajo de una fuerza conservativa, cuando la partícula se desplaza desde un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial, E_p, de forma que el trabajo, W, de la fuerza conservativa es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

C. Falsa. Si la fuerza central es la fuerza resultante, por la 2.ª ley de Newton, varía el momento lineal:

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\,m\cdot\vec{v}}{\mathrm{d}t}\neq\vec{0}$$

2. Si la Tierra se contrae reduciendo su radio a la mitad y manteniendo la masa:
   A) La órbita alrededor del Sol será la mitad.
   B) El período de un péndulo será la mitad.
   C) El peso de los cuerpos será el doble.

(P.A.U. sep. 10)

Solución: B

El período, T, de un péndulo de longitud L, en un lugar donde la gravedad sea g, viene dado por la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M y radio R, sobre un objeto de masa m en su superficie, se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{R^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el objeto con el centro del planeta.
La aceleración de la gravedad es la fuerza sobre la unidad de masa:

$$g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M_T \cancel{m}}{R_T^2}}{\cancel{m}}=G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Si el radio de la Tierra fuera la mitad, manteniendo la masa, la aceleración, g de la gravedad en su superficie sería cuatro veces mayor.

$$g'=G\frac{M_T}{(R_T/2)^2}=4G\frac{M_T}{R_T^2}=4g$$

El período, T, de un péndulo en tal caso sería la mitad.

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}}=\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{T}{2}$$

Las otras opciones:
C: Como la gravedad sería cuatro veces mayor, el peso de los cuerpos sería cuatro (y no dos) veces mayor.
A: El período de revolución de la Tierra que sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor del Sol no depende del radio de la Tierra, ya que se puede considerar que se trata de una masa puntual.

3. Cuando se compara la fuerza eléctrica entre dos masas, con la gravitatoria entre dos masas (cargas y masas unitarias y a distancia unidad):
A) Ambas son siempre atractivas.
B) Son de un orden de magnitud semejante.
C) Las dos son conservativas.

(P.A.U. sep. 10)

Solución: C

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza cuando se desplaza una magnitud sensible (masa para las fuerzas gravitatorias, carga para las fuerzas eléctricas) entre dos puntos, es independiente del camino seguido, y solo depende de las posiciones inicial y final. En esos casos se puede definir una magnitud llamada energía potencial que depende, además de la magnitud sensible, únicamente de las posiciones inicial y final. Por tanto, el trabajo de la fuerza es la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1\to2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Es el caso de las fuerzas gravitatoria y eléctrica.

	Gravitatoria	***Eléctrica***
Fuerza	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F}_E=K\frac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$
Energía potencial	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$	$E_{pE}=K\frac{Q\cdot q}{r}$

Las otras opciones:
A. Falsa. La fuerza gravitatoria es siempre atractiva, pero la fuerza eléctrica es atractiva para cargas de distinto signo, pero repulsiva para cargas del mismo signo.
B. Falsa. Dado el valor tan diferente de las constantes ($K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻² y $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²), la fuerza entre masas o cargas unitarias separadas por la distancia unidad, será ≈ 10^{20} mayor en el caso de la fuerza eléctrica, aunque esta comparación no tenga mucho sentido.

4. Si una masa se mueve estando sometida solo a la acción de un campo gravitacional:
A) Aumenta su energía potencial.
B) Conserva su energía mecánica.
C) Disminuye su energía cinética.

(P.A.U. jun. 09)

Solución: B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo de la fuerza gravitatoria, cuando una masa se desplaza de un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial, E_p, de forma que el trabajo, W, de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1\rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{1\rightarrow 2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

5. El trabajo realizado por una fuerza conservativa:
   A) Disminuye la energía potencial.
   B) Disminuye la energía cinética.
   C) Aumenta la energía mecánica.

(P.A.U. jun. 08)

Solución: A

El trabajo que hace una fuerza conservativa entre dos puntos 1 y 2 es igual a la disminución de la energía potencial:

$$W_{1\rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Es el trabajo que hace la fuerza del campo.
Las masas se mueven en un campo gravitatorio en el sentido de los potenciales decrecientes, que es el sentido de la fuerza del campo, por lo que el trabajo es positivo.

6. En relación con la gravedad terrestre, una masa m:
   A) Pesa más en la superficie de la Tierra que a 100 km de altura.
   B) Pesa menos.
   C) Pesa igual.

(P.A.U. jun. 08)

Solución: A

El peso P de un objeto de masa m en la Tierra es la fuerza F con que la Tierra lo atrae, que viene dada por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$P = F = G\frac{M_T m}{r^2}$$

En la ecuación, G es la constante de la gravitación universal, M_T es la masa de la Tierra, y r es la distancia entre el objeto, supuesto puntual, y el centro de la Tierra.
Cuando el objeto se encuentra en la superficie de la Tierra, esa distancia r es el radio de la Tierra R_T. Cuando se encuentre a una altura h = 100 km, la distancia es mayor:

$$r = R_T + h > R_T$$

Por tanto, al ser mayor el denominador de la expresión, la fuerza peso será menor.

7. En el campo gravitatorio:
   A) El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria depende de la trayectoria.
   B) Las líneas de campo se pueden cortar.
   C) Se conserva la energía mecánica.

(P.A.U. sep. 06)

Solución: C

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo de la fuerza gravitatoria, cuando una masa se desplaza de un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial, E_p, de forma que el trabajo, W, de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{1\to 2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

8. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:
   A) Se conservan el momento angular y el momento lineal.
   B) Se conservan el momento lineal y el momento de la fuerza que los une.
   C) Varía el momento lineal y se conserva el angular.

(P.A.U. sep. 04)

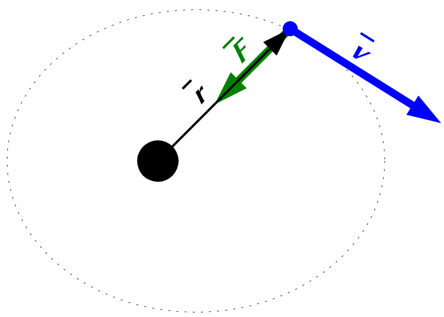
Solución: C

El momento angular, $\bar{\boldsymbol{L}}_O$, de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\bar{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\bar{\boldsymbol{L}}_O = \bar{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \bar{\boldsymbol{v}}$$

Para estudiar su variación, se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$$



El primer sumando da el vector $\bar{\mathbf{0}}$ (cero) porque la velocidad, $\bar{\boldsymbol{v}}$, y el momento lineal, $m \cdot \bar{\boldsymbol{v}}$, son paralelos.

$$|\bar{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \bar{\boldsymbol{v}}| = |\bar{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\bar{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0 = 0$$

El segundo sumando también da el vector $\bar{\mathbf{0}}$ porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición, $\bar{\boldsymbol{r}}$, con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\bar{\boldsymbol{r}} \times \bar{\boldsymbol{F}}| = |\bar{\boldsymbol{r}}| \cdot |\bar{\boldsymbol{F}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

La derivada es cero.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular, $\overline{L}_O$, respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.
El momento lineal: $\overline{p} = m \cdot \overline{v}$ no será constante, ya que el vector $\overline{v}$, que es tangente la trayectoria de la órbita del planeta, cambia de dirección.

Actualizado: 02/03/24

ACLARACIONES

Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p. ej. la velocidad de la luz: $3·10^8$ m/s cree que es 300 000 000,000000 000 000 000... m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar $3·10^8$ que 299 792 458 m/s).
Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con una incertidumbre desmedida. Así que cuando tomo un dato como $c = 3·10^8$ m/s y lo reescribo como:
Cifras significativas: 3
$c = 3{,}00·10^8$ m/s
Lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con una incertidumbre más pequeña que la que tendría en ese caso. ($3·10^8$ m/s tiene una sola cifra significativa, y una incertidumbre relativa del 30 %. Como las incertidumbres se suelen acumular a lo largo del cálculo, la incertidumbre final sería inadmisible. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM).
Se consultó al Copilot de Microsoft Edge y se tuvieron en cuenta algunas de sus respuestas en las cuestiones.

Sumario

Índice de pruebas P.A.U.