Gravitación

Método, aproximaciones y recomendaciones

◊ PROBLEMAS

● Satélites

1. El Sentinel-1 es un satélite artificial de órbita circular polar de la Agencia Espacial Europea dentro del Programa Copérnico destinado a la monitorización terrestre y de los océanos. Está situado a 693 km sobre la superficie terrestre.
   a) ¿Cuántas vueltas da a la Tierra cada día?
   b) ¿Qué velocidad hubo que proporcionarle en el lanzamiento para ponerlo en órbita?
   Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N m² kg⁻²; M(T) = 5,97·10²⁴ kg; R(T) = 6,37·10⁶ m. *(A.B.A.U. extr. 23)*
   Rta.: a) f = 14,6 día⁻¹; b) v = 8,29·10³ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Altura de la órbita	h = 693 km = 6,93·10⁵ m
Masa de la Tierra	M = 5,97·10²⁴ kg
Radio de la Tierra	R = 6,37·10⁶ m
Constante de la gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Vueltas que da a la Tierra cada día (frecuencia)	f
Velocidad desde la superficie para ponerlo en órbita	v
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, *m*, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

a) El radio de la órbita es:

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6{,}93 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Se calcula la velocidad orbital substituyendo los valores de los datos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ [kg]}}{7{,}06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 7{,}51 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{7{,}51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 5{,}91 \cdot 10^3 \text{ s} = 1{,}64 \text{ h}$$

La frecuencia es la inversa el período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}64 \text{ [h]}} \frac{24{,}0 \text{ [h]}}{1 \text{ [día]}} = 14{,}6 \text{ día}^{-1}$$

b) La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie de un planeta es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{suelo})$$

Se calcula la energía potencial en la órbita, en función de la masa del satélite:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ [kg]} \cdot m}{7{,}06 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = -5{,}64 \cdot 10^7 m \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética en la órbita, en función de la masa del satélite:

$$E_c = m \cdot (7{,}51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 2{,}82 \cdot 10^7 \; m \text{ J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.
La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y valle el incluso que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_c + E_p = 2{,}82 \cdot 10^7 \; m \text{ [J]} - 5{,}64 \cdot 10^7 \; m \text{ [J]} = -2{,}82 \cdot 10^7 \; m \text{ J}$$

En el suelo, la energía cinética es despreciable. La energía potencial en el suelo, en función de la masa del satélite, es:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,[\mathrm{kg}] \cdot m}{6{,}37 \cdot 10^6\,[\mathrm{m}]} = -6{,}25 \cdot 10^7\,m\ \mathrm{J}$$

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie, en función de la masa del satélite, es:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{suelo}) = -2{,}82{\cdot}10^7\ m\ [\mathrm{J}] - (-6{,}25{\cdot}10^7\ m\ [\mathrm{J}]) = 3{,}43{\cdot}10^7\ m\ \mathrm{J}$$

La velocidad que se le debe comunicar es:

$$v = \sqrt{\frac{2\,E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}43 \cdot 10^7\,m}{m}} = 8{,}29 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

2. Un pequeño satélite gira alrededor de la Luna orbitando en una circunferencia de 3 veces el radio de la Luna.
   a) Calcula el periodo del satélite y determina la energía mecánica total que posee el satélite en su órbita.
   b) Deduce y calcula la velocidad de escape desde la Luna.
   DATOS: $G = 6{,}67{\cdot}10^{-11}$ N m² kg⁻²; M(L) = $7{,}35{\cdot}10^{22}$ kg; R(L) = 1740 km; m(satélite) = 1500 kg.
   (A.B.A.U. ord. 23)
   Rta.: a) $T = 3{,}38{\cdot}10^4$ s = 9 h 24 min; $E = -7{,}0{\cdot}10^8$ J; b) v_e = 2,37 km/s (suelo) o 969 m/s desde la órbita.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la órbita	$r = 3{\cdot}1{,}74{\cdot}10^6$ m = $5{,}22{\cdot}10^6$ m
Masa de la Luna	$M = 7{,}35{\cdot}10^{22}$ kg
Radio de la Luna	R = 1740 km = $1{,}74{\cdot}10^6$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67{\cdot}10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$
Masa del satélite	m = 1500 kg =$1{,}50{\cdot}10^3$ kg
Incógnitas	
Período de la órbita	T
Energía mecánica del satélite	E
Velocidad de escape desde la Luna	v_e
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, *m*, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

a) Se calcula la velocidad orbital sustituyendo los valores de los datos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 7,35 \cdot 10^{22} [\text{kg}]}{5,22 \cdot 10^6 [\text{m}]}} = 969 \text{ m/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,75 \cdot 10^6 [\text{m}]}{969 [\text{m/s}]} = 3,38 \cdot 10^4 \text{ s} = 9 \text{ h } 24 \text{ min}$$

Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 7,25 \cdot 10^{22} [\text{kg}] \cdot 1,50 \cdot 10^3 [\text{kg}]}{969 [\text{m}]} = -1,41 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = 1,50 \cdot 10^3 \text{ [kg]} \cdot (969 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 7,04 \cdot 10^8 \text{ J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.
La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_c + E_p = 7,04 \cdot 10^8 \text{ [J]} - 1,41 \cdot 10^9 \text{ [J]} = -7,0 \cdot 10^8 \text{ J}$$

b) Si se entiende la pregunta como «velocidad de escape desde la superficie de la Luna».
La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa m situado en la superficie de un astro de masa M y radio R es:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula. La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$$

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2 \cdot kg^{-2}}] \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ [\mathrm{kg}]}{1{,}74 \cdot 10^{6}\ [\mathrm{m}]}} = 2{,}37 \cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s} = 2{,}37\ \mathrm{km/s}$$

Si, por el contrario, se desea saber la velocidad de escape desde la órbita:
Si la dirección de escape es perpendicular a la dirección de movimiento del satélite, solo hay que tener en cuenta su energía potencial, ya que la componente de su velocidad en el sentido de escape es nula.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1 = -E_{p1}$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despejando, la velocidad de escape de un satélite, en dirección perpendicular a la órbita, queda:

$$v_{e\,o\uparrow} = \sqrt{2\, G \frac{M}{r}}$$

Si la dirección de escape es paralela a la dirección de movimiento del satélite, hay que tener en cuenta su energía cinética.
La energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve con velocidad v, es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa m, que gira alrededor de un astro de masa M, en una órbita de radio r, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Donde G es la constante de la gravitación universal.
La energía mecánica de un cuerpo de masa m, que se encuentra en órbita de radio r alrededor de un astro de masa M, es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2, la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Si el sentido de escape es el mismo que el de avance del satélite, la energía necesaria sería:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\, m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2=0-\left(-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}\right)=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Despejando la velocidad de escape en el sentido de avance de un satélite en órbita, queda:

$$v_{e\,o\rightarrow}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Si el sentido de escape fuese el opuesto al de avance del satélite, lo que sería un desperdicio de energía, habría que comunicarle una velocidad doble de la que tenía en órbita, para hacerle alcanzar el mismo valor de la velocidad pero en sentido contrario, más esta velocidad adicional:

$$v_{e\,o\leftarrow}=\sqrt{\frac{3}{2}G\frac{M}{r}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, lo lógico es tomar la velocidad de escape en la dirección de avance de un satélite:

$$v_{e\,o}=\sqrt{G\frac{M}{r}}$$

$$v_{e\,o}=\sqrt{G\frac{M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\,[\text{kg}]}{5{,}22\cdot 10^{6}\,[\text{m}]}}=969\ \text{m/s}$$

3. Un satélite artificial tiene una masa de 200 kg y una velocidad constante de 7,00 km·s⁻¹.
   a) Calcula la altura a la que orbita.
   b) Si en ese momento se le suministra una energía igual a la energía cinética que ya tiene, calcula a qué distancia de la Tierra podría llegar.

   Datos: g = 9,81 m·s⁻²; R(T) = 6,37·10⁶ m. *(A.B.A.U. extr. 22)*

   Rta.: a) h = 1750 km; b) r = ∞.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.	v = 7,00 km/s = $7{,}00\cdot 10^3$ m/s
Radio de la Tierra	R = 6370 km = $6{,}37\cdot 10^6$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,80 m/s²
Incógnitas	
Altura de la órbita	h
A qué distancia podría llegar con una energía igual a la energía cinética	r_b
Otros símbolos	
Masa del satélite	m
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$

Energía cinética de una masa, *m*, que se mueve con una velocidad, *v*	$E_c = ½\ m · v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \dfrac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa *M* sobre un satélite de masa *m* que gira a su alrededor en una órbita de radio *r*, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, *G* es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, *v*, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio *r*, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, *m*, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left| \sum \vec{\boldsymbol{F}} \right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, *G*, o de la masa, *M*, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m · g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G · M = g_0 · R^2$$

a) Se despeja el radio de la órbita, en la expresión de la velocidad orbital, y se sustituye $G · M$ por $g_0 · R^2$:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}} \Rightarrow r=\frac{G\cdot M}{v^2}=\frac{g_0\cdot R^2}{v^2}=\frac{9{,}81\ [\mathrm{m\cdot s^{-2}}]\cdot(6{,}37\cdot10^6\ [\mathrm{m}])^2}{(7{,}00\cdot10^3\ [\mathrm{m/s}])^2}=8{,}12\cdot10^6\ \mathrm{m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra al radio de la órbita:

$$h = r - R = 8{,}12\cdot10^6\ [\mathrm{m}] - 6{,}37\cdot10^6\ [\mathrm{m}] = 1{,}75\cdot10^6\ \mathrm{m} = 1750\ \mathrm{km}$$

Análisis: Aunque no se puede prever un valor, la altura obtenida es positiva.

b) La energía mecánica de un satélite en órbita es igual a su energía cinética cambiada de signo.

$$E = -E_c$$

La energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve con velocidad v, es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = ½\ m\cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa m, que gira alrededor de un astro de masa M, en una órbita de radio r, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Donde G es la constante de la gravitación universal.
La energía mecánica de un cuerpo de masa m, que se encuentra en órbita de radio r alrededor de un astro de masa M, es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2, la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Al comunicarle una energía de igual valor al de su energía cinética, la energía que tendrá será cero. Con ella podrá alejarse de la Tierra a una distancia «infinita», puesto que en el infinito, la energía potencial es nula:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}=0\Rightarrow r=-G\frac{M\cdot m}{E_p}=-G\frac{M\cdot m}{0}=\infty$$

4. El período de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su correspondiente órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina:
   a) La relación entre los radios de dichas órbitas.
   b) La relación entre las aceleraciones de los dos planetas en sus respectivas órbitas.

   (A.B.A.U. ord. 22)

   Rta.: a) r_2 / r_1 = 5,2; b) a_2 / a_1 = 0,036.

Datos	***Cifras significativas: 2***
Período de Júpiter en su órbita alrededor del Sol	$T_2 = 12\ T_1$
Incógnitas	
Relación entre los radios de las órbitas de Júpiter y de la Tierra	r_2 / r_1
Relación entre las aceleraciones en sus respectivas órbitas.	a_2 / a_1

Datos	***Cifras significativas: 2***
Otros símbolos	
Período de la Tierra alrededor del Sol	T_1
Masa del Sol	M
Distancias de Júpiter (2) y de la Tierra (1) al Sol	r_2, r_1
Aceleraciones de Júpiter (2) y de la Tierra (1) en sus respectivas órbitas.	a_2, a_1
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\dfrac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\dfrac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N=\dfrac{v^2}{r}$

Solución:

La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos, T, de los planetas en su movimiento alrededor del Sol, son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas.
Si se hace la aproximación de que las órbitas son prácticamente circulares de radio r, la expresión matemática de esta ley sería:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Esto se puede demostrar para órbitas circulares.
La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\vec{F}=\vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{F}\right|=m\cdot|\vec{a}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2=\frac{G\cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2\cdot r^3=G\cdot M\cdot T^2$$

Para dos planetas, 1 y 2, se dividen las expresiones correspondientes:

$$\frac{\cancel{4\pi^2}\cdot r_1^3}{\cancel{4\pi^2}\cdot r_2^3}=\frac{\cancel{G\cdot M}\cdot T_1^2}{\cancel{G\cdot M}\cdot T_2^2}$$

a) Se sustituye el dato:

$$\frac{r_2^3}{r_1^3}=\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{(12\,T_1)^2}{T_1^2}=\frac{144\,\cancel{T_1^2}}{\cancel{T_1^2}}=144$$

$$\frac{r_2}{r_1}=\sqrt[3]{144}=5{,}2$$

Análisis: El radio de la órbita de Júpiter es mayor que el de la Tierra, como era de esperar.

b) De la ley de la gravitación universal y de la 2.ª ley de dinámica, ambas de Newton, se puede establecer una relación entre la aceleración, a, de un planeta en su órbita, y su distancia, r, al Sol.

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}=m\cdot a$$

Se despeja la aceleración:

$$a=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M\,\cancel{m}}{r^2}}{\cancel{m}}=\frac{G\,M}{r^2}$$

Se dividen las expresiones de Júpiter (2) y de la Tierra (1):

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{\cancel{G\,M}}{r_2^2}}{\frac{\cancel{G\,M}}{r_1^2}}=\frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Se sustituye el resultado del apartado anterior:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{1}{5{,}2^2}=0{,}036$$

5. En 1969 la nave Apolo 11 orbitó alrededor de la Luna a una distancia media del centro de la Luna de 1850 km. Si la masa de la Luna es de $7{,}36\cdot 10^{22}$ kg y suponiendo que la órbita fue circular, calcula:

a) La velocidad orbital del Apolo 11.
b) El período con que la nave describe la órbita.
Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(A.B.A.U. extr. 21)*
Rta.: a) v = 1630 m/s; b) $T = 7{,}15\cdot10^3$ s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de la Luna	$M = 7{,}36\cdot10^{22}$ kg
Radio de la órbita	r = 1850 km = $1{,}85\cdot10^6$ m
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Valor de la velocidad lineal del satélite	v
Período de la órbita	T
Otros símbolos	
Masa del satélite	m
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\dfrac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \dfrac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\vec{F}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\vec{u}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{F}\right| = m\cdot|\vec{a}|$$

$$F_G = m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

a) Se calcula la velocidad orbital sustituyendo los valores de los datos:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 7{,}36\cdot 10^{22}\,[\mathrm{kg}]}{1{,}85\cdot 10^{6}\,[\mathrm{m}]}}=1{,}63\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=1{,}63\ \mathrm{km/s}$$

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}85\cdot 10^6\,[\mathrm{m}]}{1{,}63\cdot 10^3\,[\mathrm{m/s}]}=7{,}15\cdot 10^3\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}\ 59\ \mathrm{min}$$

6. La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico de 4100 km de radio es 7,2 m·s⁻². Calcula:
   a) La masa del planeta.
   b) La energía mínima necesaria que hay que comunicar a un minisatélite de 3 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y situarlo a 1000 km de altura sobre la misma, en una órbita circular alrededor del planeta.
   Dato: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m² ·kg⁻². *(A.B.A.U. extr. 20)*
   Rta.: a) M = 1,8·10²⁴ kg; b) ΔE = 5,30·10⁷ J.

Datos	**Cifras significativas: 3**
Radio del planeta	R = 4100 km = 4,10·10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie del planeta	g_0 = 7,20 m/s²
Masa del satélite	m = 3,00 kg
Altura de la órbita	h = 1000 km = 1,00·10⁶ m
Constante de la gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Masa del planeta	M
Energía que hay que comunicarle desde la superficie del planeta	ΔE
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Peso de un objeto de masa m en la superficie de un planeta cuya aceleración de la gravedad es g_0	$P=m\cdot g_0$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c=½\,m\cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E=E_c+E_p$

Solución:

a) En la superficie del planeta, el peso de un cuerpo, $m\cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\,g_0=G\frac{M\cdot\cancel{m}}{R^2}$$

Se despeja la masa del planeta:

$$M=\frac{g_0\cdot R^2}{G}=\frac{7{,}20\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(4{,}10\cdot10^6\ [\mathrm{m}])^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]}=1{,}81\cdot10^{24}\ \mathrm{kg}$$

b) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La expresión de la energía potencial es:

$$E_\mathrm{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Se suponen que el satélite está en reposo en la superficie del planeta, por lo que solo tiene energía potencial. Se calcula esta energía potencial:

$$E_\mathrm{p}(\text{suelo})=-G\frac{M\cdot m}{R}=-6{,}67\cdot10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot\frac{1{,}81\cdot10^{24}\ [\mathrm{kg}]\cdot3{,}00\ [\mathrm{kg}]}{4{,}10\cdot10^6\ [\mathrm{m}]}=-8{,}86\cdot10^7\ \mathrm{J}$$

Se calcula el radio de la órbita circular sumando la altura de 1000 km al radio del planeta:

$$r = R + h = 4{,}10\cdot10^6\ [\mathrm{m}] + 1{,}00\cdot10^6\ [\mathrm{m}] = 5{,}10\cdot10^6\ \mathrm{m}$$

Se calcula la energía potencial en la órbita:

$$E_\mathrm{p}(\text{órbita})=-G\frac{M\cdot m}{r}=-6{,}67\cdot10^{-11}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot\frac{1{,}81\cdot10^{24}\ [\mathrm{kg}]\cdot3{,}00\ [\mathrm{kg}]}{5{,}10\cdot10^6\ [\mathrm{m}]}=-7{,}12\cdot10^7\ \mathrm{J}$$

Para calcular la energía cinética en la órbita se necesita calcular la velocidad orbital.
La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_\mathrm{r}$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_\mathrm{G}=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme.
La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_\mathrm{N}=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum\vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_\mathrm{G}=m\cdot a_\mathrm{N}$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

Se sustituyen los valores:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 1{,}81\cdot 10^{24}\ [\text{kg}]}{5{,}10\cdot 10^6\ [\text{m}]}}=4{,}87\cdot 10^3\ \text{m/s}=4{,}87\ \text{km/s}$$

Se calcula la energía cinética en órbita:

$$E_c(\text{órbita}) = m\cdot v^2 / 2 = [3{,}00\ [\text{kg}]\cdot (4{,}87\cdot 10^3\ [\text{m/s}])^2] / 2 = 3{,}56\cdot 10^7\ \text{J}$$

La energía mecánica es la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E(\text{órbita}) = E_c(\text{órbita}) + E_p(\text{órbita}) = 3{,}56\cdot 10^7\ [\text{J}] + (-7{,}12\cdot 10^7\ [\text{J}]) = -3{,}56\cdot 10^7\ \text{J}$$

Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo $G\cdot M / r$ por v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\cdot v^2-G\frac{M\cdot m}{r}=\frac{1}{2}m\cdot v^2-m\cdot v^2=-\frac{1}{2}m\cdot v^2=-E_c$$

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie del planeta es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{suelo}) = -3{,}56\cdot 10^7\ [\text{J}] - (-8{,}86\cdot 10^7\ [\text{J}]) = 5{,}30\cdot 10^7\ \text{J}$$

7. Un satélite artificial describe órbitas circulares alrededor de la Tierra a una altura de 350 km respecto a la superficie terrestre. Calcula:
   a) La velocidad orbital del satélite.
   b) Su período de revolución.
   c) Compara el valor de su aceleración centrípeta con el valor de la intensidad del campo gravitatorio g a esa distancia de la Tierra. ¿Qué consecuencias se pueden extraer de este resultado?
   Datos: R(T) = 6,37·10⁶ m; g_0 = 9,81 m/s². *(A.B.A.U. ord. 19)*
   Rta.: a) v = 7,70 km/s m; b) T = 1 h 31 min.; c) g = 8,81 m/s².

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37\cdot 10^6$ m
Altura de la órbita	h = 350 km = $3{,}50\cdot 10^5$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}81$ m/s²
Incógnitas	
Velocidad orbital del satélite	v
Período de revolución	T
Aceleración centrípeta	a
Intensidad del campo gravitatorio a esa distancia de la Tierra	g_h
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Valor de la velocidad del satélite en la órbita alrededor de la Tierra	v
Constante de la gravitación universal	G
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N=\frac{v^2}{r}$
Intensidad del campo gravitatorio terrestre a una distancia r del centro	$g=\frac{F_G}{m}=G\frac{M}{r^2}$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

a) Se calcula el radio de la órbita:

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 3{,}50 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 6{,}72 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Se calcula la velocidad orbital, sustituyendo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0\cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9,81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6,37\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{6,72\cdot 10^6\ [\text{m}]}}=7,70\cdot 10^3\ \text{m/s}$$

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3,14\cdot 6,72\cdot 10^7\ [\text{m}]}{7,70\cdot 10^3\ [\text{m/s}]}=5,49\cdot 10^3\ \text{s}=1\ \text{h}\ 31\ \text{min}$$

c) La intensidad del campo gravitatorio se calcula sustituyendo $G\cdot M$ por $g_0\cdot R^2$.

$$g_\text{h}=\frac{F_\text{G}}{m}=G\frac{M}{r^2}=\frac{g_0\cdot R^2}{r^2}=\frac{9,81\ [\text{m/s}^2]\cdot(6,37\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{(6,72\cdot 10^6\ [\text{m}])^2}=8,81\ \text{m/s}^2$$

Se calcula la aceleración centrípeta:

$$a_\text{N}=\frac{v^2}{r}=\frac{(7,70\cdot 10^3\ [\text{m/s}])^2}{6,72\cdot 10^6\ [\text{m}]}=8,81\ \text{m/s}^2$$

Análisis: El resultado tiene que ser el mismo porque la velocidad se calcula suponiendo que la única fuerza sobre el satélite es la fuerza gravitatoria y, por la 2.ª ley de Newton, igualando la fuerza gravitatoria al producto masa por aceleración centrípeta.

8. Un satélite GPS describe órbitas circulares alrededor de la Tierra, dando dos vueltas a la Tierra cada 24 h. Calcula:
   a) La altura de su órbita sobre la superficie terrestre.
   b) La energía mecánica.
   c) El tiempo que tardaría en dar una vuelta a la Tierra si lo hacemos orbitar a una altura doble.
   Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; M_T = 5,98·10²⁴ kg; R_T = 6,37·10⁶ m; masa del satélite = 150 kg.
   (A.B.A.U. extr. 17)

   Rta.: a) h = 2,02·10⁷ m; b) E = −1,12·10⁹ J; c) T_c = 28 h.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia de la órbita	f = 2 vueltas/24 h
Radio de la Tierra	R = 6,37·10⁶ m
Masa del satélite	m = 150 kg
Masa de la Tierra	M = 5,98·10²⁴ kg
Constante de la gravitación universal	G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Altura de la órbita	h
Energía mecánica	E
El período, si la altura fuera el doble	T_c
Otros símbolos	
Radio de la órbita original	r
Valor de la velocidad del satélite en la órbita original	v
Nuevo radio de la órbita	r_c
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_\text{G}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\vec{F}=m\cdot\vec{a}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_\text{N}=\frac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_\text{c}=½\ m\cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_\text{p}=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E=E_\text{c}+E_\text{p}$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Se despeja el radio de la órbita, r, y se sustituyen valores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

La frecuencia es la inversa del período. El período orbital se calcula a partir de la frecuencia:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{24\text{ h}}{2}=12\text{ h}=4{,}32\cdot 10^{4}\text{ s}$$

Se calcula el radio de la órbita:

$$r=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^{2}}{4\pi^{2}}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^{2}\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}](4{,}32\cdot 10^{4}\,[\text{s}])^{2}}{4\cdot 3{,}14^{2}}}=2{,}66\cdot 10^{7}\text{ m}$$

Se calcula la altura restando el radio de la Tierra al radio de la órbita:

$$h = r - R = 2{,}66\cdot 10^{7} - 6{,}37\cdot 10^{6} = 2{,}02\cdot 10^{7}\text{ m}$$

Análisis: Aunque no se puede prever un valor, la altura obtenida es positiva.

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_{\text{p}}=-G\frac{M\cdot m}{r}=-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^{2}\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}]\cdot 150\,[\text{kg}]}{2{,}66\cdot 10^{7}\,[\text{m}]}=-2{,}25\cdot 10^{9}\text{ J}$$

Se calcula la energía cinética sustituyendo v^2 por $G\,M\,/\,r$:

$$E_{\text{c}}=\frac{1}{2}m\,v^{2}=\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}=1{,}12\cdot 10^{9}\text{ J}$$

La energía cinética es la mitad y de signo contrario que la energía potencial.
La energía (mecánica) total es la suma de las energías cinética y potencial, y vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

$$E = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = 1{,}12\cdot 10^{9}\,[\text{J}] - 2{,}25\cdot 10^{9}\,[\text{J}] = -1{,}12\cdot 10^{9}\text{ J}$$

c) Si la altura fuera el doble, el nuevo radio de la órbita valdría:

$$r_{c} = R + 2\,h = 6{,}37\cdot 10^{6} + 2\cdot 2{,}0\cdot 10^{7} = 4{,}7\cdot 10^{7}\text{ m}$$

La velocidad del satélite valdría:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,[\text{N·m}^{2}\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\,[\text{kg}]}{4{,}7\cdot 10^{7}\,[\text{m}]}}=2{,}9\cdot 10^{3}\text{ m/s}=2{,}9\text{ km/s}$$

El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 4{,}7\cdot 10^{7}\,[\text{m}]}{2{,}9\cdot 10^{3}\,[\text{m/s}]}=1{,}0\cdot 10^{5}\text{ s}=28\text{ h}$$

Análisis: El período de un satélite aumenta con la altura. El valor obtenido es mayor que el de la altura inicial.

9. Un astronauta está en el interior de una nave espacial que describe una órbita circular de radio 2 R_T. Calcula:
   a) La velocidad orbital de la nave.
   b) La aceleración de la gravedad en la órbita de la nave.
   c) Si en un instante dado, pasa al lado de la nave espacial un objeto de 60 kg en dirección a la Tierra con una velocidad de 40 m·s⁻¹, halla la velocidad del objeto al llegar a la superficie terrestre.

   Datos: R_T = 6370 km; g = 9,81 m·s⁻². *(A.B.A.U. ord. 17)*

   Rta.: a) v = 5,59 km/s; b) g_h = 2,45 m/s²; c) v_2 = 7,91·10³ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la órbita	$r = 2\cdot R$
Radio de la Tierra	R = 6370 km = 6,37·10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Masa del objeto	m = 60,0 kg
Velocidad del objeto al pasar junto a la nave	v_0 = 40,0 m/s
Incógnitas	

Valor de la velocidad de la nave espacial en su órbita alrededor de la Tierra	v
Aceleración de la gravedad en la órbita de la nave.	g_h
Valor de la velocidad del objeto al llegar a la superficie terrestre.	v_2
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \dfrac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad lineal en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \dfrac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal de un objeto que se mueve con una velocidad lineal, v, en una trayectoria circular de radio r	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \dfrac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m}\, g_0=G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

a) Se calcula la velocidad orbital, sustituyendo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{2 \cdot R}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R}{2}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{2}}=5{,}59 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=5{,}59\ \mathrm{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado de* 5,59 km/s *está de acuerdo con esta suposición.*

b) Se calcula la aceleración de la gravedad en la órbita de la nave a partir de la 2.ª ley de Newton, substituyendo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$, y el radio, r, de la órbita, por 2 R:

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}} \Rightarrow F_G = m \cdot g \Rightarrow \quad g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M\,\cancel{m}}{r^2}}{\cancel{m}}=\frac{G\,M}{r^2}=\frac{g_0 \cdot R^2}{(2 \cdot R)^2}=\frac{g_0}{4}=\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{4}=2{,}45\ \mathrm{m/s^2}$$

c) Como la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, la energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, se conserva.
Se calcula la energía potencial del objeto cuando pasa junto a la nave espacial:

$$E_{p1}=-G\frac{M \cdot m}{r}=-\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{2 \cdot R}=-\frac{g_0 \cdot R \cdot m}{2}=-\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] \cdot 60{,}0\ [\mathrm{kg}]}{2}=-1{,}87 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Se calcula su energía cinética:

$$E_{c\,1} = m \cdot v_0^2 / 2 = 60{,}0\ [\mathrm{kg}] \cdot (40{,}0\ [\mathrm{m/s}])^2 / 2 = 4{,}80 \cdot 10^4\ \mathrm{J}$$

La energía mecánica del objeto cuando pasa junto a la nave espacial es la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E = E_{c\,1} + E_{p\,1} = 4{,}80 \cdot 10^4\ [\mathrm{J}] + (-1{,}87 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = -1{,}87 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Se calcula la energía potencial del objeto cuando llega a la superficie de la Tierra:

$$E_{p2}=-G\frac{M \cdot m}{r}=--\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R}=-g_0 \cdot R \cdot m=-9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] \cdot 60{,}0\ [\mathrm{kg}]=-3{,}75 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Se calcula la energía cinética del objeto cuando llega a la superficie de la Tierra aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_{c\,2} = E - E_{p\,2} = (-1{,}87 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) - (-3{,}75 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}]) = 1{,}87 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Se calcula la velocidad del objeto al llegar a la superficie de la Tierra a partir de su energía cinética:

$$E_c = ½\, m \cdot v^2 \Rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{2 \cdot E_{c2}}{m}}=\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}87 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}]}{60{,}0\ [\mathrm{kg}]}}=7{,}91 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$$

● Campo gravitatorio

1. La masa del planeta Marte es 0,107 veces la masa de la Tierra y su radio es 0,533 veces el radio de la Tierra. Calcula:

a) El tiempo que tarda un objeto en llegar a la superficie de Marte si se deja caer desde una altura de 50 m.
b) La velocidad de escape de ese objeto desde la superficie del planeta.
Datos: g = 9,81 m·s⁻²; R_T = 6,37·10⁶ m. *(A.B.A.U. ord. 21)*
Rta.: a) t = 5,21 s; b) v_e = 5,01·10³ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa de Marte	M_M = 0,107 M_T
Radio de Marte	R_M = 0,533 R_T
Altura desde la que se deja caer	h = 50,0 m
Aceleración de la gravedad en la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Radio de la Tierra	R_T = 6,37·10⁶ m
Incógnitas	
Tiempo que tarda en caer a la superficie de Marte desde una altura de 50 m.	t
Velocidad de escape en Marte	v_e
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal, en módulos. (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Peso de un objeto de masa m en la superficie de un planeta cuya aceleración de la gravedad es g_0	$P = m \cdot g_0$
Ecuación de la caída libre (movimiento uniformemente acelerado)	$h = v_0 \cdot t + ½\, g \cdot t^2$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Hay que calcular el valor de la gravedad en la superficie de Marte.
El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m \cdot g_T = G\frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto cerca de la superficie de Marte es la fuerza con la que a Marte lo atrae:

$$m \cdot g_M = G\frac{M_M \cdot m}{R_M^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_M}{\cancel{m} \cdot g_T}=\frac{\cancel{G}\frac{M_M \cdot \cancel{m}}{R_M^2}}{\cancel{G}\frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_M}{g_T}=\frac{M_M/M_T}{(R_M/R_T)^2}=\frac{0{,}107}{0{,}533^2}=0{,}375$$

Despejando:

$$g_M = 3{,}69 \text{ m/s}^2$$

Análisis: El resultado es razonable, ya que sabemos que la gravedad en la superficie de Marte es unas 3 *veces menor que en la superficie de la Tierra.*

Se calcula el tiempo de la ecuación de la caída libre, sin velocidad inicial:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow \quad t=\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_M}}=\sqrt{\frac{2 \cdot 50{,}0}{3{,}69}}=5{,}21 \text{ s}$$

b)
La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa m situado en la superficie de un astro de masa M y radio R es:

$$E_p=-G\frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula.
La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s=(E_c+E_p)_s=0+\left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right)=-G\frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2=0-\left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right)=G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e=\sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

Cuando no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal, G, o de la masa, M, del astro, pero sí del valor de la aceleración de la gravedad en su superficie, se puede encontrar una relación entre ellas usando que, en la superficie del astro, el peso de un cuerpo, $m \cdot g_0$, es igual a la fuerza gravitatoria:

$$\cancel{m} g_0=G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa el radio del astro y g_0 el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.
La relación es:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Hay que calcular también el radio de Marte:

$$R_M = 0{,}533 \ R_T = 0{,}533 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 3{,}40 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Se calcula la velocidad de escape sustituyendo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v_e=\sqrt{\frac{2 g_0 \cdot R_M^2}{R_M}}=\sqrt{2 g_0 \cdot R_M}=\sqrt{2 \cdot 3{,}69 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (3{,}40 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}=5{,}01 \cdot 10^3 \text{ m/s}=5{,}01 \text{ km/s}$$

2. Un meteorito de 150 kg de masa se acerca a la Tierra y alcanza una velocidad de 30 km·s⁻¹ cuando está a una altura sobre la superficie de la Tierra igual a 6 veces el radio de esta. Calcula:
   a) Su peso a esa altura.
   b) Su energía mecánica a esa altura.
   Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m² ·kg⁻²; M(T) = $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; R(T) = $6{,}37 \cdot 10^6$ m. *(A.B.A.U. ord. 20)*

Rta.: a) P_h = 30,1 N; b) E = 6,61·10¹⁰ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Radio de la Tierra	$R = 6{,}37·10^6$ m
Masa de la Tierra	$M = 5{,}98·10^{24}$ kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Masa del meteorito	m = 150 kg
Velocidad del meteorito	$v = 30{,}0$ km·s⁻¹ = $3{,}00·10^4$ m/s
Altura	$h = 6\ R = 3{,}82·10^7$ m
Incógnitas	
Peso del meteorito a esa altura = fuerza gravitatoria que actúa sobre él	P_h
Energía mecánica del meteorito a esa altura	E
Otros símbolos	
Radio de la órbita	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal, en módulos. (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G = G\dfrac{M\ m}{r^2}$
Energía cinética de una masa, m, que se mueve con una velocidad, v	$E_c = ½\ m · v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G\dfrac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Se calcula la distancia del meteorito con la Tierra:

$$r = R + h = R + 6\ R = 7\ R = 7 \cdot 6{,}37·10^6\ [\text{m}] = 4{,}46·10^7\ \text{m}$$

Se calcula el peso, que es la fuerza gravitatoria:

$$P_h = F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ [\text{kg}] \cdot 150\ [\text{kg}]}{(4{,}46 \cdot 10^7\ [\text{m}])^2} = 30{,}1\ \text{N}$$

b) Se calcula la energía potencial:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ [\text{kg}] \cdot 150\ [\text{kg}]}{4{,}46 \cdot 10^7\ [\text{m}]} = -1{,}34 \cdot 10^9\ \text{J}$$

Se calcula la energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 150\ [\text{kg}] \cdot (3{,}00·10^4\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 6{,}75·10^{10}\ \text{J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = 6{,}75·10^{10}\ [\text{J}] + (-1{,}34·10^9\ [\text{J}]) = 6{,}61·10^{10}\ \text{J}$$

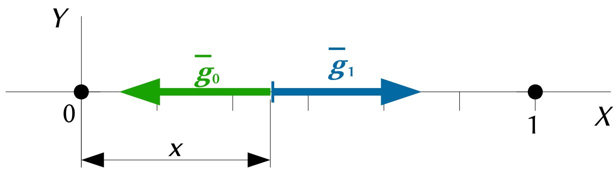
● Masas puntuales

1. Considera dos masas de 2 kg y 4 kg fijas sobre el eje X en el origen y a x = 6 m, respectivamente. Calcula:
   a) Las coordenadas de un punto en el que el campo gravitatorio resultante valga cero.
   b) El potencial gravitatorio en x = 2 m.
   c) El trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio para llevar una masa de 6 kg desde ese punto hasta el infinito. Interpreta el signo del resultado.
   Dato: $G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(A.B.A.U. extr. 19)*
   Rta.: a) x = 2,5 m; b) $V = -1{,}3·10^{-10}$ J/kg; c) $W = -8{,}0·10^{-10}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa en el origen	M_0 = 2,00 kg
Masa en el eje X	M_1 = 4,00 kg
Coordenada x de la masa en el origen	x_0 = 0 m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Coordenada x de la masa en el eje X	$x_1 = 6{,}00$ m
Coordenada x para calcular el potencial	$x_2 = 2{,}00$ m
Masa que se lleva al infinito	$m = 6{,}00$ kg
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Coordenadas de un punto en el que el campo gravitatorio resultante valga cero	x, y
Potencial gravitatorio en $x = 2$ m	V_2
Trabajo de la fuerza del campo para llevar 6 kg desde $x = 2$ m hasta el infinito	W
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce cada masa puntual sobre cada una de las otras)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
Intensidad del campo gravitatorio que ejerce una masa M puntual en un punto a una distancia r	$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$
Potencial gravitatorio en un punto debido a una masa M que dista r del punto	$V = -G \frac{M}{r}$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = m \cdot V = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Trabajo del campo cuando se desplaza una masa desde el punto 1 al punto 2	$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$

Solución:



a) El punto deberá estar en el eje X entre las dos masas.
Su coordenada y será $y = 0$.
El principio de superposición dice que la intensidad de campo gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma vectorial de los campos producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.
Para determinar el campo en un punto, se calculan los campos creados en ese punto por cada masa, y luego se suman los vectores.
La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas puntuales o esféricas, M y m, viene dada por la ley de la gravitación de Newton. G es la constante de la gravitación universal y $\bar{u}_r$ el vector unitario en la línea que une las masas.

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

El campo gravitatorio en un punto situado a una distancia, r, de una masa, M, puntual es la fuerza sobre la unidad de masa situada en ese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \vec{u}_r}{\cancel{m}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

Para calcular su coordenada x. se escriben las expresiones de los campos gravitatorios creados en ese punto por las masas y se aplica la condición de que el campo resultante es nulo.
El campo gravitatorio en ese punto creado por la masa situada en el origen es:

$$\vec{g}_0 = -G \frac{M_0}{r_0^2} \vec{u}_r = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{2{,}00 \text{ [kg]}}{x^2} \vec{\mathbf{i}} = \frac{-1{,}33 \cdot 10^{-10}}{x^2} \vec{\mathbf{i}} \text{ m/s}^2$$

El campo gravitatorio en ese punto creado por la masa situada en $x_1 = 6$ [m] es:

$$\vec{g}_1 = -G \frac{M_1}{r_1^2} \vec{u}_r = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{4{,}00 \text{ [kg]}}{(6{,}00 - x)^2} (-\vec{\mathbf{i}}) = \frac{2{,}67 \cdot 10^{-10}}{(6{,}00 - x)^2} \vec{\mathbf{i}} \text{ m/s}^2$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio es la suma vectorial de los dos campos.

$$\overline{\mathbf{g}} = \overline{\mathbf{g}}_0 + \overline{\mathbf{g}}_1 = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\frac{-1{,}33\cdot 10^{-10}}{x^2}+\frac{2{,}67\cdot 10^{-10}}{(6{,}00-x)^2}=0$$

$$\frac{(6{,}00-x)^2}{x^2}=\frac{2{,}67\cdot 10^{-10}}{1{,}33\cdot 10^{-10}}=2{,}00$$

$$6{,}00 - x = \pm\sqrt{2{,}00}\; x$$

$$x=\frac{6{,}00}{1+\sqrt{2{,}00}}=2{,}48\text{ m}$$

Análisis: La solución es aceptable, puesto que se encuentra entre las dos masas. La otra solución, $x=\frac{6{,}00}{1-\sqrt{2{,}00}}=-14{,}5\text{ m}$ *estaría en un punto en el que ambos campos serían del mismo sentido y no se anularían.*

El potencial gravitatorio en un punto, debido a la presencia de varias masas, es la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada masa, como si el resto de las masas no estuviese presente.

Para determinar el potencial gravitatorio en un punto, se calculan los potenciales creados en ese punto por cada masa, y luego se suman.

La ecuación del potencial gravitatorio en un punto situado a una distancia, *r*, de una masa puntual, *M*, es:

$$V=-G\frac{M}{r}$$

G es la constante de gravitación universal.

b) Se calcula el potencial gravitatorio en el punto x = 2 [m] creado por la masa situada en el origen:

$$V_0=-G\frac{M_0}{r_0}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{2{,}00\ [\text{kg}]}{2{,}00\ [\text{m}]}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{J/kg}$$

Se calcula el potencial gravitatorio en el punto x = 2 [m] creado por la masa situada en el punto x = 6 [m]:

$$V_1=-G\frac{M_1}{r_1}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\frac{4{,}00\ [\text{kg}]}{6{,}00-2{,}00\ [\text{m}]}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{J/kg}$$

El potencial gravitatorio es la suma.

$$V = V_0 + V_1 =(-6{,}67\cdot10^{-11}\ [\text{J/kg}]) + (-6{,}67\cdot10^{-11}\ [\text{J/kg}])= -1{,}33\cdot10^{-10}\ \text{J/kg}$$

El campo gravitatorio es un campo conservativo, porque el trabajo que realiza la fuerza del campo, cuando una masa se mueve entre dos puntos, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una función escalar llamada energía potencial, E_p, asociada al campo vectorial de fuerzas, de modo que el trabajo realizado por la fuerza del campo al mover una masa entre dos puntos es igual a la variación de la energía potencial entre esos dos puntos, cambiada de signo.

$$W = -\Delta E_p$$

También se define otra magnitud escalar, llamada potencial eléctrico, que es igual a la energía potencial de la unidad de masa.

$$V=\frac{E_p}{m}$$

El trabajo realizado por la fuerza del campo, cuando una masa mueve del punto A al punto B, es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = (E_{pA} - E_{pB}) = m \cdot V_A - m \cdot V_B = m\,(V_A - V_B)$$

c) Por definición, la energía potencial (y el potencial) en el infinito es nula, por lo que el trabajo de la resultante de las fuerzas gravitatorias cuando se lleva la masa en x = 2 [m] hasta el infinito es:

$$W_{2\to\infty} = -\Delta E_p = -(E_{p\,\infty} - E_{p\,2}) = E_{p\,2} - E_{p\,\infty} = E_{p\,2} = m \cdot V_2 = 6{,}00\ [\text{kg}] \cdot (-1{,}33\cdot10^{-10}\ [\text{J/kg}]) = -8{,}00\cdot10^{-10}\ \text{J}$$

El trabajo de las fuerzas gravitatorias es negativo, (la fuerza del campo se oponen al desplazamiento hacia el infinito) y el trabajo deberá hacerlo alguna fuerza externa.

◊ CUESTIONES

● Satélites.

1. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. El trabajo que realiza la fuerza de la gravedad sobre el satélite a lo largo de media órbita es:
A) Positivo.
B) Negativo.
C) Nulo.

(A.B.A.U. ord. 23)

Solución: C

El trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es igual al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento del cuerpo:

$$W = \overline{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta \overline{\boldsymbol{r}}$$

La fuerza gravitatoria es una fuerza central que actúa siempre en la dirección del centro de la Tierra, mientras que el desplazamiento del satélite es tangencial a su órbita. Como la órbita es circular, la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares entre sí en todo momento.
Dado que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre el satélite a lo largo de cualquier trayectoria, por ejemplo media órbita, es cero.

2. Dos satélites artificiales describen órbitas circulares alrededor de un planeta de radio R, siendo los radios de sus órbitas respectivas 1,050 R y 1,512 R. La relación entre sus velocidades de giro es:
A) 1,2
B) 2,07
C) 4,4

(A.B.A.U. ord. 21)

Solución: A

La velocidad de un satélite que gira a una distancia, r, alrededor de un astro de masa M, es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad lineal de un satélite en una órbita es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita.

$$v_1 \cdot \sqrt{r_1} = v_2 \cdot \sqrt{r_2} = \sqrt{G \cdot M} = \text{constante}$$

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}=\sqrt{\frac{1{,}512 \cdot R}{1{,}050\, R}}=1{,}2$$

Como el radio de la órbita 1 es menor que el de la órbita 2, la velocidad del satélite en la órbita 1 será mayor.

3. Un satélite gira alrededor de un planeta en una trayectoria elíptica. ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?:
A) El momento angular.
B) El momento lineal.
C) La energía potencial.

(A.B.A.U. extr. 20)

Solución: A

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el planeta sobre un satélite tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del satélite colocando el origen de coordenadas en el planeta.
El momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

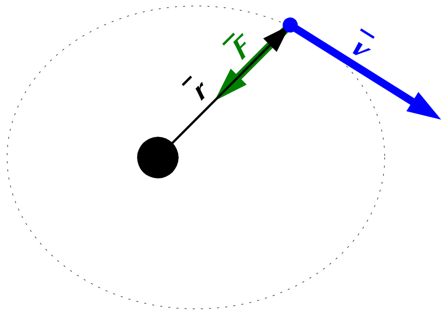
$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudiar su variación, se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mathrm{d}(m\cdot\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$$

El primer sumando da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ (cero) porque la velocidad, $\overline{\boldsymbol{v}}$, y el momento lineal, $m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$, son paralelos.

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } 0 = 0$$



El segundo sumando también da el vector $\overline{\mathbf{0}}$ porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición, $\overline{\boldsymbol{r}}$, con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos de sentido contrario.

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \text{sen } 180° = 0$$

La derivada es cero.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular, $\overline{\boldsymbol{L}}_O$, respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

Las otras opciones:
B. Falsa. El momento lineal, $\overline{\boldsymbol{p}}$, de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$, vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Como el momento angular es constante, al variar la distancia, $\overline{\boldsymbol{r}}$, del satélite al planeta, también variará su velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$. Además, la dirección cambia la medida que el satélite se desplaza alrededor del planeta.
C. Falsa.
La energía potencial gravitatoria, tomando cómo origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del planeta), m es la masa del objeto que gira a su alrededor (el satélite), r la distancia entre ambos cuerpos y G la constante de la gravitación universal.
En una órbita elíptica, con el planeta situado en uno de los focos, la distancia del satélite al planeta no es constante. Por lo tanto, la energía potencial tampoco es constante.

4. La expresión que relaciona la energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular alrededor de un planeta y su energía potencial es:
A) $E_m = -E_p$
B) $E_m = -½\ E_p$
c) $E_m = ½\ E_p$

(A.B.A.U. extr. 19)

Solución: C

La energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve con velocidad v, es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.

$$E_c = ½\ m \cdot v^2$$

La energía potencial gravitatoria de un satélite de masa m, que gira alrededor de un astro de masa M, en una órbita de radio r, es inversamente proporcional al radio de la órbita.

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Donde G es la constante de la gravitación universal.
La energía mecánica de un cuerpo de masa m, que se encuentra en órbita de radio r alrededor de un astro de masa M, es la suma de sus energías cinética y potencial.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r}\right)$$

La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituyendo v^2, la expresión de la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La expresión de la energía mecánica queda:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} - G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La energía mecánica de un satélite en órbita es igual a la mitad de la energía potencial.

$$E = \frac{1}{2} E_p$$

5. Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Considerando su posición en dos puntos de la órbita, se cumple:
A) La velocidad orbital del satélite es la misma en ambos puntos.
B) La energía mecánica del satélite es la misma en ambos puntos.
C) El momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es distinto en ambos puntos.
(A.B.A.U. ord. 18)

Solución: B

El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo. El trabajo de la fuerza gravitatoria, cuando una masa se desplaza de un punto 1 a un punto 2, es independiente del camino seguido y solo depende de los puntos inicial y final. Se define una magnitud llamada energía potencial, E_p, de forma que el trabajo, W, de la fuerza gravitatoria es igual a la variación (cambiada de signo) de la energía potencial.

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Como el trabajo de la fuerza resultante es, por el principio de la energía cinética, igual a la variación de energía cinética:

$$W(\text{resultante}) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

Si la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria, ambos trabajos son iguales:

$$W_{1\to 2} = W(\text{resultante})$$

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_{p1} + E_{c1} = E_{p2} + E_{c2}$$

La energía mecánica (suma de la energía cinética y potencial) se conserva.

Las otras opciones:
A y C. Falsas. El momento angular del satélite respecto a la Tierra es constante.

Si el momento angular es constante, al variar la distancia, $\overline{\boldsymbol{r}}$, del satélite a la Tierra, también variará su velocidad, $\overline{\boldsymbol{v}}$.

6. Para saber la masa del Sol, conocidos el radio de la órbita y el periodo orbital de la Tierra respecto al Sol, se necesita tener el dato de:
A) La masa de la Tierra.
B) La constante de gravitación G.
C) El radio de la Tierra.

(A.B.A.U. ord. 17)

Solución: B

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_G=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right|=m\cdot|\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G=m\cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Despejando la masa del Sol, queda:

$$M = \frac{4\,\pi^2\,r^3}{G\,T^2}$$

● Campo gravitatorio.

1. Si el peso de una masa m en la superficie de un planeta esférico de radio r vale 80 N, el peso de esa misma masa m en la superficie de un nuevo planeta esférico de radio $2\,r$ será:
A) 20 N
B) 40 N
C) 160 N
Nota: la densidad de los dos planetas es la misma. *(A.B.A.U. extr. 23)*

Solución: C

El peso de una masa en un planeta es la fuerza que ejerce el planeta sobre ella, que viene dada por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, M es la masa del planeta, m es la masa del cuerpo y r es la distancia del objeto al centro del planeta, o sea, el radio del planeta.
Si la densidad de los dos planetas es la misma, eso significa que la masa del planeta de radio $2\,r$ será ocho veces mayor que la masa del planeta de radio r, ya que la masa es proporcional al volumen y el volumen de una esfera de radio r es $V = 4/3\,\pi\,r^3$, proporcional al cubo de su radio.
Por tanto, llamando ρ a la densidad, M_1 y r_1 a la masa y al radio del primero planeta, y M_2 y r_2 a la masa y al radio del segundo planeta, tenemos que:

$$M_1 = \rho\,4/3\,\pi\,r_1^3$$

$$r_2 = 2 \cdot r_1$$

$$M_2 = \rho\,4/3\,\pi\,r_2^3 = \rho\,4/3\,\pi\,(2 \cdot r_1)^3 = 2^3 \cdot (\rho\,4/3\,\pi\,r_1^3) = 8\,M_1$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la fuerza de gravitación , obtenemos que el peso en el primero planeta es:

$$F_1 = G\frac{M_1 \cdot m}{r_1^2}$$

El peso en el segundo planeta es:

$$F_2 = G\frac{M_2 \cdot m}{r_2^2} = G\frac{8 \cdot M_1 \cdot m}{(2 \cdot r_1)^2} = \frac{8}{2^2}G\frac{M_1 \cdot m}{r_1^2} = 2\,F_1$$

El peso en el segundo planeta es el doble que en el primer planeta. Si en el primer planeta pesa 80 N, en el segundo pesará 2 · 80 = 160 N.

2. ¿Dónde se encontrará el punto en el que se anulan las intensidades de campo gravitatorio de la Luna y de la Tierra?:
A) En el punto medio entre la Tierra y la Luna.
B) Más cerca de la Tierra.
C) Más cerca de la Luna.

(A.B.A.U. extr. 22)

Solución: C

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un astro de masa *M* sobre un objeto de masa *m* que se encuentra a una distancia, *r*, se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

En esta expresión, *G* es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite.
La intensidad, $\overline{\boldsymbol{g}}$, del campo gravitatorio debido a una masa, *M*, en un punto que se encuentra a una distancia *r* de ella, es directamente proporcional a la masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

Por el principio de superposición, el campo gravitatorio en un punto, debido a dos masas, es la suma vectorial de los campos producidos por las masas. En un punto 0, situado entre la Tierra y la Luna, vendrá dado por la expresión:

$$\vec{g}_0 = \vec{g}_{0T} + \vec{g}_{0L} = -G \frac{M_T}{r_T^2} \vec{u}_r + \left(-G \frac{M_L}{r_L^2} \vec{u}_r \right)$$

El punto en que se anulan estará situado en la línea que une ambos astros a unas distancias de ellos que anulen el campo:

$$G \frac{M_T}{r_T^2} = G \frac{M_L}{r_L^2}$$

Como la masa de la Tierra es mucho mayor que la de la Luna, la distancia del punto a la Tierra debe ser mayor que a la Luna.

$$r_T^2 = \frac{M_T}{M_L} r_L^2 \Rightarrow r_T = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} r_L > r_L$$

El punto se encontrará más cerca de la Luna.

3. Dado un planeta esférico de masa *M* con radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra. La relación entre la velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta respecto a la velocidad de escape de dicho objeto desde la superficie de la Tierra es:
   A) 0,5
   B) 0,7
   C) 4

(A.B.A.U. extr. 21)

Solución: A

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, Δ*E*, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa m situado en la superficie de un astro de masa M y radio R es:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula. La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

La densidad es la masa de la unidad de volumen de un cuerpo. Como el volumen de una esfera de radio R es $V = 4/3\ \pi\ R^3$, la masa M de una esfera de radio R y densidad ρ es:

$$M = V \cdot \rho = 4/3\ \pi\ R^3 \cdot \rho$$

Sustituyendo esta expresión en la velocidad de escape de la Tierra

$$v_{eT} = \sqrt{2\,G\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2\,G\frac{4/3\,\pi\,R_T^3 \cdot \rho}{R_T}} = \sqrt{8/3\pi\,G\,R_T^2 \cdot \rho}$$

La expresión semejante para el planeta P de masa M sería:

$$v_{eP} = \sqrt{8/3\pi\,G\,R_P^2 \cdot \rho}$$

Dividiendo la segunda entre la primera quedaría:

$$\frac{v_{eP}}{v_{eT}} = \frac{\sqrt{8/3\,\pi\,G \cdot R_P^2 \cdot \rho}}{\sqrt{8/3\pi\,G \cdot R_T^2 \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{\cancel{8/3\pi\,G\,\rho} \cdot R_P^2}{\cancel{8/3\pi\,G\,\rho} \cdot R_T^2}} = \frac{R_P}{R_T}$$

Como $R_P = ½\ R_T$

$$\frac{v_{eP}}{v_{eT}} = \frac{R_P}{R_T} = \frac{1/2\,R_T}{R_T} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

4. Para escalar una montaña podemos seguir dos rutas diferentes: una de pendientes muy suaves y otra con pendientes muy pronunciadas. El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo del montañero es:
   A) Mayor en la ruta de pendientes muy pronunciadas.
   B) Mayor en la ruta de pendientes muy suaves.
   C) Igual en ambas rutas.

(A.B.A.U. ord. 20)

Solución: C

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa. Se puede definir una magnitud, llamada energía potencial, que depende solo de la posición, además de la masa. En el caso de la fuerza gravitatoria cerca de la superficie de la Tierra.

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente del camino, únicamente depende de los puntos inicial y final.

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

$$W_{1\to 2} = m \cdot g \cdot (-\Delta h)$$

El trabajo únicamente depende de las alturas inicial y final.

5. Si un planeta, manteniendo su masa, aumentase su radio, la velocidad de escape desde la superficie de planeta:
A) Aumentaría.
B) Disminuiría.
C) No variaría.

(A.B.A.U. extr. 18)

Solución: B

La velocidad de escape de un astro es la velocidad mínima adicional que habría que comunicar a un cuerpo sometido a su campo gravitatorio, para situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción, a una distancia infinita del centro del astro.
La velocidad de escape le proporcionaría la energía, ΔE, necesaria para situarlo en el infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

En el infinito la energía potencial es nula, porque se toma como origen de energías potenciales.
Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la velocidad mínima, la energía cinética que tendría el cuerpo en el infinito sería nula.
La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial, en el infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

La energía potencial de un cuerpo de masa m situado en la superficie de un astro de masa M y radio R es:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

Si el cuerpo se encuentra en la superficie del astro, en reposo respecto al suelo, su energía cinética es nula.
La energía mecánica en la superficie del astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

La velocidad de escape v_e le comunicaría la energía necesaria para situarlo en el infinito:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despejando la velocidad de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

Si aumentase el radio del planeta, manteniendo su masa constante, la velocidad de escape disminuiría.

6. Si la masa de un planeta es el doble de la masa de la Tierra y el radio es cuatro veces mayor que el de la Tierra, la aceleración de la gravedad en ese planeta con respecto a la de la Tierra es:
A) 1/4
B) 1/8
C) 1/16.

(A.B.A.U. ord. 18)

Solución: B

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un objeto de masa *M*, sobre otro objeto de masa *m* que se encuentra a una distancia *r*, se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, *G* es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une ambos objetos.
Para un planeta de masa *M*, y radio *R*, la expresión, en módulos, de la fuerza gravitatoria en un punto de su superficie es:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Si la única fuerza es la gravitatoria, la aceleración de la gravedad se obtiene de la segunda ley de Newton, que dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo la masa, *m*, del objeto la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}| \quad \Rightarrow \quad F_G = m \cdot g$$

Sustituyendo la expresión del módulo F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}}{\cancel{m}} = G \frac{M}{R^2}$$

La aceleración de la gravedad, *g*, en un punto de la superficie de un planeta de masa *M*, y radio *R*, es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado de su radio.
Si la masa de un planeta es el doble de la masa de la Tierra y el radio es cuatro veces mayor que el de la Tierra, la aceleración, *g*, de la gravedad en su superficie será la octava parte de la gravedad en la Tierra.

$$g_P = G \frac{M_P}{R_P^2} = G \frac{2 \cdot M_T}{(4 \cdot R_T)^2} = \frac{2}{16} G \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{g_T}{8}$$

7. La masa de un planeta es el doble que la de la Tierra y su radio es la mitad del terrestre. Sabiendo que la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es *g*, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta será:
   A) 4 *g*
   B) 8 *g*
   C) 2 *g*

(A.B.A.U. extr. 17)

Solución: B

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que ejerce un objeto de masa *M*, sobre otro objeto de masa *m* que se encuentra a una distancia *r*, se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, *G* es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, el vector unitario en la dirección de la línea que une ambos objetos.
La intensidad del campo gravitatorio es la fuerza sobre la unidad de masa:

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_G}{m} = \frac{-G \frac{M \cancel{m}}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r}{\cancel{m}} = -G \frac{M}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

El valor de la intensidad, g, del campo gravitatorio producido por un planeta de masa M, y radio R, en un punto de su superficie, es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado de su radio. En módulos:

$$g=G\frac{M}{R^2}$$

Si la masa de un planeta P es el doble de la masa de la Tierra y su radio es la mitad que el de la Tierra, la aceleración, g, de la gravedad en su superficie será la ocho veces mayor que la gravedad en la Tierra.

$$g_\mathrm{P}=G\frac{M_\mathrm{P}}{R_\mathrm{P}^2}=G\frac{2\cdot M_\mathrm{T}}{(R_\mathrm{T}/2)^2}=\frac{2}{(1/4)}G\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2}=8\,g_\mathrm{T}$$

◊ LABORATORIO

1. A partir de medidas del radio, r, y del período, T, de cuatro satélites que orbitan la Tierra se obtiene la tabla anexa. Representa esos datos en una gráfica y determina a partir de ella la masa de la Tierra.

Satélite	T^2/s²	r^3/km³
1	$3{,}18\cdot10^7$	$3{,}29\cdot10^{11}$
2	$3{,}89\cdot10^7$	$4{,}05\cdot10^{11}$
3	$4{,}75\cdot10^7$	$4{,}93\cdot10^{11}$
4	$1{,}44\cdot10^8$	$1{,}48\cdot10^{12}$

Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(A.B.A.U. ord. 19)*

Solución:

La fuerza gravitatoria, $\overline{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}$, que ejerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r, es una fuerza central, está dirigida hacia el astro, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}=-G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En esta expresión, G es la constante de la gravitación universal, y $\overline{\boldsymbol{u}}_\mathrm{r}$, el vector unitario en la dirección de la línea que une el astro con el satélite. En módulos:

$$F_\mathrm{G}=G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal, a_N. Al no tener aceleración tangencial, el módulo, v, de la velocidad lineal es constante y el movimiento es circular uniforme. La aceleración normal, en un movimiento circular uniforme de radio r, se obtiene de la expresión:

$$a_\mathrm{N}=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra, se puede considerar que es la única fuerza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_\mathrm{G}$$

La 2.ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza, siendo su masa, m, la constante de proporcionalidad.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para los módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Sustituyendo la expresión del módulo, F_G, de la fuerza gravitatoria, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión con la anterior y elevando al cuadrado queda:

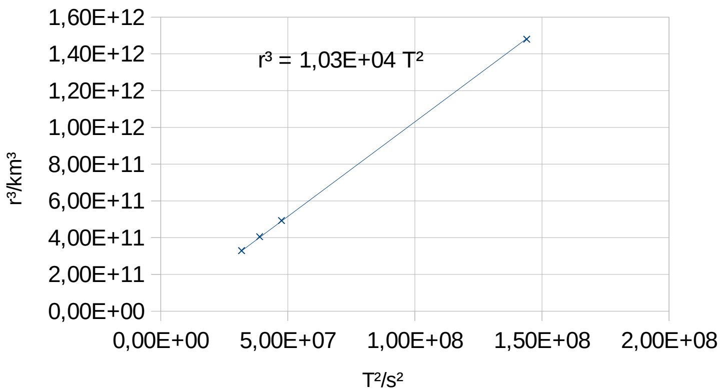
$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando términos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

Reescribiendo esta ecuación para expresar la relación entre los cubos de los radios de las órbitas y los cuadrados de los períodos queda:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$



La pendiente de la recta de la gráfica obtenida en una hoja de cálculo es:

pendiente = $1{,}03 \cdot 10^4$ km³/s² = $1{,}03 \cdot 10^{13}$ m³/s²

Despejando la masa M de la Tierra queda:

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot pendiente}{G} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}03 \cdot 10^{13}\ [\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}]} = 6{,}06 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Análisis: El resultado es semejante al valor correcto $5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg.

Pero en la prueba no disponemos de una hoja de cálculo. La pendiente de la recta dibujada en un papel puede aproximarse al cociente de los datos más altos:

$$\frac{r_4^3}{T_4^2} = \frac{1{,}48 \cdot 10^{12}\ [\mathrm{km}]^3}{1{,}44 \cdot 10^8\ [\mathrm{s}]^2} = 1{,}03 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2}\ \frac{(10^3\ \mathrm{m})^3}{(1\ \mathrm{km})^3} = 1{,}03 \cdot 10^{13}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$$

Que es el mismo resultado que la pendiente obtenida en la hoja de cálculo.
Un valor mejor sería el promedio de los cocientes.

Satélite	T^2/s²	r^3/km³	r^3/T^2 (km³/s²)
1	$3{,}18 \cdot 10^7$	$3{,}29 \cdot 10^{11}$	$1{,}03 \cdot 10^4$
2	$3{,}89 \cdot 10^7$	$4{,}05 \cdot 10^{11}$	$1{,}04 \cdot 10^4$
3	$4{,}75 \cdot 10^7$	$4{,}93 \cdot 10^{11}$	$1{,}04 \cdot 10^4$
4	$1{,}44 \cdot 10^8$	$1{,}48 \cdot 10^{12}$	$1{,}03 \cdot 10^4$

El valor medio es $1{,}04 \cdot 10^4$ km³/s² = $1{,}04 \cdot 10^{13}$ m³/s² que daría una masa de la Tierra $6{,}13 \cdot 10^{24}$ kg.

Actualizado: 02/03/24

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.

Sumario

GRAVITACIÓN

PROBLEMAS....1
Satélites....*1*
Campo gravitatorio....*20*
Masas puntuales....*23*
CUESTIONES....26
Satélites....*26*
Campo gravitatorio....*30*
LABORATORIO....35

Índice de pruebas A.B.A.U.

2017....
1. (ord.)....18, 29
2. (extr.)....16, 34
2018....
1. (ord.)....28, 33
2. (extr.)....33
2019....
1. (ord.)....14, 35
2. (extr.)....23, 27
2020....
1. (ord.)....22, 32
2. (extr.)....12, 26
2021....
1. (ord.)....21, 26
2. (extr.)....11, 31
2022....
1. (ord.)....8
2. (extr.)....6, 31
2023....
1. (ord.)....3, 26
2. (extr.)....1, 30