

La ecuación de movimiento en un M.A.S. es

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

También

$$x = A \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \varphi'_0)$$

$x$  es la elongación: separación de la posición de equilibrio. También es la posición del móvil en el sistema de referencia elegido.

$A$  es la amplitud: elongación máxima.

$\omega$  es la pulsación o frecuencia angular: número de oscilaciones del móvil en  $2\pi$  segundos. Está relacionada con el período  $T$  y con la frecuencia  $f$  por las expresiones:  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$t$  es el tiempo.

$\varphi_0$  es la fase inicial. Se emplea para determinar la posición inicial  $x_0$ . Tiene distinto valor con la función seno que con la función coseno:

$$\varphi_0 = \varphi'_0 + \pi / 2$$

Para obtener la ecuación de movimiento hay que calcular los valores de  $A$ ,  $\omega$  y  $\varphi_0$  a partir de los datos.

Cuando se estira el resorte y se suelta, el móvil oscila a ambos lados de la posición de equilibrio. El alargamiento inicial es el alargamiento máximo. Ese dato ya es la amplitud  $A$ .

Para calcular la frecuencia angular  $\omega$ , en el caso de no tener ni el período  $T$  ni la frecuencia  $f$ , se emplea el valor de la constante elástica del resorte  $k$ .

La relación matemática entre la frecuencia angular  $\omega$  y la constante elástica del resorte  $k$  es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Se puede demostrar por el siguiente camino:

Se obtiene la ecuación de la velocidad derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)]}{dt} = A \cdot \omega \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Volviendo a derivar se obtiene la ecuación de la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[A \cdot \omega \cdot \text{cos}(\omega \cdot t + \varphi_0)]}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Si se sustituye  $A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$  por  $x$  queda

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

La aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación.

La fuerza resultante puede escribirse, por la 2ª ley de Newton,

$$F = m \cdot a = m(-\omega^2 \cdot x)$$

En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza elástica y el peso es una fuerza recuperadora que se rige por la expresión:

$$F = -k \cdot x$$

Igualando las dos expresiones queda

$$-k \cdot x = m(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

Despejando  $\omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para calcular la fase inicial  $\varphi_0$ , se sustituye en la ecuación de movimiento el valor de la posición inicial  $x_0$  cuando el tiempo  $t = 0$ .

$$x_0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot \text{sen}(\varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(x_0 / A)$$

En caso de que la posición inicial sea la del resorte totalmente estirado sería: para  $t = 0$ ,  $x_0 = A$

$$\varphi_0 = \arcsen(1) = \pi/2 \text{ [rad]}$$

En este caso es más sencillo escribir la ecuación de movimiento en función del coseno porque  $\varphi'_0 = 0$