Vibraciones

MÉTODO Y RECOMENDACIONES

● MÉTODO

1. En general:
   a) Se dibujan las fuerzas que actúan sobre el sistema.
   b) Se calcula cada fuerza.
   c) Se calcula la resultante por el principio de superposición.
   d) Se aplica la 2ª ley de Newton (ley Fundamental de la Dinámica): $\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$. Como la aceleración tiene la misma dirección y sentido que la fuerza resultante, se puede escribir para los módulos

$$|\Sigma \overline{\boldsymbol{F}}| = m \cdot |\overline{\boldsymbol{a}}| = m \cdot a$$

2. En los problemas de resortes:
Si el resorte se mueve en un eje vertical, el tratamiento es el mismo que si lo hiciese en una línea horizontal, teniendo en cuenta que el origen es la posición de equilibrio, el punto en el que la fuerza elástica equilibra la fuerza peso.
La ecuación de movimiento en un M.A.S. es:

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{o} \quad x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi'_0)$$

En estas expresiones:
- x es la elongación: separación de la posición de equilibrio. También es la posición del móvil en el sistema de referencia elegido.
- A es la amplitud: elongación máxima.
- ω es la pulsación o frecuencia angular: número de oscilaciones del móvil en 2 π segundos. Está relacionada con el período T y con la frecuencia f por las expresiones: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- t es el tiempo.
- φ_0 es la fase inicial. Se emplea para determinar la posición inicial x_0. Tiene distinto valor con la función seno que con la función coseno: $\varphi_0 = \varphi'_0 + \pi / 2$

Para obtener la ecuación de movimiento hay que calcular los valores de A, ω y φ_0 a partir de los datos.

Cuando se estira el resorte y se suelta, el móvil oscila a ambos lados de la posición de equilibrio. El alargamiento inicial es el alargamiento máximo. Ese dato ya es la amplitud A.
Para calcular la frecuencia angular ω, en el caso de no tener ni el período T ni la frecuencia f, se emplea el valor de la constante elástica del resorte k.
La relación matemática entre la frecuencia angular ω y la constante elástica del resorte k es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Se puede demostrar por el siguiente camino:
Se obtiene la ecuación de la velocidad derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)\}}{\mathrm{d}t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Volviendo a derivar se obtiene la ecuación de la aceleración:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)\}}{\mathrm{d}t} = -A \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Si se sustituye $A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$ por x queda

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

La aceleración es proporcional y de sentido contrario a la elongación.

La fuerza resultante puede escribirse, por la 2ª ley de Newton, como:

$$F = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

En el movimiento vertical, la fuerza resultante entre la fuerza elástica y el peso es una fuerza recuperadora que se rige por la expresión:

$$F = -k \cdot x$$

Igualando las dos expresiones queda:

$$-k \cdot x = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

La expresión de ω se obtiene despejando:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para calcular la fase inicial φ_0, se sustituye en la ecuación de movimiento el valor de la posición inicial x_0 cuando el tiempo $t = 0$.

$$x_0 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot \text{sen}(\varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(x_0 / A)$$

En caso de que la posición inicial sea la del resorte totalmente estirado sería: para $t = 0$, $x_0 = A$:

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1) = \pi/2 \text{ [rad]}$$

En este caso es más sencillo escribir la ecuación de movimiento en función del coseno porque $\varphi'_0 = 0$.
La energía potencial elástica en cada punto de elongación x es:

$$E_p = ½\, k \cdot x^2$$

Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica valdrá lo mismo para cualquier elongación: es constante.

$$E = (E_c + E_p) = ½\, m \cdot v^2 + ½\, k \cdot x^2$$

En el punto de elongación máxima la velocidad es nula.

$$E = ½\, m \cdot 0^2 + ½\, k \cdot A^2 = ½\, k \cdot A^2$$

● RECOMENDACIONES

1. Se hará una lista con los datos, pasándolos al Sistema Internacional si no lo estuviesen.

2. Se hará otra lista con las incógnitas.

3. Se dibujará un croquis de la situación, procurando que las distancias del croquis sean coherentes con ella. Se deberá incluir cada una de las fuerzas o de las intensidades de campo, y su resultante.

4. Se hará una lista de las ecuaciones que contengan las incógnitas y alguno de los datos, mencionando a la ley o principio al que se refieren.

5. En caso de tener alguna referencia, al terminar los cálculos se hará un análisis del resultado para ver si es el esperado. En particular, comprobar que los vectores campo gravitatorio tienen la dirección y el sentido acorde con el croquis.

6. En muchos problemas las cifras significativas de los datos son incoherentes. Se resolverá el problema suponiendo que los datos que aparecen con una o dos cifras significativas tienen la misma precisión que el resto de los datos (por lo general tres cifras significativas), y al final se hará un comentario sobre las cifras significativas del resultado.

Cuestiones y problemas de las Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.

Actualización: 02/03/24