Gravitación

Método, aproximacións e recomendacións

● Satélites

1. O Sentinel-1 é un satélite artificial de órbita circular polar da Axencia Espacial Europea dentro do Programa Copérnico destinado á monitorización terrestre e dos océanos. Está situado a 693 km sobre a superficie terrestre. Si a súa masa é de 200 kg:
   a) As velocidades lineal e angular do satélite na órbita.
   b) O período da órbita do satélite. Cantas voltas dá á Terra cada día?
   c) A masa da Terra.
   d) O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra.
   e) As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.
   f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra e a velocidade de escape á atracción terrestre a esa altura.
   g) Que velocidade houbo que proporcionarlle no lanzamento para poñelo en órbita?
   h) A velocidade de escape desde o chan.
   i) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra.
   j) A forza con que a Terra atrae ao satélite.
   Datos: R = 6,37·10⁶ m; g_0 = 9,81 m/s² *Problema con datos de A.B.A.U. extr. 23*
   Rta.: a) v = 7,51 km/s; ω = 1,06·10⁻³ rad/s; b) T = 1 h 39 min, f = 14,6 día⁻¹; c) Faltan datos;
   d) $|\overline{\boldsymbol{L}}_O|$ = 1,06·10¹³ kg·m²/s; e) E_c = 5,64·10⁹ J; E_p = −1,13·10¹⁰ J; E = −5,64·10⁹ J;
   f) Mesma dirección: $\Delta E = -E$ = 5,64·10⁹ J; dirección perpendicular: $\Delta E = -E_p$ = −1,13·10¹⁰ J;
   v_{eo} = 7,51 km/s; g) v_s = 8,3 km/s; g) v_{es} = 11,2 km/s; i) g = 0,81 g_0; j) F = 1,6·10³ N.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa do satélite	m = 200 kg
Altura da órbita	h = 693 km = 6,93·10⁵ m
Raio da Terra	R = 6,37·10⁶ m
Aceleración da gravidade na superficie da Terra	g_0 = 9,81 m/s²
Incógnitas	
Valor das velocidades lineal e angular do satélite	v, ω
Período e frecuencia orbital do satélite	T, f
Módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra.	$\lvert\overline{\boldsymbol{L}}_O\rvert$
Enerxía cinética, potencial e mecánica do satélite en órbita	E_c, E_p, E
Enerxía para mandalo a unha distancia moi grande da Terra	E_∞
Velocidade de escape desde esa altura	v_e
Velocidade desde a superficie para poñelo en órbita	v_s
Cociente entre os valores de g no satélite e na superficie da Terra.	g_h/g_0
Forza con que a Terra atrae ao satélite	F
Outros símbolos	
Masa da Terra	M
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2}$
Velocidade dun satélite a unha distancia r do centro dun astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Velocidade angular nun movemento circular uniforme de período T	$\omega=\frac{2\pi}{T}$
Enerxía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$

Ecuacións

Enerxía mecánica $E = E_c + E_p$

Intensidade do campo gravitacional terrestre a unha distancia r do centro $g = \frac{F_G}{m} = G\frac{M}{r^2}$

Momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ a unha distancia $\overline{\boldsymbol{r}}$ dun punto O que se toma como orixe $\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$

Solución:

a) O satélite describe unha traxectoria aproximadamente circular de raio

$$r = R + h = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6{,}93 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

A forza gravitacional, $\overline{\boldsymbol{F}}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\overline{\boldsymbol{u}}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$
$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0 = G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.

A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Calcúlase a velocidade orbital substituíndo na ecuación $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{7{,}06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}}=7{,}51 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=7{,}51\ \mathrm{km/s}$$

Análise: Espérase que un obxecto que se mova ao redor da Terra teña unha velocidade dalgún km/s. *O resultado está de acordo con esta suposición.*

A velocidade angular podería calcularse coñecendo o período.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

b) O período calcúlase coa expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T=\frac{2\pi \cdot r}{v}=\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]}{7{,}51 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=5{,}91 \cdot 10^3\ \mathrm{s}=1{,}64\ \mathrm{h}$$

Agora xa se pode calcular a velocidade angular:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2 \cdot 3{,}14\ [\mathrm{rad}]}{5{,}91 \cdot 10^3 [\mathrm{s}]}=1{,}06 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad/s}$$

A frecuencia é a inversa o período:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{1{,}64\ [\mathrm{h}]}\ \frac{24{,}0\ [\mathrm{h}]}{1\ [\mathrm{día}]}=14{,}6\ \mathrm{día}^{-1}$$

Análise: Os períodos dos satélites terrestres en órbita baixa son da orde de hora e media, parecido ao resultado.

c) Non se pode calcular a masa da Terra se non se ten como dato o valor da constante da gravitación universal.
Nese caso usaríase a expresión «$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$» que se obtivo antes:

$$M=\frac{g_0 \cdot R^2}{G}=\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}]}=5{,}96 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

d) O momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}$ dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto dun punto Ou que se toma como orixe é:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O} = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra é:

$$|\overline{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \mathrm{sen}\ \alpha = 7{,}06 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}] \cdot 200\ [\mathrm{kg}] \cdot 7{,}51 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}] \cdot \mathrm{sen}\ 90° = 1{,}06 \cdot 10^{13}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$$

e) A enerxía potencial na órbita vale:

$$E_\mathrm{p}=-G\frac{M \cdot m}{r}=-\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r}=-\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2 \cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{7{,}06 \cdot 10^6 [\mathrm{m}]}=-1{,}13 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

A enerxía cinética vale:

$$E_\mathrm{c} = m \cdot v^2 / 2 = [200\ [\mathrm{kg}]\ (7{,}51 \cdot 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2] / 2 = 5{,}64 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial:

$$E = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = 5{,}64 \cdot 10^9\ [\mathrm{J}] + (-\ 1{,}13 \cdot 10^{10}\ [\mathrm{J}]) = -5{,}64 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Análise: Pódese demostrar que a enerxía mecánica ten o valor oposto ao da enerxía cinética substituíndo $G \cdot M / r$ por v^2 na expresión da enerxía mecánica:

$$E=E_\mathrm{c}+E_\mathrm{p}=\frac{1}{2} m \cdot v^2-G\frac{M \cdot m}{r}=\frac{1}{2} m \cdot v^2-m \cdot v^2=-\frac{1}{2} m \cdot v^2=-E_\mathrm{c}$$

f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra sería a diferenza entre a enerxía a unha distancia moi grande e a que ten na órbita:

$$\Delta E = E_\infty - E$$

Ao ser la enerxía mínima, tómase que o obxecto chega ao infinito con velocidade nula. Como a orixe de enerxía potencial gravitacional está no infinito, a enerxía potencial gravitacional dun obxecto no infinito é nula.

$$E_\infty = 0$$
$$\Delta E = -E = 5{,}64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A enerxía necesaria sería:

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_p)_1$$
$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G \frac{M \cdot m}{r} \right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despexando, a velocidade de escape dun satélite en órbita, queda:

$$v_{e\,o} = \sqrt{2 G \frac{M}{r}}$$

Se a dirección de escape é perpendicular á velocidade do satélite, esta é a velocid perpendicular que hai que proporcionarlle.
Se a dirección de escape é paralela á dirección do movemento do satélite, hai que ter en conta a súa enerxía cinética.

Se o sentido de velocidade de escape fose o mesmo que o de avance do satélite,haberá que proporcionarlle unha velocidade adicional igual á diferenza entre a velocidade de escape e a que xa ten.

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{2 g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\ [\text{m/s}^2] \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{7{,}06 \cdot 10^6\ [\text{m}]}} = 1{,}06 \cdot 10^4\ \text{m/s} = 10{,}6\ \text{km/s}$$

Análise: A velocidade de escape na superficie da Terra é de 11,2 km/s. *O resultado está de acordo con este dato tendo en conta que ao estar o satélite lonxe da superficie, a súa velocidade de escape será menor.*

g) A velocidade que houbo que proporcionarlle no lanzamento para poñelo en órbita, pódese calcular supoñendo que, unha vez comunicada esa velocidade, a enerxía consérvase até a órbita.
Tendo en conta que a enerxía potencial na superficie da Terra vale:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R} = g_0 \cdot R \cdot m = -9{,}81\ [\text{m/s}^2] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] \cdot 200\ [\text{kg}] = -1{,}25 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

A enerxía cinética do satélite cando ten a velocidade necesaria valerá:

$$E_{cs} = E - E_{ps} = -5{,}64 \cdot 10^9\ [\text{J}] - (-1{,}25 \cdot 10^{10}\ [\text{J}]) = 6{,}9 \cdot 10^9\ \text{J}$$

Análise: Pérdese unha cifra significativa ao restar.
A súa velocidade será:

$$v_s = \sqrt{\frac{2 E_{cs}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}9 \cdot 10^9\ [\text{J}]}{200\ [\text{kg}]}} = 8{,}3 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 8{,}3\ \text{km/s}$$

Análise: A velocidade ten que ser menor que a velocidade de escape desde o chan, que é de 11,2 km/s. *O resultado está de acordo con esta suposición.*

h) La velocidade de escape desde o chan.
A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, Δ*E*, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\ m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0 - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}}$$

(A velocidade dun punto no chan, no ecuador, con respecto ao centro da Terra sería:

$$v = \frac{2\pi\,R}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}]}{24\ [\text{h}]} \frac{1\ [\text{h}]}{3600\ [\text{s}]} = 463\ \text{m/s}$$

Nun punto situado na latitude λ, o raio (distancia ao eixe da Terra) sería $r = R \cos \lambda$, e a velocidade, $v = 463 \cos \lambda$.
Se fose lanzada paralela ao chan, a velocidade de escape dependería do sentido do lanzamento. Habería que restar, cara ao leste, ou sumar, cara ao oeste, a velocidade de rotación do punto de lanzamento).
Supoñendo que se lanza verticalmente, e substituíndo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$:

$$v_e = \sqrt{2\,G\frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{2\,g_0 \cdot R^2}{R}} = \sqrt{2\,g_0 \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ [\text{m/s}^2] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}]} = 1{,}12 \cdot 10^4\ \text{m/s} = 11{,}2\ \text{km/s}$$

i) A intensidade do campo gravitacional nun punto que dista r do centro da Terra é a forza sobre a unidade de masa situada nese punto.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m} / r^2}{\cancel{m}} = G\frac{M}{r^2}$$

A gravidade a unha altura h vale: $$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

Na superficie da Terra vale: $$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

Dividindo a primeira entre a segunda queda:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\cancel{G \cdot M}/(R+h)^2}{\cancel{G \cdot M}/R^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{(6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}])^2}{(7{,}06 \cdot 10^6\ [\text{m}])^2} = 0{,}814$$

Análise: O valor da aceleración da gravidade diminúe coa altura. O resultado está de acordo con isto.

j) A forza con que a Terra atrae ao satélite vale:

$$F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2} = \frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r^2} = g_0\cdot\frac{R^2}{(R+h)^2}\cdot m = g_0\cdot 0{,}824\cdot m = 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot 0{,}84\cdot 200\ [\mathrm{kg}] = 1{,}60\cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

Tamén pode calcularse sen ter en conta o apartado anterior.

$$F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2} = \frac{g_0\cdot R^2\cdot m}{r^2} = \frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2\cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{(7{,}06\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2} = 1{,}60\cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

As respostas e o seu cálculo poden verse coa folla de cálculo Satélites (gal). Instrucións de uso.

Enunciado	**Datos:**			
Un satélite de masa		m =	200	kg
xira arredor dun astro de masa		M =		kg
e raio		R =	$6{,}37\cdot 10^6$	m
no que a gravidade no chan é		g_0 =	9,81	m/s²
A órbita é circular de	altura	h =	693	km
Calcula:				
a) O período da órbita do satélite e a súa velocidade				
b) O peso do satélite na órbita				
c) As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.				

Poden verse os seguintes resultados, elixindo nas celas de cor laranxa as opcións «km/s» para a velocidade da órbita, «Periodo» e «s» para as súas unidades, «Enerxía na órbita», «Velocidade» no chan para «poñelo en órbita» e «Momento angular» na órbita.

	Respostas				Cifras significativas:	3
		Raio		Velocidade	Periodo	
a) e b)	Órbita	$7{,}06\cdot 10^6$ m		**7,51** km/s	**$5{,}91\cdot 10^3$** s	
		cinética		potencial	mecánica	J
e)	Enerxía na órbita	**$5{,}64\cdot 10^9$** J		**$-1{,}13\cdot 10^{10}$** J	**$-5{,}64\cdot 10^9$** J	
c)	Terra				M = **$5{,}96\cdot 10^{24}$** kg	
g)	Velocidade	no chan para	poñelo en órbita		**8,28** km/s	
d)		Momento angular	na órbita		**$1{,}06\cdot 10^{13}$** kg·m²/s	

Outros resultados poden verse nesta pestana, modificando a elección nas celas de cor laranxa.

b) Frecuencia. Cambiar «Periodo» por «Frecuencia» e elixir a unidade «día⁻¹».

		clic ↓	Velocidade	clic ↓	Frecuencia
Órbita					14,6 día^{-1}

c) Aparece o resultado da masa da Terra, porque a folla contén o dato da constante G.

f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra coincide co valor oposto ao valor da:
f_1) enerxía potencial a esa altura, se se considera que se afasta na dirección perpendicular á da órbita
f_2) enerxía mecánica na órbita, se se considera que se afasta na mesma dirección e sentido co que se move nela, en ambos os dous casos, polo principio de conservación da enerxía, porque, a unha distancia moi grande da Terra, a enerxía potencial é nula e a enerxía mínima é para que chegue aló con velocidade cero.

Para obter a velocidade de escape á atracción terrestre a esa altura, cambiar «Momento angular» na órbita por «Velocidade de escape».

Velocidade de escape	na órbita	**10,6** km/s

h) A velocidade de escape desde o chan. Cambiar «poñelo en órbita» por «mandalo ao infinito».

Velocidade	no chan para	mandalo ao infinito	**11,2** km/s

i) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra. Cambiar «Velocidade de escape» por «Gravidade relativa».

Gravidade relativa	na órbita	**0,813** g_0

j) A forza con que a Terra atrae ao satélite. Cambiar «Gravidade relativa».por « Forza gravitacional».

Forza gravitacional	na órbita	**1,60·10³** N

Os cálculos poden verse nas pestanas «Periodo», «Peso» e «Enerxia».

a) As velocidades lineal e angular do satélite na órbita. Pestana «Periodo»

Velocidade do satélite	$v=\sqrt{\dfrac{G\cdot M}{r}}$	$v=\sqrt{\dfrac{3{,}98\cdot10^{14}}{7{,}06\cdot10^{6}}}=7{,}51\cdot10^{3}$ m/s
Velocidade angular do satélite	$\omega=\dfrac{2\cdot\pi}{T}$	$\omega=\dfrac{2\cdot3{,}14}{5{,}91\cdot10^{3}}=0{,}00106$ rad/s

b) O período da órbita do satélite. Cantas voltas dá á Terra cada día? Pestana «Periodo»

Período do satélite	$T=\dfrac{2\cdot\pi\cdot r}{v}$	$T=\dfrac{2\cdot3{,}14\cdot7{,}06\cdot10^{6}}{7{,}51\cdot10^{3}}=5{,}91\cdot10^{3}$ s
Frecuencia do satélite	$f=\dfrac{1}{T}$	$f=\dfrac{86\,400\text{ s}\cdot\text{día}^{-1}}{5{,}91\cdot10^{3}\text{ s}}=14{,}6\text{ día}^{-1}$

d) O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra. Pestana «Peso»

Momento angular	$L_o=r\cdot m\cdot v$	$L_o=7{,}06\cdot10^{6}\cdot200\cdot7{,}51\cdot10^{3}=1{,}06\cdot10^{13}\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra e a velocidade de escape á atracción terrestre a esa altura. Pestana «Enerxía».
Non presenta o resultado da enerxía mínima, pero é a diferenza entre a enerxía no infinito, 0, e a enerxía mecánica na órbita. (A non ser que se considere que a dirección na que se afasta é perpendicular á órbita. Nese caso, a enerxía necesaria para mandalo a unha distancia moi grande da Terra sería a enerxía potencial cambiada de signo. Isto último é o que se supón para calcular a velocidade de escape na órbita).

Velocidade de escape na órbita	$v_e=\sqrt{\dfrac{2\,G\cdot M}{r}}$	$v_e=\sqrt{\dfrac{2\cdot3{,}98\cdot10^{14}}{7{,}06\cdot10^{6}}}=1{,}06\cdot10^{4}$ m/s

h) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra. Na pestana «Enunciado» debe aparecer como opción «Gravidade relativa».

Gravidade relativa	na órbita	0,813 g_0

Na pestana «Peso» pode verse:

Gravidade na altura	$g=\dfrac{G\cdot M}{r^2}$	$g=\dfrac{3{,}98\cdot10^{14}}{(7{,}06\cdot10^{6})^2}=7{,}98\text{ m/s}^2$
Gravidade relativa		$\dfrac{g}{g_0}=\dfrac{7{,}98}{9{,}81}=0{,}813$

2. A luz do Sol tarda $5\cdot10^2$ s en chegar á Terra e $2,6\cdot10^3$ s en chegar a Xúpiter. Calcula:
   a) O período de Xúpiter virando ao redor do Sol.
   b) A velocidade orbital de Xúpiter.
   c) A masa do Sol.
   Datos: T (Terra) ao redor do Sol: $3,15\cdot10^7$ s; $c = 3\cdot10^8$ m/s; $G = 6,67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻². (Suponse as órbitas circulares) *(P.A.U. Sep. 12)*
   Rta.: a) $T = 3,74\cdot10^8$ s; $v = 1,31\cdot10^4$ m/s; b) $M = 2,01\cdot10^{30}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Tempo que tarda a luz do Sol en chegar á Terra	$t_1 = 5,00\cdot10^2$ s = 500 s
Tempo que tarda a luz do Sol en chegar a Xúpiter	$t_2 = 2,60\cdot10^3$ s
Período orbital da Terra arredor do Sol	$T_1 = 3,15\cdot10^7$ s
Velocidade da luz no baleiro	$c = 3,00\cdot10^8$ m/s
Constante da gravitación universal	$G = 6,67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Período orbital de Xúpiter	T_2
Velocidade orbital de Xúpiter	v
Masa do Sol	M
Outros símbolos	
Masa de Xúpiter ou a Terra	m
Distancia dun planeta ao Sol	r
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi\cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de raio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$

Solución:

Calcúlanse as distancias da Terra ao Sol e de Xúpiter ao Sol, tendo en conta a velocidade da luz.

Terra: $r_1 = c\cdot t_1 = 3,00\cdot10^8$ [m/s] · $5,00\cdot10^2$ [s] = $1,50\cdot10^{11}$ m

Xúpiter: $r_2 = c\cdot t_2 = 3,00\cdot10^8$ [m/s] · $2,60\cdot10^3$ [s] = $7,80\cdot10^{11}$ m

Resólvese primeiro o último apartado.

c) A masa do Sol pode calcularse da expresión da velocidade dun satélite que xira a unha distancia r arredor do centro dun astro de masa M.

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G\frac{M\cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.

A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, *m*, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$$

A velocidade da Terra arredor do Sol calcúlase a partir do seu período orbital:

$$v = \frac{2\pi\cdot R}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}50\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{3{,}15\cdot 10^{7}\ [\mathrm{s}]} = 2{,}99\cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}$$

Despéxase a masa do Sol da velocidade orbital da Terra como satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G\cdot M}{r}} \Rightarrow M = \frac{v^2\cdot r}{G} = \frac{(2{,}99\cdot 10^{4}\ [\mathrm{m/s}])^2\cdot 1{,}50\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]} = 2{,}01\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

b) Emprégase a ecuación anterior para calcular a velocidade de Xúpiter:

$$v = \sqrt{\frac{G\cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 2{,}01\cdot 10^{30}\ [\mathrm{kg}]}{7{,}80\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}} = 1{,}31\cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s} = 13{,}1\ \mathrm{km/s}$$

a) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi\cdot R}{T} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi\cdot r_2}{v} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}80\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{1{,}31\cdot 10^{4}\ [\mathrm{m/s}]} = 3{,}74\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$$

Análise: A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos son directamente proporcionais aos cubos dos raiovectores que unen ao Sol cos planetas. A maior distancia ao Sol, maior período. Este método daría:

$$T_2 = T_1\sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = 3{,}15\cdot 10^{7}\ [\mathrm{s}]\cdot\sqrt{\frac{(7{,}8\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}{(1{,}5\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}} = 3{,}74\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}$$

Pódense obter as respostas nas pestanas «2Astros» e «Satelites» da folla de cálculo Fisica (gal), Instrucións.
Copiar ([Ctrl] [C]), no enunciado, o dato do período da Terra ao redor do sol ($3{,}15\cdot 10^{7}$)
Ir á pestana «2Astros». En DATOS:

- Escribir «Terra» e «Júpiter», debaixo dos números 1 e 2.
- Elixir a opción «Período» debaixo de «Magnitude», e «s» para as unidades na cela de cor laranxa da dereita.
- Facer clic na cela de cor branca situada debaixo de «Terra» á dereita de «*T* =» e pegar sen formato ([Ctrl] [⇑] [Alt] [V]) o valor do período.
- Elixir a opción «Radio» debaixo de «Período», e «s luz» para as unidades na cela de cor laranxa da dereita.
- Escribir o valor do radio da órbita da Terra (500) na cela de cor branca situada á dereita de «*R* =», pulsar a tecla do tabulador [↹] e escribir o valor do radio da órbita de Júpiter (2600).

		1	2		Relación
Magnitude		Terra	Xúpiter		
Período	T =	3,15·10⁷		s	
Raio	R =	500	2600	s luz	

RESULTADOS:

		Terra	Xúpiter	
a)	T =		$3{,}74 \times 10^{8}$	s
c)	Masa central M =	$2{,}01 \times 10^{30}$		kg

Para calcular a velocidade de Xúpiter, hai que ir á pestana «Satelites» facendo clic na cela Satélites.
Copiar ([Ctrl] [C]) antes o valor da masa central. ($2{,}01 \times 10^{30}$)
Na pestana «Satelites»:

- Facer clic no botón Borrar datos, e facer clic no botón Aceptar.
- Facer clic na cela de cor branca situada á dereita de «M =» e pegar sen formato ([Ctrl] [⇑] [Alt] [V]) o valor da masa central.
- Facer clic na cela de cor laranxa situada encima de «Constante da gravitación» e elixir a opción «Período».
- Pulsar a tecla do tabulador [⇆] e escribir 3,74E8, pulsar a tecla do tabulador [⇆] e elixir a opción «s».
- Facer clic na cela de cor laranxa situada encima de «Período» e elixir a opción «Radio».
- Pulsar a tecla do tabulador [⇆] e escribir 3,74E8, pulsar a tecla do tabulador [⇆] e elixir a opción «s».

Astro	Masa M =		$2{,}01 \times 10^{30}$	kg
	Raio R =			
	Gravidade no chan	g_0 =		m/s²
Órbita	Masa satélite	m =		kg
	Raio	r =		
	Período	T =	3,74E+08	s
	Constante da gravitación	G =	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$	N·m²/kg²

RESULTADOS:

	Raio		km	Velocidade		Período	
Órbita	r =	$7{,}80 \times 10^{8}$		$1{,}31 \times 10^{4}$	m/s	11,9	anos

3. Un satélite GPS describe órbitas circulares ao redor da Terra, dando dúas voltas á Terra cada 24 h. Calcula:
   a) A altura da súa órbita sobre a superficie terrestre.
   b) A enerxía mecánica.
   c) O tempo que tardaría en dar unha volta á Terra si facémolo orbitar a unha altura dobre.
   Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m; masa do satélite = 150 kg.
   (A.B.A.U. extr. 17)

   Rta.: a) $h = 2{,}03 \cdot 10^{7}$ m; b) $E = -1{,}12 \cdot 10^{9}$ J; c) $T_c = 28$ h.

Datos	**Cifras significativas: 3**
Frecuencia da órbita	f = 2 voltas/24 h
Raio da Terra	$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m
Masa do satélite	m = 150 kg
Masa da Terra	$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Altura da órbita	h
Enerxía mecánica	E
O período, se a altura fose o dobre	T_c
Outros símbolos	
Raio da órbita orixinal	r
Valor da velocidade do satélite na órbita orixinal	v
Novo raio da órbita	r_c
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio r e período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal, v, nunha traxectoria circular de radio r	$a_N = \frac{v^2}{r}$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

A forza gravitacional, $\vec{F}_G$, que exerce un astro de masa M sobre un satélite de masa m que xira arredor del nunha órbita de radio r, é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión, G é a constante da gravitación universal, e $\vec{u}_r$, o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal, a_N. Ao non ter aceleración tanxencial, o módulo, v, da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.
A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio r, obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa, m, a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = m \cdot |\vec{a}|$$
$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo, F_G, da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio r e período T é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\,\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Despéxase o raio da órbita, r, e substitúense valores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\,\pi^2}}$$

A frecuencia é a inversa do período. O período orbital calcúlase a partir da frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{24 \text{ h}}{2} = 12 \text{ h} = 4{,}32 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Calcúlase o raio da órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \left[\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}\right] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \left[\text{kg}\right] \left(4{,}32 \cdot 10^4 \left[\text{s}\right]\right)^2}{4 \cdot 3{,}14^2}} = 2{,}66 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Calcúlase a altura restando o raio da Terra ao raio da órbita:

$$h = r - R = 2{,}66 \cdot 10^7 - 6{,}37 \cdot 10^6 = 2{,}02 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Análise: Aínda que non se pode prever un valor, a altura obtida é positiva.

b) Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \left[\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}\right] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \left[\text{kg}\right] \cdot 150 \left[\text{kg}\right]}{2{,}66 \cdot 10^7 \left[\text{m}\right]} = -2{,}25 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Calcúlase a enerxía cinética, substituíndo v^2 por $G\,M / r$:

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} = 1{,}12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A enerxía cinética é a metade e de signo contrario que a enerxía potencial.
A enerxía (mecánica) total é a suma das enerxías cinética e potencial, e vale o mesmo que a enerxía cinética, pero é negativa.

$$E = E_c + E_p = 1{,}12 \cdot 10^9 \text{ [J]} - 2{,}25 \cdot 10^9 \text{ [J]} = -1{,}12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c) Se a altura fose o dobre, o novo raio da órbita valería:

$$r_c = R + 2\,h = 6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^7 = 4{,}7 \cdot 10^7 \text{ m}$$

A velocidade do satélite valería:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\left[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}\right] \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}[\mathrm{kg}]}{4{,}7 \cdot 10^7[\mathrm{m}]}}=2{,}9 \cdot 10^3 \mathrm{~m/s}=2{,}9 \mathrm{~km/s}$$

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v=\frac{2 \pi \cdot R}{T} \Rightarrow T=\frac{2 \pi \cdot r}{v}=\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}7 \cdot 10^7[\mathrm{m}]}{2{,}9 \cdot 10^3[\mathrm{m/s}]}=1{,}0 \cdot 10^5 \mathrm{~s}=28 \mathrm{~h}$$

Análise: O período dun satélite aumenta coa altura. O valor obtido é maior que o da altura inicial.

As respostas e o seu cálculo poden verse na folla de cálculo Satélites (gal). Instrucións de uso.

Enunciado	**Datos:**	G =	6,67·10⁻¹¹	N·m²/kg²	
Un satélite de masa		m =	150	kg	
xira ao redor dun astro de masa		M =	5,98·10²⁴	kg	
e raio		R =	6,37·10⁶	m	
O satélite xira cunha	frecuencia	f =	2	día⁻¹	
Calcula:					
a) O raio/a altura da órbita.					
b) O peso do satélite na órbita.					
c) As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.					

Poden verse os seguintes resultados:

Respostas			Cifras significativas:	3
	Altura	Velocidade	clic ↓	
Órbita	2,03·10⁷ m			
	cinética	potencial	mecánica J	
Enerxía na órbita	1,12·10⁹ J	−2,25·10⁹ J	−1,12·10⁹ J	

Os cálculos poden verse nas pestanas «Periodo», «Altura» e «Enerxia».

a) A altura na pestana «Altura».

Raio da órbita	$r=\sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4 \pi^2}}$	$r=\sqrt[3]{\frac{3{,}99 \cdot 10^{14} \cdot (4{,}32 \cdot 10^4)^2}{4 \cdot 3{,}14^2}}$	=	$2{,}66 \cdot 10^7$ m
Altura da órbita	$h = r - R$	$h = 2{,}66 \cdot 10^7 - 6{,}37 \cdot 10^6$	=	$2{,}03 \cdot 10^7$ m

Como dato emprégase o valor do período, que pode verse como se calcula na pestana «Periodo»

Período do satélite	$T=\frac{1}{f}$	$T=\frac{86\,400}{2{,}00}$	=	$4{,}32 \cdot 10^4$ s

(86 400 son os segundos que ten un día, xa que a frecuencia é de 2 día⁻¹).

b) A enerxía mecánica na pestana «Enerxía».

	$v=\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$	$v=\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}66 \cdot 10^7}{4{,}32 \cdot 10^4}$	=	$5{,}48 \cdot 10^3$ m/s
Enerxía cinética na órbita	$E_c = ½\ m \cdot v^2$	E_c = 150 · (4,32·10⁴)² / 2	=	$1{,}12 \cdot 10^9$ J
Enerxía potencial na órbita	$E_p=\frac{-G \cdot M \cdot m}{r}$	$E_p=\frac{-3{,}99 \cdot 10^{14} \cdot 150}{2{,}66 \cdot 10^7}$	=	$-2{,}25 \cdot 10^9$ J
Enerxía mecánica na órbita	$E = E_c + E_p$	$E = -2{,}25 \cdot 10^9 + 1{,}12 \cdot 10^9$	=	$-1{,}12 \cdot 10^9$ J

Para o apartado c) hai que borrar a opción «frecuencia», o seu valor e as súas unidades, e elixir encima dela a opción «altura», escribir na cela de cor branca «=2*2,03E7» (sen as comiñas pero co signo =, ou calculalo a man e escribir o resultado en calquera das formas: 4,06E7 ó $4{,}06·10^7$) e elixir a unidade «m».

A órbita é circular de	altura	h =	40 600 000	m

En «**Respostas**», elixir «Periodo» debaixo de «Cifras significativas:» e elixir «h» como unidade.

Respostas				Cifras significativas:	3	
	Altura		Velocidade	clic ↓	Periodo	
Órbita	$4{,}06·10^7$	m			28,1	h

● Campo gravitacional

1. Unha nave sitúa un obxecto de 20 kg de masa entre a Terra e o Sol nun punto onde a forza gravitacional neta sobre o obxecto é nula. Calcula nese punto:
   a) A distancia do obxecto ao centro da Terra.
   b) A aceleración da Terra debida á forza que o obxecto exerce sobre ela.
   DATOS: $G = 6{,}67×10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M(\text{T}) = 5{,}98×10^{24}$ kg; $M(\text{S}) = 2{,}00×10^{30}$ kg; distancia Terra-Sol = $1{,}50×10^{11}$ m. *(A.B.A.U. ord. 24)*
   Rta.: a) $r = 2{,}59·10^8$ m; b) $a = 1{,}99·10^{-26}$ m/s².

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa da Terra	$M(\text{T}) = 5{,}98·10^{24}$ kg
Masa do Sol	$M(\text{S}) = 2{,}00·10^{30}$ kg
Masa do obxecto	$m = 20{,}0$ kg
Distancia Terra-Sol	$d = 1{,}50·10^{11}$ m
Constante da gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Distancia do obxecto ao centro da Terra.	r
Aceleración da Terra debida á forza que o obxecto exerce sobre ela	a
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal. (Forza entre corpos esféricos ou puntuais)	$\vec{F} = -G\dfrac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$
2.ª lei de Newton da Dinámica	$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

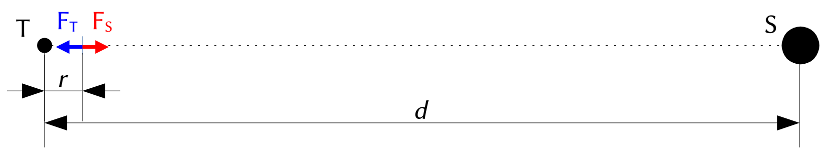
Solución:

a) A forza de atracción gravitacional entre dúas masas puntuais ou esféricas, M e m, vén dada pola lei da gravitación de Newton. G é a constante da gravitación universal e $\vec{u}_r$ o vector unitario na liña que une as masas.

$$\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

Escríbese a ecuación da forza gravitacional sobre o obxecto, que é nula;

$$-G\frac{M(\text{S}) \cdot m}{(d-r)^2}\vec{u}_{r\text{S}} + \left(-G\frac{M(\text{T}) \cdot m}{r^2}\vec{u}_{r\text{T}}\right) = \vec{0}$$



Elíxese un sistema de coordenadas coa Terra na orixe, porque o punto onde se anula a forza ten que estar moito mías cerca da Terra que do Sol, que ten unha masa moito maior. O Sol sitúase no sentido positivo do eixe *X*.
O vector unitario da posición do Sol neste sistema $\vec{u}_{rS}$ é o vector $\mathbf{\bar{i}}$, unitario do eixe *X* en sentido positivo.
O vector unitario da Terra $\vec{u}_{rT}$, tomando o Sol coma orixe, é o vector unitario contrario $-\mathbf{\bar{i}}$.
Substitúense os vectores unitarios na ecuación e reordénase:

$$-G\frac{M(\mathrm{S})\cdot m}{(d-r)^2}\vec{\mathbf{i}}+\left(-G\frac{M(\mathrm{T})\cdot m}{r^2}(-\vec{\mathbf{i}})\right)=0\,\vec{\mathbf{i}}$$

$$-\cancel{G}\frac{M(\mathrm{S})\cdot \cancel{m}}{(d-r)^2}+\cancel{G}\frac{M(\mathrm{T})\cdot \cancel{m}}{r^2}=0$$

$$\frac{M(\mathrm{S})}{(d-r)^2}=\frac{M(\mathrm{T})}{r^2} \Rightarrow (d-r)^2=\frac{M(\mathrm{S})}{M(\mathrm{T})}r^2 \Rightarrow d-r=\sqrt{\frac{M(\mathrm{S})}{M(\mathrm{T})}}r \Rightarrow d=r\left(1+\sqrt{\frac{M(\mathrm{S})}{M(\mathrm{T})}}\right)$$

Despéxase *r* e substitúense os valores:

$$r=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{M(\mathrm{S})}{M(\mathrm{T})}}}=\frac{1{,}50\cdot 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{1+\sqrt{\frac{2{,}00\cdot 10^{30}\ [\mathrm{kg}]}{5{,}98\cdot 10^{24}\ [\mathrm{kg}]}}}=2{,}59\cdot 10^{8}\ \mathrm{m}$$

Análise: A distancia obtida é moito menor que a que hai entre o Sol e a Terra e o punto sitúase cerca da Terra.

b) Aplícase a 2.ª lei de Newton da Dinámica en módulos e despéxase a aceleración que produce a masa de 20 kg sobre o planeta Terra:

$$a=\frac{F}{M(\mathrm{T})}=\frac{G\frac{m\cdot \cancel{M(\mathrm{T})}}{r^2}}{\cancel{M(\mathrm{T})}}=G\frac{m}{r^2}=6{,}667\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\frac{20\ [\mathrm{kg}]}{(2{,}59\cdot 10^{8}\ [\mathrm{m}])^2}=1{,}99\cdot 10^{-26}\ \mathrm{m/s^2}$$

Pódense obter respostas na pestana «Equil2QoM» da folla de cálculo Fisica (gal), Instrucións.
En DATOS, escribir:

	Constante	G =	6,67·10⁻¹¹	N·m²·kg⁻²	
Masa	kg		*x*	*y*	
5,98×10²⁴	M		0	0	m
2,00×10³⁰	N		1,50×10¹¹	0	
Equilibrio en	A				
M móbil	Punto				
20					
			Potencial (J/kg)	Campo (N/kg)	***u***
No punto	A			0	**i**

Aparece o seguinte resultado, se deixou 3 como número de cifras significativas:

	x	*y*	
Posición do punto A:	2,59·10⁸	0	m

A aceleración non a calcula a folla. Para obtela debe escribir en OUTROS CÁLCULOS a fórmula:

=NUMFORMA(AVALOR(I2)*F10/(AVALOR(I6)-AVALOR(J17))^2 + (AVALOR(K6)-AVALOR(K17))^2)

que corresponde a: G · m / ((x(M)-x(A))² + (y(M)-y(A))²)
Ten que seleccionar un dos dous valores da constante G. Non é suficiente con que se vexa o valor na folla.

2. A masa do planeta Marte é 0,107 veces a masa da Terra e o seu raio é 0,533 veces o raio da Terra. Calcula:
   a) O tempo que tarda un obxecto en chegar á superficie de Marte se se deixa caer desde unha altura de 50 m.
   b) A velocidade de escape dese obxecto desde a superficie do planeta.
   Datos: g = 9,81 m·s⁻²; R_T = 6,37·10⁶ m. *(A.B.A.U. ord. 21)*
   Rta.: a) t = 5,21 s; b) v_e = 5,01·10³ m/s.

Datos	**Cifras significativas: 3**
Masa de Marte	$M_M = 0{,}107\ M_T$
Raio de Marte	$R_M = 0{,}533\ R_T$
Altura desde a que se deixa caer	h = 50,0 m
Aceleración da gravidade na Terra	g_0 = 9,81 m/s²
Raio da Terra	R_T = 6,37·10⁶ m
Incógnitas	
Tempo que tarda en caer á superficie de Marte desde unha altura de 50 m	t
Velocidade de escape en Marte	v_e
Outros símbolos	
Masa da Terra	M_T
Constante da gravitación universal	G
Ecuacións	
Lei de Newton da gravitación universal, en módulos. (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)	$F_G = G\frac{M \cdot m}{r^2}$
Peso dun obxecto de masa m na superficie dun planeta cuxa aceleración da gravidade é g_0	$P = m \cdot g_0$
Ecuación da caída libre (movemento uniformemente acelerado)	$h = v_0 \cdot t + ½\ g \cdot t^2$
Enerxía cinética dunha masa, m, que se move cunha velocidade, v	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)	$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$
Enerxía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Hai que calcular o valor da gravidade na superficie de Marte.
O peso dun obxecto preto da superficie da Terra é a forza coa que a Terra o atrae:

$$m \cdot g_T = G\frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Analogamente, o peso dun obxecto preto da superficie de Marte é a forza coa que a Marte o atrae:

$$m \cdot g_M = G\frac{M_M \cdot m}{R_M^2}$$

Dividindo a segunda ecuación entre a primeira, queda:

$$\frac{\cancel{m} \cdot g_M}{\cancel{m} \cdot g_T} = \frac{\cancel{G}\frac{M_M \cdot \cancel{m}}{R_M^2}}{\cancel{G}\frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{M_M / M_T}{(R_M / R_T)^2} = \frac{0{,}107}{0{,}533^2} = 0{,}375$$

Despexando:

$$g_M = 3,69 \text{ m/s}^2$$

Análise: O resultado é razoable, xa que sabemos que a gravidade na superficie de Marte é unhas 3 *veces menor que na superficie da Terra.*

Calcúlase o tempo da ecuación da caída libre, sen velocidade inicial:

$$h = ½\, g \cdot t^2 \Rightarrow \quad t=\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_M}}=\sqrt{\frac{2 \cdot 50,0}{3,69}}=5,21 \text{ s}$$

b)
A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.
A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía, ΔE, necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómase coma orixe de enerxías potenciais.
Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.
A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa m situado na superficie dun astro de masa M e radio R é:

$$E_p=-G\frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.
A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s=(E_c+E_p)_s=0+\left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right)=-G\frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape v_e comunicaríalle a enerxía ΔE necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = ½\, m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m\, v_e^2=0-\left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right)=G\frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e=\sqrt{2\, G \frac{M}{R}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal, G, ou da masa do astro, M, pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo, $m \cdot g_0$, é igual á forza gravitacional:

$$\cancel{m}\, g_0=G\frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

R representa o raio de astro e g_0 o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.
A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Hai que calcular tamén o raio de Marte:

$$R_M = 0,533\, R_T = 0,533 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 3,40 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Calcúlase a velocidade de escape substituíndo $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$v_e=\sqrt{\frac{2\,g_0\cdot R_M^2}{R_M}}=\sqrt{2\,g_0\cdot R_M}=\sqrt{2\cdot 3{,}69\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(3{,}40\cdot 10^6\ [\mathrm{m}])^2}=5{,}01\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}=5{,}01\ \mathrm{km/s}$$

Pódense obter respostas na pestana «2Astros» da folla de cálculo Fisica (gal), Instrucións.
Copiar ([Ctrl] [C]), no enunciado, o dato do raio da Terra (6,37×10⁶)
Ir á pestana «2Astros», en DATOS:

- Escribir «Marte» e «Terra», debaixo dos números 1 e 2.
- Elixir as opcións «Masa», «Raio» e «Gravidade» debaixo de «Magnitude».
- Facer clic na cela de cor branca situada á dereita de «Raio» e debaixo de «Terra» e pegar sen formato ([Ctrl], [Alt], [⇧] e [V]).
- Pulsar a tecla do tabulador [⭾] e elixir «m» para as unidades na cela de cor laranxa da dereita.
- Facer clic na cela de cor branca situada debaixo de «Terra» á dereita de «g =» e escribir o valor da aceleración da gravidade na Terra (9,81).
- Elixir «m/s²» para as unidades na cela de cor laranxa da dereita.
- Facer clic na cela de cor laranxa situada debaixo de «Relación» e elixir a opción «A₁ / A₂».
- Facer clic na cela de cor branca situada debaixo e escribir o valor da relación de masas (0,107).
- Facer clic na cela de cor branca situada debaixo e escribir o valor da relación de radios (0,533).

		1	2		Relación
Magnitude		Marte	Terra		A₁ / A₂
Masa	M =				0,11
Raio	R =		6,37×10⁶	m	0,53
Gravidade	g =		9,81	m/s²	

En RESULTADOS aparece a gravidade en Marte:

	Marte	Terra	
M =	6,38×10²³	5,96×10²⁴	kg
R =	3,40×10⁶		m
g =	3,69		m/s²

O tempo que tarda en chegar ao chan non o calcula esta folla. Debe facerse coa ecuación do MRUA
$s = v_0\ t + ½\ a\ t^2$. Despexando e substituíndo: $t = \sqrt{(2\ s\ /\ a)}$
En OUTROS CÁLCULOS escriba á dereita de «Fórmula» =RAÍZC(250/3,69)

OUTROS CÁLCULOS								
Etiqueta:	t (caer)							
Fórmula:	5,21							

b) A velocidade de escape dese obxecto desde a superficie do planeta obtense elixindo en RESULTADOS as opcións «Velocidade» e «alcanzar o infinito» na liña de «no chan para»:

Velocidade	no chan para	alcanzar o infinito	v(esc.) =	**5,01·10³** m/s

Cuestións e problemas das Probas de avaliación de Bacharelato para o acceso á Universidade (A.B.A.U. e P.A.U.) en Galiza.
Respostas e composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algúns cálculos fixéronse cunha folla de cálculo de LibreOffice do mesmo autor.
Algunhas ecuacións e as fórmulas orgánicas construíronse coa extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
A tradución ao/desde o galego realizouse coa axuda de *traducindote*, e de o tradutor da CIXUG.
Procurouse seguir as recomendacións do Centro Español de Metroloxía (CEM).
Consultouse ao Copilot de Microsoft Edge e tivéronse en conta algunhas das súas respostas nas cuestións.

Actualizado: 22/06/25

Sumario