

## Gravitación

[Método, aproximacións e recomendacións](#)

### ● Satélites

- O Sentinel-1 é un satélite artificial de órbita circular polar da Axencia Espacial Europea dentro do Programa Copérnico destinado á monitorización terrestre e dos océanos. Está situado a 693 km sobre a superficie terrestre. Si a súa masa é de 200 kg:
  - As velocidades lineal e angular do satélite na órbita.
  - O período da órbita do satélite. Cantas voltas dá á Terra cada día?
  - A masa da Terra.
  - O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra.
  - As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.
  - A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra e a velocidade de escape á atracción terrestre a esa altura.
  - Que velocidade houbo que proporcionarlle no lanzamento para poñelo en órbita?
  - A velocidade de escape desde o chan.
  - O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra.
  - A forza con que a Terra atrae ao satélite.

Datos:  $R = 6,37 \cdot 10^6$  m;  $g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup>

*Problema con datos de A.B.A.U. extr. 23*

**Rta.:** a)  $v = 7,51$  km/s;  $\omega = 1,06 \cdot 10^{-3}$  rad/s; b)  $T = 1$  h 39 min,  $f = 14,6$  día<sup>-1</sup>; c) Faltan datos;  
 d)  $|\vec{L}_O| = 1,06 \cdot 10^{13}$  kg·m<sup>2</sup>/s; e)  $E_c = 5,64 \cdot 10^9$  J;  $E_p = -1,13 \cdot 10^{10}$  J;  $E = -5,64 \cdot 10^9$  J;  
 f)  $\Delta E = -E = 5,64 \cdot 10^9$  J;  $v_{eo} = 7,51$  km/s; f)  $v_s = 8,3$  km/s; g)  $g_h/g_0 = 0,824$ ; h)  $v_{es} = 11,2$  km/s;  
 i)  $g = 0,81$  g<sub>0</sub>; j)  $F = 1,6 \cdot 10^3$  N

#### **Datos**

Masa do satélite

Altura da órbita

Raio da Terra

Aceleración da gravidade na superficie da Terra

#### **Incógnitas**

Valor das velocidades lineal e angular do satélite

Período e frecuencia orbital do satélite

Módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra.

Enerxía cinética, potencial e mecánica do satélite en órbita

Enerxía para mandalo a unha distancia moi grande da Terra

Velocidade de escape desde esa altura

Velocidade desde a superficie para poñelo en órbita

Cociente entre os valores de  $g$  no satélite e na superficie da Terra.

Forza con que a Terra atrae ao satélite

#### **Outros símbolos**

Masa da Terra

Constante da gravitación universal

#### **Ecuacións**

Lei de Newton da gravitación universal

(forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)

Velocidade dun satélite a unha distancia  $r$  do centro dun astro de masa  $M$

Velocidade nun movemento circular uniforme de raio  $r$  e período  $T$

Velocidade angular nun movemento circular uniforme de período  $T$

Enerxía cinética

Enerxía potencial gravitacional (referida ao infinito)

#### **Cifras significativas: 3**

$m = 200$  kg

$h = 693$  km =  $6,93 \cdot 10^5$  m

$R = 6,37 \cdot 10^6$  m

$g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup>

$v, \omega$

$T, f$

$|\vec{L}_O|$

$E_c, E_p, E$

$E_\infty$

$v_e$

$v_s$

$g_h/g_0$

$F$

$M$

$G$

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

**Ecuacións**

Enerxía mecánica

$$E = E_c + E_p$$

Intensidade do campo gravitacional terrestre a unha distancia  $r$  do centro

$$g = \frac{F_G}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

Momento angular  $\vec{L}_O$  dunha partícula de masa  $m$  que se move cunha velocidade  $\vec{v}$  a unha distancia  $\vec{r}$  dun punto O que se toma como orixe

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

**Solución:**

a) O satélite describe unha traxectoria aproximadamente circular de raio

$$r = R + h = 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6,93 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7,06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

A forza gravitacional,  $\vec{F}_G$ , que exerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que xira arredor del nunha órbita de radio  $r$ , é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión,  $G$  é a constante da gravitación universal, e  $\vec{u}_r$ , o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal,  $a_N$ . Ao non ter aceleración tangencial, o módulo,  $v$ , da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio  $r$ , obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa,  $m$ , a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo,  $F_G$ , da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal,  $G$ , ou da masa do astro,  $M$ , pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo,  $m \cdot g_0$ , é igual á forza gravitacional:

$$m g_0 = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$R$  representa o raio de astro e  $g_0$  o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.

A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Calcúlase a velocidade orbital substituíndo na ecuación  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$ .

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 7,51 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7,51 \text{ km/s}$$

*Análise: Espérase que un obxecto que se mova ao redor da Terra teña unha velocidade dalgún km/s. O resultado está de acordo con esta suposición.*

A velocidade angular podería calcularse coñecendo o período.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

b) O período calcúlase coa expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{7,51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 5,91 \cdot 10^3 \text{ s} = 1,64 \text{ h}$$

Agora xa se pode calcular a velocidade angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \text{ [rad]}}{5,91 \cdot 10^3 \text{ [s]}} = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

A frecuencia é a inversa do período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,64 \text{ [h]}} \cdot \frac{24,0 \text{ [h]}}{1 \text{ [día]}} = 14,6 \text{ día}^{-1}$$

*Análise: Os períodos dos satélites terrestres en órbita baixa son da orde de hora e media, parecido ao resultado.*

c) Non se pode calcular a masa da Terra se non se ten como dato o valor da constante da gravitación universal.

Nese caso usárase a expresión « $G \cdot M = g_0 \cdot R^2$ » que se obtivo antes:

$$M = \frac{g_0 \cdot R^2}{G} = \frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ [N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}\text{]}} = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

d) O momento angular  $\vec{L}_0$  dunha partícula de masa  $m$  que se move cunha velocidade  $\vec{v}$  respecto dun punto Ou que se toma como orixe é:

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra é:

$$|\vec{L}_0| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha = 7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]} \cdot 200 \text{ [kg]} \cdot 7,51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]} \cdot \sin 90^\circ = 1,06 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

e) A enerxía potencial na órbita vale:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 200 \text{ [kg]}}{7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = -1,13 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

A enerxía cinética vale:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = [200 \text{ [kg]}] (7,51 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 5,64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A enerxía mecánica é a suma das enerxías cinética e potencial:

$$E = E_c + E_p = 5,64 \cdot 10^9 \text{ [J]} + (-1,13 \cdot 10^{10} \text{ [J]}) = -5,64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

*Análise: Pódese demostrar que a enerxía mecánica ten o valor oposto ao da enerxía cinética substituíndo  $G \cdot M / r$  por  $v^2$  na expresión da enerxía mecánica:*

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra sería a diferenza entre a enerxía a unha distancia moi grande e a que ten na órbita:

$$\Delta E = E_\infty - E$$

Ao ser la enerxía mínima, tómasse que o obxecto chega ao infinito con velocidade nula. Como a orixe de enerxía potencial gravitacional está no infinito, a enerxía potencial gravitacional dun obxecto no infinito é nula.

$$E_\infty = 0$$

$$\Delta E = -E = 5,64 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A enerxía necesaria sería:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_p)_1$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{r} \right) = G \frac{M \cdot m}{r}$$

Despexando, a velocidade de escape dun satélite en órbita, queda:

$$v_{e\ o} = \sqrt{2G \frac{M}{r}}$$

Se a dirección de escape é perpendicular á velocidade do satélite, esta é a velocid perpendicular que hai que proporcionarlle.

Se a dirección de escape é paralela á dirección do movemento do satélite, hai que ter en conta a súa enerxía cinética.

Se o sentido de velocidade de escape fose o mesmo que o de avance do satélite, haberá que proporcionarlle unha velocidade adicional igual á diferenza entre a velocidade de escape e a que xa ten.

$$v_e = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,81 \text{ [m/s}^2] \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 7,51 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 7,51 \text{ km/s}$$

*Análise: A velocidade de escape na superficie da Terra é de 11,2 km/s. O resultado está de acordo con este dato tendo en conta que ao estar o satélite lonxe da superficie, a súa velocidade de escape será menor.*

g) A velocidade que houbo que proporcionarlle no lanzamento para poñelo en órbita, pódese calcular supoñendo que, unha vez comunicada esa velocidade, a enerxía consérvase até a órbita.

Tendo en conta que a enerxía potencial na superficie da Terra vale:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R} = g_0 \cdot R \cdot m = -9,81 \text{ [m/s}^2] \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} \cdot 200 \text{ [kg]} = -1,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

A enerxía cinética do satélite cando ten a velocidade necesaria valerá:

$$E_{cs} = E - E_{ps} = -5,64 \cdot 10^9 \text{ [J]} - (-1,25 \cdot 10^{10} \text{ [J]}) = 6,9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

*Análise: [Pérdese unha cifra significativa ao restar.](#)*

A súa velocidade será:

$$v_s = \sqrt{\frac{2 E_{cs}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,9 \cdot 10^9 \text{ [J]}}{200 \text{ [kg]}}} = 8,3 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 8,3 \text{ km/s}$$

*Análise: A velocidade ten que ser menor que a velocidade de escape desde o chan, que é de 11,2 km/s. O resultado está de acordo con esta suposición.*

h) La velocidade de escape desde o chan.

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro do astro.

A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía,  $\Delta E$ , necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómasse coma orixe de enerxías potenciais.

Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.

A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa  $m$  situado na superficie dun astro de masa  $M$  e radio  $R$  é:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.

A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape  $v_e$  comunicaríalle a enerxía  $\Delta E$  necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$

Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}}$$

(A velocidade dun punto no chan, no ecuador, con respecto ao centro da Terra sería:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{24 \text{ [h]}} \frac{1 \text{ [h]}}{3600 \text{ [s]}} = 463 \text{ m/s}$$

Nun punto situado na latitude  $\lambda$ , o raio (distancia ao eixe da Terra) sería  $r = R \cos \lambda$ , e a velocidade,  $v = 463 \cos \lambda$ .

Se fose lanzada paralela ao chan, a velocidade de escape dependería do sentido do lanzamento. Habería que restar, cara ao leste, ou sumar, cara ao oeste, a velocidade de rotación do punto de lanzamento).

Supoñendo que se lanza verticalmente, e substituíndo  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$ :

$$v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{2 g_0 \cdot R^2}{R}} = \sqrt{2 g_0 \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$$

i) A intensidade do campo gravitacional nun punto que dista  $r$  do centro da Terra é a forza sobre a unidade de masa situada nese punto.

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{\cancel{m} r^2} = G \frac{M}{r^2}$$

A gravidade a unha altura  $h$  vale:

$$g_h = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

Na superficie da Terra vale:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

Dividindo a primeira entre a segunda queda:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\cancel{G} \cdot \cancel{M} / (R+h)^2}{\cancel{G} \cdot \cancel{M} / R^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{(6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{(7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2} = 0,814$$

Análise: O valor da aceleración da gravidade diminúe coa altura. O resultado está de acordo con isto.

j) A forza con que a Terra atrae ao satélite vale:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot m = g_0 \cdot 0,824 \cdot m = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot 0,84 \cdot 200 \text{ [kg]} = 1,60 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Tamén pode calcularse sen ter en conta o apartado anterior.

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r^2} = \frac{9,81 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 200 \text{ [kg]}}{(7,06 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2} = 1,60 \cdot 10^3 \text{ N}$$

As respostas e o seu cálculo poden verse coa folla de cálculo [Satélites \(gal\)](#). Escribindo os datos nas celas de cor branca e bordo azul, e facendo clic e elixindo as magnitudes e unidades nas celas de cor salmón:

Enunciado	Datos:
Un satélite de masa	$m =$ <input type="text" value="200"/> kg
xira arredor dun astro de masa	$M =$ <input type="text"/> kg
e raio	$R =$ <input type="text" value="6,37·10&lt;sup&gt;6&lt;/sup&gt;"/> m
no que a gravidade no chan é	$g_0 =$ <input type="text" value="9,81"/> m/s <sup>2</sup>
A órbita é circular de	altura <input type="text" value="693"/> km
	<input type="text"/>

**Calcula:**

- O período da órbita do satélite e a súa velocidade
- O peso do satélite na órbita
- As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.

Poden verse os seguintes resultados, elixindo nas celas de cor salmón as opcións «km/s» para a velocidade da órbita, «Período» e «s» para as súas unidades, «Enerxía na órbita», «Velocidade» no chan para «poñelo en órbita» e «Momento angular» na órbita.

Respostas	Cifras significativas: <input type="text" value="3"/>		
a) e b) Órbita	Raio <input type="text" value="7,06·10&lt;sup&gt;6&lt;/sup&gt;"/> m	Velocidade <input type="text" value="7,51"/> km/s	Período <input type="text" value="5,90·10&lt;sup&gt;3&lt;/sup&gt;"/> s
e) Enerxía na órbita	cinética <input type="text" value="5,64·10&lt;sup&gt;9&lt;/sup&gt;"/> J	potencial <input type="text" value="-1,13·10&lt;sup&gt;10&lt;/sup&gt;"/> J	mecánica <input type="text" value="-5,64·10&lt;sup&gt;9&lt;/sup&gt;"/> J
c) Terra		$M =$	<input type="text" value="5,96·10&lt;sup&gt;24&lt;/sup&gt;"/> kg
g) Velocidade	no chan para	poñelo en órbita	<input type="text" value="8,28"/> km/s
d) Momento angular	na órbita		<input type="text" value="1,06·10&lt;sup&gt;13&lt;/sup&gt;"/> kg·m <sup>2</sup> /s

Outros resultados poden verse nesta pestana, modificando a elección nas celas de cor salmón.

b) Frecuencia. Cambiar «Período» por «Frecuencia» e elixir a unidade «día<sup>-1</sup>».

Órbita	<input type="text"/>	clic ↓	Velocidade	clic ↓	Frecuencia
					<input type="text" value="14,6"/> día <sup>-1</sup>

c) Aparece o resultado da masa da Terra, porque a folla contén o dato da constante G.

h) A velocidade de escape desde o chan. Cambiar «poñelo en órbita» por «mandalo ao infinito».

Velocidade	no chan para	mandalo ao infinito	<input type="text" value="1,12·10&lt;sup&gt;4&lt;/sup&gt;"/> m/s
------------	--------------	---------------------	--

i) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra. Cambiar «Momento angular» por «Gravidade relativa».

Gravidade relativa na órbita **0,813 g<sub>0</sub>**

j) A forza con que a Terra atrae ao satélite. Cambiar «Gravidade relativa» por «Forza gravitacional».

Forza gravitacional na órbita **1,60·10<sup>3</sup> N**

Os cálculos poden verse nas pestanas «Periodo», «Peso» e «Enerxia».

a) As velocidades lineal e angular do satélite na órbita. Pestana «Periodo»

Velocidade do satélite	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$	$v = \sqrt{\frac{3,99 \cdot 10^{14}}{7,06 \cdot 10^6}} = 7,52 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
Velocidade angular do satélite	$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$	$\omega = \frac{2 \cdot 3,14}{5,91 \cdot 10^3} = 0,00106 \text{ rad/s}$

b) O período da órbita do satélite. Cantas voltas dá á Terra cada día? Pestana «Periodo»

Periodo do satélite	$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$	$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,06 \cdot 10^6}{7,52 \cdot 10^3} = 5,90 \cdot 10^3 \text{ s}$
Frecuencia do satélite	$f = \frac{1}{T}$	$f = \frac{86400 \text{ s} \cdot \text{día}^{-1}}{5,91 \cdot 10^3 \text{ s}} = 14,6 \text{ día}^{-1}$

d) O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra. Pestana «Enerxia»

Momento angular	$L_o = r \cdot m \cdot v$	$L_o = 7,06 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 7,51 \cdot 10^3 = 1,06 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
-----------------	---------------------------	---

f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra e a velocidade de escape á atracción terrestre a esa altura. Pestana «Enerxia».

Non presenta o resultado da enerxía mínima, pero é a diferenza entre a enerxía no infinito, 0, e a enerxía mecánica na órbita.

Velocidade de escape na órbita	$v_e = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$	$v_e = \sqrt{\frac{3,98 \cdot 10^{14}}{7,06 \cdot 10^6}} = 7,51 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
--------------------------------	------------------------------------	---

h) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra. Nap estaña «Enunciado» debe aparecer como última opción «Gravidade relativa».

Gravidade relativa na órbita **0,813 g<sub>0</sub>**

Na pestana «Peso» pode verse:

Gravidade na altura	$g = \frac{G \cdot M}{r^2}$	$g = \frac{3,99 \cdot 10^{14}}{(7,06 \cdot 10^6)^2} = 7,98 \text{ m/s}^2$
Gravidade relativa	$\frac{g}{g_0}$	$= \frac{8,00}{9,81} = 0,813$

2. A luz do Sol tarda  $5 \cdot 10^2 \text{ s}$  en chegar á Terra e  $2,6 \cdot 10^3 \text{ s}$  en chegar a Xúpiter. Calcula:

a) O período de Xúpiter virando ao redor do Sol.

b) A velocidade orbital de Xúpiter.

c) A masa do Sol.

Datos:  $T$  (Terra) ao redor do Sol:  $3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . (Suponse as órbitas circulares) (P.A.U. Sep. 12)

**Rta.:** a)  $T = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}$ ;  $v = 1,31 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ ; b)  $M = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

**Datos**

Tempo que tarda a luz do Sol en chegar á Terra

**Cifras significativas: 3**

$t_1 = 5,00 \cdot 10^2 \text{ s} = 500 \text{ s}$

**Datos**

Tempo que tarda a luz do Sol en chegar a Xúpiter  
 Período orbital da Terra arredor do Sol  
 Velocidade da luz no baleiro  
 Constante da gravitación universal

**Incógnitas**

Período orbital de Xúpiter  
 Velocidade orbital de Xúpiter  
 Masa do Sol

**Outros símbolos**

Masa de Xúpiter ou a Terra  
 Distancia dun planeta ao Sol

**Ecuacións**

Lei de Newton da gravitación universal  
 (forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)  
 2.<sup>a</sup> lei de Newton da Dinámica

Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio  $r$  e período  $T$

Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal,  $v$ ,  
 nunha traxectoria circular de raio  $r$

**Cifras significativas: 3**

$t_2 = 2,60 \cdot 10^3$  s  
 $T_1 = 3,15 \cdot 10^7$  s  
 $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>·kg<sup>-2</sup>

 $T_2$  $v$  $M$  $m$  $r$ 

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

**Solución:**

Calcúlanse as distancias da Terra ao Sol e de Xúpiter ao Sol, tendo en conta a velocidade da luz.

Terra:  $r_1 = c \cdot t_1 = 3,00 \cdot 10^8$  [m/s]  $\cdot$   $5,00 \cdot 10^2$  [s] =  $1,50 \cdot 10^{11}$  m

Xúpiter:  $r_2 = c \cdot t_2 = 3,00 \cdot 10^8$  [m/s]  $\cdot$   $2,60 \cdot 10^3$  [s] =  $7,80 \cdot 10^{11}$  m

Resólvese primeiro o último apartado.

c) A masa do Sol pode calcularse da expresión da velocidade dun satélite que xira a unha distancia  $r$  arredor do centro dun astro de masa  $M$ .

A forza gravitacional,  $\vec{F}_G$ , que exerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que xira arredor del nunha órbita de radio  $r$ , é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión,  $G$  é a constante da gravitación universal, e  $\vec{u}_r$ , o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal,  $a_N$ . Ao non ter aceleración tangencial, o módulo,  $v$ , da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.

A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio  $r$ , obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

A 2.<sup>a</sup> lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa,  $m$ , a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para os módulos, queda:



$$|\sum \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo,  $F_G$ , da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{r}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade da Terra arredor do Sol calcúlase a partir do seu período orbital:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{3,15 \cdot 10^7 [\text{s}]} = 2,99 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Despéxase a masa do Sol da velocidade orbital da Terra como satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \Rightarrow M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(2,99 \cdot 10^4 [\text{m/s}])^2 \cdot 1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]} = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

b) Emprégase a ecuación anterior para calcular a velocidade de Xúpiter:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 2,01 \cdot 10^{30} [\text{kg}]}{7,80 \cdot 10^{11} [\text{m}]} = 1,31 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 13,1 \text{ km/s}$$

a) O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi \cdot r_2}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,80 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{1,31 \cdot 10^4 [\text{m/s}]} = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

*Análise: A terceira lei de Kepler di que os cadrados dos períodos son directamente proporcionais aos cubos dos raiovetores que unen ao Sol cos planetas. A maior distancia ao Sol, maior período. Este método daría:*

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = 3,15 \cdot 10^7 [\text{s}] \cdot \sqrt{\frac{(7,8 \cdot 10^{11} [\text{m}])^3}{(1,5 \cdot 10^{11} [\text{m}])^3}} = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

As respostas e o seu cálculo poden verse con a folia de cálculo [Satélites \(gal\)](#). Escribindo os datos nas celas de cor branca e bordo azul, e facendo clic e elixindo as magnitudes e unidades nas celas de cor salmón: Calcúlase primeiro a masa do Sol escribindo os datos da Terra.

**Introdución de datos.** (Pestana: «Enunciado»)

Un satélite de masa		$m =$		kg
xira ao redor dun astro de masa		$M =$		kg
e raio		$R =$		
no que a gravidade no chan é		$g_o =$		m/s <sup>2</sup>
A órbita é circular de	raio	$r =$	5,00E+02	s luz
O satélite xira cun	período	$T =$	3,15E+07	s

O resultado atópase debaixo, na rexión de «Respostas».

**Respostas**

Cifras significativas:

Sol

$M = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

**Cálculo de la masa do Sol.** (Pestana: «Periodo»)

Masa do astro	$M = 4 \cdot \pi^2 \cdot r^3$	$M = 4 \cdot 3,14^2 \cdot (1,50 \cdot 10^{11})^3$	$= 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
---------------	-------------------------------	---	-----------------------------------

$$G \cdot T^2$$

$$6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3,15 \cdot 10^7)^2$$

Escríbense agora a masa do Sol e os datos de Xúpiter:

**Introdución de datos.** (Pestana: «Enunciado»)

Un satélite de masa	$m =$		kg
xira ao redor dun astro de masa	$M =$	2,01E+30	kg
e raio	$R =$		
			m/s <sup>2</sup>
A órbita é circular de	raio	$r =$	2,60E+03 s luz
O satélite xira cunhas			

<b>Respostas</b>	<b>clic ↓</b>		Cifras significativas:	
		<b>clic ↓</b>	Velocidade	Periodo
Órbita			<b>13,1 km/s</b>	<b>11,8 anos</b>

**Cálculo del período e da velocidade.** (Pestana: «Periodo»)

Raio da órbita		$r = 2,60 \cdot 10^3 \cdot 3,00 \cdot 10^8 = 7,79 \cdot 10^{11} \text{ m}$
		$G \cdot M = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,01 \cdot 10^{30} = 1,34 \cdot 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Velocidade do satélite	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$	$v = \sqrt{\frac{1,34 \cdot 10^{20}}{7,79 \cdot 10^{11}}} = 1,31 \cdot 10^4 \text{ m/s}$
Periodo do satélite	$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$	$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 7,79 \cdot 10^{11}}{1,31 \cdot 10^4} = 3,73 \cdot 10^8 \text{ s}$

3. Un satélite GPS describe órbitas circulares ao redor da Terra, dando dúas voltas á Terra cada 24 h. Calcula:

- A altura da súa órbita sobre a superficie terrestre.
  - A enerxía mecánica.
  - O tempo que tardaría en dar unha volta á Terra si facémolo orbitar a unha altura dobre.
- Datos:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ; masa do satélite = 150 kg.

(A.B.A.U. extr. 17)

**Rta.:** a)  $h = 2,03 \cdot 10^7 \text{ m}$ ; b)  $E = -1,12 \cdot 10^9 \text{ J}$ ; c)  $T_c = 28 \text{ h}$ .

#### Datos

Frecuencia da órbita  
Raio da Terra  
Masa do satélite  
Masa da Terra  
Constante da gravitación universal

#### Incógnitas

Altura da órbita  
Enerxía mecánica  
O período, se a altura fose o dobre

#### Outros símbolos

Raio da órbita orixinal  
Valor da velocidade do satélite na órbita orixinal  
Novo raio da órbita

#### Cifras significativas: 3

$f = 2 \text{ voltas}/24 \text{ h}$   
 $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$   
 $m = 150 \text{ kg}$   
 $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$   
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$h$

$E$

$T_c$

$r$

$v$

$r_c$

**Ecuacións**

Lei de Newton da gravitación universal

(forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)

2.ª lei de Newton da Dinámica

Velocidade lineal nun movemento circular uniforme de raio  $r$  e período  $T$ Aceleración normal dun obxecto que se move cunha velocidade lineal,  $v$ , nunha traxectoria circular de radio  $r$ Energía cinética dunha masa,  $m$ , que se move cunha velocidade,  $v$ 

Energía potencial gravitacional (referida ao infinito)

Energía mecánica

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

**Solución:**

A forza gravitacional,  $\vec{F}_G$ , que exerce un astro de masa  $M$  sobre un satélite de masa  $m$  que xira arredor del nunha órbita de radio  $r$ , é unha forza central, está dirixida cara ao astro, e réxese pola lei de Newton da gravitación universal:

$$\vec{F}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Nesta expresión,  $G$  é a constante da gravitación universal, e  $\vec{u}_r$ , o vector unitario na dirección da liña que une o astro co satélite. En módulos:

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En moitos casos a traxectoria do satélite é practicamente circular arredor do centro do astro. Como a forza gravitacional é unha forza central, a aceleración só ten compoñente normal,  $a_N$ . Ao non ter aceleración tangencial, o módulo,  $v$ , da velocidade lineal é constante e o movemento é circular uniforme.

A aceleración normal, nun movemento circular uniforme de raio  $r$ , obtense da expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

Como a forza gravitacional que exerce o astro sobre o satélite é moito maior que calquera outra, pódese considerar que é a única forza que actúa.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_G$$

A 2.ª lei de Newton di que a forza resultante sobre un obxecto produce unha aceleración directamente proporcional á forza, sendo a súa masa,  $m$ , a constante de proporcionalidade.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Expresada para os módulos, queda:

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$F_G = m \cdot a_N$$

Substituíndo a expresión do módulo,  $F_G$ , da forza gravitacional, e a da aceleración normal, queda:

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Despexando a velocidade orbital do satélite, queda:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

A velocidade nun movemento circular uniforme de raio  $r$  e período  $T$  é:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Igualando esta expresión coa anterior e elevando ao cadrado queda:

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{r}$$

Agrupando termos:

$$4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$$

a) Despéxase o raio da órbita,  $r$ , e substitúense valores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

A frecuencia é a inversa do período. O período orbital calcúlase a partir da frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{24 \text{ h}}{2} = 12 \text{ h} = 4,32 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Calcúlase o raio da órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] (4,32 \cdot 10^4 [\text{s}])^2}{4 \cdot 3,14^2}} = 2,66 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Calcúlase a altura restando o raio da Terra ao raio da órbita:

$$h = r - R = 2,66 \cdot 10^7 - 6,37 \cdot 10^6 = 2,02 \cdot 10^7 \text{ m}$$

*Análise: Aínda que non se pode prever un valor, a altura obtida é positiva.*

b) Calcúlase a enerxía potencial:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}] \cdot 150 [\text{kg}]}{2,66 \cdot 10^7 [\text{m}]} = -2,25 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Calcúlase a enerxía cinética, substituíndo  $v^2$  por  $G M / r$ :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r} = 1,12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

A enerxía cinética é a metade e de signo contrario que a enerxía potencial.

A enerxía (mecánica) total é a suma das enerxías cinética e potencial, e vale o mesmo que a enerxía cinética, pero é negativa.

$$E = E_c + E_p = 1,12 \cdot 10^9 [\text{J}] - 2,25 \cdot 10^9 [\text{J}] = -1,12 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c) Se a altura fose o dobre, o novo raio da órbita valería:

$$r_c = R + 2 h = 6,37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 2,0 \cdot 10^7 = 4,7 \cdot 10^7 \text{ m}$$

A velocidade do satélite valería:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}]}{4,7 \cdot 10^7 [\text{m}]}} = 2,9 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 2,9 \text{ km/s}$$

O período calcúlase a partir da expresión da velocidade lineal no movemento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 4,7 \cdot 10^7 [\text{m}]}{2,9 \cdot 10^3 [\text{m/s}]} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ s} = 28 \text{ h}$$

*Análise: O período dun satélite aumenta coa altura. O valor obtido é maior que o da altura inicial.*

As respostas e o seu cálculo poden verse con a folia de cálculo [Satélites \(gal\)](#). Escribindo os datos nas celas de cor branca e bordo azul, e facendo clic e elixindo as magnitudes e unidades nas celas de cor salmón:

<b>Enunciado</b>		<b>Datos:</b>	
Un satélite de masa		$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$	
xira ao redor dun astro de masa		$m =$	150 kg
e raio		$M =$	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg
		$R =$	$6,37 \cdot 10^6$ m
O satélite xira cunha		frecuencia	$f =$
			2 día <sup>-1</sup>
<b>Calcula:</b>			
a) O raio/a altura da órbita.			
b) O peso do satélite na órbita.			
c) As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.			

Poden verse os seguintes resultados:

Respostas	Cifras significativas:		
	Altura	Velocidade	clíc ↓
Órbita	2,03·10 <sup>7</sup> m		
	cinética	potencial	mecánica
Enerxía na órbita	1,12·10 <sup>9</sup> J	-2,25·10 <sup>9</sup> J	-1,12·10 <sup>9</sup> J

Para o apartado c) hai que borrar a opción «frecuencia», o seu valor e unidades e elixir encima dela a opción «altura», escribir na cela branca de bordo azul «=2\*2,03E7» (sen as comiñas pero co signo =, ou calculalo a man e escribir o resultado en calquera das formas: 4,06E7 ó 4,06·10<sup>7</sup>) e elixir a unidade «m».

A órbita é circular de	altura	$h =$	40 600 000 m

En «Respostas», elixir «Periodo» debaixo de «Cifras significativas:» e elixir «h» como unidade.

Respostas	Cifras significativas:		
	Altura	Velocidade	clíc ↓
Órbita	4,06·10 <sup>7</sup> m		Periodo
			28,1 h

## ● Campo gravitacional

- Unha nave sitúa un obxecto de 20 kg de masa entre a Terra e o Sol nun punto onde a forza gravitacional neta sobre o obxecto é nula. Calcula nese punto:
  - A distancia do obxecto ao centro da Terra.
  - A aceleración da Terra debida á forza que o obxecto exerce sobre ela.
 DATOS:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ;  $M(T) = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ;  $M(S) = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$ ; distancia Terra-Sol =  $1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ .  
 Rta.: a)  $r = 2,59 \cdot 10^8 \text{ m}$ ; b)  $a = 1,99 \cdot 10^{-26} \text{ m/s}^2$ .

(A.B.A.U. ord. 24)

### Datos

Masa da Terra

Masa do Sol

Masa do obxecto

Distancia Terra-Sol

Constante da gravitación universal

### Incógnitas

Distancia do obxecto ao centro da Terra.

Aceleración da Terra debida á forza que o obxecto exerce sobre ela

### Cifras significativas: 3

$M(T) = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$M(S) = 2,00 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

$m = 20,0 \text{ kg}$

$d = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$r$

$a$

**Ecuacións**

Lei de Newton da gravitación universal.  
(Forza entre corpos esféricos ou puntuais)  
2.<sup>a</sup> lei de Newton da Dinámica

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

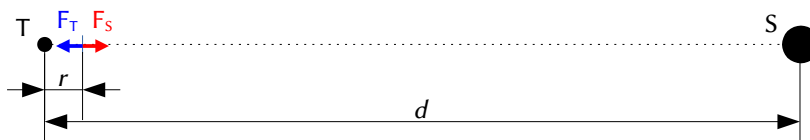
**Solución:**

a) A forza de atracción gravitacional entre dúas masas puntuais ou esféricas,  $M$  e  $m$ , vén dada pola lei da gravitación de Newton.  $G$  é a constante da gravitación universal e  $\vec{u}_r$  o vector unitario na liña que une as masas.

$$\vec{F} = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

Escríbese a ecuación da forza gravitacional sobre o obxecto, que é nula;

$$-G \frac{M(S) \cdot m}{(d-r)^2} \vec{u}_{rS} + \left( -G \frac{M(T) \cdot m}{r^2} \vec{u}_{rT} \right) = \vec{0}$$



Elíxese un sistema de coordenadas coa Terra na orixe, porque o punto onde se anula a forza ten que estar moito máis cerca da Terra que do Sol, que ten unha masa moito maior. O Sol sitúase no sentido positivo do eixe X.

O vector unitario da posición do Sol neste sistema  $\vec{u}_{rS}$  é o vector  $\vec{i}$ , unitario do eixe X en sentido positivo.

O vector unitario da Terra  $\vec{u}_{rT}$ , tomando o Sol coma orixe, é o vector unitario contrario  $-\vec{i}$ .

Substitúense os vectores unitarios na ecuación e reordénase:

$$-G \frac{M(S) \cdot m}{(d-r)^2} \vec{i} + \left( -G \frac{M(T) \cdot m}{r^2} (-\vec{i}) \right) = 0 \vec{i}$$

$$-G \frac{M(S) \cdot m}{(d-r)^2} + G \frac{M(T) \cdot m}{r^2} = 0$$

$$\frac{M(S)}{(d-r)^2} = \frac{M(T)}{r^2} \Rightarrow (d-r)^2 = \frac{M(S)}{M(T)} r^2 \Rightarrow d-r = \sqrt{\frac{M(S)}{M(T)}} r \Rightarrow d = r \left( 1 + \sqrt{\frac{M(S)}{M(T)}} \right)$$

Despéxase  $r$  e substitúense os valores:

$$r = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{M(S)}{M(T)}}} = \frac{1,50 \cdot 10^{11} [\text{m}]}{1 + \sqrt{\frac{2,00 \cdot 10^{30} [\text{kg}]}{5,98 \cdot 10^{24} [\text{kg}]}}} = 2,59 \cdot 10^8 \text{ m}$$

*Análise:* A distancia obtida é moito menor que a que hai entre o Sol e a Terra e o punto sitúase cerca da Terra.

b) Aplícase a 2.<sup>a</sup> lei de Newton da Dinámica en módulos e despéxase a aceleración que produce a masa de 20 kg sobre o planeta Terra:

$$a = \frac{F}{M(T)} = \frac{G \frac{m \cdot M(T)}{r^2}}{M(T)} = G \frac{m}{r^2} = 6,667 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \frac{20 [\text{kg}]}{(2,59 \cdot 10^8 [\text{m}])^2} = 1,99 \cdot 10^{-26} \text{ m/s}^2$$

Unha das respostas pode verse coa folla de cálculo [FísicaBachGal.ods.](https://fisicabachgal.ods.org/), na pestana Equil2QoM.

Escribindo os datos nas celas de cor branca e bordo azul, e facendo clic e elixindo as magnitudes e unidades nas celas de cor salmón.

Constante

G =

6,67·10<sup>-11</sup>

N·m<sup>2</sup>·kg<sup>-2</sup>

Masa	kg	x	y
$5,98 \times 10^{24}$	M	0	0 m
$2,00 \times 10^{30}$	N	$1,50 \times 10^{11}$	0
Equilibrio en	A		
M móvil	Punto		
20			
No punto	A	Potencial (J/kg)	Campo (N/kg) <b>u</b>
			0 <b>i</b>

Pode verse o seguinte resultado, se deixou 3 como número de cifras significativas:

	x	y
Posición do punto A:	$2,59 \cdot 10^8$	0 m

A aceleración non a calcula a folla. Para obtela debe escribir en OUTROS CÁLCULOS a fórmula:

=NUMFORMA(AVALOR(I2)\*F10/(AVALOR(I6)-AVALOR(J17))^2 + (AVALOR(K6)-AVALOR(K17))^2)

que corresponde a:  $G \cdot \frac{m}{((x(M)-x(A))^2 + (y(M)-y(A))^2)}$

Ten que seleccionar un dos dous valores da constante G. Non é suficiente con que se vexa o valor na folla.

2. A masa do planeta Marte é 0,107 veces a masa da Terra e o seu raio é 0,533 veces o raio da Terra. Calcula:

a) O tempo que tarda un obxecto en chegar á superficie de Marte se se deixa caer desde unha altura de 50 m.

b) A velocidade de escape dese obxecto desde a superficie do planeta.

Datos:  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;  $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

(A.B.A.U. ord. 21)

Rta.: a)  $t = 5,21 \text{ s}$ ; b)  $v_e = 5,01 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ .

### Datos

Masa de Marte

Raio de Marte

Altura desde a que se deixa caer

Aceleración da gravidade na Terra

Raio da Terra

### Incógnitas

Tempo que tarda en caer á superficie de Marte desde unha altura de 50 m

Velocidade de escape en Marte

### Outros símbolos

Masa da Terra

Constante da gravitación universal

### Ecuacións

Lei de Newton da gravitación universal, en módulos.

(forza que exerce un planeta esférico sobre un corpo puntual)

Peso dun obxecto de masa  $m$  na superficie dun planeta cuxa aceleración da gravidade é  $g_0$

Ecuación da caída libre (movemento uniformemente acelerado)

Energía cinética dunha masa,  $m$ , que se move cunha velocidade,  $v$

Energía potencial gravitacional (referida ao infinito)

Energía mecánica

### Cifras significativas: 3

$M_M = 0,107 M_T$

$R_M = 0,533 R_T$

$h = 50,0 \text{ m}$

$g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$

$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$t$

$v_e$

$M_T$

$G$

$$F_G = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$P = m \cdot g_0$$

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

$$E = E_c + E_p$$

### Solución:

a) Hai que calcular o valor da gravidade na superficie de Marte.

O peso dun obxecto preto da superficie da Terra é a forza coa que a Terra o atrae:

$$m \cdot g_T = G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}$$

Analogamente, o peso dun obxecto preto da superficie de Marte é a forza coa que a Marte o atrae:

$$m \cdot g_M = G \frac{M_M \cdot m}{R_M^2}$$

Dividindo a segunda ecuación entre a primeira, queda:

$$\frac{m \cdot g_M}{m \cdot g_T} = \frac{G \frac{M_M \cdot m}{R_M^2}}{G \frac{M_T \cdot m}{R_T^2}}$$

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{M_M / M_T}{(R_M / R_T)^2} = \frac{0,107}{0,533^2} = 0,375$$

Despexando:

$$g_M = 3,69 \text{ m/s}^2$$

*Análise: O resultado é razoable, xa que sabemos que a gravidade na superficie de Marte é unhas 3 veces menor que na superficie da Terra.*

Calcúlase o tempo da ecuación da caída libre, sen velocidade inicial:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50,0}{3,69}} = 5,21 \text{ s}$$

b)

A velocidade de escape dun astro é a velocidade mínima adicional que habería que comunicar a un corpo sometido ó seu campo gravitacional, para situalo nun punto no que non estea sometido a devandita atracción, a unha distancia infinita do centro del astro.

A velocidade de escape proporcionaríalle a enerxía,  $\Delta E$ , necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_1$$

No infinito a enerxía potencial é nula, porque tómasse coma orixe de enerxías potenciais.

Tendo en conta que velocidade de escape é a velocidade mínima, a enerxía cinética que tería o obxecto no infinito sería nula.

A enerxía mecánica, suma das enerxías cinética e potencial, no infinito sería nula:

$$E_\infty = (E_c + E_p)_\infty = 0 + 0 = 0$$

A enerxía potencial dun corpo de masa  $m$  situado na superficie dun astro de masa  $M$  e radio  $R$  é:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

Se o corpo atópase na superficie do astro, en repouso respecto do chan, a súa enerxía cinética é nula.

A enerxía mecánica na superficie do astro sería:

$$E_s = (E_c + E_p)_s = 0 + \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = -G \frac{M \cdot m}{R}$$

A velocidade de escape  $v_e$  comunicaríalle a enerxía  $\Delta E$  necesaria para situalo no infinito.

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 = (E_c + E_p)_\infty - (E_c + E_p)_s$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = 0 - \left( -G \frac{M \cdot m}{R} \right) = G \frac{M \cdot m}{R}$$



Despexando a velocidade de escape, queda:

$$v_e = \sqrt{2 G \frac{M}{R}}$$

Cando non se teñen os datos da constante da gravitación universal,  $G$ , ou da masa do astro,  $M$ , pero si do valor da aceleración da gravidade na súa superficie, pódese encontrar unha relación entre elas, usando que, na superficie do astro, o peso dun corpo,  $m \cdot g_0$ , é igual á forza gravitacional:

$$m g_0 = G \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$R$  representa o raio de astro e  $g_0$  o valor da aceleración da gravidade na súa superficie.

A relación é:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

Hai que calcular tamén o raio de Marte:

$$R_M = 0,533 R_T = 0,533 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ [m]} = 3,40 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Calcúlase a velocidade de escape substituíndo  $G \cdot M$  por  $g_0 \cdot R^2$ .

$$v_e = \sqrt{\frac{2 g_0 \cdot R_M^2}{R_M}} = \sqrt{2 g_0 \cdot R_M} = \sqrt{2 \cdot 3,69 \text{ [m/s}^2\text{]} \cdot (3,40 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2} = 5,01 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 5,01 \text{ km/s}$$

Unha das respostas pode verse coa folla de cálculo [Física \(gal\)](#), na pestana «Satelites».

Escriba na cela de cor laranxa situada á dereita de «Astro» a palabra Marte. Recibirá un aviso: «Sen datos» (A pestana só ten os datos da Terra, a Lúa e o Sol). Prema sobre o botón [Aceptar](#).

Na cela contigua de cor laranxa, elixa «Terra».

Siga escribindo os datos nas celas de cor branca e bordo azul, e facendo clic e elixindo as magnitudes e unidades nas celas de cor salmón.

Constante gravitación	$G =$	6,67·10 <sup>-11</sup>	N·m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>			Relación
Astro 1		Marte	Tierra	Astro 2		$A_1 / A_2$
Masa $M =$						$M_1 / M_2 =$ 0,107
Raio $R =$			6,37×10 <sup>6</sup>	m		$R_1 / R_2 =$ 0,533
Gravidade no chan	$g_0 =$		9,81	m/s <sup>2</sup>		
Satélite	Masa $m =$					

En RESULTADOS vese a gravidade en Marte:

$$\text{Marte} \quad g_0 = \quad 3,69 \text{ m/s}^2$$

O tempo que tarda en chegar ao chan non o calcula esta folla. Debe facerse coa ecuación do MRUA

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \text{ Despexando e substituíndo: } t = \sqrt{(2 s / a)}$$

En OUTROS CÁLCULOS escriba á dereita de «Fórmula» =RAÍZC(250/3,69)

OUTROS CÁLCULOS							
Etiqueta:	t (caer)						
Fórmula:	5,21						

b) A velocidade de escape dese obxecto desde a superficie do planeta obtense elixindo en RESULTADOS as opcións «Velocidade» e «alcanzar o infinito» na liña de «no chan para»:

$$\text{Velocidade} \quad \text{no chan para} \quad \text{alcanzar o infinito} \quad v(\text{esc.}) = \quad 5,01 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Cuestións e problemas das [Probos de avaliación de Bacharelato para o acceso á Universidade](#) (A.B.A.U. e P.A.U.) en Galiza.

[Respostas](#) e composición de [Alfonso J. Barbadillo Marán](#).

Algúns cálculos fixéronse cunha [folha de cálculo](#) de [LibreOffice](#) do mesmo autor.

Algunhas ecuacións e as fórmulas orgánicas construíronse coa extensión [CLC09](#) de Charles Lalanne-Cassou.

A tradución ao/desde o galego realizouse coa axuda de [traducindote](#), e de o [tradutor da CIXUG](#).

Procurouse seguir as [recomendacións](#) do Centro Español de Metrología (CEM).

Consultouse ao Copilot de Microsoft Edge e tivéronse en conta algunhas das súas respostas nas cuestións.

Actualizado: 30/06/24

## Sumario

### GRAVITACIÓN

<i>Satélites.....</i>	<i>1</i>
1. O Sentinel-1 é un satélite artificial de órbita circular polar da Axencia Espacial Europea dentro do Programa Copérnico destinado á monitorización terrestre e dos océanos. Está situado a 693 km sobre a superficie terrestre. Si a súa masa é de 200 kg:.....	1
a) As velocidades lineal e angular do satélite na órbita.....	
b) O período da órbita do satélite. Cantas voltas dá á Terra cada día?.....	
c) A masa da Terra.....	
d) O módulo do momento angular do satélite respecto ao centro da Terra.....	
e) As enerxías cinética, potencial e mecánica do satélite.....	
f) A enerxía mínima adicional que habería que comunicarlle para mandalo a unha distancia moi grande da Terra e a velocidade de escape á atracción terrestre a esa altura.....	
g) Que velocidade houbo que proporcionarlle no lanzamento para poñelo en órbita?.....	
h) A velocidade de escape desde o chan.....	
i) O cociente entre os valores da intensidade de campo gravitacional terrestre no satélite e na superficie da Terra.....	
j) A forza con que a Terra atrae ao satélite.....	
2. A luz do Sol tarda $5 \cdot 10^2$ s en chegar á Terra e $2,6 \cdot 10^3$ s en chegar a Xúpiter. Calcula:.....	7
a) O período de Xúpiter virando ao redor do Sol.....	
b) A velocidade orbital de Xúpiter.....	
c) A masa do Sol.....	
3. Un satélite GPS describe órbitas circulares ao redor da Terra, dando dúas voltas á Terra cada 24 h. Calcula:.....	10
a) A altura da súa órbita sobre a superficie terrestre.....	
b) A enerxía mecánica.....	
c) O tempo que tardaría en dar unha volta á Terra si facémolo orbitar a unha altura dobre.....	
<i>Campo gravitacional.....</i>	<i>13</i>
1. Unha nave sitúa un obxecto de 20 kg de masa entre a Terra e o Sol nun punto onde a forza gravitacional neta sobre o obxecto é nula. Calcula nese punto:.....	13
a) A distancia do obxecto ao centro da Terra.....	
b) A aceleración da Terra debida á forza que o obxecto exerce sobre ela.....	
2. A masa do planeta Marte é 0,107 veces a masa da Terra e o seu raio é 0,533 veces o raio da Terra. Calcula:.....	15
a) O tempo que tarda un obxecto en chegar á superficie de Marte se se deixa caer desde unha altura de 50 m.....	
b) A velocidade de escape dese obxecto desde a superficie do planeta.....	