## **ONDAS**

## Método y recomendaciones

## • Ecuación y características de las ondas

- 1. Una onda se transmite a lo largo de una cuerda. El punto situado en x = 0 oscila según la ecuación  $y = 0.1 \cos(10 \pi t)$  y otro punto situado en x = 0.03 m oscila según la ecuación  $y = 0.1 \cos(10 \pi t \pi / 4)$ . Calcula:
  - a) La amplitud, la longitud de onda, el número de onda k, el período, la frecuencia y pulsación  $\omega$  de la onda.
  - b) La velocidad de propagación de la onda e indica en qué sentido se propaga.
  - c) El tiempo que ha de transcurrir para que la onda recorra una distancia igual a 2  $\lambda$ .
  - d) Escribe la ecuación de onda.
  - e) La velocidad de oscilación de un punto de la cuerda y su aceleración en función del tiempo.
  - f) La elongación, velocidad y aceleración de un punto situado en x = 0.03 m en el instante t = 0.05 s.
  - g) Los valores máximos de la velocidad y aceleración de las partículas de la cuerda.
  - h) Los valores del tiempo para los que y(x, t) es máxima en la posición x = 0.03 m.
  - i) Los valores del tiempo para los que un punto situado en x = 0.03 m tiene velocidad máxima.
  - j) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es  $2 \pi/3$ .
  - k) La diferencia de fase entre dos puntos separados 15 cm.
  - l) La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 0,05 s.
  - m) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en x = 0.03 m?
  - n) Para una posición fija x, ¿para qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase con la vibración para t = 0.05 s?

Problema modelo basado en P.A.U. Jun. 06

```
Rta.: a) A = 0,100 m; \lambda = 0,240 m; k = 26,2 rad/m; f = 5,00 Hz; \omega = 31,4 rad/s. b) v_p = 1,20 m/s; c) t_2 = 0,400 s; d) y = 0,100 \cdot \cos(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x) [m]; e) v = -3,14 \cdot \sin(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x) [m/s]; a = -98,7 \cdot \cos(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x) [m/s²]; f) y_3 = 0,0707 m; v_3 = 2,22 m/s; a_3 = -69,8 m/s²; g) v_m = 3,14 m/s; a_m = 98,7 m/s²; h) t_{my} = 0,0750 + 0,100 n (s); i) t_{mv} = 0,0250 + 0,100 n (s); j) \Delta x = 0,0800 + 0,240 \cdot n [m]; k) \Delta \phi_x = 3,93 rad; l) \Delta \phi_t = 1,57 rad; m) v_3 = 0,0300 + 0,240 n [m]; n) v_3 = 0,0500 + 0,200 v_3 = 0,0500 v_3 = 0,0500 + 0,200 v_3 = 0,0500 v_3 = 0,0500
```

Datos	Cifras significativas: 3
Ecuación de oscilación en el origen $x = 0$	$y = 0.100 \cdot \cos(10.0 \cdot \pi \cdot t) \text{ [m]}$
Ecuación de oscilación en $x = 0.03$ m	$y = 0.100 \cdot \cos (10.0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4.00) [m]$
Incógnitas	
Amplitud	A
Longitud de onda	λ
Número de onda	k
Período	T
Frecuencia	f
Pulsación	$\omega$
Velocidad de propagación	$v_{ m p}$
Tiempo para que la onda recorra una distancia igual a 2 $\lambda$	$\overline{t_2}$
Ecuación de onda	y(x, t)
Velocidad de la partícula en un punto en función del tiempo	ν
Aceleración de la partícula en un punto en función del tiempo	a
Elongación en $x = 0.03$ m en $t = 0.05$ s.	$y_3$
Velocidad en $x = 0.03$ m en $t = 0.05$ s.	$v_3$
Aceleración en $x = 0.03$ m en $t = 0.05$ s.	$a_3$
Velocidad máxima de las partículas	$ u_{ m m}$
Aceleración máxima de las partículas	$a_{ m m}$
Los valores del tiempo para los que $y$ es máxima en $x$ = 0,03 m	$t_{ m my}$
Los valores del tiempo para los que $v$ es máxima en $x$ = 0,03 m	$t_{ m m}$

### Incógnitas

La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un ins- $\Delta x$ tante dado es 2  $\pi/3$ . La diferencia de fase entre dos puntos separados 15 cm.  $\Delta \varphi_{\rm x}$ La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma  $\Delta \varphi_{\mathsf{t}}$ partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 0,05 s Puntos de la onda que están en fase con el punto en x = 0.03 m  $\chi_3$ En qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase  $t_3$ con la vibración para t = 0.05 s Otros símbolos Posición del punto (distancia al foco) x Amplitud AFrecuencia f **Ecuaciones** Ecuación de una onda armónica unidimensional  $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$ Número de onda  $k = 2 \pi / \lambda$  $\omega = 2 \pi \cdot f$ Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia

#### Solución:

Relación entre el período y la frecuencia

a) Se calcula la amplitud y la frecuencia angular comparando la ecuación de una onda armónica unidimensional con la ecuación de vibración en el origen:

Ecuación general de una onda armónica:  $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$ Ecuación de la onda armónica en el origen (x = 0):  $y = 0.100 \cdot \cos (10.0 \cdot \pi \cdot t) [m]$ Amplitud: A = 0.100 m $\omega = 10.0 \cdot \pi \, [rad/s] = 31.4 \, rad/s$ Frecuencia angular:

Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación  $v_p = \lambda \cdot f$ 

Se calcula el número de onda comparando la ecuación de la onda armónica unidimensional, en la que se han sustituido la amplitud y la frecuencia angular, con la ecuación de vibración en el punto x = 0,0300 m: Ecuación de la onda armónica:  $y = 0.100 \cdot \cos (10.0 \cdot \pi \cdot t \pm k \cdot x) \text{ [m]}$ Ecuación de la onda armónica en el punto x = 0,0300 m:

 $y = 0.100 \cdot \cos (10.0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 4.00)$  [m]

f = 1 / T

$$k \cdot x = \pi / 4,00 \implies k = \frac{\pi}{4,00 \cdot x} = \frac{3,14 \text{ [rad]}}{4,00 \cdot 0,030 \text{ [m]}} = 26,2 \text{ rad/m}$$

Se calcula la longitud de onda a partir del número de onda:

$$k = 2 \pi / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3.14 \text{ [rad]}}{26.2 \text{ [rad/m]}} = 0.240 \text{ m}$$

Se calcula la frecuencia a partir de la frecuencia angular:

$$\omega = 2 \pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10,0 \cdot \pi}{2\pi} = 5,00 \text{ s}^{-1}$$

Se calcula el período a partir de la frecuencia:

$$f = 1 / T \implies T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5,00 \text{ s}^{-1}} = 0,200 \text{ s}$$

b) Se calcula la velocidad de propagación de la onda a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0.240 \text{ [m]} \cdot 5.00 \text{ [s}^{-1} = 1.20 \text{ m/s}$$

Como la onda en el punto x = 0.0300 m está retrasada en  $\pi / 4.00$  rad porque en la ecuación aparece el signo «-», la onda se desplaza en el sentido positivo del eje X.

c) Se calcula el tiempo que tarda en recorrer una distancia igual a  $\Delta x = 2 \cdot \lambda = 2 \cdot 0.240$  [m] = 0,480 m a partir de la velocidad de propagación constante de la onda

$$v_{\rm p} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \implies t_{\rm 3} = \frac{\Delta x}{v_{\rm p}} = \frac{0.480 \, [{\rm m}]}{1.20 \, [{\rm m/s}]} = 0.400 \, {\rm s}$$

Análisis: Se puede definir el período como el tiempo que tarda una onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda. Por tanto el tiempo necesario para que la onda recorra una distancia igual a  $2 \cdot \lambda$ , será el doble del período:  $t_2$ =  $2 \cdot T$  =  $2 \cdot 0,200$  [s] = 0,400 s.

d) La ecuación de movimiento se obtiene sustituyendo los valores de k y  $\omega$ :

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) = 0,100 \cdot \cos(10,0 \cdot \pi \cdot t - \pi / 0,120 \cdot x) = 0,100 \cdot \cos(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x)$$
 [m]

Análisis: Se puede comprobar que esta ecuación da las ecuaciones para x = 0,  $y = 0.100 \cdot \cos(31.4 \cdot t)$  y para x = 0.03 m,  $y = 0.100 \cdot \cos(31.4 \cdot t - 0.786) = 0.100 \cdot \cos(31.4 \cdot t - \pi / 4)$ 

e) La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[0,100 \cdot \cos\left(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x\right)\right]}{\mathrm{d}t} = -0,100 \cdot 31,4 \cdot \sin\left(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x\right) \left[\text{m/s}\right]$$

$$v = -3,14 \cdot \sin(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x) \left[\text{m/s}\right]$$

La aceleración se obtiene derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[-3.14 \cdot \mathrm{sen}(31.4 \cdot t - 26.2 \cdot x)\right]}{\mathrm{d}t} = -3.14 \cdot 31.4 \cdot \mathrm{cos}(31.4 \cdot t - 26.2 \cdot x) \left[\mathrm{m/s}^{2}\right]$$

$$a = -98.7 \cdot \mathrm{cos}(31.4 \cdot t - 26.2 \cdot x) \left[\mathrm{m/s}^{2}\right]$$

f) Se sustituyen en las ecuaciones los valores de la posición x = 0.03 m y el tiempo t = 0.05 s.

$$y_3 = 0.100 \cdot \cos (31.4 \cdot 0.0500 - 26.2 \cdot 0.0300) = 0.0707 \text{ m}$$
  
 $v_3 = -3.14 \cdot \sin (31.4 \cdot 0.0500 - 26.2 \cdot 0.0300) = 2.22 \text{ m/s}$   
 $a_3 = -98.7 \cdot \cos (31.4 \cdot 0.0500 - 26.2 \cdot 0.0300) = -69.8 \text{ m/s}^2$ 

g) La velocidad es máxima cuando el seno de la fase vale -1:

$$v_{\rm m} = -3.14 \cdot (-1) = 3.14 \text{ m/s}$$

La aceleración es máxima cuando el coseno de la fase vale -1:

$$a_{\rm m} = -98.7 \cdot (-1) = 98.7 \text{ m/s}^2$$

h) Para obtener los valores del tiempo para los que y es máxima en x = 0,03 m, se impone la condición de que el coseno de la fase en ese punto valga 1, lo que corresponde a una fase de 0 rad:

$$\cos(31.4 \cdot t_{\text{my}} - 26.2 \cdot 0.03) = 1$$

$$31.4 \cdot t_{\text{my}} - 26.2 \cdot 0.03 = 0$$

$$t_{\text{my}} = \frac{26.2 \cdot 0.030}{31.4} = 0.025 \text{ ((s))}$$

Esta situación vuelve a repetirse transcurridos un número n de semiperíodos, si sólo nos atenemos a que el valor de la elongación sea máxima.

$$t_{\rm mv} = 0.0250 + 0.100 \ n$$
 (s);  $n = 0, 1, 2...$ 

Si entendemos que máximo se refiere también al signo, entonces se repite cada *n* períodos:

$$t_{\rm my} = 0.0250 + 0.200 \ n$$
 (s);  $n = 0, 1, 2...$ 

i) De forma análoga, la velocidad será máxima cuando el seno de la fase en ese punto valga 1, lo que corresponde a una fase de  $\pi$  / 2 rad:

$$sen(31,4 \cdot t_{m} - 26,2 \cdot 0,0300) = 1$$

$$31,4 \cdot t_{m} - 26,2 \cdot 0,0300 = \pi / 2$$

$$t_{m} = \frac{26,2 \cdot 0,030 \cdot \theta \cdot 3,14/2}{31,4} = 0,075 \cdot 0(s)$$

Esta situación vuelve a repetirse transcurridos un número n de semiperíodos, si sólo nos atenemos a que el valor de la velocidad sea máxima.

$$t_{mv} = 0.0750 + 0.100 \ n$$
 (s);  $n = 0, 1, 2...$ 

Si entendemos que máximo se refiere también al signo, entonces se repite cada n períodos:

$$t_{\rm mv} = 0.0750 + 0.200 \ n$$
 (s);  $n = 0, 1, 2...$ 

j) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es  $2 \pi/3$  se obtiene restando las expresiones de las fases de ambos puntos e igualando el resultado a  $2 \pi/3$ .

$$(31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x_2) - (31,4 \cdot t - 26,2 \cdot x_1) = 2 \pi/3$$

$$26,2 \cdot (x_1 - x_2) = 2 \pi/3$$

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{2 \cdot 3,14/3}{26,2} = 0,080 \text{ 0(m)}$$

Si la diferencia de fase hubiese sido de 2  $\pi$  rad, la distancia entre los puntos habría sido una longitud de onda  $\lambda$ . A una diferencia de fase de 2  $\pi/3$  rad le corresponde una distancia de  $\lambda/3=0,240$  [m]  $\lambda/3=0,0800$  m

Todos los puntos que disten un múltiplo n de longitudes de onda del más próximo, también tendrán una diferencia de fase de 2  $\pi/3$  con el punto de referencia.

$$\Delta x = 0.0800 + 0.240 \cdot n \text{ [m]}$$

k) La diferencia de fase entre dos puntos que disten 25 cm se obtiene restando las expresiones de las fases de ambos puntos

$$\Delta \varphi_{x} = (31.4 \cdot t - 26.2 \cdot x_{2}) - (31.4 \cdot t - 26.2 \cdot x_{1})$$
  
 $\Delta \varphi_{x} = 26.2 \cdot (x_{1} - x_{2}) = 26.2 \cdot 0.150 = 3.93 \text{ rad}$ 

l) La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 0,05 s se obtiene restando las expresiones de las fases de ambos puntos

$$\Delta \varphi_{\rm t} = (31.4 \cdot t_2 - 26.2 \cdot x) - (31.4 \cdot t_1 - 26.2 \cdot x)$$
  
 $\Delta \varphi_{\rm t} = 31.4 \cdot (t_2 - t_1) = 31.4 \cdot 0.0500 = 1.57 \text{ rad}$ 

m) Todos los puntos que disten un múltiplo n de longitudes de onda  $\lambda$  del punto en x=0.03 m estarán en fase con él:

$$x_3 = 0.0300 + 0.240 \ n \ [m], \ n = 0, 1, 2...$$

m) En todos los tiempos que disten un múltiplo n de períodos T del tiempo en t = 0,05 s, el estado de vibración estará en fase con ese instante:

$$t_3 = 0.0500 + 0.200 n [s], n = 0, 1, 2...$$

Puede obtener las respuestas en la pestaña «Ondas» de la hoja de cálculo <u>Fisica (es)</u>, <u>Instrucciones</u>. En DATOS, escriba:

Ecuación		y = A	cos	$(\omega t \pm k x + \varphi_o)$
Amplitud	A =	0,1	m	
Frecuencia angular	ω =	10 π	rad/s	
Distancia entre puntos	Δ <i>x</i> =	0,03	m	
en el instante	<i>t</i> =		s	
Diferencia de fase	Δφ =	π / 4	rad	

Para escribir el símbolo  $\pi$ , teclee :pi:

Puede escribir =10\*PI() en vez de  $10 \pi$  o =PI()/4 en vez de  $\pi$  / 4 Para ver los resultados, haga clic en las celdas de color naranja y elija las opciones como se muestra:

Cifras significativas: 3

Ecuación general

d) Elongación y = 0,100 con los(31,4 t - 26,2 x) (m)Valor

Período T = 0,200 s

Velocidad de propagación   v = 1,20 m/s     Haciendo clic en las celdas de color naranja de «Período» y «Longitud de onda», podemos obtresultados eligiendo     a)   Número de onda k   k = 26,2 rad/m     Y también   Y también     a)   Precuencia angular   ω = 31,4 rad/s     Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a 2 · λ) la hoja no le va a dar la     Puede escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»     OTROS CÁLCULOS     Etiqueta:   Tiempo 2 λ     Fórmula:   0,400     La fórmula puede ser   2-2°0,24/1,2     Poñendo os valores obtenidos.     También puede escribir   -2°AVALOR(H19)     Haciendo clic en la celda que contiene «0,240» a la derecha de «λ ».     Verá ahora:   -2°AVALOR(H19)     Las ecuaciones de la velocidad y aceleración es obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo «     Eligiendo:   Velocidad   v = -3,14 sin(31,4 t − 26,2 x) (m/s)     Y haciendo clic en la misma celda, elija   e)   Aceleración   a = -98,7 con los(31,4 t − 26,2 x) (m/s)     Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concesos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda   λ = 0,1 m     Precuencia angular   ω + 0,03 m     Frecuencia angular   ω + 0,03 m     Precuencia angular   ω + 0,03 m     Frecuencia angular   ω + 0,03 m     Frecuencia angular   ω + 0,03 m     Eunación del punto   x + 0,03 m     En la misma celda   v + 0,003 m     Elongación   v + 0,003 m     En la misma celda   v + 0,003 m     Elongación   v + 0,003 m     Elongación   v + 0,003 m     Elonga									
Haciendo clic en las celdas de color naranja de «Período» y «Longitud de onda», podemos obtresultados eligiendo  Precuencia $f = 5.00  \text{Hz}$ a) Número de onda k $k = 26.2  \text{rad/m}$ Y también a) Frecuencia angular $\omega = 31.4  \text{rad/s}$ Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a $2 \cdot \lambda$ ) la hoja no le va a dar la Puede escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»  OTROS CÁLCULOS  Etiqueta: Férmula: 0.400  La fórmula puede ser = 2° 0.24/1,2  Férmula: 0.400  La fórmula puede ser = 2° 0.24/1,2  Férmula: 0.400  La fórmula puede ser = 2° 0.44/1,2  Férmula: 0.400  La fórmula puede ser = 2° 0.44/1,2  Férmula: 0.400  La fórmula puede ser = 2° 0.44/1,2  Férmula: 0.400  La fórmula puede ser = 2° 0.44/1,2  La fórmula puede ser = 2° 0.44/1,2  Férmula: 0.400  La fórmula puede ser   2° 0.44/1,2  Férmula: 0.400  La fórmula puede ser   2° 0.44/1,2  Férmula: 0.400  La fórmula puede ser   2° 0.44/1,2  Férmula: 0.400  La celda que contiene «0.240» a la derecha de « $\lambda$ =».  Verá ahora: 2° 4VALOR(H19)/AVALOR(H19)/AVALOR(H19) (H19)/AVALOR(H19) (H19)/AVALOR(H19)/AVALOR(H19) (H19)/AVALOR(H19)/AVALOR(H19) (H19)/AVALOR(H19)/AVAL	a)	Longitud de ond	a λ =	0,24	40 m				
resultados eligiendo a) Número de onda k $k = 26,2  \mathrm{rad/m}$ Número de onda k $k = 26,2  \mathrm{rad/m}$ Y también a) Frecuencia angular $\omega = 31,4  \mathrm{rad/s}$ Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a $2 \cdot \lambda$ ) la hoja no le va a dar la Puede escribir una formula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CALCULOS»  Etiqueta: Tiempo $2 \lambda$ Fórmula: $0.400$ La fórmula puede ser $-2^{\circ}0.24/1.2$ ponêndo os valores obtenidos. También puede escribir $-2^{\circ}0.400$ Hacer clic en la celda que contiene « $0.240$ » a la derecha de « $\lambda = \infty$ . Verá ahora: $-2^{\circ}0.400$ ALOR(H19)/AVA	b)	Velocidad de propagació:	n v =	1,2	20 m/s				
Precuencia   f = 5,00 Hz     Número de onda   k = 26,2 rad/m     Y también     A)   Precuencia angular   ω = 31,4 rad/s     Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a 2 · λ) la hoja no le va a dar la Pruede escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»     Fórmula   O,400     La fórmula puede ser   -2*0,24/1,2     Fórmula	Haci	1 1 0		a de «Pei	ríodo» y	«Longi	tud de	onda», pod	lemos obt
Número de onda k $k=26,2  {\rm rad/m}$ Y también a)  Frecuencia angular $\omega=31,4  {\rm rad/s}$ Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a $2\cdot\lambda$ ) la hoja no le va a dar la Puede escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»  OTROS CÁLCULOS  Etiqueta: Tiempo $2\lambda$			J		•			•	
A también a) Frecuencia angular $ω = 31.4 \text{ rad/s}$ Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a $2 \cdot λ$ ) la hoja no le va a dar la Puede escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»  CTROS CÁLCULOS  Etiqueta: Tiempo $2λ$ Fórmula: 0,400  La fórmula puede ser poñendo os valores obtenidos.  La fórmula puede escribir  -2*0,24/1,2  poñendo os valores obtenidos.  También puede escribir  -2*AVALOR(H19)/AVAL	a)	Frecuencia	f=	5,0	00 Hz				
Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a $2 \cdot \lambda$ ) la hoja no le va a dar la Puede escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»  Etiqueta:  Fórmula:  Tiempo $2 \lambda$ Férmula:  D,400  La fórmula puede ser  poñendo os valores obtenidos.  También puede escribir $-2^*0,24/1,2$ Pera al a celda que contiene «0,240» a la derecha de « $\lambda$ =». $-2^*AVALOR(H19)/AVALOR(H19)/AVALOR(H19)/AVALOR(H19)$ Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo «eligiendo:  e)  Velocidad  V = -3,14 sin(31,4 t - 26,2 x) (m/s)  Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concerso que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación  Pera obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concerso que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la Ongitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos  Diferencia de fase $\Delta \phi$ = rad  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor  Máximo En $x = 0,03$ m a los 0,05 s  Diferencia de fase $\Delta \phi$ = rad  Haciendo elic en la velocidad de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor  Aceleración $a_m = 98,7$ m/s² $a = -69,8$ m/s²  Obtenemos los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $a_m = 98,7$ m/s² $a = -69,8$ m/s²  Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03$	a)	Número de onda k	<i>k</i> =	26	,2 rad/m	1			
Para el apartado c, (el tiempo para recorrer una distancia igual a $2 \cdot \lambda$ ) la hoja no le va a dar la Puede escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»    OTROS CÁLCULOS	Y tar	nbién							
Peude escribir una fórmula sencilla en una de las celdas debajo de «OTROS CÁLCULOS»  Etiqueta: Tiempo 2 $\lambda$ 0,400    La fórmula puede ser	a)	Frecuencia angular	ω =	31	,4 rad/s				
OTROS CÁLCULOS           Etiqueta:         Tiempo 2 λ           Fórmula:         0,400           La fórmula puede ser $=2^*0.24/1,2$ poñendo os valores obtenidos. $=2^*AVALOR(H19)$ Hacer clíc en la celda que contiene «0,240» a la derecha de « λ ».           Verá ahora: $=2^*AVALOR(H19)$ Siga escribiendo $=2^*AVALOR(H19)/AVALOR(H19)/AVALOR(H18)$ Haga clíc en la celda que contiene «1,20» a la derecha de « ν » y escriba el paréntesis final $=2^*AVALOR(H18)/AVALOR(H20)$ Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo « eligigendo:           e)         Velocidad           y = -3,14 sin(31,4 t - 26,2 x) (m/s)           Y haciendo clic en la misma celda, elija           e)         Aceleración $a = -98,7$ con los(31,4 t - 26,2 x) (m/s)           Y haciendo clic en la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concemos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cos (ω t ± k x)           Para obtener el valores de la celodatos, poniendo por ejemplo el valor de la valor de la cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la «Diferencia de Ecuación Amplitud Amplitu	Para	el apartado c, (el tiempo para re	ecorrer	una dist	ancia ig	ual a 2 ·	λ) la h	oja no le v	a a dar la
Etiqueta: Fórmula: 0,400   0,	Pued						«OTRO	S CÁLCUI	.OS»
Fórmula: 0,400  La fórmula puede ser = $2^*0.24/1,2$ poñendo os valores obtenidos. También puede escribir $-2^*\text{AVALOR}(H19)$ Hacer clic en la celda que contiene «0,240» a la derecha de « $\lambda$ =». Verá ahora: $= 2^*\text{AVALOR}(H19)$ Elaga clic en la celda que contiene «1,20» a la derecha de « $\nu$ =» y escriba el paréntesis final $= 2^*\text{AVALOR}(H18)/\text{AVALOR}(H20)$ Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo « eligiendo: e) Velocidad $\nu$ = $-3.14 \sin(31.4 t - 26.2 x)$ (m/s)  Y haciendo clic en la misma celda, elija e) Aceleración $\mu$ = $-98.7$ con los(31.4 t - 26.2 x) (m/s)  Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición conce mos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $\mu$ =		ОТ	ROS	CÁL	CULO	S			
La fórmula puede ser $=2^*0,24/1,2$ poñendo os valores obtenidos. También puede escribir $=2^*\text{AVALOR}($ Hacer clic en la celda que contiene $<0,240$ » a la derecha de $<0,240$ » $<0,240$ » a la derecha de $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » a la derecha de $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » a la derecha de $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » a la derecha de $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,240$ » $<0,24$		Etiqueta:	Tie	empo 2 λ					
poñendo os valores obtenidos. También puede escribir $=2^*\text{AVALOR}(\text{Hacer clic en la celda que contiene } <0.240^*\text{ a la derecha de } <\lambda =\infty. $ Verá ahora: $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ AVALOR(Haga clic en la celda que contiene $=1.20^*\text{ a la derecha de } <\alpha v = y$ y escriba el paréntesis final $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ AVALOR(Haga clic en la celda que contiene $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ AVALOR(Haga clic en la celda que contiene $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ AVALOR(Haga clic en la misma celda, eligia eligiendo: e) Velocidad $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Velocidad $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Velocidad $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Velocidad $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ AVALOR(Haga clic en la misma celda, eligia eligiendo: e) Velocidad $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Velocidad $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ AVALOR(Haga clic en la celda de la celoración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo «eligiendo: e) Velocidad $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Aceleración $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Aceleración $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Aceleración a $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Aceleración a $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Aceleración se obtienen haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos velocidad va celeración en un tiempo y posición concentos que cambiar a lagunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. Tombién el valor de la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos veloción del punto $=2^*\text{AVALOR}(\text{H19})$ Aceleración $=2^$		Fórmula:			0,400	)			
También puede escribir  Hacer clic en la celda que contiene «0,240» a la derecha de « $\lambda$ =».  Verá ahora:  = 2*AVALOR(H19)/AVALOR( Haga clic en la celda que contiene «1,20» a la derecha de « $\lambda$ =».  Verá ahora:  = 2*AVALOR(H19)/AVALOR( Haga clic en la celda que contiene «1,20» a la derecha de « $\nu$ =» y escriba el paréntesis final – 2*AVALOR(H18)/AVALOR(H20)  Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo « eligiendo:  e) Velocidad v = -3,14 sin(31,4 t = 26,2 x) (m/s)  Y haciendo clic en la misma celda, elija  e) Aceleración $a = -98,7$ con los(31,4 t = 26,2 x) (m/s)  Y haciendo clic en la misma celda, elija  e) Aceleración $a = -98,7$ con los(31,4 t = 26,2 x) (m/s)  Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición conce mos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación y= $A$ cos Amplitud $A$ = 0,1 m  Frecuencia angular $\omega$ = 10 $\pi$ rad/s  Longitud de onda $\lambda$ = 0,24 m  Posición del punto $\omega$ = 0,03 m  en el instante $t$ = 0,05 s  Diferencia de fase $\Delta \phi$ = rad  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En x = 0,03 m a los 0,05 s  f) Elongación $y_m$ = 0,100 m $y$ = 0,0707 m  En la misma celda, f), g) Velocidad $v_m$ = 3,14 m/s $v$ = -2,22 m/s  También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: f), g) Aceleración $a_m$ = 98,7 m/s² $a$ = -69,8 m/s²  Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x$ = 0,03 m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t$ =   s  y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo h  Tiempo de velocidad máxima, $t$ = 0,0750 + 0,100 n (s)			'	=2*	0,24/1,2				
Hacer clic en la celda que contiene $<0.240$ » a la derecha de $<\lambda = >$ . Verá ahora: $= 2*AVALOR(H19)$ Siga escribiendo $= 2*AVALOR(H19)$ AVALOR( Haga clic en la celda que contiene $<1.20$ » a la derecha de $< v = >$ y escriba el paréntesis final $= 2*AVALOR(H18)$ AVALOR(H20) Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo « eligiendo: e) Velocidad $v = -3.14 \sin(31.4 t - 26.2 x) (m/s)$ Y haciendo clic en la misma celda, elija e) Aceleración $a = -98.7 \text{ con los}(31.4 t - 26.2 x) (m/s^2)$ Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concensos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos Amplitud $A = 0.01 \text{ m}$ Frecuencia angular $a = 0.024 \text{ m}$ Posición del punto $a = 0.024 \text{ m}$ Posición del punto $a = 0.024 \text{ m}$ Posición del punto $a = 0.024 \text{ m}$ Posición del color naranja bajo «Valor» elegimos Valor Máximo En $a = 0.03 \text{ m}$ a los $a = 0.05 \text{ m}$ Aceleración $a = 0.000 \text{ m}$ $a = 0.0000 \text{ m}$ $a = 0.0000 \text{ m}$ $a = 0.0000 \text{ m}$ $a = 0.00000 \text{ m}$ $a = 0.000000 \text{ m}$ $a = 0.0000$									
Verá ahora: = 2*AVALOR(H19							₹(		
Siga escribiendo $=2^*\text{AVALOR(H19)/AVALOR(}$ Haga clic en la celda que contiene $\ll 1,20 \%$ a la derecha de $\ll v = \%$ y escriba el paréntesis final $=2^*\text{AVALOR(H18)/AVALOR(H20)}$ Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo « eligiendo:  (e) Velocidad $v = -3,14 \sin(31,4 \text{ t} - 26,2 \text{ x}) \text{ (m/s)}$ Y haciendo clic en la misma celda, elija e) Aceleración $a = -98,7 \text{ con los}(31,4 \text{ t} - 26,2 \text{ x}) \text{ (m/s}^2)$ Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concemos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos ( $\omega t \pm k x$ )  Amplitud $A = 0,1$ m  Frecuencia angular $\omega = 10 \pi$ rad/s  Longitud de onda $\lambda = 0,24$ m  Posición del punto $\omega = 0,03$ m  en el instante $\omega = 0,03$ m  en el instante $\omega = 0,03$ m  Aceleración $\omega = 0,03$ m  en el instante $\omega = 0,03$ m  Máximo En $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,05$ s  Diferencia de fase $\omega = 0,03$ m  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,05$ s  En la misma celda,  f), g) Velocidad $\omega = 0,03$ m  Aceleración $\omega = 0,03$ m  Aceleración $\omega = 0,03$ m  Aceleración $\omega = 0,03$ m  Finabién se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $\omega = 0,03$ m  Aceleración $\omega = 0,03$ m  Aceleración $\omega = 0,03$ m  Finabién se ven los valores del tiempo para los que $\omega = 0,03$ m  Finabién se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $\omega = 0,03$ m  Finabién se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $\omega = 0,03$ m  Finabién se ven los valores del tiempo para los que $\omega = 0,03$ m  Finabién se ven los valores del tiempo para los que $\omega = 0,03$ m  Finabién se ven los valores del tiempo para los que $\omega = 0,03$ m  Finabién se ven los valores máxima		-	«0,240»						
Haga clic en la celda que contiene «1,20» a la derecha de « $v = w$ y escriba el paréntesis final $=2^*\text{AVALOR}(\text{H18})/\text{AVALOR}(\text{H20})$ Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo « eligiendo:  e) Velocidad $v = -3,14 \sin(31,4 \text{ t} - 26,2 \text{ x}) \text{ (m/s)}$ Y haciendo clic en la misma celda, elija  e) Aceleración $a = -98,7 \text{ con los}(31,4 \text{ t} - 26,2 \text{ x}) \text{ (m/s}^2)$ Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concomos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos ( $\omega t \pm k x$ )  Amplitud $A = 0,1$ m  Frecuencia angular $\omega = 10 \pi$ rad/s  Longitud de onda $\lambda = 0,24$ m  Posición del punto $\omega = 0,03$ m  en el instante $\omega = 0,03$ m  Posición del punto $\omega = 0,03$ m  en el colda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,05$ s  En la misma celda,  f), g) Velocidad $\omega = 0,03$ m  También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $\omega = 0,03$ m, sor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m, sor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m, sor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  Tiempo de elongación máxima, $\omega$				=2 /		`	D(H10)/	ΔΥ/ΔΙ ΩΡ(	
=2*AVALOR(H18)/AVALOR(H20) Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo «eleligiendo:  e) Velocidad $v = -3.14 \sin(31.4 \text{ t} - 26.2 \text{ x}) \text{ (m/s)}$ Y haciendo clic en la misma celda, elija  e) Aceleración $a = -98.7 \text{ con los}(31.4 \text{ t} - 26.2 \text{ x}) \text{ (m/s}^2)$ Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concemos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar Δx por x, y escribir el valor del tiempo junto a t, y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos $(\omega t \pm k x)$ Amplitud $A = 0.1 \text{ m}$ Frecuencia angular $\omega = 10 \pi$ rad/s  Longitud de onda $\lambda = 0.024 \text{ m}$ Posición del punto $\omega = 0.03 \text{ m}$ en el instante $\omega = 0.03 \text{ m}$ en el color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En x = 0.03 m a los 0.05 s  f) Elongación $y_m = 0.100 \text{ m}$ $y = 0.0707 \text{ m}$ En la misma celda, f), g) Velocidad $v_m = 3.14 \text{ m/s}$ $v = -2.22 \text{ m/s}$ También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: f), g) Aceleración $a_m = 98.7 \text{ m/s}^2$ $a = -69.8 \text{ m/s}^2$ Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0.03 \text{ m}$ , bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = 0.03 \text{ m}$ se ven los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0.03 \text{ m}$ , bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = 0.00 \text{ m}$ se máxima en la posición $u = 0.00 \text{ m}$ se para los que y/s, t) es máxima en la posición $u = 0.00 \text{ m}$ se para los que y/s, t) es máxima en la posición $u = 0.00 \text{ m}$ se para los que y/s, t) es máxima en la posición $u = 0.00 \text{ m}$ se para los que y/s, t) es máxima en la posición $u = 0.00 \text{ m}$ se para los que y/s, t) es máxima en la posición $u = 0.00 \text{ m}$ se para los que y/s, t) es máxima en la posición $u = 0.00 \text{ m}$ se para los que y/s, t) es máxima en la posición $u = 0.00 \text{ m}$ se para los que y/s, t) es máxima en la posición			1.20» a	la derec					is final
Las ecuaciones de la velocidad y aceleración se obtienen haciendo clic en «Elongación» bajo « eligiendo:  e) Velocidad $v = -3,14 \sin(31,4 \text{ t} - 26,2 \text{ x}) \text{ (m/s)}$ Y haciendo clic en la misma celda, elija e) Aceleración $a = -98,7 \text{ con los}(31,4 \text{ t} - 26,2 \text{ x}) \text{ (m/s}^2)$ Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concemos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos ( $\omega t \pm k x$ )  Amplitud $A = 0,1$ m  Frecuencia angular $\omega = 10.00$ m  Frecuencia de fase $\Delta \phi = 10.00$ m  Posición del punto $\omega = 0,003$ m  en el instante $\omega = 0,003$ m  en el color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $\omega = 0,03$ m a los $\omega = 0,03$ m  En la misma celda, $\omega = 0,000$ m  En la misma celda, $\omega = $	···ug	rene en la ceraa que contiene «	1,20%						is illiai
Velocidad $v = -3,14 \sin(31,4 t - 26,2 x) (m/s)$ Y haciendo clic en la misma celda, elija e) Aceleración $a = -98,7 \text{ con los}(31,4 t - 26,2 x) (m/s^2)$ Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concemos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos Amplitud $A = 0,1$ m  Frecuencia angular $\omega = 10 \pi$ rad/s  Longitud de onda $\lambda = 0,24$ m  Posición del punto $x = 0,03$ m  en el instante $t = 0,05$ s  Diferencia de fase $\Delta \phi = 1$ rad  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $x = 0,03$ m a los 0,05 s  f) Elongación $y_m = 0,100$ m $y = 0,0707$ m  En la misma celda, ff, g) Velocidad $v_m = 3,14$ m/s $v = -2,22$ m/s  También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: ff), g) Aceleración $a_m = 98,7$ m/s² $a = -69,8$ m/s²  Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = 1$ s  y haciendo clic en la misma celda, podemos ver  i) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0,0750 + 0,100$ n (s)	Las 6	ecuaciones de la velocidad y ace	leració					, ,	n» bajo «
Y haciendo clic en la misma celda, elija e) Aceleración $a = -98,7$ con los $(31,4 \text{ t} - 26,2 \text{ x})$ (m/s²)  Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concemos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos Amplitud $A = 0,1$ m  Frecuencia angular $\omega = 10 \pi$ rad/s  Longitud de onda $\lambda = 0,24$ m  Posición del punto $\alpha = 0,03$ m  en el instante $\alpha = 0,03$ m  en el instante $\alpha = 0,03$ m  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $\alpha = 0,03$ m a los $\alpha = 0,03$ m  En la misma celda, fo, g) Velocidad $\alpha = 0,03$ m  En la misma celda, fo, g) Velocidad $\alpha = 0,03$ m  Aceleración $\alpha = 0,03$ m	eligi	endo:							
Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición cono mos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos Amplitud $A = 0,1$ m  Frecuencia angular $\omega = 10 \pi$ rad/s  Longitud de onda $\lambda = 0,24$ m  Posición del punto $x = 0,03$ m  en el instante $t = 0,05$ s  Diferencia de fase $\Delta \phi = 0$ rad  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $x = 0,03$ m a los $0,05$ s  f) Elongación $y_m = 0,100$ m $y = 0,0707$ m  En la misma celda, $y_m = 0,100$ m $y = 0,0707$ m  En la misma celda, $y_m = 0,100$ m $y = 0,0707$ m  Cos del tiempo en los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: $y_m = 0,000$ m and $y_m = 0,000$ m and $y_m = 0,000$ m  Aceleración $y_m = 0,000$ m $y_m = 0,000$ m  Finambién se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: $y_m = 0,000$ m  Finambién se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: $y_m = 0,000$ m  Finambién se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: $y_m = 0,000$ m  Finambién se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: $y_m = 0,000$ m  Finambién se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda: $y_m = 0,000$ m, bor lor del tiempo en los datos en el instante $y_m = 0,000$ m  Finambién se ven los valores del tiempo para los que $y_m = 0,000$ m  Finambién se ven los valores máximos. Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo ha Tiempo de elongación máxima, $y_m = 0,000$ m en el instante el misma celda, podemos ver in máxima, $y_m = 0,000$ m en el instante el misma celda máxima, $y_m = 0,000$ m en el instante el misma celda máxima, $y_m = 0,000$ m en el instante el misma celda máxima, $y_m = 0,000$ m en el instante el misma celda máxima, $y_m = 0,000$ m en el instante el misma	e)	Velocidad	v = -	-3,14 sin	(31,4 t –	26,2 x)	(m/s)		
Para obtener el valores de la elongación, velocidad y aceleración en un tiempo y posición concernos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos ( $\omega t \pm k x$ )  Amplitud $A = 0,1$ m  Frecuencia angular $\omega = 10 \pi$ rad/s  Longitud de onda $\lambda = 0,24$ m  Posición del punto $\omega = 0,03$ m  en el instante $\omega = 0,03$ m  en el instante $\omega = 0,03$ m  en el instante $\omega = 0,03$ m  Amaimo En $\omega = 0,03$ m a los 0,05 s  f) Elongación $\omega = 0,100$ m $\omega = 0,0707$ m  En la misma celda, $\omega = 0,03$ m  En	Y ha	ciendo clic en la misma celda, e	lija						
mos que cambiar algunos de los datos, poniendo por ejemplo el valor de la longitud de onda. To cambiar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor del tiempo junto a $t$ , y borrar el valor de la «Diferencia de Ecuación $y = A$ cos $(\omega t \pm k x)$ Amplitud $A = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.24 \\ 0.55 \end{bmatrix}$ Longitud de onda $\lambda = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$ Posición del punto $\lambda = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$ Diferencia de fase $\lambda \phi = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$ Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $\lambda = \begin{bmatrix} 0.0707 \\ 0.07$	e)	Aceleración	a = -	-98,7 cor	los(31,4	4 t - 26,	2 x) (m/	$/s^2$ )	
Longitud de onda  Posición del punto $x = 0.03$ m  en el instante $t = 0.05$ s  Diferencia de fase $\Delta \phi = 1$ rad  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $x = 0.03$ m a los $0.05$ s  f) Elongación $y_m = 0.100$ m $y = 0.0707$ m  En la misma celda,  f), g) Velocidad $v_m = 3.14$ m/s $v = -2.22$ m/s  También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $a_m = 98.7$ m/s² $a = -69.8$ m/s²  Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0.03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = 1$ s  y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  h) Tiempo de elongación máxima, $t = 0.0250 + 0.100$ n (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  i) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0.0750 + 0.100$ n (s)		piar $\Delta x$ por $x$ , y escribir el valor Ecuación Amplitud	del ties $A = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & & & & & & & & &$	mpo junt $y = A$ $0,1$	cos m	borrar e	l valor	_	
Posición del punto $x = 0.03 \text{ m}$ en el instante $t = 0.05 \text{ s}$ Diferencia de fase $\Delta \varphi = \text{rad}$ Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $x = 0.03 \text{ m}$ a los $0.05 \text{ s}$ f) Elongación $y_m = 0.100 \text{ m}$ $y = 0.0707 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.100 \text{ m}$ $y = 0.0707 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.100 \text{ m}$ $y = 0.0707 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.100 \text{ m}$ $y = 0.0707 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.100 \text{ m}$ $y = 0.0707 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.100 \text{ m}$ $y = 0.0707 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0700 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0700 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0700 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0700 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0700 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0000 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0000 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0000 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0000 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ $y = 0.0000 \text{ m}$ En la misma celda, $y_m = 0.000 \text{ m}$ En la		Frecuencia angular	$\omega = 10$	π	rad/s				
en el instante $t = 0,05$ s  Diferencia de fase $\Delta \varphi = 1$ rad  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $x = 0,03$ m a los $0,05$ s  f) Elongación $y_m = 0,100$ m $y = 0,0707$ m  En la misma celda,  f), g) Velocidad $v_m = 3,14$ m/s $v = -2,22$ m/s  También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $a_m = 98,7$ m/s² $a = -69,8$ m/s²  Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = 1$ s  y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  h) Tiempo de elongación máxima, $t = 0,0250 + 0,100$ n (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  ii) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0,0750 + 0,100$ n (s)		Longitud de onda	λ =	0,24	m				
Diferencia de fase $\Delta \varphi = \frac{1}{1000}$ rad  Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En x = 0,03 m a los 0,05 s  f) Elongación $y_m = 0,100$ m $y = 0,0707$ m  En la misma celda,  f), g) Velocidad $v_m = 3,14$ m/s $v = -2,22$ m/s  También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $a_m = 98,7$ m/s² $a = -69,8$ m/s²  Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = \frac{1}{1000}$ s  y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  h) Tiempo de elongación máxima, $t = 0,0250 + 0,100$ n (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  Tiempo de velocidad máxima, $t = 0,0750 + 0,100$ n (s)		Posición del punto	x =	0,03	m				
Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Valor» elegimos  Valor Máximo En $x = 0.03$ m a los $0.05$ s  f) Elongación $y_m = 0.100$ m $y = 0.0707$ m  En la misma celda,  f), g) Velocidad $v_m = 3.14$ m/s $v = -2.22$ m/s  También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $a_m = 98.7$ m/s² $a = -69.8$ m/s²  Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0.03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = $ y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  h) Tiempo de elongación máxima, $t = 0.0250 + 0.100$ n (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  ii) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0.0750 + 0.100$ n (s)		en el instante	t =	0,05	s				
Valor Máximo En x = 0,03 m a los 0,05 s  Elongación $y_m = 0,100$ m $y = 0,0707$ m  En la misma celda,  f), g) Velocidad $v_m = 3,14$ m/s $v = -2,22$ m/s  También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $a_m = 98,7$ m/s² $a = -69,8$ m/s²  Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = $ y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  h) Tiempo de elongación máxima, $t = 0,0250 + 0,100$ n (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  ii) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0,0750 + 0,100$ n (s)		Diferencia de fase $\Delta$	φ =		rad				
Elongación $y_m = 0,100 \text{ m}$ $y = 0,0707 \text{ m}$ En la misma celda,  f), g) Velocidad $v_m = 3,14 \text{ m/s}$ $v = -2,22 \text{ m/s}$ También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $a_m = 98,7 \text{ m/s}^2$ $a = -69,8 \text{ m/s}^2$ Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03 \text{ m}$ , bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = $ y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  h) Tiempo de elongación máxima, $t = 0,0250 + 0,100 \text{ n}$ (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  i) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0,0750 + 0,100 \text{ n}$ (s)	Haci		•	oajo «Val	or» eleg	gimos			
En la misma celda, $f(x)$ , $g(x)$ Velocidad en la misma celda: $g(x)$ Aceleración $g(x)$ Aceleración $g(x)$ Aceleración $g(x)$ Aceleración $g(x)$ Velocidad en la posición $g(x)$ Obtenemos los valores del tiempo para los que $g(x)$ , $g(x)$ es máxima en la posición $g(x)$ en el instante $g(x)$ s y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo h) Tiempo de elongación máxima, $g(x)$ Tiempo de elongación máxima, $g(x)$ Tiempo de velocidad máxima, $g(x)$ Tiempo de velocidad máxima, $g(x)$ Tiempo de velocidad máxima, $g(x)$ Porto $g(x)$ Tiempo de velocidad máxima, $g(x)$ Porto $g(x)$		Valor	·	Máxin	io E	n x = 0,0	03 m a l	los 0,05 s	
En la misma celda, $f(x)$ , $g(x)$ Velocidad en la misma celda: $g(x)$ Aceleración $g(x)$ Aceleración $g(x)$ Aceleración $g(x)$ Aceleración $g(x)$ Velocidad en la posición $g(x)$ Obtenemos los valores del tiempo para los que $g(x)$ , $g(x)$ es máxima en la posición $g(x)$ en el instante $g(x)$ s y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo h) Tiempo de elongación máxima, $g(x)$ Tiempo de elongación máxima, $g(x)$ Tiempo de velocidad máxima, $g(x)$ Tiempo de velocidad máxima, $g(x)$ Tiempo de velocidad máxima, $g(x)$ Porto $g(x)$ Tiempo de velocidad máxima, $g(x)$ Porto $g(x)$	f)	Elongación	$y_m =$	0,10	00 m		<i>y</i> =	0,0707 m	
F), g) Velocidad $v_m = 3,14 \text{ m/s}$ $v = -2,22 \text{ m/s}$ También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  f), g) Aceleración $a_m = 98,7 \text{ m/s}^2$ $a = -69,8 \text{ m/s}^2$ Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = $ y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  h) Tiempo de elongación máxima, $t = 0,0250 + 0,100 \text{ n}$ (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  i) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0,0750 + 0,100 \text{ n}$ (s)	,	<u> </u>							
También se ven los valores máximos. Haciendo clic otra vez en la misma celda:  (f), g)  Aceleración $a_m = 98.7 \text{ m/s}^2$ $a = -69.8 \text{ m/s}^2$ Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0.03 \text{ m}$ , bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = $ y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  h)  Tiempo de elongación máxima, $t = 0.0250 + 0.100 \text{ n}$ (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  i)  Tiempo de velocidad máxima, $t = 0.0750 + 0.100 \text{ n}$ (s)			$v_m =$	3,1	14 m/s		v =	-2,22 m	/s
f), g) Aceleración $a_m = 98.7 \text{ m/s}^2$ $a = -69.8 \text{ m/s}^2$ Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0.03 \text{ m}$ , bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = 0.0000000000000000000000000000000000$	_					en la n	nisma c		
Obtenemos los valores del tiempo para los que $y(x, t)$ es máxima en la posición $x = 0,03$ m, bor lor del tiempo en los datos  en el instante $t = $ y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo  Tiempo de elongación máxima, $t = 0,0250 + 0,100$ n (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  i) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0,0750 + 0,100$ n (s)									$/s^2$
en el instante $t = $ s y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo h) Tiempo de elongación máxima, $t = 0.0250 + 0.100$ n (s) Haciendo clic en la misma celda, podemos ver i) Tiempo de velocidad máxima, $t = 0.0750 + 0.100$ n (s)						xima en	la posi	ición $x = 0$	,03 m, bor:
y haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo h) Tiempo de elongación máxima, t = 0,0250 + 0,100 n (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver i) Tiempo de velocidad máxima, t = 0,0750 + 0,100 n (s)	lor d	el tiempo en los datos					-		
h) Tiempo de elongación máxima, t = 0,0250 + 0,100 n (s)  Haciendo clic en la misma celda, podemos ver  i) Tiempo de velocidad máxima, t = 0,0750 + 0,100 n (s)		en el instante	<i>t</i> =		s				
Haciendo clic en la misma celda, podemos ver i) Tiempo de velocidad máxima, t = 0,0750 + 0,100 n (s)	y ha	ciendo clic en la celda de color	naranj	a bajo «V	<sup>7</sup> elocida	d de pro	pagació	ón» eligien	do
i) Tiempo de velocidad máxima, t = 0,0750 + 0,100 n (s)			-	alamaaai			0.0250	0 100 n (	(;)
	h)	Tien	ipo de	elongaci	ón máxi	ma, t =	0,0230 -	+ 0,100 11 (3	-)
Para ver la distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es 2 $\pi/3$ , solo	,		_		ón máxi	ma, t =	0,0230 -	+ 0,100 11 (8	
	,	endo clic en la misma celda, po	demos	ver					

Diferencia de fase  $\Delta \varphi = 2 \pi / 3$  rad

Aparecerá en la última línea de los resultados:

j) Distancia entre puntos  $\Delta x = 0.0800 \text{ m/s}$   $\Delta \varphi = 2.09 \text{ rad}$ 

Para el apartado siguiente, cambiamos en los datos x por  $\Delta x$ , escribimos la distancia, elegimos la unidad y borramos el valor de la «Diferencia de fase»

Distancia entre puntos	$\Delta x =$	15	cm
en el instante	<i>t</i> =		S
Diferencia de fase	$\Delta \phi =$		rad

La última línea de RESULTADOS mostrará:

k) Diferencia de fase 
$$\Delta \varphi = 3,93 \text{ rad/s}$$
  $\Delta x = 15 \text{ cm}$ 

Podemos hacer clic en la celda de color naranja, para que la diferencia de fase aparezca en función de  $\pi$ .

k) Diferencia de fase 
$$\Delta \varphi = 5 \pi/4 \text{ rad/s}$$
  $\Delta x = 15 \text{ cm}$ 

Para ver la diferencia de fase cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 0,05 s, esta hoja no le da el resultado.

Para ver qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en x = 0,03 m, volvemos a cambiar en los datos  $\Delta x$  por x, escribimos la posición y elegimos la unidad.

Posición del punto 
$$x = 0.03 \text{ m}$$

Haciendo clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» y eligiendo

m) Posiciones de puntos en fase, 
$$x = 0.0300 + 0.240 \text{ n (m)}$$

Para ver en qué tiempos el estado de vibración del punto está en fase con la vibración para t = 0,05 s, borramos los datos de x, y escribimos el tiempo.

en el instante 
$$t = 0.05$$
 s

Faceme los clic en la celda de color naranja bajo «Velocidad de propagación» eligiendo

n) Tiempos de puntos en fase, 
$$t = 0.0500 + 0.200 \text{ n (s)}$$

- 2. Una onda armónica transversal de frecuencia 2 Hz, longitud de onda 20 cm y amplitud 4 cm, se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje X. En el instante t = 0, la elongación en el punto x = 0 es y = 2,83 cm.
  - a) Expresa matemáticamente la onda y represéntala gráficamente en (t = 0; 0 < x < 40 cm)
  - b) Calcula la velocidad de propagación de la onda y determina, en función del tiempo, la velocidad de oscilación transversal de la partícula situada en *x* = 5 cm.

(A.B.A.U. Jul. 21

**Rta.:** a) 
$$y = 0.0400 \text{ sen}(4 \pi t - 10 \pi x + \pi / 4) \text{ [m]}$$
; b)  $v_p = 0.400 \text{ m/s}$ ;  $v = 0.503 \cos(4 \pi t - \pi / 4) \text{ [m/s]}$ 

Datos	Cifras significativas: 3
Frecuencia	f = 2,00 Hz = 2,00 s <sup>-1</sup>
Longitud de onda	$\lambda = 20.0 \text{ cm} = 0.200 \text{ m}$
Amplitud	A = 0.0400  m = 0.0400  m
Elongación en $x = 0$ para $t = 0$	y = 2.83  cm = 0.0283  m
Incógnitas	
Ecuación de la onda (frecuencia angular y número de onda)	$\omega$ , $k$
Velocidad de propagación	$ u_{ m p}$
Velocidad de la partícula en $x = 5$ cm en función del tiempo	ν
Otros símbolos	
Posición del punto (distancia al foco)	x
Período	T
Ecuaciones	
Ecuación de una onda armónica unidimensional	$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)$
Número de onda	$k = 2 \pi / \lambda$
Frecuencia angular	$\omega = 2 \pi \cdot f$
Relación entre la longitud de onda y la velocidad de propagación	$v_{\rm p} = \lambda \cdot f$

## Solución:

a) Se toma la ecuación de una onda armónica en sentido positivo del eje X:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

Se calcula la frecuencia angular a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2 \pi \cdot f = 2 \cdot 3.14 \cdot 2.00 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 4.00 \cdot \pi \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{]} = 12.6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Se calcula el número de onda a partir de la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14 \text{ [rad]}}{0,200 \text{ [m]}} = 10 \pi \text{ rad/m} = 31,4 \text{ rad/m}$$

Se calcula la fase inicial a partir de la elongación en x = 0 para t = 0.

$$y(x, t) = 0.0400 \cdot \text{sen}(12.6 \cdot t - 31.4 \cdot x + \varphi_0) \text{ [m]}$$
  
 $0.0283 \text{ [m]} = 0.0400 \cdot \text{sen}(12.6 \cdot 0 - 31.4 \cdot 0 + \varphi_0) \text{ [m]} = 0.0400 \cdot \text{sen}(\varphi_0)$   
 $\text{sen}(\varphi_0) = 0.0283 / 0.0400 = 0.721$   
 $\varphi_0 = \text{arcsen } 0.721 = 0.786 \text{ rad} = \pi / 4 \text{ rad}$ 

La ecuación de onda queda:

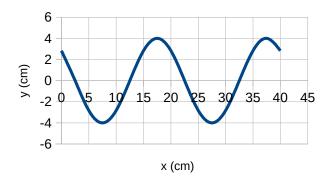
$$y(x, t) = 0.0400 \cdot \text{sen}(12.6 \cdot t - 31.4 \cdot x + 0.786) \text{ [m]} = 0.0400 \cdot \text{sen}(4 \pi \cdot t - 10 \pi \cdot x + \pi / 4) \text{ [m]}$$

La representación gráfica es la de la figura:

b) Se calcula la velocidad de propagación a partir de la longitud de onda y la frecuencia:

$$v_p = \lambda \cdot f = 0,200 \text{ [m]} \cdot 2,00 \text{ [s}^{-1}] = 0,400 \text{ m/s}$$

La velocidad se obtiene derivando la ecuación de movimiento con respeto al tiempo:



$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[0.040 \ 0 \,\mathrm{sen}\left(12.6 \cdot t - 31.4 \cdot x + 0.786\right)\right]}{\mathrm{d}t} = 0.040 \ 012.6 \,\mathrm{cos}\left(12.6 \cdot t - 31.4 \cdot x + 0.786\right) \left[\mathrm{m/s}\right]$$

$$v = 0.503 \cdot \mathrm{cos}(12.6 \cdot t - 31.4 \cdot x + 0.786) \left[\mathrm{m/s}\right]$$

Para x = 5 cm (=0,05 m), la expresión queda:

$$v = 0.503 \cdot \cos(12.6 \cdot t - 31.4 \cdot 0.0500 + 0.786) = 0.503 \cdot \cos(12.6 \cdot t - 0.786) = 0.503 \cdot \cos(4 \pi \cdot t - \pi / 4) \text{ [m/s]}$$

Puede obtener las respuestas en la pestaña «Ondas» de la hoja de cálculo Fisica (es), Instrucciones.

Ecuación		y = A	sen	$(\omega t \pm k x + \varphi_0)$
Amplitud	<i>A</i> =	4	cm	
Frecuencia	f =	2	Hz	
Longitud de onda	λ =	0,2	m	
Posición del punto	<i>x</i> =	5	cm	
en el instante	<i>t</i> =	0	s	
Elongación inicial	<i>y</i> <sub>0</sub> =	2,83	cm	
Diferencia de fase	Δφ =		rad	

Para ver los resultados, haga clic en las celdas de color naranja y elija las opciones como se muestra:

			Cifras s	significativas:	3	
	Ecuación	general				
	Elongación	y = 0.0400  sen(1)	2,6 t – 31,4 x +	0,786) (m)		

Más abajo verá:

Velocidad de propagación v = 0,400 m/s

Para la representación gráfica elija «Tiempo (s)» en la celda de color naranja y teclee los datos del tiempo y las posiciones inicial y final.

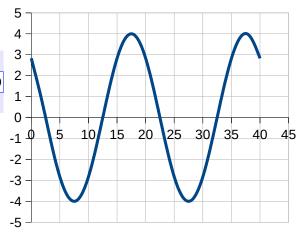
 Tiempo (s)
 mín
 máx

 0
 Posición (cm)
 0
 40

La gráfica será como la siguiente:

Para ver los resultados de apartado b) cambie «general» por «en x = 5 cm» y «Elongación» por «Velocidad».

Ecuación en x = 5 cm  
Velocidad 
$$v = 0.503 \cos(12.6 t - 1.57) (m/s)$$



## Dioptrio plano

- 1. Un rayo de luz de frecuencia 5·10<sup>14</sup> Hz incide con un ángulo de incidencia de 30° sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,50 y el del aire 1,00:
  - a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la lámina de vidrio.
  - b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.
  - c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire.

Dato:  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ 

**Rta.**: b)  $\lambda$ (aire) = 600 nm;  $\lambda$ (vidrio) = 400 nm; L = 10,6 cm; c)  $\theta_{r2}$  = 30°

### Datos

Frecuencia del rayo de luz Ángulo de incidencia Espesor de la lámina de vidrio Índice de refracción del vidrio Índice de refracción del aire Velocidad de la luz en el vacío

## Incógnitas

Longitud de onda de luz en el aire y en el vidrio Longitud recorrida por el rayo de luz en el interior de la lámina Ángulo de desviación del rayo al salir de la lámina

## Ecuaciones

Índice de refracción de un medio  $_{\rm i}$  en el que la luz se desplaza a la velocidad  $\nu_{\rm i}$ 

Relación entre la velocidad v, la longitud de onda  $\lambda$  y la frecuencia f Ley de Snell de la refracción

## Cifras significativas: 3

(P.A.U. Sep. 14)

 $f = 5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$   $\theta_{11} = 30,0^{\circ}$  e = 10,0 cm = 0,100 m  $n_{v} = 1,50$   $n_{a} = 1,00$  $c = 3,00 \cdot 10^{8} \text{ m/s}$ 

 $\lambda_{
m a},\,\lambda_{
m v} \ L \ heta_{
m r2}$ 

$$n_{i} = \frac{c}{v_{i}}$$

$$v = \lambda \cdot f$$

$$n_{i} \cdot \text{sen } \theta_{i} = n_{r} \cdot \text{sen } \theta_{r}$$

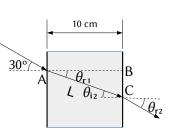
#### Solución:

- a) Las leyes de Snell de la refracción son:
- 1.ª El rayo incidente, el rayo refractado y la normal están en el mismo plano.
- 2.ª La relación matemática entre los índices de refracción  $n_i$  y  $n_r$  de los medios incidente y refractado y los ángulos de incidencia y refracción  $\theta_i$  y  $\theta_r$ , es:

$$n_{\rm i} \cdot {\rm sen} \ \theta_{\rm i} = n_{\rm r} \cdot {\rm sen} \ \theta_{\rm r}$$

En la figura se representa la trayectoria de la luz. El rayo incidente en el punto

A con un ángulo de incidencia  $\theta_{i1} = 30^{\circ}$  pasa del aire al vidrio dando un rayo refractado que forma el primer ángulo de refracción  $\theta_{r1}$  y el segundo ángulo de incidencia  $\theta_{i2}$  entre el vidrio y el aire. Finalmente, sale de la lámina de vidrio por el punto B con el segundo ángulo de refracción  $\theta_{r2}$ .



b) La velocidad de la luz en el aire es:

$$v_a = \frac{c}{n_a} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,00} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el aire es:

$$\lambda_a = \frac{v_a}{f} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5.00 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 6,00 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

La velocidad de la luz en el vidrio es:

$$v_{v} = \frac{c}{n_{v}} = \frac{3,00 \cdot 10^{8} \text{ m/s}}{1,50} = 2,00 \cdot 10^{8} \text{ m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el vidrio es:

$$\lambda_{\rm v} = \frac{v_{\rm v}}{f} = \frac{2,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5.00 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4,00 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 400 \text{ nm}$$

Como el espesor de la lámina es de 10 cm, la longitud recorrida por el rayo es la hipotenusa L del triángulo ABC.

El primer ángulo de refracción  $\theta_{r1}$  se puede calcular aplicando la ley de Snell

$$1,00 \cdot \text{sen } 30^{\circ} = 1,50 \cdot \text{sen } \theta_{r1}$$
  
 $\text{sen } \theta_{r1} = \frac{1,00 \cdot \text{sen } 30^{\circ}}{1,50} = 0,333$   
 $\theta_{r1} = \text{arcsen } 0,333 = 19,5^{\circ}$ 

Por tanto, la hipotenusa L vale

$$L = \frac{e}{\cos \theta_{\rm rl}} = \frac{10.0 \text{ [cm]}}{\cos 19.5^{\circ}} = 10.6 \text{ cm}$$

c) Como la lámina de vidrio es de caras paralelas, el segundo ángulo de incidencia  $a_{i2}$  es igual al primer ángulo de refracción:

$$\theta_{i2} = \theta_{r1} = 19.5^{\circ}$$

Para calcular el ángulo con el que sale de la lámina, se vuelve a aplicar la ley de Snell entre el vidrio (que ahora es el medio incidente) y el aire (que es el medio refractado):

1,50 · sen 19,5° = 1,00 · sen 
$$\theta_{r2}$$
  
sen  $\theta_{r2} = \frac{1,50 \cdot \text{sen } 19,5°}{1,00} = 0,500$   
 $\theta_{r2} = \operatorname{arcsen } 0.500 = 30.0°$ 

Análisis: Este resultado es correcto porque el rayo sale paralelo al rayo incidente original.

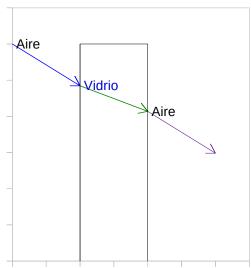
Puede obtener las respuestas en la pestaña «Dioptrio» de la hoja de cálculo Fisica (es), Instrucciones.

maice de re	erraccion			
Medios	n	Ángulo de	Aire-Vidrio	
Aire	1	incidencia	30	0
Vidrio	1,5	Espesor	10	cm
Aire	1			
		Frecuencia	5·10 <sup>14</sup>	Hz

Los resultados son:

Índias da mafrassián

Angulo	refractado	límite	
Aire-Vidrio	19,5°		
Vidrio-Aire	$30,0^{\circ}$	41,8°	
I amaitad na aanida na a	1 1		
Longitud recorrida por	el rayo en la .	lámina	10,6 cm
Longitud recorrida poi	el rayo en la . Aire	lámina Vidrio	10,6 cm Aire



- 2. Un rayo de luz pasa del agua (índice de refracción n = 4/3) al aire (n = 1). Calcula:
  - a) El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.
  - b) El ángulo límite.
  - c) ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?

(P.A.U. Jun. 13)

**Rta.**: a)  $\theta_i = 36.9^\circ$ ; b)  $\lambda = 48.6^\circ$ 

#### **Datos**

Índice de refracción del aire Índice de refracción del agua Ángulo entre el rayo refractado y el reflejado

## Incógnitas

Ángulo de incidencia

# Ángulo límite **Ecuaciones**

Ley de Snell de la refracción

## Cifras significativas: 3

$$n = 1,00$$
  
 $n_a = 4 / 3 = 1,33$   
 $\theta_i = 90,0^\circ$ 

 $heta_{
m i} \ \lambda$ 

 $n_{\rm i} \cdot {\rm sen} \ \theta_{\rm i} = n_{\rm r} \cdot {\rm sen} \ \theta_{\rm r}$ 

## Solución:

a) Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$1,33 \cdot \text{sen } \theta_{i} = 1,00 \cdot \text{sen } \theta_{r}$$

A la vista del dibujo debe cumplirse que

$$\theta_{\rm r} + 90^{\circ} + \theta_{\rm rx} = 180^{\circ}$$

Como el ángulo de reflexión  $\theta_{rx}$  es igual al ángulo de incidencia  $\theta_{i}$ , la ecuación anterior se convierte en:

aire 
$$\theta_{\rm r}$$
  $\theta_{\rm r}$  agua

$$\theta_i + \theta_r = 90^\circ$$

Es decir, que el ángulo de incidencia  $\theta_i$  y el de refracción  $\theta_r$  son complementarios. El seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario. Entonces la primera ecuación queda:

no de su complementario. Entonces la primera ecuación queda

1,33 · sen 
$$\theta_i$$
 = sen  $\theta_r$  = cos  $\theta_i$   
tan  $\theta_i$  =  $\frac{1}{1,33}$  = 0,75  
 $\theta_i$  = arctan 0,75 = 36,9°

b) Ángulo límite  $\lambda$  es el ángulo de incidencia tal que el de refracción vale 90°

$$1,33 \cdot \text{sen } \lambda = 1,00 \cdot \text{sen } 90,0^{\circ}$$
  
 $\text{sen } \lambda = 1,00 / 1,33 = 0,75$   
 $\lambda = \text{arcsen } 0,75 = 48,6^{\circ}$ 

c) No. Cuando la luz pasa del aire al agua, el ángulo de refracción es menor que el de incidencia. Para conseguir un ángulo de refracción de 90° el ángulo de incidencia tendría que ser mayor que 90° y no estaría en el aire.

También puede deducirse de la ley de Snell.

$$1,00 \cdot \text{sen } \lambda_1 = 1,33 \cdot \text{sen } 90^\circ$$
  
 $\text{sen } \lambda_1 = 1,33 / 1,00 > 1$ 

Es imposible. El seno de un ángulo no puede ser mayor que uno.

- 3. Sobre un prisma equilátero de ángulo 60° (ver figura), incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de 50° con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base AC:
  - a) Calcula el índice de refracción del prisma.
  - b) Determina el ángulo de desviación del rayo al salir del prisma, dibujando la trayectoria que sigue el rayo.
  - c) Explica si la frecuencia y la longitud de onda correspondientes al rayo luminoso son distintas, o no, dentro y fuera del prisma.

Dato: n(aire) = 1 (P.A.U. Sep. 11) **Rta.**: a)  $n_p = 1,5$ ; b)  $\theta_{r2} = 50^{\circ}$ 

Datos

Ángulos del triángulo equilátero Ángulo de incidencia Índice de refracción del aire

Incógnitas

Índice de refracción del prisma

Ángulo de desviación del rayo al salir del prisma

Ecuaciones

Ley de Snell de la refracción

Cifras significativas: 2

 $\theta = 60^{\circ}$   $\theta_{i} = 50^{\circ}$   $n_{a} = 1,0$ 

 $n_{
m p} hinspace heta_{
m r2}$ 

 $n_{\rm i} \cdot {\rm sen} \ \theta_{\rm i} = n_{\rm r} \cdot {\rm sen} \ \theta_{\rm r}$ 

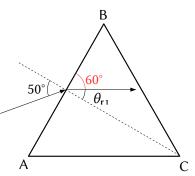
## Solución:

a) En la ley de Snell de la refracción

$$n_{\rm i} \cdot {\rm sen} \ \theta_{\rm i} = n_{\rm r} \cdot {\rm sen} \ \theta_{\rm r}$$

 $n_{\rm i}$  y  $n_{\rm r}$  representan los índices de refracción de los medios incidente y refractado

 $\theta_i$  y  $\theta_r$  representan los ángulos de incidencia y refracción que forma cada rayo con la normal a la superficie de separación entre los dos medios. El primer ángulo de refracción  $\theta_{r1}$ , que forma el rayo de luz refractado paralelo a la base del prisma, vale 30°, ya que es el complementario al de 60° del triángulo equilátero.



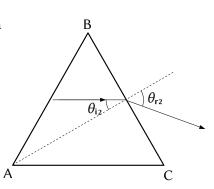
$$n_{\rm p} = n_{\rm r} = \frac{n_{\rm i} \cdot \sin \theta_{\rm i1}}{\sin \theta_{\rm r1}} = \frac{1,0 \cdot \sin 50^{\circ}}{\sin 30^{\circ}} = 1,5$$

b) Cuando el rayo sale del prisma, el ángulo de incidencia  $\theta_{i2}$  del rayo con la normal al lado BC vale 30°. Volviendo a aplicar la ley de Snell

c) La frecuencia f de una onda electromagnética es una característica de la misma y no varía con el medio.

La longitud de onda  $\lambda$  está relacionada con ella por

$$c = \lambda \cdot f$$



La velocidad de la luz en un medio transparente es siempre menor que en el vacío. El índice de refracción del medio es el cociente entre ambas velocidades.

$$n = \frac{c}{v}$$

La velocidad de la luz en el aire es prácticamente igual a la del vacío, mientras que en el prisma es 1,5 veces menor. Como la frecuencia es la misma, la longitud de onda (que es inversamente proporcional a la frecuencia) en el prisma es 1,5 veces menor que en el aire.

Cuestiones y problemas de las <u>Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad</u> (A.B.A.U. y P.A.U.) en Galicia.

Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.

Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice del mismo autor.

Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión <u>CLC09</u> de Charles Lalanne-Cassou. La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, y del <u>traductor de la CIXUG</u>.

Se procuró seguir las <u>recomendaciones</u> del Centro Español de Metrología (CEM).

Se consultó al Copilot de Microsoft Edge y se tuvieron en cuenta algunas de sus respuestas en las cuestiones.

Actualizado: 07/10/24

## Sumario

## **ONDAS**

Ecuac	rión y características de las ondas1
1.	Una onda se transmite a lo largo de una cuerda. El punto situado en $x = 0$ oscila según la ecuación
	y = 0,1 $\cos(10 \pi t)$ y otro punto situado en x = 0,03 m oscila según la ecuación
	$y = 0.1 \cos(10 \pi t - \pi / 4)$ . Calcula:1
	a) La amplitud, la longitud de onda, el número de onda k, el período, la frecuencia y pulsación $\omega$ de
	la onda
	b) La velocidad de propagación de la onda e indica en qué sentido se propaga
	c) El tiempo que ha de transcurrir para que la onda recorra una distancia igual a 2 $\lambda$
	d) Escribe la ecuación de onda
	e) La velocidad de oscilación de un punto de la cuerda y su aceleración en función del tiempo
	f) La elongación, velocidad y aceleración de un punto situado en $x = 0.03$ m en el instante $t = 0.05$
	S
	g) Los valores máximos de la velocidad y aceleración de las partículas de la cuerda
	h) Los valores del tiempo para los que y(x, t) es máxima en la posición x = 0,03 m
	i) Los valores del tiempo para los que un punto situado en x = 0,03 m tiene velocidad máxima
	j) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es $2 \pi/3$
	k) La diferencia de fase entre dos puntos separados 15 cm
	l) La diferencia de fase entre dos estados de vibración de la misma partícula cuando el intervalo de
	tiempo transcurrido es de 0,05 s
	m) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en
	x = 0,03 m?
	n) Para una posición fija x, ¿para qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase con
2	la vibración para t = 0,05 s? Una onda armónica transversal de frecuencia 2 Hz, longitud de onda 20 cm y amplitud 4 cm, se
	propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje X. En el instante t = 0, la elongación en el
	punto $x = 0$ es $y = 2.83$ cm
	a) Expresa matemáticamente la onda y representala gráficamente en $(t = 0; 0 < x < 40 \text{ cm})$
	b) Calcula la velocidad de propagación de la onda y determina, en función del tiempo, la velocidad
	de oscilación transversal de la partícula situada en x = 5 cm
Diont	rio plano
	Un rayo de luz de frecuencia 5·10¹⁴ Hz incide con un ángulo de incidencia de 30° sobre una lámina
	de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio
	es 1,50 y el del aire 1,00:
	a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la
	lámina de vidrio
	b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo
	en el interior de la lámina
	c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire
	Ún rayo de luz pasa del agua (índice de refracción $n = 4/3$ ) al aire $(n = 1)$ . Calcula:10
	a) El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí
	b) El ángulo límite
	c) ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?
	Sobre un prisma equilátero de ángulo 60° (ver figura), incide un rayo luminoso monocromático que
	forma un ángulo de 50° con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo
	es paralelo a la base AC:11
	a) Calcula el índice de refracción del prisma
	b) Determina el ángulo de desviación del rayo al salir del prisma, dibujando la trayectoria que si-
	gue el rayo
	c) Explica si la frecuencia y la longitud de onda correspondientes al rayo luminoso son distintas, o
	no, dentro y fuera del prisma