



# **DISEÑO DE EXPERIMENTOS**

Licenciatura en Estadística

Profesores:

Dr. José Alberto Pagura

Lic. Julia Inés Fernández



# DISEÑOS FACTORIALES FRACCIONARIOS CON FACTORES A DOS NIVELES

# Conceptos introductorios

- En un Diseño Factorial, se ensayan TODAS las combinaciones posibles entre niveles o variantes de los factores (tratamientos)
- Posiblemente en las primeras fases de la experimentación aparezcan numerosos efectos potenciales de interés
- Si el número de factores a estudiar no es reducido, un plan factorial equilibrado (aún un plan  $2^k$ ) exige un número elevado de pruebas

# Conceptos introductorios

- Un plan  $2^k$  permite estudiar un número elevado de efectos posibles. Por ejemplo, si  $k=6$  se requieren 64 pruebas y se pueden estudiar:

6 efectos principales

15 interacciones dobles

20 triples

15 cuádruples

6 quintuples

1 séxtuple

# Conceptos introductorios

- Cada efecto se estimaría con alta precisión, a través de la diferencia de las medias de dos conjuntos de 32 observaciones cada uno. Precisión que podría ser innecesariamente alta.
- La mayor parte de estos efectos serán inexistentes.
- Se puede reducir el tamaño del experimento sacrificando algo de precisión y la posibilidad de estudiar algunas interacciones de orden elevado

# Conceptos introductorios

- En las primeras etapas de la experimentación se suele querer estudiar la existencia de efectos de unos cuantos factores, solo para seleccionar aquellos factores con efectos significativos sobre la respuesta media, para luego estudiarlos con más detalle en experimentos posteriores.
- Estos experimentos se conocen como *diseños screening* o *diseños de tamizado* y los experimentos factoriales fraccionarios resultan útiles para sus objetivos

# Conceptos introductorios

- El uso de estos planes tiene en cuenta las siguientes ideas:
- El principio de efectos esparcidos o escasez de efectos: cuando hay varios factores es posible que solo algunos efectos principales e interacciones de orden bajo sean relevantes.
- Propiedad de proyección: los diseños factoriales fraccionarios pueden proyectarse en diseños más fuertes en el subconjunto de factores con efectos significativos
- Experimentación secuencial: es posible combinar los resultados de experimentos factoriales fraccionarios, en un diseño más grande, con el fin de estimar efectos principales e interacciones de interés

# Estudiando 4 factores en 8 pruebas

- Un plan completo para estudiar 4 factores a dos niveles requiere al menos 16 pruebas
- Si se desea reducir ese número ¿cuáles elegir?
- Parece razonable que en las pruebas a realizar todos los factores se ensayen por partes iguales en ambos niveles (-) y (+). Eso reduce las 16 pruebas a 8. ¿Cuáles 8?
- Presentemos un plan completo  $2^4$  y algunas reducciones posibles a 8 pruebas



PRUEBA	A	B	C	D
1	-	-	-	-
2	+	-	-	-
3	-	+	-	-
4	+	+	-	-
5	-	-	+	-
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	-
9	-	-	-	+
10	+	-	-	+
11	-	+	-	+
12	+	+	-	+
13	-	-	+	+
14	+	-	+	+
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+

PRUEBA	A	B	C	D
1	-	-	-	-
2	+	-	-	-
3	-	+	-	-
4	+	+	-	-
5	-	-	+	-
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	-
9	-	-	-	+
10	+	-	-	+
11	-	+	-	+
12	+	+	-	+
13	-	-	+	+
14	+	-	+	+
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+

# Inconvenientes de las dos propuestas

- En la primera opción, se eliminaron todas las pruebas con D a nivel (+)  $\Rightarrow$  no se podría estudiar el efecto principal del factor D. Esta opción no cumple con el equilibrio requerido entre (+) y (-) (en D)
- En la segunda opción, se da el equilibrio pero quedan los factores A y B ensayados en los mismos niveles al mismo tiempo  $\Rightarrow$  la estimación del efecto de A coincidiría con la de B. Están *CONFUNDIDOS*
- Más aún, si ambos efectos fueran importantes, de orden de magnitud parecida y de signos contrarios en el experimento NO se detectaría efecto alguno

# Una reducción adecuada

PRUEBA	A	B	C	D
1	-	-	-	-
2	+	-	-	-
3	-	+	-	-
4	+	+	-	-
5	-	-	+	-
6	+	-	+	-
7	-	+	+	-
8	+	+	+	-
9	-	-	-	+
10	+	-	-	+
11	-	+	-	+
12	+	+	-	+
13	-	-	+	+
14	+	-	+	+
15	-	+	+	+
16	+	+	+	+

**Los efectos principales  
son ortogonales entre sí**

**Los efectos principales son  
ortogonales a las interacciones  
dobles**

# Estimación de los efectos en la fracción factorial

- Para estimar el efecto principal del factor A se debe calcular la diferencia entre el promedio de las pruebas con A a nivel (+) y el de las pruebas en que A está a nivel (-):

$$A = \frac{(4)+(6)+(10)+(16)}{4} - \frac{(1)+(7)+(11)+(13)}{4}$$

- Notemos que en c/u de cada grupo de estos 4 ensayos, B, C, D, B\*C, B\*D, C\*D, A\*B, etc. están dos veces a nivel (+) y dos veces a nivel (-)  $\Rightarrow$  no inciden sobre el efecto A
- El Plan es ortogonal

## ¿Qué pérdida produjo la “fracción”?

PRUEBA	A	B	C	D		ABCD
1	-	-	-	-	→	+
2	+	-	-	-		-
3	-	+	-	-		-
4	+	+	-	-	→	+
5	-	-	+	-		-
6	+	-	+	-	→	+
7	-	+	+	-	→	+
8	+	+	+	-		-
9	-	-	-	+		-
10	+	-	-	+	→	+
11	-	+	-	+	→	+
12	+	+	-	+		-
13	-	-	+	+	→	+
14	+	-	+	+		-
15	-	+	+	+		-
16	+	+	+	+	→	+

En las pruebas elegidas  
la interacción ABCD  
está siempre a nivel (+)

En esas pruebas el factor  
D está en los mismos  
niveles que ABC

Como  $ABC = D$ ,  
sus efectos están  
confundidos

Pero...hay más efectos  
confundidos

## En general .....

- Una fracción factorial permitirá estudiar el efecto de K factores con un número menor de pruebas que un factorial completo
- A cambio de tal reducción NO se podrán estudiar ciertos efectos como, en el ejemplo, el de la interacción ABCD que es llamada “*generador*”
- La reducción también producirá “*confusión*” entre algunos efectos. Se tratará de confundir efectos potencialmente importantes, con otros que casi seguro no lo sean

# Propiedades de una buena fracción factorial

- No debe confundir nunca efectos principales entre sí
- Debería procurar no confundir efectos simples con interacciones dobles
- De ser posible, tampoco debería confundir interacciones dobles entre sí

**El grado en que puedan conseguirse estos objetivos depende del nivel de fraccionamiento del diseño**

# Generador de una fracción

- Se denomina GENERADOR, al efecto utilizado para construir la fracción. Este efecto tiene el mismo signo en todas las pruebas y NO PUEDE ESTUDIARSE
- Si se eligen los signos positivos, puede expresarse  $I = \text{“generador”}$  : relación de definición.
- En un diseño de fracción  $1/2$ , la fracción obtenida por medio de  $I = \text{“generador”}$  se denomina fracción principal. La  $I = -\text{“generador”}$ : fracción alterna.
- En un plan  $2^{K-1}$  (fracción  $1/2$ ) se necesita un solo generador y corresponderá a la interacción de orden más elevado
- Un plan  $2^{K-p}$ , se construye a partir de  $p$  generadores



# Esquemas de confusión o estructura de alias

- En una fracción factorial cada efecto está confundido con otros. ¿Con cuales? La estructura de confusión puede encontrarse multiplicando las letras del generador con las del efecto en cuestión (tachando los cuadrados)
- Por ejemplo, en la fracción anterior  $2^{4-1}$ , el generador fue la interacción ABCD, entonces
- A está confundido con  $A \times ABCD = A^2BCD = BCD$
- B está confundido con  $B \times ABCD = AB^2CD = ACD$
- AB está confundido con  $AB \times ABCD = CD$ , etc.
- Si A está confundido con AB: ¿qué se estima en realidad cuando se calcula el efecto de A?

# Resolución de un diseño

- Un diseño es de resolución  $R$  si ningún efecto de  $p$  factores es alias de otro efecto que tenga menos de  $R-p$  factores.
- La resolución de un diseño es el número de letras del generador más “corto”

## Nivel de confusión según Resolución de la fracción factorial

- Resolución III : los efectos principales no están confundidos entre ellos pero si lo están con las interacciones dobles
- Resolución IV: los efectos principales no estarán confundidos con interacciones dobles, pero las interacciones dobles están confundidas entre sí.
- Resolución V: las interacciones dobles no estarán confundidas entre sí, ni tampoco los efectos simples con interacciones dobles. (Habrá interacciones dobles confundidas con triples)

## Construcción de una fracción factorial $2^{k-1}$

- Permiten estudiar el efecto de  $k$  factores a dos niveles haciendo la mitad de las pruebas de un plan completo  $2^k$
- Un método para elaborar el plan es construir el plan completo y seleccionar sólo las pruebas que correspondan a igual signo en la interacción de mayor orden
- Otra forma (más cómoda) es elaborar el plan completo para  $(k-1)$  factores y luego asociar el factor  $k$  a la interacción entre los  $(k-1)$  primeros

Prueba	A	B	C	D=ABC	ABCD
1	-	-	-	-	+
2	+	-	-	+	+
3	-	+	-	+	+
4	+	+	-	-	+
5	-	-	+	+	+
6	+	-	+	-	+
7	-	+	+	-	+
8	+	+	+	+	+

Ejemplo de construcción de un Plan  $2^{4-1}$

## Ejemplo de fracción factorial $2^{4-1}$

- Recordando el proceso de adhesivado presentado al inicio del curso, consideremos haber realizado un diseño factorial fraccionario  $2^{4-1}$
- Los factores son:
- A: cantidad de adhesivo
- B: temperatura de presecado del pegamento
- C: temperatura en el tunel de curado
- D: presión entre los rodillos de la máquina

# Resultados de los ensayos

FACTORES				
A	B	C	D	resistencia
-	-	-	-	3,8
+	-	-	+	2,82
-	+	-	+	4,59
+	+	-	-	4,59
-	-	+	+	2,73
+	-	+	-	4,83
-	+	+	-	4,86
+	+	+	+	6,06

# Resultados de los ensayos

FACTORES				
A	B	C	D	resistencia
-	-	-	-	3,8
+	-	-	+	2,82
-	+	-	+	4,59
+	+	-	-	4,59
-	-	+	+	2,73
+	-	+	-	4,83
-	+	+	-	4,86
+	+	+	+	6,06



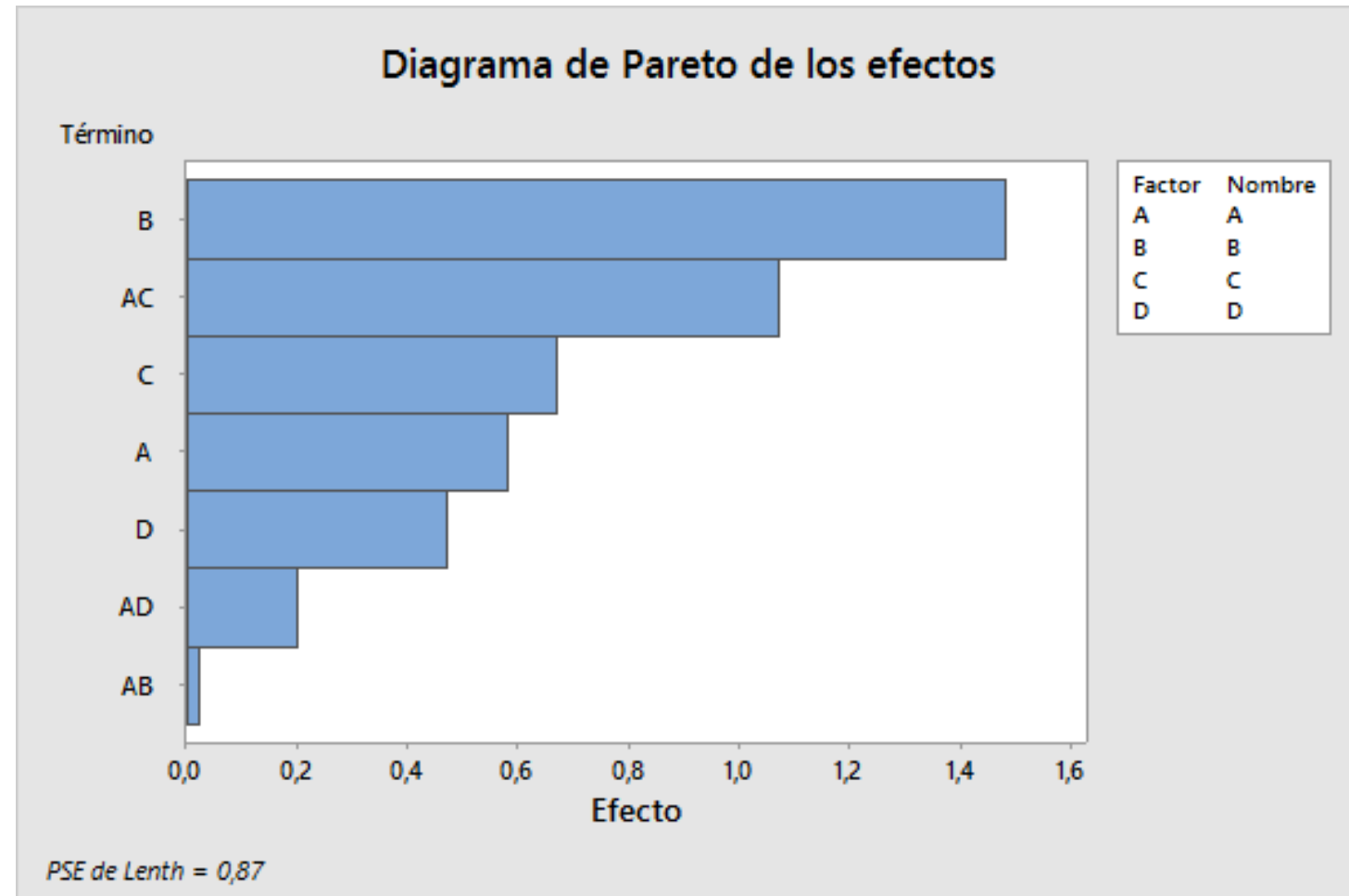
## Estudio de efectos en el ejemplo

- Cada efecto principal está confundido con la interacción triple entre los otros tres factores
- Cada interacción doble está confundida con la doble de los otros dos factores
- Efecto principal de  $A = 0,58$  (confundido con BCD)
- Efecto principal de  $B = 1,48$  (confundido con ACD)
- Efecto principal de  $C = 0,67$  (confundido con ABD)
- Efecto principal de  $D = -0,47$  (confundido con ABC)

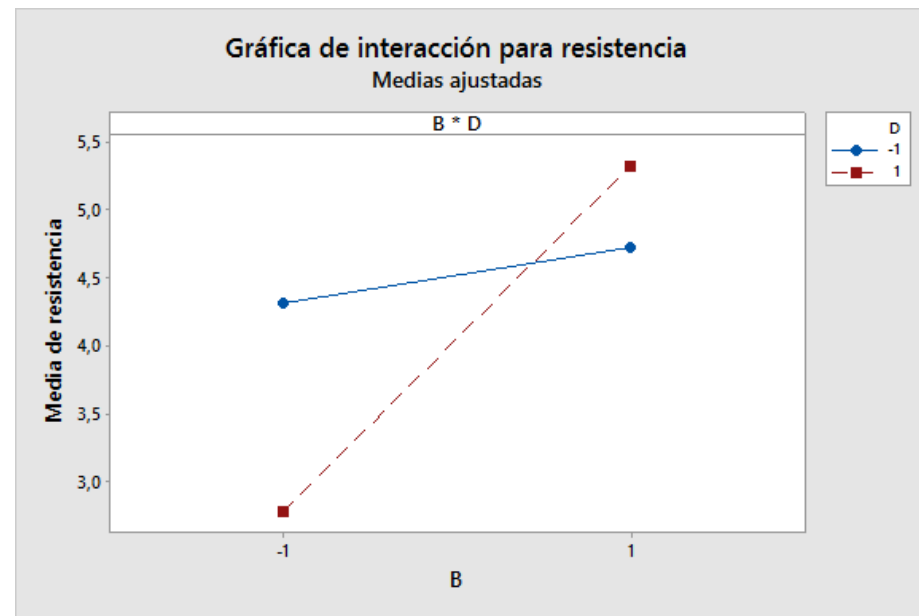
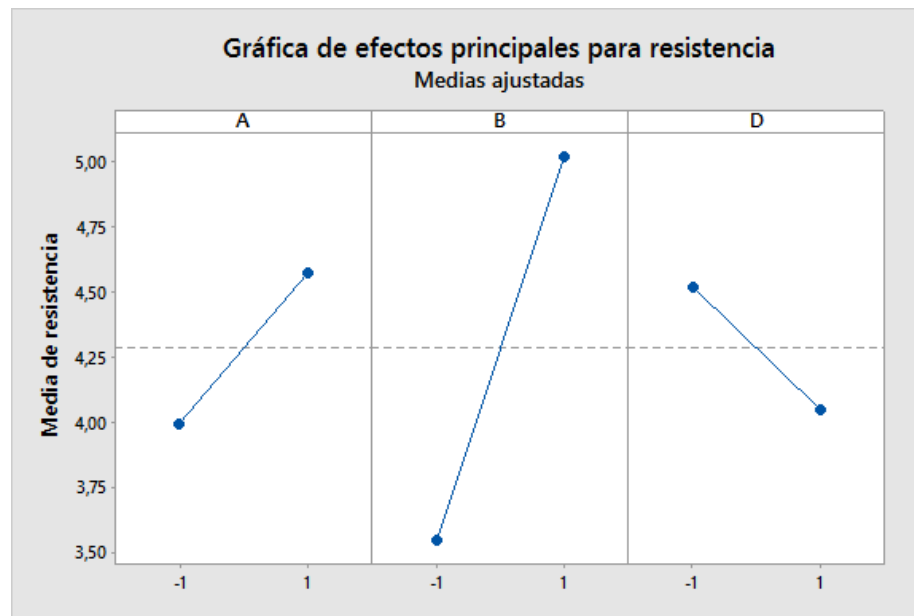
## Más efectos...

- Se podrían estimar los efectos de las interacciones dobles, aunque si alguno de ellos resulta estadísticamente significativo no se podrá identificar cuál es, entre los alias
- Interacción  $AB=CD=0,02$
- Interacción  $AC=BD=1,07$
- Interacción  $AD=BC=0,20$
- Si se estiman todos estos efectos no quedan grados de libertad residuales para estimar el error...pero se podría hacer un plot de Daniel o un gráfico de Pareto

# Gráfico de Pareto



# Gráficos de efectos



# ANOVA y modelo de regresión

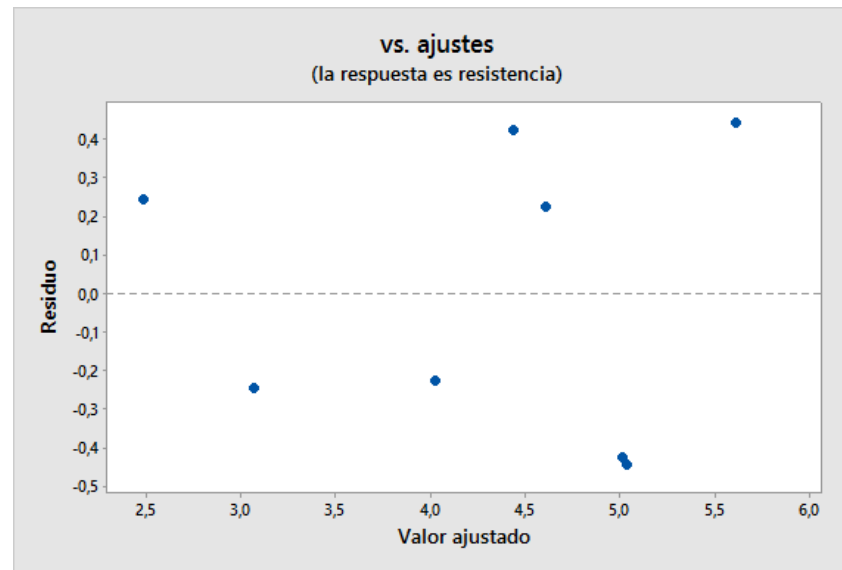
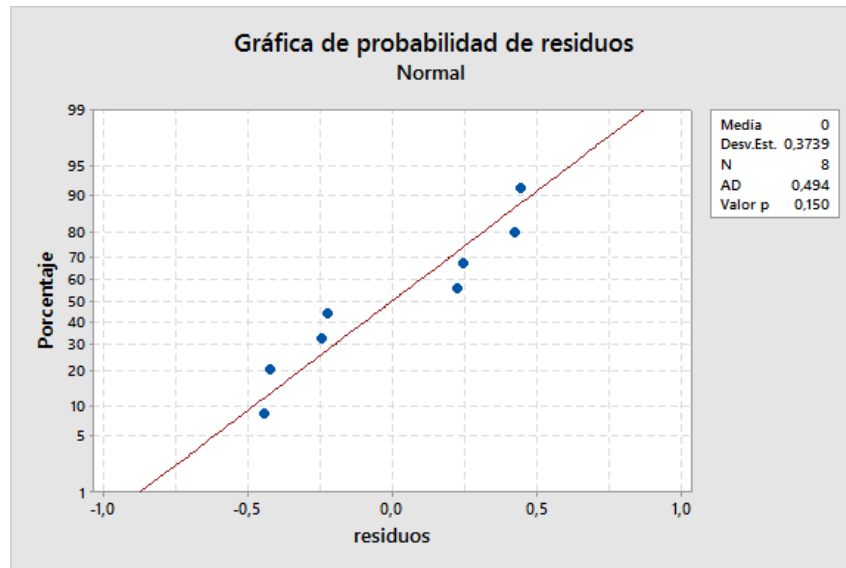
## Análisis de Varianza

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
A	1	0,6728	0,6728	2,06	0,246
B	1	4,3808	4,3808	13,43	0,035
D	1	0,4418	0,4418	1,35	0,329
B*D	1	2,2898	2,2898	7,02	0,077
Error	3	0,9786	0,3262		
Total	7	8,7638			

## MODELO DE REGRESION

$$\text{resistencia} = 4,285 + 0,290 A + 0,740 B - 0,235 D + 0,535 B*D$$

# Gráficos de residuos



## Condiciones óptimas a partir de los ensayos realizados

- A+
- B+
- C : puede elegirse a cualquier nivel (por ejemplo, por tratarse de una temperatura, podría elegirse a nivel -)
- D+ (debido al efecto de la interacción)
- A+ B+ C-D+ : ha sido ensayado?

# Resistencia media esperada

- Media general: 4,285
- A+ : 0,290
- B+ : 0,740
- D+ : -0,235
- AB+: 0,535

Resistencia media esperada 5,615

Intervalo de confianza?



## Fracciones factoriales $2^{k-p}$

- Cuando hay un número considerable de factores, es posible usar planes más fraccionados, sin perder la posibilidad de estudiar efectos importantes
- Para construir un  $2^{k-p}$ , se escribe el plan completo para los primeros  $(k-p)$  factores y luego se asignan los  $p$  restantes a subconjuntos de interacciones entre los primeros  $(k-p)$  factores
- Deben seleccionarse estas interacciones de modo que no se confundan entre sí factores importantes.

## Estructura de confusiones y generadores

- Por ejemplo, consideremos  $k=6$  y  $p=2$ , se construye un plan factorial completo para A,B,C y D
- Se asigna el factor E a la interacción ABC  $\Rightarrow$  ABCE es un generador
- Se asigna el factor F a la interacción BCD  $\Rightarrow$  BCDF es un generador
- El producto de generadores (tachando cuadrados) también es generador:  
 $ABCE \times BCDF = ADEF$
- El diseño será de Resolución IV. ¿Con qué estará confundido el efecto de A?  
¿Y la interacción AB?

## Un ejemplo de Plan 2<sup>6-2</sup>

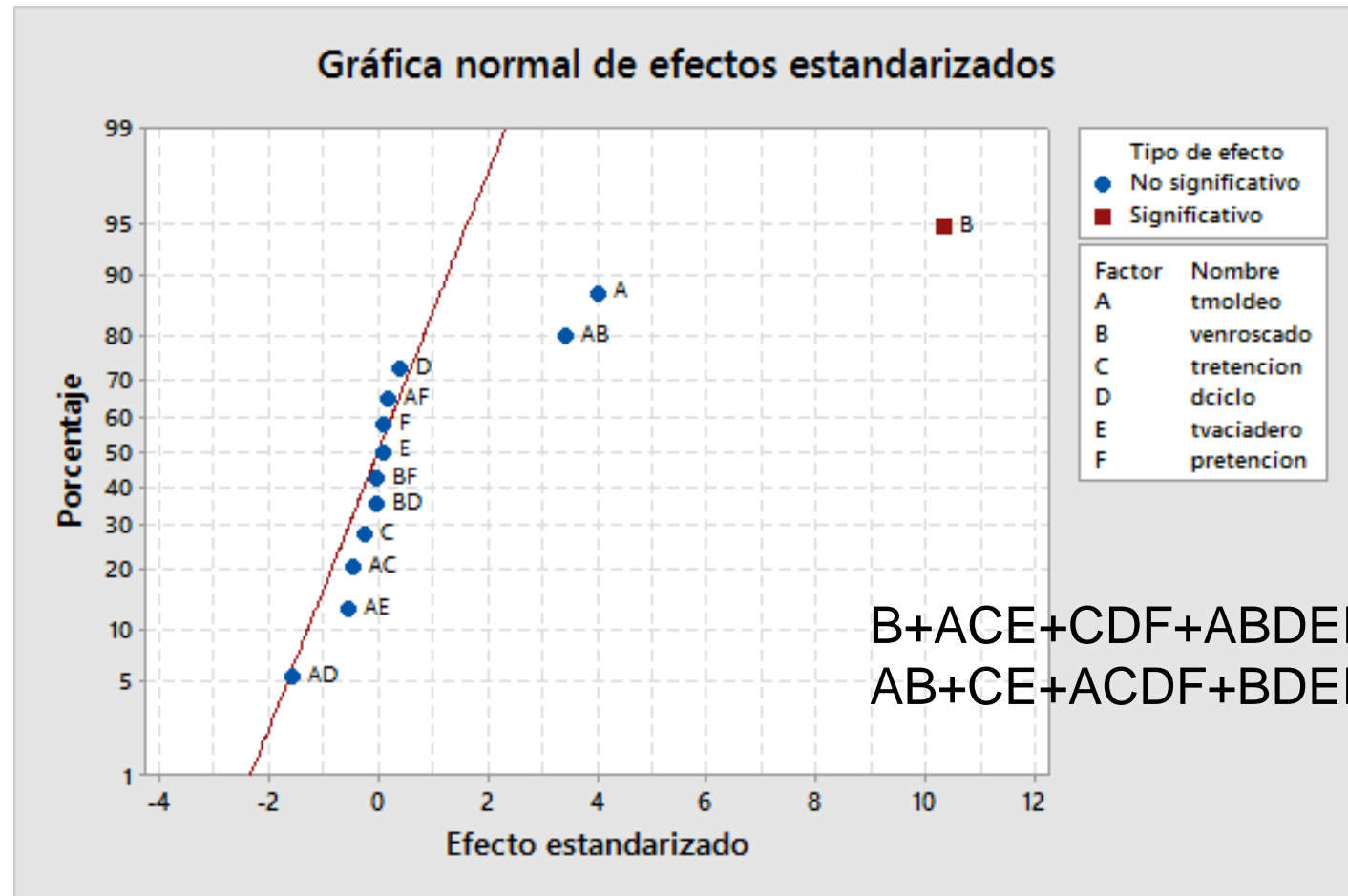
- En un proceso de moldeo por inyección se observa una contracción excesiva en las piezas fabricadas
- Se piensa que los siguientes seis factores podrían tener algún efecto sobre la contracción:
  - Temperatura de moldeo ( $t_{\text{moldeo}}$ )
  - Velocidad de enroscado ( $v_{\text{enroscado}}$ )
  - Tiempo de retención ( $t_{\text{retención}}$ )
  - Duración del ciclo ( $d_{\text{ciclo}}$ )
  - Tamaño del vaciadero ( $t_{\text{vaciadero}}$ )
  - Presión de retención ( $p_{\text{retención}}$ )

(Montgomery ej. 8-4)

# Resultados de los ensayos

tmoldeo	venroscado	tretencion	dciclo	tvaciadero	pretencion	contraccion
-1	-1	-1	-1	-1	-1	6
1	-1	-1	-1	1	-1	10
-1	1	-1	-1	1	1	32
1	1	-1	-1	-1	1	60
-1	-1	1	-1	1	1	4
1	-1	1	-1	-1	1	15
-1	1	1	-1	-1	-1	26
1	1	1	-1	1	-1	60
-1	-1	-1	1	-1	1	8
1	-1	-1	1	1	1	12
-1	1	-1	1	1	-1	34
1	1	-1	1	-1	-1	60
-1	-1	1	1	1	-1	16
1	-1	1	1	-1	-1	5
-1	1	1	1	-1	1	37
1	1	1	1	1	1	52

# Gráfico de efectos en escala normal



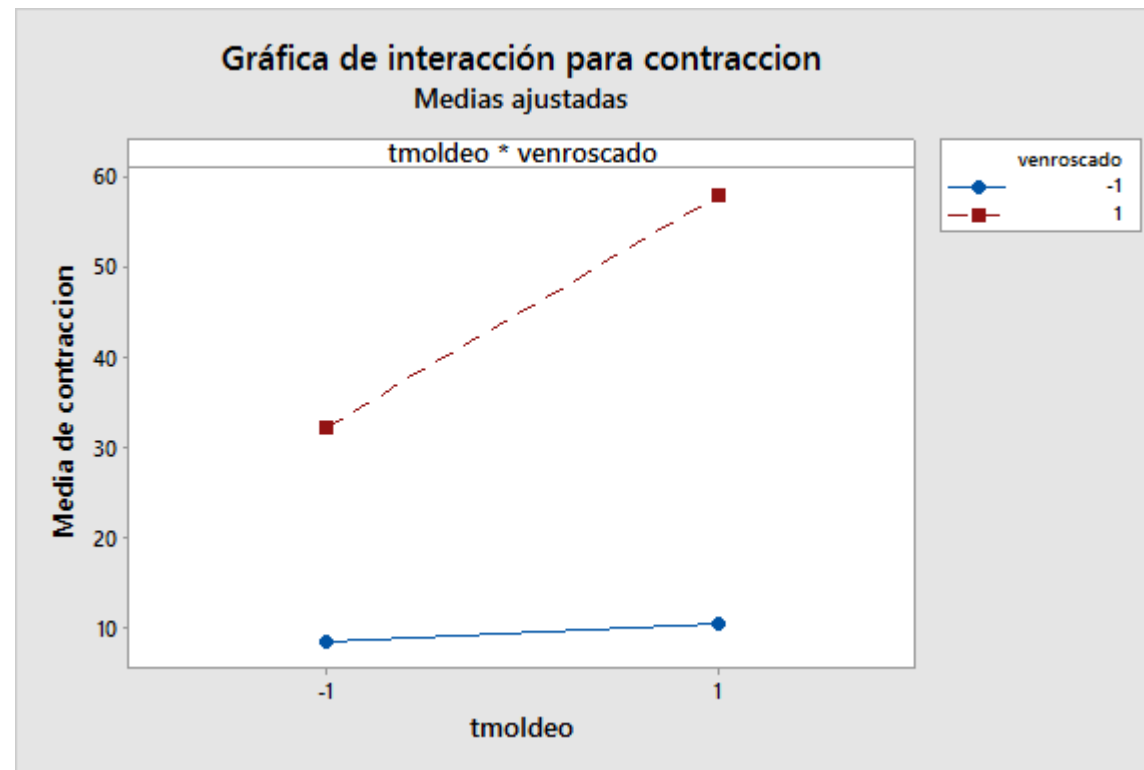
# ANOVA y modelo de regresión

## Análisis de Varianza

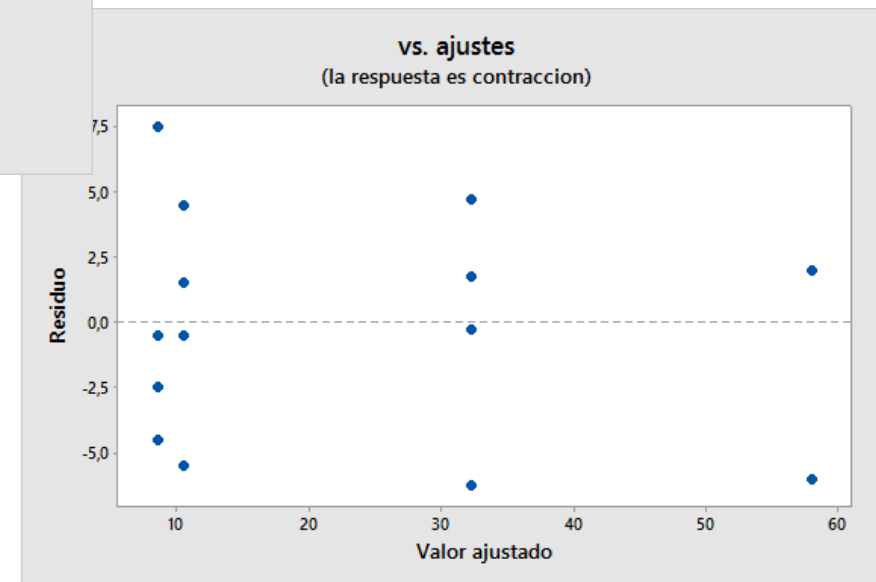
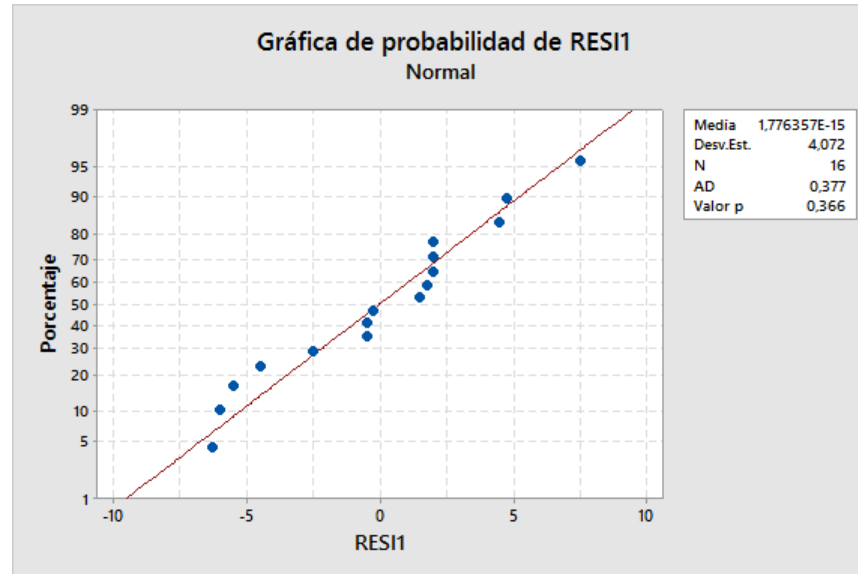
Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor p
tmoldeo	1	770,1	770,06	37,15	0,000
venroscado	1	5076,6	5076,56	244,90	0,000
tmoldeo*venroscado	1	564,1	564,06	27,21	0,000
Error	12	248,8	20,73		
Total	15	6659,4			

Término	Efecto	Coef	EE del coef.
Constante		27,31	1,14
tmoldeo	13,88	6,94	1,14
venroscado	35,63	17,81	1,14
tmoldeo*venroscado	11,88	5,94	1,14

# Gráfico de interacción



# Análisis de residuales





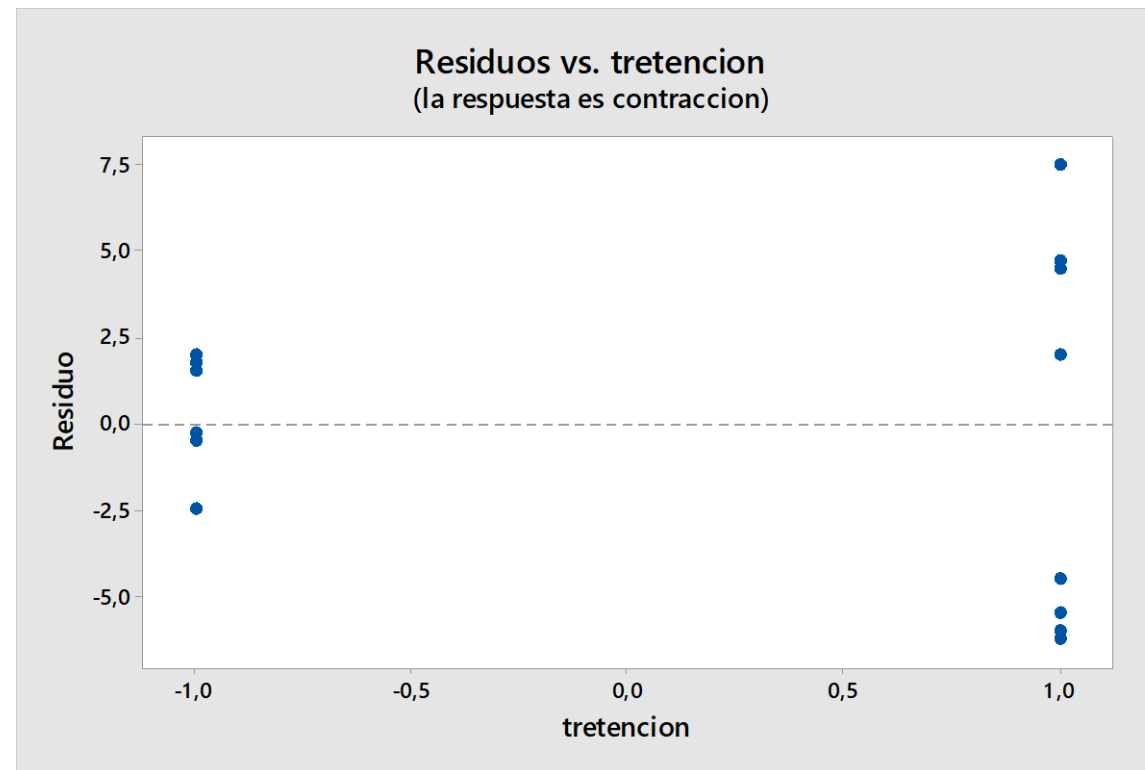
## Conclusiones de efectos sobre la media

- Eligiendo temperatura de moldeo y velocidad de enroscado a nivel bajo, se obtiene una contracción media cercana al 10%
- La variabilidad en la contracción podría seguir produciendo problemas en las piezas producidas, al momento del ensamblaje.
- Habrá efectos de algunos factores sobre la variabilidad? CUANDO EL MODELO PARA LOS EFECTOS DE LA MEDIA ES CORRECTO, LOS RESIDUALES PROPORCIONAN INFORMACION ACERCA DE LOS EFECTOS DE DISPERSION

## Efectos de dispersión

- Gráficos de residuales vs. Valores ajustados para cada factor orientarán acerca de la existencia de tales efectos
- El ANOVA de los residuos al cuadrado, método aproximado propuesto por Romero (2005) permitirá evaluar la existencia de dichos efectos.
- En el ejemplo, puede verse que el “tiempo de retención” afecta la variabilidad de la “contracción”, siendo conveniente elegir el “tiempo de retención” a nivel bajo.

# Efectos de dispersión



# Efectos de dispersión

- Un ANOVA tomando como respuesta los residuos<sup>2</sup> mostrará cuales efectos resultan relevantes sobre la variabilidad.

F.V.	GL	SC	MC	Valor F	Valor p
moldeo	1	136,60	136,60	0,98	0,349
venroscado	1	33,79	33,79	0,24	0,635
tretencion	1	2717,02	2717,02	19,42	0,002
dciclo	1	228,77	228,77	1,64	0,233
tvaciadero	1	1,27	1,27	0,01	0,926
pretencion	1	87,89	87,89	0,63	0,448
Error	9	1259,22	139,91		
Total	15	4464,54			

- El efecto principal de tretencion es significativo. Convendrá realizar el proceso con tretencion a nivel -

## Construcción de un diseño factorial $2^{k-p}$

- El diseño factorial fraccionario  $2^{k-p}$  conocido como fracción  $1/2^p$  permite estudiar efectos de  $k$  factores en  $2^{k-p}$  ensayos.
- Para su construcción, se definen  $p$  generadores, los que junto a las  $2^p - p - 1$  interacciones generalizadas, conforman la relación de definición.
- Dada la dificultad en la elección de los  $p$  generadores mejores, se puede disponer de tablas con los planes experimentales  $2^{k-p}$ .

## Construcción de un diseño factorial $2^{k-p}$

- El diseño factorial fraccionario  $2^{k-p}$  conocido como fracción  $1/2^p$  permite estudiar efectos de  $k$  factores en  $2^{k-p}$  ensayos.
- Para su construcción, se definen  $p$  generadores, los que junto a las  $2^p - p - 1$  interacciones generalizadas, conforman la relación de definición.
- Dada la dificultad en la elección de los  $p$  generadores mejores, se puede disponer de tablas con los planes experimentales  $2^{k-p}$ .

## Algunas asignaciones aconsejables para planes de 8 y 16 pruebas

Número de factores	8 pruebas	16 pruebas
4	D=ABC	$2^4$ completo
5	D=AB E=AC	E=ABCD
6	D=AB E=AC F=BC	E=ABC F=BCD
7	D=AB E=AC F=BC G=ABC	E=ABC F=BCD G=ACD
8	Imposible	E=ABC F=BCD G=ACD H=ABD

## Ejemplo: un plan $2^{8-4}$

- En una planta de fabricación de piezas de plástico por inyección, se realizó un experimento para reducir el número de rugosidades (“mark flows”) que aparecían en las piezas. Cada prueba consistió en fabricar 100 piezas y obtener el número medio de rugosidades que aparecían.

(ejemplo extraído de Romero (2005))



# Ejemplo: un plan $2^{8-4}$

- Se decidió estudiar los 8 factores siguientes, todos ellos a dos niveles:

A: Recorrido de inyección

C: Temperatura del fundido

E: 1ra. Velocidad de inyección

G: punto de cambio

B: Temperatura del molde

D: Apertura de la boquilla

F: 2da. Velocidad de inyección

H: fuerza de cierre del molde



# Para resolver

- ¿Cuál es la resolución del diseño?
- Obtener la estructura de alias solo con efectos principales e interacciones dobles
- Calcular los efectos principales y las interacciones dobles
- Construir el gráfico de efectos en papel probabilístico normal y seleccionar los efectos relevantes.
- Evaluar la significación estadística de los efectos.
- Encontrar las condiciones en las que se obtiene un menor número medio de rugosidades y estimar el valor medio esperado en tales condiciones