## Experimentos Factoriales Fraccionarios

Docentes:

Dr. José Alberto Pagura

Lic. Julia I. Fernández

## Características de los diseños 2<sup>k-p</sup>

- Se estudian k factores con  $2^{k-p}$  tratamientos. A este plan se lo llama fracción  $1/2^p$ de un diseño  $2^k$
- Para su construcción se definen p generadores independientes
- La relación de definición se compone de los p generadores más las  $2^p-p-1$  interacciones generalizadas
- La estructura de alias se puede obtener multiplicando la o las letras de cada efecto por los generadores
- Cada efecto tiene  $2^p 1$  alias
- La estructura de alias suele simplificarse incluyendo solo efectos hasta el orden 2 (o 3).

## Características de los diseños 2<sup>k-p</sup>

- La estructura de alias se puede obtener multiplicando la o las letras de cada efecto por los generadores
- $\begin{cases} \begin{cases} \begin{cases}$
- La estructura de alias suele simplificarse incluyendo solo efectos hasta el orden 2 (o 3)

# Diseños 2<sup>k-p</sup> : requisitos para los generadores?

- La elección de los generadores dependerá de las características del problema, pero parece razonable elegir aquellos que permitan que el diseño experimental tenga la resolución más alta posible.
- Muchas veces pueden obtenerse varias fracciones  $2^{k-p}$  de la misma resolución R pero tienen estructuras de alias diferentes: ¿cómo elegir el plan?

#### Diseños 2<sup>k-p</sup>: aberración

- Estos planes de la misma resolución, el mismo número de factores y el mismo nivel de fraccionamiento se pueden distinguir de acuerdo al criterio de "aberración".
- A cada plan 2<sup>k-p</sup> se le puede asociar un vector de 2<sup>p-1</sup> componentes, donde cada una de ellas es la longitud de cada palabra de la relación de definición y las componentes se colocan en orden creciente.
- Este vector se conoce como "patrón de longitud de palabras"

### Diseños 2<sup>k-p</sup> de mínima aberración

- Un diseño de resolución R tendrá, en su relación de definición, palabras con R letras o más.
- El diseño con menos palabras de longitud R se llama "diseño de mínima aberración"
- Minimizar la aberración garantiza tener el menor número de efectos principales confundidos con interacciones de orden R-1, el menor número de interacciones dobles confundidas con efectos de orden R-2, etc.

- La tabla 8.14 de "Diseño y Análisis de Experimentos" D.C. Montgomery, presenta los generadores de algunos diseños 2<sup>k-p</sup> de máxima resolución y mínima aberración.
- Un diseño  $2_{IV}^{7-2}$  puede construirse, por ejemplo, eligiendo los generadores que se presentan en las diapositivas siguientes.
- Tener en cuenta que en este plan, los efectos principales estarán confundidos con interacciones triples o de orden superior

- Diseño 1: F=ABC, G=BCD
- Relación de definición completa:
- I=ABCF=BCDG=ADFG
- Patrón de longitud de palabras: {4,4,4}
- Alias para interacciones de dos factores:
- AB=CF, AC=BF, AD=FG, AG=DF, BD=CG, BG=CD, AF=BC=DG

- Diseño 2: F=ABC, G=ADE
- Relación de definición completa:
- I=ABCF=ADEG=BCDEFG
- Patrón de longitud de palabras: {4,4,6}
- Alias para interacciones de dos factores:
- AB=CF, AC=BF, AD=EG, AE=DG, AF=BC, AG=DE

- Diseño 3: F=ABCD, G=ABDE
- Relación de definición completa:
- I=ABCDF=A BDEG=CEFG
- Patrón de longitud de palabras: {4,5,5}
- Alias para interacciones de dos factores:
- CE=FG, CF=EG, CG=EF

- El diseño 3 tiene 3 pares de interacciones dobles confundidas entre si, y el patrón de longitud de palabras tiene solo un 4 (mínima longitud de palabra para un diseño de resolución IV)
- El diseño 2 tiene <u>6 pares</u> de interacciones dobles confundidas y dos 4 en el patrón de longitud de palabras
- El diseño 1 tiene <u>6 pares</u> y <u>1 terna</u> de interacciones dobles confundidas y tres 4 en el patrón de longitud de palabras.

- Resultan muy útiles, por ejemplo en el contexto de la experimentación secuencial.
- Algunos diseños característicos, de resolución III son aquellos en los que, siendo N múltiplo de 4, se pueden estudiar los efectos principales de k=N-1 factores.
- Si k=N-1 se dice que el diseño está saturado.
- $\stackrel{1}{\triangleright} 2_{III}^{3-1}$  permite estudiar 3 factores en 4 ensayos
- 27-4 permite estudiar 7 factores en 8 ensayos
- 2<sup>15-11</sup> permite estudiar 15 factores en 16 ensayos

- $\red$  Como ejemplo, consideramos el  $2_{III}^{7-4}$
- Este plan puede construirse a partir de un plan 2<sup>3</sup> completo para A, B y C y luego hacer:
- D=AB, E=AC, F=BC y G=ABC
- La relación de definición completa:
  - I=ABD=ACE=BCF=ABCG=BCDE=ACDF=CDG= ABEF=BEG=AFG=DEF=ADEG=CEFG=BDFG=

- Para encontrar los alias, se multiplica el efecto de interés por cada palabra de la relación de definición.

  Cada efecto tendrá, en este caso, 15 alias.
- El plan presentado es la fracción principal.
  Cambiando el signo de los generadores se podrán obtener las 15 fracciones restantes.

- Este plan permite construir 7 contrastes para estimar los efectos principales
- Si se consideran irrelevantes los efectos de orden superior a 2: que estima cada uno de los 7 contrastes construidos para estimar los efectos principales.

- Estos planes para estudiar k=N-1 factores con N ensayos resultan útiles para estudiar efectos de un número menor de factores. Por ejemplo, se puede generar un diseño  $2_{III}^{6-3}$  eliminando una de las columnas del  $2_{III}^{7-3}$
- Si se elimina G, la relación de definición quedará compuesta por todas las palabras que no tienen a la letra G.

## Proyección de una fracción factorial

- Un diseño 2<sup>k-p</sup> se reduce (o se proyecta) a un factorial completo o a una fracción factorial en cualquier subconjunto de r ≤ k-p de los factores originales.
- Si los r factores no son palabras de la relación de definición se reducirá a un factorial completo
- Esta propiedad resulta útil al diseñar el experimento, asignando aquellos factores acerca de los cuales se tiene conocimiento previo de su efecto sobre la respuesta, a columnas que en conjunto no sean palabras de la relación de definición.

En el contexto de la experimentación secuencial se puede partir de fracciones factoriales de baja resolución, como los de resolución III ya comentadas, y luego mediante el agregado de otras fracciones factoriales y la combinación de los resultados, obtener estimaciones separadas de efectos de interés que se encuentran confundidos en la primera fracción.

Esta separación de efectos se logra cambiando deliberadamente los signos de alguna(s) columnas de la fracción factorial que se agrega, con respecto a la inicial.

Si a un diseño factorial fraccionario de resolución III se le agrega una fracción adicional con el signo de uno de los factores invertidos, se obtendrán estimaciones de los efectos principales de ese factor y de interacciones dobles que lo incluyan no confundidos con interacciones dobles

- Si a un diseño factorial fraccionario de resolución III se le agrega una fracción con los signos de todos los factores invertidos (doblez completo o reflexión), se obtendrán estimaciones de los efectos principales no confundidos con interacciones dobles.
- Es decir, se obtiene una fracción factorial de resolución IV

## Relación de definición de un diseño "fold over"

- Las primera y segunda fracción factorial tendrán p generadores iniciales, L de ellos tendrán el mismo signo y U el signo opuesto.
- El diseño combinado tendrá L+U-1 generadores
- Los U-1 generadores serán los productos pares (de a dos, cuatro, etc.) de los generadores con signo diferente

#### Diseños de Plackett-Burman

- Son diseños factoriales fraccionarios para estudiar en N ensayos(N múltiplo de 4) k=N-1 factores.
- Si N es una potencia de 2, nos encontramos en los diseños de resolución III que se consideraron en las diapositivas anteriores.
- Consideremos la construcción de estos planes en los casos N= 12, 20, 24, 28, 36.

## Diseño de Plackett-Burman con N=12 y k=11

- Se estudian los efectos principales de 11 factores en 12 ensayos.
- El diseño se construye partiendo de la siguiente secuencia de signos + y que corresponden a los niveles del factor A en 11 ensayos:
  - ++++++++--+-
- Los signos para cada factor se obtienen a partir de los signos del factor de la izquierda, desplazándolos una posición hacia abajo
- Les la tratamiento 12, se hace con signos en todos los factores

## Diseño de Plackett-Burman con N=12 y k=11

Tratamiento	Α	В	С	D	E	F	G	Н	J	K	L
. 1	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+
2	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-
3	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+
4	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+
5	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+
6	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-
7	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-
8	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-
9	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+
10	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-
11	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

#### Diseños de Plackett-Burman

- Los signos de la primer columna, para otros casos son:
- N=20: + + - + + + + + + - + + -
- N=24: + + + + + + + + - + + - + - -
- N=36: -+-+++--+++++++-++--+--+-+-+-+-+--+-
- La diseño experimental puede construirse utilizando estos signos como la primer fila, es decir: el primer tratamiento.
- Para el caso N=28, ver Montgomery, pág. 344

## Diseños de Plackett-Burman

- Estos planes son balanceados y ortogonales.
- Se pueden calcular los efectos principales de la forma usual y hacer una selección de los más relevantes para luego hacer el análisis de la variancia
- La estructura de alias es muy compleja ya que cada efecto se confunde con "parte" de otros efectos. Por ejemplo, en el plan para 11 factores con *N*=12 los efectos principales se confunden con parte de cada una de las interacciones en las que el factor no está incluido.
- La principal utilidad de estos planes es la selección de factores con efectos relevantes