DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Licenciatura en Estadística -2023
Profesores:
Dr. José Alberto Pagura
Lic. Julia Inés Fernández

DISEÑO FACTORIAL GENERAL

Diseños Factoriales

- En muchas aplicaciones hay más de un factor de interés, que puede afectar a la variable respuesta.
- Cuando se desea estudiar el efecto de varios factores simultáneamente, los diseños factoriales resultan adecuados.
- En estos diseños se ensayan TODAS las combinaciones posibles entre niveles o variantes de los factores con el objetivo de estudiar la forma en la que los factores afectan a la variable respuesta

Efectos posibles en un diseño factorial

- Existe efecto de un factor si hay cambios en la respuesta media producidos por el cambio en los niveles del factor **-efecto principal** -.
- Al ensayar varios factores juntos, puede haber interacción entre ellos. Hay interacción entre dos factores si el efecto de uno de ellos se modifica al cambiar la variante o el nivel del otro factor.**-efecto interaccion-**
- Si un factor interactúa con otro, los efectos principales correspondientes pierden significado práctico. Las interacciones pueden ser dobles, triples, etc.

Cambiando los niveles de cada factor por separado

- Ejemplo:
- se ensayan dos materiales (factor A) y dos temperaturas (factor B) para evaluar sus efectos sobre la duración de un dispositivo.
- Indicamos los niveles de los factores con A-, A+ y B-, B+.
- El efecto de A se podría estudiar ensayando A- y A+ para una sola temperatura, por ejemplo B- que podría ser más económico. Luego, para el nivel de A con mejor respuesta se puede ensayar B+ y así estimar el efecto de B

Cambiando los niveles de cada factor por separado

- Como se sabe de la existencia del error experimental, se realizan dos ensayos para cada tratamiento.
- Primero se prueba con B y se elegirá el nivel de B que da la mayor duración. Se utilizará el nivel bajo de A ya que los ensayos son más económicos.
- Luego se buscará, habiendo elegido el mejor nivel de B, que nivel de A es el mejor.
- Los resultados obtenidos en los dos ensayos, son:

A	B	Resultados de los ensayos	promedio
bajo	bajo	142;146	144
bajo	alto	89;83	86

mayor duración

Cambiando los niveles de cada factor por separado

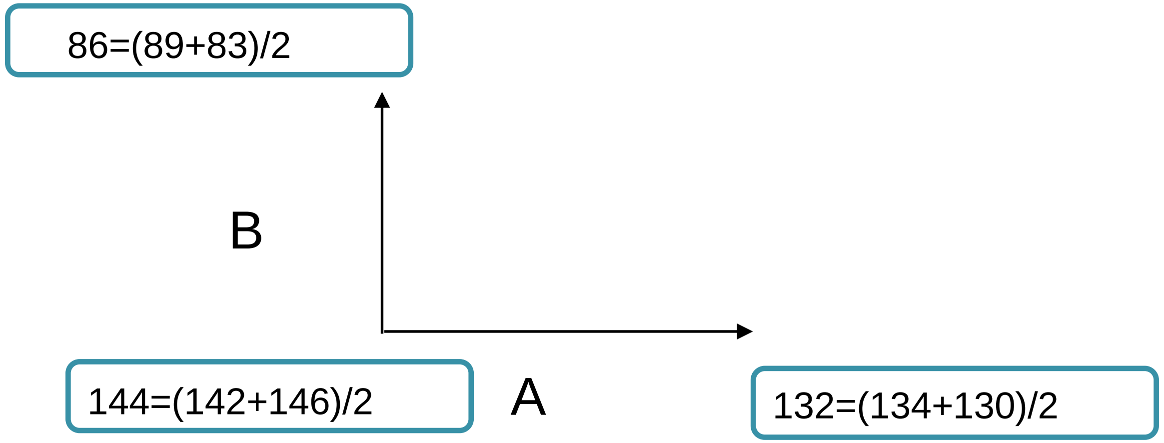
- La mayor duración se obtuvo para el nivel bajo de B, así que ahora se realizan 2 ensayos en el nivel bajo de B y alto de A.
- Los resultados de los dos nuevos ensayos y los promedios obtenidos fueron:

A	B	Resultados de los ensayos	promedio
bajo	bajo	142;146	144
alto	bajo	134;130	132
bajo	alto	89;83	86

nuevos ensayos

Cambiando los niveles de cada factor por separado

A	B	promedio
bajo	bajo	144
alto	bajo	132
bajo	alto	86



El efecto de A: 132-144= -12 (4 observaciones)

El efecto de B: 86-144= -58 (4 observaciones)

Cambiando los niveles de cada factor por separado

- De acuerdo a los resultados observados, la mayor duración se obtendría cuando se aplica el nivel bajo de A y el nivel bajo de B.
- ¿Y si mediante el uso del material A+ con temperatura B+ se obtiene una duración de 200?
- …no se dispone de información para ese tratamiento…

Ventajas de los diseños factoriales

- Si en lugar del experimento anterior se hubiesen realizado los siguientes 4 ensayos: A-B-, A-B+, A+B, A+B+ obteniendo los siguientes 4 valores de duración del dispositivo

Ventajas de los diseños factoriales

- SE PUEDEN ESTIMAR LOS EFECTOS CON LA MISMA PRECISIÓN QUE EN EL CASO ANTERIOR, PERO CON MENOS PRUEBAS!!!

- El efecto de A es: (200+134)/2-(89+146)/2=49.5
- El efecto de B es: (89+200)/2-(146+134)/2=-31.77

- Y SE TIENE INFORMACIÓN ACERCA DE LA POSIBLE EXISTENCIA DE INTERACCIÓN ENTRE LOS FACTORES!!!

¡EL EFECTO DE B NO ES EL MISMO PARA CADA NIVEL DE A!

- **Se realizaron 4 ensayos en lugar de 6 y se obtuvo más información**

Ventajas de los diseños factoriales

- Es posible probar la existencia de todos los efectos principales
- Cada efecto será estimado con buena precisión, aunque en total se hagan pocas pruebas
- Es posible probar la existencia de interacciones, entre dos o más factores
- Podrán estimarse los efectos de un factor en diferentes niveles de los otros factores, produciendo conclusiones que son válidas sobre toda la extensión de las condiciones experimentales.

Una propiedad importante: Ortogonalidad

- Los efectos principales de dos factores son ortogonales, si en las pruebas del diseño, en cada una de las "a" variantes del factor A, aparecen en idénticas proporciones las "b" variantes del factor B.
- La ortogonalidad hace posible que la estimación de los efectos principales de un factor, no estén afectadas por los efectos principales de otros factores.
- Este concepto se extiende, de la misma forma, a los restantes efectos (interacciones entre ellas y con los efectos principales) que se pueden estudiar en plan.

Diseños factoriales con ***dos*** factores

- Factores: A con *a* niveles y B con *b* niveles
- Réplicas: *n* en cada combinación de niveles
- Tratamientos: se ensayan *a* x *b* tratamientos
- Ensayos: *a* x *b* x *n*, completamente aleatorizados
- El diseño es equilibrado porque cada tratamiento se ensaya un igual número de veces (podría ser solo una)
- En esta unidad, se considera el caso de factores con efectos fijos
- **<u>En un diseño factorial equilibrado todos los efectos son ortogonales</u>**

Las observaciones

- Cada uno de los abn ensayos proporcionará un resultado que podrá representarse como:

y_{ijk}: valor de la variable respuesta en la *k*-ésima réplica, del nivel o variante *i* del factor A y *j* del factor B,

donde $i=1 \ldots a,$

$j=1 \ldots b,$

$k=1 \ldots n$

Ejemplo 1.Diseño de una bateria

- Un ingeniero diseña una batería que será utilizada en un dispositivo que será sometido a variaciones extremas de temperatura. El desea estudiar los efectos de los siguientes dos factores sobre la duración de las mismas.
- El material de la placa o "ánodo" de la batería. Puede elegir utilizar alguno de tres materiales.
- La temperatura. No se tiene control sobre la temperatura en condiciones normales de funcionamiento pero si puede controlarla en condiciones experimentales para evaluar su efecto sobre la duración

El diseño y los objetivos

- Se probarán los tres materiales propuestos para la placa a tres temperaturas diferentes: 15, 70 y 125 que serán las condiciones en las que se utilizará el producto.
- Se desea responder a las siguientes preguntas:
- ¿Qué efecto tiene el tipo de material y la temperatura sobre la duración de la batería?
- ¿ Existe algún material, que logre una duración uniformemente larga sin importar la temperatura?
- ¿Recomendaría algún material?

Modelo estadístico de efectos

- Las observaciones pueden describirse mediante el siguiente modelo estadístico, modelo de efectos:

  $y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

μ: media general

τ_i: efecto del factor A,

β_j: efecto del factor B,

$(\tau\beta)_{ij}$: efecto de la interacción AB,

$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2)$, término aleatorio que recoge el efecto del error experimental

con, $i = 1 \ldots a, j = 1 \ldots b,\ k = 1 \ldots n$

y con las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0, \qquad \sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij} = 0$$

Modelo estadístico de medias

- Las observaciones pueden también expresarse utilizando el modelo de medias:

$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

μ_{ij}: media del tratamiento i,j

$\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2)$: término aleatorio correspondiente al error experimental

$i = 1 \ldots a, j = 1 \ldots b, k = 1 \ldots n$

Relacionando con el modelo de efectos:

$\mu_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij}$

Las hipótesis a probar

$H_0) \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$
$H_1)$ al menos un $\tau_i \neq 0$

$H_0) \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_a = 0$
$H_1)$ al menos un $\beta_j \neq 0$

$H_0) (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$
$H_1)$ al menos un $(\tau\beta)_{ij} \neq 0$

Totales y promedios a calcular

- El total general $y_{\ldots} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$

- y el promedio general: $\bar{y}_{\ldots} = \frac{y_{\ldots}}{abn}$

Totales y promedios a calcular

Total y promedio para cada nivel de cada factor.

Factor A

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{bn} \quad , \quad i=1 \ldots a$$

Factor B

$$y_{.j.} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{an} \quad , \quad j=1 \ldots b$$

Para cada tratamiento

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \quad , \quad \bar{y}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n} \quad , \quad i=1 \ldots a \quad , \quad j=1 \ldots b$$

Partición de la suma de cuadrados total

- La suma de cuadrados total se descompone en dos sumas de cuadrados debidas a cada factor (en general un factor A y otro B), una debida a la interacción y otra residual.

- $SC_{total} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_{error}$

Partición de la suma de cuadrados total

- La suma de cuadrados total es: $SC_{total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{...}\right)^2$

  con *abn-1* grados de libertad.
- Sumando y restando $\bar{y}_{i..}, \bar{y}_{.j.}$ e $\bar{y}_{ij.}$ se obtiene:
- $SC_A = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$ con *a-1* grados de libertad
- $SC_B = an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)^2$ con *b-1* grados de libertad
- $SC_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)^2$ con *(a-1)(b-1)* g. de l.
- $SC_{error} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}\right)^2$ con *ab(n-1)* g. de l.

Fórmulas de trabajo

- Si bien el ANOVA se obtendrá recurriendo a algún software, puede construirse a partir de las siguientes fórmulas:

$$SG = \frac{y_{...}^2}{abn} \quad , \qquad SC_{total} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - SG$$

$$SC_A = \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - SG$$

$$SC_B = \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^{a} y_{.j.}^2 - SG$$

$$SC_{AB} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - SG - SC_A - SC_B$$

$$SC_{error} = SC_{total} - SC_A - SC_B - SC_{AB}$$

Construcción del ANOVA

- Las sumas de cuadrados se ordenan en la tabla ANOVA, se calculan los cuadrados medios y sus esperanzas.
- Puede observarse que las $E(CM)$ de los diferentes efectos resultan iguales a la variancia del error experimental más un término que depende de los efectos, de modo que, si no hay efectos de los factores dicha esperanza es σ^2.
- Luego, es inmediata la deducción de las estadísticas a utilizar en las pruebas de hipótesis de la existencia de efectos de los factores.

ANOVA a dos factores fijos

FV	gl	SC	CM	E(CM)
Factor A	*a-1*	$SC_A = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{...}\right)^2$	*SCA/(a-1)*	$\sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$
Factor B	*b-1*	$SC_B = an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right)^2$	*SCB/(b-1)*	$\sigma^2 + \frac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1}$
Interacción	*(a-1)(b-1)*	$SC_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right)^2$	*SCAB/[(a-1)(b-1)]*	$\sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
Error	*ab(n-1)*	$SC_{error} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}\right)^2$	*SCerror/[ab(n-1)]*	σ^2
Total	*abn-1*	$SC_{total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \bar{y}...\right)^2$		

Pasos a seguir en la resolución del problema

- Creación de la matriz del diseño y carga de los resultados de los ensayos
- Obtención de medidas descriptivas y representación gráfica de efectos principales e interacciones
- Análisis de la variancia: primera tabla y refinamiento del modelo
- Verificación del cumplimiento de los supuestos del modelo
- Búsqueda del óptimo si eso se requiere o de acuerdo al problema y media prevista para condiciones óptimas

Definiendo la matriz del diseño

- Se construye una tabla con los tratamientos de una réplica del diseño. El data.frame plan contiene todas la combinaciones de los niveles de A(temperatura) y B(material).
- La función set.seed con un determinado argumento, se incluye con el solo objeto de que todos los participantes tener todos los participantes tengan el mismo vector "orden".

```
 # Construcción del plan experimental y aleatorización de los ensayos
 #
 # La función expand.grid construye un "data frame" con las combinaciones
 # de los elementos de los vectores A(temperatura) y B(material)
plan <- expand.grid(A=c(15, 70, 125), B=c("M1", "M2", "M3"))
 #
 # Generación del orden en el que se realizarán los ensayos -aleatorización-
 # se fija la "semilla" para la aleatorización en el siguiente paso
set.seed(23897)
 # se genera una permutación aleatoria de los números 1 a 36 que indica el orden
 # en el que se realizará cada ensayo
orden <- sample(36)
```

Definiendo la matriz del diseño

La ejecución de estos comandos genera los siguientes objetos:

Objeto plan (lista de tratamientos)

Objeto orden (orden en el que se realizarán los 36 ensayos)

	A	B
1	15	M1
2	70	M1
3	125	M1
4	15	M2
5	70	M2
6	125	M2
7	15	M3
8	70	M3
9	125	M3

Name	Type	Value
orden	integer [36]	26 12 10 6 24 23 ...

Los contenidos de estos objetos se pueden visualizar en la consola tipeando el nombre del objeto, o en la ventana destinada a los Scripts haciendo clic en los nombres de los objetos en el "ambiente".

Definiendo la matriz del diseño

- Luego, como el plan completo consta de 4 réplicas, se crea un "data frame" llamado "planr", que contendrá la lista de los 36 ensayos con el orden de realización.
- En este caso, se opta por almacenar el plan completo en un Excel mediante la función write_xlsx para lo cual será necesaria la carga de la librería writexl.

```
 #
 # plan con las 4 réplicas y el orden aleatorio de las pruebas
 #
ensayo <- 1:36
planr <- data.frame(ensayo,rbind(plan, plan, plan, plan),orden)
 # escritura del plan en cuaderno excel, si fuera necesario
write_xlsx(planr,"plan_baterias.xlsx")
```

- Una vez realizados los 36 ensayos, se puede agregar en el Excel que contiene el plan completo, una columna con los resultados obtenidos. Los datos se guardaron en plan_baterias_n.xlsx.

Resultados del experimento

- La lectura del conjunto de datos se hace, habiendo cargado la librería readxl, mediante:

```
resultados<-read_xlsx("plan_baterias_n.xlsx")
 # Para realizar el ANOVA, se definen como factores, las columnas que contienen
 # los niveles de los mismos para cada ensayo
 #
resultados$A <- as.factor(resultados$A)
resultados$B <- as.factor(resultados$B)
```

- El data frame "resultados" contiene el plan y los resultados de los ensayos. Puede verse que los elementos A y B se definen como factor para, así, poder realizar correctamente el ANOVA.

baterias_borrador.R* | resultados | plan | orden

Filter

	ensayo	A	B	orden	duracion
1	1	15	M1	26	130
2	2	70	M1	12	34
3	3	125	M1	10	20
4	4	15	M2	6	150
5	5	70	M2	24	136
6	6	125	M2	23	25
7	7	15	M3	33	138
8	8	70	M3	34	174
9	9	125	M3	28	96

Showing 1 to 9 of 36 entries, 5 total columns

Vista parcial del data frame "resultados"

Análisis descriptivo

- Las medidas descriptivas usuales como la media y la desviación estándar se obtienen y presentan para cada factor, con el siguiente código:

```
# Medidas descriptivas
medias.temp <- tapply(resultados$duracion, resultados$A, mean)
desvest.temp <- tapply(resultados$duracion, resultados$A, sd)
medias.mat <- tapply(resultados$duracion, resultados$B, mean)
desvest.mat <- tapply(resultados$duracion, resultados$B, sd)
descri.temp <-cbind(medias.temp,desvest.temp)
descri.mat <- cbind(medias.mat,desvest.mat)
```

Análisis descriptivo

- Escribiendo en la consola los nombres de los objetos, se muestran las medidas descriptivas

```
> descri.temp # muestra media y desviación estándar para cada temperatura ensayada
    medias.temp desvest.temp
15    144.83333     31.69409
70    107.58333     42.88347
125    64.16667     25.67218
```

Desviaciones estándar de la duración para cada temperatura

Duración media para cada temperatura

Temperaturas ensayadas

- Para los materiales:

```
> descri.mat # muestra media y desviación estándar para cada material ensayado
   medias.mat desvest.mat
M1   83.16667    48.58888
M2  108.33333    49.47237
M3  125.08333    35.76555
```

Análisis descriptivo

- También pueden calcularse los promedios y las desviaciones estándar para cada tratamiento (combinación de temperatura y material) de la siguiente forma:

```
media.trat <- tapply(resultados$duracion,list(resultados$A,resultados$B),mean)
media.trat # muestra la duración media para cada tratamiento
desvest.trat <- tapply(resultados$duracion,list(resultados$A,resultados$B),sd)
desvest.trat # muestra las desviaciones estandar para cada tratamiento
```

- Los resultados, que se observan en la consola:

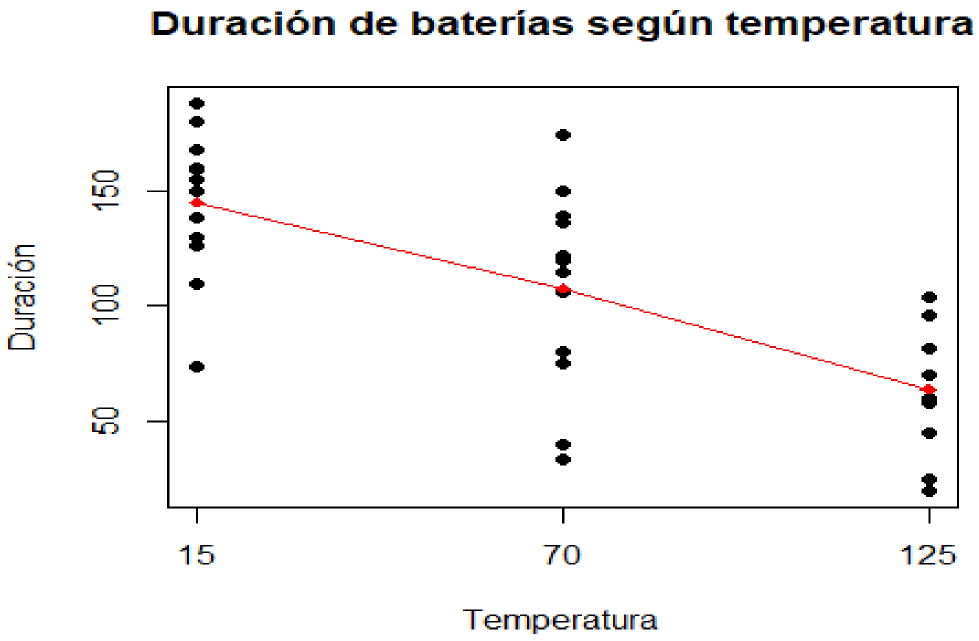
```
> media.trat # muestra la duración media para cada tratamiento
        M1     M2     M3
15  134.75 155.75 144.00
70   57.25 119.75 145.75
125  57.50  49.50  85.50
> desvest.trat # muestra las desviaciones estandar para cada tratamiento
          M1       M2       M3
15  45.35324 25.61738 25.97435
70  23.59908 12.65899 22.54440
125 26.85144 19.26136 19.27866
```

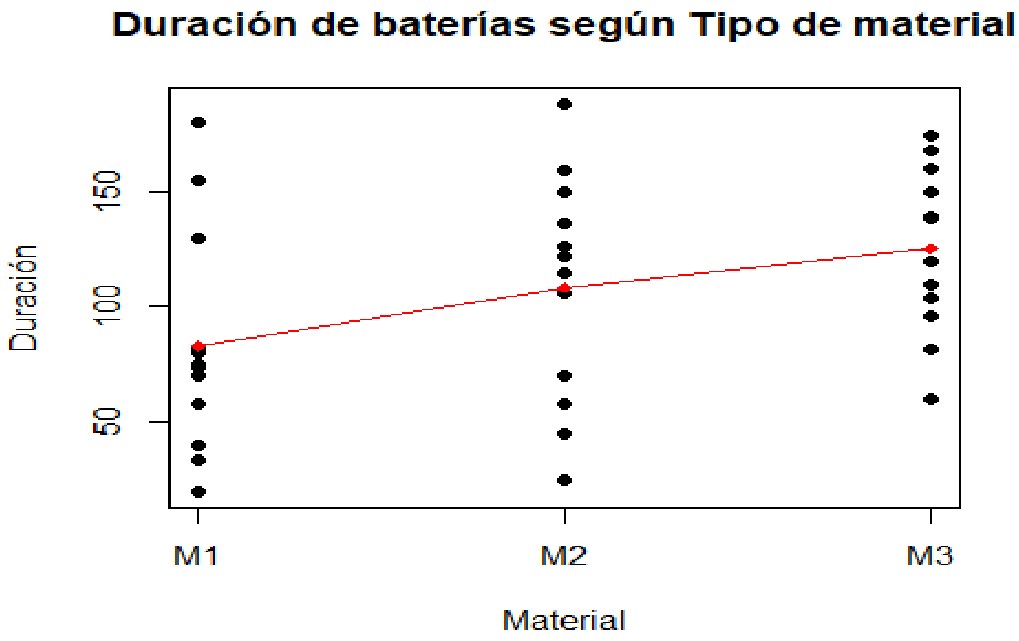
Análisis descriptivo - grafico de puntos

- Los siguientes comandos permiten generar los gráficos de puntos para los factores con las duraciones medias y líneas que las unen (gráfico de efectos principales).

```
 # Gráficos de puntos
 # Duración según temperaturas ensayadas
stripchart(resultados$duracion ~ resultados$A, vertical=TRUE, pch=19,
           xlab="Temperatura",
           ylab= "Duración",
           main="Duración de baterías según temperatura")
points(medias.temp,col="red" ,pch=18)
lines(medias.temp,col="red")
 # Duración según tipo de material ensayado
stripchart(resultados$duracion ~ resultados$B, vertical=TRUE, pch=19,
           xlab="Material",
           ylab= "Duración",
           main="Duración de baterías según Tipo de material")
points(medias.mat, col="red", pch=18)
lines(medias.mat,col="red")
```

Gráfico de puntos y de efectos principales



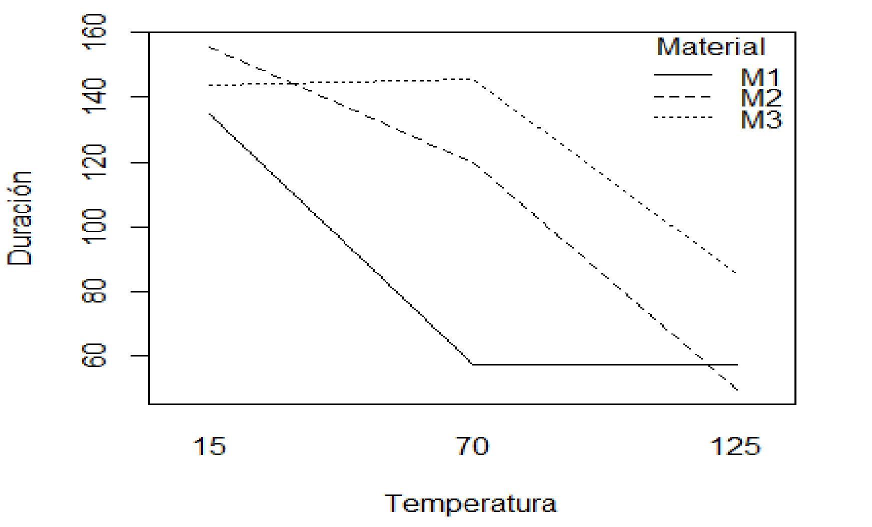


- ¿Qué se puede decir de los efectos de los factores? ¿Afecta la temperatura a la duración media? ¿Es diferente la duración media para cada material?

Gráfico de interacción doble

- Una representación gráfica de la interacción doble puede obtenerse con:

```
#
# Interacción doble
#
interaction.plot(x.factor=resultados$A, trace.factor=resultados$B,
                 response=resultados$duracion,
                                   ylab="duracion",
                                   xlab="temperatura",
                                   trace.lab="material",
                                   main="Efecto de la temperatura según tipo
                                  de material")
```



La duración media de las baterías: ¿experimenta el mismo comportamiento para cada uno de los materiales?

Análisis de la variancia

- Los comandos para realizar el análisis de la variancia y visualizar sus resultados:

```
# Análisis de la variancia
mod1 <- aov(resultados$duracion~resultados$A*resultados$B)
summary(mod1)
```

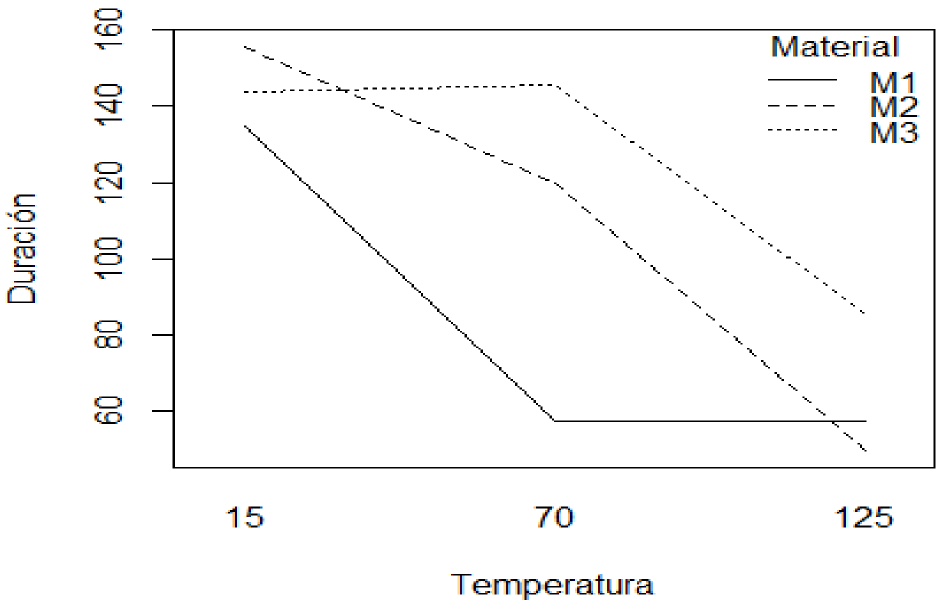
```
> mod1 <- aov(resultados$duracion~resultados$A*resultados$B)
> summary(mod1)
                          Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)    
resultados$A               2  39119   19559  28.968 1.91e-07 ***
resultados$B               2  10684    5342   7.911  0.00198 ** 
resultados$A:resultados$B  4   9614    2403   3.560  0.01861 *  
Residuals                 27  18231     675                     
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Efectos del material y la temperatura

- Los efectos principales son estadísticamente significativos. Los gráficos de efectos principales permitirán apreciar el comportamiento de los mismos.
- Al existir interacción estadísticamente significativa, habrá que estudiar el comportamiento de la respuesta según material, para cada temperatura o viceversa. La representación gráfica de las interacciones proporciona un importante aporte a la interpretación de este efecto.

Efecto de la interacción

La duración media de acuerdo a las distintas temperaturas ensayadas presenta un comportamiento diferente según el material utilizado.



- El material 1 presenta una disminución brusca en la duración media cuando la temperatura es 70 en lugar de 15 y dicho valor medio es similar para 70 y 125 de temperatura.
- El material 2 presenta un decrecimiento "parejo" de la duración media frente a aumentos en la temperatura
- El material 3 presenta valores similares de duración media para temperaturas de 15 y 70, y experimenta un brusco descenso al aumentar la temperatura a 125. Sin embargo, el material 3 presenta duraciones medias mayores a las de los otros material para temperaturas iguales a 70 y 125.

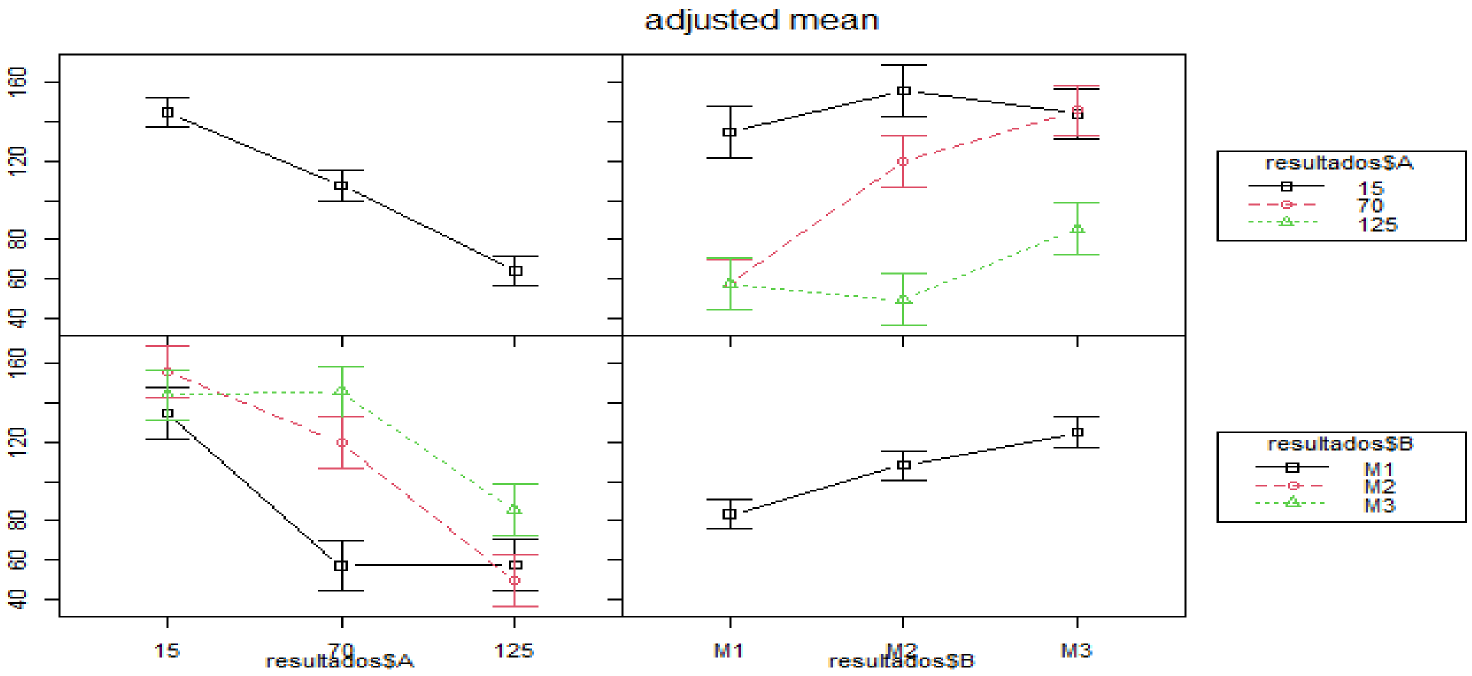
Efecto de la interacción

- ¿Qué material elegiría?

- ¿Por qué, en este caso solo se pregunta por la elección del material?

Otra opción gráfica

```
library(phia)
grafica <- interactionMeans(mod1)
grafica
plot(grafica)
```



Otra opción gráfica

- El objeto "gráfica" contiene los valores medios ajustados según el modelo aceptado y el error estándar de esas medias. Estos resultados podrían ser útiles para seleccionar el tratamiento que produce la mayor duración de las baterías. En este caso no corresponde esa elección ya que la temperatura es un factor de ruido

```
> library(phia)
> grafica <- interactionMeans(mod1)
> grafica
  resultados$A resultados$B adjusted mean std. error
1           15           M1        134.75   12.99243
2           70           M1         57.25   12.99243
3          125           M1         57.50   12.99243
4           15           M2        155.75   12.99243
5           70           M2        119.75   12.99243
6          125           M2         49.50   12.99243
7           15           M3        144.00   12.99243
8           70           M3        145.75   12.99243
9          125           M3         85.50   12.99243
> plot(grafica)
```

Son válidos los resultados del ANOVA?

- El modelo planteado tiene tres supuestos, los que pueden verificarse mediante el estudio de los residuos.
- Los residuos del modelo deben presentar el comportamiento de una variable aleatoria normal. Para su verificación se representan los residuos en “escala normal”. El hecho de que las observaciones se encuentren agrupadas sobre una recta puede considerarse como evidencia del cumplimiento del supuesto. Puede también realizarse un test de normalidad.
- Los residuos tienen media 0 e igual variancia para cada tratamiento? Un gráfico de residuos vs. valores ajustados permitirá apreciar el cumplimiento del supuesto de este supuesto (homocedasticidad).

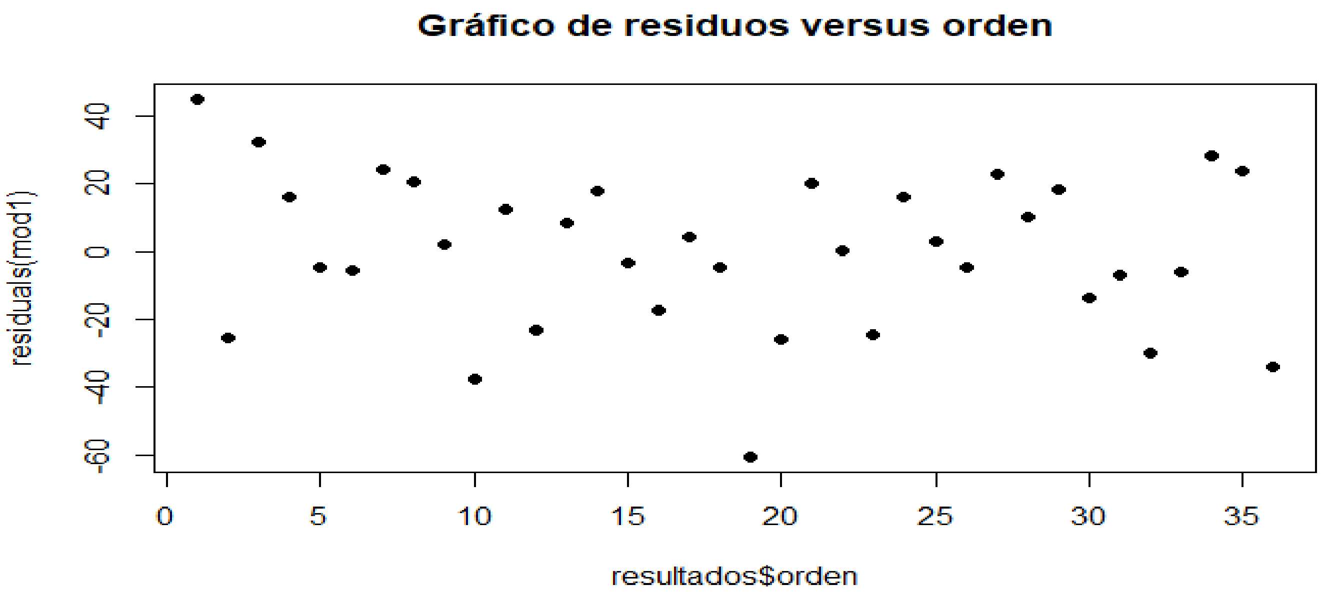
Son válidos los resultados del ANOVA?

- La independencia de las observaciones es tal vez el supuesto a cumplir, de mayor importancia. Un gráfico de residuos versus el orden en el que se realizaron los ensayos aportará a la verificación de su cumplimiento.
- El cálculo de los residuos para realizar estas representaciones gráficas se realiza obteniendo la diferencia entre cada valor observado y el valor predicho según el modelo.
- Por ejemplo, el ensayo o corrida 5 consistió en aplicar la temperatura 70 a una batería construida con el material M2. El resultado fue 136. El valor ajustado o predicho según el modelo fue 119,75 (ver diapositiva 44):
- El residuo para esta observación es 136-119.75=16.25

Verificación de supuestos

La representación gráfica de los residuos vs. El orden de realización de los ensayos evidenciará independencia o no de las observaciones

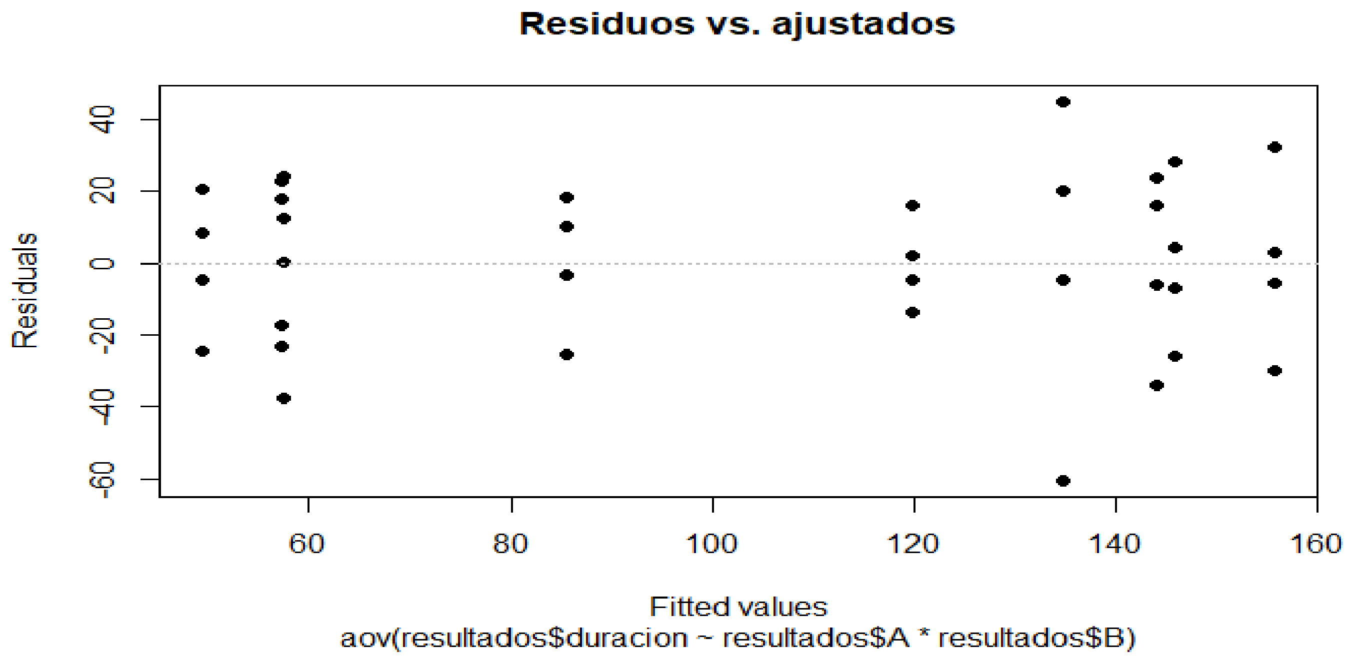
```
plot(resultados$orden, residuals(mod1), pch=19,
     main="Gráfico de residuos versus orden")
```



Verificación de supuestos

El gráfico de residuos vs. Valores ajustados permitirá apreciar la existencia o no de homocedasticidad y si existe alguna forma de relación entre las variancias del error para cada tratamiento y el valor ajustado

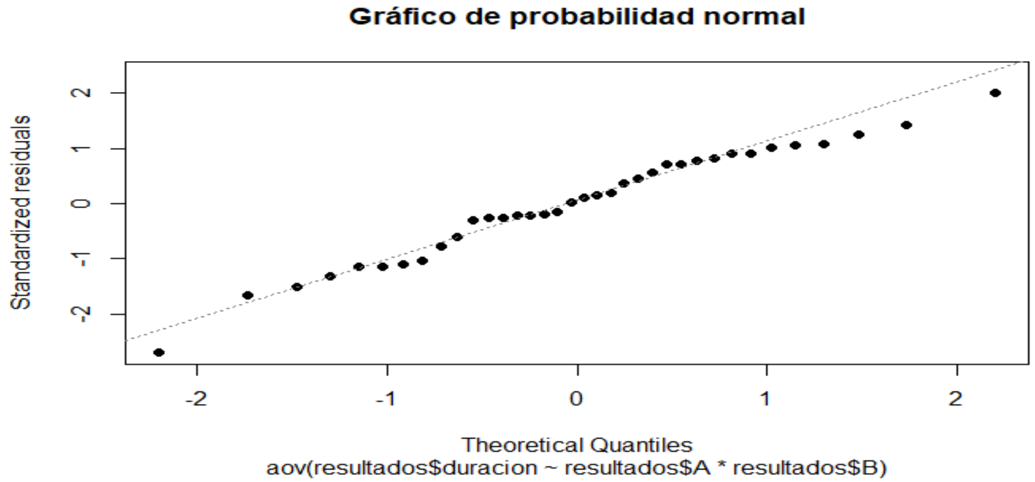
```
plot(mod1, which=1, id.n=0, pch=19, add.smooth=F,
     main="Residuos vs. ajustados", caption="" )
```



Verificación de supuestos

Verificación de supuesto de normalidad de los errores

```
plot(mod1, which=2, id.n=0, pch=19,
     main="Gráfico de probabilidad normal", caption="" )
```



Prueba de hipótesis de normalidad de los errores

```
> shapiro.test(mod1$residuals)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  mod1$residuals
W = 0.97606, p-value = 0.6117
```

¿Qué material elegir?

- El material 3 proporciona mayor duración de las baterías ante las diferentes temperaturas
- A qué temperatura las baterías tienen una mayor duración?
- Los dos factores son igualmente útiles al momento de diseñar el producto? Son controlables?
- Fue útil observar el efecto de la temperatura?

Estimación de efectos y predicciones

- Los efectos se estiman como:

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$$
$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$$
$$\left(\tau\hat{\beta}\right)_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$$

- La estimación del valor medio para un tratamiento, cuando los efectos principales y la interacción son estadísticamente significativas se obtiene como:

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + \left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}\right) + \left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}\right) = \bar{y}_{ij.}$$

Respuesta media esperada

- Para obtener la respuesta media esperada, solo se incluyen aquellos efectos que resultan estadísticamente significativos.
- Si la interacción resulta significativa, se incluyen los efectos principales de los factores correspondientes a la interacción que resulta significativa.
- En la diapositiva 44 se encuentran los valores de la respuesta media esperada para cada tratamiento.

Factores cuantitativos: descomposición de la SC_{factor}

- Cuando se estudian factores cuantitativos, en general el objetivo NO es comparar valores medios de respuesta para los niveles ensayados sino INVESTIGAR LA NATURALEZA DE LA FUNCIÓN DE RESPUESTA que relaciona el dicho valor medio con los niveles del factor.
- <u>Pueden interesar cuestiones como:</u>
- ¿Afecta la temperatura (en el rango estudiado) el rendimiento medio del proceso? (Con el ANOVA se puede responder)
- ¿Existe efecto lineal positivo (o negativo) de la temperatura sobre el rendimiento medio? Es decir una tendencia a crecer (o decrecer) a medida que aumenta la temperatura?
- A mayores temperaturas ¿el incremento del rendimiento es cada vez menor? (efecto cuadrático negativo).
- Si se estudian dos factores: ¿qué comportamiento tiene la respuesta media de un factor para nivel del otro?

Componentes lineal y cuadrática en la SC_{factor}

- Si el factor estudiado es cuantitativo conviene descomponer la SC_{factor} en componentes que explican efectos lineales, cuadráticos, etc.
- Esto es sencillo si los niveles están equiespaciados.
- Mediante la consideración de contrastes ortogonales puede probarse la significación estadística de las componentes.

Descomposición de la SC_{factor}

- Cada componente (lineal, cuadrática, etc.) lleva asociada una Suma de Cuadrados (con 1 gl) que es una parte de la SC del efecto del factor
- Cada suma de cuadrados se obtiene como : $SC_C = \frac{nZ^2}{\sum {c_i}^2}$
- Donde $Z = \sum_i c_i \bar{y}_{i.}$ y las cantidades c_i son valores tabulados (ya utilizados en la Introducción para el caso de un solo factor), diferentes según el efecto al cual se corresponde el contraste Z.
- Para evaluar su significación se compara el cociente entre el CM_C y el CM_{error}, con un valor de tabla de $F_{1,gl\ del\ error,1-\alpha}$ según el nivel de significación fijado.

Descomposición de la $SC_{\text{interacción}}$

- Si hay un factor A cualitativo y otro B cuantitativo.
- La suma de cuadrados se descompondrá en una parte correspondiente a la interacción del efecto lineal de B y A, otra correspondiente al efecto cuadrático de B y A, etc. , cada una con a-1 grados de libertad.

Se calcula un contraste con las medias, para cada nivel del factor cuantitativo y su correspondiente suma de cuadrados

$$Z_1 = \sum_{j=1}^{b} c_j \bar{y}_{1j.} \qquad SC_{Z1} = \frac{nZ_1^2}{\sum_{j=1}^{b} c_j^2}$$

...

$$Z_a = \sum_{j=1}^{b} c_j \bar{y}_{aj.} \qquad SC_{Za} = \frac{nZ_a^2}{\sum_{j=1}^{b} c_j^2}$$

$$SC_{AxZ} = \left(\sum_{i=1}^{a} SC_{Zi} \right) - SC_Z$$

Suma de cuadrados del contraste Z asociado al efecto que se considera para el factor B

Descomposición de la SC$_{\text{interacción}}$

- <u>Dos factores cuantitativos</u>:
- La descomposición de la SC$_{\text{AxB}}$, se hará en sumas de cuadrados con 1 grado de libertad, correspondientes a los efectos linealxlineal, cuadráticoxlineal, linealxcuadrático, cuadráticoxcuadrático.
- Se calculan las componentes *Zi* asociadas a un efecto B para cada nivel de A: $Z_i = \sum_{j=1}^{b} c_i \bar{y}_{ij.}$
- Se calcula un nuevo contraste: $\sum_{i=1}^{a} d_i Z_i$
- Se obtiene la suma de cuadrados del contraste para el efecto elegido:
- $SC = \dfrac{n\left(\sum_{i=1}^{a} d_i Z_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{a} d_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{b} c_j^2\right)}$

Ejemplo 2: Efectos de calidad y diámetro de barras de acero sobre el alargamiento hasta la rotura

- En una acería, se realizó un estudio para analizar la influencia de la calidad del acero (B400SD y B500SD) y del diámetro (8mm, 16 mm y 24 mm) sobre el alargamiento hasta la rotura de barras de acero corrugadas. Para cada calidad y diámetro se seleccionaron aleatoriamente 5 barras, cada una de una colada diferente determinándose en cada una, mediante un ensayo de tracción-deformación, el valor de interés.
- El diseño define 6 tratamientos y 5 réplicas: 30 pruebas

Ejemplo 2. Resultados del experimento

Valores de alargamiento a la rotura (Emax en %) en barras corrugadas de acero

	8mm	16 mm	24 mm
	15,29	16,91	17,23
	15,89	16,99	17,81
B400SD	16,02	17,27	17,74
	16,56	16,85	18,02
	15,46	16,35	18,37
	12,07	12,92	13,3
	12,42	13,01	12,82
B500SD	12,73	12,21	12,49
	13,02	13,49	13,55
	12,05	14,01	14,53

Analizar los efectos sobre la media y los efectos de dispersión

Una sola réplica

- Cuando se realiza una sola réplica del experimento, la estimación del modelo de efectos completos insume todos los grados de libertad disponibles: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad i = 1 \ldots a \; ; \quad j = 1 \ldots b$
- Las SC de los efectos tienen *(a-1)*, *(b-1)* y *(a-1)(b-1)* grados de libertad y no hay posibilidad de estimar la variancia del error.
- Si se puede asumir que no existe interacción, se puede calcular el CMerror y evaluar la significaciòn estadística de los efectos principales.

Propuesta de Tuckey para evaluar la interacción con una sola réplica

- Tuckey desarrolló la siguiente prueba para evaluar la existencia de interacción en el caso de un plan factorial no replicado
- Suponiendo que el término de la interacción tiene la forma: $(\tau\beta)_{ij} = \gamma\tau_i\beta_j$, donde γ es una constante desconocida, es posible particionar la SC_e en una componente debida a la no aditividad con un grado de libertad y otra debida al error con *(a-1)(b-1)-1* grados de libertad

Partición de la SCe

- La suma de cuadrados por no aditividad es:

$$SC_{NA} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}y_{i.}y_{.j} - y_{..}\left(SC_A + SC_B + \frac{y_{..}}{ab}\right)\right]^2}{abSC_ASC_B}$$

siendo $SC_{error} = SC_{residual} - SCNA$

El cociente $SC_{NA}/[SC_{error}/(a-1)(b-1)-1]$ si no hay interacción (Ho), tiene una distribución$F_{1,(a-1)(b-1)-1}$

Esta estadística permite probar la hipótesis, para verificar con base objetiva la no existencia de interacción

Partición de la SCe

- Una alternativa para aprovechar el software, propuesta por Box y otros a partir de considerar que el test de Tuckey está basado en la correlación entre $\left(y_{ij}-\hat{y}_{ij}\right)$ y $\left(q_{ij}-\hat{q}_{ij}\right)$
- Donde $q_{ij}=\hat{y}_{ij}^{2}$ y $q_{ij}-\hat{q}_{ij}$ los residuos del ANOVA considerado para q_{ij} con los mismos efectos que para y_{ij} .
- Siendo $P=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij}-\hat{y}_{ij}\right)\left(q_{ij}-\hat{q}_{ij}\right)$ y $Q=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(q_{ij}-\hat{q}_{ij}\right)^{2}$
- La $SC_{NA}=P^{2}/Q$

Transformaciones

- Las hipótesis básicas del ANOVA son:
  - Independencia
  - Homocedasticidad
  - Normalidad

En el caso de que la pauta de variabilidad de los datos difiera sensiblemente de la correspondiente al modelo normal homocedástico, puede ser aconsejable transformar la variable respuesta.

Pautas para el planteo de la transformación

- Si se conoce que existe alguna relación entre la media y la variancia, y se puede suponer la forma de dicha relación, esta información puede ayudar en la elección de la transformación adecuada.
- Si $\sigma_y \propto \mu^{\alpha}$
- Y se plantea la transformación $y^* = y^{\lambda}$
- Resulta $\sigma_{y^*} \propto \mu^{\lambda+\alpha-1}$
- Y considerando $\lambda = 1-\alpha$ la variancia será constante

Estimación de la potencia en la transformación

- Cuando se dispone de réplicas, se puede estimar α empíricamente de la siguiente manera:
- Por la proporcionalidad existente, resulta

$$\log\left(\sigma_{y_i}\right) = \log(\theta) + \alpha \log(\mu_i)$$

- Luego, representando gráficamente $\log\left(\sigma_{y_i}\right)$ vs. $\log(\mu_i)$ α podrá aproximarse con la pendiente de la recta que ajusta los puntos definidos por los logaritmos para cada tratamiento.

Transformaciones estabilizadoras de la varianza cuando $\sigma_Y \propto \mu^\alpha$

Función	α	λ=1-α	Transformación
$\sigma \propto \mu^2$	2	-1	Recíproca
$\sigma \propto \mu^{3/2}$	3/2	-1/2	Inversa de la raíz cuadrada
$\sigma \propto \mu$	1	0	Logaritmo
$\sigma \propto \mu^{1/2}$	1/2	1/2	Raíz cuadrada
$\sigma \propto cte$	0	1	No se transforma

En el caso de una proporción como variable respuesta, se puede utilizar $arcsen\sqrt{p}$

Transformaciones de Box-Cox

- Box y Cox propusieron el siguiente procedimiento para encontrar λ
- Se efectúa el análisis de la variancia para varios valores de λ de:

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{y^{\lambda} - 1}{\lambda \dot{y}^{\lambda-1}} & \lambda \neq 0 \\ \dot{y} \ln y & \lambda = 0 \end{cases}$$

- Con $\dot{y} = \ln^{-1}\left[(1/n) \sum \ln y \right]$

- Se elige λ de modo que SCerror sea mínimo