# Trabajo de Análisis Matemático II

## *Condición necesaria y suficiente de integrabilidad*

## *Suma de Riemann y Sumas de Darboux*


Universidad de La Habana

Facultad MATCOM

Ciencia de la Computación

Meylí y Alfonso

# 1 Introducción

En el presente material, presentamos la demostración de una de las condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad. Además, incluiremos gráficos de la suma de Riemann, así como de las sumas inferior y superior de Darboux, para algunas funciones. También presentaremos un ejemplo de una función que no es Riemann integrable en el intervalo dado.

# 2 Teorema de la Condición Necesaria y Suficiente de Integrabilidad

Demostraremos que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

$$
\begin{array}{rl}
(i) & f \in \mathcal{R}[a,b] \\
(ii) & \forall \varepsilon > 0, \exists P \text{ partición de } [a,b] \text{ tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \\
(iii) & \overline{I} = \underline{I}
\end{array}
$$

**Donde:**

- $[a,b]$: intervalo de integración.
- $P$: partición de [a,b]. $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$
- $S(f,P)$: suma superior de Darboux para la función f correspondiente a la partición P. $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$
- $s(f,P)$: suma inferior de Darboux para la función f correspondiente a la partición P. $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$
- $\overline{I}$: ínfimo de las sumas superiores.
- $\underline{I}$: supremo de las sumas inferiores.
- $\sigma(f,P,\{\xi_i\})$: Suma de Riemann. $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$
- $\xi_i \in [x_{\text{i-1}}, x_{\text{i}}]$ $i = 0,1,...,n$
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$: longitud del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

## 2.1 Primera Implicación: $(i) \Rightarrow (ii)$

Aquí demostraremos que:

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P \text{ partición de [a,b] tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

Como:

$$f \in \mathcal{R}[a,b]$$

Se tiene por definición:

$\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon = \{x_i\}_{i=0}^n$ partición de [a,b] tal que $\forall P \supset P_\varepsilon$ (P partición más fina que $P_\varepsilon$)

se cumple: $|\sigma(f,P,\{\xi_i\}) - I| < \epsilon$ , donde I es algún número real

Tomando $\epsilon/4$ , eliminamos el módulo y sumamos el límite de la suma integral en ambos lados de la expresión, obteniendo la siguiente desigualdad:

$$I - \varepsilon/4 < \sigma(f,P,\{\xi_i\}) < I + \varepsilon/4.$$

Sabemos que como propiedad de las sumas de Darboux, cualquiera sea la participación P y la selección de puntos:

$$\xi_i \in [x_{\text{i-1}}, x_{\text{i}}],$$

Se tiene que:

$$s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P).$$

Esto es debido a que, por la definición de suma inferior y superior de Darboux:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{y} \quad S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Siendo:

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i.$$

Multiplicando la desigualdad por la cantidad positiva:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0.$$

Obtenemos que:

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Regresando a la desigualdad principal y sustituyendo las sumas inferiores y superiores de Darboux:

$$I - \varepsilon/4 < s(f,P) \leq \sigma(f,P,\{\xi_i\}) \leq S(f,P) < I + \varepsilon/4.$$

Restando:

$$S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Hemos llegado a que:

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists P \text{ de [a,b] tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

## 2.2 Segunda implicación: $(ii) \Rightarrow (iii)$

Ahora demostraremos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \text{ partición de [a,b] tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{I} = \underline{I}$$

Como:

$$\underline{I} = \sup_P s(f,P) \Longrightarrow s(f,P) \leq \underline{I}$$

$$\overline{I} = \inf_P S(f,P)\text{text} \Longrightarrow S(f,P) \geq \overline{I}$$

Ambas sobre todas las particiones posibles

Se deriva que:

$$-\varepsilon < s(f,P) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S(f,P) < \varepsilon.$$

La desigualdad:

$$\underline{I} \leq \overline{I}$$

se debe a que las sumas inferiores de Darboux siempre son menores que las sumas superiores.

Por tanto cuando se resta:

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

Se llega a:

$$\underline{I} = \overline{I}.$$

## 2.3 Tercera Implicación: $(iii) \Rightarrow (i)$

Para la última implicación estaremos demostrando que:

$$\underline{I} = \overline{I} \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, b]$$

Como $\underline{I} = \overline{I} = I$,

Por definición de supremo e ínfimo se tiene que:

$$\underline{I} = \sup_P s(f, P) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P_1 \text{ partición de [a,b] tal que } : s(f, P_1) > \underline{I} - \varepsilon,$$

$$\overline{I} = \inf_P S(f, P) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P_2 \text{ partición de [a,b] tal que } : S(f, P_2) < \overline{I} + \varepsilon.$$

Tomando:

$$P_\varepsilon = P_1 \cup P_2,$$

$$P_\varepsilon \supset P_1 \wedge P_\varepsilon \supset P_2,$$

Se infiere que:

$$\forall P \supset P_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad I - \varepsilon < s(f, P_1) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P_2) < I + \varepsilon.$$

Conociendo que la suma de Riemann se encuentra acotada por las sumas inferiores y superiores de Darboux:

$$\forall \xi_i \; P \supset P_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad I - \varepsilon < s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P) < I + \varepsilon.$$

Restando I a la expresión y quedándonos solo con la suma de Riemann, obtenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \; \forall P \supset P_\varepsilon \quad \big|\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I\big| < \varepsilon.$$

Concluimos que:

$$|\sigma(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \varepsilon$$

Finalmente, hemos demostrado las siguientes implicaciones:

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \varepsilon > 0, \exists P \text{ de [a,b] tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{I} = \underline{I} \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$$

Por tanto, por transitividad concluimos que:

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Longleftrightarrow \varepsilon > 0, \exists P \text{ de [a,b] tal que } S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \Longleftrightarrow \overline{I} = \underline{I}$$

Hemos demostrado la condición necesaria y suficiente para la integrabilidad, mostrando las 3 equivalencias del teorema.

Figure 1: Función $\frac{\sin 10x}{x} + 2.5$ en el intervalo $[0.1, 2]$

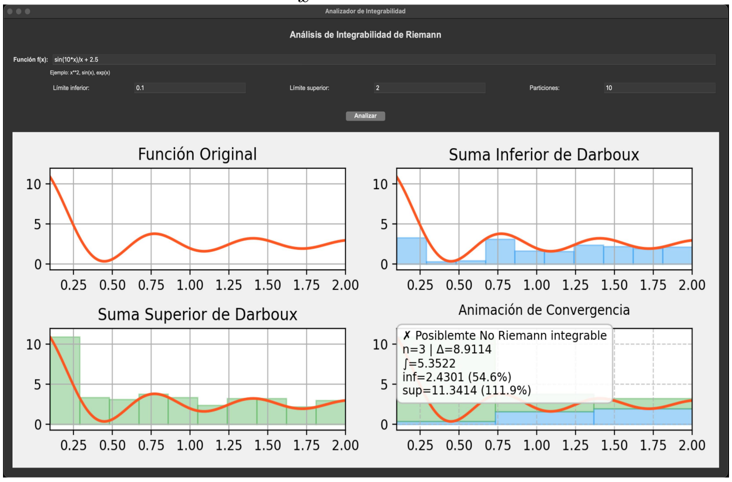


Figure 2: Función $|\sin x|$ en el intervalo $[0, 10]$

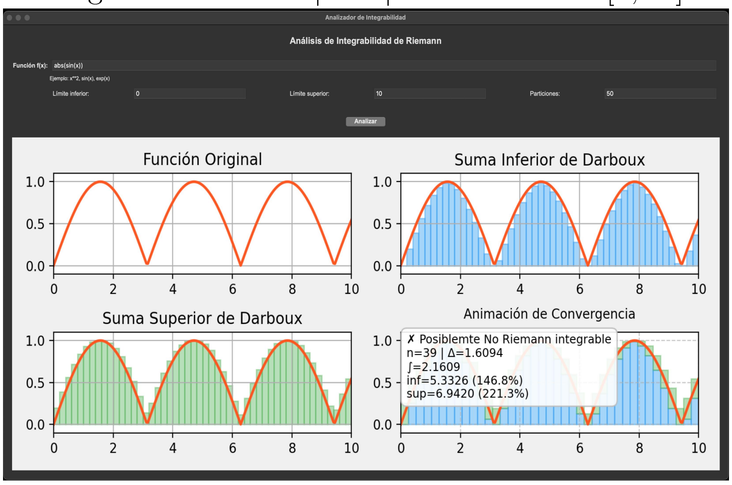

Figure 3: Función $\frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[-10, 10]$

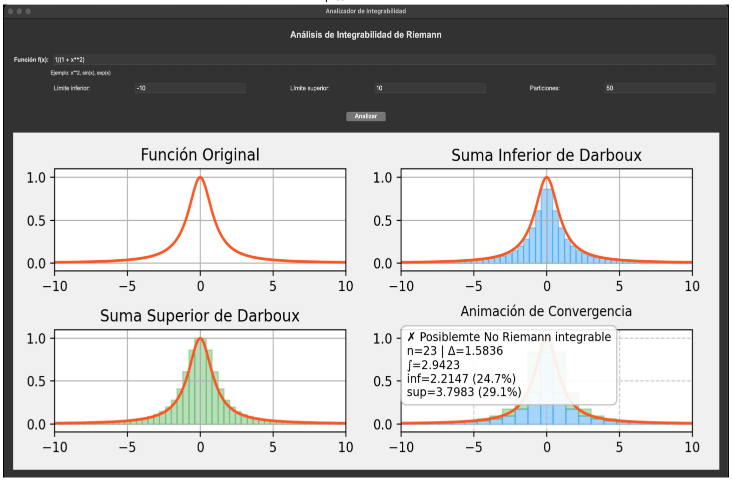


Figure 4: Función no Riemann integrable tan x en el intervalo $[-10, 10]$

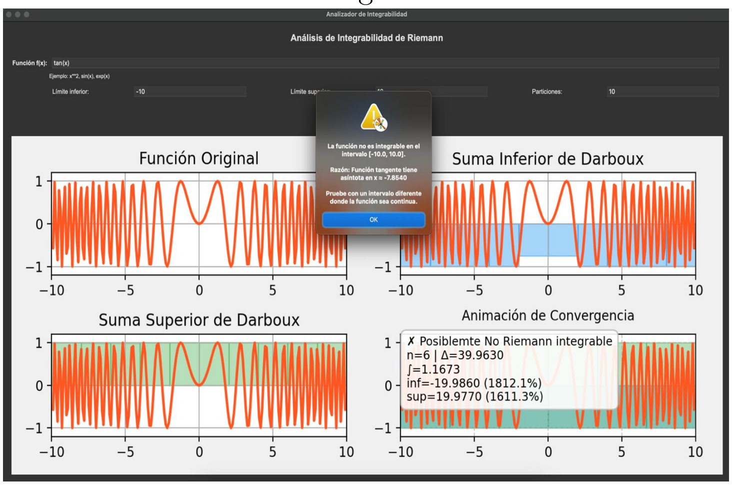

Figure 5: Función no Riemann integrable tan