$f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{x^2-4x}$ Domini, assimptotes, discontinuïtats, punts crítics, creix/decreix i extrems.

a) Domini

El domini és tot $\mathbb{R}$ menys on el denominador val 0

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x = 0$ ó $x = 4$

Per tant, $\underline{\underline{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{0,4\}}}$

b) Assímptotes:

a.h.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-4x} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$e^x \to +\infty$, $x^2-4x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2-4x} = \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot \frac{1}{x^2-4x} = 0$$

$e^x \to 0$, $x^2-4x \to +\infty$, $e^x \to 0$, $\frac{1}{x^2-4x} \to 0$

Per tant, $y=0$ és assímptota horitzontal a.v. Els candidats són $x=0$ i $x=4$

$x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+1}}{x^2-4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{e^{x+1}}^{\to e}}{\underbrace{\underbrace{x}_{0^+}\cdot(x-4)}_{\to 0^-}} = -\infty$$

$\to 0^-$ ($x-4$ és negatiu)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x+1}}{x^2-4x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{e^{x+1}}^{\to e}}{\underbrace{x\cdot(x-4)}_{0^+}} = +\infty$$

Per tant, $x=0$ és assimptota vertical.

$x=4$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{e^{x+1}}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4^+} \frac{e^{x+1}}{x\cdot(x-4)} = +\infty$$

$e^{x+1} \to e^5$

$x\cdot(x-4) \to 0^+$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{e^{x+1}}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4^-} \frac{e^{x+1}}{x(x-4)} = -\infty$$

$e^{x+1} \to e^5$

$x \to +4$, $(x-4) \to 0^-$

$x(x-4) \to 0^-$

Per tant, $x=4$ és assímptota vertical.

c) Discontinuïtats

f és contínua a tot el domini per ser composició de funcions elementals:

$$f \text{ és contínua a } \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$$

$x=0$ i $x=4$ són discontinuïtats assimptòtiques perquè els límits laterals, tal i com he calculat a l'apartat anterior, valen infinit

d) Punts crítics

Calculo la derivada de $f(x)$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2}$$

$$\left(e^{x+1}\right)' = e^{x+1}$$

$$\left(x^2-4x\right)' = 2x-4$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^{x+1}}{x^2-4x}\right)' =$$

$$= \frac{e^{x+1} \cdot (x^2-4x) - e^{x+1}(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = \frac{e^{x+1}(x^2-4x-2x+4)}{(x^2-4x)^2}$$

$$= \frac{e^{x+1}(x^2-6x+4)}{(x^2-4x)^2}$$

Els punts crítics són punts del domini de f on $f' = 0$ o f' no està definida:

$$f' = 0 \iff \frac{e^{x+1}(x^2-6x+4)}{(x^2-4x)^2} = 0 \iff x^2 - 6x - 4 = 0$$

e^{x+1} no val mai zero!!

$x^2-6x-4=0$? Faig servir la fòrmula per trobar els zeros d'una equació de 2n grau $\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$:

$$x = \frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{6\pm2\sqrt{5}}{2} =$$

$$= 3\pm\sqrt{5} \implies \begin{array}{l} x = 3+\sqrt{5} \simeq 5'236 \\ x = 3-\sqrt{5} \simeq 0'764 \end{array}$$

f' no està definida en aquells punts on s'anul·la el denominador: $(x^2-4x)^2=0$

però aquests punts són $x=0$ i $x=4$, que no formen part del domini de f i, per tant, no són punts crítics.

Per tant, els únics punts crítics són

$x=3+\sqrt{5}$ i $x=3-\sqrt{5}$

e) creix / decreix

$3-\sqrt{5} = 0'7$ $\qquad$ $3+\sqrt{5} = 5'2$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,0'7)$	$0'7$	$(0'7,4)$	4	$(4,5'2)$	$5'2$	$(5'2,+\infty)$
f'	$+$	X	$+$	0	$-$	X	$-$	0	$+$
f	creix	X	creix	MAX	decreix	X	decreix	MIN	creix

$f'(-1)>0$ $\quad$ $f'(0'5)>0$ $\quad$ $f'(1)<0$ $\quad$ $f'(5)<0$ $\quad$ $f'(10)>0$

Pel teorema de Bolzano, comprovant el signe d'un punt d'aquests intervals, la resta de punts de l'interval tenen el mateix signe.

f és creixent a $(-\infty, 0) \cup (0, 3-\sqrt{5}) \cup (3+\sqrt{5}, +\infty)$

f és decreixent a $(3-\sqrt{5}, 4) \cup (4, 3+\sqrt{5})$

§ extrems

$x = 3-\sqrt{5}$ és un màxim relatiu de f

$x = 3+\sqrt{5}$ és un mínim relatiu de f