Práctica 4: Teoría de colas con R

Distribuciones de probabilidad continuas

En nuestro caso nos interesa manejar la función exponencial (en R es la función *exp*), sin embargo existen muchas otras, las más importantes son:

- Exponencial: exp
- Uniforme: unif
- Normal: norm
- Chi-cuadrado: chisq
- t de Student: t

Sin embargo estos no son exactamente nombres de funciones de R. Es necesario poner el prefijo según nuestras necesidades:

- d: funciones de densidad
- p: función de distribución acumulada
- r: generar valores aleatorios
- q: función cuantil (no la usaremos)

Distribuciones de probabilidad discretas

En nuestro caso nos interesa manejar la función de Poisson (en R es la función *pois*), sin embargo existen muchas otras, las más importantes son:

- Binomial: binom
- Hipergeométrica: hyper
- Poisson: pois
- Geométrica: geom

Añadiendo el prefijo de la misma manera que en las continuas

Nota: En la función *exp* pasamos como argumento nuestro λ, mientras que en la función *pois* hemos de pasar $\lambda \cdot t$

Ejemplo. *El tiempo entre llegadas en una dependencia de la State Revenue Office es exponencial, con valor media 0.05 hora. La oficina abre a las 8 A.M.*

a) Escriba la distribución exponencial que describa el tiempo entre llegadas.

$$\lambda = \frac{1}{0.05} = 20 clientes/hora$$
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad f(t) = 20e^{-20t}$$

b) Determine la probabilidad de que no lleguen clientes a la oficina hasta las 08:15A.M.

$$P(t \geq 1/4) = 1 - P(t \leq 1/4)$$

1-pexp(1/4,rate=20)

0.006737947

c) Son las 08:35A.M. El último cliente entró a las 08:26. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de las 08:38A.M.? ¿Y de que no llegue hasta las 08:40A.M.?

pexp(3/60,rate=20)

0.6321206

1-pexp(5/60,rate=20)

0.1888756

d) ¿Cuál es la cantidad promedio de clientes que llegan entre las 08:10 y las 08:45A.M.?

$$\lambda t = 20 \cdot \frac{25}{60}$$

Ejemplo. Utilización de la distribución de Poisson

```
? dpois
 # lambda son las llegadas en ese tiempo, no nuestro lambda
 nuestro.lambda <- 3
 tiempo <- 2
 dpois(4,lambda=nuestro.lambda*tiempo)
 # obtiene 0.1338526
 ? ppois
 ppois(15, lambda=nuestro.lambda*tiempo)
 0.9994909
```

Calcular la probabilidad que lleguen 15 personas o menos con las condiciones pasadas (último comando en el código anterior), podría ser muy engorroso si no se tuvieran medios informáticos.

Ejemplo. El tiempo entre llegadas a una sala de juego en la sociedad de alumnos es exponencial, con una media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la frecuencia de llegadas por hora?

$$\lambda = \frac{1}{10} = 0.1\ llegadas/\min = 6\ llegadas/hora$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen alumnos a esa sala durante los 15 minutos siguientes?

1-pexp(15/60,rate=6)

0.2231302

dpois(0,(15/60)*6)

0.2231302

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una alumna visite la sala de juegos durante los próximos 20 minutos?

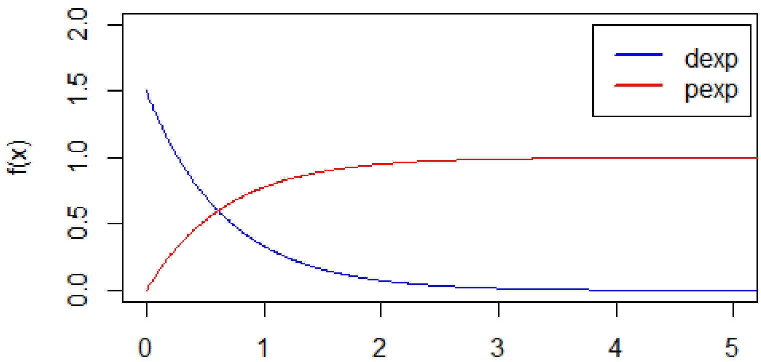
pexp(20/60,rate=6)

0.8646647

1-dpois(0,(20/60)*6)

0.8646647

Ejemplo. El siguiente ejemplo representa las funciones de probabilidad y de densidad de la función exponencial




```
? dexp
? pexp
x <- seq(0,10,by=0.01)
plot(x,dexp(x,rate=1.5), # rate equivale al lambda
    type="l",col="blue", xlim=c(0,5),ylim=c(0,2),ylab="f(x)")
lines(x,pexp(x,rate=1.5),type="l",col="red")
legend(x=3.8,y=2, # localización de la leyenda
legend=c("dexp","pexp"), # texto
    lwd=c(2.5,2.5),col=c("blue","red")) # color y ancho
```

Modelos especializados

Gracias a los compañeros del curso 2015/2016:

- Estefanía Jiménez Arroyo
- Samuel López Hernández
- Lucía López-Rey Sánchez-Cano

Disponemos de funciones que nos calculan las medidas de desempeño en colas M/M
Las cargamos con *source('FuncionesColas.R')* y podremos acceder a:

Funciones M/M/1

MM1_medidas(lambda,mu): Medidas de desempeño, devuelve un vector con $Ls, Lq, Ws, Wq, \bar{c}$
MM1_pn(lambda,mu,n): Probabilidad de que haya n clientes en el sistema
MM1_PLsMayorN(lambda,mu,n): Probabilidad de que el número de clientes en el sistema sea mayor que n
MM1_PWsMayorT(lambda,mu,t): Probabilidad de que el tiempo de espera en el sistema sea mayor que t
MM1_PWqMayorT(lambda,mu,t): Probabilidad de que el tiempo de espera la cola sea mayor que t

Funciones M/M/1:DG/N/inf

MM1N_pn(lambda,mu,N,n): Probabilidad de que haya n clientes en el sistema para un sistema de N clientes
MM1N_medidas(lambda,mu,N): Medidas de desempeño, para sistemas con N clientes, devuelve un vector con $Ls, Lq, Ws, Wq, \bar{c}$

Funciones M/M/c

MMc_p0(lambda,mu,c): Probabilidad de que no haya clientes con c servidores
MMc_pn(lambda,mu,c,n): Probabilidad de que haya n clientes con c servidores
MMc_medidas(lambda,mu,c): Medidas de desempeño, para sistemas con c servidores, devuelve un vector con $Ls, Lq, Ws, Wq, \bar{c}$

Funciones M/M/c:DG/N/inf(c<N)

MMcN_p0(lambda,mu,c,N): Probabilidad de que no haya clientes con c servidores para sistemas con N clientes

MMcN_pn(lambda,mu,c,n,N): Probabilidad de que haya n clientes con c servidores para sistemas con N clientes
MMcN_medidas(lambda,mu,c,N): Medidas de desempeño, para sistemas con c servidores para sistemas con N clientes, devuelve un vector con $Ls, Lq, Ws, Wq, \bar{c}$

Ejemplo. *Un lavadero para coches recibe a los mismos siguiendo una distribución de Poisson, con 4 coches por hora, que pueden esperar en el parking de la instalación si el lavadero está ocupado. El tiempo para lavar un coche es exponencial, con una media de 10 minutos. El parking tiene únicamente 4 plazas, y si está lleno, no podrán esperar y se tendrán que ir a otro lado.*

a) *Ayude al propietario del lavadero a conocer el impacto que tiene la limitación de parking y cómo se van los clientes a la competencia.*

```
lambda <- 4
mu <- 6
N <- 5
n <- 5
p5 <- MM1N_pn(lambda,mu,N,n) # Probabilidad del sistema lleno
lambda.perdido <- p5*lambda
lambda.ef <- 4-lambda.perdido
```

b) *La probabilidad de que un automóvil que llegue pase de inmediato al lavado.*

```
p0 <- MM1N_pn(lambda,mu,N,0)
```

c) *El tiempo estimado de espera para que se inicie un servicio.*

```
aux <- MM1N_medidas(lambda,mu,N)
aux[4]
```

d) *Cantidad esperada de lugares de estacionamiento vacíos.*

```
5-aux[1]
```

e) *Probabilidad de que estén ocupados todos las plazas de parking*

p5 (ya calculado antes)

f) *Determine la cantidad de plazas de estacionamiento tal que el porcentaje de automóviles que no puedan encontrar espacio no sea mayor que el 1 por ciento.*

Gracias a R podemos construir un fragmento de código como este

```
for(clientes in 1:15){
    # Probabilidad del sistema lleno
    plleno <- MM1N_pn(lambda,mu,clientes,clientes)
    porc <- round(plleno*100,2)
    print(paste("Con ",clientes-1," plazas probabilidad del ",porc,'%',sep=""))
}
```

Obteniendo:

"Con 0 plazas probabilidad del 40%"
"Con 1 plazas probabilidad del 21.05%"
"Con 2 plazas probabilidad del 12.31%"
"Con 3 plazas probabilidad del 7.58%"
"Con 4 plazas probabilidad del 4.81%"
"Con 5 plazas probabilidad del 3.11%"
"Con 6 plazas probabilidad del 2.03%"
"Con 7 plazas probabilidad del 1.34%"
"Con 8 plazas probabilidad del 0.88%"
"Con 9 plazas probabilidad del 0.58%"
"Con 10 plazas probabilidad del 0.39%"
"Con 11 plazas probabilidad del 0.26%"
"Con 12 plazas probabilidad del 0.17%"
"Con 13 plazas probabilidad del 0.11%"
"Con 14 plazas probabilidad del 0.08%"

Es decir, que harían falta disponer de **al menos 8 plazas de parking**

Ejercicios propuestos

Ejercicio #1

Una tienda de barrio dispone de una única cola, y del tendero Antonio que cobra a los clientes. Tanto los tiempos entre llegadas de clientes como entre la atención de clientes del tendero siguen distribuciones exponenciales. Se sabe que llegan 4 clientes cada hora, y que el tendero tarda 9 minutos en atender a cada cliente.

a) ¿Qué probabilidad hay de que entre al menos un cliente en los próximos 10 minutos? ¿Y de que lleguen 6 clientes en una hora? ¿Y de que no llegue nadie en 30 minutos?
b) ¿Qué porcentaje del tiempo del trabajo estará Antonio ocioso?
c) ¿Cuáles serán el resto de medidas de desempeño del sistema?
d) Antonio ha tenido suerte en las últimas Navidades y ha ganado una pedrea, por lo que se ha animado a contratar a un ayudante, el cual trabaja al mismo ritmo que él. ¿Cómo mejorarán las medidas de desempeño con este cambio?

Ejercicio #2

La primera parte del ejercicio antes de evaluar costes ha de ser entregada también a mano

En una peluquería trabajan dos personas, y en el establecimiento existen 5 sillas para esperar a ser atendido, de tal forma que si no hay sitio no se puede entrar. Se ha estudiado que los clientes llegan siguiendo una distribución exponencial con un tiempo entre llegadas de 3 minutos. Cada trabajador lo hace al mismo ritmo y se ha estudiado que el número de clientes atendidos en un tiempo dado sigue una distribución de Poisson a un ritmo de 15 clientes atendidos cada 2 horas.

a) Calcule las medidas de desempeño del sistema
b) ¿Cuál será la probabilidad de que lleguen al menos 5 clientes en media hora?
c) ¿Cuál será la probabilidad de que no llegue ningún cliente en media hora?
d) ¿Qué cantidad de clientes se espera que lleguen en media hora?

En esta misma situación suponga un coste fijo de 10€ por hora de trabajo por cada empleado, y que el corte de pelo cuesta 12€. Calcule los beneficios variando el número de empleados de 2 a 5 haciendo lo siguiente:

- Calcule el coste por hora de los trabajadores
- Calcule la tasa de ocupación de cada servidor y con ella calcule cuántos clientes habrá atendido en una hora. Obtenga entonces los clientes que se atienden en la peluquería en total
- Calcule los ingresos multiplicando los clientes por lo que pagan
- Obtenga los beneficios
- Represente los datos en una gráfica (opcional)

- Repita este proceso suponiendo que en lugar de 5 asientos de espera dispusiera de 10 asientos

¿Qué número de asientos y/o peluqueros recomendaría tener? ¿Por qué? Reflexione sobre los resultados.

La fecha máxima de entrega es el **miércoles 19 de diciembre de 2018**.