

## Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

### Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ. Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π.χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.

Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά **σύνολα**.

Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

**Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

#### ΣΧΟΛΙΟ

Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

- ✓ με  $\mathbb{N}$  συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,
- ✓ με  $\mathbb{Z}$  το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
- ✓ με  $\mathbb{Q}$  το σύνολο των ρητών αριθμών και
- ✓ με  $\mathbb{R}$  το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

**Τα σύμβολα  $\in$  και  $\notin$** 

Για να δηλώσουμε ότι το  $x$  είναι στοιχείο του συνόλου  $A$ , γράφουμε  $x \in A$  και διαβάζουμε «το  $x$  ανήκει στο  $A$ », ενώ για να δηλώσουμε ότι το  $x$  δεν είναι στοιχείο του συνόλου  $A$  γράφουμε  $x \notin A$  και διαβάζουμε «το  $x$  δεν ανήκει στο  $A$ ».

Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5} \notin \mathbb{N}, \quad \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}, \quad -2 \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ κτλ.}$$

**Παράσταση συνόλου**

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

**α)** Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντάς τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο  $A$  έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο  $B$  των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής  $\frac{1}{n}$ , όπου  $n$  θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

**β)** Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με:

$$\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $x > 0$ ».

Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται

$$\{x \in \mathbb{Z} | x \text{ άρτιος}\}$$

Γενικά, αν από ένα σύνολο  $\Omega$  επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα  $I$ , τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των  $x \in \Omega$ , όπου  $x$  έχει την ιδιότητα  $I$ ».

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του».

### Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$$A = \{1, 2\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0\}$$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης  $(x-1)(x-2) = 0$  είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο  $B$  έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το  $A$ . Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα  $A$  και  $B$  είναι ίσα.

Γενικά

Δύο σύνολα  $A$  και  $B$  λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:

«Δύο σύνολα  $A$  και  $B$  λέγονται **ίσα**, όταν κάθε στοιχείο του  $A$  είναι και στοιχείο του  $B$  και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του  $B$  είναι και στοιχείο του  $A$ ».

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε  $A = B$ .

### Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 15\} \text{ και } B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου  $A$  είναι και στοιχείο του συνόλου  $B$ . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το  $A$  είναι υποσύνολο του  $B$ .

Γενικά

Ένα σύνολο  $A$  λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου  $B$ , όταν κάθε στοιχείο του  $A$  είναι και στοιχείο του  $B$ .

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε  $A \subseteq B$ .

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:

- i)  $A \subseteq A$ , για κάθε σύνολο  $A$ .
- ii) Αν  $A \subseteq B$  και  $B \subseteq \Gamma$ , τότε  $A \subseteq \Gamma$ .
- iii) Αν  $A \subseteq B$  και  $B \subseteq A$ , τότε  $A = B$ .

### Το κενό σύνολο

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$ . Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση  $x^2 = -1$  είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ . Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με  $\emptyset$  ή  $\{\}$ . Δηλαδή:

**Κενό σύνολο** είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

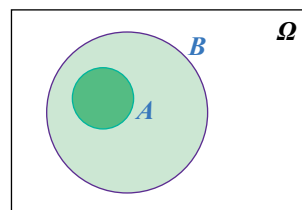
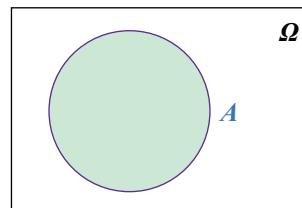
### Διαγράμματα Venn

Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με  $\Omega$ . Για παράδειγμα, τα σύνολα  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  και  $\mathbb{Q}$ , είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου  $\Omega = \mathbb{R}$ .

Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

- Αν  $A \subseteq B$ , τότε το  $A$  παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το  $B$ .



### Πράξεις με σύνολα

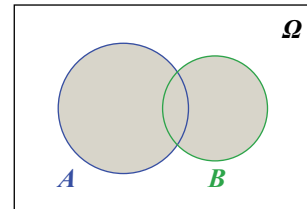
Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ και } B = \{3, 4, 5, 6\}.$$

- Το σύνολο  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των  $A$  και  $B$ , δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του  $\Omega$  που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα  $A$  και  $B$  λέγεται ένωση των συνόλων  $A$  και  $B$ .

Γενικά:

**Ένωση** δύο υποσυνόλων  $A, B$  ενός βασικού συνόλου  $\Omega$  λέγεται το σύνολο των στοιχείων του  $\Omega$  που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα  $A$  και  $B$  και συμβολίζεται με  $A \cup B$ .



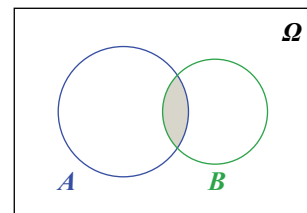
Δηλαδή είναι:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

- Το σύνολο  $\{3, 4\}$  που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των  $A$  και  $B$  λέγεται τομή των  $A$  και  $B$ .

Γενικά:

**Τομή** δύο υποσυνόλων  $A, B$  ενός βασικού συνόλου  $\Omega$  λέγεται το σύνολο των στοιχείων του  $\Omega$  που ανήκουν και στα δύο σύνολα  $A, B$  και συμβολίζεται με  $A \cap B$ .



Δηλαδή είναι:

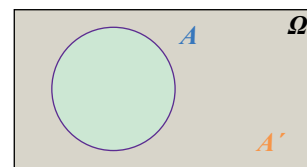
$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Στην περίπτωση που δύο σύνολα  $A$  και  $B$  δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν  $A \cap B = \emptyset$ , τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

- Το σύνολο  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του  $\Omega$  που δεν ανήκουν στο  $A$ , λέγεται συμπλήρωμα του συνόλου  $A$ .

Γενικά:

**Συμπλήρωμα** ενός υποσυνόλου  $A$  ενός βασικού συνόλου  $\Omega$  λέγεται το σύνολο των στοιχείων του  $\Omega$  που δεν ανήκουν στο  $A$  και συμβολίζεται με  $A'$ .



Δηλαδή είναι:

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

- I. 1. Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο “✓” εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.
2. Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής;
3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  και  $\mathbb{R}$  και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.

	-3,5	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	$\pi$	$2,\bar{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5
$\in \mathbb{N}$									
$\in \mathbb{Z}$									
$\in \mathbb{Q}$									
$\in \mathbb{R}$									

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Αν  $A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ διαιρέτης του } 16\}$  και  $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ διαιρέτης του } 24\}$ , τότε:

α)  $A \cup B = \dots\dots\dots$

β)  $A \cap B = \dots\dots\dots$

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο  $\Omega$  των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του

$$A = \{x \in \Omega | x \text{ φωνήεν}\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \Omega | x \text{ σύμφωνο}\}.$$

Τότε:

α)  $A \cup B = \dots\dots\dots$

β)  $A \cap B = \dots\dots\dots$

γ)  $A' = \dots\dots\dots$

δ)  $B' = \dots\dots\dots$

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

1. Έστω δύο σύνολα A και B. Τότε:

α)  $A \subseteq A \cap B$

β)  $B \subseteq A \cap B$

γ)  $A \cap B \subseteq A$

δ)  $A \cap B \subseteq B$

2. Έστω δύο σύνολα A και B. Τότε:

α)  $A \subseteq A \cup B$

β)  $A \cup B \subseteq B$

γ)  $A \cup B \subseteq A$

δ)  $B \subseteq A \cup B$

IV. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Έστω  $\Omega$  ένα βασικό σύνολο,  $\emptyset$  το κενό σύνολο και  $A \subseteq \Omega$ . Τότε:

α)  $\emptyset' = \dots\dots\dots$

β)  $\Omega' = \dots\dots\dots$

γ)  $(A')' = \dots\dots\dots$

2. Έστω  $A \subseteq B$ . Τότε

α)  $A \cap B = \dots\dots\dots$

β)  $A \cup B = \dots\dots\dots$