3.73 Να αποδείξετε τις ταυτοτητες:

α) $(x+3)^2-(x-3)^2=12x$

β) $\alpha^2+(2\alpha+5)^2=(\alpha+4)^2+(2\alpha+3)^2$

γ) $(\alpha-2)^2+2=2(\alpha-1)^2-(\alpha-2)(\alpha+2)$

δ) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+\beta^4=\alpha^4$

ε) $(x^2+y^2)^2-(2xy)^2=[(x-y)(x+y)]^2$

3.74 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(3x+2)^2-(2x+3)^2=5(x+1)(x-1)$

β) $\dfrac{(\alpha-3\beta)^2-(\beta-3\alpha)^2}{8}=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$

γ) $x(-x-1)^2-(2x)^2=(-1+x)^2-(-x+1)^3$

δ) $(\omega+2)^3-6(\omega+1)^2=\omega^3+2$

ε) $(x^3+1)^2+(-x^2-1)^3=(2x)^3-3x^2(x+1)^2$

3.75 Να αποδείξετε ότι:

α) $(x-2y)^3+3(x-2y)^2(x+2y)+$

$+3(x-2y)(x+2y)^2+(x+2y)^3=8x^3$

β) $(\alpha^2-\alpha\beta+\gamma^2)^2-2(\alpha^2+\gamma^2-\alpha\beta)(\gamma^2-\beta^2+\alpha\beta)+$

$+(\beta^2-\alpha\beta-\gamma^2)^2=(\alpha-\beta)^4$

3.78 Αν ισχύει:

$$(\alpha+1)^2-(\beta-1)^2-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=6$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=3$.

3.79 Αν $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3(\beta+1)-\beta^3(\alpha+1)=\alpha-\beta$$

3.80 Αν $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, με $\alpha,\ \beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$.

3.81 Αν ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, να αποδείξετε ότι:

$$(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2+\tau^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

3.82 Αν ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=\beta(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)$

β) $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

3.83 Αν για τους αριθμούς $\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0$ ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$

3.84 Αν ισχυει $\alpha+\beta+\gamma=x$, να αποδείξετε ότι:

$$(x-3\alpha)^3+(x-3\beta)^3+(x-3\gamma)^3=$$

$$=3(x-3\alpha)(x-3\beta)(x-3\gamma)$$

3.85 Για τους πραγματικούς μη μηδενικούς αριθμούς α, β και γ ισχύουν:

$$\alpha+\beta+\gamma=3 \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9$.

3.87 Αν ο αριθμός x^2 είναι άρρητος, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός x είναι άρρητος.

3.88 Ο αριθμός α είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $(\alpha + 3)^2$ είναι άρτιος, τότε ο αριθμός α είναι περιττός.

3.89 Οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι. Αν ο αριθμός $(\alpha + 2\beta + 1)^2$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός α ειναι περιττός.

3.90 Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί α και β. Αν οι αριθμοί β και $\alpha^2 + \beta^2$ είναι περιττοί, να αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι άρτιος.

3.91 Με ένα αντιπαράδειγμα να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ισχυρισμοί δεν είναι αληθείς.

α) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι:

$$\alpha > \frac{1}{\alpha}$$

β) Για κάθε $\alpha < 5$ ισχύει ότι:

$$\alpha^2 < 25$$

γ) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha < 5$ και $\beta < 10$, ισχύει ότι $\alpha\beta < 50$.

δ) Για κάθε $\alpha > 6$ και $\beta > 2$ ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta} > 3$$