5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ορισμός αριθμητικής προόδου

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Παραδείγματα:

1. Στην ακολουθία $1, 3, 5, 7, \ldots$ των περιττών αριθμών, κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2$$

   Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\mathbf{2}$**.

2. Στην ακολουθία $15, 10, 5, 0, -5, -10, \ldots$ κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού -5. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 5 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5$$

   Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\mathbf{-5}$**.

Σύμφωνα με τον ορισμό, τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.

Έτσι, για μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά ω ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$$

- Η διαφορά δύο οποιωνδήποτε **διαδοχικών όρων** μιας αριθμητικής προόδου είναι ίση με ω.
- Για τους *όρους* μιας αριθμητικής προόδου ισχύουν τα εξής:
  - αν $\omega > 0$ τότε οι όροι της **μεγαλώνουν**,
  - αν $\omega < 0$ τότε οι όροι της **μικραίνουν**,
  - αν $\omega = 0$ τότε όλοι οι όροι της είναι **ίσοι** (*σταθερή* αριθμητική πρόοδος).

Γενικός (ν-οστός) όρος αριθμητικής προόδου

Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

Απόδειξη:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega$$

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1} + (\nu - 1)\omega \iff$$

$$\iff \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

■

Διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \quad \kappa\alpha\iota \quad \gamma - \beta = \omega$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \iff$$

$$2\beta = \alpha + \gamma \iff$$

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Αντίστροφα:

Αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει ότι $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ τότε έχουμε:

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \iff$$

$$2\beta = \alpha + \gamma \iff$$

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

■

Αριθμητικός μέσος

Ο αριθμός $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ λέγεται **αριθμητικός μέσος** των αριθμών α και γ.

- Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε ο αριθμός β είναι ο αριθμητικός μέσος των α και γ.
- Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι ο αριθμός:

$$\mu = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}{\nu}$$

Τύποι αθροίσματος ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Έστω (α_ν) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω. Το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων της δίνεται από τον τύπο:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$$

Αν στον παραπάνω τύπο αντικαταστήσουμε το α_ν με τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, προκύπτει ότι:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\,[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$$