Τράπεζα Θεμάτων

Άλγεβρα - Α' Λυκείου

Θέμα 12630

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1, 1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 12630

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία έχει κλίση $\alpha = -2$, οπότε η εξίσωσή της γίνεται $y = -2x + \beta$. Η ευθεία διέρχεται από τη σημείο (1, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή: $1 = -2 \cdot 1 + \beta \;\Leftrightarrow\; \beta = 3$.

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -2x + 3$.

β) Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, 3), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε:

$$y = -2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

γ) Παίρνουμε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία (1, 1) και (0, 3) και χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Θέμα 38203

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 25 = 0$.

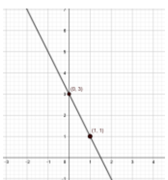
(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 36 \leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

(Μονάδες 9)



Απάντηση Θέματος 38203

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$x^2-25=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5)=0 \Leftrightarrow (x-5)=0$ ή $(x+5)=0 \Leftrightarrow x=5$ ή $x=-5$.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-36 είναι $x=-6,\ x=6$. Στον παρακάτω πίνακα έχουμε το πρόσημο του τριωνύμου:

x	-∞ -6 6 +∞		
x^2-36	+	−	+

Άρα η ανίσωση $x^2-36\leq 0$ αληθεύει για $x\ \in[-6,6]$.

γ) Παρατηρούμε ότι $-5\ \in[-6,6]$ και $5\ \in[-6,6]$, άρα οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

Θέμα 37817

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=x^4+\frac{x^4-4}{x^2-2}, x\neq\pm\sqrt{2}$..

α) Να δείξετε ότι $A=x^4+x^2+2$.

(Μονάδες 15)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A>0$ για κάθε $x\neq\pm\sqrt{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

(Μονάδες 5)

Απάντηση Θέματος 37817

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\neq\pm\sqrt{2}$ έχουμε:

$$A=x^4+\frac{x^4-4}{x^2-2}=x^4+\frac{(x^2-2)(x^2+2)}{x^2-2}=x^4+(x^2+2)=x^4+x^2+2.$$

β)

i. Παρατηρούμε ότι $x^4\geq 0, x^2\geq 0$ και $2>0$, άρα $x^4+x^2+2>0$, δηλαδή $A>0$.

ii. Εφόσον $x^4\geq 0, x^2\geq 0$, για $x=0$ η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της που είναι ίση με 2.

Θέμα 37202

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 37202

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1,\ \beta = -5,\ \gamma = 6$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{pmatrix}$$

Οπότε:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

β)

iii. Πρέπει:

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 2 \neq 0\ \kappa\alpha\iota\ x - 3 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 2\ \kappa\alpha\iota\ x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = R - (2,3)$.

iv. Ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται:

$$f(x = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}.$$

Θέμα 37201

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = (x-1) + (y-3)$με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 37201

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$1 < x < 4 \Leftrightarrow 1 < x \;\kappa\alpha\iota\; x < 4 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \;\kappa\alpha\iota\; x - 4 < 0$$

Άρα $(x - 1) = x - 1$

Ισχύει ακόμα:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow 2 < y \;\kappa\alpha\iota\; y < 3 \Leftrightarrow y - 2 > 0 \;\kappa\alpha\iota\; y - 3 < 0$$

Άρα $(y - 3) = -(y - 3) = 3 - y$

Τότε:

$$A = (x - 1) + (y - 3) = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$$

β) Είναι $1 < x < 4$ (1) και:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 < -y + 2 < -2 + 2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1), (2) και βρίσκουμε:

$$1 - 1 < x - y + 2 < 4 + 0 \Leftrightarrow 0 < x - y + 2 < 4$$

Άρα $0 < A < 4$

Θέμα 37200

ΘΕΜΑ 2

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $(x + 1) < 2$,

α)Να δείξετε ότι $x \in (-3\;,\;1)$

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{(x+3)+(x-1)}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 37200

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$(x + 1) < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 1 < 2 \Leftrightarrow$$

$$-2 - 1 < x + 1 - 1 < 2 - 1 \Leftrightarrow -3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-3\;,\;1)$$

β) Από το ερώτημα α) ισχύει ότι:

$$-3 < x < 1 \Leftrightarrow -3 < x \ \text{και} \ x < 1 \Leftrightarrow$$
$$x + 3 > 0 \ \text{και} \ x - 1 < 0$$

Άρα:

$$(x + 3) = x + 3 \ \text{και} \ (x - 1) = -(x - 1) = 1 - x$$

Τότε:

$$K = \frac{(x + 3) + (x - 1)}{4} = \frac{x + 3 + 1 - x}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Θέμα 37199

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι: $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 37199

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A - B = \left(\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^3 - \left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right)^2 = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

β) Ισχύει ότι:

$1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 1 < \sqrt[3]{2}$. (1)

Από το α) ερώτημα, $A - B = 4 > 0$, οπότε

$$A > B, \text{ δηλαδή}$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^6 > \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 \text{ και τελικά}$$
$$\sqrt{2} > \sqrt[3]{2}. \qquad (2)$$

Άρα από (1) και (2) έχουμε: $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

Θέμα 37198

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 37198

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (2 \;, \rightleftarrows \; +\infty)$

β) Για $x = 4$, είναι:

$$B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

Τότε:

$$B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16 = 2^4 = B^4$$

Θέμα 37197

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = -3$ να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 37197

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$1-x \geq 0 \ και \ x^4 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \ και \ x \in R \Leftrightarrow x \leq 1 \ και \ x \in R \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty\ ,\ 1)$

β) Για $x=-3$, είναι:

$$A = \sqrt{1-(-3)} - \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt{1+3} - \sqrt[4]{3^4} = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$$

Τότε:

$A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0.$

Θέμα 37196

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 37196

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$x^2+4 \geq 0 \ και \ x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in R \ και \ x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4\ ,+\infty)$

β) Για $x=4$ είναι:

$A=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{16+4}-\sqrt{0}=\sqrt{20}.$

Τότε:

$A^2-A=(\sqrt{20})^2-\sqrt{20}=20-\sqrt{20}=20-\sqrt{4\cdot 5}=$
$20-\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=20-2\cdot\sqrt{5}=2\cdot(10-\sqrt{5}).$

Θέμα 37195

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 37195

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$x-4\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ 6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4\ \kappa\alpha\iota\ -x\geq -6 \Leftrightarrow x\geq 4\ \kappa\alpha\iota\ x\leq 6 \Leftrightarrow 4\leq x\leq 6 \Leftrightarrow$
$x\in[4\,,6]$

β) Για $x=5$ είναι:

$A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=1+1=2$, επομένως

$A^2+A-6=2^2+2-6=4+2-6=0$.

Θέμα 37193

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 37193

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει

$$x-4\geq\ \ \kappa\alpha\iota\ x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4\ \kappa\alpha\iota\ x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq 4 \Leftrightarrow x\in(4\ ,\ +\infty)$$

β) Είναι

$A=(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})=(\sqrt{x-4})^2-(\sqrt{x+1})^2=x-4-(x+1)=$
$x-4-x-1=-5$

Επομένως πράγματι η παράσταση Α είναι σταθερή, ανεξάρτητη του x.

Θέμα 37192

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$$\sqrt{2} \cong 1{,}41$$

$$\sqrt{3} \cong 1{,}73$$

$$\sqrt{5} \cong 2{,}24$$

$$\sqrt{7} \cong 2{,}64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\cdot \sqrt{20}+ \sqrt{80}}{\sqrt{45}- \sqrt{5}}$

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 37192

ΛΥΣΗ

α) Είναι

- $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot \sqrt{5} = 2\cdot \sqrt{5} = 2\cdot 2{,}24 = 4{,}48$
- $\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot \sqrt{5} = 3\cdot \sqrt{5} = 3\cdot 2{,}24 = 6{,}72$
- $\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5}\,\sqrt{16}\cdot \sqrt{5} = 4\cdot \sqrt{5} = 4\cdot 2{,}24 = 8{,}96$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{3\cdot \sqrt{20}+ \sqrt{80}}{\sqrt{45}- \sqrt{5}} = \frac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}- \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}- \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{2} = 5$$

Θέμα 37191

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

v. $(1-2x)<5$ (Μονάδες 9)

vi. $(1-2x)\geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 37191

ΛΥΣΗ

α)

vii. Είναι:

$$(1-2x)<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow -5-1<1-2x-1<5-1 \Leftrightarrow$$

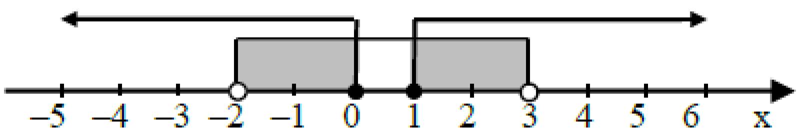
$$-6<-2x<4 \Leftrightarrow \frac{-6}{-2}>\frac{-2x}{-2}>\frac{4}{-2} \Leftrightarrow 3>x>-2 \Leftrightarrow -2<x<3$$

viii. Ισχύει ότι:

$$(1-2x)\geq 1 \Leftrightarrow 1-2x\leq -1 \text{ ή } 1-2x\geq 1 \Leftrightarrow -2x\leq -2 \text{ ή } -2x\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2x}{-2}\geq\frac{-2}{-2} \text{ ή } \frac{-2x}{-2}\leq\frac{0}{-2} \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ ή } x\leq 0$$

Οι λύσεις των παραπάνω ανισώσεων παριστάνονται στον πίνακα των πραγματικών αριθμών με το παρακάτω σχήμα:



β) Από τις λύσεις των δύο ανισώσεων και από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι οι κοινές τους λύσεις είναι:

$-2<x\leq 0$ ή $1\leq x<3 \Leftrightarrow x\in(-2\ ,\ 0)\cup(1\ ,\ 3)$

Επομένως οι ακέραιες αντίστοιχα κοινές λύσεις είναι:

$$x=-1\ ,\ x=0\ ,\ x=1\ , x=2$$

Θέμα 37185

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα xπου ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x) = x^2 + 4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 37185

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει: $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$.

Ο τύπος της συνάρτησης f μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4} = \frac{x(x^2 - 16)}{x - 4} = \frac{x(x-4)(x+4)}{x - 4} = x(x+4) = x^2 + 4x.$$

β) Είναι:

$$f(x) = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x - 32$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = -32$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144 > 0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 12}{2} = \begin{pmatrix} \frac{-4+12}{2} & = 4 \\ \frac{-4-12}{2} & = -8 \end{pmatrix}$$

Επειδή η f ορίζεται στο $A = R - (4)$, δεκτή είναι μόνο η τιμή $x = -8$.

Θέμα 37183

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$,με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \; \kappa\alpha\iota \; f(1) = 3.$$

α) Να αποδείξετε ότι α=-2 και β = 5.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x \; \kappa\alpha\iota \; y'y$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 37183

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$f(0) = 5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \quad (1)$$

Ακόμα:

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow a \cdot 1 + \beta = 3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$a + 5 = 3 \Leftrightarrow a = -2.$$

Οπότε: $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

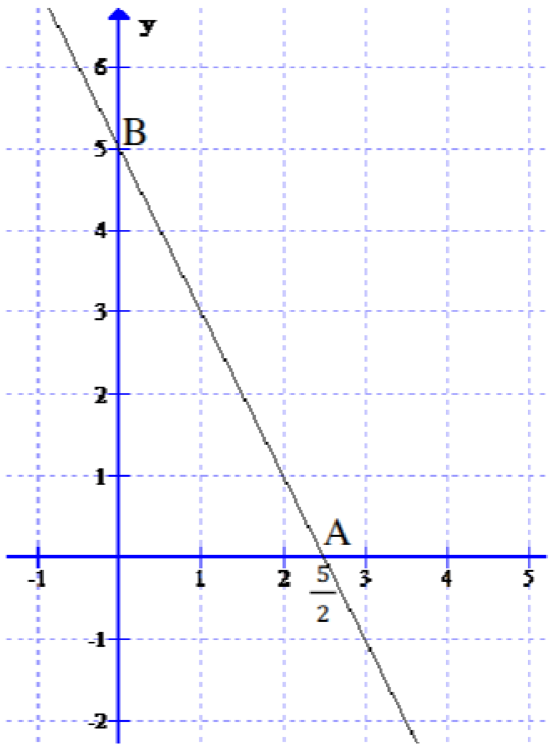
β) Ο τύπος της f γίνεται: $f(x) = -2x + 5$.

Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Επίσης έχουμε: $f(0) = 0 + 5 = 5$,οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,5)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α και Β, οπότε είναι:



Θέμα 37182

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);

(Μονάδες 5)

Απάντηση Θέματος 37182

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο: $x^2 - x - 2$ έχει α=1 , β = -1, γ= -2 και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

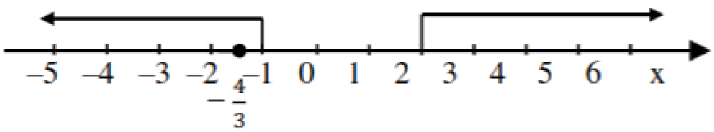
β) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

γ)



Το $-\frac{4}{3}$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

Θέμα 37181

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$ με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 37181

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$ έχει λύση το 1, ισχύει ότι:

$1^2 - (\lambda - 1) \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8.$

β) Για $\lambda = 2$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - (2-1)x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0.$$

Η διακρίνουσα, με α=1, β=-1, γ=6, γίνεται:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες για $\lambda = 2$.

Θέμα 37179

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2a^2 + \beta^2 \ \kappa\alpha\iota \ \Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K \geq \Lambda$,για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 37179

Λύση

α) Ισχύουν:

$$K \geq \Lambda \Leftrightarrow$$
$$K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$2a^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 + a^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0,$$

η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.Άρα $K \geq \Lambda$,για κάθε τιμή των α, β.

β) Εκτελώντας τις πράξεις όπως στο α ερώτημα έχουμε ότι:

$$K = \Lambda \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$a^2 = 0 \ \kappa\alpha\iota \ (a - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$a = 0 \ \kappa\alpha\iota \ \alpha = \beta.$$

Οπότε $K = \Lambda$αν και μόνο αν $\alpha = \beta = 0$.

Θέμα 37178

ΘΕΜΑ 2

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x + 1$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

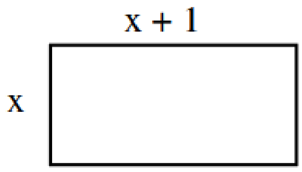
β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 37178

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι:



$\Pi = 2(x+1) + 2x = 4x + 2$,με $x > 0$

και το εμβαδόν του Ε είναι:

$E = x(x+1) = x^2 + x, \mu\varepsilon\ \ x > 0.$

β) Ισχύει ότι:

$$E = 90 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + x = 90 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + x - 90 = 0.$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 90$ έχει $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -90$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361 > 0$

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 90 = 0$είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$
$$= \left(\begin{array}{l} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10 \end{array} \right)$$

Η λύση $x = -10$ απορρίπτεται αφού $x > 0$.

Συνεπώς οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x = 9$ μέτρα και $x + 1 = 10$ μέτρα.

Θέμα 37175

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \left(\begin{array}{ll} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{array} \right)$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$,ώστε $f(x) = 9$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 37175

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(-5) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13\ \ \kappa\alpha\iota$$
$$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13.$$

Άρα $f(-5) = f(4)$.

β) Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 8 - x = 9 \Leftrightarrow$$
$$-x = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow$$
$$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Θέμα 37171

ΘΕΜΑ 2

Αν α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 37171

Λύση

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta(\alpha + \beta) = -30 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta \cdot 2 = -30 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta = -15$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση μπορεί να είναι της μορφής:

$x^2 - Sx + P = 0$με $S = \alpha + \beta = 2 \ \kappa\alpha\iota \ P = \alpha\beta = -15$.

Τελικά, μία ζητούμενη εξίσωση είναι η: $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 15$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm 8}{2} = 5$ ή -3.

Άρα είναι $\alpha = 5 \ \kappa\alpha\iota \ \beta = -3$ ή $\alpha = -3 \ \kappa\alpha\iota \ \beta = 5$.

Θέμα 37170

ΘΕΜΑ 2

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (°C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \qquad \acute{o}\tau\alpha\nu \ \ 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με $290^{o}C$.

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440^{o}C$;

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 37170

α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης θέτουμε στη δοθείσα σχέση x=30 και βρίσκουμε:

$$T = 15 + 25 \cdot 30$$
$$T = 15 + 750$$
$$T = 765^{o}C.$$

β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι ίση με $290^{o}C$ θέτουμε στη δοθείσα σχέση Τ = 290 και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$290 = 15 + 25 \cdot x$$
$$275 = 25x$$
$$x = 11 χιλιόμετρα.$$

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440^{o}C$ λύνουμε την ανίσωση:

$$T > 440 \Leftrightarrow$$
$$15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow$$
$$25 \cdot x > 425 \Leftrightarrow x > 17 \ χιλιόμετρα.$$

Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των $440^{o}C$ σε βάθος άνω των 17 χιλιομέτρων.

Θέμα 37169

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :

$$\Delta = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2.$$

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 37169

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$ έχει συντελεστές $a=-1, \beta=\sqrt{3}-1, \gamma=\sqrt{3}$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(\sqrt{3}-1\right)^2-4\cdot(-1)\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1^2+4\sqrt{3}=\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1^2$$

$$=\left(\sqrt{3}+1\right)^2>0.$$

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2\cdot(-1)}=\left(\begin{array}{ll}\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}{-2} & =-1\\ \dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}{-2} & =\sqrt{3}\end{array}\right)$$

Επομένως η παραγοντοποίηση γίνεται:

$$-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}=-(x-(-1))\left(x-\sqrt{3}\right)=-(x+1)\left(x-\sqrt{3}\right).$$

Θέμα 37168

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις : $-x^2+5x-6<0 \quad (1), \quad x^2-16\leq 0 \quad (2).$

α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 37168

Λύση

α) Το τριώνυμο $-x^2+5x-6$ έχει $\alpha=-1, \beta=5, \gamma=-6$ και διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot(-1)\cdot(-6)=25-24=1>0.$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=2 \;\kappa\alpha\iota\; 3.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

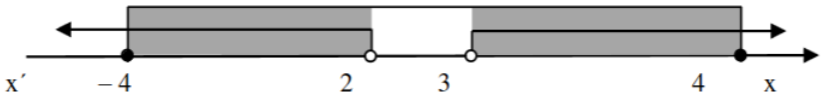
Επομένως ισχύει:

$-x^2+5x-6<0 \Leftrightarrow (x<2 \text{ ή } x>3) \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty).$

Την ανίσωση $x^2-16\leq 0$ θα την λύσουμε με συντομότερο τρόπο. Ισχύει ότι:

$x^2 - 16 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le 16 \Leftrightarrow \ \sqrt{x^2} \le \ \sqrt{16} \Leftrightarrow (x) \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in (-4,4)$.

β) Αναπαριστούμε τις λύσεις των παραπάνω εξισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-4 \le x < 2 \text{ ή } 3 < x \le 4 \Leftrightarrow x \in (-4,2) \cup (3,4)$$

Θέμα 36899

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4$.

(Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \ge 16$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 36899

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2 + \alpha \cdot \frac{4}{\alpha} \ge 4\alpha$, οπότε

$\alpha^2 + 4 \ge 4\alpha$, δηλαδή

$\alpha^2 - 4\alpha + 4 \ge 0$ και τελικά

$(\alpha - 2)^2 \ge 0$ που ισχύει.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ και ομοίως $\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δυο ανισότητες προκύπτει: $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

Θέμα 36898

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha, \beta \in R - (0)$, να δείξετε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 2$ (1).

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 36898

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 2$, οπότε

$\frac{(\alpha)}{(\beta)} + \frac{(\beta)}{(\alpha)} \geq 2$, δηλαδή

$\frac{(\alpha)^2+(\beta)^2}{(\alpha)\cdot(\beta)} \geq 2$, οπότε

$(\alpha)^2 + (\beta)^2 \geq 2(\alpha)\cdot(\beta)$, συνεπώς

$(\alpha)^2 + (\beta)^2 - 2(\alpha)\cdot(\beta) \geq 0$ και τελικά

$\left((\alpha) - (\beta)\right)^2 \geq 0$ που ισχύει.

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $(\alpha) - (\beta) = 0 \Leftrightarrow (\alpha) = (\beta)$, δηλαδή αν και μόνο αν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ (δηλαδή όταν οι αριθμοί α, β είναι ίσοι ή αντίθετοι).

Θέμα 36897

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,...,\nu$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45 .

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 36897

ΛΥΣΗ

α) Η ακολουθία των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,...,\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$ και $\alpha_\nu = \nu$. Άρα το άθροισμα των ν πρώτων όρων αυτής, είναι:

$S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$, δηλαδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot\left(1+\nu\right)$.

β) Ψάχνουμε το πλήθος ν των όρων που έχουν άθροισμα 45, δηλαδή το ν ώστε $S_\nu = 45$, δηλαδή $\frac{\nu}{2}\cdot\left(1+\nu\right) = 45$, οπότε $\nu\cdot\left(\nu+1\right) = 90$. Οι δυο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που έχουν γινόμενο ίσο με 90 είναι οι αριθμοί 9 και 10 (δηλαδή $\nu = 9$ και $\nu + 1 = 10$). Άρα το άθροισμα των 9 πρώτων φυσικών αριθμών είναι ίσο με 45 .

Θέμα 36896

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in R$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 36896

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda = 0$, η εξίσωση γίνεται: $-1x = -1$.

Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται: $0x = 0$.

Για $\lambda = 3$, η εξίσωση γίνεται: $2x = 8$.

β)

i. Η (1) έχει μια και μοναδική λύση αν και μόνο αν $\lambda - 1 \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq 1$.

ii. Για $\lambda \neq 1$, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι: $x = \frac{\lambda^2-1}{\lambda-1} = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1} = \lambda + 1$. Η λύση ισούται με 4, οπότε $\lambda + 1 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Άρα για $\lambda = 3$ η λύση της εξίσωσης ισούται με 4.

Θέμα 36895

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $(2x + 4) = 10$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $(x - 5) > 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 36895

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$(2x + 4) = 10$, οπότε

$2x + 4 = 10$ ή $2x + 4 = -10$, δηλαδή

$2x = 6$ ή $2x = -14$ και τελικά

$x = 3$ ή $x = -7$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$(x - 5) > 1$, οπότε

$x - 5 < -1$ ή $x - 5 > 1$ και τελικά

$x < 4$ ή $x > 6$

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος, διότι και οι δυο είναι αριθμοί μικρότεροι του 4.

Θέμα 36894

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $(\alpha) + \left(\frac{1}{\alpha}\right) \geq 2$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 36894

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow}$$

$\alpha^2 + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \geq -2\alpha$, δηλαδή

$\alpha^2 + 1 + 2\alpha \geq 0$, οπότε

$(\alpha + 1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$(\alpha) + \left(\frac{1}{\alpha}\right) \geq 2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow}$$

$-\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2$, οπότε

$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$, που από το α) ερώτημα ισχύει για κάθε $\alpha < 0$.

Θέμα 36893

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $(2x - 1) \leq 7$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $(x - 1) > 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 36893

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$(2x-1) \leq 7 \Leftrightarrow$

$-7 \leq 2x - 1 \leq 7$, οπότε

$-6 \leq 2x \leq 8$ και τελικά

$-3 \leq x \leq 4$.

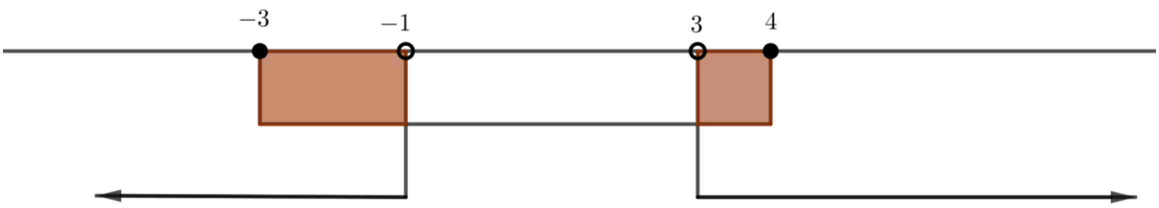
β) Έχουμε ισοδύναμα:

$(x-1) > 2$, οπότε

$x - 1 < -2$ ή $x - 1 > 2$ και τελικά

$x < -1$ ή $x > 3$

γ) Στον άξονα των πραγματικών αριθμών βρίσκουμε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει: $x \in (-3,-1) \cup (3,4)$.

Θέμα 36892

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{(x)}{3} - \frac{(x)+4}{5} = \frac{2}{3}$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 36892

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{(x)}{3} - \frac{(x)+4}{5} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ 5|x| - 3(|x| + 4) = 10$$

$$\Leftrightarrow\ 5|x| - 3|x| - 12 = 10$$

$$\Leftrightarrow\ 2|x| = 22$$

$$\Leftrightarrow \ |x| = 11$$

$$\Leftrightarrow \ x = -11 \text{ ή } \ x = 11$$

β) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot \ (-1) \cdot \ 3 = 16 > 0$ και ρίζες τις:

$$x_1 = \frac{-\beta - \ \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \ = \frac{-2-4}{2} \cdot \ (-1) = 3$$

και

$$x_2 = \frac{-\beta + \ \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \ = \frac{-2+4}{2} \cdot \ (-1) = -1$$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμου, βλέπουμε ότι η ανίσωση $-x^2 + 2x + 3 \leq \ 0$ αληθεύει για $x \leq \ -1$ ή $x \geq \ 3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος, διότι $-11 \in \ (-\infty, 1]$ και $11 \in \ [3, +\infty)$.

Θέμα 36891

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με θετικό λόγο λ, για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι ο ν −οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 36891

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 = 1 \\ \alpha_5 = 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 4 \end{pmatrix} \overset{(:)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda^2 = 4 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1 \end{pmatrix} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda = 2 \\ \alpha_1 = \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

β) Ο ν −οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, οπότε $\alpha_\nu = \frac{1}{4} \cdot 2^{\nu-1} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{\nu-1} = \frac{2^{\nu-1}}{2^2} = 2^{\nu-3}$.

Θέμα 36890

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $(x-2)=3$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 36890

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$(x-2)=3$, οπότε

$x-2=-3$ ή $x-2=3$ και τελικά

$x=-1$ και $x=5$.

β) Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1=-1$ και $x_2=5$ είναι η $x^2-Sx+P=0$, όπου $S=x_1+x_2=-1+5=4$ και $P=x_1x_2=(-1)\cdot 5=-5$. Άρα $x^2-4x-5=0$.

Θέμα 36889

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in R$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5)+f(0)+f(3)$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 36889

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$f(-5)=(-5)^2+2\cdot(-5)-15=25-10-15=0$,

$f(0)=0^2+2\cdot 0-15=-15$,

$f(3)=3^2+2\cdot 3-15=9+6-15=0$.

Άρα $f(-5)+f(0)+f(3)=0-15+0=-15$.

β) Για $x=0$, έχουμε από το α) ερώτημα $f(0)=-15$. Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $(0,-15)$.

Από το α) ερώτημα παρατηρούμε ότι $f(-5)=0$ και $f(3)=0$. Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στα σημεία $(-5,0)$ και $(3,0)$.

Θέμα 36888

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 36888

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$3x - 1 < x + 9$, οπότε

$3x - x < 1 + 9$, δηλαδή

$2x < 10$ και τελικά

$x < 5$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow}$$

$4 - x \leq 2x + 1$, δηλαδή

$3x \geq 3$ και τελικά

$x \geq 1$.

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, βλέπουμε ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) είναι οι πραγματικοί αριθμοί x για του οποίους ισχύει $x \in (1,5)$.

Θέμα 36887

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 36887

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$ και ρίζες τις

$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3)-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ και

$x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3)+1}{2 \cdot 2} = 1.$

β) Από τον παρακάτω πίνακα προσήμου του τριωνύμου $2x^2 - 3x + 1$, παρατηρούμε ότι οι τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$, είναι $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ) Ο αριθμός $\frac{3}{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$, διότι $\frac{3}{2} \notin \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ αφού $\frac{3}{2} > 1$.

Για τον αριθμό $\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχουμε:

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4} < \frac{3}{4} < 1$, που ισχύει.

Άρα ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύση της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

Θέμα 36886

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $(x - 5) < 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $(2 - 3x) > 5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 36886

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$(x-5)<2$, οπότε

$-2<x-5<2$ και τελικά

$3<x<7$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

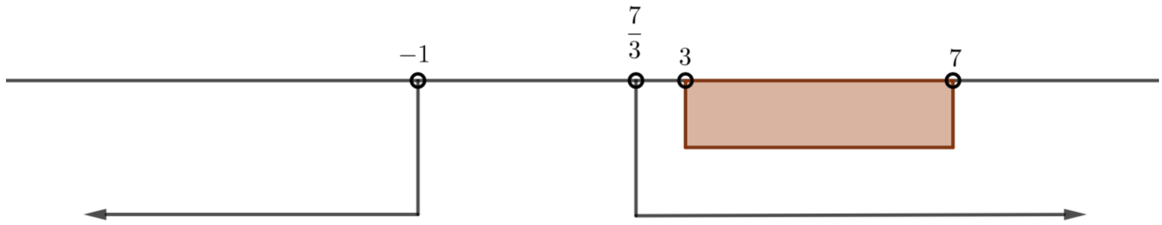
$(2-3x)>5$, οπότε

$2-3x<-5$ ή $2-3x>5$, δηλαδή

$3x>7$ ή $3x<-3$ και τελικά

$x>\frac{7}{3}$ ή $x<-1$.

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω δυο ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι πραγματικοί αριθμοί $x\in(3,7)$.

Θέμα 36885

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 36885

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A=R-(2)$.

β)

i. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 2} = 0 \overset{x \neq 2}{\Leftrightarrow}$$

$x^2 - 1 = 0$, οπότε

$x^2 = 1$ και τελικά

$x = -1$ ή $x = 1$.

Άρα για $x = -1$ και $x = 1$, $f(x) = 0$.

ii. Έχουμε:

$f(0) = \frac{0^2-1}{0-2} = \frac{1}{2}$ και

$f(3) = \frac{3^2-1}{3-2} = 8$.

γ) Από το βi ερώτημα έχουμε $f(-1) = 0$ και $f(1) = 0$. Από το βii ερώτημα έχουμε $f(0) = \frac{1}{2}$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$ και τον $y'y$ άξονα στο σημείο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Θέμα 36884

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 36884

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$, οπότε

$x - 1 = 0$ και $y + 3 = 0$, δηλαδή

$x = 1$ και $y = -3$.

Θέμα 36778

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 36778

Λύση

α) Ισχύει ότι:

$$K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{(x+2)}{x+2} - \frac{(x-3)}{x-3}.$$

Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{pmatrix} x+2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \neq -2 \\ x \neq 3 \end{pmatrix}.$$

Οπότε πρέπει $x \neq -2{,}3$.

β) Ισχύει ότι: $-2 < x < 3$, οπότε $x + 2 > 0 \; και \; x - 3 < 0$.

Άρα $(x+2) = x + 2 \;\; και \;\; (x-3) = -(x-3)$.

Οπότε $K = \frac{(x+2)}{x+2} - \frac{(x-3)}{x-3} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{-(x-3)}{x-3} = 1 + 1 = 2$, που είναι ανεξάρτητη του x.

Θέμα 36777

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$(x-3) \leq 2$ και $(y-6) \leq 4$.

α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5 \; και \; 2 \leq y \leq 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 36777

Λύση

α) Ισχύει ότι:

$$(x-3) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Leftrightarrow -2+3 \leq x \leq 2+3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

$$(y-6) \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq y-6 \leq 4 \Leftrightarrow -4+6 \leq y \leq 4+6 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 10.$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y είναι $\Pi = 4x + 2y$.

Από το α) ερώτημα έχουμε:

$$1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 \leq 4x \leq 5 \cdot 4 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \leq 20 \qquad (1)$$

$$2 \leq y \leq 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 10 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 20 \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε:

$$4+4 \leq 4x+2y \leq 20+20 \Leftrightarrow 8 \leq \Pi \leq 40.$$

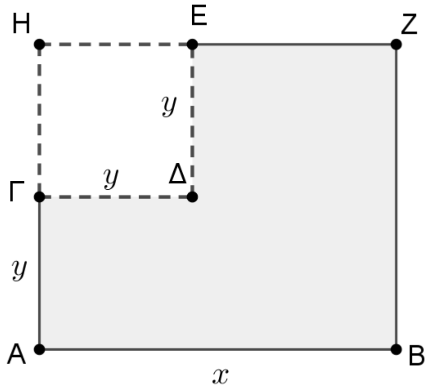
Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος είναι 8, όταν $x = 1, y = 2$ και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος είναι 40, όταν $x = 5, y = 10$.

Θέμα 35549

ΘΕΜΑ 2

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 35549

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος του ΕΖΒΑΓΔ είναι:

$$\Pi = AB + BZ + ZE + E\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma A =$$

$$x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y$$

β) Είναι:

$$5 < x < 8 \Leftrightarrow 2\cdot 5 < 2x < 2\cdot 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16 (1)$$
$$1 < y < 2 \Leftrightarrow 4\cdot 1 < 4y < 4\cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8 (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$$

Θέμα 35415

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A} = |x-1| - |x-2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $\mathrm{A} = 2x - 3$.

(Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 35415

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \ \kappa\alpha\iota\ x < 2) \Leftrightarrow (0 < x-1 \ \kappa\alpha\iota\ x-2 < 0)$$

Τότε:

$$|x-1| = x-1 \text{ και } |x-2| = -(x-2) = 2-x$$

Άρα:

$$\mathrm{A} = |x-1| - |x-2| = x-1-(2-x) = x-1-2+x = 2x-3.$$

β) Για $x < 1$ είναι:

$$|x-1| = -(x-1) = 1-x \text{ και } |x-2| = -(x-2) = 2-x$$

Επομένως:

$$\mathrm{A} = |x-1| - |x-2| = 1-x-(2-x) = 1-x-2+x = -1, \text{ σταθερή.}$$

Θέμα 35413

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 35413

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$\begin{aligned}&x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0\\&\Leftrightarrow (x-1\neq 0\ \kappa\alpha\iota\ x+1\neq 0)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow (x\neq 1\ \kappa\alpha\iota\ x\neq -1)\end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=R-(-1,1)$

β) Το σημείο $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}&f(\alpha)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \alpha^2-1=8\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow \alpha^2-9=0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow (\alpha-3)(\alpha+3)=0\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow (\alpha-3=0\ \text{ή}\ \alpha+3=0)\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow (\alpha=3\ \text{ή}\ \alpha=-3)\end{aligned}$$

Θέμα 35412

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $(x-5)$ και $(x-10)$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{(x-5)}{x-5}+\frac{(x-10)}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 35412

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$5<x<10\Leftrightarrow (5<x\kappa\alpha\iota x<10)\Leftrightarrow (0<x-5\kappa\alpha\iota x-10<0)$$

Τότε:

$$(x-5)=x-5 \text{ και } (x-10)=-(x-10)$$

β) Είναι:

$$A = \frac{(x-5)}{x-5} + \frac{(x-10)}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1 + (-1) = 0$$

Θέμα 35408

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν).

i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 35408

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί A, B, Γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$B = \frac{A + \Gamma}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{1 + x + 8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 4) = 9 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8 = x + 9 \Leftrightarrow x = 1$$

β)

i. Για $x = 1$ είναι $A = 1$, $B = 5$ και $\Gamma = 9$. Τότε:

$$\omega = B - A = 5 - 1 = 4$$

ii. Είναι:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20 - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{20} = 1 + 19 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{20} = 1 + 76 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 77$$

Θέμα 35404

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $(y - 3) < 1$.

(Μονάδες 15)

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 35404

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$(y-3)<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y<1+3 \Leftrightarrow 2<y<4$$

β) Έχουμε τις σχέσεις

$$1<x<3$$
$$2<y<4$$

τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη και βρίσκουμε:

$$1+2<x+y<3+4 \Leftrightarrow 3<x+y<7$$

Θέμα 35405

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 35405

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-x-6 έχει $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=-6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm \sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 5}{2}=\left(\begin{array}{l}\frac{1+5}{2}=3\\ \frac{1-5}{2}=-2\end{array}\right)$$

Πρέπει:

$$x^2-x-6\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq -2 \kappa\alpha\iota x\neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=R-(-2{,}3)$.

β) Είναι:

$$f(2)=\frac{2+2}{2^2-2-6}=\frac{4}{4-2-6}=\frac{4}{-4}=-1 \text{ και}$$

$$f(4)=\frac{4+2}{4^2-4-6}=\frac{6}{16-4-6}=\frac{6}{6}=1$$

Άρα:

$$f(2)+f(4)=-1+1=0$$

Θέμα 35382

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in R$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 35382

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \left(\begin{array}{l} \frac{3+5}{4} = 2 \\ \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Τότε:

$$2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x-2) = (2x+1)(x-2)$$

β) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση K πρέπει ο παρονομαστής της να είναι διαφορετικός του μηδενός. Δηλαδή:

$$2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x + 1 \neq 0 \kappa\alpha\iota x - 2 \neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x \neq -\frac{1}{2} \kappa\alpha\iota x \neq 2\right)$$

γ) Για $x \neq -\frac{1}{2}$ και $x \neq 2$ ισχύει ότι:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x-2)^2}{(2x+1)(x-2)} = \frac{x-2}{2x+1}$$

Θέμα 35375

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 35375

Λύση

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \alpha_1 + (10-1)\omega - (\alpha_1 + (6-1)\omega) = 24 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 5\omega = 24 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6
\end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega = 19 + 19 \cdot 6 = 19 + 114 = 133$$

γ) Ισχύει ότι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10(19 + 133) = 10 \cdot 152 = 1520$$

Θέμα 35299

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 35299

Λύση

α) Από τα δεδομένα της άσκησης είναι $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$. Τότε:

$$\begin{aligned}
&\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + (\nu - 1)20 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \alpha_\nu = 100 + 20\nu
\end{aligned}$$

β) Η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{10} = 100 + 20 \cdot 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 100 + 200 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 300 καθίσματα$$

γ) Το γυμναστήριο έχει συνολικά:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(120 + 300) = 5 \cdot 420 = 2100 καθίσματα$$

Θέμα 35298

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+4, x<0 \\ x-1, x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 35298

Λύση

α) Είναι:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2 \text{ και}$$

$$f(3) = 3 - 1 = 2$$

Άρα $f(-1) = f(3)$.

β) Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Θέμα 35205

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό xώστε οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 35205

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί x, $2x + 1$, $5x + 4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2x + 1)^2 = x \cdot (5x + 4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = -1 \text{ή} x = 1)$$

β)

i. Για $x = 1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$1,3,9$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{3}{1} = 3$.

ii. Για $x = -1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$-1, -1, -1$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{-1}{-1} = 1$.

Θέμα 35201

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$, $B(-1,4)$, να βρείτε τις τιμές των α,β.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 35201

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,6)$ αν και μόνο αν:

$$f(1) = 6 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta = 6 - \alpha (1)$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $B(-1,4)$ αν και μόνο αν:

$$f(-1)=4 \Leftrightarrow \alpha\cdot(-1)+\beta=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\alpha+\beta=4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow -\alpha+6-\alpha=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\alpha=1$ στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\beta=6-1 \Leftrightarrow \beta=5$$

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-5,0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0)=0+5=5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,5)$.

Θέμα 35143

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2=0$, $\alpha_4=4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega=2$ και $\alpha_1=-2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστος όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu=2\nu-4$, $\nu\in N^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 35143

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$\alpha_2=0 \Leftrightarrow \alpha_1+(2-1)\omega=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1+\omega=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1=-\omega(1)$$

και

$$\alpha_4=4 \Leftrightarrow \alpha_4+(4-1)\omega=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1+3\omega=4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow -\omega+3\omega=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\omega=4 \Leftrightarrow \omega=2$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = -2.$$

β) Ο ν-οστός όρος της αριθμητικής προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = -2 + (\nu - 1) \cdot 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 4$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\alpha_\nu = 98 \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51$$

Άρα ο 51^{ος} όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

Θέμα 35112

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = (3x - 6) + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$.

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$\frac{9x^2-16}{(3x-6)+2} = 3x + 4$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 35112

ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει ότι:

$x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0$.

Άρα $(3x - 6) = 3x - 6$.

Τότε:

$A = (3x - 6) + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$.

ii. Ισχύει ότι:

$x < 2 \Leftrightarrow 3x < 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0$.

Άρα $(3x - 6) = -(3x - 6) = 6 - 3x$.

Τότε:

$A = (3x - 6) + 2 = 6 - 3x + 2 = 8 - 3x.$

β) Για κάθε $x \geq 2$ είναι $(3x - 6) = 3x - 6$. Τότε:

$\frac{9x^2-16}{(3x-6)+2} = \frac{(3x)^2-4^2}{3x-6+2} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} = 3x + 4.$

Θέμα 35100

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2} = 0$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 35100

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$-2x^2 + 10x - 12 = 0 \overset{:(-2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Για $\alpha = 1$, $\beta = -5$ και $\gamma = 6$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left(\begin{array}{l} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{array} \right)$$

β) Πρέπει:

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Τότε ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 12 = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 ή x = 2)$$

Η ρίζα $x = 2$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = 3$.

Θέμα 35046

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2 \;\; και \;\; \alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 35046

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (25 - 1)\omega = \alpha_1 + (12 - 1)\omega + 39 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24\omega = 11\omega + 39 \Leftrightarrow$$

$$13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 152 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + (\nu - 1) \cdot 3 = 152 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 3\nu - 3 = 152 \Leftrightarrow$$

$$3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = 51$$

Άρα ο $51^{ος}$ όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

Θέμα 35044

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $(y - 2) < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{(y-1)+(y-3)}{2}$

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 35044

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$(y-2)<1$$ ␣ $$-1<y-2<1$$ ␣

␣ $$-1+2<y-2+2<1+2$$ ␣

␣ $$1<y<3$$ ␣ $$y\in(1{,}3)$$

β) Ισχύει ότι:

$$1<y<3$$ ␣

␣ $$(1<y\ \ και\ \ y<3)$$ ␣

␣ $$(0<y-1\ \ και\ \ y-3<0)$$

Άρα:

$$(y-1)=y-1\ \ και\ \ (y-3)=-(y-3)=3-y$$

Τότε:

$$K=\frac{(y-1)+\ (y-3)}{2}=\frac{y-1+3-y}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Θέμα 35043

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $(x-2)<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{(x+1)+(x-5)}{3}$

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 35043

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$(x-2)<3$$ ␣ $$-3<x-2<3$$ ␣

␣ $$-3+2<x-2+2<3+2$$ ␣

␣ $$-1<x<5$$

β) Ισχύει ότι:

$$-1<x<5$$ ␣

␣ $$(-1<x\ \ και\ \ x<5)$$ ␣

$$(0 < x + 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x - 5 < 0)$$

Άρα:

$$(x + 1) = x + 1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; (x - 5) = -(x - 5) = 5 - x$$

Τότε:

$$K = \frac{(x + 1) + (x - 5)}{3} = \frac{x + 1 + 5 - x}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Θέμα 35042

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x + 4,\;\; 2 - x,\;\; 6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ii. τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 6)

Απάντηση Θέματος 35042

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $x + 4,\; 2 - x,\; 6 - x$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2 - x)^2 = (6 - x) \cdot (x + 4)$$

$$4 - 4x + x^2 = 6x + 24 - x^2 - 4x$$

$$2x^2 - 6x - 20 = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} = \left(\begin{array}{l} \dfrac{3 + 7}{2} = 5 \\ \dfrac{3 - 7}{2} = -2 \end{array} \right)$$

β) Για $x = 5$:

$$\alpha_4 = 6 - x = 1,\;\; \alpha_3 = 2 - x = -3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha_2 = x + 4 = 9$$

i. Ο λόγος είναι $\lambda = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{1}{3}$

ii. Είναι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \lambda^{2-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9 = \alpha_1 \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -27$$

Θέμα 35041

ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = (2x - 3) - 2(3 - x)$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 35041

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$d(2x, 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow (2x - 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow (2x - 3) = -(2x - 3) \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$(\alpha) = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$$

Τότε από τη σχέση (1) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$(2x - 3) = -(2x - 3) \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

β) Επειδή ισχύει $x \leq \frac{3}{2}$ είναι $2x - 3 \leq 0$ και $3 - x > 0$. Τότε:

$$(2x - 3) = -(2x - 3) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; (3 - x) = 3 - x$$

Επομένως η παράσταση K γράφεται:

$$K = (2x - 3) - 2(3 - x) = -(2x - 3) - 2(3 - x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$$

Θέμα 35040

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \Lambda = 2\alpha(3-\beta), \;\; \acute{o}\pi o\upsilon \;\; \alpha, \beta \in R$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 35040

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3-\beta) =$$

$$= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - (6\alpha - 2\alpha\beta) =$$

$$= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$$

$$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά ισχύει ότι:

$$K \geq \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε τιμή των α, β.

γ) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\alpha + \beta)^2 = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; (\alpha - 3)^2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha - 3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = -\beta \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha = 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \beta = -3)$$

Θέμα 35038

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

Β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 35038

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 5 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ P = \alpha \cdot \beta = 4$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει $\alpha = 1,\ \beta = -5,\ \gamma = 4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{pmatrix} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{pmatrix}$$

Θέμα 35035

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12,\ x \in R$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 35035

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$ έχει $\alpha = 3, \beta = 9, \gamma = -12$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 81 + 144 = 225 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι:

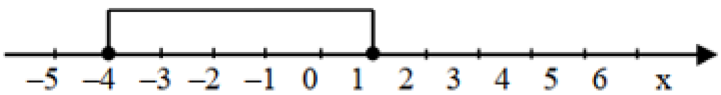
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{-9 \pm 15}{6} = \left(\begin{array}{l} \frac{-9+15}{6} = 1 \\ \frac{-9-15}{6} = -4 \end{array} \right)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x^2 + 9x - 12$		+	0	−	0	+	

Επομένως ισχύει:

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-4,1)$



β) Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης αν και μόνο αν:

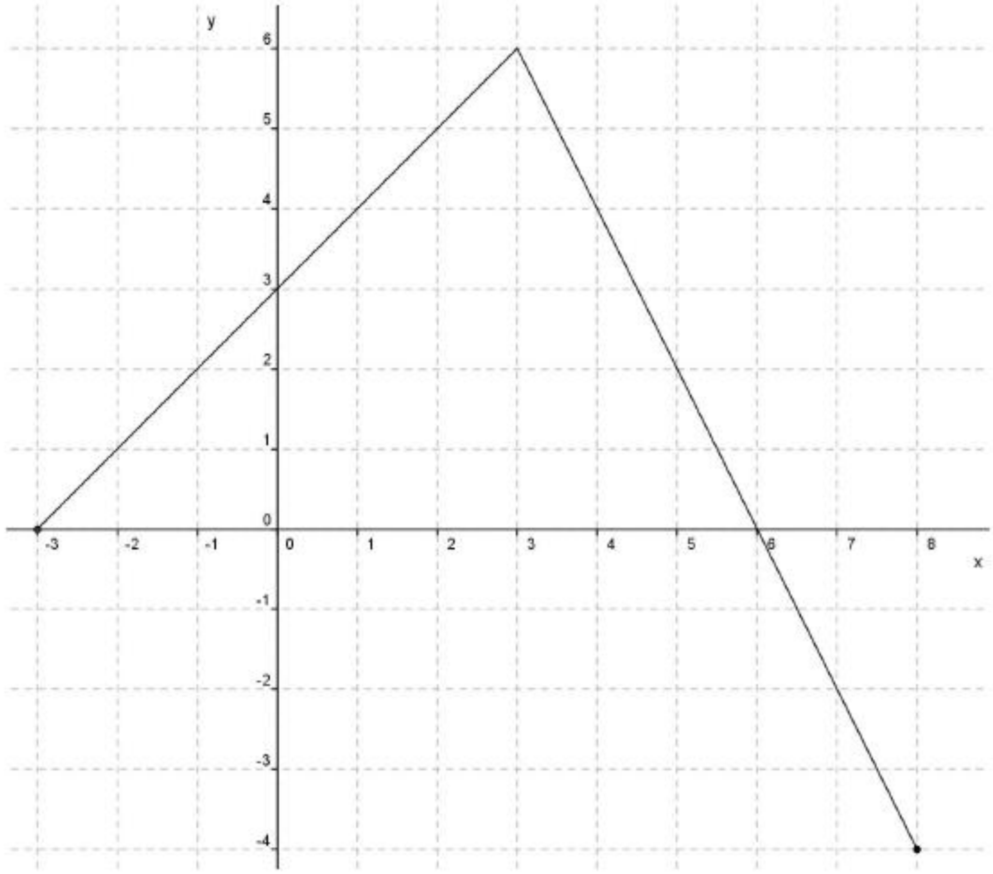
$-4 \leq \sqrt[3]{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \leq 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \leq 1^3 \Leftrightarrow 2 \leq 1, \textit{το οποίο δεν ισχύει.}$

Άρα ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης.

Θέμα 35034

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

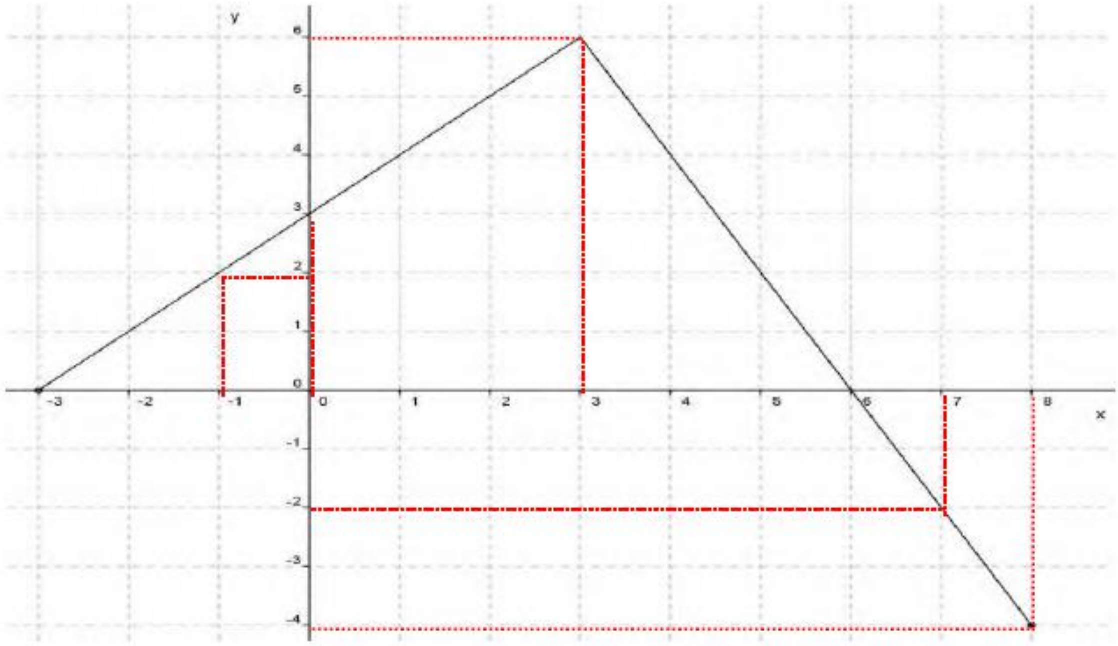
(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 35034

ΛΥΣΗ

α) Προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $x'x$ και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα $A = (-3,8)$.

β) Από τη γραφική παράσταση της f συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί:



x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία:

$$A(-3,0)\ \kappa\alpha\iota\ B(6,0)$$

και τον άξονα $y'y$ στο σημείο:

$$\Gamma(0,3)$$

δ) Το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή αυτό για το οποίο βρίσκεται "πάνω" από τον άξονα $x'x$, είναι το $(-3,6)$.

Θέμα 35033

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = (2x - 4)\ \kappa\alpha\iota\ B = (x - 3)$.

α) Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $A = 2x - 4$.

(Μονάδες 7)

β) Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Υπάρχει $x \in (2,(3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 35033

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 < x < 3$, οπότε $x > 2$, δηλαδή $2x > 4$, οπότε $2x - 4 > 0$.

Άρα:

$$A = (2x - 4) = 2x - 4.$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε: $A = 2x - 4$.

Επίσης επειδή $2 < x < 3$, είναι $x < 3$, δηλαδή $x - 3 < 0$. Άρα $B = (x - 3) = 3 - x$.

Επομένως:

$$A + B = (2x - 4) \ + (3 - x) = x - 1.$$

γ) Είναι:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \notin (2,3),$$

Επομένως, δεν υπάρχει $x \in (2,(3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$.

Θέμα 35030

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = (x^2 + 4x + 5) - (x^2 + 4x + 4)$$

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 35030

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ έχει $\alpha = 1,\ \beta = 4,\ \gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Επειδή $\alpha = 1 > 0$, ισχύει ότι: $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Είναι $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$. Τότε

$B = (x^2 + 4x + 5) - (x^2 + 4x + 4)\underbrace{\alpha)}B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4)\underbrace{}$

$\underbrace{}B = x^2 + 4x + 5 - x^2 - 4x - 4\underbrace{}B = 1.$

Θέμα 34920

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 12$ (1). Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1),

α) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και $x_1 x_2$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $4x_1$, $4x_2$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 34920

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 12$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = 6$ και $\gamma = -12$. Οπότε το άθροισμα των ριζών του είναι $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{6}{3} = -2$ και το γινόμενό τους είναι

$x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{12}{3} = -4$.

β) Μια εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς $4x_1$ και $4x_2$, είναι η $x^2 - Sx + P = 0$, με $S = 4x_1 + 4x_2 = 4(x_1 + x_2) \overset{(\alpha)}{=} 4 \cdot (-2) = -8$ και

$P = 4x_1 \cdot 4x_2 = 16(x_1 \cdot x_2) \overset{(\alpha)}{=} 16 \cdot (-4) = -64$.

Άρα, μια εξίσωση είναι η $x^2 + 8x - 64 = 0$.

Θέμα 34919

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $3 < x < 7$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = (x^2 - 10x + 21) + x^2 - 10x + 22$$

είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 34919

ΛΥΣΗ

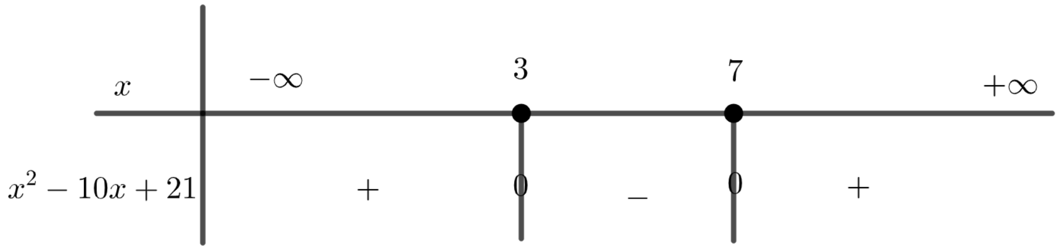
α) Το τριώνυμο $x^2 - 10x + 21$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16$$

και ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 4}{2} = \left(\begin{array}{l} \frac{10+4}{2} = 7 \\ \frac{10-4}{2} = 3 \end{array} \right)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του x φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:



Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 10x + 21 < 0 \Leftrightarrow 3 < x < 7.$$

β) Για $3 < x < 7$, από το α) ερώτημα έχουμε ότι $x^2 - 10x + 21 < 0$

Οπότε,

$A = (x^2 - 10x + 21) + x^2 - 10x + 22 = -(x^2 - 10x + 21) + x^2 - 10x + 22 = 1$

Δηλαδή, η παράσταση A είναι σταθερή, ανεξάρτητη του x.

Θέμα 34877

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 34877

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$. Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$x_1=\frac{-(-2)-\ \sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2-4}{2}=-1,$

$$x_2=\frac{-(-2)+\ \sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2+4}{2}=3.$$

β) Δεδομένου ότι $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), οι αριθμοί $x_1,1,x_2$, δηλαδή οι αριθμοί -1,1,3, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2\cdot 1=-1+3$, που ισχύει.

Θέμα 34874

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2-5x+2=0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1,x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,1,x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 34874

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$. Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$x_1 = \frac{-(-5)- \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$,

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5+3}{4} = 2.$$

β) Δεδομένου ότι $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$, δηλαδή οι αριθμοί $\frac{1}{2}, 1, 2$, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2$, που ισχύει.

Θέμα 34871

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $x+2, \quad x+1, \quad 3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 34871

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $x+2, \quad x+1, \quad 3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2(x+1) = (3x+2) + (x+2)$, οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$2x + 2 = 4x + 4$, δηλαδή

$-2x = 2$ και τελικά

$x = -1$.

β) Για $x = -1$, οι διαδοχικοί όροι της προόδου είναι $-1 + 2$, $-1 + 1$, $3 \cdot (-1) + 2$, δηλαδή $1, 0, -1$. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega = 0 - 1 = -1$.

Θέμα 34161

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $(2x - 1) = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 34161

α) Είναι:

$$(2x - 1) = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \text{ ή } 2x - 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4 \text{ ή } 2x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$$

β) Είναι α = – 1 και β = 2. Τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Για α = – 1, β = 2 και γ = 3, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{-2} = -1 \\ \frac{-6}{-2} = 3 \end{pmatrix}$$

Θέμα 34162

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $(2x-5) \leq 3$.   (1)

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x - 1 \geq 0$.   (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 34162

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$(2x-5) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

β) Το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{4}{4} = 1 \\ \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

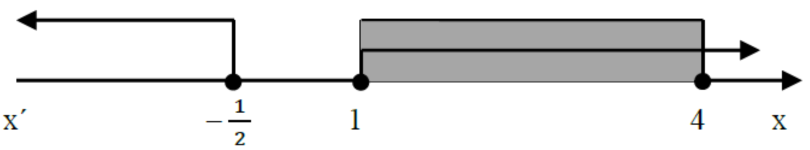
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x \leq -\tfrac{1}{2} \text{ ή } x \geq 1\right).$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [1,4].$$

Θέμα 34746

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in R$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2 \; και \; x_2 = \beta + 2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 34746

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2\beta x + \beta^2 - 4$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = (-2\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16 > 0.$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$x_{1,2} = \frac{2\beta \pm 4}{2}$, οπότε έχουμε: $x_1 = \beta + 2, x_2 = \beta - 2$.

Μία εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1 = \beta + 2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta + 2)^2 - 2\beta(\beta + 2) + \beta^2 - 4 = \beta^2 + 4\beta + 4 - 2\beta^2 - 4\beta + \beta^2 - 4 = 0.$$

Ομοίως η $x_2 = \beta - 2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta - 2)^2 - 2\beta(\beta - 2) + \beta^2 - 4 = \beta^2 - 4\beta + 4 - 2\beta^2 + 4\beta + \beta^2 - 4 = 0.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις $x_1, x_2, με \; x_1 \neq x_2$.

β) Οι αριθμοί $\beta - 2, \beta, \beta + 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διότι ισχύουν:

$\beta - (\beta - 2) = 2$ και

$(\beta + 2) - \beta = 2$, δηλαδή διαφέρουν κατά σταθερό αριθμό $\omega = 2$.

Θέμα 34446

ΘΕΜΑ 2

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0{,}8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 34446

ΘΕΜΑ 2

α) Για να βρούμε την απόσταση του αυτοκινήτου μετά από 25 λεπτά θέτουμε στη δοθείσα σχέση $x = 25$ και βρίσκουμε:

$$y = 35 + 0{,}8 \cdot 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 35 + 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 55 \text{ χιλιόμετρα}$$

β) Για να βρούμε τα λεπτά που θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α θέτουμε στη δοθείσα σχέση $y = 75$ και βρίσκουμε:

$$75 = 35 + 0{,}8x \Leftrightarrow 40 = 0{,}8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 50\text{λεπτά}$$

Θέμα 34436

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5+\ \sqrt{5}}, B = \frac{1}{5-\ \sqrt{5}}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 8)

i) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 34436

Λύση

α) i) Είναι:

$$A + B = \frac{1}{5+\ \sqrt{5}} + \frac{1}{5-\ \sqrt{5}} =$$
$$= \frac{5-\ \sqrt{5}}{(5+\ \sqrt{5})(5-\ \sqrt{5})} + \frac{5+\ \sqrt{5}}{(5+\ \sqrt{5})(5-\ \sqrt{5})} =$$
$$= \frac{5-\ \sqrt{5}+5+\ \sqrt{5}}{(5+\ \sqrt{5})(5-\ \sqrt{5})} =$$
$$= \frac{10}{5^2-\ \sqrt{5}^2} = \frac{10}{25-5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

ii) Ισχύει ότι:

$$A \cdot B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{5^2-(\sqrt{5})^2} =$$

$$=\frac{1}{25-5}=\frac{1}{20}$$

β) Μία ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $x^2-Sx+P=0$,με

$S=A+B=\frac{1}{2}$ και $P=A\cdot B=\frac{1}{20}$.

Τελικά, μία ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}=0 \Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0.$$

Θέμα 34159

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 34159

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x\in R$ με:

$x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R-\{3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το x^2-5x+6.

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-5)^2-4\cdot 1\cdot 6 = 25-24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

Θέμα 34158

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) είναι $\alpha_1=2$ και $\alpha_5=14$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (αν) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Δίνεται: $\sqrt{1849}=43$).

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 34158

α) Είναι:

$$\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (5-1)\omega = 14$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 14$$
$$\Leftrightarrow 4\omega = 12$$
$$\Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Έχουμε:

$$S_\nu = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 77$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\cdot 2 + (\nu-1)3] = 77$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4 + 3\nu - 3) = 77$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(3\nu + 1) = 77$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\nu^2 + \nu}{2} = 77$$
$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu = 154$$
$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 154 = 0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 3\cdot(-154) = 1 + 1848 = 1849 > 0.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

Θέμα 34157

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι$A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 34157

α) Είναι:

$$A \cdot B = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1.$$

β) Ισχύει ότι:

$$\Pi = A^2 + B^2$$
$$= \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$$

$$= 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 4 + 3 + 4 + 3 = 14.$$

Θέμα 34156

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι λ = 3.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 34156

α) Είναι:

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1\lambda^{5-1}}{\alpha_1\lambda^{2-1}} = 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda^4}{\lambda} = 27$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 = 27$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 = 3^3$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$S_4 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1\frac{\lambda^4-1}{\lambda-1} = 200$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\frac{3^4-1}{3-1} = 200$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\frac{81-1}{2} = 200$$

$$\Leftrightarrow 40\alpha_1 = 200$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 5$$

Θέμα 34155

ΘΕΜΑ 3

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 34155

α) Είναι:

$$
\begin{aligned}
A \cdot B \cdot \Gamma &= \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = \\
&= 5^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\
&= \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}.
\end{aligned}
$$

β) Είναι:

$$A = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \text{ και } B = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}.$$

Ισχύει ότι:

$$25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \Leftrightarrow A < B.$$

Θέμα 34154

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}, B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}.$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A + B = 3 \text{ και } A \cdot B = \frac{1}{2}.$$

(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 34154

α) Είναι:

$$
\begin{aligned}
A + B &= \frac{1}{3 - \sqrt{7}} + \frac{1}{3 + \sqrt{7}} = \\
&= \frac{3 + \sqrt{7}}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} + \frac{3 - \sqrt{7}}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} \\
&= \frac{3 - \sqrt{7} + 3 + \sqrt{7}}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} \\
&= \frac{6}{3^2 - (\sqrt{7})^2} \\
&= \frac{6}{9 - 7} = \frac{6}{2} = 3.
\end{aligned}
$$

Ισχύει ότι:

$$A \cdot B = \frac{1}{3- \sqrt{7}} \cdot \frac{1}{3+ \sqrt{7}} = \frac{1}{(3+ \sqrt{7})(3- \sqrt{7})} = \frac{1}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{1}{9-7} = \frac{1}{2}.$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = A + B = 3 \text{και} \, P = A \cdot B = \frac{1}{2}.$$

Τελικά μια ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

Θέμα 34153

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί x+6, 5x+2, 11x-6 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι ω=4.

(Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι$\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 34153

α) Οι αριθμοί x + 6, 5x + 2, 11x – 6 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$5x + 2 = \frac{x+6+11x-6}{2} \Leftrightarrow 5x + 2 = \frac{12x}{2} \Leftrightarrow 5x + 2 = 6x \Leftrightarrow x = 2 .$$

Είναι:

$$\omega = 5x + 2 - (x + 6) == 5x + 2 - x - 6 == 4x - 4 = 4 \cdot 2 - 4 = 4 .$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_8 = \alpha_1 + (8 - 1)\omega = 0 + 7 \cdot 4 = 28.$$

Τότε είναι:

$$S_8 = \frac{8}{2}(\alpha_1 + \alpha_8) = 4(0 + 28) = 4 \cdot 28 = 112 .$$

Θέμα 34152

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A;

(Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B;

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 34152

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση A ορίζεται αν και μόνο αν $(x-2)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Η παράσταση Bορίζεται αν και μόνο αν $(2-x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

γ) Για κάθε $x \leq 2$, έχουμε:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} = (x-2) = 2-x \text{ και } B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x.$$

Άρα$A = B$.

Θέμα 34150

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι, ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \ \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64.$$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 34150

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$$
$$12^2 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$144 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta = -64.$$

β) Μια εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β είναι η $x^2 - Sx + P = 0$,όπου $S = \alpha + \beta = 12$ και $P = \alpha\beta = -64$.

Άρα μια εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β είναι η: $x^2 - 12x - 64 = 0$.

γ) Το τριώνυμο $x^2 - 12x - 64$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 400 > 0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 12x - 64 = 0$ είναι:

Θέμα 34149

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $(x-1) < 2$ (2).

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 34149

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2 - x - 6$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 > 0.$

Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 - x - 6 = 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \left(\begin{array}{l} \frac{1+7}{4} = 2 \\ \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \end{array} \right)$$

β) Είναι:

$$(x-1) < 2 \Leftrightarrow$$
$$-2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow$$
$$-1 < x < 3$$

γ) Η τιμή του x που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις (1) και (2) είναι $x = 2$.

Θέμα 34148

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $(2x - 3) \leq 5$

(Μονάδες 9)

ii) $(2x - 3) \geq 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 34148

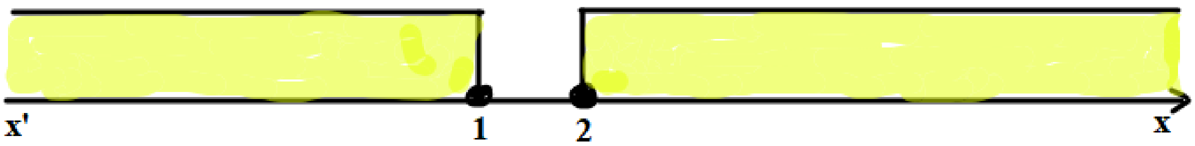
α) i) Είναι:

$$(2x - 3) \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5$$

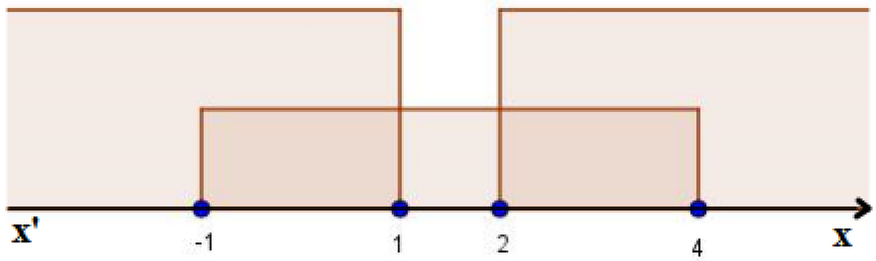
$$\Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$$

α) ii) Είναι:

$$(2x - 3) \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 3 \leq -1 \text{ ή } 2x - 3 \geq 1$$
$$\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2$$



β) Επειδή η πρώτη ανίσωση αληθεύει για $-1 \leq x \leq 4$ και η δεύτερη για $x \leq 1$ ή $x \geq 2$, οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x με $-1 \leq x \leq 1$ ή $2 \leq x \leq 4$, δηλαδή οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x \in (-1,1) \cup (2,4)$. Οι κοινές λύσεις φαίνονται εποπτικά στο παρακάτω σχήμα.



Θέμα 34147

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) με διαφορά ω = 4, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 34147

α) Είναι:

$$\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + (6-1)\omega + \alpha_1 + (11-1)\omega = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 5\omega + 10\omega = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -10$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_\nu = 0 &\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2(-10) + (\nu-1)4] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(-20 + 4\nu - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow -24 + 4\nu = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\nu = 24 \Leftrightarrow \nu = 6 \end{aligned}$$

Άρα πρέπει να προσθέσουμε τους πρώτους έξι όρους ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με μηδέν.

Θέμα 34145

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7} = 2$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 34145

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7} &= \frac{\alpha_1 + (15-1)\omega - [\alpha_1 + (9-1)\omega]}{\alpha_1 + (10-1)\omega - [\alpha_1 + (7-1)\omega]} \\ &= \frac{\alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 8\omega}{\alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 6\omega} \\ &= \frac{6\omega}{3\omega} = 2 \end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2 \Leftrightarrow \frac{18}{\alpha_1+9\omega-\alpha_1-6\omega}=2 \Leftrightarrow \frac{18}{3\omega}=2 \Leftrightarrow 18=6\omega \Leftrightarrow \omega=3$$

Θέμα 34146

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha \in R$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Όταν $\alpha=1$.

(Μονάδες 5)

ii. Όταν $\alpha=-3$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 34146

ΛΥΣΗ

α)

i. Για $\alpha=1$ η εξίσωση γίνεται:

$(1+3)x=1^2-9 \Leftrightarrow$

$$4x=-8 \Leftrightarrow$$
$$x=-2.$$

ii. Για $\alpha=-3$ η εξίσωση γίνεται:

$(-3+3)x=(-3)^2-9 \Leftrightarrow 0x=0$, που έχει άπειρες λύσεις.

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν: $\alpha+3\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq -3$.

Για την εύρεση της μοναδικής λύσης της εξίσωσης έχουμε:

$$(\alpha+3)\mathrm{x}=\alpha^2-9 \Leftrightarrow (\alpha+3)\mathrm{x}=(\alpha+3)(\alpha-3)$$

$$\overset{\alpha\neq-3}{\Leftrightarrow} \frac{(\alpha+3)\mathrm{x}}{\alpha+3}=\frac{(\alpha+3)(\alpha-3)}{\alpha+3}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{x}=\alpha-3.$$

Θέμα 21239

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία $y=\ \alpha x\ +\ \beta$ με $\alpha,\beta\in R$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2,-4)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β.

(Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 21239

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0,-2)$ επομένως $\beta = -2$, οπότε η εξίσωση της ευθείας γίνεται: $y = \alpha x - 2$. Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(-2,-4)$ επομένως $-4 = \alpha \cdot (-2) - 2 \Leftrightarrow -2 = -2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$

Άρα $\alpha = 1$ και $\beta = -2$.

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, η ευθεία $y = x - 2$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν $y < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Θέμα 15054

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$είναι θετικός.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 15054

ΛΥΣΗ

α) Από τις $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ προκύπτουν αντίστοιχα ότι $\alpha - \beta < 0$ και $\gamma - \beta > 0$, οπότε $(\alpha - \beta)(\gamma - \beta) < 0$. Επιπλέον, $\alpha\beta < 0$οπότε το γινόμενό τους $\alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$, που είναι ο αριθμός A, είναι θετικό.

β) Επειδή $\alpha - \beta < 0$ και $\gamma - \beta > 0$ έχουμε:

$$|\alpha - \beta| = -\alpha + \beta \text{ και } |\gamma - \beta| = \gamma - \beta$$

οπότε $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = \alpha - \alpha + \beta + \gamma - \beta - \gamma = 0$, που είναι το ζητούμενο.

Θέμα 15051

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2 = 9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 15051

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left(2-\sqrt{5}\right)^2=4-4\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=4-4\sqrt{5}+5=9-4\sqrt{5}$$

Ομοίως έχουμε:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2=4+4\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=4+4\sqrt{5}+5=9+4\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$$

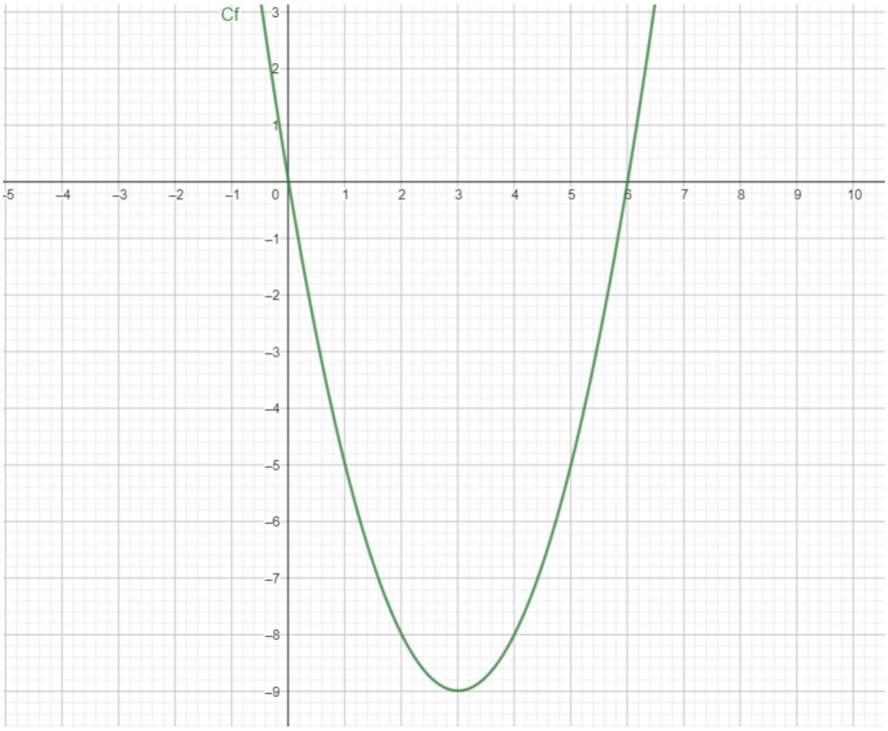
αφού ο αριθμός $2-\sqrt{5}$ είναι αρνητικός οπότε $\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$.

Επίσης, $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}=\left|2+\sqrt{5}\right|=2+\sqrt{5}$, αφού ο αριθμός $2+\sqrt{5}$ είναι θετικός, οπότε $\left|2+\sqrt{5}\right|=2+\sqrt{5}$.

Θέμα 15000

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το R, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0,1,3,5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.

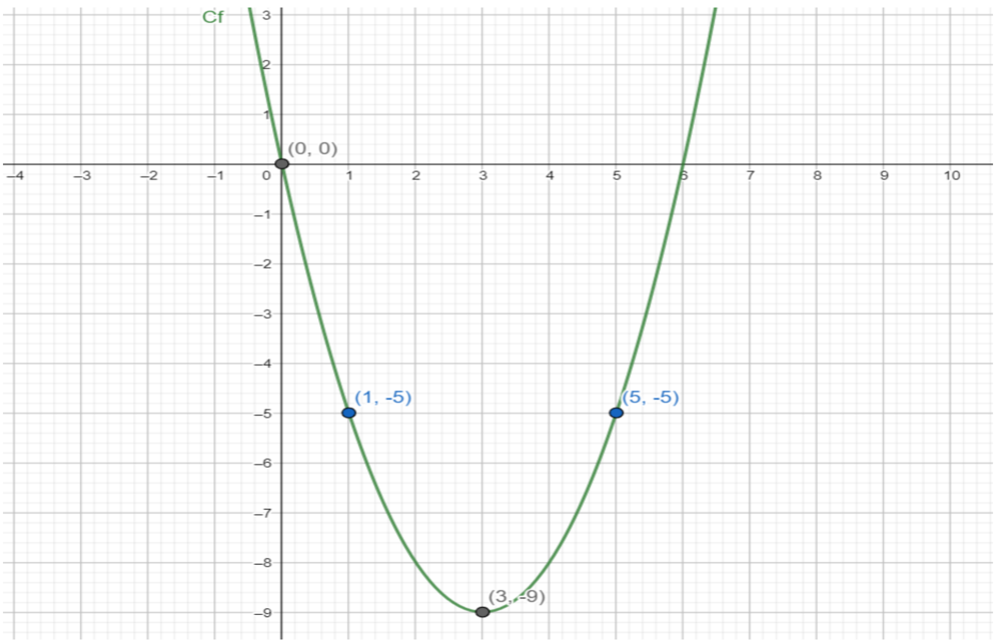
(Μονάδες 11)

Απάντηση Θέματος 15000

ΛΥΣΗ

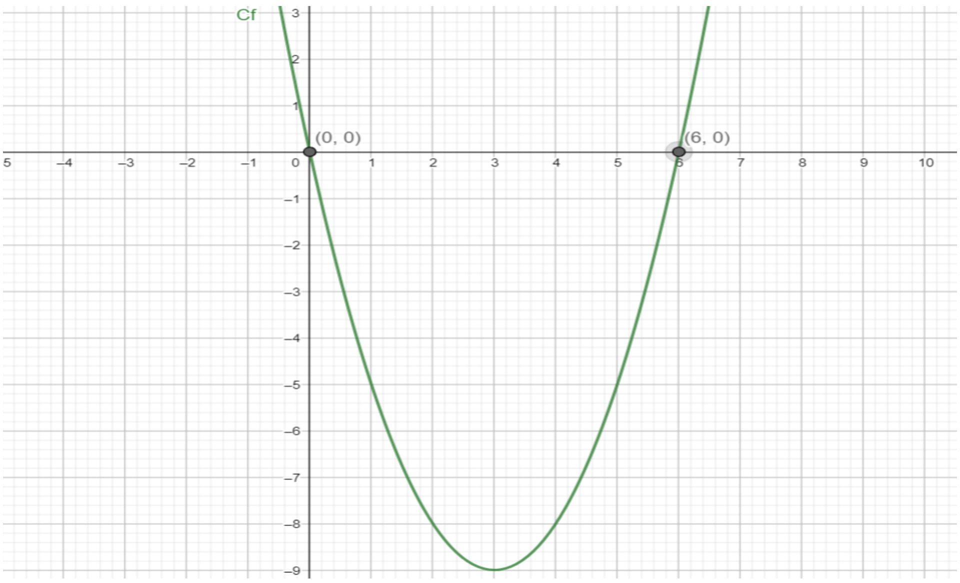
α) Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι ζητούμενες τιμές είναι:

$f(0) = 0\,, f(1) = -5, f(3) = -9 \;\kappa\alpha\iota\; f(5) = -5.$



β) Για να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, βλέπουμε από το σχήμα τα σημεία που η γραφική παράσταση C_f τέμνει τον άξονα x΄x, δηλαδή τα σημεία (0,0) και (6,0).

΄Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1 = 0 \;\; και \;\; x_2 = 6$.



γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων που έχουν τεταγμένες y που βρίσκονται κάτω από τον x΄x, δηλαδή $y < 0$ με x ανάμεσα στο 0 και το 6.Προκύπτει $x\epsilon(0,6)$.

Θέμα 14920

ΘΕΜΑ 2

Μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 14920

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4, \text{ οπότε}$$

$$\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^2}{\alpha_1} = 4, \text{ δηλαδή}$$

$$\lambda^2 = 4 \text{ και τελικά}$$

$$\lambda = \pm 2.$$

Επειδή $\lambda > 0$, $\lambda = 2$.

β) Έχουμε

$$\alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 = 4 \cdot 2^9 = 4 \cdot 512 = 2048.$$

γ) Έχουμε

$$S_{10} = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = 4 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = 4 \cdot 1023 = 4092.$$

Θέμα 14849

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2 - \sqrt{5}\right)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 14849

ΛΥΣΗ

α) Καθώς είναι $2 = \sqrt{4}, αρκεί\ να\ αποδείξουμε\ ότι\ \sqrt{4} < \sqrt{5}$, το οποίο όμως είναι αληθές αφού $4 < 5$.

β) Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του τετραγώνου διαφοράς, παίρνουμε

$$\left(2 - \sqrt{5}\right)^2 = 2^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}.$$

γ) Με χρήση των ερωτημάτων α) και β) έχουμε:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} = \left(2 - \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} - 2, \text{ αφού } 2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < 0.$$

Θέμα 14781

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \to y$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 14781

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y. Η αντιστοίχιση $y \to x$ δεν είναι συνάρτηση, γιατί $0 \to -2$ και $0 \to 3$, δηλαδή μια τιμή του y αντιστοιχεί σε δυο τιμές του x.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$ και το σύνολο τιμών το $B = \left\{-6, -4, 0, -\frac{25}{4}\right\}$.

Θέμα 14774

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\left(2 + \sqrt{5}\right)^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $\left(1 - \sqrt{5}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 14774

Λύση

α) Έχουμε ότι:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

και

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι:

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$\left(2+\sqrt{5}\right) + \left(1-\sqrt{5}\right).$$

Αλλά $1 < 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$. Οπότε, $\left(1-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5} - 1$.

Άρα,

$$\left(2+\sqrt{5}\right) + \left(1-\sqrt{5}\right) = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 1 + 2\sqrt{5}.$$

Θέμα 14750

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α, β, με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.

Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$.

(Μονάδες 12)

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14750

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$\alpha^2 = \left(1+2\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 4\sqrt{2} + 2^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 4\sqrt{2} + 8 = 9 + 4\sqrt{2}$ και

$\beta^2 = \left(\sqrt{2}-2\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2 + 2^2 = 2 - 4\sqrt{2} + 4 = 6 - 4\sqrt{2}$.

Οπότε $\alpha^2 + \beta^2 = 9 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2} = 15$.

β) Είναι $\alpha = 1 + 2\sqrt{2} > 0$ και $\beta = \sqrt{2} - 2 < 0$, οπότε:

$\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = (\alpha) + 2(\beta) = \alpha + 2(-\beta) = 1 + 2\sqrt{2} + 2\left(2-\sqrt{2}\right) = 1 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} = 5$.

Θέμα 14741

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha\left(\alpha^2-2\alpha+1\right)}{\alpha^3-\alpha^2}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,

i. Να δείξετε ότι $K \neq 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K-2) = 0$.

(Μονάδες 6)

Απάντηση Θέματος 14741

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $K = \frac{\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)}{\alpha^3-\alpha^2} = \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

β)

i. Έχουμε $K = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$, το οποίο απορρίπτεται αφού$\alpha \neq 1$. Άρα $K \neq 0$.

ii. Ισχύει $K(K-2) = 0 \Leftrightarrow K = 0$ ή $K - 2 = 0$. Η περίπτωση $K = 0$ λόγω του βi) δεν ισχύει, οπότε:

$K - 2 = 0 \Leftrightarrow K = 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = -1$, δεκτή.

Θέμα 14730

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = (x-2) + 3, x \in R$.

α) Να βρείτε

i. Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$.

(Μονάδες 8)

ii. Τις τιμές του x, ώστε να ισχύει $A = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 14730

ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει $x = 2^3 - 3^2 = 8 - 9 = -1$, οπότε $A = (-1-2) + 3 = (-3) + 3 = 3 + 3 = 6$.

ii. Έχουμε:

$A = 5 \Leftrightarrow$

$$(x-2) + 3 = 5 \Leftrightarrow$$

$(x-2) = 2$, οπότε

$x - 2 = 2$ ή $x - 2 = -2$, και τελικά

$x = 4$ ή $x = 0$

β) Υποθέτουμε ότι η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή 2.

Τότε $A = 2 \Rightarrow (x-2)+3 = 2 \Rightarrow (x-2) = -1$, άτοπο αφού ισχύει $(x-2) \geq 0$. Άρα $A \neq 2$.

Θέμα 14728

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{pmatrix} 2x-1, \ x < 0 \\ x^2+1\,, \ x \geq 0 \end{pmatrix}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14728

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $-1 < 0$, άρα: $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$.

Είναι: $1 > 0$, άρα: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

β) Αφού $x \geq 0$ τότε: $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2 \Leftrightarrow \ x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \ \sqrt{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow (x) \geq 1$.

Επομένως: $x \leq -1$ ή $x \geq 1$ και $x \geq 0$.

Άρα $x \geq 1$.

Θέμα 14704

ΘΕΜΑ 2

Αν 2 ≤ x ≤3 και 1 ≤ y ≤ 2, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) x + y

(Μονάδες 5)

β) 2x-3y

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 14704

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις 2 ≤ x ≤ 3 και βρίσκουμε:

2 +1 ≤ x + y ≤3 +2 ⇔3 ≤ x + y ≤5.

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση 2 ≤ x ≤ 3 με 2 και βρίσκουμε: 4 ≤2 x ≤ 6. (1)

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση 1 ≤ y ≤ 2 με –3 και βρίσκουμε:

$-3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2 \leq 2x-3y \leq 3 .$$

Θέμα 14682

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι: $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14682

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$A = (\sqrt{3})^6 = \left((\sqrt{3})^2\right)^3 = 3^3 = 27$ και

$B = (\sqrt[3]{3})^6 = \left((\sqrt[3]{3})^3\right)^2 = 3^2 = 9$.

Άρα : $A - B = 27 - 9 = 18$.

β) Από το α) ερώτημα, $A - B = 18 > 0$, οπότε

$$A > B, \text{ δηλαδή}$$

$$(\sqrt{3})^6 > (\sqrt[3]{3})^6 \text{ και τελικά}$$

$$\sqrt{3} > \sqrt[3]{3} .$$

Θέμα 14681

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{pmatrix} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{pmatrix}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14681

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $3 > 0$, είναι: $f(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Αφού $-3 < 0$, είναι $f(-3) = (-3)^2 - 1 = 8$.

β) Για $x < 0$ είναι $f(x) = x^2 - 1$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Δεκτή τιμή $x = -3 < 0$.

Για $x > 0$ είναι $f(x) = 2x + 2$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x + 2 = 8 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Δεκτή τιμή αφού $x = 3 > 0$.

Επομένως η $f(x) = 8$ ισχύει για $x = -3$ και $x = 3$.

Θέμα 14656

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) δίνονται $\alpha_1 = 41 \; και \; \alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14656

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha_6 = 41 + (6-1)\omega \Leftrightarrow 41 + 5\omega = 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = -3.$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 + (\nu - 1)(-3) = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 - 3\nu + 3 = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 44 = 4\nu \Leftrightarrow \nu = 11.$$

Θέμα 14649

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = (x+1) + 2$, όπου $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι $K = \left(\begin{array}{l} x + 3, \; αν \; x \geq -1 \\ 1 - x, \; αν \; x < -1 \end{array} \right)$

(Μονάδες 12)

β)

i. Να λύσετε την εξίσωση $(x-2) = 4$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K, αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

Απάντηση Θέματος 14649

ΛΥΣΗ

α) Για $x \geq -1$ είναι $x + 1 \geq 0$, οπότε $(x + 1) + 2 = x + 1 + 2 = x + 3$.

Για $x < -1$ είναι $x + 1 < 0$, οπότε $(x + 1) + 2 = -(x + 1) + 2 = -x - 1 + 2 = 1 - x$.

Άρα, τελικά $K = \left(\begin{matrix} x + 3, & \alpha\nu\ x \geq -1 \\ 1 - x, & \alpha\nu\ x < -1 \end{matrix} \right)$

β)

i. Είναι $(x - 2) = 4 \Leftrightarrow \{x - 2 = 4$ ή $x - 2 = -4\} \Leftrightarrow \{x = 6$ ή $x = -2\}$.

ii. Για $x = 6 > -1$ είναι $K = 6 + 3 = 9$.

Για $x = -2 < -1$ είναι $K = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$.

Θέμα 14641

ΘΕΜΑ 2

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.

(Μονάδες 7)

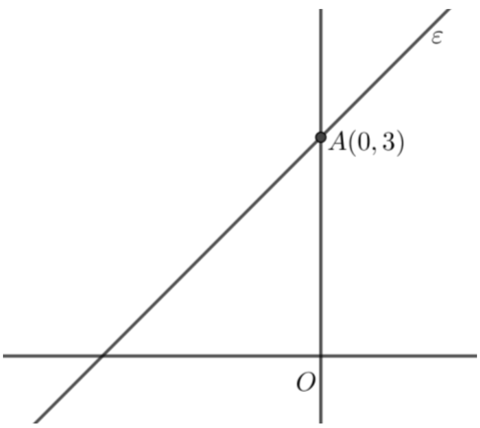
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^o = 1$)

(Μονάδες 9)



Απάντηση Θέματος 14641

Λύση

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\alpha = \varepsilon\varphi 45^o = 1$.

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Από το ερώτημα α) γνωρίζουμε ότι $\alpha = 1$. Άρα, $\varepsilon: y = x + \beta$. Επίσης, η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,3)$ οπότε, $\beta = 3$. Άρα, η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = x + 3$.

γ) Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο για το οποίο

$$y = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(-3,0)$.

Θέμα 14628

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x}, x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4,3)$.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4,-3)$ είναι σημείο της C_f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 14628

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(4) = 3$.

Με $x = 4$έχουμε: $f(4) = \frac{4^2-4}{4} = \frac{16-4}{4} = \frac{12}{4} = 3$, οπότε η C_f διέρχεται από το σημείο $A(4,3)$

β) Ισχύει:

$$f(-4) = \frac{(-4)^2 - 4}{-4} = \frac{16 - 4}{-4} = -\frac{12}{4} = -3$$

οπότε και το σημείο $B(-4,-3)$ είναι πάνω στην C_f.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$.

Με $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 4. Επιπλέον, $f(-1) = 3$και $f(4) = 3$, οπότε τα αντίστοιχα σημεία της C_fέχουν τεταγμένη $y = 3$.

Επομένως, τα κοινά σημεία της C_fμε την ευθεία είναι το $A(4,3)$ και το $\Gamma(-1,3)$.

Θέμα 14617

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $(x - 7) < 1$.

α) Να δείξετε ότι $6 < x < 8$.

(Μονάδες 12)

β) Αν ισχύει $6 < k < 8$, να δείξετε ότι $3 < \frac{24}{k} < 4$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14617

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα: $(x - 7) < 1$,

$-1 < x - 7 < 1$, δηλαδή

$7 - 1 < x < 7 + 1$ και τελικά

$6 < x < 8$.

β) Έχουμε ισοδύναμα: $6 < k < 8$,

$\frac{1}{6} > \frac{1}{k} > \frac{1}{8}$, δηλαδή

$\frac{24}{6} > \frac{24}{k} > \frac{24}{8}$, οπότε

$4 > \frac{24}{k} > 3$ και τελικά

$3 < \frac{24}{k} < 4$.

Θέμα 14603

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x) = \left(\begin{matrix} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{matrix}\right)$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 14603

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$f(-1) = 2(-1) - 5 = -7$,

$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ και

$f(5) = 5^2 = 25$.

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0) = 0$. Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5 \neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Για τον $y'y$ άξονα είναι $x = 0$ και $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$, οπότε το σημείο τομής με τον $y'y$ άξονα είναι το $(0, -5)$.

Θέμα 14599

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $(2x) < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1,1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14599

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$(2x) < 2$, οπότε

$2(x) < 2$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2και έχουμε

$(x) < 1$ και τελικά

$$-1 < x < 1$$

β) Η ανίσωση

$x^2 < 1$ ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει η

$\sqrt{x^2} < 1$,που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η

$(x) < 1$, που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει

$-1 < x < 1$, δηλαδή $x \in (-1,1)$,που ισχύει.

Άρα για κάθε $x \in (-1,1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

Θέμα 14597

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 14597

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς προκύπτει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης σειράς προσθέτοντας πάντα σταθερά τέσσερα καθίσματα.

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 4$.

β) Έχουμε:

$\alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)\cdot\omega \Leftrightarrow 36 = \alpha_1 + 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12.$

γ) Αφού το γήπεδο έχει δέκα σειρές, τότε το πλήθος των καθισμάτων συνολικά δίνεται από τον τύπο:

$S_{10} = \frac{10}{2}\cdot(2\cdot 12 + (10-1)\cdot 4) = 5\cdot(24+36) = 5\cdot 60 = 300.$

Θέμα 14596

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 14596

ΛΥΣΗ

α) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης παραγοντοποιούμε το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 3$ είναι: $\varDelta = 4 - 4\cdot(-3) = 16$

και οι ρίζες:.

$$x_{1,2} = \frac{2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ και } x_2 = -1.$$

Άρα: $x^2 - 2x - 3 = (x+1)\cdot(x-3)$.

Επομένως έχουμε : $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \frac{(x+1)\cdot(x-3)}{x+1} = x - 3.$

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f από το σημείο $A(1,-4)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης. Δηλαδή θα πρέπει $f(1)=-4$.

Είναι $f(1)=-2\neq -4$. Άρα το σημείο $A(1,-4)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Θέμα 14577

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x-2=0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=\frac{x^2-x-2}{x^2+x}, x\neq 0, x\neq -1$.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 14577

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $(-1)^2-(-1)-2=1+1-2=0$, οπότε ο αριθμός -1 είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

β) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης ισούται με $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$ και η μια ρίζα της είναι $x_1=-1$.

Άρα για την δεύτερη ρίζα της εξίσωσης έχουμε:

$$x_1\cdot x_2=-2 \Leftrightarrow$$
$$-1\cdot x_2=-2 \Leftrightarrow$$
$$x_2=2.$$

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα οι ρίζες του τριωνύμου x^2-x-2 είναι $x_1=-1$ και $x_2=2$. Οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

Η παράσταση γίνεται:

$A=\frac{x^2-x-2}{x^2+x}=\frac{(x-2)(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x-2}{x}$.

Θέμα 14575

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 14575

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$, για τους οποίους ισχύει:

$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

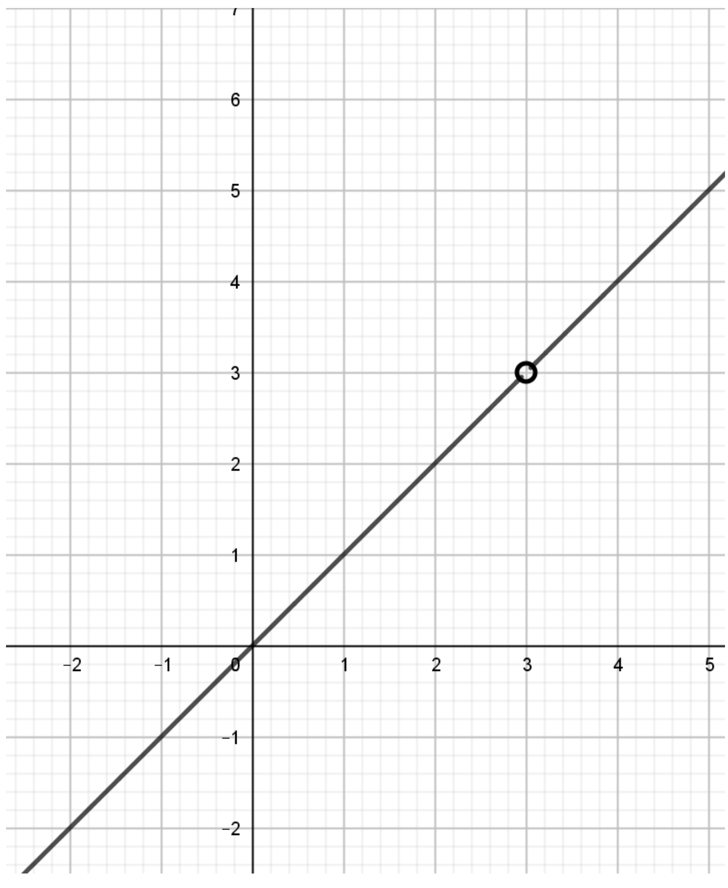
$$x \neq 3.$$

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

β) Έχουμε: $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-3} = \frac{x(x-3)}{(x-3)} = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας.

Από την ευθεία θα εξαιρεθεί το σημείο $(3{,}3)$, διότι $3 \notin A$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Θέμα 14574

ΘΕΜΑ 2

Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14574

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha_1 = 2$και $\alpha_3 = 8$, δηλαδή

$\alpha_1 + 2\omega = 8$, οπότε

$2 + 2\omega = 8$ και τελικά

$\omega = 3$.

β) Θα πρέπει να βρούμε τον φυσικό αριθμό ν, ώστε:

$\alpha_\nu = 35$, δηλαδή

$\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 35$, οπότε

$2 + (\nu - 1) \cdot 3 = 35$, οπότε

$3 \cdot (\nu - 1) = 33$, δηλαδή

$\nu - 1 = 11$ και τελικά

$\nu = 12$.

Επομένως ο 12ος όρος της προόδου είναι 35.

Θέμα 14573

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν)για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 14573

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10, \text{ δηλαδή}$$

$$(\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + \omega) = 10, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 5.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) = 33, \text{ οπότε}$$

$$3\alpha_1 + 3\omega = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + \omega = 11, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 + 5 = 11 \text{ και τελικά}$$

$$\alpha_1 = 6.$$

Θέμα 14572

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $(x + 2) < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$.

(Μονάδες 10)

β) $(2x + 4) < 2$.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 14572

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$(x + 2) < 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 < x + 2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 - 2 < x + 2 - 2 < 1 - 2 \Leftrightarrow$$

$$-3 < x < -1.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$-3 < x < -1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2, οπότε

$-6 < 2x < -2$, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 4 και έχουμε

$-2 < 2x + 4 < 2$, οπότε τελικά

$$(2x + 4) < 2.$$

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης $(x + 2) < 1$ με το 2 και έχουμε

$$2 \cdot (x + 2) < 2 \cdot 1, \text{ οπότε}$$

$$(2 \cdot (x+2)) < 2 \text{ και τελικά}$$
$$(2x+4) < 2.$$

Θέμα 14555

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x+y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14555

ΛΥΣΗ

α) Ανοίγοντας τις παρενθέσεις στη δοθείσα ισότητα, έχουμε:

$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 5y^2 = 6 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5.$

β) Παρατηρούμε ότι $P = ((x+y)(x - y))^3 = (x^2 - y^2)^3 = 5^3 = 125.$

Θέμα 14512

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

(Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 14512

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2 = 1$ έχει λύσεις τις $x = 1$ ή $x = -1$ ενώ η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει λύσεις τις $x = 3$ ή $x = -3$.

β) Οι λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά είναι -3, -1, 1, 3.

i. Αφού $3 - 1 = 1 - (-1) = -1 - (-3) = 2$ οι αριθμοί -3, -1, 1, 3 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά $\omega = 2$.

ii. Αφού η αριθμητική πρόοδος έχει διαφορά $\omega = 2$ και περιέχει τους περιττούς όρους 1 και 3, όλοι οι όροι της προόδου θα είναι περιττοί και επομένως ο 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

Θέμα 14492

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7 \; και \; 2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14492

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι Π = 2x + 2y. Τότε:

$4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 2\cdot4 \leq 2x \leq 2\cdot7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14$ (1) και

$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2\cdot2 \leq 2y \leq 2\cdot3 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 6$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$8 + 4 \leq 2x + 2y \leq 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \leq Π \leq 20$.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$P = 2(x - 1) + 2\cdot3y = 2x + 6y - 2$.Τότε:

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 6\cdot2 \leq 6y \leq 6\cdot3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \leq 6y - 2 \leq 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \leq 6y - 2 \leq 16 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$8 + 10 \leq 2x + 6y - 2 \leq 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \leq P \leq 30$.

Θέμα 14491

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $(y - 3) < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14491

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $(y-3) < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$.

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x, y είναι: $E = xy$.

Έχουμε:

$\left(\begin{pmatrix} 1 < x < 3 \\ 2 < y < 4 \end{pmatrix}\right) \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} 2 < xy < 12$. Άρα $2 < E < 12$.

Θέμα 14476

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: $1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots$

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14476

ΛΥΣΗ

α)

i. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1$ και η διαφορά της $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 1 = 2$.

ii. Ο τριακοστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_{30} = \alpha_1 + 29\omega = 1 + 29 \cdot 2 = 1 + 58 = 59$.

β) Έχουμε: $S_{30} = \frac{30}{2} \cdot (a_1 + \alpha_{30}) = 15 \cdot (1 + 59) = 15 \cdot 60 = 900 = 30^2$.

Θέμα 14475

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14475

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

και

$$-4 \leq \beta \leq -3, \text{ οπότε}$$

$$-4 \cdot 2 \leq \beta \cdot 2 \leq -3 \cdot 2, \text{ και τελικά}$$

$$-8 \leq 2\beta \leq -6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), και έχουμε:

$$2 - 8 \leq \alpha + 2\beta \leq 4 - 6, \text{ οπότε τελικά}$$

$$-6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2.$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη, η παράσταση $\alpha - \beta$ γράφεται $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

και

$-4 \leq \beta \leq -3$, οπότε πολ/ζουμε με (-1)τα μέλη της ανισότητας και αυτή αλλάζει φορά

$$-4 \cdot (-1) \geq \beta \cdot (-1) \geq -3 \cdot (-1),$$

$$4 \geq -\beta \geq 3 \text{ και τελικά}$$

$$3 \leq -\beta \leq 4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3), και έχουμε:

$$2 + 3 \leq \alpha - \beta \leq 4 + 4, \text{ οπότε τελικά}$$

$$5 \leq \alpha - \beta \leq 8.$$

Θέμα 14473

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\dfrac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α) Να δείξετε ότι $y = 2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14473

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \text{, δηλαδή}$$

$$4x+5y=-2(x-4y) \text{, οπότε}$$

$$4x+5y=-2x+8y \text{, δηλαδή}$$

$$3y=6x \text{ και τελικά}$$

$$y=2x$$

β) Για $y=2x$ η παράσταση A γράφεται:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+x(2x)}{x(2x)}=\frac{2x^2+3\left(4x^2\right)+2x^2}{2x^2}=$$

$$=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8.$$

Θέμα 14458

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, yπραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 14458

ΛΥΣΗ

α) i. Από τη δοσμένη ισότητα με πράξεις έχουμε:

$x^2+4xy+xy+4y^2-9xy=0$, οπότε $x^2+4y^2-4xy=0$, δηλαδή $(2y-x)^2=0$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Είναι: $(2y-x)^2=0$, οπότε $2y-x=0$, άρα $y=\frac{x}{2}$ που είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\frac{x}{2}=y$, (1).

Με τη βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=(2y-y)^2+(2y+y)^2=y^2+(3y)^2=y^2+9y^2=10y^2$$

Θέμα 14452

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ \sqrt{3}-1$ και $\beta=\ \sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 14452

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\left(\sqrt{3}-1+\ \sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2$$
$$=10$$

β) Είναι

$\alpha\beta=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=3-1=2$ οπότε

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{10}{2}=5$$

Θέμα 14412

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha>\beta$, με $\beta>1$ και $\alpha>1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)}-\frac{(1-\alpha)}{1-\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha+\beta>\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)}-\frac{(1-\alpha)}{1-\alpha}$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14412

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha>\beta$ και ισοδύναμα $\alpha-\beta>0$, οπότε $(\alpha-\beta)=\alpha-\beta$.

Επίσης $\alpha>1$ ισοδύναμα $1-\alpha<0$, οπότε $(1-\alpha)=\alpha-1$.

Άρα $\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)}-\frac{(1-\alpha)}{1-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha-1}{1-\alpha}=1+\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1+1=2$.

β) Είναι

$$\alpha > 1 \text{ και } \beta > 1, \text{ οπότε}$$

$$\alpha + \beta > 1 + 1, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha + \beta > 2 \text{ και από το α) ερώτημα έχουμε ότι}$$

$$\alpha + \beta > \frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)} - \frac{(1-\alpha)}{1-\alpha}.$$

Θέμα 14410

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

α)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

(Μονάδες 9)

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in R$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 14410

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε $A + B = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} + (\beta - 3)^2 = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta - 3)^2 \geq 0$

ii. Έχουμε:

$A + B = 0 \Leftrightarrow$,

$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta - 3)^2 = 0$, που ισχύει αν και μόνο αν

$\alpha + \frac{1}{2} = 0$ και $\beta - 3 = 0$, οπότε

$\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = 3$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$A = -B \Leftrightarrow$$

$$A + B = 0 \overset{\alpha ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = 3$$

Θέμα 14319

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5).$$

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14319

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|2x - 5| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 5 < 3 \Leftrightarrow -3 + 5 < 2x < 3 + 5 \Leftrightarrow 2 < 2x < 8 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Άρα, λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x, με $x \in (1,4)$.

β) Ο αριθμός α είναι λύση της ανίσωσης, οπότε $\alpha \in (1,4)$. Έτσι έχουμε $\alpha > 1$, οπότε $\alpha - 1 > 0$ και $\alpha < 5$, οπότε $\alpha - 5 < 0$.

Επομένως οι παράγοντες του γινομένου$(\alpha - 1)(\alpha - 5)$ είναι ετερόσημοι, οπότε

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5) < 0.$$

Θέμα 14306

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $(y - 3) < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14306

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $(y - 3) < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$.

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x, y είναι: $E = xy$.

Έχουμε:

$\left(\begin{pmatrix}1 < x < 3\\ 2 < y < 4\end{pmatrix}\right) \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} 2 < xy < 12$. Άρα $2 < E < 12$.

Θέμα 14259

ΘΕΜΑ 2

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο 20ος όρος της προόδου ισούται με 97.

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2+7+12+\ldots+97$.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 14259

ΛΥΣΗ

α) Η αριθμητική πρόοδος έχει διαφορά $\omega=\alpha_2-\alpha_1=7-2=5$.

β) Έχουμε $\alpha_{20}=\alpha_1+19\omega=2+19\cdot 5=97$.

γ) Το άθροισμα $2+7+12+\ldots+97$ είναι άθροισμα των 20 πρώτων όρων της α.π. με $\alpha_1=2$ και $\omega=5$.

Άρα $S_{20}=\frac{20}{2}(a_1+a_{20})=10\cdot(2+97)=990$.

Θέμα 14224

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}, x\neq 0, x\neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=\dfrac{x+1}{x}$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 14224

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\mathrm{A}=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\dfrac{x+1}{x}$.

β)

i. Πρέπει να βρούμε την τιμή του x για την οποία

$$\mathrm{A}=0 \text{, δηλαδή}$$

$$\frac{x+1}{x}=0 \text{, που συμβαίνει όταν}$$

$$x+1=0 \text{, δηλαδή όταν}$$

$$x=-1.$$

ii. Για να πάρει η παράσταση A την τιμή 2, πρέπει να ισχύουν ισοδύναμα:

$$\frac{x+1}{x}=2 \Leftrightarrow$$

$$x+1=2x \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{, που δεν είναι αποδεκτή τιμή για το } x.$$

Άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2.

Θέμα 14189

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $x^2-3x-4<0$, να δείξετε ότι $-1<x<4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A=(2x+2)+(x-5)$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A=x+7$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 14189

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1=&4\\x_2=&-1\end{pmatrix}$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
x^2-3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in(-1,4)$.

β) Είναι $A=(2x+2)+(x-5)=2(x+1)+(x-5)$.

Επειδή $x\in(-1,4)$ τότε $x>-1$ και $x+1>0$. Άρα $(x+1)=x+1$.

Επειδή $x\in(-1,4)$ τότε $x<4<5$ και $x-5<0$. Άρα $(x-5)=5-x$.

Επομένως η παράσταση $A=2(x+1)+5-x=2x+2+5-x=x+7$.

Θέμα 13322

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x}{x^2+2}+\sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1,\ x=-2,\ x=2$.

(Μονάδες 9)

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 13322

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-1\geq 0$, δηλαδή όταν $x\geq 1$, γιατί $x^2+2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $\mathrm{A}_g=[1,+\infty)$.

β) Για $x=1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(1)=\dfrac{1}{1+2}+\sqrt{1-1}=\dfrac{1}{3}$.

Δεν ορίζεται η τιμή της συνάρτησης για $x=-2$, διότι $-2\notin \mathrm{A}_g$.

Για $x=2$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(2)=\dfrac{2}{2^2+2}+\sqrt{2-1}=\dfrac{2}{6}+\sqrt{1}=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Θέμα 13323

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x,\ y$ ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 13323

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ισότητα, θα χρησιμοποιήσουμε ευθεία απόδειξη. Έχουμε λοιπόν:

$(x-1)^2+(y+4)^2=(x^2-2x+1)+(y^2+8y+16)=x^2+y^2-2x+8y+17$.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-2x+8y+17=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$(x-1)^2+(y+4)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2=0 \text{ και } (y+4)^2=0, \text{ δηλαδή}$$
$$x-1=0 \text{ και } y+4=0, \text{ οπότε τελικά}$$
$$x=1 \text{ και } y=-4.$$

Θέμα 13400

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία ε: $y=-x+2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 13400

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία ε: $y=-x+2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha=-1<0$. Άρα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $y=0$. Δηλαδή $-x+2=0 \Leftrightarrow\ x=2$. Άρα το σημείο τομής είναι $A(2,0)$.

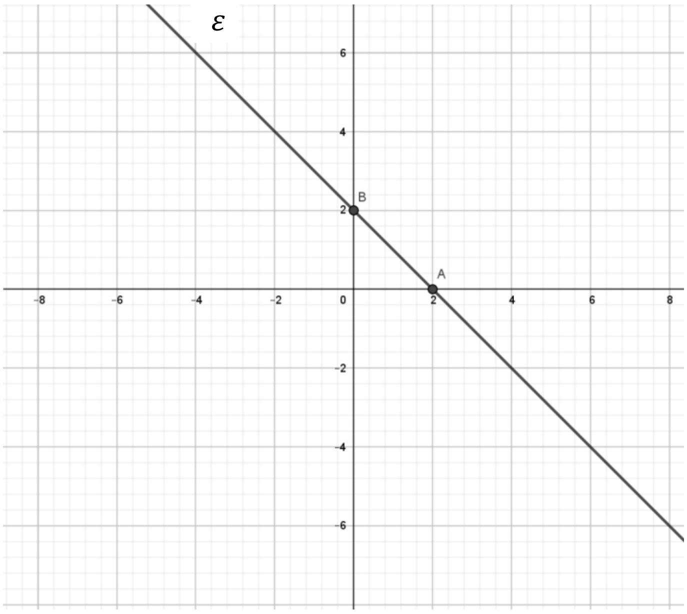
Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $x=0$ και βρίσκουμε $y=2$. Άρα το σημείο τομής είναι $B(0,2)$.

γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε στο ερώτημα β), τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία όπως στο παρακάτω Σχήμα.

Θέμα 13471

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1), B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία ε: $y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, τότε:



Σχήμα

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

Απάντηση Θέματος 13471

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Έτσι, έχουμε: $2\lambda - 3 = 1$, οπότε $2\lambda = 4$, άρα $\lambda = 2$.

β) Θα αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας που είναι η ε: $y = 2x - 3$.

Με $x = -1$ έχουμε: $y = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$, οπότε το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία ε.

Εξετάζουμε αν το Γ είναι πάνω στην ε.

Με $x = 27$ έχουμε: $y = 2 \cdot 27 - 3 = 54 - 3 = 51 \neq 50$, οπότε το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ευθεία ε.

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ίδια ευθεία με τα Α και Β.

Θέμα 14071

ΘΕΜΑ 2

α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

Α. Κ=|x+1|+|x-2| **Β.** Κ=|x-1|+|x+2| **Γ.** Κ=(|x|+1)+(|x|-2)

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

β) Αν είναι Κ=|x+1| + |x-2| τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ όταν $x = \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

ii) Αν x>2 να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση Κ και να αποδείξετε ότι Κ>3.

(Μονάδες 10)

Απάντηση Θέματος 14071

Λύση

α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι η Κ=|x+1| + |x-2| διότι το |x+1| δηλώνει την απόσταση του x από το -1 και το |x-2| την απόσταση του x από το 2.

β) Είναι Κ=|x+1| + |x-2| τότε:

i) για $x = \frac{3}{2}$ γίνεται: $K = \left(\frac{3}{2} + 1\right) + \left(\frac{3}{2} - 2\right) = \frac{5}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{6}{2} = 3$

ii) Αφού είναι x>2 τότε x-2 > 0 και x+1 > 0 οπότε η παράσταση Κ γίνεται:

$$K = x + 1 + x - 2 = 2x - 1$$

Ακόμη έχουμε: $x > 2 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow 2x - 1 > 3 \Leftrightarrow K > 3$.

Θέμα 14072

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $\mathrm{M}(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 14072

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x-2\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$x\neq 2.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{2\}$.

β) Το σημείο $\mathrm{M}(1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, γιατί

$$f(1)=\frac{1-4}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3.$$

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $(0,2)$ και τον $x'x$ άξονα στο σημείο $(-2,0)$, αφού

για $x=0$, έχουμε: $f(0)=\dfrac{0-4}{0-2}=\dfrac{-4}{-2}=2$ και

για $y=f(x)=0$, έχουμε: $0=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, οπότε

$x^2-4=0$, δηλαδή

$(x+2)(x-2)=0$, οπότε

$x+2=0$ ή $x-2=0$ και τελικά

$x=-2$ (δεκτή) ή $x=2$ (απορρίπτεται).

Θέμα 13472

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2=2\alpha+\beta$ και $\beta^2=2\beta+\alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2-\beta^2=\alpha-\beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha+\beta=1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\alpha^2+\beta^2$.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 13472

ΛΥΣΗ

α) i. Αν αντικαταστήσουμε τα α^2, β^2 από τις δοσμένες ισότητες, βρίσκουμε ότι

$$\alpha^2-\beta^2=2\alpha+\beta-2\beta-\alpha=\alpha-\beta.$$

ii. Η τελευταία ισότητα γράφεται $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha-\beta$. Αλλά, $\alpha-\beta\neq 0$, αφού οι αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, οπότε παίρνουμε $\alpha+\beta=1$, που είναι το ζητούμενο.

β) Όπως προηγουμένως, έχουμε:

$$A=\alpha^2+\beta^2=2\alpha+\beta+2\beta+\alpha=3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3\cdot 1=3$$

αφού $\alpha+\beta=1$.

Θέμα 13318

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R\to R$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x\in R$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $\left(f(-\sqrt{2})\right)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 13318

ΛΥΣΗ

α) $f(0) = -0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

$f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$.

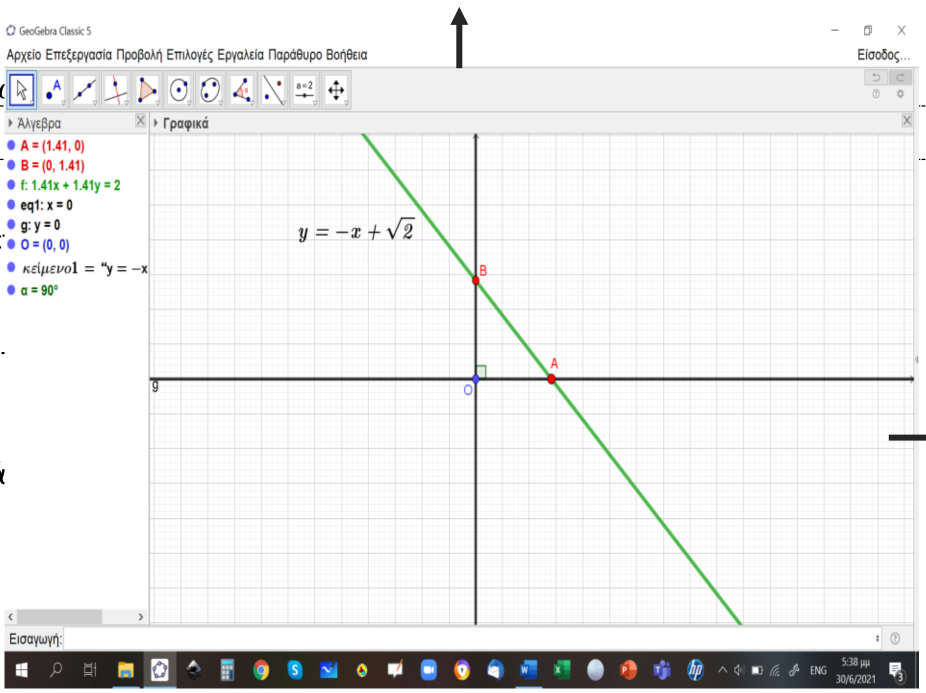
$f(-\sqrt{2}) = -(-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

$\left(f(-\sqrt{2})\right)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 2^2\cdot(\sqrt{2})^2 = 4\cdot 2 = 8$.

β) Για $x = 0$, έχουμε βρει από το α) ερώτημα $y = f(0) = \sqrt{2}$, ενώ για $y = 0$ παίρνουμε $0 = -x + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$, δηλαδή $f(\sqrt{2}) = 0$, τιμή που βρέθηκε στο α) ερώτημα.

Έτσι, βρήκαμε τα σημεία $B(0, \sqrt{2})$ και $A(\sqrt{2}, 0)$, τα οποία είναι αυτά στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι της μορφής $y = f(x) = \alpha x + \beta$ με $x \in R$, $(\alpha\cdot\beta\neq 0)$ οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι μια ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και επομένως αρκεί να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.



Πληκτρολ

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσε

(Μονάδες 8)

β) Να λύσε

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετά

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 13321

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

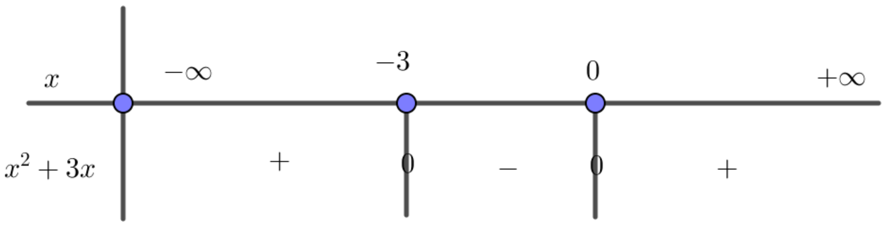
$$x^4 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^4 = 16 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = \pm\sqrt[4]{16} \quad \Leftrightarrow$$
$$x = \pm 2.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = 2$, $x = -2$.

β) Για να λύσουμε την ανίσωση, θα βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 3x$ και στη συνέχεια θα κάνουμε τον πίνακα προσήμου του $x^2 + 3x$. Για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου, παραγοντοποιώντας έχουμε:

$$x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x(x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ ή } x = -3$$

Συνεπώς ο πίνακας προσήμου είναι ο παρακάτω:



Άρα η ανίσωση (2) αληθεύει για $x \in [-3,\ 0]$.

γ) Από τις λύσεις της εξίσωσης (1) μόνο η $x = -2$ είναι και λύση της ανίσωσης (2), διότι ανήκει στο διάστημα $[-3,\ 0]$.

Θέμα 13319

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $1 - x$, $\frac{x}{2}$, $2x - 1$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 13319

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ, με αυτή τη σειρά, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, αν και μόνον αν ισχύει $\beta - \alpha = \gamma - \beta$. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει ότι

$\frac{x}{2} - (1 - x) = 2x - 1 - \frac{x}{2}$, δηλαδή $\frac{x}{2} - 1 + x = \frac{3x}{2} - 1$, άρα $\frac{3x}{2} - 1 = \frac{3x}{2} - 1$, που ισχύει.

β) Πρέπει να ισχύει $\frac{3x}{2} - 1 = 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 6 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

Θέμα 13169

ΘΕΜΑ 2

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $(x - 2) - (x - 5) = 2$.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 13169

ΛΥΣΗ

α) Αφού $3 \leq x \leq 5$, θα έχουμε $x - 5 \leq 5 - 5$, άρα $x - 5 \leq 0$. Ακόμα $3 \leq x$, οπότε $3 - 2 \leq x - 2$, άρα $1 \leq x - 2$. Ώστε $x - 2 > 0$.

β) Γνωρίζουμε ότι αν $y \geq 0$, τότε $(y) = y$ ενώ αν $y \leq 0$, τότε $(y) = -y$. Έτσι η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x - 2 - (5 - x) = 2$, άρα $x - 2 - 5 + x = 2$, οπότε $2x = 9$. Τελικά $x = \frac{9}{2}$, λύση η οποία είναι δεκτή, αφού $\frac{9}{2} = 4{,}5 \ \in (3{,}5)$.

Θέμα 13177

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $(\alpha - 3) = 3 - \alpha$ και $(\beta + 2) = \beta + 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $(\alpha + \beta) + (\alpha - 3) - (\beta + 2)$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 13177

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3$ οπότε $\alpha - 3 \leq 0$ και άρα $(\alpha - 3) = 3 - \alpha$.

Επίσης είναι $-2 \leq \beta \leq -1$ οπότε $\beta + 2 \geq 0$ και άρα $(\beta + 2) = \beta + 2$.

β) Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$ έχουμε ότι $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$ οπότε $(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$.

Συνεπώς η παράσταση γίνεται :

$(\alpha + \beta) + (\alpha - 3) - (\beta + 2) = \alpha + \beta + 3 - \alpha - (\beta + 2) = \alpha + \beta + 3 - \alpha - \beta - 2 = 1$.

Θέμα 13178

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $\mathrm{M}(3,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $\mathrm{O}(0,0)$.

(Μονάδες 9)

β) Δίνεται το σημείο $\mathrm{N}(-3,\lambda)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $\mathrm{N}(-3,-4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M,N είναι συμμετρικά ως προς το O.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 13178

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας OM είναι $\alpha=\dfrac{4-0}{3-0}=\dfrac{4}{3}$ και η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y=\dfrac{4}{3}x$.

β)

i. Το σημείο N ανήκει στην ευθεία ΟΜ οπότε οι συντεταγμένες του N επαληθεύουν την εξίσωση της OM, δηλαδή ισχύει ότι : $\lambda=\dfrac{4}{3}\cdot(-3)\Leftrightarrow\lambda=-4$.

ii. Τα σημεία $\mathrm{M}(3,4)$ και $\mathrm{N}(-3,-4)$ έχουν αντίθετες συντεταγμένες, οπότε είναι συμμετρικά ως προς το O.

Θέμα 13266

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\alpha^2+4\alpha+5$ και $B=(2\beta+1)^2-1$, με $\alpha,\beta\in R$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει $A=(\alpha+2)^2+1$.

(Μονάδες 8)

β)

ix. Να δείξετε ότι $A+B\ \geq 0$.

(Μονάδες 9)

x. Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ισχύει $A+B=0$;

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 13266

ΛΥΣΗ

α) Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$(\alpha+2)^2+1=\alpha^2+4\alpha+2^2+1=\alpha^2+4\alpha+5=A$$

β)

i. Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$A + B \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha + 2)^2 + 1 + (2\beta + 1)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 \geq 0\,,$$

που ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

ii. Από το ερώτημα β)i) βλέπουμε ότι η ισότητα ισχύει για

$$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 = 0$$

η οποία ισχύει για:

$$((\alpha + 2)^2 = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; (2\beta + 1)^2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\left(\alpha = -2 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = -\frac{1}{2}\right).$$

Θέμα 13088

ΘΕΜΑ 2

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 13088

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2 = x^2$

β) Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε στην α) όπου x = 2021 και y=1 προκύπτει ότι το αριστερό μέλος είναι της μορφής: $2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2$ άρα θα είναι ίσο με το Α, επομένως και ίσο με το $x^2 = 2021^2$ επομένως ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 2021.

Θέμα 13054

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2 : y = (3 - 4\alpha)x + 4$,$\alpha \in R$.

α) Αν α=1, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

(Μονάδες 6)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 13054

ΛΥΣΗ

α) i. Με $\alpha = 1$ οι ευθείες είναι οι:

$$\varepsilon_1 : y = 7x - 4 \text{ και } \varepsilon_2 : y = -x + 4$$

ii. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_1 = 7 > 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_2 = -1 < 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β) Οι ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή μόνο όταν ισχύει $3\alpha + 4 = 3 - 4\alpha$. Είναι:

$$3\alpha + 4 = 3 - 4\alpha \Leftrightarrow 7\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{7}$$

Άρα η ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν $\alpha = -\frac{1}{7}$.

Θέμα 13053

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\dfrac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \dfrac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 13053

ΛΥΣΗ

α) i. Από την ισότητα $\alpha + \beta + \gamma = 0$, προκύπτει ότι $\beta + \gamma = -\alpha$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με τη βοήθεια του προηγούμενου υποερωτήματος, έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha^2}{-\alpha}=-\alpha\,.$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha\,.$$

Ομοίως, από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε $\gamma+\alpha=-\beta$ και $\alpha+\beta=-\gamma$, οπότε

$$\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta^2}{-\beta}=-\beta \text{ και } \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma^2}{-\gamma}=-\gamma\,.$$

Επομένως,

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

που είναι το ζητούμενο.

Θέμα 13033

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{2}x+4$.

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 4)

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x’x άξονα;

(Μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(6, 1), Β(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε).

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο (k , 5) να είναι σημείο της ευθείας (ε).

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 13033

ΛΥΣΗ

α)

i. Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha=-\frac{1}{2}$.

ii. Επειδή $\alpha<0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega<0$, οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία.

β) Θα εξετάσουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Για το σημείο Α: $-\frac{1}{2}\cdot 6+4=-3+4=1$, άρα το Α είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Β: $-\frac{1}{2}\cdot(-2)+4=1+4=5\neq 3$, άρα το Β δεν είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Γ: $-\frac{1}{2}\cdot 8+4=-4+4=0$, άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας.

γ) Θα πρέπει:

$$\begin{aligned}&5=-\frac{1}{2}\cdot k+4 \Leftrightarrow\\&1=-\frac{1}{2}\cdot k \Leftrightarrow\\&2=-k \Leftrightarrow\\&k=-2.\end{aligned}$$

Θέμα 13031

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση G, με $G(x)=\frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x=2,\quad x=0,\quad x=-\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 13031

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $G(2)=\frac{2\cdot 2+3}{2-4}=\frac{4+3}{-2}=-\frac{7}{2}$,

$$G(0)=\frac{2\cdot 0+3}{0-4}=-\frac{3}{4},$$

$$G(-\frac{1}{2})=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{-\frac{1}{2}-4}=\frac{-1+3}{-\frac{9}{2}}=\frac{2}{-\frac{9}{2}}=-\frac{4}{9}.$$

β) Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=4$, διότι η τιμή αυτή του x μηδενίζει τον παρονομαστή του κλάσματος στον τύπο της συνάρτησης.

γ) Αναζητούμε την τιμή του $x \neq 4$ για την οποία:

$$G(x)=3 \Leftrightarrow$$
$$\frac{2x+3}{x-4}=3 \Leftrightarrow$$
$$2x+3=3(x-4) \Leftrightarrow$$
$$2x+3=3x-12 \Leftrightarrow$$
$$x=15.$$

Θέμα 13026

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{pmatrix} x^2, & αν \ \ x \ \ άρρητος \\ 2x, & αν \ \ x \ \ ρητός \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(Μονάδες 10)

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $(f(x))^2 = 4x - 1$.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 13026

ΛΥΣΗ

α) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$

β) Αν x ρητός, τότε $f(x) = 2x$, οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(2x)^2 = 4x - 1$, δηλαδή $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$. Έτσι, $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Θέμα 13025

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $(-x-1) \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

Απάντηση Θέματος 13025

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ανίσωση γράφεται $\frac{-(3-2x)}{7} \geq 5$ οπότε $\frac{2x-3}{7} \geq 5 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 35$, άρα

$2x \geq 38 \Leftrightarrow x \geq 19$.

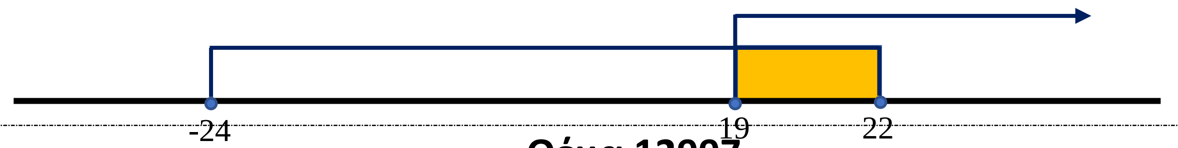
β) Καθώς οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$(\ x\ +\ 1\ )\ \leq\ 23 \Leftrightarrow -23 \leq x+1 \leq 23 \Leftrightarrow -23-1 \leq x \leq 23-1 \Leftrightarrow$

$-24 \leq x \leq 22$.

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα, απ΄όπου προκύπτει ότι

$19 \leq x \leq 22$.



Θέμα 12997

ΘΕΜΑ 2

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \to B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \to A$με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \to B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \to A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο Β στο σύνολο Α και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 12997

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση $f: A \to B$ δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο Β, καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Α σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου Β.

β) Η αντιστοίχιση από το σύνολο Β στο σύνολο Α θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο Β αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο Α, δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

Θέμα 12976

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-x-1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x)\leq -1$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 12976

ΛΥΣΗ

α) Επειδή α=2, β=-1 και γ=-1 η διακρίνουσα είναι

Δ= $(-1)^2-4\cdot 2(-1)=9>0$. Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες:

$x_1=\frac{-(-1)+\ \sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{4}{4}=1$ και $x_2=\frac{-(-1)-\ \sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$.

Επομένως το τριώνυμο γίνεται

$2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-1)(2x+1)$

Άρα έχουμε $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$.

β) Η ανίσωση γίνεται $x(1-2x)\leq -1 \Leftrightarrow -2x^2+x+1\leq 0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1\geq 0$

Έχουμε να λύσουμε ανίσωση δευτέρου βαθμού.

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης είναι το τριώνυμο του πρώτου ερωτήματος. Άρα μηδενίζεται για $x_1=1\ \ και\ \ x_2=-\frac{1}{2}$ και επειδή το α=2>0 προκύπτει:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		+	0	-	0	+	

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων το τριώνυμο θα είναι ομόσημο του α, δηλαδή θετικό για $x\leq -\frac{1}{2}$ ή $x\geq 1$.

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup[1,+\infty)$.

Θέμα 12943

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $\beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 12943

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}\right)=\frac{6}{2}=3$$

και

$$\alpha\cdot\beta=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{4}\left(3^2-\sqrt{5}^2\right)=\frac{1}{4}(9-5)=\frac{4}{4}=1$$

Άρα, $\alpha+\beta=3$ και $\alpha\cdot\beta=1$

β) Έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left(9+5+6\sqrt{5}+9+5-6\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 28=7$$

που είναι το ζητούμενο.

Υπόδειξη για εναλλακτική λύση.

Το ερώτημα (β) μπορεί να αποδειχθεί άμεσα από το (α) με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

Θέμα 12939

ΘΕΜΑ 2

Έστω η ευθεία ε_1: $y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα y’y στο Α (0, -6) και τον άξονα x’x στο σημείο Β(-3, 0).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

Απάντηση Θέματος 12939

ΛΥΣΗ

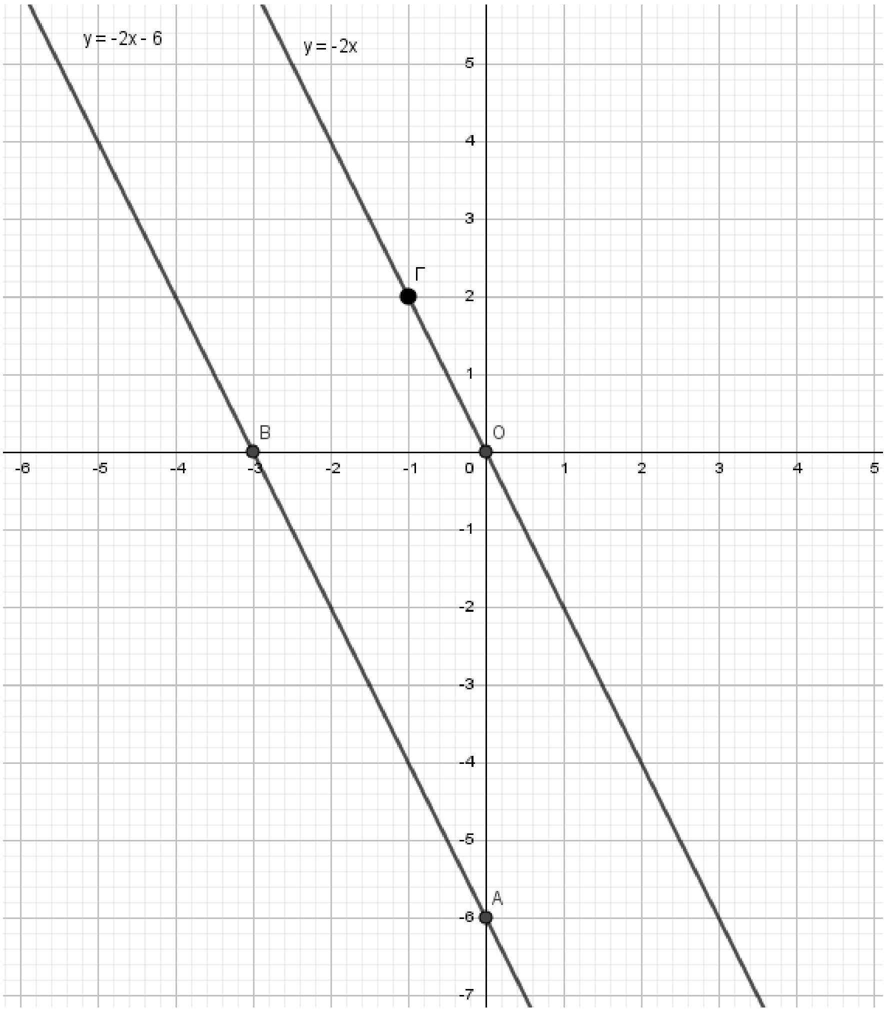
α) Αφού η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο Α(0,-6) ισχύει: $-6=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow -6=\beta$.

Τότε η ευθεία ε_1 παίρνει τη μορφή $y=\alpha x-6$. Επιπλέον αφού η ε_1 διέρχεται και από το σημείο Β(-3,0) έχουμε $0=\alpha\cdot(-3)-6 \Leftrightarrow 3\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-2$

Άρα η ευθεία ε_1 έχει τύπο $y=-2x-6$.

β) Αφού η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = \alpha x$. Επιπλέον οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες άρα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε η ευθεία ε_2 έχει τύπο $y = -2x$.

γ) Η ευθεία ε_1 διέρχεται από τα σημεία Α (0,-6) και Β(-3,0). Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το σημείο Ο (0, 0) και Γ(-1,2). Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι:



Θέμα 12922

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποίες $A = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in R$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 12922

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι η παράσταση $A = 0$, πρέπει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ που ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

β)Είναι: $A - B = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, ισχύει σαν τετράγωνο αριθμού.

γ)$A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Θέμα 12913

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της παραπάνω συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 12913

ΛΥΣΗ

α) Τα τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$, οπότε έχει δύο ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \dfrac{-2-4}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

και παραγοντοποιείται ως εξής : $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$.

β)

i. Πρέπει $x - 1 \neq 0$ δηλαδή $x \neq 1$ οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $\mathrm{A} = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii. Από το α) ερώτημα δείξαμε ότι $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ οπότε $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-1)} = x + 3$ για κάθε $x \in \mathrm{A} = \mathbb{R} - \{1\}$.

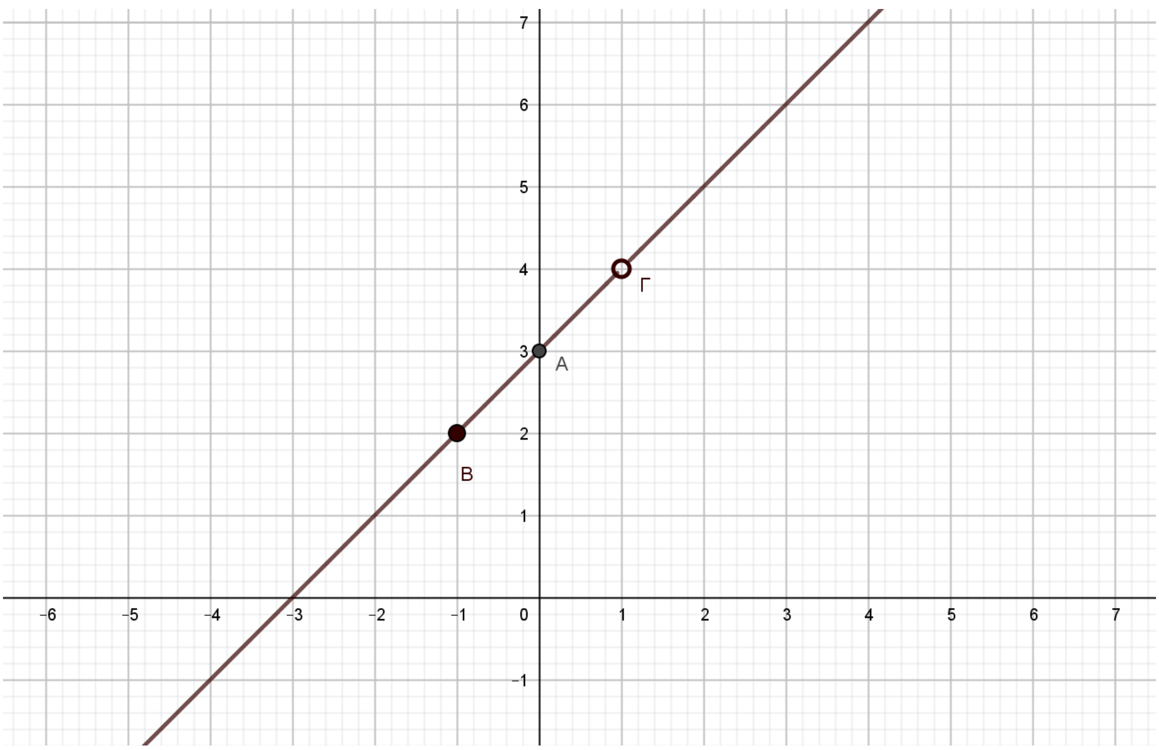
iii. Η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$ από την οποία θα εξαιρέσουμε το σημείο που έχει τετμημένη 1, αφού το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Για $x=0$ έχουμε $y=0+3$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y=x+3$ είναι το $\mathrm{A}(0,3)$.

Για $x=-1$ έχουμε $y=-1+3=2$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y=x+3$ είναι το $\mathrm{B}(-1,2)$.

Για $x=1$ έχουμε $y=1+3=4$ οπότε το σημείο της ευθείας $y=x+3$ που θα εξαιρέσουμε είναι το $\Gamma(1,4)$.

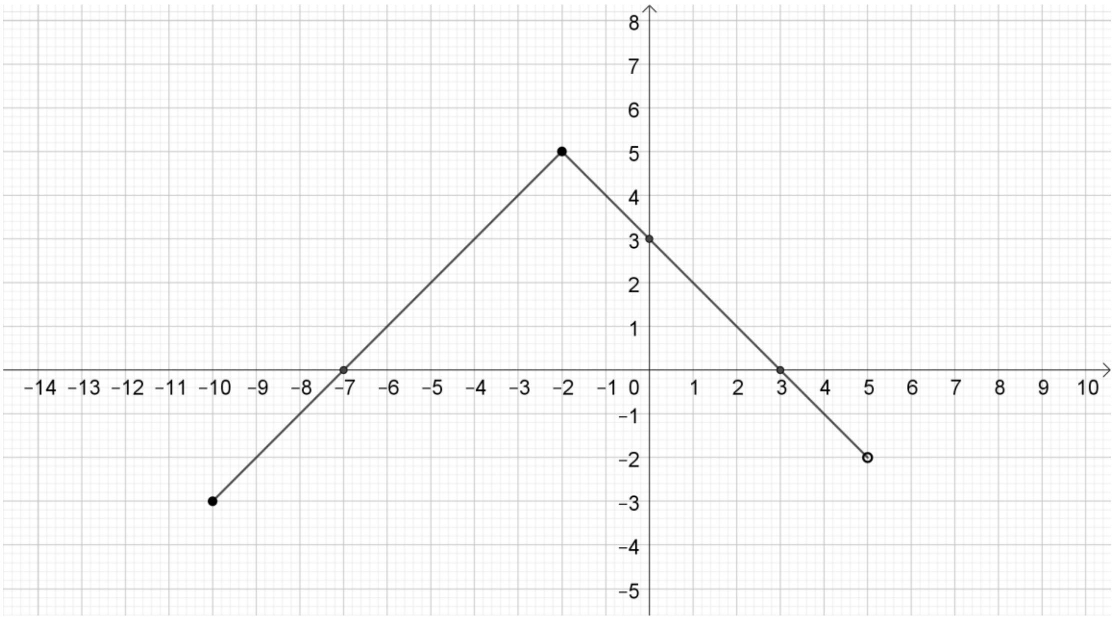
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Θέμα 12910

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σύνολο τιμών της f(A).

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(0), f(3).

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) = 0.

(Μονάδες 4)

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) < 0.

(Μονάδες 7)

Απάντηση Θέματος 12910

ΛΥΣΗ

α)$A = (-10,5)$ και $f(A) = (-3,5)$.

β) f(-2) = 5 , f(0)= 3 , f(3) = 0 .

γ) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-7$ ή $x=3$ (οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x΄x).

δ) $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in [-10,-7) \cup (3,5)$ (οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον x΄x).

Θέμα 12909

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3|<5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2,8)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $\mathrm{B}=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ και $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

(Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 12909

ΛΥΣΗ

α) $|x-3|<5 \Leftrightarrow -5<x-3<5 \Leftrightarrow -2<x<8 \Leftrightarrow x\in(-2,8)$.

β) Οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$ είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα (-2, 8), δηλαδή οι : -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4, 5, 6, 7.

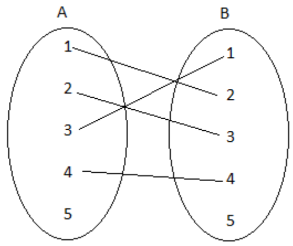
γ) Είναι $\mathrm{A}=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ και $\mathrm{B}=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$ οπότε:

$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ και $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{-1,0,3,4\}$.

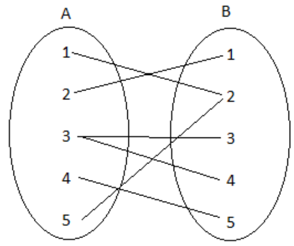
Θέμα 12908

ΘΕΜΑ 2

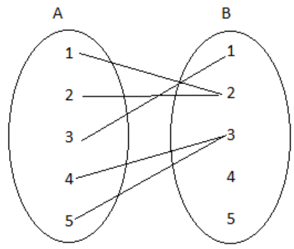
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το Α στο Β ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β.

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2).

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 12908

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι το 5 του συνόλου Α δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του Β.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι το 3 του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου Β.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

β)

i. Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathrm{A}=\{1,2,3,4,5\}$.

ii. Το σύνολο τιμών είναι το $f(\mathrm{A})=\{1,2,3\}$.

iii. Είναι $f(1)=f(2)=2$.

Θέμα 12857

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x=2\lambda-2$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την τιμή του λ, αν γνωρίζετε ότι ο αριθμός $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 12857

ΛΥΣΗ

α)

i. Για $\lambda = -2$ η εξίσωση γίνεται $(-2-1)x = 2\cdot(-2) - 2 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι $x = 2$.

ii. Για $x = 1$ έχουμε:

$(\lambda - 1)\cdot 1 = 2\lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

β) Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις αν και μόνο αν είναι της μορφής $0x = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\left(\begin{pmatrix}\lambda - 1 = 0\\ \kappa\alpha\iota\\ 2\lambda - 2 = 0\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Θέμα 12856

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία ε: y=αx+5.Αν η ευθεία δ : y=-3x-6 είναι παράλληλη στην (ε), τότε:

α)

xi. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε. (Μονάδες 6)

xii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 12856

ΛΥΣΗ

α)

i) Ισχύει ε//δ τότε οι δύο ευθείες θα έχουν την ίδια κλίση.

Η κλίση της ευθείας δ είναι -3. Άρα α=-3, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3.

ii) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον x΄x είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι α=-3<0.

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση y=-3x+5

Η ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο με τεταγμένη y=0.

Για y=0 έχουμε: -3x+5=0 <=>x = $\frac{3}{5}$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα x΄x είναι το ($\frac{3}{5}$,0)

Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με τετμημένη x=0. Για x=0 έχουμε: y=5.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y΄y είναι το (0,5)

Θέμα 12787

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2, \kappa, 2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

(Μονάδες 15)

Απάντηση Θέματος 12787

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση έχει συντελεστές $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$, και διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-6) = 25 > 0$ οπότε έχει άνισες ρίζες που είναι οι αριθμοί

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

β) Οι αριθμοί $\kappa - 2, \kappa, 2\kappa + 3, \kappa \in \mathbb{Z}$ με $\kappa > 0$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, μόνο όταν κανένας από αυτούς δεν είναι 0 και ισχύει:

$$\kappa^2 = (2\kappa + 3)(\kappa - 2) \Leftrightarrow \kappa^2 = 2\kappa^2 - 4\kappa - 6 + 3\kappa \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa = 3 \text{ ή } \kappa = -2 \text{ (από το ερώτημα (α)}$$

Η τιμή $\kappa = -2$ απορρίπτεται αφού πρέπει $\kappa > 0$, ενώ η τιμή $\kappa = 3$ είναι δεκτή. Άρα $\kappa = 3$.

Θέμα 12765

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 12765

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει:

$$x - 2 \geq 0.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = (2, +\infty)$.

β) Από τους αριθμούς : $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, ισχύει ότι $6 \in A$, οπότε είναι δυνατό να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης

$f(6) = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$.

Όμως, -1 < 2, άρα -1 δεν ανήκει στο Α.

Ακόμα $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2$, διότι ισοδύναμα $\sqrt{2} < 4$.

Συνεπώς για τους αριθμούς -1 και $\frac{\sqrt{2}}{2}$ η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

Θέμα 12763

Θέμα 2

Δίνεται μία πρόοδος α_ν με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$

α) Να εξετάσετε αν η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 12763

Λύση

α) Για να αποτελούν οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου θα έπρεπε να έχουν την ιδιότητα $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$.

Δηλαδή ισοδύναμα $2\sqrt{2} = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{3}{2}$, το οποίο δεν ισχύει, διότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, ενώ ο $\frac{3}{2}$ είναι ρητός.

β) Για την πρόοδο (α_ν) ισχύει ότι $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, οπότε αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = \sqrt{2}$.

Εφόσον η (α_ν) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο, ο ν-οστός της όρος θα έχει τη μορφή $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, όπου α_1, λ, ο πρώτος όρος και ο λόγος της προόδου αντίστοιχα.

Επειδή $\alpha_1 = 2$, $\lambda = \sqrt{2}$ ο ν-οστός όρος είναι: $\alpha_\nu = 2 \cdot (\sqrt{2})^{\nu-1}$.

Θέμα 12730

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3). Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ, αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 12730

ΛΥΣΗ

α) Αφού η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°, η κλίση της ευθείας θα είναι $\alpha = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$. Άρα η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \beta$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$, θα ισχύει $3 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$.

Άρα η ευθεία είναι η $y = x + 3$.

β) Αφού οι ευθείες $y = x + 3$ και $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλες, θα έχουν την ίδια κλίση, άρα $\lambda = 1$. Οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \kappa$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(2,0)$,) θα ισχύει $0 = 2 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -2$.

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = x - 2$.

Θέμα 12729

ΘΕΜΑ 2

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή. Η σχέση της απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) με το χρόνο (sec), φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

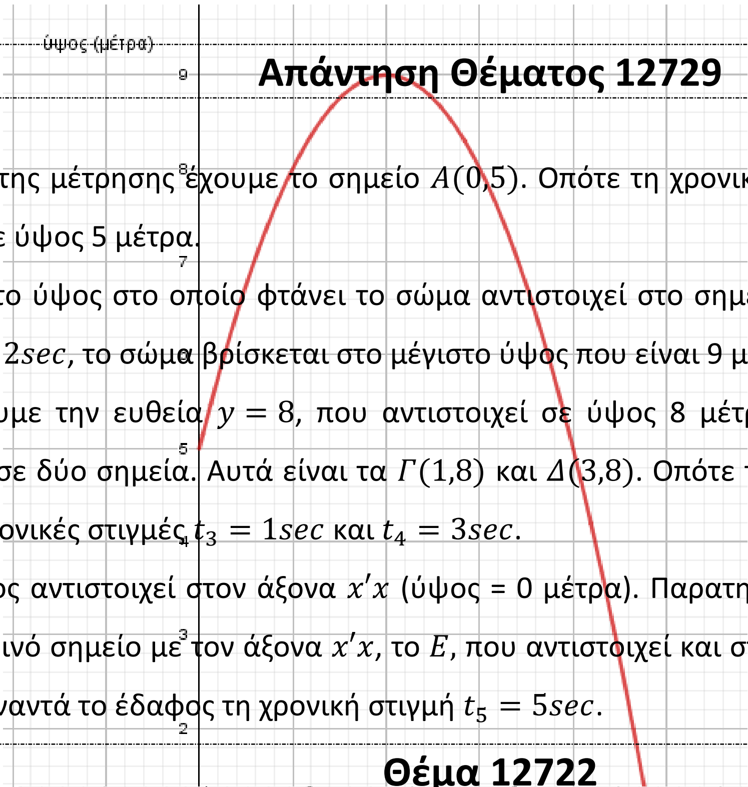
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα συναντά το έδαφος.

(Μονάδες 6)



Απάντηση Θέματος 12729

ΛΥΣΗ

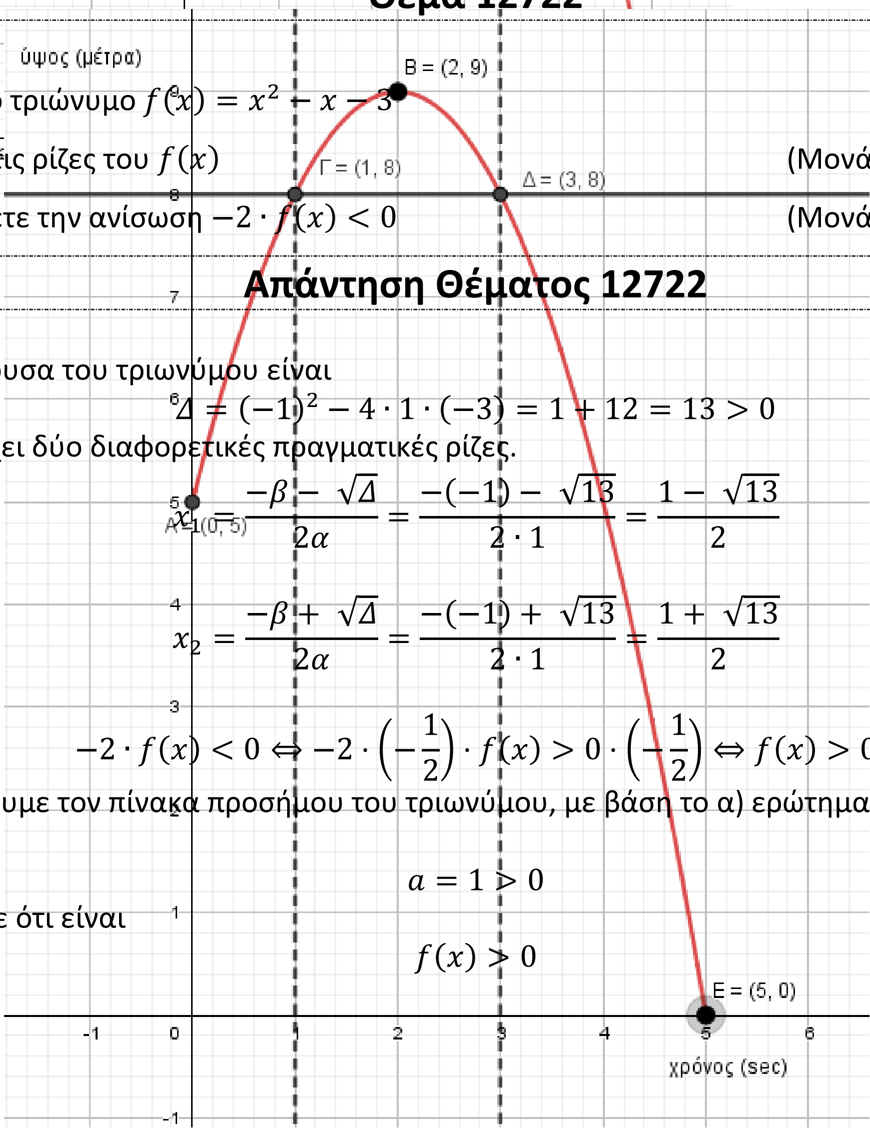
α) Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο $A(0,5)$. Οπότε τη χρονική στιγμή $t_1 = 0sec$, το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.

β) Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο $B(2,9)$. Οπότε τη χρονική στιγμή $t_2 = 2sec$, το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος που είναι 9 μέτρα.

γ) Αν φέρουμε την ευθεία $y = 8$, που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων, θα δούμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία. Αυτά είναι τα $\Gamma(1,8)$ και $\Delta(3,8)$. Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές $t_3 = 1sec$ και $t_4 = 3sec$.

δ) Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα $x'x$ (ύψος = 0 μέτρα). Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το E, που αντιστοιχεί και στο τέλος της μέτρησης. Οπότε το σώμα συναντά το έδαφος τη χρονική στιγμή $t_5 = 5sec$.

Θέμα 12722



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

α)Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$ (Μονάδες 12)

β)Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$ (Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 12722

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$$

Άρα το f(x) έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) - \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

και

$$x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) + \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

β)

$$-2 \cdot f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(x) > 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου, με βάση το α) ερώτημα. Καθώς είναι

$$a = 1 > 0$$

παρατηρούμε ότι είναι

$$f(x) > 0$$

για

$$x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty)$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+	

Θέμα 12686

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 12686

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνον αν $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = R - (1)$.

β) Το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f μόνο όταν $f(2) = 4$.

Είναι: $f(2) = \frac{2.2}{2-1} = 4$, άρα το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει και τους δύο άξονες στο κοινό τους σημείο $O(0,0)$.

Θέμα 12631

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$

και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α (4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2). (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες. (Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 12631

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ και η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε έχει κλίση $\alpha_2 = \frac{3}{4}$.

β) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο Α(4, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$1 = \frac{3}{4} \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow 1 = 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2 .$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x - 2$.

γ) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, -2), αφού για x = 0 βρίσκουμε $y = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$ και τον άξονα *x'x* στο σημείο $(\frac{8}{3}, 0)$, αφού για y = 0 έχουμε:

$$0=\frac{3}{4}x-2 \quad \Leftrightarrow$$
$$2=\frac{3}{4}x \quad \Leftrightarrow$$
$$8=3x \quad \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{8}{3}$$

Θέμα 12673

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

Απάντηση Θέματος 12673

ΛΥΣΗ

α) Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$, οπότε , $\frac{3}{\alpha}>\frac{3}{\beta}$. Επομένως, $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

β) Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\alpha^3<\beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$, οπότε με πρόσθεση των δυο ανισοτήτων παίρνουμε:

$$\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$$

που είναι το ζητούμενο.

Θέμα 12685

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:
$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση Θέματος 12685

Λύση

α) Κάνοντας πράξεις στη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} + \beta \cdot \frac{1}{\beta} = 4, \tau ó \tau \varepsilon$$
$$1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 4, \tau ó \tau \varepsilon$$
$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Θέμα 12684

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο Α (-4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

Απάντηση Θέματος 12684

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ και η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα y’y στο σημείο (0, -2), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 2 = -2$.

β) Η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε έχει κλίση $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον $x'x$ άξονα ισούται με $-\frac{1}{2}$ (εφω = $-\frac{1}{2}$).

γ) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=-\frac{1}{2}x+\beta$ και διέρχεται από το σημείο A (-4, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$1=-\frac{1}{2}\cdot(-4)+\beta \Leftrightarrow 1=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-1.$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y=-\frac{1}{2}x-1$.

Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, -1), αφού για $x=0$ βρίσκουμε $y=-\frac{1}{2}\cdot 0-1=-1$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2,0)$, αφού για $y=0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&0=-\frac{1}{2}x-1 \quad \Leftrightarrow\\
&1=-\frac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow\\
&2=-x \quad \Leftrightarrow\\
&x=-2
\end{aligned}$$

Θέμα 12680

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(4,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο Ν(-1,-2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

Απάντηση Θέματος 12680

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει και αρκεί να ισχύει: $x\geq 0$ και $\sqrt{x}-1\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το Α = [0,1)U(1,+∞).

β) Έχουμε: $f(4)=\frac{3}{\sqrt{4}-1}=3$, άρα το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Το $x=-1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Άρα το σημείο Ν δεν μπορεί να ανήκει στη γραφική της παράσταση.