Λύσεις φυλλάδιο 6.1 (Α12)

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) $p(x) = \dfrac{x-5}{x^2+2x+3}$ πρέπει $x^2+2x+3 \neq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4-4\cdot 1\cdot 3 = -8$

δηλ. $\Delta < 0$ και

Αφού $\Delta<0$ τότε δεν έχει ρίζες και άρα δεν μηδενίζεται πουθενά άρα $x^2+2x+3 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2+2x+3	$+$	

Άρα $A_p = \mathbb{R}$

β) $h(x) = \dfrac{x-5}{x^4-27x}$ πρέπει $x^4 - 27x \neq 0 \Leftrightarrow$

$x(x^3-27) \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \neq 0$ και $x^3 - 27 \neq 0 \Leftrightarrow$

$x^3 \neq 3^3 \Leftrightarrow$

$\sqrt[3]{x^3} \neq \sqrt[3]{3^3} \Leftrightarrow$

$x \neq 3$

Άρα $A_h = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$

γ) $\varphi(x) = \dfrac{x+2}{x^4+9x^2}$ πρέπει $x^4 + 9x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x^2+9) \neq 0 \Leftrightarrow$

$x^2 \neq 0$ και $x^2+9 \neq 0$

$x \neq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $A_\varphi = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

ή $A_\varphi = \mathbb{R} - \{0\}$ ή $A_\varphi = \mathbb{R}^*$

Scanned with CamScanner

δ) $h(x) = \dfrac{x-3}{|x-2|-|2x-1|}$

πρέπει $|x-2|-|2x-1| \neq 0 \Leftrightarrow$

$|x-2| \neq |2x-1| \Leftrightarrow$

$x-2 \neq 2x-1$ και $-x+2 \neq 2x-1$

$2x-x \neq -2+1$ και $3x \neq 2+1$

$x \neq -1$ και $3x \neq 3$

$x \neq -1$ και $x \neq 1$

Άρα $A_h = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

ε) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ πρέπει $\left.\begin{matrix} \sqrt{|x|-x} \neq 0 \\ \text{και} \\ |x|-x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ πρέπει $|x|-x > 0 \Leftrightarrow$

$|x| > x \Leftrightarrow$

άρα $A_h = (-\infty, 0)$ $\qquad x < 0$

στ) $p(x) = \sqrt{|x|+x}$ πρέπει $|x|+x \geq 0 \Leftrightarrow$

$|x| \geq -x \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R}$

Άρα $A_p = \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

γ) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+4|x|+3}$ πρέπει $x^2+4|x|+3 \neq 0 \Leftrightarrow$

$|x|^2+4|x|+3 \neq 0 \Leftrightarrow$

θέτω $|x| = w$ και

$w^2+4w+3 \neq 0$

Έχω $w^2+4w+3=0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$= 16-4\cdot 1\cdot 3 = 4$

$w_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-4\pm 2}{2}$

$w_1 = -1$, $w_2 = -3$

άρα $w \neq -1$ και $w \neq -3$

$|x| \neq -1$ και $|x| \neq -3$

• Αν $x \geq 0$ τότε:

$|x| \neq -1$ και $|x| \neq -3$

$x \neq -1$ και $x \neq -3$

(απορ) (απορ)

• Αν $x < 0$ τότε:

$|x| \neq -1$ και $|x| \neq -3$

$-x \neq -1$ και $-x \neq -3$

$x \neq 1$ και $x \neq 3$

(απορ) (απορ)

Άρα $A_h = \mathbb{R}$

η) $h(x) = \sqrt{|x-2|} + 1$

πρέπει $|x-2| \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
άρα $A_h = \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

θ) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|}$

πρέπει $|x-1| > 0$, και $2-|x| \geq 0$

$(x-1>0$ ή $-x+1>0)$ και $2 \geq |x|$

$(x>1$ ή $x<1)$ και $|x| \leq 2$

$x \neq 1$ και $-2 \leq x \leq 2$

Άρα $A_h = [-2, 1) \cup (1, 2]$

ι) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+5} + \sqrt{8-x}}{(x^2+5x+6)(|x-3|-2)}$

Πρέπει $(x^2+5x+6)(|x-3|-2) \neq 0$ και $x+5 \geq 0$ και $8-x \geq$

$\Leftrightarrow$ $x^2+5x+6 \neq 0$ και $|x-3|-2 \neq 0$ και $x \geq -5$ και $x \leq 8$

$\Leftrightarrow$ $x \neq -2$ και $x \neq -3$ και $x \neq 1$ και $x \neq 5$ και $x \geq -5$

και $x \leq 8$

Αφού:

- $x^2+5x+6=0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-5+1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

$x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-5-1}{2} = x = -3$

Άρα $x^2+5+6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $x \neq -3$

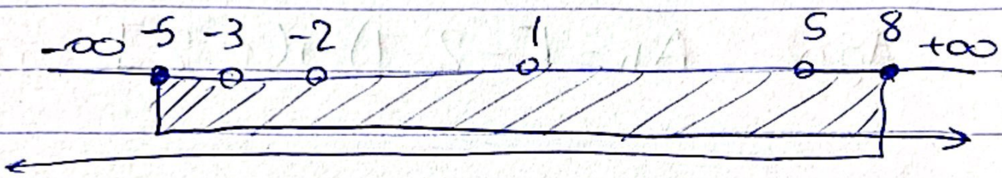
Scanned with CamScanner

• $|x-3|-2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$|x-3| \neq 2$

$x-3 \neq 2$ και $x-3 \neq -2$

$x \neq 5$ και $x \neq 1$



Άρα $A_g = [-5,-3) \cup (-3\ -2) \cup (-2,1) \cup (1,5) \cup (5,8]$

(ή αλλιώς $A_g = [-5,8] - \{-3,-2,1,5\}$

ΑΣΚ 2 **α)** Το πεδίο ορισμού της f είναι το:

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

β) Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$ έχει ρίζες:

$$x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = 1$$

Άρα ισχυει ότ

$$2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1) = (2x-3)(x-1)$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \frac{(2x-3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Scanned with CamScanner

ΣΥΝΘΕΣΗ

ΣΚΕΨΗ

Προσέχω ότι στο (γ) λέει «για κάθε $x \in \mathbb{R}$»

Έχοντας πει: για $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (που είναι το πεδίο ορισμού) "προχωράω" την συνάρτηση παρα-κάτω και φτάνω στον τύπο

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Επειδή όμως έχω ήδη πάρει περιορισμούς $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ τότε μέσα στο σύνολο αυτό ο παραπάνω τύπος, δεν έχει επιπλέον περιορισμούς και άρα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

$$f(x)=\begin{cases} 2x-5, & αν\ x\geq 0 \\ -x^2+7, & αν\ x<0 \end{cases}$$

α) Ορίζεται για όλα τα x εκτός από και των δύο κλάδων

- 1ος κλάδος: $A_1=[0,+\infty)$
- 2ος κλάδος: $A_2=(-\infty,0)$

Άρα $A_f=A_1\cup A_2=\mathbb{R}$

β) (β1) $f(-3)=-(-3)^2+7=-9+7=-2$

(β2) $f(5/2)=\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}-5=5-5=0$

(β3) $f(0)=2\cdot 0-5=-5$

(β4) $f(-\sqrt{3})=-(-\sqrt{3})^2+7=-3+7=4$

γ) Θα λύσω την $f(x)=3$ για κάθε κλάδο ξεχωριστά και στο τέλος θα πάρω

- για $x\geq 0$ έχω $f(x)=3 \Leftrightarrow$
  $2x-5=3 \Leftrightarrow$
  $2x=8 \Leftrightarrow$
  $x=4$ (δεκτή)
- για $x<0$ έχω $f(x)=3 \Leftrightarrow$
  $-x^2+7=3 \Leftrightarrow$
  $x^2=4 \Leftrightarrow$
  $x=2$ ή $x=-2$ (δεκτή)
  (απορ)

→ Άρα $f(x)=3 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=2$

Scanned with CamScanner

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \text{αν } x \leq 3 \\ x^2, & \text{αν } 3 < x < 10 \end{cases}$$

α) 1ος κλάδος: $A_1 = (-\infty, 3]$
2ος κλάδος: $A_2 = (3, 10)$

$A_f = A_1 \cup A_2 = (-\infty, 10]$

β) $f(-1) = 2(-1) - 5 = -2 - 5 = -7$
$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$
$f(5) = 5^2 = 25$

γ) $f(x) = 25$

- για $x \leq 3$ έχω $f(x) = 25 \Leftrightarrow$
$2x - 5 = 25 \Leftrightarrow$
$2x = 30 \Leftrightarrow$
$x = 15$ (απορρ)

- για $3 < x < 10$ έχω $f(x) = 25 \Leftrightarrow$
$x^2 = 25 \Leftrightarrow$
$x = 5$ ή $x = -5$
(δεκτή) (απορρ)

Άρα $f(x) = 25 \Leftrightarrow x = 5$

Scanned with CamScanner

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$f(x) = \frac{x^3-16x}{x-4}$$

α) πρέπει $x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ άρα $A_f = \mathbb{R}-\{4\}$

και $f(x) = \frac{x^3-16x}{x-4} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x(x^2-16)}{x-4} \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{x\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}$

αφού $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-4$
και άρα $x^2-16=(x-4)(x+4)$

και $f(x) = x(x+4)$
$f(x) = x^2+4x$ για $x \in A_f$

β) Για $x \in \mathbb{R}-\{4\}$ έχω:
$f(x)=32 \Leftrightarrow x^2+4x=32 \Leftrightarrow$
$x^2+4x-32=0$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 16-4\cdot1\cdot(-32) = 128+16 = 144$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm 12}{2}$ → $x_1 = 4$ (απορ) → $x_2 = -8$ (δεκτή)

Άρα $f(x)=32 \Leftrightarrow x=-8$