

# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΘΕΜΑ Α

**A1.**

Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού  $\alpha$ . (Μονάδες 7)

**A2.**

Να αποδείξετε ότι, για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

(Μονάδες 8)

**A3.**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν  $\alpha < \beta$  και  $x < \delta$ , τότε  $\alpha \cdot y < \beta \cdot \delta$  (Μονάδες 2)

ii. Για κάθε  $\theta \in (0, +\infty)$  ισχύει:  $|x| < \theta \iff -\theta < x < \theta$ . (Μονάδες 2)

iii. Η εξίσωση  $x^3 = -1$  είναι αδύνατη για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 2)

iv. Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  έχει πάντοτε πραγματικές λύσεις αν η διακρίνουσα είναι μη αρνητική. (Μονάδες 2)

v. Ισχύει  $|\pi - 3| = \pi - 3$ . (Μονάδες 2)

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παράσταση  $A = |x - 1| + |y - 3|$ , με  $x, y$  πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει:

$$1 < x < 4 \quad \text{και} \quad 2 < y < 3$$

Να αποδείξετε ότι:

**B1.**

$$A = x - y + 2$$

(Μονάδες 12)

**B2.**

$$0 < A < 4$$

(Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}, \quad B = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

**Γ1.**

Να δείξετε ότι:

$$A = 2\sqrt{5}$$

(Μονάδες 6)

**Γ2.**

Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

$$(3 + \sqrt{2})^2, \quad (3 - \sqrt{2})^2$$

(Μονάδες 6)

Γ3.

Να δείξετε ότι:

$$B = 2\sqrt{2}$$

(Μονάδες 6)

Γ4.

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{|x-2|}{B\sqrt{2}} = \frac{|2-x|}{A\sqrt{5}} - \frac{5}{3}$$

όπου  $A, B$  οι παραπάνω παραστάσεις.

(Μονάδες 7)

## ΘΕΜΑ Δ

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύουν ως ισότητες.

(ι)  $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ .

(Μονάδες 4)

(ιι)  $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$ .

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$$

.

(ι) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ορίζεται η παράσταση  $A$ .

(ιι) Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση  $A$  μπορεί να πάρει την τιμή  $\frac{9}{16}$ .

(Μονάδες 6)