ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ.
Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β. Είναι γνωστό ότι:

Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνά τους θα είναι ίσα.

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός «$\alpha^2 = \beta^2$» θα είναι αληθής.

Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» συνεπάγεται τον ισχυρισμό «$\alpha^2 = \beta^2$» και γράφουμε: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$.

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q** και γράφουμε $\mathbf{P \Rightarrow Q}$.

Ο ισχυρισμός « $\mathbf{P \Rightarrow Q}$ » λέγεται **συνεπαγωγή** και πολλές φορές διαβάζεται **«αν P, τότε Q».** Ο P λέγεται **υπόθεση** της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται **συμπέρασμα** αυτής[1].

---

[1] Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι, η συνεπαγωγή «$P \Rightarrow Q$» είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν μπορούν να εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή.

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^2=\beta^2 \qquad (1)$$

και

$$\alpha=\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma \qquad (2),$$

που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α, β και γ.

Παρατηρούμε ότι:

✓ Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή <u>δεν ισχύει</u> η συνεπαγωγή $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2=3^2$, ενώ $-3\neq 3$.

✓ Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:

$$\alpha+\gamma=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$$

Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι <u>ισοδύναμοι</u> και γράφουμε:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma.$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P, να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q, να αληθεύει και ο P, τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως** ή, αλλιώς, ότι **ο P είναι ισοδύναμος με τον Q** και γράφουμε $\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$.

Ο ισχυρισμός **«$P \Leftrightarrow Q$»** λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται **«P αν και μόνο αν Q»**.

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε α = 0 ή β = 0. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \ \text{ ή } \ \beta=0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P ή Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>ένας τουλάχιστον</u> από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός **«P ή Q»** λέγεται **διάζευξη** των P και Q.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $x^2 - x$ και $x^2 - 1$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

✓ Για $x = 1$ αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, ενώ

✓ Για $x = 0$ αληθεύει μόνο η πρώτη και για $x = -1$ αληθεύει μόνο η δεύτερη.

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

> *«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνο αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».*

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P και Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>και οι δύο</u> ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός **«P και Q»** λέγεται **σύζευξη** των P και Q.
Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x-1) = 0 \text{ και } (x-1)(x+1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για $x = 1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	$\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$	Α	Ψ
2.	$\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$	Α	Ψ
3.	$\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$	Α	Ψ
4.	$\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$	Α	Ψ
5.	$\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$	Α	Ψ
6.	$\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$	Α	Ψ
7.	$\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$	Α	Ψ
8.	$\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$	Α	Ψ
9.	$\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$	Α	Ψ

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α′ με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό από την ομάδα Β′.

Α′ ΟΜΑΔΑ	
1	$x(x-2)=0$
2	$x(x-2)\neq 0$
3	$x^2=4$
4	$x^2=4$ και $x<0$
5	$x(x-2)=0$ και $x(x-1)=0$
6	$x^2=4$ και $x>0$

Β′ ΟΜΑΔΑ	
Α	$x\neq 0$ και $x\neq 2$
Β	$x=2$
Γ	$x=-2$ ή $x=2$
Δ	$x=0$
Ε	$x=0$ ή $x=2$
Ζ	$x=-2$