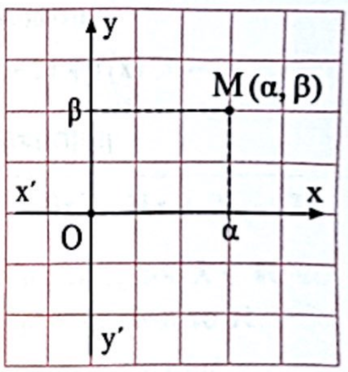
27 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Βασική θεωρία και εφαρμογές

27.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες

Ένα ζεύγος δύο κάθετων αξόνων x′x και y′y, οι οποίοι έχουν κοινή αρχή ένα σημείο **O**, το ονομάζουμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy, ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε αυτό το σύστημα το ονομάζουμε **καρτεσιανό επίπεδο**.

- Από τους δύο παραπάνω άξονες, ο οριζόντιος (ο x′x) λέγεται **άξονας των τετμημένων ή άξονας των x**, ενώ ο κατακόρυφος (ο y′y) λέγεται **άξονας των τεταγμένων ή άξονας των y**.
- Με τη βοήθεια ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών σε ένα σημείο Μ του επιπέδου και αντιστρόφως, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε το σημείο Μ συμβολίζεται Μ(α, β). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου Μ. Ειδικότερα, το α ονομάζεται **τετμημένη** και το β **τεταγμένη** του σημείου Μ.



- Αν $\alpha \neq \beta$, τότε το σημείο (α, β) είναι διαφορετικό από το σημείο (β, α).
- Δεν πρέπει να συγχέουμε το διατεταγμένο ζεύγος (α, β) με το σύνολο {α, β}.

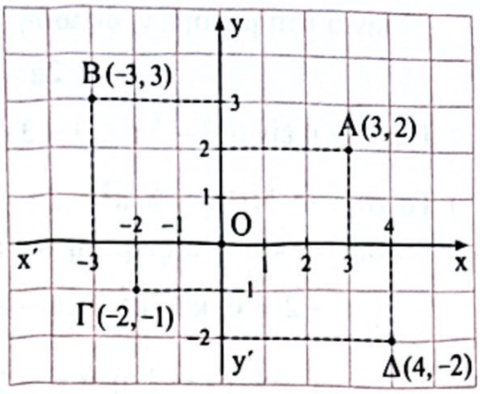
Εφαρμογή

Να σχεδιάσετε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy και στη συνέχεια να σημειώσετε πάνω σε αυτό τα σημεία:

$$A(3, 2), \quad B(-3, 3), \quad \Gamma(-2, -1) \quad \text{και} \quad \Delta(4, -2)$$

Λύση

Τα σημεία Α(3, 2), Β(−3, 3), Γ(−2, −1) και Δ(4, −2) φαίνονται στο διπλανό καρτεσιανό επίπεδο.



Στο διπλανό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι μονάδες των αξόνων x′x και y′y έχουν το ίδιο μήκος. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.

27.2 Σημεία των αξόνων

α) Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία Α(3, 0), Β(0, 2), Γ(−2, 0) και Δ(0, −1).

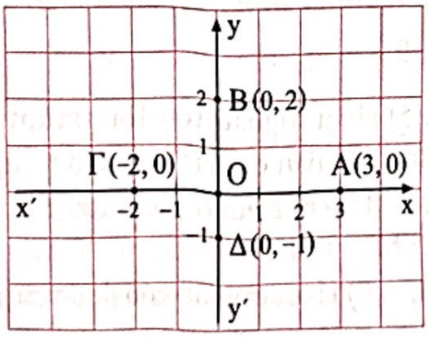
β) Δίνεται το σημείο Μ(2α − 8, 9 − 3α). Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ όταν αυτό βρίσκεται:

i) στον άξονα x′x, ii) στον άξονα y′y.

γ) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $N(|\alpha| - 2, \alpha^2 - 2\alpha - 8)$ να ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων.

Λύση

α) Τα σημεία Α(3, 0) και Γ(−2, 0) βρίσκονται στον άξονα x′x, ενώ τα σημεία Β(0, 2) και Δ(0, −1) βρίσκονται στον άξονα y′y. Όλα τα σημεία αυτά φαίνονται στο παρακάτω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.



- *Ένα σημείο της μορφής $M(\alpha, 0)$ βρίσκεται στον άξονα $x'x$.*
- *Ένα σημείο της μορφής $M(0, \beta)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$.*

Ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ βρίσκεται:

- *στον άξονα $x'x$, όταν $\beta = 0$,*
- *στον άξονα $y'y$, όταν $\alpha = 0$.*

Η αρχή των αξόνων, που είναι κοινό σημείο και των δύο αξόνων, είναι το σημείο $O(0, 0)$.

β) i) Το σημείο Μ(2α − 8, 9 − 3α) βρίσκεται στον άξονα x′x όταν η τεταγμένη του είναι ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$9 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow -3\alpha = -9 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-9}{-3} \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Για $\alpha = 3$ είναι $2\alpha - 8 = 2 \cdot 3 - 8 = -2$. Άρα είναι το σημείο $M(-2, 0)$.

είναι ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$2\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

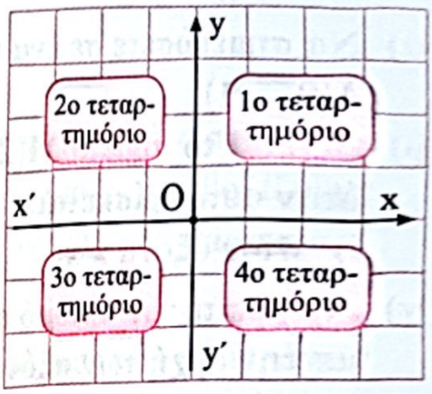
Για $\alpha = 4$ είναι $9 - 3\alpha = 9 - 3 \cdot 4 = -3$. Άρα είναι το σημείο $M(0, -3)$.

γ) Το σημείο $N(|\alpha| - 2, \alpha^2 - 2\alpha - 8)$ ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων όταν η τετμημένη και η τεταγμένη του είναι ίσες με μηδέν. Δηλαδή:

$$(|\alpha| - 2 = 0 \text{ και } \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0) \Leftrightarrow (|\alpha| = 2 \text{ και } (\alpha = -2 \text{ ή } \alpha = 4)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\alpha = 2 \text{ ή } \alpha = -2) \text{ και } (\alpha = -2 \text{ ή } \alpha = 4)) \Leftrightarrow \alpha = -2$$

27.3 Τεταρτημόρια



Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, το 1ο, το 2ο, το 3ο και το 4ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το $M(\alpha, \beta)$ είναι σημείο του:

- 1ου τεταρτημορίου, τότε $\alpha > 0$ και $\beta > 0$,
- 2ου τεταρτημορίου, τότε $\alpha < 0$ και $\beta > 0$,
- 3ου τεταρτημορίου, τότε $\alpha < 0$ και $\beta < 0$,
- 4ου τεταρτημορίου, τότε $\alpha > 0$ και $\beta < 0$,

και αντίστροφα.

Εφαρμογή

Να βρείτε:

α) σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει καθένα από τα σημεία $A(3, 5)$, $B(-4, 2)$, $\Gamma(-1, -6)$ και $\Delta(5, -7)$,

β) για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σημείο $M(|\alpha - 1| - 4, \alpha^2 - \alpha - 2)$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Λύση

α)
- Ισχύει $3 > 0$ και $5 > 0$, άρα το $A(3, 5)$ είναι σημείο του 1ου τεταρτημορίου.
- Ισχύει $-4 < 0$ και $2 > 0$, άρα το $B(-4, 2)$ είναι σημείο του 2ου τεταρτημορίου.
- Ισχύει $-1 < 0$ και $-6 < 0$, άρα το $\Gamma(-1, -6)$ είναι σημείο του 3ου τεταρτημορίου.
- Ισχύει $5 > 0$ και $-7 < 0$, άρα το $\Delta(5, -7)$ είναι σημείο του 4ου τεταρτημορίου.

β) Το σημείο $M(|\alpha - 1| - 4, \alpha^2 - \alpha - 2)$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο όταν ισχύουν:

$$|\alpha - 1| - 4 < 0 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \alpha^2 - \alpha - 2 > 0 \quad (2)$$

Έχουμε:

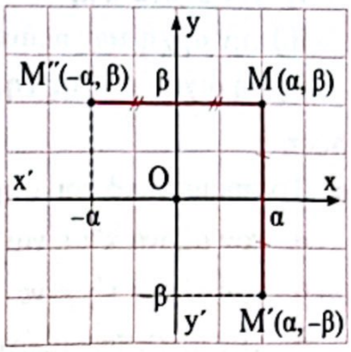
- $(1) \Leftrightarrow |\alpha - 1| - 4 < 0 \Leftrightarrow |\alpha - 1| < 4 \Leftrightarrow -4 < \alpha - 1$
- $(2) \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha < -1 \text{ ή } \alpha > 2)$

Συναληθεύοντας τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\alpha \in (-3, -1) \cup (2, 5)$$

27.4 Συμμετρικά σημεία

Σημεία συμμετρικά ως προς τους άξονες



- Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.
- Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M''(-\alpha, \beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

Επομένως δύο σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $N(\alpha', \beta')$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι:

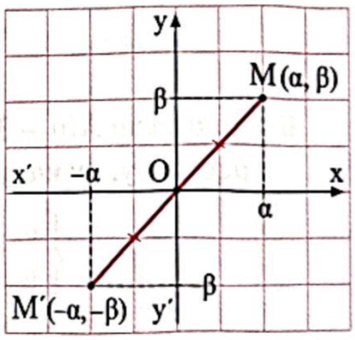
- συμμετρικά ως προς τον **άξονα $x'x$**, μόνο όταν έχουν την **ίδια τετμημένη** και **αντίθετες τεταγμένες**, δηλαδή:

$$\alpha' = \alpha \quad \text{και} \quad \beta' = -\beta$$

- συμμετρικά ως προς τον **άξονα $y'y$**, μόνο όταν έχουν **αντίθετες τετμημένες** και την **ίδια τεταγμένη**, δηλαδή:

$$\alpha' = -\alpha \quad \text{και} \quad \beta' = \beta$$

Σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων



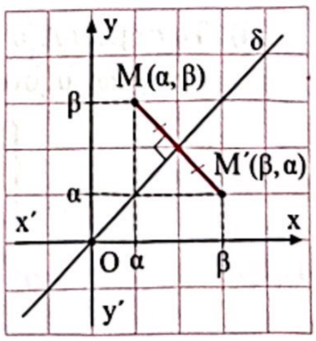
Τα σημεία:

$$M(\alpha, \beta) \quad \text{και} \quad M'(-\alpha, -\beta)$$

είναι συμμετρικά ως προς την αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων. Επομένως τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $N(\alpha', \beta')$ είναι συμμετρικά ως προς **την αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων**, όταν έχουν **αντίθετες τις τετμημένες και τις τεταγμένες τους**, δηλαδή:

$$\alpha' = -\alpha \quad \text{και} \quad \beta' = -\beta$$

Σημεία συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων



Η γωνία $\widehat{xOy}$ είναι η 1η και η γωνία $\widehat{x'Oy'}$ είναι η 3η γωνία των αξόνων. Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\beta, \alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο δ της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων. Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $N(\alpha', \beta')$ είναι συμμετρικά ως προς **τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας** των αξόνων, όταν **η τετμημένη του καθενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου**, δηλαδή:

$$\alpha' = \beta \quad \text{και} \quad \beta' = \alpha$$

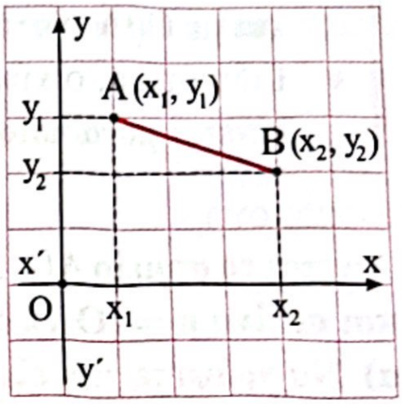
iv) Τα σημεία $A(\alpha-3,\ \beta+6)$ και $B(2\alpha+9,\ 2\beta-3)$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων, αν και μόνο αν:

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha-3=2\beta-3\\ \beta+6=2\alpha+9\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha=2\beta\\ \beta+6=2\cdot 2\beta+9\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha=2\beta\\ \beta-4\beta=9-6\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha=2\beta\\ -3\beta=3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=-2\\ \beta=-1\end{array}\right.$$

27.5 Απόσταση σημείων

Έστω $A(x_1,\ y_1)$ και $B(x_2,\ y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Η απόσταση (AB) των σημείων αυτών δίνεται από τον τύπο:



$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η AB είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ ή με τον άξονα $y'y$.

Εφαρμογή

Δίνονται τα σημεία $A(-1,\ 2)$, $B(2,\ 1)$ και $\Gamma(-2,\ -1)$.

α) Να βρείτε τις αποστάσεις (AB), (ΒΓ) και (ΑΓ).

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση

α) Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

- $(AB)=\sqrt{(2-(-1))^2+(1-2)^2}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$
- $(B\Gamma)=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$
- $(A\Gamma)=\sqrt{(-2-(-1))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

β) Ισχύει $(AB)=(A\Gamma)=\sqrt{10}$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Επίσης έχουμ

$$(B\Gamma)^2=\sqrt{20}^2=20 \quad \text{και}\cdot$$

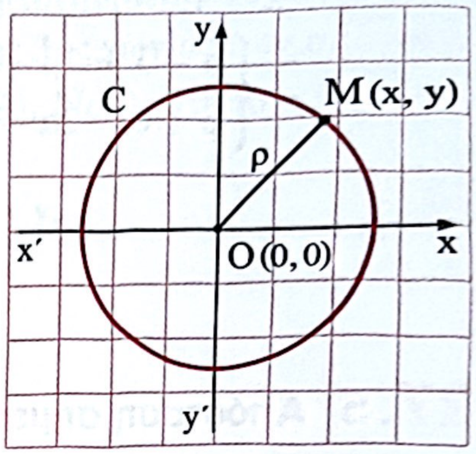
$$(AB)^2+(A\Gamma)^2=\sqrt{10}^2+\sqrt{10}^2=10+10=20$$

Δηλαδή ισχύει $(B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2$. Άρα σύμφωνα με το αντίστροφο του Π
Πυθαγόρειου θεωρήματος το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

27.6 Εξίσωση κύκλου με κέντρο O και ακτίνα ρ

Έστω C ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα ρ. Ένα σημείο M(x, y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$



Επισημάνσεις

- Η εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ λέγεται **εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα ρ**. Ο κύκλος αυτός συμβολίζεται και με C(O, ρ).
- Ειδικότερα, ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 1$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ **και** λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**.

Εφαρμογή

Δίνεται το σημείο $A(-3,\ 4)$ και έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = (OA)$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σημείο $B(\alpha,\ \alpha - 7)$ ανήκει στον κύκλο C.

Λύση

α) Έχουμε:

$$\rho = (OA) = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου C είναι:

$$x^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

β) Το σημείο $B(\alpha,\ \alpha - 7)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$, δηλαδή αν και μόνο αν:

$$\alpha^2 + (\alpha - 7)^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 - 14\alpha + 49 = 25 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - \text{[illegible]}4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 3 \text{ ή } \alpha = 4 \text{[illegible]}$$

λέγεται μοναδιαίος κύκλος.

Εφαρμογή

Δίνεται το σημείο $A(-3, 4)$ και έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = (OA)$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σημείο $B(\alpha, \alpha - 7)$ ανήκει στον κύκλο C.

Λύση

α) Έχουμε:

$$\rho = (OA) = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου C είναι:

$$x^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

β) Το σημείο $B(\alpha, \alpha - 7)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$, δηλαδή αν και μόνο αν:

$$\alpha^2 + (\alpha - 7)^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 - 14\alpha + 49 = 25 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 14\alpha + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 3 \ \text{ή} \ \alpha = 4)$$

27.7 Ορισμός γραφικής παράστασης - Σημεία γραφικής παράστασης

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ (ή αλλιώς $M(x, y)$, όπου $y = f(x)$) για κάθε $x \in A$ το λέμε **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f συμβολίζεται με C_f.

Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα, ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, μόνο όταν ισχύει:

$$f(\alpha) = \beta$$

Η εξίσωση $y = f(x)$ λέγεται και **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.**

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 6$.

α) Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-1, 9)$ και $B(4, 10)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $\Gamma(\alpha - 1, 2\alpha)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 6$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Παρατηρούμε ότι:

$$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 6 = 1 + 2 + 6 = 9$$

Άρα το σημείο $A(-1, 9)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f. Επίσης είναι:

$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 6 = 16 - 8 + 6 = 14 \neq 10$$

Άρα το σημείο $B(4, 10)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

β) Το σημείο $\Gamma(\alpha - 1, 2\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, μόνο όταν:

$$f(\alpha - 1) = 2\alpha \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 - 2(\alpha - 1) + 6 = 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 2\alpha + 2 + 6 = 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

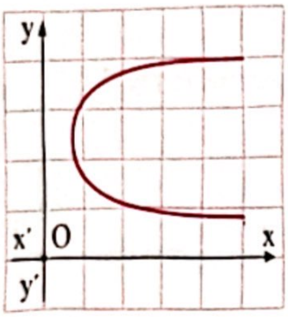
27.8 Πώς εξετάζουμε αν μια καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f $\left(\text{δηλαδή το σύνολο των σημείων } M(x, f(x)) \text{ για κάθε } x \in A\right)$ είναι μια καμπύλη στο καρτεσιανό επίπεδο. Επειδή κάθε x του πεδίου ορισμού της f αντιστοιχίζεται ακριβώς σε έναν πραγματικό αριθμό $f(x)$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι κάθε **κατακόρυφη ευθεία** (κάθετη στον άξονα $x'x$) τέμνει τη γραφική παράσταση της f **το πολύ σε ένα σημείο.**

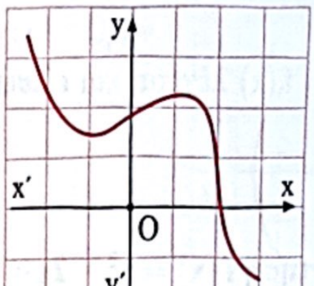
Εφαρμογή

Να εξετάσετε ποιες από τις καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων:

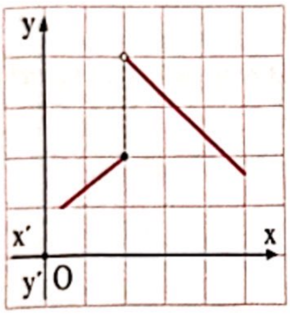
α)



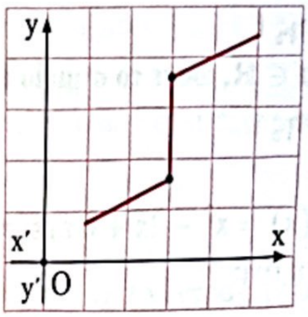
β)



γ)

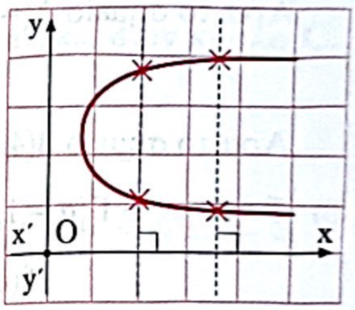


δ)

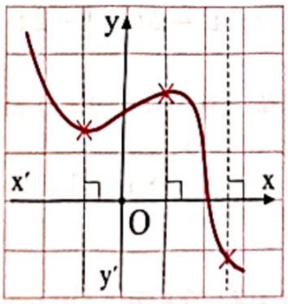


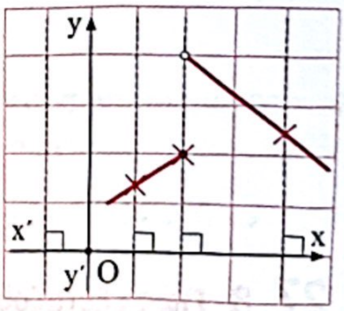
Λύση

α) Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν την καμπύλη σε περισσότερα από ένα σημεία. Άρα η καμπύλη αυτή **δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης**.

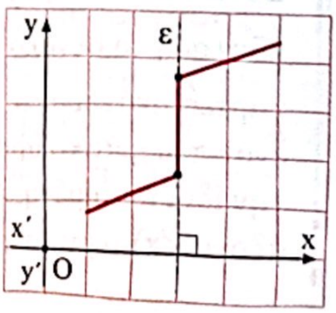


β), γ) Παρατηρούμε στις διπλανές καμπύλες ότι οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία και να σχεδιάσουμε, τέμνει τις καμπύλες (β) και (γ) το πολύ σε ένα σημείο. Άρα καθεμία από τις καμπύλες αυτές **είναι γραφική παράσταση συνάρτησης**.





δ) Παρατηρούμε ότι η κατακόρυφη ευθεία ε τέμνει την καμπύλη σε περισσότερα από ένα σημεία (σε άπειρα). Άρα η καμπύλη αυτή **δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης**.



27.9 Σημεία τομής γραφικής παράστασης με τους άξονες x′x και y′y

Σημεία τομής της C_f με τον άξονα x′x

Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον **άξονα x′x**, θέτουμε στην εξίσωση $y = f(x)$ όπου $\mathbf{y = 0}$.

Λύνουμε δηλαδή την εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

και οι λύσεις της (αν υπάρχουν), εφόσον ανήκουν στο πεδίο ορισμού, είναι οι τετμημένες των σημείων τομής.

Σημείο τομής της C_f με τον άξονα y′y

Αν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, τότε για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον **άξονα y′y**, θέτουμε στην εξίσωση $y = f(x)$ όπου $\mathbf{x = 0}$. Ο αριθμός $y = f(0)$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής. Αν το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, τότε δεν υπάρχει σημείο τομής με τον άξονα yy′.

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x-3|-2}\cdot(x^2+2x-8)$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f,

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f:

i) με τον άξονα x′x, **ii) με τον άξονα y′y.**

Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν:

$$|x-3|-2 \geq 0 \Leftrightarrow |x-3| \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3 \leq -2 \text{ ή } x-3 \geq 2) \Leftrightarrow (x \leq 1 \text{ ή } x \geq 5)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$.

β) i) Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-3|-2}\cdot(x^2+2x-8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{|x-3|-2} = 0 \text{ ή } x^2+2x-8 = 0\right)$$

Έχουμε:

- $\sqrt{|x-3|-2} = 0 \Leftrightarrow |x-3|-2 = 0 \Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (x-3 = 2 \text{ ή } x-3 = -2) \Leftrightarrow (x = 5 \text{ ή } x = 1)$
- $x^2+2x-8 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -4)$

Η λύση $x = 2 \notin A$, οπότε απορρίπτεται. Τελικά η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 5, 1 και −4. Αυτές είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f (δηλαδή της C_f) με τον άξονα x′x. Τα σημεία τομής είναι τα K(5, 0), Λ(1, 0) και M(−4, 0).

ii) Το $0 \in A = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$, άρα έχουμε:

$$f(0) = \sqrt{|0-3|-2} \cdot (0^2 + 2 \cdot 0 - 8) = \sqrt{1} \cdot (-8) = -8$$

Το −8 είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y′y. Το σημείο τομής είναι το N(0, −8).

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να τέμνει τον άξονα x′x σε οσαδήποτε σημεία. Όμως τον άξονα y′y μπορεί να τον τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

27.10 Σχετική θέση γραφικής παράστασης και άξονα x′x

Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f:

- **βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x**, λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$,
- **βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x**, λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$,
- **δε βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x**, λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x) \geq 0$$

- **δε βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x**, λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x) \leq 0$$

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3 - 2x| - 7$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται:

α) πάνω από τον άξονα x′x, **β) κάτω από τον άξονα x′x.**

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

α) Η f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x όταν $f(x) > 0$. Είναι:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow |3-2x| - 7 > 0 \Leftrightarrow |3-2x| > 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3 - 2x < -7 \text{ ή } 3 - 2x > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2x < -10 \text{ ή } -2x > 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x > 5 \text{ ή } x < -2)$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **πάνω από τον άξονα x′x** όταν $x < -2$ ή $x > 5$, δηλαδή όταν:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$$

β) Η f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x όταν $f(x) < 0$. Είναι:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow |3 - 2x| - 7 < 0 \Leftrightarrow |3 - 2x| < 7 \Leftrightarrow -7 < 3 - 2x < 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10 < -2x < 4 \Leftrightarrow 5 > x > -2 \Leftrightarrow -2 < x < 5$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **κάτω από τον άξονα x′x** όταν $-2 < x < 5$, δηλαδή όταν $x \in (-2, 5)$.

27.11 Κοινά σημεία και σχετική θέση γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων

Κοινά σημεία C_f και C_g

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g, λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x)$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, αν υπάρχουν, είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων.

Σχετική θέση C_f και C_g

Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία:

- η C_f **βρίσκεται πάνω από** τη C_g, λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x) > g(x)$$

- η C_f **βρίσκεται κάτω από** τη C_g, λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x) < g(x)$$

- η C_f **δε βρίσκεται κάτω από** τη C_g, λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x) \geq g(x)$$

- η C_f **δε βρίσκεται πάνω από** τη C_g, λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x) \leq g(x)$$

Εφαρμογή

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 8x - 12 \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 8$$

Να βρείτε:

α) τα κοινά σημεία των C_f και C_g,

β) τα διαστήματα στα οποία:

i) η C_f δε βρίσκεται πάνω από τη C_g,

ii) η C_f δε βρίσκεται κάτω από τη C_g.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι το $\mathbb{R}$. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+8x-12=-x^2+2x+8 \Leftrightarrow 2x^2+6x-20=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=-5)$$

Οι αριθμοί 2 και -5 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων.

Για να βρούμε τις τεταγμένες, αντικαθιστούμε τους αριθμούς αυτούς στον τύπο μιας από τις δύο συναρτήσεις. Δηλαδή είναι:

$$f(2)=2^2+8\cdot 2-12=8 \quad \text{και} \quad f(-5)=(-5)^2+8(-5)-12=-27$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα A(2, 8) και B(-5, -27).

β) i) Λύνουμε την ανίσωση:

$$f(x)\le g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+8x-12\le -x^2+2x+8 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-5		2	$+\infty$
$x^2+3x-10$	+	0	−	0	+

$$\Leftrightarrow 2x^2+6x-20\le 0 \Leftrightarrow x^2+3x-10\le 0 \Leftrightarrow -5\le x\le 2$$

Άρα η C_f δε βρίσκεται πάνω από τη C_g όταν:

$$x\in[-5, 2]$$

ii) Λύνουμε την ανίσωση:

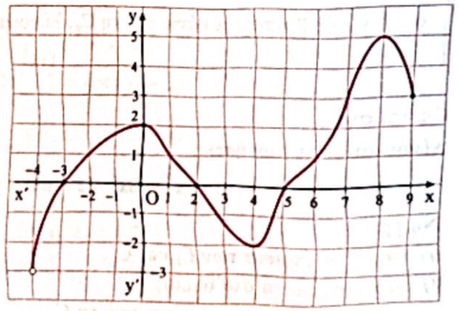
$$f(x)\ge g(x) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2+3x-10\ge 0 \Leftrightarrow (x\le -5 \text{ ή } x\ge 2)$$

Άρα η C_f δε βρίσκεται κάτω από τη C_g όταν:

$$x\in(-\infty, -5]\cup[2, +\infty)$$

27.12 Επεξεργασία γραφικής παράστασης

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:



α) το πεδίο ορισμού της f,

β) το σύνολο τιμών της f,

γ) τις τιμές f(-2), f(4) και f(8),

δ) για ποια x ισχύει f(x) = 3,

ε) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες,

στ) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται:

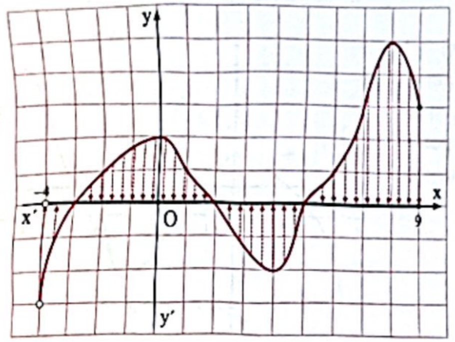
i) πάνω από τον άξονα x′x, **ii) κάτω από τον άξονα x′x,**

ζ) τα διαστήματα στα οποία ισχύει f(x) < 1.

Λύση

α) Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, «προβάλλουμε» τη γραφική της παράσταση στον άξονα x′x.

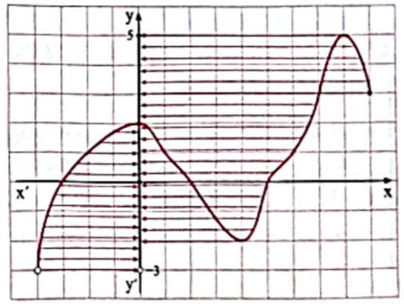
Η «προβολή» της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f:
- *πάνω στον άξονα x′x μάς δίνει το πεδίο ορισμού της f,*
- *πάνω στον άξονα y′y μάς δίνει το σύνολο τιμών της f.*



Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A = (-4, 9].

β) Για να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, «προβάλλουμε» τη γραφική της παράσταση στον άξονα y′y.

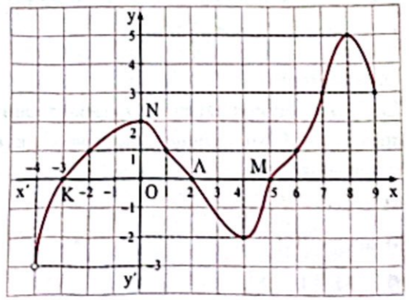
Όπως προκύπτει από το διπλανό σχήμα, το σύνολο τιμών της f είναι το B = (-3, 5].



γ) Με βάση το διπλανό σχήμα είναι:

$$f(-2)=1, \quad f(4)=-2 \quad \text{και}$$

$$f(8)=5$$



δ) Ισχύει f(x) = 3 για τις τιμές x = 7 ή x = 9, δηλαδή είναι:

$$f(7)=3 \quad \text{και} \quad f(9)=3$$

ε) Η γραφική παράσταση της f:

- τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία K(-3, 0), Λ(2, 0) και M(5, 0),
- τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο N(0, 2).

στ) i) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x όταν:

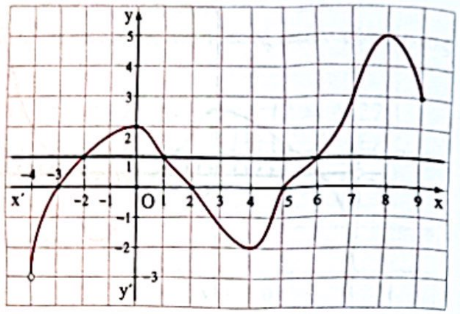
$$x \in (-3,\ 2) \cup (5,\ 9]$$

ii) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x όταν:

$$x \in (-4,\ -3) \cup (2,\ 5)$$

ζ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f, των οποίων η τεταγμένη είναι μικρότερη του 1. Όπως προκύπτει από το διπλανό σχήμα, ισχύει $f(x) < 1$ όταν:

$$x \in (-4,\ -2) \cup (1,\ 6)$$



27.13 Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f(x)$, $|f(x)|$ και $f(-x)$

Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση και C_f η γραφική της παράσταση. Ισχύουν τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f (C_f) ως προς τον άξονα x′x.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = |f(x)|$ αποτελείται:
  - από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται στον άξονα x′x και πάνω από αυτόν,
  - από τα συμμετρικά τμήματα ως προς τον άξονα x′x των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x′x.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = f(-x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα y′y.

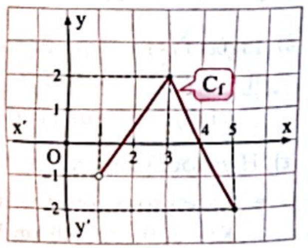
Εφαρμογή

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $g(x) = -f(x)$

β) $h(x) = |f(x)|$

γ) $\varphi(x) = f(-x)$

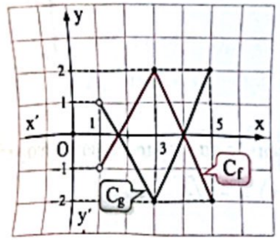


Λύση

α) Η γραφική παράσταση της:

$$g(x) = -f(x)$$

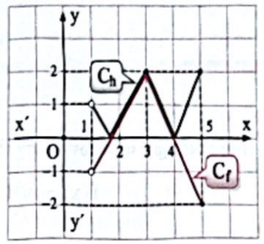
φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



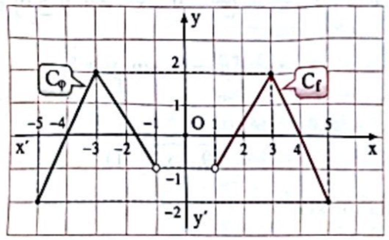
β) Η γραφική παράσταση της:

$$h(x) = |f(x)|$$

φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



γ) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = f(-x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



27.14 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$

Όπως γνωρίζουμε, ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

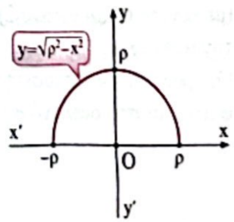
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$y^2 = \rho^2 - x^2 \Leftrightarrow \left(y = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad ή \quad y = -\sqrt{\rho^2 - x^2}\right)$$

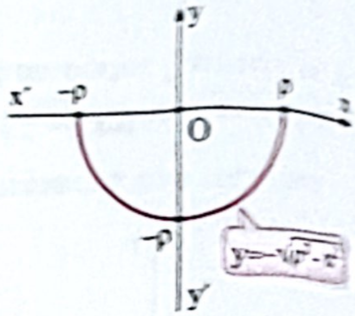
- Η εξίσωση $y = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ παριστάνει το ημικύκλιο του κύκλου C που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x και αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad \text{με } x \in [-\rho,\ \rho]$$



- Η εξίσωση $y = -\sqrt{\rho^2 - x^2}$ παριστάνει το ημικύκλιο του κύκλου C που βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x και αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -\sqrt{\rho^2 - x^2} \quad \text{με } x \in [-\rho, \rho]$$



Εφαρμογή

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{και} \quad g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

Λύση

Αν θέσουμε $f(x) = y$, τότε έχουμε:

$$y = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow (y^2 = 9 - x^2 \ \text{ και } \ y \geq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 = 9 \ \text{ και } \ y \geq 0)$$

Άρα η εξίσωση:

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad (1)$$

παριστάνει τα σημεία του κύκλου:

$$C: x^2 + y^2 = 9$$

(με κέντρο O και ακτίνα 3), που έχουν μη αρνητική τεταγμένη. Δηλαδή η εξίσωση (1) παριστάνει το ημικύκλιο του κύκλου C που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x. Αυτό το ημικύκλιο είναι η γραφική παράσταση της f.

Ομοίως βρίσκουμε ότι η γραφική παράσταση της:

$$g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

είναι το ημικύκλιο του κύκλου:

$$C': x^2 + y^2 = 4$$

(με κέντρο O και ακτίνα 2) που βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g φαίνονται στο διπλανό σχήμα.