2.2 Η ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Έννοια < και >

Ένας αριθμός **α** λέμε ότι:

- είναι ***μεγαλύτερος*** από έναν αριθμό **β**, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός και γράφουμε:
$$\alpha > \beta$$
- είναι ***μικρότερος*** από έναν αριθμό **β**, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός και γράφουμε:
$$\alpha < \beta$$

(μπορούμε για τις παραπάνω περιπτώσεις να γράψουμε $\beta < \alpha, \beta > \alpha$ *αντίστοιχα)*

1. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:
   - ✓ Κάθε **θετικός** αριθμός είναι *μεγαλύτερος από το μηδέν*.
   - ✓ Κάθε **αρνητικός** αριθμός είναι *μικρότερος από το μηδέν*.

2. Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε
$$\alpha \geq \beta$$
και διαβάζουμε: «***α μεγαλύτερος ή ίσος του β***»***.***

3. Πιο πάνω είπαμε «είναι ***μεγαλύτερος*** από έναν αριθμό **β**, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός» Αυτό προκύπτει καθώς
$$\alpha > \beta \iff \alpha - \beta > 0$$

4. Με βάση τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/μού προκύπτουν τα εξής:
   - $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$

     $(\alpha < 0 \text{και} \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$
   - $\alpha, \beta\ ομόσημοι \iff \alpha \cdot \beta > 0 \iff \frac{\alpha}{\beta} > 0$

     $\alpha, \beta\ ετερόσημοι \iff \alpha \cdot \beta < 0 \iff \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$
   - $\alpha^2 \geq 0, για\ κΦθε\ \alpha \in \mathbb{R}$ (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

5. Ισχύουν επίσης:
   - $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \iff \alpha = 0\ και\ \beta = 0$
   - $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \iff \alpha \neq 0\ \Psi\ \beta \neq 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία

$$\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$$

μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. $(\alpha > \beta \kappa\alpha\iota \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$
2. Ισχύουν:
   - $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
   - $A\nu \quad \gamma > 0 \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
   - $A\nu \quad \gamma < 0 \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \quad \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
3. Ισχύουν:
   - $(\alpha > \beta \kappa\alpha\iota \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
   - Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:
     $$(\alpha > \beta \kappa\alpha\iota \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$
4. Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$$

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Διαστήματα μπορούμε να πούμε ότι είναι σύνολα που περιέχουν αριθμούς. Αυτά χωρίζονται σε διάφορα ήδη διαστημάτων ανάλογα ποιοι αριθμοί περιέχονται σε αυτά. Ειδικότερα, έχουμε:

- το σύνολο των αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$ λέγεται ***κλειστό διάστημα από το α μέχρι το β*** και συμβολίζεται με:

  $$[\alpha, \beta]$$

  Περιέχει δηλαδή όλους τους αριθμούς από το α μέχρι και το β (δηλ. και το α, και το β, και αυτούς που βρίσκονται μεταξύ α και β)

- το σύνολο των αριθμών x με $\alpha < x < \beta$ λέγεται ***ανοικτό διάστημα από το α μέχρι το β*** και συμβολίζεται με:

  $$(\alpha, \beta)$$

  Περιέχει δηλαδή όλους τους αριθμούς «μετά» από το α και «πριν» από το β (που βρίσκονται μεταξύ α και β χωρίς όμως να περιλαμβάνει το α και το β)

Έτσι προκύπτουν και οι εξής παραλλαγές:

- το σύνολο των αριθμών x με $\alpha \leq x < \beta$ λέγεται ***ανοικτό δεξιά διάστημα*** και συμβολίζεται με:

$$[\alpha, \beta)$$

  Περιέχει δηλαδή όλους τους αριθμούς από το α μέχρι και το β (δηλ. και το α, και αυτούς που βρίσκονται μεταξύ α και β, αλλά όχι τον β)

- το σύνολο των αριθμών x με $\alpha < x \leq \beta$ λέγεται ***ανοικτό αριστερά διάστημα*** και συμβολίζεται με:

$$(\alpha, \beta]$$

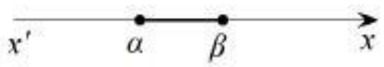
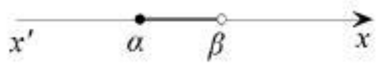
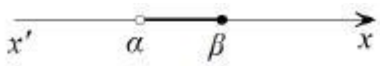
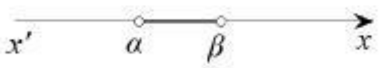
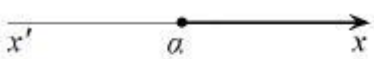
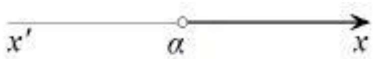
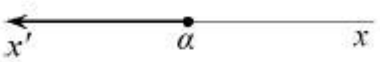
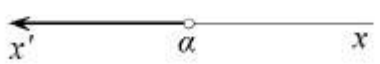
  Περιέχει δηλαδή όλους τους αριθμούς από το α μέχρι και το β (δηλ. και αυτούς που βρίσκονται μεταξύ α και β, και τον β, αλλά όχι τον α)

Επιπλέον, προκύπτουν και διαστήματα με άκρα τα άπειρα:

- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x$ συμβολίζεται με: $[\alpha, +\infty)$

- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \leq \alpha$ συμβολίζεται με: $(-\infty, \alpha]$

Έτσι προκύπτει ο συγκεντρωτικός πίνακας για κάθε είδος διαστήματος. Αριστερά βλέπουμε γραφικά το διάστημα, στην μέση την αντίστοιχη ανισότητα και στα δεξιά τον συμβολισμό:

Διάστημα	**Ανισότητα**	**Συμβολισμός**
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$\alpha < x \leq \beta$	(α, β)
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η **διαφορά** μεταξύ ενός **κλειστού** και του αντίστοιχου **ανοικτού** διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.

2. Οι αριθμοί **α και β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των α και β λέγεται εσωτερικό σημείο αυτών.

3. Δηλαδή, αν από το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο ανοικτό διάστημα (α, β).

4. Σε γραφική μορφή το διάστημα ακολουθεί τους εξής κανόνες αναπαράστασης
   - • → άκρο που **συμπεριλαμβάνεται** στο σύνολο («γεμισμένη» τελεία)
   - ∘ → άκρο που **δεν συμπεριλαμβάνεται** στο σύνολο («κενή» τελεία)

5. Τα σύμβολα
   - $+\infty$ (συν άπειρο)
   - $-\infty$ (πλην άπειρο)

   δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς αλλά άπειρα.

Το **συν άπειρο** $+\infty$ αντιπροσωπεύει έναν αριθμό *μεγαλύτερο* από κάθε πραγματικό αριθμό.

Σκέψου ότι προσθέτεις συνεχώς 1 σε έναν αριθμό: $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ Καθώς συνεχίζεις να προσθέτεις, οι αριθμοί μεγαλώνουν χωρίς να σταματούν ποτέ. Αυτή η συνεχής αύξηση οδηγεί στο συν άπειρο.

Το **πλην άπειρο** $-\infty$ αντιπροσωπεύει έναν αριθμό *μικρότερο* από κάθε πραγματικό αριθμό.

Σκέψου ότι αφαιρείς συνεχώς 1 από έναν αριθμό: $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$ Καθώς συνεχίζεις να αφαιρείς, οι αριθμοί μικραίνουν χωρίς να σταματούν ποτέ. Αυτή η συνεχής μείωση οδηγεί στο πλην άπειρο.