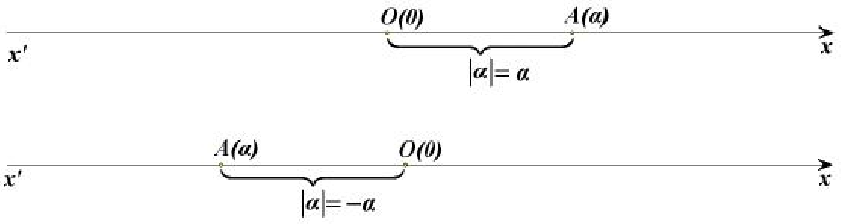
2.3 Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Απόλυτη τιμή ως απόσταση σημείου

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα.



Η απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο (δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος Ο) ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και την συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Έτσι, προκύπτει ότι:

- Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει:

$$|\alpha| = \alpha$$

Δηλαδή η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού ισούται με τον εαυτό της

- Για κάθε $\alpha < 0$ ισχύει:

$$|\alpha| = (-1) \cdot \alpha = -\alpha$$

Δηλαδή η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού ισούται με τον αντίθετό της (σε πρόσημο)

- Για κάθε $\alpha = 0$ ισχύει:

Το $|\alpha| = \alpha \quad \gamma\acute{\iota}\nu\epsilon\tau\alpha\iota \quad |0| = 0$

Δηλαδή η απόλυτη τιμή του μηδενός ισούται με τον εαυτό του

Απόλυτη τιμή

Άρα, η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} -\alpha, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \\ \alpha, & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Παραδείγματα:

- ✓ $|2| = 2$
- ✓ $|-3| = 3$
- ✓ $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$
- ✓ $\left|\frac{11}{5}\right| = \frac{11}{5}$
- ✓ $\left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}$
- ✓ $|0| = 0$

Συμπεράσματα

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad |\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$ *(1)*
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$ *(2)*

Παραδείγματα:

✓ Το $|x| = 5$ λύνεται ως

$$|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } \chi = -5$$ *(βάση της 1)*

✓ Το $|x| = |3|$ λύνεται ως

$$|x| = |3| \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3$$ *(βάση της 2)*

✓ Το $|x-1| = 2$ λύνεται ως

$$\begin{aligned} &|x-1| = 2 \Leftrightarrow \\ &x-1 = 2 \quad \text{ή} \quad x-1 = -2 \Leftrightarrow \\ &x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

(βάση της 1)

✓ Το $|\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta|$ λύνεται ως

$$|\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta \quad \text{ή} \quad \alpha - \beta = -(2\alpha - 3\beta) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta \quad \text{ή} \quad \alpha - \beta = 3\beta - 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$2\alpha - \alpha = 3\beta - \beta \quad \text{ή} \quad 2\alpha + \alpha = 3\beta + \beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2\beta \quad \text{ή} \quad 3\alpha = 4\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2\beta \quad \text{ή} \quad \alpha = \frac{4}{3}\beta$$

(βάση της ιδιότητας 2)

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
2. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right|$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
4. $|\alpha^{\nu}| = |\alpha|^{\nu}$ *(χωρίς απόδειξη)*

Αποδείξεις:

1. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

   Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, δηλ.

   - $|\alpha \cdot \beta| \geq 0$ *και*
   - $|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0$

   έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$$

(1) Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο

$$|\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

(2) $|\alpha \cdot \beta| \geq 0$ άρα και $|\alpha \cdot \beta|^2| \geq 0$, $|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0$ άρα και $(|\alpha| \cdot |\beta|)^2| \geq 0$

$$(\alpha \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

(3) $|\alpha|^2 \geq 0$ άρα $|\alpha|^2 = \alpha^2$ (όμοια το β)

$$(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \quad \textit{που ισχύει.}$$

■

2. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right|$

   Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \left|\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow$$ *όπως και στην απόδειξη 1 (βήμα 3)*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \textit{που ισχύει.}$$

■

3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, δηλ.

- $|\alpha + \beta| \geq 0$ *και*
- $|\alpha| + |\beta| \geq 0$

έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow$$

$$|\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \qquad \textit{που ισχύει.}$$

Η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν:

οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι

ή

ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

■

Σχέση της της μορφής $|x| + |y| = 0$

Επειδή ισχύουν $|x| \geq 0$ και $|y| \geq 0$ έχουμε:

- $|x| + |y| = 0 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \;\; \textit{και} \;\; y = 0)$
- $|x| + |y| > 0 \;\Leftrightarrow\; (x \neq 0 \;\; ή \;\; y \neq 0)$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ

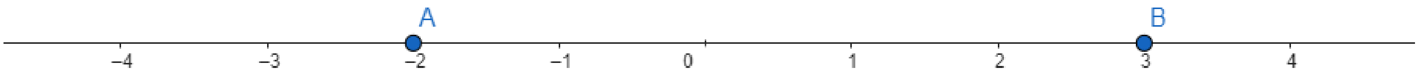
Απόσταση δυο αριθμών

Έστω δύο σημεία A και B. Έχουμε πει ότι 2 σημεία σχηματίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών α και β, συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Είναι δηλαδή:

Έστω δύο αριθμοί

- $\alpha=-2,$ και
- $\beta=3$

Οι αριθμοί αυτοί απεικονίζονται στον άξονα που βλέπουμε παρακάτω με την μορφή των σημείων A και B:



Το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών -2 και 3. Παρατηρούμε ότι

$$(AB)=5$$

Δηλαδή, το -2 με το 3 απέχει 5 μονάδες $(-2\rightarrow-1\rightarrow-0\rightarrow-1\rightarrow-2\rightarrow-3)$. Καλύτερα δηλαδή να πούμε:

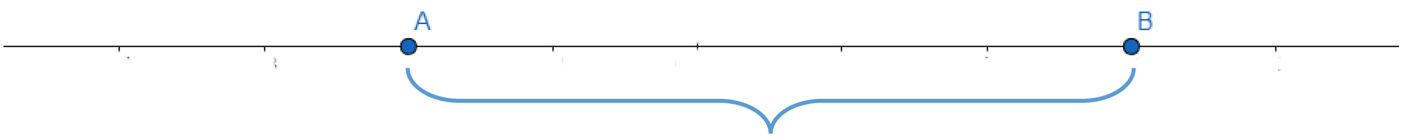
$$(AB)=5=|(-2)-3|=|3-(-2)|$$

Έτσι:

Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση των αριθμών** α και β, συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Είναι δηλαδή:

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$$

Φαίνεται και παρακάτω:



$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$$