3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \text{με}\ \alpha\neq 0 \qquad (1)$$

η οποία λέγεται εξίσωση **δευτέρου βαθμού**.

Για παράδειγμα, έστω ο τύπος $S=v_0t+\frac{1}{2}\gamma t^2$, όπου S το διάστημα που διανύει κινητό σε χρόνο t, με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση γ. Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο τον χρόνο t, τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\gamma t^2+v_0t-S=0,$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της **«συμπλήρωσης του τετραγώνου».**
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 &\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \qquad [\text{αφού}\ \alpha\neq 0]\\
&\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha}\\
&\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}\\
&\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν **Δ> 0**, τότε έχουμε:

  $$x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\ \text{ ή }\ x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες, τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

- Αν **$\Delta = 0$**, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{2\alpha} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν **$\Delta < 0$**, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Η αλγεβρική παράσταση **$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$**, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Για παράδειγμα

✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, οπότε έχει δυο ρίζες, τις

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2\cdot 2} = 1 \text{ και } x_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

✓ Η εξίσωση $x^2 - 4x + 4 = 0$ έχει $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, οπότε έχει μια διπλή ρίζα τη

$$x = \frac{-(-4)}{2\cdot 1} = 2.$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται σύντομα ως εξής:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (διπλή ρίζα)}.$$

✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 4 = 0$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23 < 0$, οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με τη βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Για παράδειγμα, η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο $\sqrt{2}$ είναι η $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2(\sqrt{3}+1)x + 4\sqrt{3} = 0$.

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = 4(\sqrt{3}+1)^2 - 4\cdot 4\sqrt{3} = 4[(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}+1] = 4(\sqrt{3}-1)^2$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τις

$$x_{1,2} = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{4(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}+2 \pm 2(\sqrt{3}-1)}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2\sqrt{3} \\ \\ 2 \end{array}\right.$$

2. Ένας βράχος βρίσκεται στην κορυφή της χαράδρας ενός ποταμού, η οποία έχει βάθος 300m. Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι τη στιγμή που ο βράχος θα αγγίξει το νερό του ποταμού, αν ο βράχος

i. πέσει από την κορυφή;

ii. εκσφενδονιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα 50 m/sec;

Δίδεται ότι $g \simeq 10 m/sec^2$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι το διάστημα S που διανύει ένα σώμα στην ελεύθερη πτώση σε χρόνο t sec είναι: $S = \frac{1}{2}gt^2$.

Επειδή S = 300m και $g \simeq 10$ m/sec^2, έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 = 300 \Leftrightarrow 5t^2 = 300 \Leftrightarrow t^2 = 60 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow t \simeq \pm 7,75$$

Η αρνητική ρίζα δεν είναι αποδεκτή, διότι ο χρόνος στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Άρα $t \simeq 7,75$ sec.

ii) Όταν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα v_0, το διάστημα που διανύει σε χρόνο t sec είναι $S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$.

Επειδή $v_0 = 50\frac{m}{sec}$ και $t > 0$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 + 50t = 300 \Leftrightarrow 5t^2 + 50t - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-10+\sqrt{100+4\cdot 60}}{2} \simeq \frac{-10+18,43}{2} = 4,22 \text{ sec.}$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος είναι περίπου 4,22 sec.

ΣΧΟΛΙΟ

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, όπως είδαμε και παραπάνω, δεν πρέπει να ξεχνάμε να ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι εύλογες.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν 2ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{x^2 - 2|x| - 3 = 0.}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $x^2 = |x|^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

Αν θέσουμε $|x| = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = -1$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 3$, που σημαίνει $x = -3$ ή $x = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}}$$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x - 1 \neq 0$ και $x^2 - x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς του x έχουμε:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x} \Leftrightarrow x(x-1)\frac{3x-1}{x-1} - x(x-1)\frac{2}{x} = x(x-1)\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x(3x-1) - (x-1)2 = 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η $x_2 = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{2x^4 - 7x^2 - 4 = 0} \qquad (1)$$

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται:

$$2y^2 - 7y - 4 = 0 \qquad (2)$$

Η εξίσωση $2y^2 - 7y - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$. Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$.

Επομένως, οι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 4$, δηλαδή οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα εφαρμόζεται και για την επίλυση κάθε εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \ \text{ με } \ \alpha \neq 0$$

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής ονομάζονται **διτετράγωνες** εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ **ii)** $x^2 - 6x + 9 = 0$ **iii)** $3x^2 + 4x + 2 = 0$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $x^2 - 1{,}69 = 0$ **ii)** $0{,}5x^2 - x = 0$ **iii)** $3x^2 + 27 = 0$.

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:
i) $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0$, $\lambda \neq 0$ **ii)** $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0$, $\mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.

5. Αν $\alpha \neq \beta$, να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0$. Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι $\alpha = \beta$.

6. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

i) 2 και 3 **ii)** 1 και $\frac{1}{2}$ **iii)** $5-2\sqrt{6}$ και $5+2\sqrt{6}$.

7. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

i) Άθροισμα 2 και γινόμενο -15.

ii) Άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})x+\sqrt{15}=0$ **ii)** $x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$.

9. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x$, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

10. Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο 26cm.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ **ii)** $x^2 + 2|x| - 35 = 0$ **iii)** $x^2 - 8|x| + 12 = 0$.

12. Να λύσετε την εξίσωση $(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0$.

13. Να λύσετε την εξίσωση $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$ **ii)** $\frac{2}{x}+\frac{2x-3}{x-2}+\frac{2-x^2}{x^2-2x}=0$.

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$ **ii)** $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$ **iii)** $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η εξίσωση $\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x + \alpha^4 - 1 = 0$, με $\alpha \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 4\alpha^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$ και $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}$.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(5-\sqrt{2})x+6-3\sqrt{2}=0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=(1+\sqrt{2})^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και $2-\sqrt{2}$.

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

4. Αν ο αριθμός ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\dfrac{1}{x}$, $\alpha \neq 0$ **ii)** $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}=\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\alpha, \beta \neq 0$.

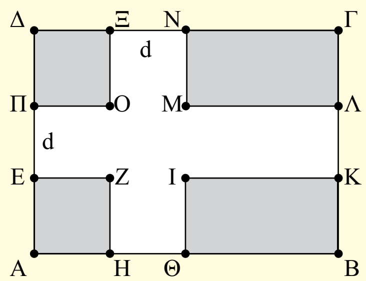
6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ.

7. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

8. Η σημαία του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις 4m και 3m αντιστοίχως. Να βρείτε πλάτος d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.



9. Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δυο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ό,τι το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δυο μηχανήματα μαζί, είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

10. Είναι γνωστό ότι μια ρίζα της εξίσωσης $x^4 - 10x^2 + α = 0$ είναι ο αριθμός 1. Να βρείτε το α και να λύσετε την εξίσωση.