

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

6.136 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}}\right)^7$$

- α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.
 β) Να αποδείξετε πως όταν $x = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$ και $y = (\sqrt[8]{2})^{-\frac{1}{2}}$, τότε η τιμή της παράστασης A είναι ακέραιος αριθμός.

6.137 Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι:

$$\sqrt{9a-18} - \sqrt{4a-8} + \sqrt[3]{8b+24} - \sqrt[3]{b+3} = 0$$

- α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.
 β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt[3]{3(\sqrt{a-b} - \sqrt{a})^2(7+2\sqrt{10})}$$

6.138 α) Αν $x \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = x+1$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\frac{\sqrt{98}}{10-\sqrt{98}} + \frac{10}{10+\sqrt{98}}}{\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{34}-\sqrt{32}} + \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}+\sqrt{32}}}$$

6.139 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[6]{28+20\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4} \quad \text{και}$$

$$\beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$$

- α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.
 β) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt[3]{\alpha\beta^{-1}\sqrt{\alpha^{-1}\beta^2\sqrt{\alpha^{-2}}}}$$

6.140 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2^7}}} \cdot \sqrt[8]{8}$$

και:

$$\beta = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[6]{2\sqrt{2}+3}$$

- α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.
 β) Αν $x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{b}}}$, $y = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ και $\omega = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{b}}}$, να υπολογίσετε το γινόμενο $x\omega$.

6.141 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}$$

και:

$$\beta = \left(\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3\sqrt{2}}} : \sqrt[5]{3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}\right)^{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{9}}$$

- α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.
 β) Να υπολογίσετε την παράσταση:
 $A = \sqrt[6]{\alpha} \cdot \beta^2$
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $\beta x = a$ και να γράψετε τη λύση της ως κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

6.142 Δίνεται ο αριθμός:

$$x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$$

- α) Να αποδείξετε ότι $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.
 β) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:
 i) $x + \frac{2}{x}$ ii) $x^2 + \frac{4}{x^2}$ iii) $x^3 + \frac{8}{x^3}$

6.143 α) Να βρείτε τον αριθμό:

$$\alpha = \frac{\sqrt{8} - \sqrt[3]{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}+1}}$$

β) Αν ισχύει $x^2 + y^2 = \alpha$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \sqrt{\frac{x^4 + 8y^2}{36}} + \sqrt{\frac{y^4 + 8x^2}{36}}$$

6.144 α) Για οποιαδήποτε $x, y \geq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2 \leq x + y$$

β) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left(\sqrt{\frac{\alpha+5}{2}} - \sqrt{\frac{\beta+3}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} - \sqrt{\frac{7-\beta}{2}}\right)^2$$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β ορίζεται η παράσταση A .

ii) Για τις επιτρεπόμενες τιμές των α και β να αποδείξετε ότι $A \leq 16$.

6.145 Δίνονται οι αριθμοί:

$$x = \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}$$

$$y = \left(\frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + 13\right) : \sqrt{12} \quad \text{και}$$

$$\omega = (\sqrt[20]{6^{11}} - \sqrt[20]{6} \cdot \sqrt{5})^{10} (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{10} \cdot \sqrt{6}$$

Να βρείτε:

α) τους αριθμούς x , y και ω ,

β) την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{\omega\sqrt{\omega}} - \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{\omega} + \sqrt{x}}}$$