ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 20 Ιανουαρίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ορισμός σελ.33 Σχολικό βιβλίο

Α2. Σελ.55 Σχολικό βιβλίο

Α3. Απόδειξη 1 σελ.60 Σχολικό βιβλίο

Α4.
- i. Σ
- ii. Λ
- iii. Σ
- iv. Λ
- v. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού $1 < x < 4$ ισχύει ότι $x - 1 > 0$ και $|x - 1| = x - 1$.
Επειδή $2 < y < 3$, ισχύει ότι $y - 3 < 0$ και $|y - 3| = 3 - y$.
Άρα $A = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$.

Β2. Είναι

$$1 < x < 4 \ (1) \text{ και } 2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0 \ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε: $0 < x - y + 2 < 4 \Leftrightarrow 0 < A < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $$A=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}+\frac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{4\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$$

Γ2. $$\left(3+\sqrt{2}\right)^2=3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=9+6\sqrt{2}+2=11+\sqrt{2}.$$

$$\left(3+\sqrt{2}\right)^2=3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=9-6\sqrt{2}+2=11-\sqrt{2}.$$

Γ3. $$B=\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$\left|=3+\sqrt{2}\right|-\left|3-\sqrt{2}\right|=3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

Γ4. $$\frac{|x-2|}{B\sqrt{2}}=\frac{|2-x|}{A\sqrt{2}}-\frac{5}{3}$$

$$\frac{|x-2|}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{|2-x|}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}-\frac{5}{3}$$

$$\frac{|x-2|}{4}=\frac{|2-x|}{10}-\frac{5}{3}$$

ΕΚΠ(3, 4, 10) = 60

$$15|x-2|=6|2-x|-100\Leftrightarrow 9|x-2|=-100\Leftrightarrow |x-2|=\frac{-100}{9}$$ Αδύνατη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), P = x_1 \cdot x_2 = 16$

i. $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2 \cdot 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 8\lambda + \frac{8}{\lambda}$

ii. $E = x_1 \cdot x_2 = 16$

Δ2. $\Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8\lambda + \frac{8}{\lambda} \geq 16 \overset{(\cdot\lambda>0)}{\Longleftrightarrow} 8\lambda^2 + 8 \geq 16\lambda \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 16\lambda + 8 \geq 0 \overset{(:8)}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$ ισχύει

Δ3. $\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\lambda + \frac{8}{\lambda} = 16 \overset{(\cdot\lambda\neq0)}{\Longleftrightarrow} 8\lambda^2 + 8 = 16\lambda \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 16\lambda + 8 = 0 \overset{(:8)}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Για $\lambda = 1$ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη. Τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$