3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ (α)

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$

- Μία εξίσωση που έχει (ή μπορεί να πάρει) την μορφή:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \qquad \alpha\neq 0$$

  λέγεται **εξίσωση 2ου βαθμού**

- Για να βρούμε τις ρίζες μιας εξίσωσης 2ου βαθμού στη γενική της μορφή, εφαρμόζουμε τη μέθοδο της **συμπλήρωσης του τετραγώνου**. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha x^2}{\alpha}+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow$$

Διαιρούμε όλους τους όρους με $\alpha\neq 0$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

Μεταφέρουμε τον σταθερό όρο στο 2ο μέλος

$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με 2 τον συντελεστή $\frac{\beta}{\alpha}$ του x

$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το τε τετράγωνο του $\frac{\beta}{2\alpha}$ ώστε στο πρώτο μέλος να προκύψει τέλειο τετράγωνο

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \quad (1)$$

Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα στο δεύτερο μέλος και γράφουμε τελικά ένα κλάσμα

- Η αλγεβρική παράσταση $\beta^2-4\alpha\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης και συμβολίζεται με **Δ**. δηλαδή:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$$

  Έτσι η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (2)$$

  Ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας Δ προκύπτουν τα συμπεράσματα για τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, τότε $\frac{\Delta}{4\alpha^2} > 0$ και έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} = \sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \quad ή \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x = -\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad ή \quad x = -\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad ή \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right)$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε $\frac{\Delta}{4\alpha^2} = 0$ και έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta < 0$, τότε $\frac{\Delta}{4\alpha^2} < 0$ και έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} < 0, \quad \text{που είναι αδύνατη!}$$

Συνοψίζοντας,

Από την διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ προκύπτουν:

- Όταν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει **δύο ρίζες άνισες**, τις και οι οποίες εν συντομία γράφονται:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Όταν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει **μία (διπλή) ρίζα**, τη:

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

- Όταν $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$