5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

– Στην ακολουθία 3, 6, 12, 24, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot 2 \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο 2**.

– Στην ακολουθία 27, −9, 3, −1, ... κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί $-\frac{1}{3}$. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu\left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = -\frac{1}{3}$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο** $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$.
Γενικότερα ορίζουμε ότι:

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **λ** και τον λέμε **λόγο της προόδου**.
Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\boldsymbol{\alpha_\nu \neq 0}$ **για κάθε** $\boldsymbol{\nu \in \mathbb{N}^*}$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και το λόγο της λ, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το $\nu^{\text{ο}}$ όρο α_ν μιας γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, λ και ν ως εξής:
Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \alpha_1\lambda \\ \alpha_3 &= \alpha_2\lambda \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\nu-1} &= \alpha_{\nu-2}\lambda \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1}\lambda \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$. Επομένως

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Έτσι π.χ. στη γεωμετρική πρόοδο 3, −6, 12, −24, ... η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = \frac{-6}{3} = -2$ ο ν^ος^ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 \cdot (-2)^{\nu-1}$. Επομένως ο 5^ος^ όρος της είναι $\alpha_5 = 3 \cdot (-2)^4 = 48$, ο δέκατος όρος της είναι $\alpha_{10} = 3 \cdot (-2)^9 = -1536$ κτλ.

Γεωμετρικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \text{ και } \frac{\gamma}{\beta} = \lambda, \quad \text{επομένως} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \text{ ή } \beta^2 = \alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Ας θεωρήσουμε τη γεωμετρική πρόοδο 1, 3, 9, 27, ... στην οποία είναι $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 3$, και ας βρούμε το άθροισμα S_7 των 7 πρώτων όρων της.
Έχουμε

$$S_7 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 \qquad (1)$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο $\lambda = 3$ και έχουμε

$$3S_7 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 \qquad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$3S_7 - S_7 = 2187 - 1$$
$$2S_7 = 2186$$
$$S_7 = 1093$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-2} + \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ (1)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ και έχουμε

$$\lambda S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + \alpha_1\lambda^\nu \quad (2)$$

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$\lambda S_\nu - S_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1$$

ή $$(\lambda - 1)S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$$

Επομένως, αφού $\lambda \neq 1$, έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 1$, τότε το άθροισμα των όρων της είναι $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$, αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με α_1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να βρεθεί ο $\nu^{ος}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο $4^{ος}$ όρος είναι $\frac{3}{4}$ και ο $9^{ος}$ όρος της είναι $-\frac{3}{128}$.

ΛΥΣΗ

Έστω α_1 ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου και λ ο λόγος της. Τότε έχουμε:

$$\alpha_1\lambda^{4-1} = \alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \alpha_1\lambda^{9-1} = \alpha_1\lambda^8 = -\frac{3}{128}$$

Επομένως $$\frac{\alpha_1\lambda^8}{\alpha_1\lambda^3} = \left(-\frac{3}{128}\right) : \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda^5 = -\frac{1}{32},$$

από την οποία προκύπτει ότι $\lambda = -\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$.

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του λ στην $\alpha_1\lambda^3 = \frac{3}{4}$ και έχουμε

$$\alpha_1\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \text{ ή } \alpha_1 = -6.$$

Άρα ο ν^{ος} όρος της γεωμετρικής προόδου, σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$, είναι

$$\alpha_\nu = (-6)\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να υπολογιστεί το άθροισμα $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{256}$.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = \frac{1}{2}$.

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, πρέπει να ξέρουμε το πλήθος ν των όρων.

Από τον τύπο όμως του ν^{ου} όρου $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε: $\frac{1}{256} = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ ή $\left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ και επομένως $\nu - 1 = 8$ ή $\nu = 9$.

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S_9 = 1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1-\frac{1}{512}}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{1022}{512} = \frac{511}{256}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το $\nu^{\text{ο}}$ όρο των γεωμετρικών προόδων:

i) 3, 6, 12, … **ii)** $\frac{2}{3}$, 2, 6, … **iii)** 9, 27, 81, …

iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ **v)** 16, 8, 4, … **vi)** 18, 6, 2, …

vii) 1, 0,4, 0,16, … **viii)** −2, 4, −8, … **ix)** −3, 9, −27, …

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις γεωμετρικές προόδους:

i) Τον α_9 της $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ **ii)** Τον α_7 της 2, 6, 18, …

iii) Τον α_8 της 729, 243, … **iv)** Τον α_{10} της 1, −2, 4, …

v) Τον α_9 της $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \ldots$

3. i) Να βρείτε τον $1^{\text{ο}}$ όρο μιας γεωμετρικής προόδου, της οποίας ο $5^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{32}{3}$ και ο λόγος 2.

ii) Ομοίως, αν ο $4^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{27}{128}$ και ο λόγος $\frac{3}{4}$.

4. i) Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο $3^{\text{ος}}$ όρος είναι 12 και ο $6^{\text{ος}}$ όρος είναι 96.

ii) Ομοίως, αν ο $2^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{8}{3}$ και ο $5^{\text{ος}}$ όρος είναι $\frac{64}{81}$.

5. Να βρείτε:

i) τον α_{14} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_4 = 125$ και $\alpha_{10} = \frac{125}{64}$

ii) τον α_{21} μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_{13} = \sqrt{2}$ και $\alpha_{23} = 32\sqrt{2}$.

6. Έστω η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12, ... Να βρείτε το πλήθος των όρων της μέχρι και τον όρο που ισούται με 768.

7. **i)** Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 4, 8, 16, ... που υπερβαίνει το 2000.

ii) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου 128, 64, 32, ... που είναι μικρότερος του 0,25.

8. **i)** Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών 5 και 20, καθώς και των $\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $\sqrt{3}$

ii) Να βρείτε τον x ώστε οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 10 όρων των γεωμετρικών προόδων

i) 1, 2, 4, … **ii)** 3, 9, 27, … **iii)** − 4, 8, −16, …

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

i) $2+8+32+...+8192$ **ii)** $4+2+1+...+\frac{1}{512}$ **iii)** $1+(-2)+4+...+256$.

11. Μια κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες;

12. Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 4η αναπήδηση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο ν^ος^ όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 2^\nu \cdot \frac{1}{3^{\nu+1}}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τους α_1 και λ.

2. Για ποια τιμή του ν οι αριθμοί $\sqrt{\nu-5}$, $\sqrt[4]{10\nu+4}$, $\sqrt{\nu+2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. Να δείξετε ότι:

i) Τα τετράγωνα των όρων μιας γεωμετρικής προόδου σχηματίζουν επίσης γεωμετρική πρόοδο.

ii) Αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γεωμετρικής προόδου στην k, τότε προκύπτει πάλι γεωμετρική πρόοδος.

4. Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, της οποίας το άθροισμα των δυο πρώτων όρων της είναι $3+\sqrt{3}$ και το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της είναι $4(3+\sqrt{3})$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων δέκα όρων της γεωμετρικής προόδου, στην οποία είναι $\alpha_2 + \alpha_6 = 34$ και $\alpha_3 + \alpha_7 = 68$.

6. Ο πληθυσμός μιας χώρας είναι 90 εκατομμύρια και παρουσιάζει ετήσια αύξηση 2%. Αν α_ν είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας (α_ν).
– Ποιος θα είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από 10 χρόνια;
[Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

7. Η ένταση του φωτός μειώνεται κατά 10%, όταν αυτό διέρχεται από ένα φίλτρο. Αν I_ν είναι η ένταση του φωτός, αφού διέλθει διαδοχικά μέσα από ν τέτοια φίλτρα, να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο, καθώς και το γενικό όρο της ακολουθίας (I_ν).
– Ποια θα είναι η ένταση του φωτός, αν διέλθει μέσα από 10 τέτοια φίλτρα και η αρχική ένταση είναι I_o;
[Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

8. Σε ένα όργανο μουσικής ο τόνος C' έχει συχνότητα 261 Hz και η οκτάβα του C'' έχει διπλάσια συχνότητα. Ανάμεσα στους C' και C'' υπάρχουν 11 επιπλέον τόνοι, των οποίων οι συχνότητες σχηματίζουν με τις συχνότητες των C' και C''

13 διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε:

i) το λόγο της προόδου,

ii) τη συχνότητα του πέμπτου τόνου.

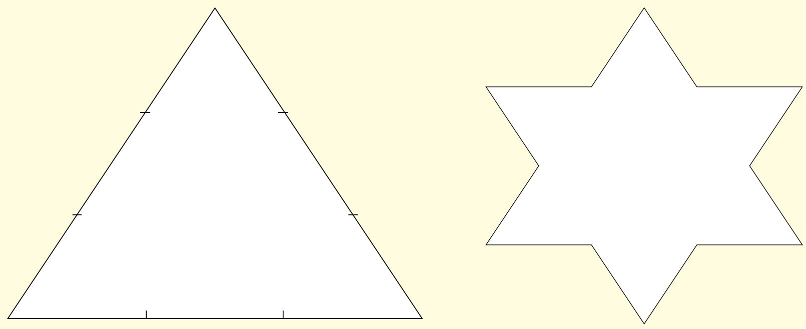
9. Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 It νερό. Αδειάζουμε 4 lt νερό και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό. Ύστερα αδειάζουμε 4 It του μείγματος και το αντικαθιστούμε με αντιπυκτικό κ.ο.κ. Αν D_ν είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία ν φορές, να βρείτε:

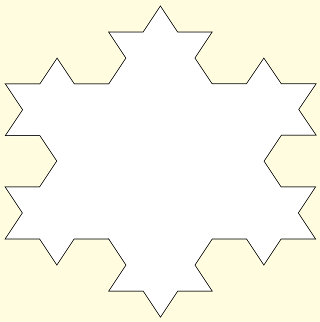
i) Έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας (D_ν).

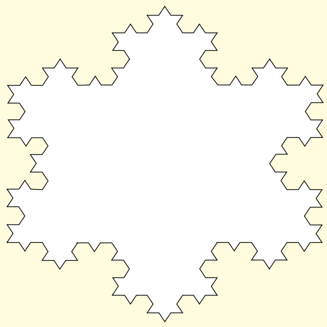
ii) Την ποσότητα του αντιπυκτικού στο ψυγείο, αφού εφαρμοσθεί η διαδικασία 7 φορές. [Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης].

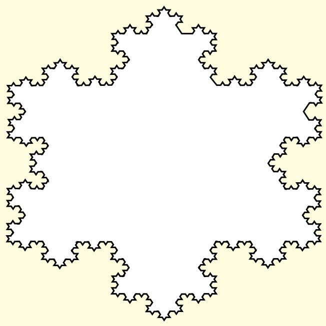
10. Λέγεται ότι ο εφευρέτης του σκακιού παρακλήθηκε από έναν Ινδό βασιλιά να ζητήσει όποια αμοιβή ήθελε για τη σπουδαία ιδέα του. Ο εφευρέτης ζήτησε να πάρει το ρύζι που θα μαζευόταν ως εξής: Στο 1ο τετραγωνάκι του σκακιού να έβαζε κάποιος έναν κόκκο ρυζιού, στο 2ο τετραγωνάκι 2 κόκκους, στο 3ο τετραγωνάκι 4 κόκκους, στο 5ο τετραγωνάκι 8 κόκκους κτλ.
Να βρείτε πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα αυτή του ρυζιού, αν 1 Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους.

11. Κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα. Το μεσαίο τμήμα κάθε πλευράς αντικαθίσταται από τις δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Στο σχήμα με μορφή αστεριού που προκύπτει αντικαθιστούμε πάλι το μεσαίο $\frac{1}{3}$ κάθε πλευράς με δυο πλευρές ισόπλευρου τριγώνου. Με ανάλογο τρόπο συνεχίζουμε για κάθε σχήμα που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή.









i) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (S_ν) που εκφράζει το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος.

ii) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο και το γενικό όρο της ακολουθίας (U_ν) που εκφράζει την περίμετρο κάθε σχήματος, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά ίση με 1.