

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

3.137 Αν οι αριθμοί $\frac{2x}{3}$ και $-\frac{16}{y}$ είναι αντίθετοι:

α) να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{x}{4}$ και $\frac{y}{6}$ είναι αντίστροφοι,

β) να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{-5[3x - y(x-2)] - 3[x(y-5) - (2y-1)] + 4y}{(2 \cdot 3^9 + 3^9)^2 : (9^{15} : 27^4)}$$

3.138 Για τους αριθμούς α και β ισχύει:

$$(-\alpha - \beta)^2 - (-\beta + \alpha)^2 = 4 \quad (1)$$

και:

$$(\alpha - \beta - 1)(\alpha + \beta - 1) = -2(1 + \alpha - \alpha^2) \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha^2 + \beta^2$.

γ) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i) } A = (\alpha + \beta)^2 \quad \text{ii) } B = \alpha^4 + \beta^4$$

3.139 Δίνονται αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ για τους οποίους ισχύουν:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5}$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha}{8} = \frac{\beta}{\kappa} = \frac{\gamma}{\lambda}$$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\alpha\beta + \beta\gamma = 69$, να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ .

3.140 Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β , με $\beta + 4\alpha \neq 0$, για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{4\beta - 2\alpha}{\beta + 4\alpha} = -5$$

Να βρείτε:

α) τον λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$,

β) την τιμή της παράστασης:

$$A = \left[\frac{\beta : \alpha^{-4}}{(\beta^{-1}\alpha^3)^3} \right]^2 : \left[\frac{\alpha^7 : \alpha^2}{(\beta^5)^2\beta^{-7}} \right]^{-1}$$

3.141 Για τους αριθμούς α και β (με $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ και $\alpha \neq \beta$) ισχύει ότι:

$$(2\alpha + \beta)^2 = 8 \left[(\alpha + \beta)^2 - \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \right]$$

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = 2\alpha$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha^4 + \alpha\beta^3}{\alpha^2\beta^2 - \beta^3\alpha + \beta^4}$$

3.142 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^3 - 9x)}{x^2 - x}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $A = 0$.