4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

Η παράσταση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, **τριώνυμο**. Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ λέγεται και **διακρίνουσα του τριωνύμου**. Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, δηλαδή οι $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ονομάζονται και **ρίζες του τριωνύμου**.

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)\\ &= \alpha\left[x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right]\\ &= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right].\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]} \qquad (1).$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- $\boldsymbol{\Delta > 0}$. Τότε ισχύει $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]\\ &= \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\\ &= \alpha\left[x - \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right].\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)},$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

- $\boldsymbol{\Delta = 0}$. Τότε από την ισότητα (1) έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Άρα, όταν $\Delta = 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$. Τότε ισχύει $|\Delta| = -\Delta$, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Επειδή για κάθε $x \in R$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για τις μορφές του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα Δ έχουμε:

- Αν $\Delta > 0$, τότε:
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2),$$
όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

- Αν $\Delta = 0$, τότε:
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- Αν $\Delta < 0$, τότε:
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Για παράδειγμα:

✓ Το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 2$ έχει $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = -2$. Επομένως:
$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = (2x - 1)(x + 2).$$

✓ Το τριώνυμο $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ έχει $\Delta = 9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 0$ και $\frac{\beta}{2\alpha} = -3$. Επομένως:

$$\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}(x-3)^2.$$

✓ Το τριώνυμο $2x^2-6x+5$ έχει $\Delta=-4<0$. Επομένως:

$$2x^2-6x+5=2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].$$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα.

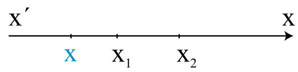
- Αν $\mathbf{\Delta>0}$, τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2) \qquad (1)$$

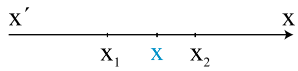
Υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

Παρατηρούμε ότι:

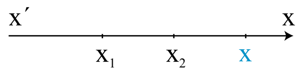
✓ Αν $x<x_1<x_2$ (Σχήμα), τότε $x-x_1<0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



✓ Αν $x_1<x<x_2$ (Σχήμα), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2<0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)<0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α.



✓ Αν $x_1<x_2<x$ (Σχήμα), τότε $x-x_1>0$ και $x-x_2>0$, οπότε $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



- Αν $\mathbf{\Delta=0}$, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε πραγματικό $x\neq-\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

- Αν **Δ < 0**, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α** , μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ανισώσεις της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$, $\alpha\neq 0$, τις οποίες ονομάζουμε **ανισώσεις δευτέρου βαθμού**. Ο τρόπος επίλυσης αυτών φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $2x^2-3x-2>0$ **ii) $2x^2-3x-2<0$**

ΛΥΣΗ

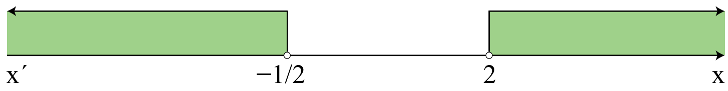
Ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες το τριώνυμο $2x^2-3x-2$ είναι θετικό στην περίπτωση (i) και αρνητικό στην περίπτωση (ii).

Το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και 2 και, επειδή $\alpha=2>0$, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι:

i) Η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 > 0$ έχει λύσεις τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $x < -\frac{1}{2}$ ή $x > 2$, δηλαδή τα $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 < 0$ έχει λύσεις τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $-\frac{1}{2} < x < 2$,

δηλαδή τα $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

ΛΥΣΗ

Ζητάμε τις τιμές του x, που είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ή ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Επομένως σύμφωνα με το 1ο παράδειγμα οι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$ είναι τα $x \in \mathbb{R}$, με $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, δηλαδή τα $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

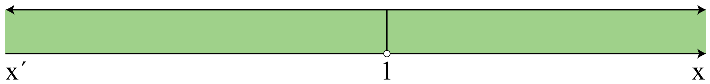
Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $x^2 - 2x + 1 > 0$ **ii) $x^2 - 2x + 1 < 0$.**

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 1$ είναι $\Delta = 0$, οπότε έχει διπλή ρίζα τη $x = 1$. Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1$.

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης (i) είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x, με $x \neq 1$, ενώ η ανίσωση (ii) είναι αδύνατη.
Οι λύσεις της (i) εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 + x + 1 > 0$.

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + x + 1$ είναι $\Delta = -3 < 0$, οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x^2 - 4x - 5 < 0 \text{ και } x^2 - x - 6 > 0.$$

ΛΥΣΗ

Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές λύσεις.
Έχουμε:

✓ $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

✓ $x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 3$

Άρα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (3,5)$.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha + 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης και να μελετηθεί το πρόσημό της.

ii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες;

iii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;

iv) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$;

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\Delta = [-(\alpha+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha+4) = \alpha^2 - 2\alpha - 15.$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο του α με διακρίνουσα

$$\Delta' = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0.$$

Επομένως η διακρίνουσα Δ έχει ρίζες:

$$\alpha_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \frac{2-8}{2} = -3.$$

και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι:

ii) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν $\Delta > 0$, δηλαδή αν $\alpha < -3$ ή $\alpha > 5$.
iii) Η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα αν $\Delta = 0$, δηλαδή αν $\alpha = -3$ ή $\alpha = 5$.
iv) Η εξίσωση είναι αδύνατη αν $\Delta < 0$, δηλαδή $-3 < \alpha < 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 3x + 2$ **ii)** $2x^2 - 3x - 2$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2}$ **ii)** $\dfrac{2x^2+8x-42}{x^2-49}$ **iii)** $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^2-5x+3}$.

3. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $x^2 - 2x - 15$ **ii)** $4x^2 - 4x + 1$ **iii)** $x^2 - 4x + 13$.

4. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $-x^2 + 4x - 3$ **ii)** $-9x^2 + 6x - 1$ **iii)** $-x^2 + 2x - 2$.

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5x^2 \leq 20x$ **ii)** $x^2 + 3x \leq 4$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - x - 2 > 0$ **ii)** $2x^2 - 3x - 5 < 0$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 + 4 > 4x$ **ii)** $x^2 + 9 \leq 6x$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 + 3x + 5 \leq 0$ **ii)** $2x^2 - 3x + 20 > 0$.

9. Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0$.

10. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$.

11. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $x^2 - 6x + 5 < 0$ και $x^2 - 5x + 6 > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

$$\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 \text{ και } \alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2.$$

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2}$.

2. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta$.

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2}$.

4. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

i) έχει ρίζες ίσες **ii)** έχει ρίζες άνισες **iii)** είναι αδύνατη.

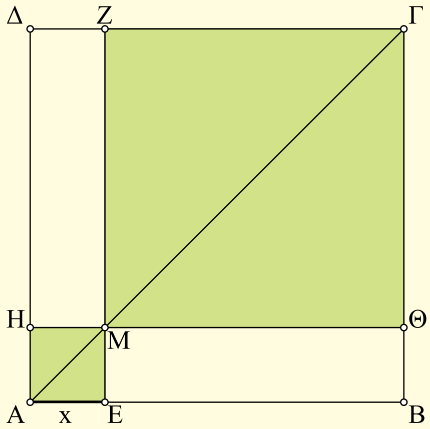
5. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$, $\lambda \neq -2$.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta < 0$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$, $\lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5.



8. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \neq 0$.

ii) Να καθορίσετε το πρόσημο της παράστασης $A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \neq 0$.