Απόλυτη τιμή

- Πραγματικών Αριθμών

5.21 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = |-2| + |5| - |-3|$

β) $B = \dfrac{|4| + |-7| - |-5|}{|-8| - |-1| - |-4|}$

γ) $\Gamma = \dfrac{|-3|(|-5| - |1|)}{-|-1| - |-3|}$

δ) $\Delta = \dfrac{(-|-4| - |-2|)^2| - 5|}{|-4|| - 2| + |-2|}$

5.22 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = |\sqrt{5} - 2| + |\sqrt{5} - 3|$

β) $B = |\pi - 4| - |\pi - 3| - |2\pi - 7|$

5.23 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = |x^2 + 1| - |-x^2 - 4|$

β) $B = |x^2 + 4x + 4| - |6x - x^2 - 9|$

γ) $\Gamma = |(x-1)(x+1) + 3| - |x^2 - 10x + 25|$

δ) $\Delta = |(2x+1)^2 - (x+1)^2 - 2x^2 + 1|$

5.24 Αν $\alpha < 3 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = |3 - \alpha| + |3 - \beta| - |\alpha - \beta|$

β) $B = |\alpha - 3| + |\beta| + |\alpha - \beta|$

γ) $\Gamma = |\alpha - 4| - |\beta - 2|$

δ) $\Delta = |\alpha - \beta| - |5 - \alpha| - |1 - \beta|$

5.25 Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 1| - |x - 2|$$

α) Για $1 < x < 2$ να αποδείξετε ότι $A = 2x - 3$.

β) Για $x < 1$ να αποδείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

5.26 Αν ισχύει $-4 < x < -1$, να αποδείξετε ότι οι επόμενες παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x:

α) $A = |x + 4| - 2|x + 1| + 3|x|$

β) $B = |3x + 3| - |2x + 8| - |5x|$

γ) $\Gamma = |2x - 3| - |1 - 3x| + |-x|$

δ) $\Delta = |x^2 - 1| + |x^2 - 20|$

5.27 Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 1| + |y - 3|$$

με x και y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$ **β)** $0 < A < 4$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

5.28 Δίνεται η παράσταση:

$$A = |3x - 6| + 2$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$ είναι $A = 3x - 4$,

ii) για κάθε $x < 2$ είναι $A = 8 - 3x$.

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

5.29 Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{x^2 + 2|x|}{|x| + 2}$ **β)** $B = \dfrac{|x|^3 + 3x^2}{2|x| + 6}$

γ) $\Gamma = \dfrac{x^2 + 4|x| + 4}{|x| + 2}$ **δ)** $\Delta = \dfrac{x^2 - 1}{|x| + 1}$

5.30 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α) $A = |x + 2| + x$ **β)** $B = 2x - |x - 1|$

γ) $\Gamma = x - |4 - x|$ **δ)** $\Delta = x + 1 - |2x - 6|$

5.31 Αν ισχύει $-2 < x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \big|5 - |x - 3|\big|$

β) $B = \big||x + 2| - 5 - |2x - 6|\big|$

5.32 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = |3x-6| - |4-2x| - |2-x|$

β) $B = |\alpha-\beta+3| + |\beta-\alpha-3| - |2\beta-2\alpha-6|$

5.33 Να γράψετε την παράσταση:

$$A = \big|x-|x|\big| + \big|x+|x|\big|$$

χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

5.34 Αν $x \neq 0$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \left(1+\frac{|x|}{x}\right)(x-|x|)$$

είναι σταθερή (ανεξάρτητη του x).

5.35 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α) $A = x - |x-2| + |x+4|$

β) $B = 2x - |1-x| - |x|$

γ) $\Gamma = |2-x| + |3x-3| - 2x$

5.36 Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x+2| + |3-x| - 2|x|$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x.

5.37 Αν $x, y \neq 0$, να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} + \frac{|xy|}{xy}$$

- Με σχέσεις

5.38 Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

α) $|x| = 3$ β) $|x| = 7$

γ) $|x| = 0$ δ) $|x| = -2$

5.39 Αν ισχύει ότι:

$$|\alpha-\beta+3| = 3$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = \beta - 6$.

5.40 Αν ισχύει ότι $|3\alpha-\beta| = |2\alpha-9\beta|$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2\beta$ ή $\alpha = -8\beta$.

5.41 Αν ισχύει ότι $|4\alpha-5\beta| + |2\alpha-\beta| = |4\alpha-2\beta|$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = 2\beta$.

5.42 Αν ισχύει ότι $|\alpha+\beta| = |\alpha-\beta|$, να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β ισούται με 0.

5.43 Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύουν:

α) $|\alpha-3\beta| + |3\beta-6| - |2\beta-4| = 0$

β) $|2\alpha+\beta-5| + |3\alpha+2\beta-6| = 0$

5.44 Να βρείτε τον αριθμό x για τον οποίο ισχύει:

α) $|x^2-9| + |x^2+3x| = 0$

β) $|x^3-4x| + |x^3-2x^2-9x+18| = 0$

- Αποδεικτικές

5.45 Να αποδείξετε ότι:

α) $|\alpha+1|^2 - 4\alpha = |\alpha-1|^2$

β) $(|\alpha|-|\beta|)^2 + 2|\alpha\beta| = \alpha^2+\beta^2$

γ) $|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$

δ) $(|\alpha|-|\beta|)(|\alpha|+|\beta|) + 2\beta(\alpha+\beta) = |\alpha+\beta|^2$

ε) $|\alpha+2\beta|^2 + 3(|\alpha|+|\beta|)(|\alpha|-|\beta|) = |2\alpha+\beta|^2$

5.46 Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$\frac{|x^3+2x|}{|x|^2+2} = \frac{3|x|+x^2}{3+|x|}$$

5.47 Αν ισχύει ότι $|2\alpha+\beta| = |2\alpha| + |\beta|$, όπου $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι.

5.48 Αν ισχύει ότι $|3\alpha-2\beta| = |3\alpha| + |2\beta|$, όπου $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

5.49 α) Αν ισχύει ότι $|α+3| = |α| + 3$, να αποδείξετε ότι $α \geq 0$.

β) Αν ισχύει ότι $|α+2| = ||α| - 2|$, να αποδείξετε ότι $α \leq 0$.

5.50 Να αποδείξετε ότι:

α) $α^2 + β^2 \geq 2|αβ|$ β) $x^2 + 4 \geq 4|x|$

5.51 Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

α) $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$ β) $\dfrac{4x^2+9}{12} \geq |x|$

5.52 Να αποδείξετε ότι:

α) $αβ + |αβ| \geq |α|β + α|β|$

β) $|x|^3 + 8 \geq 2x^2 + 4|x|$

5.53 α) Αν $α, β \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{α}{β}\right| + \left|\frac{β}{α}\right| \geq 2 \qquad (1)$$

β) Πότε ισχύει η ισότητα στη σχέση (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τράπεζα Θ. – 2ο θέμα)

5.54 Αν $|x| \leq 2$ και $|y| \leq 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $|x+y| \leq 5$ β) $|x-y| \leq 5$

γ) $|3x+y| \leq 9$ δ) $|2x-3y| \leq 13$

ε) $|x-2y+3| \leq 11$ στ) $\left|\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} + 5\right| \leq 7$

5.55 Να αποδείξετε ότι:

$$|4αβ| \leq \left(|α| + |β|\right)^2 \leq 2(α^2 + β^2)$$

5.56 Να αποδείξετε ότι:

α) αν $|3α+4β| < |4α+3β|$, τότε $|α| > |β|$,

β) αν $\left|\dfrac{α+2β}{2α+β}\right| \leq 1$, τότε $|α| \geq |β|$.

5.57 Έστω α και β πραγματικοί μη μηδενικοί αριθμοί.

α) Αν ισχύει ότι $\dfrac{|β|}{α} - \dfrac{β}{|α|} = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι.

β) Αν ισχύει ότι $α|β| + β|α| = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

5.58 Έστω αριθμοί $α, β \neq 0$ για τους οποίους ισχύει ότι $|α+β| < |α-β|$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι,

β) ισχύει $α|β| + β|α| = 0$.

5.59 Για τους αριθμούς $x, y \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\left|\frac{3x|y| + 2y|x|}{xy}\right| = 5$$

Να αποδείξετε ότι οι x και y είναι ομόσημοι.

5.60 Αν ισχύει ότι $|αβ| = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(1+|α|\right)\left(1+|β|\right) \geq 4$$

5.61 Αν ισχύει ότι $|α| < 1$ και $|β| < 2$, να αποδείξετε ότι $|αβ+2| > |2α+β|$.

5.62 Να αποδείξετε ότι:

α) $|α+β| \leq |α-γ| + |γ+β|$

β) $|2α-3β| \leq |α-5β| + |α+2β|$

γ) $|α-β| \leq |2α+5β| + |3α-7β| + |β-4α|$

5.63 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

α) $|x-3| + |2-x| \geq 1$

β) $|x+5| + |x+3| \geq 2$

γ) $\left||x-7| - |4-x|\right| \leq 3$

5.64 Αν ισχύει ότι $|α-β| \leq 1$ και $|α-γ| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $|β-γ| \leq 2$.

5.65 Αν $α \neq 2$ και $β \neq -4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2α-4}{|α-2|} + \frac{3β+12}{|β+4|} \leq 5$$

5.66 Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι $\dfrac{α^2}{9} + \dfrac{β^2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

$$-6 \leq 2α + 3β \leq 6$$

Απόσταση

5.67 Να βρείτε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα των παρακάτω διαστημάτων:

α) $[2, 8]$ **β)** $[-17, -5]$

γ) $[-10, 24]$ **δ)** $[-19, 11]$

5.68 Το διάστημα $[-9, \beta]$ έχει ακτίνα 7. Να βρείτε:

α) τον αριθμό β,

β) το κέντρο του διαστήματος.

5.69 Το διάστημα $[\alpha, 8]$ έχει κέντρο 3. Να βρείτε:

α) τον αριθμό α,

β) την ακτίνα του διαστήματος.

5.70 Αν ισχύει ότι $d(2\alpha, 9\beta) = d(\alpha, 0)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 9\beta$ ή $\alpha = 3\beta$.

5.71 Αν $\alpha < 1 < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = d(1, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta)$$

5.72 Να αποδείξετε ότι $d(4\alpha, 0) \leq d(4\alpha^2, -1)$.

5.73 Να αποδείξετε ότι:

$$d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, 3) + d(3, \beta)$$

5.74 Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να αποδείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18$$

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

- Ανισώτητες

5.76 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Απόλυτη τιμή	Ανισότητα
$\lvert x\rvert < 5$	
$\lvert x\rvert \geq 3$	
$\lvert x\rvert \leq 2$	
$\lvert x\rvert > 4$	
	$x < -7$ ή $x > 7$
	$-9 \leq x \leq 9$
	$x \leq -1$ ή $x \geq 1$
	$-13 < x < 13$

5.75 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Απόλυτη τιμή	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\lvert x\rvert < 3$	
$\lvert x\rvert \leq 4$	
$\lvert x\rvert > 2$	
$\lvert x\rvert \geq 5$	
	$x \in [-1, 1]$
	$x \in (-6, 6)$
	$x \in (-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$
	$x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$

5.77 Να βρείτε σε ποιο σύνολο ανήκουν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει:

α) $|x-4| < 6$ **β)** $|x+3| < 7$

γ) $|x-2| > 4$ **δ)** $|x+1| > 2$

ε) $|x-5| \leq 3$ **στ)** $|x-6| \geq 5$

5.78 Αν ισχύει ότι $|x| < 2$ και $|y| < 4$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι παραστάσεις:

α) $\alpha = 2x + 3y$ **β)** $\beta = x - 2y + 4$

γ) $\gamma = 3x - y - 2$ **δ)** $\delta = -4x - 5y + 3$

5.79 **α)** Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει $|y-3|<1$.

β) Αν x και y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με:

$$1<x<3 \quad \text{και} \quad 2<y<4$$

να αποδείξετε ότι:

i) $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου,

ii) $2<E<12$, όπου Ε είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

5.80 Αν για τον πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -3$ ισχύει $-1 \leq \frac{3\alpha+1}{\alpha+3} \leq 1$, να αποδείξετε ότι $|\alpha| \leq 1$.

5.81 Αν ισχύει ότι $|x|^3-1 \leq x^2-|x|$, να αποδείξετε ότι $-1 \leq x \leq 1$.