ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΜΕΧΡΙ ΤΩΡΑ (Ενότητα 24)

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.3 Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

1. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Απόδειξη:

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, δηλ.

- $|\alpha \cdot \beta| \geq 0 \; \kappa\alpha\iota$
- $|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0$

έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$$

$$|\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \qquad \pi o \upsilon \; \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota.$$

(1) Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο

(2) $|\alpha \cdot \beta| \geq 0$ άρα και $|\alpha \cdot \beta|^2| \geq 0$, $|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0$ άρα και $(|\alpha| \cdot |\beta|)^2| \geq 0$

(3) $|\alpha|^2 \geq 0$ άρα $|\alpha|^2 = \alpha^2$ (όμοια το β)

■

2. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

Απόδειξη:

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \quad \text{όπως και στην απόδειξη 1 (βήμα 3)}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \pi o \upsilon \; \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota.$$

■

3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόδειξη:

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha+\beta| < |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, δηλ.

- $|\alpha+\beta| \geq 0$ *και*
- $|\alpha| + |\beta| \geq 0$

έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow$$

$$|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \qquad \text{που ισχύει.}$$

Η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν:

οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι

ή

ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (ν-οστή ρίζα)

1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

Απόδειξη:

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta})^\nu = (\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta})^\nu \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu \cdot (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta, \qquad \text{που ισχύει}$$

■

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ *με* $\beta \neq 0$

Απόδειξη:

Έχουμε για $\beta \neq 0$:

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\nu \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu}{(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \text{που ισχύει} \ ■$$

3. Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$

Απόδειξη:

Έχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu \cdot \nu} = \left(\sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}\right)^{\mu \cdot \nu} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha, \quad \text{που ισχύει}$$

4. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Απόδειξη:

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

5. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ ισχύει: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$

Απόδειξη:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \alpha < \beta, \quad \text{που ισχύει}$$