ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

ΑΡΙΘΜΟΙ – ΠΡΑΞΕΙΣ

Κατηγορίες αριθμών

Γνωρίζουμε ήδη από το Γυμνάσιο ότι οι αριθμοί ανάλογα με τις ιδιότητές τους χωρίζονται σε διαφορετικές κατηγορίες. Παρακάτω φαίνεται ο διαχωρισμός αυτός:

- **Ακέραιοι**: είναι οι θετικοί αριθμοί, οι αρνητικοί αριθμοί και το μηδέν χωρίς δεκαδικό μέρος (υποδιαστολή)

  Συμβολισμός: $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Φυσικοί Αριθμοί**: είναι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι με το μηδέν

  Συμβολισμός: $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Ρητοί Αριθμοί**: είναι οι αριθμοί που έχουν (ή μπορούν να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

  Συμβολισμός: $\mathbb{Q}$

  Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Για παράδειγμα:

$$\frac{14}{5} = 2,8, -\frac{9}{8} = -1,25, \frac{60}{11} = 5,\overline{45}, 2,25 = \frac{225}{100} \kappa\alpha\iota 2,\overline{32} = \frac{230}{99}$$

- **Άρρητοι Αριθμοί**: είναι οι αριθμοί που ΔΕΝ έχουν (ή ΔΕΝ μπορούν να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

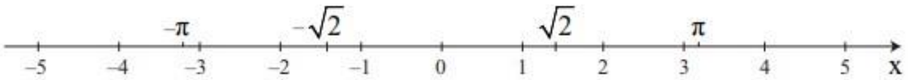
Για παράδειγμα,

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$$

- **Πραγματικοί Αριθμοί**: οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.

  Συμβολισμός: $\mathbb{R}$

  Άξονας των πραγματικών αριθμών:



Ιδιότητες

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα (τα α, β, γ παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς):

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{a} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

- ✓ Ο αριθμός **0** λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο** της *πρόσθεσης*, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει
- ✓ Ο αριθμός **1** λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο** του *πολλαπλασιασμού*, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

Υπενθύμιση: ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1. $(\alpha = \beta \ \kappa\alpha\iota \ \gamma = \delta\ ) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$

   δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να αυτής προσθέσουμε κατά μέλη.

2. $(\alpha = \beta \ \kappa\alpha\iota \ \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$

   δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να αυτής πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

   δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4. $\text{αν } \gamma \neq 0, \text{τότε: } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$

   δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5. $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$

   δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς αυτούς είναι ίσος με το μηδέν.

   Άμεση συνέπεια αυτής ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Έννοια της δύναμης

Η έννοια της *δύναμης αριθμού* με εκθέτη ακέραιο είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. Συγκεκριμένα, αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, έχουμε ορίσει ότι: για $\nu > 1$,

$$\boldsymbol{\alpha^\nu} = \underbrace{\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha \ldots \alpha \cdot \alpha}}_{\nu \text{ φορές το } \alpha}$$

- για $\nu = 1$ ισχύει $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$
- για $\nu = 0$ ισχύει $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$
- $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ Ενώ είναι φανερό ότι, αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$, **δεν ισχύει το αντίστροφο**

Π.χ. εφαρμόζοντας τα παραπάνω για $\alpha = -2$, $\beta = 2$ και $\nu = 2$ ισχύει

…………….. $\alpha^\nu = \beta^\nu \Rightarrow (-2)^2 = 2^2$, αλλά $\alpha \neq \beta \Rightarrow -2 \neq 2$.

Ιδιότητες

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις δυνάμεις:

1. $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}$
2. $\alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa = \alpha\beta^\kappa$

3. $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$
4. $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$ *
5. $\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = (\frac{\alpha}{\beta})^{\kappa}$
6. (Βάσει των παραπάνω προκύπτει επίσης $\alpha^{\kappa} = \frac{1}{\alpha^{-\kappa}}$)

* Η $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$ προκύπτει ως εξής: $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa} \cdot \frac{1}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{-\lambda} = \alpha^{\kappa+(-\lambda)} = \alpha^{\kappa-\lambda}$

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Υπενθύμιση: Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται ταυτότητα. Ορισμένες που γνωρίζουμε από το γυμνάσιο είναι οι εξής:

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $\alpha - \beta = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$
4. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
5. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
6. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$
7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$
8. $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Παραπάνω είδαμε ορισμένες από τις σημαντικότερες ταυτότητες όπως για παράδειγμα η $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. Πώς όμως καταλήξαμε ότι $(\alpha + \beta)^2$ ισούται όντως με το παραπάνω; Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε μεθόδους για να αποδείξουμε τις ταυτότητες αυτές: Δύο από τις πιο γνωστές μεθόδους απόδειξης είναι οι παρακάτω:

1. **Ευθεία Απόδειξη**: ξεκινάμε με κάτι (με μία συνθήκη) που υποθέτουμε ότι ισχύει στα μαθηματικά και καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα.
2. **Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο**: Ξεκινάμε την απόδειξη θεωρώντας ότι δεν ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας ορθές προτάσεις καταλήγουμε σε κάτι που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε, δηλαδή σε κάτι άτοπο.

Ενδεχομένως τα παραπάνω δημιουργούν σύγχυση οπότε πάμε να τα δούμε στη πράξη:

Παράδειγμα με ευθεία απόδειξη

A) Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

$$«Αν\ \alpha+\beta+\gamma=0, τότε\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma»$$

δηλαδή την

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$$

Απόδειξη:

Έχω $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \alpha=-(\beta+\gamma)$

οπότε θα έχουμε:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=[-(\beta+\gamma)]^3+\beta^3+\gamma^3$$
$$=-(\beta+\gamma)^3+\beta^3+\gamma^3$$
$$=-\beta^3-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-\gamma^3+\beta^3+\gamma^3$$
$$=-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2$$
$$=-3\beta\gamma(\beta+\gamma),$$
$$=3\alpha\beta\gamma$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

άρα

$$-(\alpha+\beta)^3=-\alpha^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-\beta^3$$

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow \beta+\gamma=-\alpha$$

Για την απόδειξη της παραπάνω συνεπαγωγής ξεκινήσαμε με την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma=0$ και με διαδοχικά βήματα αναπτύσσοντας το $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται **ευθεία απόδειξη**.

B) Μία ευκολότερη απόδειξη, είναι αυτή της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2$ δηλαδή ότι ισχύει

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \quad \text{με} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Απόδειξη:

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)$$
$$=\alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta)$$
$$=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2$$
$$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

Στην παραπάνω απόδειξη πήραμε το πρώτο μέλος $(\alpha+\beta)^2$ της ισότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ και καταλήξαμε στο δεύτερο μέλος. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται επίσης **ευθεία απόδειξη**.

Παράδειγμα με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό:

«Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος»

δηλαδή (μαθηματικά):

«Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός»

Απόδειξη:

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής:

Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή $\alpha = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος ($\kappa \in \mathbb{Z}$), οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (2\kappa + 1)^2 \\ &= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 \\ &= 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1 \\ &= 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

Δηλαδή $\alpha^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, που σημαίνει ότι ο α^2 είναι *περιττός*. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι *άρτιος*. Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. **Άρα ο α είναι άρτιος**.

Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο**.