5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ορισμός γεωμετρικής προόδου

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Παραδείγματα:

1. Στην ακολουθία $3,\ 6,\ 12,\ 24, \ldots$ κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot 2 \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο 2.**

2. Στην ακολουθία $27,\ -9,\ 3,\ -1, \ldots$ κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί $-\frac{1}{3}$. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = -\frac{1}{3}$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο $-\frac{1}{3}$.**

Σύμφωνα με τον ορισμό, τον μη μηδενικό αυτόν αριθμό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγο της προόδου**

Έτσι, για μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Επομένως, για μία γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με λόγο λ, ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

► Για τους *όρους* μιας αριθμητικής προόδου ισχύουν τα εξής:

- Αν $0 < \lambda < 1$ και $\begin{cases} \text{για } \alpha_1 > 0, & \text{τότε οι όροι της } \textit{μικραίνουν} \\ \text{για } \alpha_1 < 0, & \text{τότε οι όροι της } \textit{μεγαλώνουν} \end{cases}$
- Αν $\lambda > 1$ και $\begin{cases} \text{για } \alpha_1 > 0, & \text{τότε οι όροι της } \textit{μεγαλώνουν} \\ \text{για } \alpha_1 < 0, & \text{τότε οι όροι της } \textit{μικραίνουν} \end{cases}$
- Αν $\lambda > 1$, τότε όλοι οι όροι της είναι ίσοι
- Αν $\lambda < 0$, τότε οι όροι της προόδου εναλλάσσουν πρόσημο και δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν μεγαλώνουν οι μικραίνουν

Γενικός (ν-οστός) όρος γεωμετρικής προόδου

Ο ν-οστός μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Απόδειξη:

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1\lambda \\ \alpha_3 = \alpha_2\lambda \\ \alpha_4 = \alpha_3\lambda \\ \vdots \\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} \cdot \lambda \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda \end{gathered}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{\nu-2} \cdot \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda^{\nu-1} \iff$$
$$\iff \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

■

Διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$\beta^2 = \alpha\gamma$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ. Ισχύει ότι:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\beta} = \lambda$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\beta^2 = \alpha\gamma \iff$$
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

■

Γεωμετρικός μέσος

Ο θετικός αριθμός $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των αριθμών α και γ.

- Δύο ετερόσημοι αριθμοί δεν έχουν γεωμετρικό μέσο.
- Δύο ίσοι αριθμοί έχουν γεωμετρικό μέσο την απόλυτη τιμή τους.
- Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ο β δεν είναι υποχρεωτικά ο γεωμετρικός μέσος των α και γ, αφού ενδέχεται ο β να είναι αρνητικός αριθμός.