4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

- Η παράσταση

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \qquad \alpha\neq 0$$

λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, τριώνυμο.

- **Διακρίνουσα του τριωνύμου** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ λέμε την διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$$

της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

- **Ρίζες του τριωνύμου** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ λέμε τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Οι ρίζες αυτές δίνονται από τον τύπο:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ \Delta\geq 0$$

(Όπως και στην εξίσωση 2ου βαθμού έτσι και εδώ μπορούμε να το αναλύσουμε με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, όμως περιπλέκονται πολύ τα πράγματα. Επομένως πηγαίνουμε κατευθείαν στο συμπέρασμα...)

Συνοψίζουμε, λοιπόν, ότι:

Διακρίνουσα Δ	**Ρίζες**	**Μορφή τριωνύμου** $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \quad \alpha\neq 0}$
$\Delta>0$	$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$	$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0$	$x=\frac{-\beta}{2\alpha}$	$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ $=\alpha(x-x_0)^2$
$\Delta<0$	Δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες	Δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων

Πρόσημο τιμών του τριωνύμου

Για να βρούμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$ διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1. Αν $\Delta>0$ τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 (έστω με $x_1<x_2$) πραγματικές και άνισες και ισχύει ότι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο συνοπτικά:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	**ομόσημο** του α	0	**ετερόσημο** του α	0	**ομόσημο** του α

2. Αν $\Delta=0$ τότε το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα την $x=\frac{-\beta}{2\alpha}$ και ισχύει ότι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=a\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο συνοπτικά:

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	**ομόσημο** του α	0	**ομόσημο** του α

3. Αν $\Delta<0$ τότε το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και ισχύει ότι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=a\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Όμως είναι $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο συνοπτικά:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	**ομόσημο** του α

Δηλαδή συνοπτικά,

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α** , μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση