2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

Εισαγωγικά – ορισμός

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

Η ***τετραγωνική ρίζα*** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Δηλαδή:

$$x=\sqrt{\alpha} \iff x^2=\alpha \qquad \text{με } \alpha \geq 0 \text{ και } x \geq 0$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

- Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2=\alpha$

Ιδιότητες γνωστές από το γυμνάσιο

1. Αν α πραγματικός αριθμός τότε:

$$\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2}=|\boldsymbol{\alpha}|$$

2. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε:
   - $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\beta}}=\sqrt{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}$
   - $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{\alpha}$
   - $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ με $\beta \neq 0$

Ν-ΟΣΤΗ ΡΙΖΑ

Εισαγωγικά – ορισμός

- Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος για την πλευρά x ενός ορθογωνίου και μας δίνεται ότι το εμβαδό του είναι $x^2=16$ τότε:

$$x^2=16 \Leftrightarrow x=\sqrt{16} \Leftrightarrow x=4 \ \ \text{μονάδες μήκους}$$

- Αν όμως θέλαμε να υπολογίσουμε το μήκος για την πλευρά x ενός κύβου και μας δίνεται ότι το εμβαδό του είναι $x^3=27$ τότε θα «φεύγαμε» από την έννοια της *τετραγωνικής ρίζας* και θα πηγαίναμε στην έννοια της ν-οστής ρίζας:

$$x^3=27 \iff x=\sqrt[3]{27} \iff x=\sqrt[3]{3^3} \iff x=3 \quad \text{μονάδες μήκους}$$

Θα μάθουμε λοιπόν ότι:

Η ***ν-οστή ρίζα*** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην δύναμη ν, δίνει τον α.

Δηλαδή:

$$x = \sqrt[\nu]{\alpha} \iff x^{\nu} = \alpha \qquad \text{με } \alpha \geq 0 \text{ και } x \geq 0$$

Ονομάζουμε:

$$x = \sqrt[\nu]{\alpha}$$

- ***ν***: λέγεται **δείκτης** ή **τάξη** της ρίζας
- ***α***: λέγεται **υπόριζο** ή **υπόρριζη ποσότητα**

Ισχύουν οι τιμές:

- για $\nu = 1$ γράφουμε $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$
- για $\nu = 2$ είναι $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$ και διαβάζουμε δεύτερη ρίζα ή **τετραγωνική ρίζα** ή απλά ρίζα του α
- για $\nu = 3$ είναι $\sqrt[3]{\alpha}$ και διαβάζουμε τρίτη ρίζα ή τρίτης τάξης ρίζα ή **κυβική ρίζα** του α
- για $\nu = 4$ είναι $\sqrt[4]{\alpha}$ και διαβάζουμε τέταρτη ρίζα ή τετάρτης τάξης ρίζα του α

  …

Ιδιότητες της ν-οστής ρίζας

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

- $\sqrt[\nu]{\alpha}^{\,\nu} = \alpha$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$

2. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε:

  - $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ *(α)*
  - $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ $\mu\varepsilon\ \beta \neq 0$ *(β)*

3. Αν ν **άριος** φυσικός αρθμός, τότε η έχει νόημα για κάθε πραγματικό αριθμό α και ισχύει:

- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$, ν άρτιος και $\alpha \in \mathbb{R}$

4. Αν ν **περιττός** φυσικός αρθμός, τότε η έχει νόημα μόνο όταν $\alpha \geq 0$ και ισχύει:

- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$, ν περιττός και $\alpha \geq 0$

Αποδείξεις:

2 (α) $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow$$
$$(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta})^\nu = (\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta})^\nu \Leftrightarrow$$
$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu \cdot (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow$$
$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta, \quad \textit{που ισχύει}$$

■

(β) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ $\;\mu\varepsilon\; \beta \neq 0$

Έχουμε για $\beta \neq 0$:

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\nu \Leftrightarrow$$
$$\frac{(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu}{(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \textit{που ισχύει}$$

■

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η ιδιότητα 1. ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \; \alpha_2, \dots, \; \alpha_\kappa$ ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_\kappa}$$

2. Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\kappa = \alpha > 0$, ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^\kappa$$

οπότε, λόγω της ιδιότητας 1. έχουμε:

- για $\alpha, \beta \geq 0$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$$

αφού $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$

- αν ο ν είναι **άρτιος θετικός ακέραιος**, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α (και $\beta \geq 0$) ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = |\alpha| \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

- Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε:

$$0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$$

- Ειδικά, αν $\alpha \geq 0$ τότε:

$$\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$$

- Αν $\alpha \geq 0$ τότε

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$$

Απόδειξη:

Έχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\cdot\nu} = \left(\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}\right)^{\mu\cdot\nu} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha, \quad \textit{που ισχύει}$$

Συχνά σε ασκήσεις χρησιμοποιούμε την παρακάτω ιδιότητα:

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Η ιδιότητα αυτή, πρακτικά, σημαίνει ότι σε μία ρίζα $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε την τάξη της ρίζας (ν) και τον εκθέτη (μ) της υπόρριζης ποσότητα με τον ίδιο θετικό ακέραιο (ρ).

δηλαδή $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \alpha^{\frac{\mu\rho}{\nu\rho}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Απόδειξη:

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

■

- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ ισχύει:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$$

Απόδειξη:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu} \;\Leftrightarrow\; \alpha < \beta,\;\; \textit{που ισχύει}$$

■

ΠΡΟΣΟΧΗ Όταν δίνεται μία παράσταση με ρίζες τότε θα πρέπει να παίρνουμε περιορισμούς καθώς μία ρίζα **ορίζεται** μόνο εάν το **υπόριζο** είναι **μη αρνητικό** (προσοχή στον *ορισμό* της ν-οστής ρίζας). Επομένως:

- Η παράσταση $\sqrt[\nu]{\mathrm{A(x)}}$ με ν θετικό ακέραιο, ορίζεται όταν:

$$\mathrm{A(x)} \geq 0$$

- Η παράσταση $\frac{1}{\sqrt[\nu]{A(x)}}$ με ν θετικό ακέραιο, ορίζεται όταν:

$$\mathrm{A(x)} \geq 0 \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{A(x)} \neq 0$$

δηλαδή όταν:

$$\mathrm{A(x)} > 0$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Επειδή για $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύουν $\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$ και $\sqrt[\mu]{\beta} \geq 0$ προκύπτει ότι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} + \sqrt[\nu]{\beta} = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; (\alpha = 0 \;\text{ και }\; \beta = 0)$$