

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΟΙ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

21 ΟΙ ΓΡΑΞΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

ΑΡΙΘΜΟΙ – ΓΡΑΞΕΣ

Κατηγορίες αριθμών

Γνωρίζουμε ήδη από το Γυμνάσιο ότι οι αριθμοί ανάλογα με τις ιδιότητές τους χωρίζονται σε διαφορετικές κατηγορίες. Παρακάτω φαίνεται ο διαχωρισμός αυτός:

- **Ακέραιοι:** είναι οι θετικοί αριθμοί, οι αρνητικοί αριθμοί και το μηδέν χωρίς δεκαδικό μέρος (υποδιαστολή)

Συμβολισμός: \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

- **Φυσικοί Αριθμοί:** είναι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι με το μηδέν

Συμβολισμός: \mathbb{N}

$$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- **Ρητοί Αριθμοί:** είναι οι αριθμοί που έχουν (ή μπορούν να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

Συμβολισμός: \mathbb{Q}

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Για παράδειγμα:

$$\frac{14}{5} = 2,8, -\frac{9}{8} = -1,25, \frac{60}{11} = 5,\overline{45}, 2,25 = \frac{225}{100} \text{ και } 2,\overline{32} = \frac{230}{99}$$

- **Άρρητοι Αριθμοί:** είναι οι αριθμοί που ΔΕΝ έχουν (ή ΔΕΝ μπορούν να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

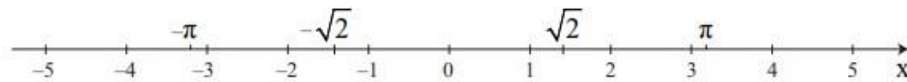
Για παράδειγμα,

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$$

- **Πραγματικοί Αριθμοί:** οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Συμβολισμός: \mathbb{R}

Άξονας των πραγματικών αριθμών:



Ιδιότητες

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα (τα α , β , γ παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς):

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

- ✓ Ο αριθμός **0** λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο** της πρόσθεσης, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει
- ✓ Ο αριθμός **1** λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο** του πολλαπλασιασμού, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιάζεται με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

Υπενθύμιση: ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1. $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να αυτής προσθέσουμε κατά μέλη.

2. $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να αυτής πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

4. δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

5. αν $\gamma \neq 0$, τότε: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$

δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

6. $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$

δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν αυτής τουλάχιστον από αυτής αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Άμεση συνέπεια αυτής ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Έννοια της δύναμης

Η έννοια της δύναμης αριθμού με εκθέτη ακέραιο είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. Συγκεκριμένα, αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο n φυσικός, έχουμε ορίσει ότι: για $n > 1$,

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \dots \alpha \cdot \alpha}_{n \text{ φορές το } \alpha}$$

- για $n = 1$ ισχύει $\alpha^1 = \alpha$
- για $n = 0$ ισχύει $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$

ΠΡΟΣΟΧΗ Ενώ είναι φανερό ότι, αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^n = \beta^n$, δεν ισχύει το αντίστροφο

Π.χ. εφαρμόζοντας τα παραπάνω για $\alpha = -2$, $\beta = 2$ και $n = 2$ ισχύει

$$\alpha^n = \beta^n \Rightarrow (-2)^2 = 2^2, \text{ αλλά } \alpha \neq \beta \Rightarrow -2 \neq 2.$$

Ιδιότητες

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις δυνάμεις:

1. $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$

$$2. a^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = a\beta^{\kappa}$$

$$3. (a^{\kappa})^{\lambda} = a^{\kappa\lambda}$$

$$4. \frac{a^{\kappa}}{a^{\lambda}} = a^{\kappa-\lambda}$$

$$5. \frac{a^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^{\kappa}$$

ΛΕΙΤΗΣΙΟΤΗΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Υπενθύμιση: Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται ταυτότητα. Ορισμένες που γνωρίζουμε από το γυμνάσιο είναι οι εξής:

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$
4. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
5. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
6. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
8. $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Παραπάνω είδαμε ορισμένες από τις σημαντικότερες ταυτότητες όπως για παράδειγμα η $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. Πώς όμως καταλήξαμε ότι $(\alpha + \beta)^2$ ισούται όντως με το παραπάνω; Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε μεθόδους για να αποδείξουμε τις ταυτότητες αυτές: Δύο από τις πιο γνωστές μεθόδους απόδειξης είναι οι παρακάτω:

1. **Ευθεία Απόδειξη:** Ξεκινάμε με κάτι (με μία συνθήκη) που υποθέτουμε ότι ισχύει στα μαθηματικά και καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που προφανώς ισχύει (αφού ήταν σωστή η υπόθεση)
2. **Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο:** Ξεκινάμε την απόδειξη θεωρώντας ότι δεν ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας ορθές προτάσεις καταλήγουμε σε κάτι μη ορθό (άτοπο). Άρα ισχύει το αντίθετο από αυτό που υποθέσαμε

Η υλοποίηση των μεθόδων αποδείξεων δεν είναι πάντα τόσο εύκολη καθώς απαιτούν σκέψη και κριτική ικανότητα. Παρά τις αρχικές όμως δυσκολίες, με την εξάσκηση, σιγά-σιγά, θα καταστεί δυνατόν να αποκτήσετε τις απαραίτητες δεξιότητες για την απόδειξη σχέσεων.

Σίγουρα τα παραπάνω δημιουργούν σύγχυση οπότε πάμε να τα δούμε στη πράξη:

Παράδειγμα με ευθεία απόδειξη

A) Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

$$\text{«Αν } \alpha + \beta + \gamma = 0, \text{ τότε } \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma\text{»}.$$

Απόδειξη:

$$\text{Έχω } \alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -(\beta + \gamma)$$

οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= [-(\beta + \gamma)]^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\&= -(\beta + \gamma)^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\&= -\beta^3 - 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - \gamma^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\&= -3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 \\&= -3\beta\gamma(\beta + \gamma), \\&= 3\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

άρα

$$-(\alpha + \beta)^3 = -\alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = -\alpha$$

Για την απόδειξη της παραπάνω συνεπαγωγής ξεκινήσαμε με την υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και με διαδοχικά βήματα καταλήξαμε στο συμπέρασμα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται **ευθεία απόδειξη**.

B) Μία ευκολότερη απόδειξη είναι αυτή της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2$ δηλαδή ότι ισχύει

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 &= (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) \\&= \alpha(\alpha + \beta) + \beta(\alpha + \beta) \\&= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 \\&= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\end{aligned}$$

Παράδειγμα με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό:

«Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι Φρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι Φρτιος»

δηλαδή

«Αν ο α^2 είναι Φρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι Φρτιος αριθμός»

Απόδειξη:

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής:

Έστω ότι ο a δεν είναι άρτιος. Τότε ο a θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή $a = 2k + 1$, όπου k ακέραιος ($k \in \mathbb{Z}$), οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

Δηλαδή $a^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, που σημαίνει ότι ο a^2 είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο a^2 είναι άρτιος. Επομένως, η παραδοχή ότι a δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. **Άρα ο a είναι άρτιος**.

Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο**.