

ΕΝΔΙΑΤΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Ένας $\alpha <$ και $>$ Ένας αριθμός α λέμε ότι:

- είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β , όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός και γράφουμε:

$$\alpha > \beta$$

- είναι **μικρότερος** από έναν αριθμό β , όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητικός αριθμός και γράφουμε:

$$\alpha < \beta$$

(μπορούμε για τις παραπάνω περιπτώσεις να γράψουμε $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ αντίστοιχα)

1. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- ✓ Κάθε **θετικός** αριθμός είναι **μεγαλύτερος** από το μηδέν.
- ✓ Κάθε **αρνητικός** αριθμός είναι **μικρότερος** από το μηδέν.

2. Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε

$$\alpha \geq \beta$$

και διαβάζουμε: « **α μεγαλύτερος ή ίσος του β** ».3. Πιο πάνω είπαμε «είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β , όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός» Αυτό προκύπτει καθώς

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

4. Με βάση τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολ/μού προκύπτουν τα εξής:

$$\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$

$$\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0 \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

$$\alpha, \beta \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

$$\alpha, \beta \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$$\alpha^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} \text{ (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν } \alpha = 0 \text{)}$$

5. Ισχύουν επίσης:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$

2. Ισχύουν:

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3. Ισχύουν:

- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:
 $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

4. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n \quad \text{και} \quad \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Στις ιδιότητες των ανισοτήτων έχει πολύ σημασία το πρόσημο. Αν δεν ισχύει ότι $\alpha, \beta > 0$ τότε **δεν** ισχύει η παραπάνω ιδιότητα:

► Παράδειγμα: $2 > -3$ αλλά $2^2 > (-3)^2 \Leftrightarrow 4 > 9$ που **ΔΕΝ** ισχύει

ΠΡΟΣΟΧΗ ΔΕΝ επιτρέπεται αφαίρεση και διαίρεση κατά μέλη ανισοτήτων

► Παράδειγμα με αφαίρεση: για $5 < 10$ και $1 < 8$ τότε

$$5 - 1 < 10 - 8 \Leftrightarrow 4 < 2 \quad \text{που είναι ΛΑΘΟΣ!}$$

► Παράδειγμα με διαίρεση: για $6 < 10$ και $5 < 5$ τότε

$$\frac{6}{2} < \frac{10}{5} \Leftrightarrow 3 < 2 \quad \text{που είναι ΛΑΘΟΣ!}$$

Διαστήματα μπορούμε να πούμε ότι είναι σύνολα που περιέχουν αριθμούς. Αυτά χωρίζονται σε διάφορα ήδη διαστημάτων ανάλογα ποιοι αριθμοί περιέχονται σε αυτά. Ειδικότερα, έχουμε:

- το σύνολο των αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$ λέγεται **κλειστό διάστημα από το α μέχρι το β** και συμβολίζεται με:

$$[\alpha, \beta]$$

Περιέχει δηλαδή όλους τους αριθμούς από το α μέχρι και το β (δηλ. και το α , και το β , και αυτούς που βρίσκονται μεταξύ α και β)

- το σύνολο των αριθμών x με $\alpha < x < \beta$ λέγεται **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι το β** και συμβολίζεται με:

$$(\alpha, \beta)$$

Περιέχει δηλαδή όλους τους αριθμούς «μετά» από το α και «πριν» από το β (που βρίσκονται μεταξύ α και β χωρίς όμως να περιλαμβάνει το α και το β)

Έτσι προκύπτουν και οι εξής παραλλαγές:

- το σύνολο των αριθμών x με $\alpha \leq x < \beta$ λέγεται **ανοικτό δεξιά διάστημα** και συμβολίζεται με:

$$[\alpha, \beta)$$

Περιέχει δηλαδή όλους τους αριθμούς από το α μέχρι το β (δηλ. περιέχει το α , όλους αυτούς που βρίσκονται μεταξύ α και β , αλλά **δεν** περιέχει τον β)

- το σύνολο των αριθμών x με $\alpha < x \leq \beta$ λέγεται **ανοικτό αριστερά διάστημα** και συμβολίζεται με:

$$(\alpha, \beta]$$

Περιέχει δηλαδή όλους τους αριθμούς από το α μέχρι το β (δηλ. **δεν** περιέχει το α , περιέχει όμως όλους αυτούς που βρίσκονται μεταξύ α και β , και τον β)

Επιπλέον, προκύπτουν και διαστήματα με άκρα τα άπειρα:

- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x$ συμβολίζεται με:

$$[\alpha, +\infty)$$

- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \leq \alpha$ συμβολίζεται με:

$$(-\infty, \alpha]$$

Έτσι προκύπτει ο συγκεντρωτικός πίνακας για κάθε είδος διαστήματος. Αριστερά βλέπουμε γραφικά το διάστημα, στην μέση την αντίστοιχη ανισότητα και στα δεξιά τον συμβολισμό:

Διάστημα	Ανισότητα	Συμβολισμός
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η **διαφορά** μεταξύ ενός **κλειστού** και του αντίστοιχου **ανοικτού** διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.
2. Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των α και β λέγεται εσωτερικό σημείο αυτών.
3. Δηλαδή, αν από το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο ανοικτό διάστημα (α, β) .
4. Σε γραφική μορφή το διάστημα ακολουθεί τους εξής κανόνες αναπαράστασης
 - $\bullet \rightarrow$ άκρο που **συμπεριλαμβάνεται** στο σύνολο («γεμισμένη» τελεία)
 - $\circ \rightarrow$ άκρο που **δεν συμπεριλαμβάνεται** στο σύνολο («κενή» τελεία)
5. Τα σύμβολα
 - $+\infty$ (συν άπειρο)
 - $-\infty$ (πλην άπειρο)

δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς αλλά άπειρα.

Το **συν άπειρο** $+\infty$ αντιπροσωπεύει έναν αριθμό **μεγαλύτερο** από κάθε πραγματικό αριθμό. Σκέψου ότι προσθέτεις συνεχώς 1 σε έναν αριθμό: 1, 2, 3, 4, 5, ... Καθώς συνεχίζεις να προσθέτεις, οι αριθμοί μεγαλώνουν χωρίς να σταματούν ποτέ. Αυτή η συνεχής αύξηση οδηγεί στο συν άπειρο.

Το **πλην άπειρο** $-\infty$ αντιπροσωπεύει έναν αριθμό **μικρότερο** από κάθε πραγματικό αριθμό. Σκέψου ότι αφαιρείς συνεχώς 1 από έναν αριθμό: $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$ Καθώς συνεχίζεις να αφαιρείς, οι αριθμοί μικραίνουν χωρίς να σταματούν ποτέ. Αυτή η συνεχής μείωση οδηγεί στο πλην άπειρο.