

## Διάταξη: όλα τα είδη ασκήσεων

**4.19** α) Αν  $a > 2$ , να αποδείξετε ότι:

$$3(a - 3) > a - 5$$

β) Αν  $a < -3$ , να αποδείξετε ότι:

i)  $2[5(a - 3) - 2(a - 9)] < -3(1 - a)$

ii)  $a(a + 1)^2 < -2$

**4.20** α) Αν ισχύει  $a < 3 < \beta$ , να αποδείξετε ότι:

$$a\beta + 9 < 3(a + \beta)$$

β) Αν ισχύει  $a < -2 < \beta$ , να αποδείξετε ότι:

$$a^2 - 2\beta > a(\beta - 2)$$

**4.21** Να αποδείξετε ότι:

α)  $25 - 2(x - 3)^2 \geq 8x - (2x + 1)^2$

β)  $\frac{x}{2} \geq 2 - \frac{(x - 5)^2}{8}$

γ)  $\beta^2 \geq \frac{a\beta}{2} - \frac{(a - \beta)^2}{8}$

δ)  $(a^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + \beta y)^2$

**4.22** α) Αν  $a \geq \beta$ , να αποδείξετε ότι:

$$a^3 + a^2\beta - a\beta^2 - \beta^3 \geq 0$$

β) Αν  $x \leq -2$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^3}{2} - x^2 - 2x + 4 \leq 0$$

**4.23** Για κάθε  $a, \beta \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι:

α)  $a^2\beta^2 - 2a^2\beta + a^2 \geq 0$

β)  $a^2\beta^2 + 9\beta^2 + 2a^2 + 18 \geq 6a\beta^2 + 12a$

**4.24** Αν ισχύει  $a < \beta$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $a < \frac{2a + 3\beta}{5} < \beta$

β)  $a^3 + \beta^3 \leq \beta(a^2 + \beta^2) \leq 2\beta^3 - a(a - \beta)(a + \beta)$

**4.25** Αν ισχύουν  $0 < a < \beta$  και  $0 < \gamma < \delta$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $2a + 3\gamma < 2\beta + 3\delta$     β)  $2\delta - 3a > 2\gamma - 3\beta$

γ)  $a^2 - \frac{1}{\gamma} < \beta^2 - \frac{1}{\delta}$     δ)  $a\gamma + \frac{1}{\beta} < \beta\delta + \frac{1}{a}$

**4.26** Αν  $a, \beta > 0$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $(a + \beta)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$

β)  $\frac{1}{a} + \frac{4}{\beta} \geq \frac{9}{a + \beta}$

**4.27** Αν ισχύει  $0 < a < \beta$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{\beta} < \frac{\beta + 1}{a + 1} < \frac{\beta}{a}$$

**4.28** Αν ισχύει  $a + \beta = 4$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $a\beta \leq 4$

β)  $a^2 + \beta^2 \geq 8$

**4.29** Να αποδείξετε ότι:

α)  $a^2 - 4a + 5 > 0$

β)  $2a^2 - 10a + 25 > 0$

**4.30** Να αποδείξετε ότι:

α)  $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 2(a\beta - \gamma\delta)$

β)  $a^2 + \beta^2 + 18 \geq 6(a - \beta)$

γ)  $2x^2 + y^2 + \omega^2 \geq 2x(y - \omega)$

**4.31** Αν  $0 < a < 1$ , τότε:

α) να αποδείξετε ότι  $a^3 < a$ ,

β) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \quad a^3, \quad 1, \quad a, \quad \frac{1}{a}$$

(Τράπεζα θεμάτων)

**4.32** α) Να αποδείξετε ότι  $a^2 + a + 1 > 0$ .

β) Αν  $a \neq 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq a + \frac{1}{a}$$

**4.33** Αν  $a + \beta \geq 0$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $a^3 + \beta^3 \geq a\beta(a + \beta)$

β)  $\frac{a^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{a + \beta}{2}\right)^3$

**4.34** Αν ισχύει  $a < 1$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α)  $x = 7 - 4a$  και  $y = 4 - a$

β)  $x = a^3 - 2$  και  $y = a^2 - 2a$

**4.35** Αν  $\alpha < \beta < \gamma$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α)  $\alpha\beta + \beta\gamma$  και  $\beta^2 + \alpha\gamma$

β)  $\alpha\beta + \alpha\gamma$  και  $\alpha^2 + \beta\gamma$

**4.36** Αν  $x \neq 4$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$(x-2)^2 \text{ και } 4(x-3)$$

**4.37** Αν ισχύει  $x < y < 0$ , να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς:

α)  $(x-2y)^2$  και  $y(4y-3x)$

β)  $\frac{x}{x-2}$  και  $\frac{y}{y-2}$

**4.38** Αν ισχύει  $0 < \alpha < \beta$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α)  $\frac{\alpha^5}{\beta^5}$  και 1                      β)  $\frac{1}{\alpha^9}$  και  $\frac{1}{\beta^9}$

γ)  $\alpha^{10}\beta^7$  και  $\beta^{10}\alpha^7$

**4.39** Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α)  $5^{20} \cdot 7^{12}$  και  $7^{20} \cdot 5^{12}$

β)  $6^6 \cdot 3^8$  και  $3^{20}$

**4.40** Αν  $\alpha > 0$ , να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\frac{\alpha+3}{\alpha+2}, \frac{\alpha+4}{\alpha+5}, 1 \text{ και } \frac{\alpha+4}{\alpha+3}$$

**4.41** Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει:

α)  $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha - \beta) + 2 = 0$

β)  $\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\beta - 2\alpha)$

γ)  $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\beta - 1)$

δ)  $(\alpha+5)^2 + (\beta-2)^2 = 4(\alpha+\beta+1)$

**4.42** Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  και  $y$  για τους οποίους ισχύει:

α)  $2x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2xy$

β)  $2x^2 + 9y^2 = -9 - 6x(1-y)$

**4.43** Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  για τους οποίους ισχύει:

α)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 6 = 2(\alpha - \beta + 2\gamma)$

β)  $3\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4 = 2\alpha(\beta - \gamma + 2)$

**4.44** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 \text{ και } \Lambda = 2\alpha\beta, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι  $K \geq \Lambda$  για κάθε τιμή των  $\alpha, \beta$ .

β) Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  ισχύει η ισότητα  $K = \Lambda$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(T.Θ. - 2ο θέμα)

**4.45** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \text{ και } \Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

$$K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) Να αποδείξετε ότι  $K \geq \Lambda$  για κάθε τιμή των  $\alpha, \beta$ .

γ) Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  ισχύει η ισότητα  $K = \Lambda$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(T.Θ. - 2ο θέμα)

**4.46** Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει:

α)  $\alpha^2 + \beta^2 + 20 \leq 4(2\beta - \alpha)$

β)  $2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \leq 2\alpha(3 - \beta)$

**4.47** Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta \neq 0$  είναι ετερόσημοι, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2-\alpha}{\beta} \geq \frac{\beta+2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha\beta}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

**4.48** Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$$



**4.49** Αν  $2 \leq x \leq 3$  και  $1 \leq y \leq 2$ , να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

- α)  $x + y$       β)  $2x - 3y$       γ)  $\frac{x}{y}$   
(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

**4.50** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$  ισχύουν  $3 \leq x \leq 5$  και  $-2 \leq y \leq -1$ , να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

- α)  $y - x$       β)  $x^2 + y^2$   
(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

**4.51** Αν  $-2 < \alpha < -1$  και  $-4 < \beta < -3$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

- α)  $4\alpha - 2\beta + 1$       β)  $2 - 3\alpha\beta$   
γ)  $2\alpha^2 + \beta^2$       δ)  $\beta^2 - \alpha^3$   
ε)  $(\alpha + 2)^2 - 2\beta$       στ)  $1 - \frac{\alpha}{\beta}$

**4.52** Αν ισχύουν  $-2 < \alpha < 4$  και  $1 < \beta < 5$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

- α)  $\frac{\alpha}{2} - 2\beta$       β)  $\alpha^2$   
γ)  $\alpha\beta$       δ)  $\beta^2 - 2\alpha^2 - \alpha\beta$

**4.53** Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος  $x$  εκατοστά και πλάτος  $y$  εκατοστά αντίστοιχα. Αν για τα μήκη  $x$  και  $y$  ισχύουν  $4 \leq x \leq 7$  και  $2 \leq y \leq 3$ , τότε:

- α) να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου,  
β) αν το  $x$  μειωθεί κατά 1 και το  $y$  τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

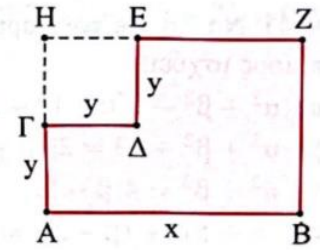
**4.54** Από το ορθογώνιο  $ABZH$  αφαιρέθηκε το τετράγωνο  $\Gamma\Delta E\text{H}$  πλευράς  $y$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του χρωματισμένου σχήματος  $EZBA\Gamma\Delta$  που απέμεινε δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = 2x + 4y$$

- β) Αν ισχύει  $5 < x < 8$  και  $1 < y < 2$ , να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω χρωματισμένου σχήματος.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)



**4.55** Να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα των αριθμών  $x$  που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- α)  $2 \leq x \leq 6$       β)  $1 < x \leq 5$   
γ)  $-4 \leq x < 3$       δ)  $-8 < x < -2$   
ε)  $x > 4$       στ)  $x \leq -5$   
ζ)  $x < 0$       η)  $x \geq -1$

**4.56** Αν  $x \in [1, 2]$  και  $y \in [3, 4]$ , να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι αριθμοί:

- α)  $a = 2x + 3y$       β)  $\beta = 3x - 2y$   
γ)  $\gamma = -4x - y$       δ)  $\delta = xy - 6$

**4.57** Αν  $x \in (2, 3)$  και  $y \in (6, 8)$ , να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι αριθμοί:

- α)  $a = y - x$       β)  $\beta = 5x - 2y$   
γ)  $\gamma = x^2 - 3y$       δ)  $\delta = \frac{y}{x} - 1$

**4.58** Με βασικό σύνολο το  $\mathbb{R}$  θεωρούμε τα σύνολα  $A = [2, +\infty)$  και  $B = (-\infty, 6)$ . Να βρείτε τα επόμενα σύνολα:

- α)  $A \cup B$       β)  $A \cap B$       γ)  $A'$   
 δ)  $B'$       ε)  $A' \cap B'$       στ)  $A \cup B'$   
 ζ)  $A - B$       η)  $B - A$

**4.59** Να βρείτε τα σύνολα  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  και  $A - B$  σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α)  $A = [1, 4]$  και  $B = (3, 5)$   
 β)  $A = [2, 7]$  και  $B = [7, 10]$   
 γ)  $A = [-1, 2]$  και  $B = (2, 3)$   
 δ)  $A = [-3, 1]$  και  $B = [-1, 1)$

**4.80** Να βρείτε τους αριθμούς  $v \in \mathbb{N}^*$ , ώστε οι αριθμοί:

$$6v + 1, \quad 2v + 3 \quad \text{και} \quad 3v + 2$$

να είναι μήκη πλευρών τριγώνου.

**4.81** Αν  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a}{\beta + \gamma - a} + \frac{\beta}{a + \gamma - \beta} + \frac{\gamma}{a + \beta - \gamma} \geq 3$$

## Μήκη πλ. τριγώνου και ανισότητες

**4.77** Αν  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α)  $\frac{a}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{a + \gamma} + \frac{\gamma}{a + \beta} < 3$

β)  $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2a\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma a$

**4.78** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με πλευρές  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ , και έστω  $\tau$  η ημιπερίμετρός του. Να αποδείξετε ότι:

α) ο αριθμός  $\tau$  είναι μεγαλύτερος από κάθε πλευρά,

β)  $\frac{2(\tau - \beta)}{a} \leq \frac{a}{2(\tau - \gamma)}$ .

**4.79** Αν  $\tau$  είναι η ημιπερίμετρος ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ , με πλευρές  $a$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $\frac{1}{a + \beta} < \frac{1}{\tau}$

β)  $\frac{a}{a + \beta} + \frac{\beta}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma}{\gamma + a} < 2$