ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 6ο

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

1. Ο τόκος Τ σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο ε%, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000\frac{\varepsilon}{100}$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Τ. Για παράδειγμα, αν $\varepsilon = 3$, τότε $T = 150$, ενώ αν $\varepsilon = 5$, τότε $T = 250$ κτλ.

2. Το διάστημα S σε km που διανύθηκε από ποδηλάτη σε χρονικό διάστημα 2h, με μέση ταχύτητα υ σε km/h, δίνεται από τον τύπο $S = 2\upsilon$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του υ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S. Για παράδειγμα, αν $\upsilon = 60$, τότε $S = 120$, ενώ αν $\upsilon = 70$, τότε $S = 140$ κτλ.

3. Το εμβαδό Ε ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E = \pi\rho^2$. Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Ε. Για παράδειγμα, αν $\rho = 1$, τότε $E = \pi$, ενώ, αν $\rho = 2$, τότε $E = 4\pi$ κτλ.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο μεγεθών δεν περιγράφεται ή έστω δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Για παράδειγμα:

✓ Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.

✓ Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει κάποια διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται συνάρτηση από το Α στο Β. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο **Α** λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f.
Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.
Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

$$\mathbf{y = \boldsymbol{f}(x)}$$

και διαβάζουμε «y ίσον f του x». Το $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ λέγεται τότε **τιμή της *f* στο x**. Το γράμμα **x**, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{f}(\mathbf{A})$.
Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f: A \to B$$
$$x \to f(x)$$

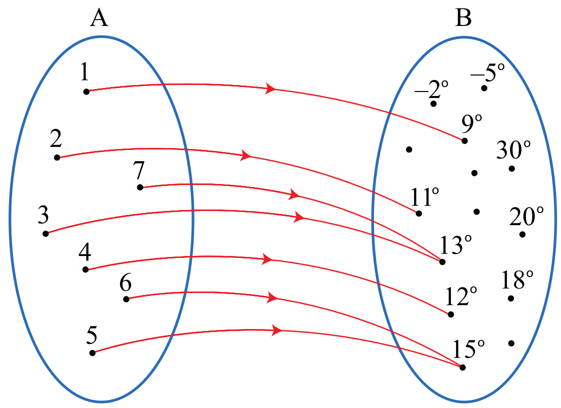
Έτσι π.χ. η συνάρτηση f, με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

$$f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \to \sqrt{x}$$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Έστω *f* η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



Για τη συνάρτηση αυτή, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

ενώ το σύνολο τιμών το σύνολο

$$f\,(A) = \{9^o, 11^o, 12^o, 13^o, 15^o\} \subseteq B$$

Με αφορμή το παράδειγμα αυτό τονίζουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow B$.

- Κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B.
- Μερικά στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (π.χ. 18^o).
- Δύο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B (π.χ. τα 3 και 7 αντιστοιχίζονται στο $13°$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

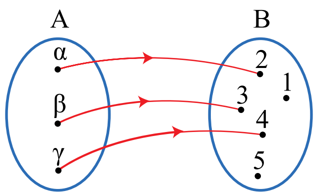
Θεωρούμε τα σύνολα A = {α, β, γ} και B = {1, 2, 3, 4, 5}, καθώς επίσης και τα παρακάτω σχήματα (βελοδιαγράμματα). Παρατηρούμε ότι:

✓ Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B.

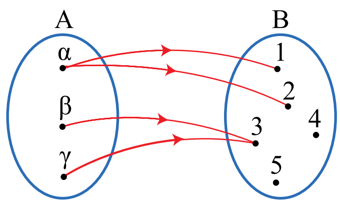
✓ Το σχήμα (β) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\alpha \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του B.

✓ Το σχήμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του B.

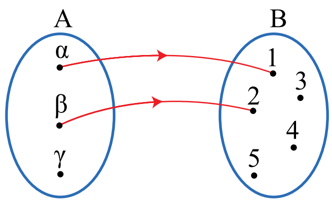
✓ Το σχήμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση. Πρώτον διότι το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του B και δεύτερον διότι το $\alpha \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του B.



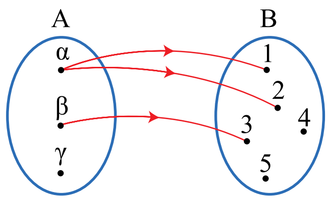
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση f, πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της Α
- Το σύνολο Β και
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f\colon A \to B$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**.

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση f, με $f(x) = \sqrt{1-4x}$» ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-4x}$» ή, ακόμα, «η συνάρτηση $y = \sqrt{1-4x}$».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι:

- Το πεδίο ορισμού Α της f είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.
- Το σύνολο Β είναι ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-4x}$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, αφού πρέπει $1-4x \geq 0$, ενώ το σύνολο Β είναι όλο το $\mathbb{R}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x<0 \\ x-1, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}.$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία -1, 0 και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

✓ Για $x=-1<0$, από τον κλάδο $f(x)=x^2+1$, έχουμε:

$$f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2.$$

✓ Για $x=0$, από τον κλάδο $f(x)=x-1$, έχουμε:

$$f(0)=0-1=-1.$$

✓ Τέλος, για $x=1\geq 0$, από τον κλάδο $f(x)=x-1$, έχουμε:

$$f(1)=1-1=0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και, γενικά, χρησιμοποιούμε το γράμμα f για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και το γράμμα x για το συμβολισμό του τυχαίου στοιχείου του πεδίου ορισμού της, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα.

Έτσι, για παράδειγμα, οι

$$f(x)=x^2-4x+7,\quad g(t)=t^2-4t+7 \quad \text{και} \quad h(s)=s^2-4s+7$$

ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Επομένως το x στον τύπο μιας συνάρτησης θα παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης». Με αυτό το σκεπτικό, η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$$f(\quad)=(\quad)^2-4(\quad)+7,$$

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος.

Έτσι για να υπολογίσουμε το $f(-2)$ απλά τοποθετούμε το -2 στις θέσεις, που ορίζουν οι παρενθέσεις:

$$\begin{aligned} f(-2)&=(-2)^2-4(-2)+7 \\ &=4+8+7=19 \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned} f(3x)&=(3x)^2-4(3x)+7 \\ &=9x^2-12x+7 \end{aligned}$$

Υπάρχει όμως και μια παραπέρα απλοποίηση των εκφράσεών μας που σχετίζονται με συναρτήσεις. Πολλές φορές αντί να λέμε «η συνάρτηση $s=\frac{1}{2}gt^2$», θα λέμε «η συνάρτηση $s=\frac{1}{2}gt^2$», δηλαδή γράφουμε s υπονοώντας το s(t). Αυτή η απλοποίηση γίνεται συχνότατα σε διάφορες επιστήμες, που χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία, όπως η φυσική, η χημεία κτλ. Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές υπάρχει κάποιο πείραμα, όπου το t είναι η τιμή ενός μεγέθους, που υπεισέρχεται στο πείραμα, και το s(t) η αντίστοιχη τιμή κάποιου άλλου μεγέθους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+\sqrt{x-1}.$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει

$$x-2\neq 0 \quad \text{και} \quad x-1\geq 0$$

ή, ισοδύναμα, για

$$x\neq 2 \quad \text{και} \quad x\geq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=[1,2)\cup(2,+\infty)$ (Σχήμα)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{4}{x-1}+5$ **ii)** $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$

iii) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ **iv)** $f(x)=\frac{1}{|x|+x}$.

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ **ii)** $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

iii) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ **iv)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } x<0 \\ 2x+3, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}.$$

Να βρείτε τις τιμές $f(-5), f(0)$ και $f(6)$.

4. Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:

"Σκέψου έναν φυσικό αριθμό, πρόσθεσε σ' αυτόν το 1, πολλαπλασίασε το άθροισμα με 4 και στο γινόμενο πρόσθεσε το τετράγωνο του αριθμού".

i) Να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια τις τιμές της για $x=0$, $x=1$, $x=2$ και $x=3$. Τι παρατηρείτε;

ii) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει

$$f(x)=36,\ f(x)=49,\ f(x)=100 \text{ και } f(x)=144.$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

i) $f(x)=\dfrac{4}{x-1}+5$ **ii)** $g(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ και **iii)** $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $f(x)=7$ **ii)** $g(x)=2$ και **iii)** $h(x)=\dfrac{1}{5}$.