Για την επόμενη φορά (Δευτέρα 07/04/2025)…

Θεωρία και Εφαρμογές

1) Ξαναβλέπω 3.1 – Εξισώσεις Α’ βαθμού τις **παραμετρικές** (με λ)
2) Ξαναβλέπω θεωρία 3.2 – Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$
3) Βλέπω εφαρμογές που κάναμε το Σάββατο 05/04/2025
4) Κολλάω στον τοίχο τις αφίσες που μου έφερε ο θεότρελος

Ασκήσεις

1) 3.1 – Όλες όσες υπάρουν στο αρχείο παρακάτω
2) 3.2 – Όλες όσες υπάρουν στο αρχείο παρακάτω
3) 3.3 – Όλες όσες υπάρουν στο αρχείο παρακάτω

* Η θεωρία και οι ασκήσεις είναι συγκεντρωμένες και σε αυτό το αρχείο! ΔΕΣ ΤΑ!!!!

<u>ΘΕΩΡΙΑ 3.1</u>

3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση αx + β = 0

Έστω ότι έχουμε μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ την οποία θέλουμε να επιλύσουμε. Οι συντελεστές α και β της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ μπορεί να είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά μπορεί και να εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σ' αυτές τις περιπτώσεις:

- τα γράμματα ονομάζονται **παράμετροι,**
- η εξίσωση **παραμετρική,** και
- η εργασία που κάνουμε για *την εύρεση του πλήθους των λύσεών* της **ονομάζεται διερεύνηση**.

Η επίλυση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ οποιοιδήποτε και αν είναι οι συντελεστές α και β, γίνεται ως εξής:

$$\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Αν $\alpha \neq 0$, τότε από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$\alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

δηλαδή η εξίσωση έχει **μοναδική λύση**.

2η περίπτωση: Αν $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$0 \cdot x = -\beta$$

Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις:

- αν $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση και λέμε ότι είναι **αδύνατη,**
- αν $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ τότε η εξίσωση έχει τη μορφή $0 \cdot x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό χ, είναι δηλαδή **ταυτότητα** (ή **αόριστη**).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ και γενικά κάθε εξίσωσης, λέγεται και **ρίζα** αυτής.

-- **(SOS)** --

Μια εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$

- είτε θα έχει **μία** λύση → x = -β/α (μοναδική λύση)
- είτε θα έχει **άπειρες** λύσεις → 0x = 0 (ταυτότητα)
- είτε δε θα έχει **καμία** λύση. → 0x=-β (αδύνατη)

<u>ΘΕΩΡΙΑ 3.2</u>

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu = \alpha$

Για μια εξίσωση της μορφής $x^\nu = \alpha$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\boldsymbol{\nu}$ **άρτιος** και $\boldsymbol{\alpha > 0}$ τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ έχει δύο λύσεις:

$$x^\nu = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[\nu]{a} \quad \text{ή} \quad x = \sqrt[+]{a}$$

- Αν $\boldsymbol{\nu}$ **άρτιος** και $\boldsymbol{\alpha < 0}$ τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ είναι **αδύνατη**.

- Αν $\boldsymbol{\nu}$ **περιττός** και $\boldsymbol{\alpha > 0}$ τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ έχει μία λύση:

$$x^\nu = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[\nu]{a}$$

- Αν $\boldsymbol{\nu}$ **περιττός** και $\boldsymbol{\alpha > 0}$ τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ έχει μία λύση:

$$x^\nu = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt[\nu]{|a|}$$

Δηλαδή, συμπεραίνουμε ότι:

- ► Αν ο ν είναι **άρτιος**, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει δύο λύσεις:

$$x^\nu = \alpha^\nu \;\Leftrightarrow\; x = a \quad \text{ή} \quad x = -a$$

- ► Αν ο ν είναι **περιττός**, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει μία λύση:

$$x^\nu = \alpha^\nu \;\Leftrightarrow\; x = a$$

ΘΕΩΡΙΑ 3.3

…. μπλα, μπλα, μπλααα…

Συνοψίζοντας,

Από την διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ προκύπτουν:

- Όταν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει **δύο ρίζες άνισες,** τις και οι οποίες εν συντομία γράφονται:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Όταν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει **μία (διπλή) ρίζα**, τη:

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

- Όταν $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, ανάλογα με το πλήθος των ριζών της.

Η εξίσωση...	... αν και μόνο αν:
έχει δύο άνισες (και πραγματικές) ρίζες	$\Delta > 0$
έχει μία διπλή ρίζα	$\Delta = 0$
είναι αδύνατη (στο $\mathbb{R}$)	$\Delta < 0$
έχει πραγματικές ρίζες	$\Delta \geq 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.1

→ Πρώτα θεωρία, μετά εφαρμογές, μετά ασκήσεις!

9.4 Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\lambda x - 3\lambda = \lambda^2 - 3x$ β) $\lambda x + 1 = \lambda^2 - x$

γ) $\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 (x+1) - \frac{\lambda}{4} = x$

δ) $4 - \lambda(\lambda - 2x) = -\lambda^2 x$

9.7 Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x(y-1)}{2} = \frac{y(x+1)}{3} - 1$$

α) με άγνωστο τον x,

β) με άγνωστο τον y.

* Σαν να σου λέει την μία θεωρείς άγνωστο το x και παραμετρο το y, και την άλλη άγνωστο το y και παραμετρο το x

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.2

→ Πρώτα θεωρία, μετά εφαρμογές, μετά ασκήσεις!

11.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4^{12}x^4 - 8^9 x = 0$ β) $(64x)^6 - 16^{10}x^2 = 0$

γ) $27^5 x^4 + 9^6 x = 0$ δ) $6^3 x^6 + 27^2 x^3 = 0$

<u>π.χ.</u> α) $4^{12}x^4 - 8^9x=0$ <==> $(2^2)^{12}x^4 - (2^3)^9x=0$ <==> $2^{24}x^4 - 2^{27}x=0$ <=>

$2^{24}x(x^3 - 2^3)=0$ <=>

$2^{24}x(x^3 - 2^3)=0$ <=>

$2^{24}x=0$ ή $x^3=2^3$ <=>

$x=0$ ή $x=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.3

→ Πρώτα θεωρία, μετά εφαρμογές, μετά ασκήσεις!

12.15 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + 2x - 3 = 0$ β) $x^2 - 4x + 4 = 0$

12.16 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 16 = 0$ β) $2x^2 - 18 = 0$

12.18 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$

β) $2x^2 + (2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

12.20 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2 + 4x)(x^2 - 7x + 6) = 0$

β) $(3x^2 - 48)(-x^2 - 4x + 32) = 0$

12.23 Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

α) $-\dfrac{(x+1)(x-1)}{2} = \dfrac{2-x}{3} - \dfrac{(x-4)^2 + 5}{6}$

12.26 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta = 0$

β) $-x^2 + (2\alpha + \beta)x - \alpha(\alpha + \beta) = 0$

12.27 Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2 = 0$

β) $(\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 4 = 0$

* Δες εφαρμογές για τις 12.27 / 12.28

12.28 Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

α) $x^2 + (\alpha - 2)x - \alpha = 0$