

Υπολογισμός τιμής παράστασης με συνθήκη

3.92 Αν $x^8 = 2$ και $y^8 = 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = [(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)]^{2017}$$

3.93 Αν ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = (\alpha\beta - 1)^{2016}$.

3.94 α) Αν ισχύει $x + \frac{2}{x} = 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = x^2 + \frac{4}{x^2}$.

β) Αν ισχύει $y - \frac{1}{y} = 4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $B = y^2 + \frac{1}{y^2}$.

3.95 α) Αν ισχύει $2x + \frac{3}{x} = 6$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 8x^3 + \frac{27}{x^3}$$

β) Αν ισχύει $x - \frac{1}{x} = 2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$B = x^3 - \frac{1}{x^3}$$

3.96 Αν ισχύουν $x + y = \frac{7}{2}$ και $xy = -\frac{3}{2}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = x^2 + y^2$ **β)** $B = (x - y)^2$

γ) $\Gamma = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ **δ)** $\Delta = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$

3.97 Αν ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ **β)** $B = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$

γ) $\Gamma = \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}$ **δ)** $\Delta = \alpha^7 + \frac{1}{\alpha^7}$

3.98 Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\beta(\alpha + \beta) = 2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^{2016} - \beta^{2016}$$

3.99 Αν ισχύουν $\alpha + \beta = 4$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 9$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \alpha\beta$ **β)** $B = \alpha^3 + \beta^3$

3.100 Οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι και ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 3$. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\alpha - \beta)^{2020}$.

3.101 Αν ισχύουν $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha^3 + \beta^3 = 18$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ **β)** $B = \alpha\beta$

γ) $\Gamma = \alpha^2 + \beta^2$ **δ)** $\Delta = (\alpha - \beta)^2$

3.102 Για τα μήκη β και γ των κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ισχύει:

$$(\beta + \gamma)^4 - (\beta - \gamma)^4 = 32\beta\gamma$$

Να βρείτε το μήκος της υποτεινουσας α .

3.103 Αν ισχύει $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5$, όπου $x \neq 0$, να

βρείτε την τιμή του $A = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

3.104 Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega \neq 0$ για τους οποίους ισχύουν:

$$x = \beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, y = \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \omega = \alpha\beta + \frac{1}{\gamma} \quad \text{και}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma \omega = 1$$

Να αποδείξετε ότι $x\gamma\omega = -\frac{1}{18}$.

3.105 Αν για τον αριθμό α ισχύει ότι:

$$\alpha^2 - 7\alpha - 1 = 0$$

να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ **β)** $\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}$

3.106 Αν ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 2$ και $\alpha\gamma = -\frac{1}{3}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^3 + (\beta - 2)^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$$

3.107 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $12\alpha\beta^2 - 9\beta^2\alpha^2 + 3\alpha^3\beta^3$

β) $3x - 6y + 2xy - x^2$ **γ)** $18\alpha^2 - 50\beta^2$

δ) $x^8 - y^4$ **ε)** $8x^3 + 27$

στ) $3x^3 - 24y^3$ **ζ)** $x^3 + 2x^2 + x$

η) $-2y^2 + 16y - 32$ **θ)** $3x^3 - 3xy^2 - y^3 + yx^2$

ι) $(x^2 + 8)(x - 8) + 8x(x - 1)$

3.108 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4a^3 - a(\beta - \gamma)^2$

β) $x^5 - x^3 + 8x^2 - 8$

γ) $a^2 + \beta^2 + 2a\beta - 2a - 2\beta$

δ) $x^2 + y^2 + x^3 + y^3 + 2xy$

ε) $a^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 + 2a\beta - 2\gamma\delta$

στ) $x^2 + 9y^2 - 2x + 6y - 6xy$

3.109 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x^4 - 3xy^3 + yx^3 - y^4$ β) $a^3 + a^2 + \frac{a}{4}$

γ) $x^2 - 6x + 9 - y^2$

δ) $a^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma$

ε) $(x - 1)^2 + 6(1 - x) + 9$

στ) $a(a^2 - 1) + (a - 1)^2 + 2a - 2$

3.110 Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $(x^2 - 9)^2 - x^2 - 6x - 9$

β) $x^3 + 1 - 3(x^2 - 1)$

γ) $a^2 - \beta^2 - 2a - 4\beta - 3$

δ) $x^8 - 27x^5 - x^4 + 27x$

ε) $(3x - 9)(x^2 - 9) - x^2 + 6x - 9$

στ) $(a^2 - \beta^2)(a + \beta)^5 - (a - \beta)^3(a + \beta)^4$

3.111 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(x - y)^3 + (y - \omega)^3 + (\omega - x)^3$

β) $(x - 2y)^3 + (3x + y)^3 + (y - 4x)^3$

γ) $a^3(\beta - \gamma)^3 + \beta^3(\gamma - \alpha)^3 + \gamma^3(\alpha - \beta)^3$

δ) $8(2x - 3y)^3 + (2x + y)^3 - (6x - 5y)^3$

3.112 Αν $x + y = 4$ και $xy = 2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = x^4y + xy^4$$

3.113 Αν για τους αριθμούς a, β και γ ισχύει ότι:

$$a^3 + \beta^2\gamma = a^2\gamma + a\beta^2$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός a είναι ίσος με τον β ή είναι αντίθετος του β ή είναι ίσος με τον γ .

3.114 Αν για τους αριθμούς a και β ισχύει ότι:

$$10x + 4y + 21 = y^2 - x^2$$

να αποδείξετε ότι $x + y = -3$ ή $x - y = -7$.

3.115 Αν ισχύει $a + \beta + \gamma = 0$, να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (a\kappa - \beta\lambda)^3 + (\beta\kappa - \gamma\lambda)^3 + (\gamma\kappa - a\lambda)^3$

β) $B = (a^3 - a\beta\gamma)^3 + (\beta^3 - a\beta\gamma)^3 + (\gamma^3 - a\beta\gamma)^3$

3.116 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2a^2 + 3a\beta + \beta^2$

β) $x^2 - 2xy - 3y^2$

γ) $a^4 + 4\beta^4$

δ) $36x^4 + 15x^2 + 4$

Υπολογισμός με παραγοντοποίηση και ταυτότητες

3.117 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $58 \cdot 61 + 58 \cdot 47 - 8 \cdot 58$

β) $77 \cdot 33 + 77 \cdot 68 - 77$

γ) $36 \cdot 47 - 16 \cdot 23 + 36 \cdot 23 - 16 \cdot 47$

δ) $102^2 - 98^2$

ε) $5 \cdot 63^2 - 5 \cdot 61^2$

στ) $3 \cdot 97^2 - 27$

ζ) $25^2 - 24^2 - 93^2$

η) $79^2 + 2 \cdot 79 + 1$

θ) $32^2 - 24 \cdot 32 + 12^2$

3.118 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \frac{43^2 - 11^2}{36,5^2 - 27,5^2} - \frac{37^2 - 23^2}{22^2 - 8^2}$

β) $B = \frac{53^3 + 27^3}{80} + 3 \cdot 53 \cdot 27$

3.119 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$a^2 - (a - 2)(a + 2) = 4$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3,12345^2 - 1,12345 \cdot 5,12345$$

3.120 α) Αν $a, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a^3 - \beta^3}{(a + \beta)^2 - a\beta} = a - \beta$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{99^3 - 19^3}{118^2 - 99 \cdot 19}$$

3.121 α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left(\frac{a + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - \beta}{2}\right)^2 = a\beta$$

Απλοποίηση ρητών παραστάσεων

3.124 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

β) $\frac{4x^3 - 4x^2y + y^2x}{xy^2 - 4x^3}$

γ) $\frac{7x^2 - 7xy}{5x^2y - 10y^2x + 5y^3}$

δ) $\frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$

ε) $\frac{(a - \beta)^2 - 2(a - \beta)\gamma + \gamma^2}{a^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2a\beta}$

στ) $\frac{(x^{-1} - y^{-1})^3}{(x^{-2} - y^{-2})(x - y)}$

3.125 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε.

α) $A = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 9x}$

β) $B = \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x^3 - x)(x - 3)}$

γ) $\Gamma = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} \cdot \frac{x^3 - x}{x^2 + 2x}$

δ) $\Delta = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^3 + x^2}{(x + 1)^3}$

3.126 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\frac{a\beta + 2\beta + 3a + 6}{\beta^2 + 6\beta + 9} \cdot \frac{8 - 4a}{a^2 - 4}$

β) $\frac{5y - 10y^2}{12y^2 + 6y^3} \cdot \frac{2y + y^2}{2y - 1}$

γ) $\frac{a^2 + 4a + 4}{ax - ay} : \frac{a^2 + 2a}{a^2x - a^2y}$

δ) $\frac{x^2 - 8x + 16}{ax^2 + axy} : \frac{x^3 - 16x}{x^2 + 2xy + y^2}$

ε) $\frac{x - 2}{8x^3 - 27} : \frac{ax - 2a + \beta x - 2\beta}{3 - 2x}$

στ) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} : \left(\frac{x - 3}{x + 3}\right)^{-3}$

3.127 Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $\left(\frac{a^3 + 125}{10a - 2} \cdot \frac{1 - 25a^2}{a^3 - 5a^2 + 25a}\right) : \frac{3a + 15}{4}$

β) $\left[\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right] : \left(x - \frac{y^2}{x}\right)$

γ) $\frac{\frac{64a^2\beta^2 - 1}{x^2 + 14x + 49}}{\frac{8a^3\beta - a^2}{x^2 - 49}} \cdot \frac{x - 7}{a^2x - 8a^2}$

δ) $\frac{\frac{-6x - 3a}{ax - a^2} : \frac{9x^2 - 4a^2}{x - a}}{2x + a} \cdot \frac{3ax + 2a^2}{x - a}$

3.128 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να τις απλοποιήσετε.

α) $A = \frac{2x - 5}{3x - 1} - \frac{2x + 3}{3x + 1} + \frac{2x + 8}{9x^2 - 1}$

β) $B = \frac{3x + 1}{2x^2 - 6x} - \frac{x + 2}{3x - 9} + \frac{2x - 1}{6x}$

3.129 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η τιμή τους είναι σταθερή.

α) $A = \frac{x^2 - 27}{x^2 - 9} - \left[\frac{5}{x + 3} - \left(\frac{x}{x - 3} - \frac{x + 1}{x + 3}\right)\right]$

β) $B = \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^2}{x + 1} - \frac{1}{x + x^2} - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} : \frac{x - 1}{x + 1}$

3.130 Αν $a \neq \pm\beta$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{a}{2\beta - 2a} + \frac{\beta}{2a + 2\beta} + \frac{a^2}{a^2 - \beta^2}$$

είναι ανεξάρτητη από τα a και β .

3.131 Να αποδείξετε ότι η τιμή του παρακάτω κλάσματος δεν εξαρτάται από το α .

$$K = \frac{\frac{\alpha + x}{1 - \alpha x} - \frac{\alpha + y}{1 - \alpha y}}{1 + \frac{(\alpha + x)(\alpha + y)}{(1 - \alpha x)(1 - \alpha y)}}$$

3.132 Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να βρείτε την τιμή του κλάσματος:

$$A = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{\beta\alpha}$$

Επίλυση εξισώσεων

3.133 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 = 4x$ β) $3x^3 + 5x = 21x - x^3$
 γ) $2x(3x-1)^2 - 8x^3 = 0$ δ) $3x^3 - 2x^2 = 27x - 18$

3.134 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-5)^3 + (x+3)^3 + (2-2x)^3 = 0$
 β) $(x+2)^3 + (3x-5)^3 = (4x-3)^3$
 γ) $(3-5x)^3 + 8(x-2)^3 + (3x+1)^3 = 0$
 δ) $(x+4)^3 - (3x-2)^3 - 8(3-x)^3 = 0$

3.135 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = x^3 + 1, \quad B = x^2 - 1 \quad \text{και}$$

$$\Gamma = -4x - 4$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

$$A + B + \Gamma = 0$$

3.136 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2 - 8 + 3(x^2 - 4x + 4) = 14 - 7x$
 β) $x(x^2 - 6x + 9) + x^3 - 9x = -x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x$