ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

① α) $f(x) = \sqrt{2-x} + x^2 + 1$

Πρέπει $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

Άρα έχει πεδίο ορισμού $A_f = (-\infty, 0]$

β) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-1} + \sqrt{3-x}$

Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0$ και $3 - x \geq 0$

$x \neq 1$ και $x \neq -1$ και $x \leq 3$

Άρα έχει πεδίο ορισμού $A_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3$

γ) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{5-|x|}$

Πρέπει $5 - |x| \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$

Άρα έχει πεδίο ορισμού $A_f = [-5, 5]$

δ) $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}$

Πρέπει $3 - x \geq 0$ και $x + 1 \geq 0$

$x \leq 3$ και $x \geq -1$

Άρα έχει πεδίο ορισμού $A_f = [-1, 3]$

ε) $f(x) = \frac{x+2}{x^3-x}$

Πρέπει $x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 1$ και $x \neq -1$

Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{0,-1,1\}$

ή μπορώ να το γράψω

$A_f = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)$

στ) $f(x) = \sqrt{|x|-4}$

Πρέπει $|x| - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

Άρα $A_f = [-4,4]$

ζ) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in (-3,2] \\ 2x, & x \in (2,5) \\ \sqrt{x}+2, & x \in [6,10) \end{cases}$

→ Για τον 1ο κλάδο δεν έχουμε περιορισμό
→ Για τον 2ο κλάδο —//—
→ Για τον τρίτο κλάδο πρέπει $x \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in [6,10$

άρα $A_f = (-3,10)$ (δεν έχω περιορισμούς) η) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}}{\sqrt[5]{|x|-2}}$

Πρέπει $x^2+3 \geq 0$ και $|x|-2 \geq 0 \Leftrightarrow$
που ισχύει $|x| \geq 2 \Leftrightarrow$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $x \leq -2$ ή $x \geq 2$

Άρα $A_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

θ) $f(x) = \sqrt{2-|x|} + \dfrac{2}{|x|}$

Πρέπει $2-|x| \geq 0$ και $|x| \neq 0 \Leftrightarrow$
$|x| \leq 2$ και $x \neq 0 \Leftrightarrow$
$-2 \leq x \leq 2$ και $x \neq 0$

Άρα $A_f = [-2, 0) \cup (0, 2]$

ι) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-7}}{x+|x|}$

Πρέπει $x-7 \geq 0$ και $x+|x| \neq 0 \Leftrightarrow$
$x \geq 7$ και $\boxed{|x| \neq -x} \Leftrightarrow$
$x > 0$

Άρα $A_f = [7, +\infty)$

$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

Όταν δηλαδή $|x| \neq -x$ σημαίνει ότι $x > 0$

κ) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4} + \sqrt{8-x}$

Πρέπει $x^2-4 \neq 0$ και $8-x \geq 0$

$x \neq 2$ και $x \neq -2$ και $x \leq 8$

Άρα $A_f = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,8]$

λ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-|x|}}{|x+2|-2}$

Πρέπει $4-|x| \geq 0$ και $|x+2| \neq 2$

$|x| \leq 4$ και $(x+2 \neq 2$ και $-x-2 \neq 2)$

$-4 \leq x \leq 4$ και $(x \neq 0$ και $x \neq -4)$

Άρα $A_f = (-4,0) \cup (0,4]$

Αλλιώς γράφουμε

$A_f = (-4,4] \setminus \{0\}$

② $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \le 0 \\ 1-x^2, & x > 0 \end{cases}$

α) $f(0) = 1 + 0^2 = 1$ (1ος κλάδος)

$f(-1) = 1 + (-1)^2 = 1+1 = 2$ (1ος κλάδος)

$f(1) = 1 - 1^2 = 1-1 = 0$ (2ος κλάδος)

β) Ισχύει $2f(-1) + a \cdot f(2) = a^2 \cdot f(0) \overset{(α)}{\Leftrightarrow}$

$2 \cdot 2 + a \cdot (1-2^2) = a^2 \cdot 1 \Leftrightarrow$

$4 - 3a = a^2 \Leftrightarrow$

$a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$

$a_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \boxed{a = -4}$ ή $\boxed{a = \frac{2}{2} = 1}$

③ $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} - 1$

α) Πρέπει $(x+2)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι $A_f = \mathbb{R}$

β) Η $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} - 1$ γράφεται και
$f(x) = |x+2| - 1$

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x+2| - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$|x+2| = 1 \Leftrightarrow$

$x+2 = 1$ ή $x+2 = -1 \Leftrightarrow$

$x = -1$ ή $x = -3$

Scanned with CamScanner

(4) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x^2-1} - \dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

α) Πρέπει $x^2-1 \neq 0$ και $x^2-2|x|+1 \neq 0$

$(x \neq 1$ και $x \neq -1)$ και $|x|^2-2|x|+1 \neq 0$

$(|x|-1)^2 \neq 0$

$|x| \neq 1$

$x \neq 1$ και $x \neq -1$

Άρα $A_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Αλλιώς $A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

β) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x^2-1} - \dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

$= \dfrac{|x|-1}{|x|^2-1} - \dfrac{|x|^2-|x|}{|x|^2-2|x|+1}$

$= \dfrac{\cancel{|x|-1}}{\cancel{(|x|-1)}(|x|+1)} - \dfrac{|x|\cancel{(|x|-1)}}{(|x|-1)^{\cancel{2}\,1}}$

$= \dfrac{1}{|x|+1} - \dfrac{|x|}{|x|-1}$

- Αν $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ τότε $|x| = -x$

$f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x+1-x(1-x)}{(1-x)(x+1)}$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x)(x+1)}$

- Αν $x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$ τότε $|x| = x$

$f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x-1-x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \Leftrightarrow$

$f(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$

Άρα θα μπορούσε κάποιος να την κάνει δίκλαδη ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{(1-x)(x+1)}, & \text{αν } x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \\ -\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}, & \text{αν } x \in [0,1) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, $g(x) = \sqrt{x^2+4}$

« Φυσικά παίρνω περιορισμούς και βρίσκω πεδίο ορισμού SOS »

- Για την f πρέπει $x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$

  Άρα $A_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

- Για την g πρέπει $x^2+4 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

  Άρα $A_g = \mathbb{R}$

- $f\left(a+\frac{1}{a}\right) = \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 4} = \sqrt{a^2 + 2\cdot\frac{1}{\cancel{a}}\cdot\cancel{a} + \frac{1}{a^2} - 4}$

  $= \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2}$

- $g\left(a-\frac{1}{a}\right) = \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 + 4} = \sqrt{a^2 - 2\cancel{a}\frac{1}{\cancel{a}} + \frac{1}{a^2} + 4}$

  $= \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + 2}$

To be continued.

⑥ $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}$, πρέπει $\frac{x}{2}\geq 0$ και $\frac{2}{x}>0 \Leftrightarrow$

$x\geq 0$

$g(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{\frac{2}{x}}$, πρέπει $\frac{x}{2}\geq 0$ και $\frac{2}{x}>0 \Leftrightarrow$

$x\geq 0$

Όμως η άσκηση δίνει $x>0$ άρα δεν "παίρνω" το 0 και

$A_f=(0,+\infty)$ και
$A_g=(0,+\infty)$

Για $x>0$ έχω:

- $f^2(x)-g^2(x)=\left(\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2$

$$=\left(\frac{x}{2}+2\sqrt{\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{2}{x}}+\frac{2}{x}\right)-\left(\frac{x}{2}-2\sqrt{\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{2}{x}}+\frac{2}{x}\right)$$

$$=\cancel{\frac{x}{2}}+2\cancel{\sqrt{\frac{2x}{2x}}}+\frac{2}{x}-\cancel{\frac{x}{2}}+2\cancel{\sqrt{\frac{2x}{2x}}}-\frac{2}{x}$$

$$=2+2=4$$

- $f^2(2)=\left(\sqrt{\frac{2}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}\right)^2=(1+1)^2=4$

Άρα όντως $f^2(x)-g^2(x)=f^2(2)$