

Ρίζες

6.24 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ β) $\sqrt{14,4} \cdot \sqrt{10}$

γ) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ δ) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

6.25 Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

α) $\sqrt{7^4}$ β) $\sqrt{2^8}$ γ) $\sqrt{3^6}$

δ) $\sqrt[3]{5^6}$ ε) $\sqrt[4]{6^8}$ στ) $\sqrt[5]{2^{15}}$

6.26 Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

α) $\sqrt{2^4 \cdot 3^2}$ β) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$

γ) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4}$ δ) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot 2^8}$

6.27 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt[11]{3^4} \cdot \sqrt[11]{3^5} \cdot \sqrt[11]{3^2}$ β) $\sqrt[9]{2^3} \cdot \sqrt[9]{2^5} \cdot \sqrt[9]{2}$

γ) $\frac{\sqrt[7]{5^8} \cdot \sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^5}}$ δ) $\frac{\sqrt[5]{3^6} \cdot \sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{3^9}}$

6.28 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^{13}}$ β) $\sqrt[4]{7^5} \cdot \sqrt[4]{7^3}$

γ) $\frac{\sqrt[3]{2^{16}}}{\sqrt[3]{2^4}}$ δ) $\sqrt[5]{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[5]{3^8}$

ε) $\frac{\sqrt[5]{6^9} \cdot \sqrt[5]{6^7}}{\sqrt[5]{6^6}}$ στ) $\frac{\sqrt[3]{2^7} \cdot \sqrt[3]{2^{13}}}{\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2}}$

6.29 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $4^{\frac{5}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$ β) $\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{14}{15}}}{8^{\frac{1}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{15}}}$

γ) $\frac{\left(4^{\frac{39}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(4^{\frac{27}{28}}\right)^{\frac{7}{9}}}$ δ) $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(18^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{7}}$

6.30 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{\sqrt[3]{2^5}} \cdot \sqrt[4]{2}$ β) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^5}} \cdot \sqrt[12]{3^7}$

γ) $\frac{\sqrt[4]{\sqrt[6]{11}}}{\sqrt[8]{6^3}}$ δ) $\sqrt{\sqrt[9]{5^{13}}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^{11}}}$

6.31 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$

β) $B = \sqrt[9]{2} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[2]{3}$

γ) $\Gamma = \sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[4]{7^3} \cdot \sqrt[5]{7^7}$

δ) $\Delta = \frac{\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[5]{5}}$

6.32 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3}$

β) $2\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{245} = 3\sqrt{5}$

6.33 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $(\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2})(\sqrt{72} - \sqrt{50})$

β) $\frac{3\sqrt{27} + \sqrt{108}}{\sqrt{12} + \sqrt{3}}$

6.36 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \sqrt[3]{35 - 2\sqrt{11 + \sqrt{25}}}$

β) $B = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{27} - \sqrt{12})\sqrt{3}}$

6.37 Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$ και $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $AB = 1$,

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = A^2 + B^2$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6.38 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{10} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - \sqrt{2})}$

β) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} + 1)^2 + \sqrt{20} - \sqrt{24}$

6.39 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$ β) $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2}$

γ) $\sqrt[3]{8(3 - \sqrt{5})^3}$ δ) $\sqrt[3]{27(2 - \sqrt{5})^3}$

6.42 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4+2\sqrt{3}}$

β) $(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2$

γ) $\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{8})(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{8})}{(\sqrt{27} - \sqrt{12})(\sqrt{20} - \sqrt{5})}$

δ) $\sqrt[3]{[(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2 - 14] : \sqrt{3}}$

6.43 α) Να αναλύσετε τους αριθμούς 1296 και 1728 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

β) Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{1296}$ ii) $\sqrt[3]{1296}$ iii) $\sqrt[3]{1728}$

6.44 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\sqrt{1728}}{\sqrt{3888}}$$

6.45 α) Να αποδείξετε ότι $(a+1)^2 - 4a = (a-1)^2$.

β) Να βρείτε τον αριθμό $x = \sqrt{2016^2 - 8060}$.

6.46 α) Να βρείτε το ανάπτυγμα $(\sqrt{5} - 3)^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (\sqrt{5} + 3)\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$$

6.47 α) Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\sqrt{3} + 2)^2$ και $(\sqrt{3} - 2)^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} \right) \sqrt{3}$$

6.48 α) Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\sqrt{2} + 1)^3$ και $(\sqrt{2} - 1)^3$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

6.49 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$

β) $B = \sqrt{4-\sqrt{12}} + \sqrt{7-\sqrt{48}}$

6.50 Δίνονται αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύουν:

$$x + y = 4 \quad \text{και} \quad x - y = -2\sqrt{3}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$x = 2 - \sqrt{3} \quad \text{και} \quad y = 2 + \sqrt{3}$$

β) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $A = x^2 + 3xy + y^2$

ii) $B = x^3 + y^3$

6.51 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$x = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \cdot (2 - \sqrt{3})$$

είναι ακέραιος.

6.52 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$x = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \sqrt{4 + \sqrt{6 - \sqrt{20}}}$$

είναι ακέραιος.

6.53 Δίνεται ο αριθμός:

$$x = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

α) Να αποδείξετε ότι $x < 0$.

β) Να βρείτε τον αριθμό x^2 .

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x\sqrt{8}$ είναι ακέραιος.

6.54 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = a^6 + a^4\beta - \beta^3 - a^2\beta^2$$

όταν $a = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 2\sqrt{2} - 3$.

➤ Περιορισμοί και παραστάσεις

6.55 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{3x+18}$ β) $B = \sqrt[4]{10-2x}$

γ) $\Gamma = \frac{x-3}{\sqrt{x+2}}$ δ) $\Delta = \frac{2x-8}{\sqrt[3]{15-3x}}$

6.56 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις. Στη συνέχεια να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκει το x .

α) $A = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$

β) $B = \sqrt{2x-6} - \sqrt[3]{x-5}$

γ) $\Gamma = \frac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[3]{7-x}}$ δ) $\Delta = \frac{\sqrt{12-4x}}{\sqrt[3]{2x+14}}$

6.57 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{3x-6} + \frac{1}{x-5}$

β) $B = \frac{1-x}{\sqrt{9-3x}} + \frac{x}{x+2}$

6.58 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{x^2+4x+4}$ β) $B = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

γ) $\Gamma = \frac{x-3}{\sqrt{-x^2+8x-16}}$

6.59 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6.60 Δίνεται η παράσταση:

$$B = \sqrt[3]{(x-2)^5}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$ να αποδείξετε ότι:

$$B^2 + 6B = B^4$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6.61 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} \quad \text{και} \quad B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$$

όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \leq 2$ ισχύει:

$$A = B$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6.62 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{-x^2+6x-9}$$

6.63 Αν ο αριθμός v είναι ακέραιος, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{2v-5} + \sqrt{7-2v}$$

➤ Απλοποίηση

6.64 Αν $y < 0 < x$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{25x^2} - \sqrt{4x^2} - x$

β) $B = \sqrt{36y^2} - \sqrt{9y^2} + 2y$

6.65 Αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{16x^2} + \sqrt{4x^2} - 3x$$

6.66 Αν ισχύει $0 < x < 1$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

6.67 Αν ισχύει $a < \beta < 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{a^2 + \beta^2 - 2a\beta}}{a - \beta} + \frac{\sqrt{a^2}}{a} - \frac{\sqrt{\beta^2}}{\beta}$$

6.68 Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

α) Να βρείτε τις τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(T.Θ. - 2ο θέμα)

6.69 Αν ισχύει $|x| \leq 2$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

6.70 Δίνεται αριθμός x , με $1 < x < 3$, και η παράσταση:

$$A = \sqrt{4x^2 - 25x + 37} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

β) Να αποδείξετε ότι $A \in (0, 4)$.

6.71 Δίνεται η παράσταση:

$$A = (\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 2})(\sqrt{x + 2} + \sqrt{3 - x})$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

γ) Να αποδείξετε ότι $|A| \leq 5$.

6.72 Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{4x^4y^2} - 5x^2y + \sqrt{9x^4y^2}$$

6.74 Αν $a, \beta \geq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

α) $\sqrt[3]{a^3\beta} \cdot \sqrt{a\beta^5}$

β) $\sqrt[3]{a^5\beta^4} \cdot \sqrt[3]{a^4\beta^2}$

γ) $\sqrt[4]{a^7\beta^{11}} \cdot \sqrt[4]{a^5\beta^7}$

δ) $\frac{\sqrt[4]{a^{15}\beta^9}}{\sqrt[4]{a^3\beta}}$

ε) $\sqrt[3]{\frac{a^8}{\beta^5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\beta^{14}}{a^2}}$

στ) $\frac{\sqrt[3]{a^4\beta^2} \cdot \sqrt[3]{a^{12}\beta^9}}{\sqrt[3]{a\beta}}$

6.75 Αν $a, \beta \geq 0$, να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^6}}$

β) $\sqrt[3]{\sqrt{a^9\beta^6}}$

γ) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[3]{a}$

δ) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^7}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^5}}$

ε) $\sqrt[10]{a^3\beta^9} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^7\beta^{11}}}$

στ) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^8\beta^4}} \cdot \sqrt[9]{\sqrt{a\beta^5}}$

6.76 Να γράψετε ως μία ρίζα τις επόμενες παραστάσεις:

α) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$

β) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$

γ) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$

δ) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[4]{a}$

ε) $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[3]{a}}$

στ) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{a}}$

6.77 Αν $a, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt[4]{a^{12}\beta^8} \cdot \sqrt[5]{a^{12}\beta^6}}{\sqrt[3]{a^{15}\beta^{21}}}$$

είναι ανεξάρτητη από το a .

6.78 Αν ισχύει ότι $x < 0 < y$ και $x \neq -1$, να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{x^6y^6} - \sqrt[4]{x^4y^{12}}}{\sqrt{x^2y^4} - \sqrt[6]{x^{18}y^{12}}}$$

είναι ανεξάρτητη από το x .

6.79 Αν $a, \beta > 0$, $a \neq 1$, $\beta \neq 1$ και $a \neq \beta$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις έχουν σταθερή τιμή:

α) $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{\beta})^2 - (\sqrt{a\beta} + 1)^2}{(a - 1)(\beta - 1)}$

$$\beta) B = \left(\frac{\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} - \sqrt{\alpha\beta} \right) \left(\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha - \beta} \right)^2$$

6.80 Έστω $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha^2 - \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha^2\beta} - \alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$$

είναι ανεξάρτητη από το β .

6.81 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύουν $1 < y < 2$ και $y - x = 1$.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{4x^2 + 4y - 3} + 2\sqrt{y^2 - 6x - 2y + 10}$$

6.82 Αν $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \sqrt{\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}} \cdot (\alpha - \beta)}}{\sqrt[3]{\alpha - \beta} \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}}$$

είναι ανεξάρτητη από τις τιμές των α και β .

➤ Ρητοποίηση παρονομαστή

6.83 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \frac{10}{\sqrt{5}} & \beta) \frac{1}{\sqrt[3]{2}} & \gamma) \frac{6}{\sqrt[3]{3^2}} \\ \delta) \frac{12}{\sqrt[8]{9^5}} & \epsilon) \frac{1}{3\sqrt{6}} & \sigma\tau) \frac{6}{5\sqrt[7]{3^5}} \end{array}$$

6.84 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} & \beta) \frac{2}{\sqrt{7} - 1} \\ \gamma) \frac{1}{3\sqrt{2} + 2} & \delta) \frac{6}{4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}} \end{array}$$

6.85 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}} & \beta) \frac{20}{\sqrt[3]{6^3} \cdot \sqrt[4]{5}} \\ \gamma) \frac{8}{\sqrt[3]{3} \cdot (3 - \sqrt{5})} & \delta) \frac{12}{\sqrt[6]{2^5} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{6})} \end{array}$$

6.86 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{1}{\sqrt[4]{2} + 1} & \beta) \frac{1}{\sqrt[4]{5} - \sqrt[3]{3}} \\ \gamma) \frac{1}{\sqrt[4]{6} + \sqrt{2}} & \delta) \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt[4]{7}} \end{array}$$

6.87 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} & \beta) \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3}} \\ \gamma) \frac{2}{2 - \sqrt[3]{2}} & \delta) \frac{2}{\sqrt[3]{5} - 1} \end{array}$$

6.88 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{6}{\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{8}} & \\ \beta) \frac{19}{\sqrt{48} + \sqrt{72} - \sqrt{12} - \sqrt{2}} & \end{array}$$

6.89 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1} & \beta) \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ \gamma) \frac{1}{3 - \sqrt{5} - \sqrt{2}} & \delta) \frac{1}{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6}} \end{array}$$

6.90 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$\beta) B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

6.91 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{2\sqrt{5}-4}$$

$$\beta) B = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$$

6.92 α) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(2+\sqrt{3})^3 \quad \text{και} \quad (2-\sqrt{3})^3$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}$$

6.93 Αν α , β και γ , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}$$

➤ Απόδειξη ανισοτήτων

6.105 Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sqrt{4\alpha+9\beta} \leq 2\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\beta}$$

$$\beta) \sqrt{(\alpha+2)(\beta+3)} \geq \sqrt{3\alpha} + \sqrt{2\beta}$$

$$\gamma) (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) \geq 2(\sqrt{\alpha\beta} - \beta)$$

$$\delta) \sqrt{\frac{\alpha+4\beta}{2}} \geq \frac{\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta}}{2}$$

6.106 Αν α και β θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{8\alpha\beta}{\alpha+2\beta} \leq \sqrt{8\alpha\beta} \leq \alpha+2\beta$$

6.107 Αν $x, y > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{2\sqrt{x} \cdot (5\sqrt{x} + 3\sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \geq \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\beta) \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

6.108 Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+6}{\sqrt{\alpha^2+2}} \geq 4$$

Για ποιες τιμές του α ισχύει η ισότητα;

6.109 Αν $x, y > 0$, με $x+y=4$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) xy \leq 4 \quad \beta) \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} \leq 4$$

$$\gamma) x\sqrt{\frac{y}{2}} + y\sqrt{\frac{x}{2}} \leq 4$$

6.110 Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha + \beta + \gamma + 3 \geq 2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})$$

$$\beta) 2\alpha + \beta + 1 \geq 2\sqrt{\alpha} \cdot (\sqrt{\beta} + 1)$$

6.111 α) Αν $a > 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{a-1}}{a} < \frac{1}{2}$$

β) Αν $x, y > 2$, να αποδείξετε ότι:

$$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} < xy$$

6.112 α) Αν $x, y \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$i) (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \geq \sqrt{64\alpha\beta\gamma}$$

$$ii) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 8$$

6.113 α) Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

β) Αν $0 < x < 50$, να αποδείξετε ότι:

$$2\sqrt{x} + \sqrt{50-x} + \sqrt{200-x} \leq 30$$

6.114 Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2a+1}{\sqrt{a^2 + (a+1)^2}} < \sqrt{2}$$

6.115 α) Αν $a > 1$ και ν, μ είναι θετικοί ακέραιοι, με $\nu < \mu$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{a} > \sqrt[\mu]{a}$.

β) Αν $a > 1$, να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές:

$$\frac{1}{a}, \sqrt{a}, \frac{a}{\sqrt{a^2}}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, a$$

➤ Σύγκριση αριθμών

6.116 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$a) 2\sqrt{3} \text{ και } \sqrt{13} \quad \beta) 3\sqrt{2} \text{ και } \sqrt{17}$$

$$\gamma) \sqrt{2} + 1 \text{ και } \sqrt{3} \quad \delta) \sqrt{7} + \sqrt{3} \text{ και } \sqrt{10}$$

$$e) \sqrt{5} + \sqrt{3} \text{ και } 2\sqrt{2}$$

$$\sigma\tau) 2\sqrt{6} - 3\sqrt{3} \text{ και } 4\sqrt{2} - \sqrt{31}$$

6.117 Να αποδείξετε ότι:

$$a) \sqrt[3]{5} < \sqrt{2} \quad \beta) \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

$$\gamma) \sqrt[4]{10} > \sqrt{3} \quad \delta) \sqrt[4]{3} > \sqrt[3]{2}$$

6.118 Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, 1, \sqrt[3]{4}, \sqrt{3}$$

6.119 Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}, B = \sqrt{3}$ και $\Gamma = \sqrt[4]{5}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$,

β) να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B .

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6.120 Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (\sqrt{2})^6 \text{ και } B = (\sqrt[3]{2})^6$$

α) Να αποδείξετε ότι $A - B = 4$.

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{2}, 1$ και $\sqrt[3]{2}$.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6.121 Να αποδείξετε ότι:

$$a) 2 - \sqrt{2} > \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$\beta) \sqrt{3} + \sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{7}$$

$$\gamma) \sqrt{12} - \sqrt{2} > \sqrt{6} - 2$$

$$\delta) \sqrt{10} + \sqrt{7} < 3 + 2\sqrt{2}$$

$$e) \sqrt{8 + 2\sqrt{6}} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\sigma\tau) \sqrt{3} - 1 < \sqrt[3]{11 - 6\sqrt{3}}$$

6.122 α) Να αποδείξετε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{30} \text{ και } 6 - \sqrt[3]{30}$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

6.123 Να βρείτε έναν ρητό αριθμό μεταξύ των αριθμών:

$$a) \sqrt{2} \text{ και } \sqrt{3} \quad \beta) \sqrt{5} \text{ και } \sqrt{6}$$

6.124 Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{5} + \sqrt{2} < \sqrt{10} + 1 < \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

6.125 Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5} > \sqrt[3]{30} - 2$.

6.126 Να αποδείξετε ότι:

α) $1 + \sqrt{3} > \sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{27}}}$

β) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{15} \geq 4$

γ) $6 > \frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{5}$

δ) $\sqrt[4]{9 - \sqrt{15}} > \sqrt{\frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}}$

➤ Ρίζα ως υπόρριξη ποσότητα

6.127 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} \cdot \sqrt[24]{2^{31}}$

β) $\sqrt[4]{2^5\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}}$

6.128 Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

6.129 Αν $a \geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας:

α) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^5}}$ β) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^7}}$

γ) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$ δ) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[3]{a^8}}$

ε) $\sqrt[7]{a^4\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^7}}}$ στ) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a^4\sqrt[4]{a^3\sqrt[5]{a}}}}$

6.130 Αν $x > 0$, να γράψετε με τη μορφή μίας ρίζας τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x}}$ β) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

6.131 Αν $a, \beta > 0$, να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $\sqrt[3]{a^2\beta^3\sqrt{a^5\beta^6}}$ β) $\sqrt{a^3\beta\sqrt[3]{a^2\beta^3\sqrt[3]{a\beta^4}}}$

γ) $\sqrt{\frac{a}{\beta}\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{a^2}\sqrt[4]{\frac{\beta^3}{a^3}}}}$ δ) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{\beta}\sqrt[4]{\frac{\beta^3}{a^2}\sqrt{\frac{a}{\beta^3}}}}$

6.132 Αν $a, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt[4]{\frac{a}{\beta}\sqrt[3]{\frac{\beta}{a}\sqrt{\frac{\beta}{a}}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2\beta}\sqrt[4]{\frac{\beta}{a}} \cdot \sqrt[8]{\beta^3a^5}}$$

είναι σταθερή.

6.133 Αν $a \geq 0$, να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{a^3\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}}} \cdot \sqrt[24]{a}$

β) $B = \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^4\sqrt[4]{a^5}}} \cdot \sqrt[12]{a}$

γ) $\Gamma = \sqrt{a\sqrt[3]{a^4\sqrt[4]{a^2}}} \cdot \sqrt[4]{a^3}$

δ) $\Delta = \sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}\sqrt{a}}} \cdot \sqrt[8]{a^3}$

6.134 Δίνονται αριθμοί $a, \beta > 0$ για τους οποίους ισχύει ότι $a^2\beta = 27$. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{a^3\sqrt[4]{\beta^2\sqrt[3]{\beta^2a^4}}} : \sqrt{\frac{a}{\beta}\sqrt[3]{\frac{\beta}{a}}}$$

6.135 Αν $a > \beta > 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt{a}} + \sqrt[3]{\beta\sqrt{\beta}}} \cdot \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{\beta}}}{\sqrt[4]{a^2 + \beta^2 - 2a\beta}}$$