

Θέμα 1ο

- A.** Τι ονομάζουμε n -οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a ;
B. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και β να αποδείξετε ότι:

$$|a + \beta| \leq |a| + |\beta|$$

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

- α)** Ισχύει ότι $(-a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$.
β) Ισχύει ότι $|a - \beta| = |\beta - a|$.
γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$.
δ) Ισχύει η ισοδυναμία $|x| > 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.
ε) Αν $a < \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε ισχύει ότι:

$$\left(\sqrt{(a - \beta)^2} + \sqrt{(\gamma - \delta)^2} \right)^2 = (a - \beta - \gamma + \delta)^2$$

Θέμα 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $a = \sqrt{2^5 \sqrt{2^3 \sqrt{2}}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}$ και $\beta = 3^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{3 - \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt{6}}$.

- α)** Να βρείτε τους αριθμούς a και β .
β) Αν ισχύει ότι $\beta < x < a$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση:

$$A = |2x - 6| - |3x - 12|$$

- γ)** Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η παράσταση A .

Θέμα 3ο

Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{x^{16}}{y^{13}} : \left[\frac{(y^2)^5}{x^{10} : x^{-3}} : \frac{(x^{11})^2}{(y^7)^4} \right]$$

- α)** Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x^2 + y^2 + 18 = 6(y - x)$, να βρείτε:
i) τους αριθμούς x και y , **ii)** την τιμή της παράστασης A .
γ) Για την τιμή της παράστασης A που βρήκατε στο ερώτημα (β) θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς κ, λ για τους οποίους ισχύει ότι $\kappa + \lambda + A = 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\kappa\lambda \leq \frac{1}{4}$

ii) $\kappa^2 + \lambda^2 \geq \frac{1}{2}$

iii) $\kappa^3 + \lambda^3 \geq \frac{1}{4}$

Θέμα 4ο

Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \frac{2^{6043} + 2^{6048}}{14 \cdot 8^{2014} + 8^{2015}} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt[3]{10 - \sqrt{3} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.

β) Αν $x < (\beta - \alpha)^{2016} < y$, να αποδείξετε ότι $x + y > 1 + xy$.

γ) Αν $\kappa \in (-\alpha, -\beta)$ και $\lambda \in (\alpha^{-1}, \beta^{-1})$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\frac{\kappa^2}{\lambda}} \in (\beta, \alpha)$$

Με επιτυχία! *

* «Καλή επιτυχία» δεν είναι στην πραγματικότητα σωστή φράση καθώς αποτελεί πλεονασμό! Η επιτυχία είναι καλή από μόνη της καλή!!!