

4.2(b) Ανισώσεις 2ου βαθμού – Πρόσημο κλπ

Ανισώσεις 2ου βαθμού - Βασικές περιπτώσεις

19.14 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 + 2x - 3 > 0$ β) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

γ) $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$ δ) $-3x^2 + 4x + 4 > 0$

19.15 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ β) $2x^2 - 4x + 2 < 0$

γ) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$ δ) $4x^2 - 12x + 9 > 0$

19.16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 - x + 2 > 0$ β) $2x^2 - 5x + 4 < 0$

γ) $-x^2 + 2x - 3 \geq 0$ δ) $-3x^2 + 3x - 1 \leq 0$

19.17 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 - 5x < 0$ β) $x^2 + 3x \geq 0$

γ) $-3x^2 + 4x > 0$ δ) $-2x^2 \leq 4x$

ε) $-\frac{x}{6} \geq -x^2$ στ) $x \leq -x^2$

19.18 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 - 9 \leq 0$ β) $2x^2 < 50$

γ) $\frac{x^2}{2} \geq 18$ δ) $2x^2 - \frac{25}{2} > 0$

19.19 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $(x+3)^2 > 4(2x+3)$

β) $4(x-5) - (x-4)(x+4) \geq 0$

γ) $2(x-3)(x+3) - (x-1)^2 \leq -11$

δ) $x^2 + 1 - \frac{(x+2)^2}{5} > 0$

19.20 Δίνεται το τριώνυμο:

$$2x^2 - 3x + 1$$

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

$$2x^2 - 3x + 1 < 0$$

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$2x^2 - 3x + 1 < 0$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

19.21 Να βρείτε τη μικρότερη θετική ακέραια λύση της ανίσωσης:

$$3x^2 - 7x - 10 \geq 0$$

19.22 Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης:

$$x \leq 2[2(x+2) - (x+1)^2]$$

19.23 α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου:

$$2x^2 - x - 6$$

για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$\kappa = \left[2 \left(\frac{201}{100} \right)^2 - \frac{201}{100} - 6 \right] \left[2 \left(\frac{199}{100} \right)^2 - \frac{199}{100} - 6 \right]$$

19.24 Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α) $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$

β) $x^2 + 4x - 5 > 0$ και $x^2 - 4 \leq 0$

γ) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ και $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$

δ) $x^2 + x - 6 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$

19.25 α) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|2x - 5| \leq 3 \quad \text{και} \quad 2x^2 - x - 1 \geq 0$$

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

Σύνθετες ανισώσεις

19.29 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$ β) $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$

γ) $x^2 - 6|x| + 8 > 0$ δ) $x^2 - 7|x| + 6 < 0$

19.30 Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 < 0$$

19.31 Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x^2 - 3x + 2)^2 \leq 6x^2 - 18x + 12$$

19.32 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $(2x - 3)^2 - |12x - 18| + 5 \leq 0$

β) $(x^2 + 2x)^2 + 24 \geq 11x^2 + 22x$

19.33 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 < 3|x|$ β) $x^2 - 6x + 9 < 2|x - 3|$

19.34 Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x - 2)^2 + 4 < |3x - 6| + |2x - 4|$$

19.35 Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^6 - 9x^2|x| + 8 < 0$$

19.36 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|x^2 + 3x - 1| < 3$ β) $|x^2 - 2x - 9| > 6$

19.37 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|x - 3| \geq 2|x + 1|$ β) $2|x + 2| < |x + 4|$

γ) $|1 - x| - 3|x + 5| > 0$

δ) $2|x + 3| - |3x - 3| \leq 0$

19.38 Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x^2 - 2x - 3| = \frac{-x^2 + 12x - 2}{6}$$

19.39 Να λύσετε την ανίσωση:

$$|-x^2 + x + 2| \leq 1 - x(x + 6)$$

19.40 Να λύσετε την ανίσωση:

$$|x^2 + x - 6| \leq x^2 - 3x + 2$$

19.41 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2 + 3x - 10| = x^2 + 3x - 10$

β) $|x^2 - x - 12| = -x^2 + x + 12$

19.42 Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|2x^2 - x - 3| \leq 2x^2 - x - 3$

β) $|x^2 - 3x - 4| > -x^2 + 3x + 4$

19.43 Να λύσετε την ανίσωση:

$$(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x - 12) \leq -16$$

Απόδειξη ανισοτήτων

19.44 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

α) $(x + 1)^2 - 5 < 3x(x - 1)$

β) $27 - (x + 2)^2 > -2(x - 3)(x + 3)$

19.45 α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κά-

θε πραγματικό αριθμό x .

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

19.46 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

α) $(3x - y)^2 - 2(3x - y) + 2 > 0$

β) $12x - 15y < 2(4x - 5y)^2 + 3$

19.47 Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

α) $x^2 - 3xy + 3y^2 + 1 > 0$

β) $-2x^2 + 4xy - 3(y^2 + 1) < 0$

19.48 Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $d(x, -2) < 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$

(T.Θ. - 2ο θέμα)

19.49 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2 - (3\lambda - 1)x + (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

19.50 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Προσδιορισμός παραμέτρου

19.51 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$$

έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

19.52 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$-x^2 + (\lambda + 5)x - 3\lambda - 7 = 0$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.

19.53 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0$$

έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

19.54 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$-2x^2 + 3x + 2\lambda^2 - 5\lambda - 12 = 0$$

έχει ετερόσημες ρίζες.

19.57 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$x^2 - (\lambda - 3)x + 3 - 2\lambda = 0$$

έχει δύο αρνητικές και άνισες ρίζες.

19.58 Να βρείτε για ποια $\mu \in \mathbb{R}$ οι τιμές των παραστάσεων που ακολουθούν διατηρούν σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

α) $x^2 + (2\mu - 1)x + (\mu - 1)(\mu + 1)$

β) $-4x^2 + (\mu + 3)x - \mu$

γ) $(\mu + 5)x^2 + (\mu + 2)x + 1$

δ) $(\mu - 7)x^2 + (\mu - 4)x - 1$

19.59 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η ανίσωση:

$$4x^2 + 4(2\mu - 1)x + 4 - 3\mu \geq 0$$

αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνδυαστικά

19.69 α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$$

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (α) είναι και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

19.70 Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 7x + 6$.

α) Να σχηματίσετε πίνακα προσήμων για το παραπάνω τριώνυμο.

β) Να βρείτε τα πρόσημα των παραστάσεων:

ι) $A = \left(\frac{2018}{2017}\right)^2 - 7 \cdot \frac{2018}{2017} + 6$

ιι) $B = 4x^2 - 14x + 6$