5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

– Στην ακολουθία 1, 3, 5, 7, ... των περιττών αριθμών, κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού 2. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2$$

Η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2**.

– Στην ακολουθία 15, 10, 5, 0, −5, −10, ... κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του αριθμού −5. Δηλαδή για την ακολουθία αυτή ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 5 \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5$$

Όπως και προηγουμένως, η ακολουθία (α_ν) λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά −5.**
Γενικότερα ορίζουμε ότι:

> Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **ω** και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.
Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega}$$

Αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω, τότε ο αναδρομικός της τύπος $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ μας επιτρέπει να βρούμε με διαδοχικά βήματα τον οποιονδήποτε όρο της.
Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε κατευθείαν το ν$^{\text{ο}}$ όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου ως συνάρτηση των α_1, ω και ν ως εξής: Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$
$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.
Επομένως

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι
$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega.$$

Έτσι π.χ. στην αριθμητική πρόοδο 3, 5, 7, 9, ..., η οποία έχει $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 5 - 3 = 2$, ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1) \cdot 2$. Επομένως ο $20^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_{20} = 3 + 19 \cdot 2 = 41$, ο $100^{\text{ος}}$ όρος της είναι $\alpha_{100} = 3 + 99 \cdot 2 = 201$ κτλ.

Αριθμητικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \text{ και } \gamma - \beta = \omega, \text{ επομένως } \beta - \alpha = \gamma - \beta \text{ ή } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad \text{ή} \quad \beta - \alpha = \gamma - \beta,$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Ας θεωρήσουμε την αριθμητική πρόοδο 1, 2, 3, 4, ... και ας βρούμε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της

$$S_{100}=1+2+3+...+98+99+100$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρούμε συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής:
Γράφουμε δυο φορές το παραπάνω άθροισμα, αλλά με αντίθετη τη σειρά των προσθετέων και προσθέτουμε τις δυο ισότητες κατά μέλη:

$$S_{100}=1+2+3+...+98+99+100$$

$$S_{100}=100+99+98+...+3+2+1$$

$$2S_{100}=(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

$$\text{ή}\quad 2S_{100}=101+101+101+...+101+101+101$$

$$\text{ή}\quad 2S_{100}=100\cdot 101,\ \text{άρα}\ S_{100}=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τρόπο σε μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδο, θα αποδείξουμε ότι:

> Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι
> $$S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

Έχουμε: $S_\nu=\alpha_1+(\alpha_1+\omega)+(\alpha_1+2\omega)+...+[\alpha_1+(\nu-2)\omega]+[\alpha_1+(\nu-1)\omega]$

και $S_\nu=\alpha_\nu+(\alpha_\nu-\omega)+(\alpha_\nu-2\omega)+...+[\alpha_\nu-(\nu-2)\omega]+[\alpha_\nu-(\nu-1)\omega]$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$2S_\nu=(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_1+\alpha_\nu)+...+(\alpha_\nu+\alpha_1)+(\alpha_\nu+\alpha_1)$$

$$\text{ή}\quad 2S_\nu=\nu(\alpha_1+\alpha_\nu).\ \text{Άρα}\ S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu).$$

Επειδή $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, ο τύπος $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ γράφεται:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να βρεθεί το άθροισμα 7 + 10 + 13 + ... + 157.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το άθροισμα διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 7$, $\alpha_\nu = 157$ και $\omega = 3$. Για να το υπολογίσουμε, χρειαζόμαστε το πλήθος ν των προσθετέων. Από τον τύπο του $\nu^{ου}$ όρου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ έχουμε

$$\begin{aligned} 157 = 7 + (\nu-1)3 &\Leftrightarrow 7 + (\nu-1)3 = 157 \\ &\Leftrightarrow 7 + 3\nu - 3 = 157 \\ &\Leftrightarrow 3\nu = 153 \\ &\Leftrightarrow \nu = 51 \end{aligned}$$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$S_{51} = \frac{51}{2}(7+157) = 4182.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου 52, 47, 42, ... έχουν άθροισμα ίσο με 90;

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha_1 = 52$, $\omega = 47 - 52 = -5$ και $S_\nu = 90$.

Επειδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]$, έχουμε

$$\begin{aligned} 90 = \frac{\nu}{2}[2\cdot 52 + (\nu-1)(-5)] &\Leftrightarrow 90 = \frac{\nu}{2}(109 - 5\nu) \\ &\Leftrightarrow 5\nu^2 - 109\nu + 180 = 0 \\ &\Leftrightarrow \nu = \frac{9}{5} \quad \text{ή} \quad \nu = 20 \end{aligned}$$

Επειδή όμως $\nu \in \mathbb{N}^*$, συμπεραίνουμε ότι $\nu = 20$. Άρα 20 όροι της δοθείσης αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα ίσο με 90.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Ο $10^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι ο 42 και ο $19^{ος}$ όρος της είναι ο 87. Να υπολογισθεί το άθροισμα των πρώτων 100 όρων της προόδου αυτής.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ έχουμε $42 = \alpha_1 + 9\omega$ και $87 = \alpha_1 + 18\omega$.
Επομένως οι α_1 και ω είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \alpha_1 + 9\omega = 42 \\ \alpha_1 + 18\omega = 87 \end{cases}$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού βρίσκουμε ότι είναι $\alpha_1 = -3$ και $\omega = 5$. Επομένως

$$\begin{aligned} S_{100} &= \frac{100}{2}[2(-3) + 99 \cdot 5] \\ &= 50(-6 + 495) \\ &= 24450 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το ν$^{\text{ο}}$ όρο των αριθμητικών προόδων:

i) 7, 10, 13, … **ii)** 11, 13, 15, … **iii)** 5, 2, −1, …

iv) 2, $\frac{5}{2}$, 3, … **v)** −6, −9, −12, …

2. Να βρείτε το ζητούμενο όρο σε καθεμιά από τις αριθμητικές προόδους:

i) Τον α_{15} της −2, 3, 8, … **ii)** Τον α_{20} της 11, 18, 25, …

iii) Τον α_{30} της 4, 15, 26, … **iv)** Τον α_{35} της 17, 25, 33, …

v) Τον α_{50} της 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, ... **vi)** Τον α_{47} της $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 2, …

3. **i)** Αν ο 6$^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι 12 και ο 10$^{\text{ος}}$ όρος είναι 16, να βρείτε τον 1$^{\text{ο}}$ όρο και τη διαφορά της προόδου.

ii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$.

iii) Ομοίως, αν είναι $\alpha_3 = 20$ και $\alpha_7 = 32$.

4. **i)** Ο 5$^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι −5 και ο 15$^{\text{ος}}$ όρος της είναι −2. Να βρείτε τον 50$^{\text{ο}}$ όρο της προόδου.

ii) Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_7 = 55$ και $\alpha_{22} = 145$, να βρείτε τον α_{18}.

5. **i)** Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 5$ ισούται με 97;

ii) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με −97;

6. **i)** Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των 10 και −40.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των 5x + 1 και 11 είναι ο 3x − 2.

7. Αν δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 10 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι ο 25, να βρείτε τους δυο αυτούς αριθμούς.

8. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 40 όρων των αριθμητικών προόδων:
i) 7, 9, 11, ... **ii)** 0, 2, 4, ... **iii)** 6, 10, 14, ... **iv)** −7, −2, +3, ...

9. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 80 όρων των αριθμητικών προόδων:

i) 2, −1, −4, … **ii)** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \ldots$

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
i) 1+5+9 + ... + 197 **ii)** 9+12+15+ ... + 90 **iii)** −7−10−13− ... −109.

11. Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε από καθεμιά από τις παρακάτω αριθμητικές προόδους για να έχουν άθροισμα 180;
i) 4, 8, 12, ... **ii)** 5, 10, 15, ...

12. Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 15 σειρές κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 53 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει δυο κεραμίδια λιγότερα. Πόσα κεραμίδια έχει η 15η σειρά και πόσα κεραμίδια έχει συνολικά η στέγη;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ο ν$^{\text{ος}}$ όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 12 - 4\nu$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά της ω.

2. Να βρείτε το άθροισμα:
i) των πρώτων 200 περιττών αριθμών
ii) των πρώτων 300 θετικών άρτιων
iii) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 380.

3. Να βρείτε το άθροισμα:
i) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 199
ii) των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200.

4. Να βρείτε το άθροισμα:
i) των πρώτων 30 όρων της ακολουθίας $\alpha_\nu = 5\nu - 4$
ii) των πρώτων 40 όρων της ακολουθίας $\alpha_\nu = -5\nu - 3$.

5. Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 9.

6. Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου 1, 3, 5, 7, ... που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά του να ξεπερνάει το 4000.

7. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, στον οποίο τα $α_1$, ω, ν, $α_ν$ και $S_ν$ ανήκουν σε κάθε γραμμή στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

$α_1$	$ω$	$ν$	$α_ν$	$S_ν$
120	−10	12		
5		27	109	
	3	12		210
	2	16	−8	

8. Ένα ρολόι χτυπάει τις ακέραιες ώρες. Πόσα χτυπήματα ακούγονται σε ένα 24/ωρο;

9. Ένα στάδιο έχει 33 σειρές καθισμάτων. Στην κάτω-κάτω σειρά βρίσκονται 800 θέσεις και στην πάνω-πάνω σειρά βρίσκονται 4160 θέσεις. Το πλήθος των θέσεων αυξάνει από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων. Να βρείτε πόσες θέσεις έχει συνολικά το στάδιο και πόσες θέσεις έχει η μεσαία σειρά.

10. Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί. **[Τέτοια προβλήματα λέγονται προβλήματα παρεμβολής όρων]**.

11. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1+\frac{ν-1}{ν}+\frac{ν-3}{ν}+...+\frac{1}{ν}$.

12. Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου: Το 1ο μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανομένου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;