

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

5.82 Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 3| - |x + 1| + |y - 1| - |y + 2|$$

όπου $-1 \leq x \leq 3$ και $-2 \leq y \leq 1$.

- α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.
 β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης A.

5.83 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |2x - 4| \quad \text{και} \quad B = |x - 3|$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι:

$$A + B = x - 1$$

- β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$, ώστε να ισχύει $A + B = 2$;
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(T.Θ. - 2ο θέμα)

5.84 Για τους αριθμούς a και β ισχύει ότι:

$$|a + 2\beta| + |3\beta - 3| = |2 - 2\beta|$$

- α) Να βρείτε τους αριθμούς a και β .

- β) Δίνεται η παράσταση:

$$A = -a - \frac{|\beta - x|}{x^2 + ax + \beta}$$

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

- ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση A και να τη γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

5.85 Δίνεται το διάστημα $\Delta = (a + \beta, 3a + 2\beta)$ το οποίο έχει κέντρο το 2 και ακτίνα 3.

- α) Να βρείτε τις τιμές των a και β .
 β) Αν $x, y \in \Delta$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = |x + y - 10| - |x - y + 6| - 6 - 2x$$

είναι σταθερή.

5.86 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύουν:

$$|2x + 3y - 5| < 9 \quad \text{και} \quad |x - y| < 2$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $x \in (-2, 4)$,
 β) η τιμή της παράστασης $A = ||x - 4| - 6| - x$ είναι σταθερή.

5.87 Για τους πραγματικούς αριθμούς a και β ισχύει ότι:

$$\bullet \quad |a - 2| < 1 \quad \bullet \quad |\beta - 3| \leq 2$$

- α) Να αποδείξετε ότι $1 < a < 3$.
 β) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

- γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2a - 3\beta$.

- δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{a}{\beta}$.

(T.Θ. - 4ο θέμα)

5.88 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(a - 1)(1 - \beta) > 0$$

- α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των a και β .
 β) Αν επιπλέον $|\beta - a| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = |a - 1| + |1 - \beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

(T.Θ. - 4ο θέμα)

5.89 Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με:

$$-2 < x < 7$$

- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

$$\text{i) } |x + 2| \quad \text{ii) } |x - 7|$$

- β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x + 2| + |x - 7|$$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = |x + 2| + |x - 7|$$

γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

5.90 Δίνονται αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύουν:

$$|x|^3 - 1 \leq x^2 - |x| \quad \text{και} \quad |y| + 2 \leq ||y| - 6|$$

α) Να αποδείξετε ότι $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$.

β) Δίνεται η παράσταση:

$$A = |2x - 2| + |4x + 4| + |y - 2| - |4y + 8|$$

i) Να γράψετε την παράσταση A χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

ii) Να αποδείξετε ότι $|A| \leq 12$.

5.91 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} - \frac{2x^2}{1 - x + x^2 - x^3} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

γ) Αν ισχύει ότι $|3x - 2| < 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|A - 3| < 1$$