Επαναληπτικές ασκήσεις: Κεφάλαιο 2

7.1 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{2^4x^3y^5}{8x^{-2}y^8}\right)^3 \quad \text{και} \quad B = \frac{(x^{-3}y^4)^2}{(4x^{-9}y)^{-1}}$$

όπου $x,\ y \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $A \cdot B$ είναι ανεξάρτητο των x και y.

β) Να βρείτε την τιμή του πηλίκου $A : B$, αν είναι $x = -4$ και $y = -8$.

7.2 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x}{x^3 - 9x}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση A, όταν:

i) $x = \sqrt[3]{\dfrac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt[9]{16}}{\sqrt[12]{3}}$

ii) $x = 27^7 \cdot 16^5 \cdot 36^{-10}$

7.3 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \frac{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[12]{27}} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{2^2\sqrt[3]{2^4\sqrt{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{x^2 - 6x + \alpha}{x^3 - \beta x}\cdot\frac{x^3 - \beta^{\frac{1}{2}}x^2}{x^2 - \alpha^{\frac{1}{2}}x}$$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

iii) Αν είναι $8 < x < 13$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{3} < A < 1$$

7.4 Δίνεται ο αριθμός:

$$x = 2016^{\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{98}} - (-1)^{2016}$$

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι $\alpha\beta < x$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta+4}{\alpha} \leq \frac{4-\alpha}{\beta} - \frac{8}{\alpha\beta}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

7.5 **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2 = x^3$$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\alpha = \sqrt[3]{(1008\cdot 2017)^2 - (1008\cdot 2015)^2}$$

είναι ακέραιος.

7.6 **α)** Αν $\beta = \alpha - 1$, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4) = \alpha^8 - \beta^8$$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$x = \sqrt{199(10^4+99^2)(10^8+99^4)+99^8}$$

είναι ακέραιος.

7.7 **α)** Για οποιαδήποτε $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

β) Αν για τους αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha + \beta = \sqrt{17} \quad \text{και} \quad \alpha - \beta = 3$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \alpha^3 - \beta^3$$

7.8 Δίνεται ο αριθμός $\alpha = 8^{\frac{1}{11}}\cdot 3^{\frac{7}{11}}\cdot 12^{\frac{4}{11}}$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Να βρείτε τον αριθμό:

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{2}}$$

γ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$8(x-\beta)^2 \geq (2x-\alpha)^2 - (\alpha-\beta)^{\frac{3}{2}}$$

7.9 Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt[5]{\sqrt[6]{6^2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{6^9}} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt[10]{\frac{1}{6^6}\sqrt[4]{6^3}}}$$

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{4}{A}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

7.10 **α)** Να βρείτε τον αριθμό:

$$\alpha = -11 \cdot \frac{9+\sqrt{75}}{15-7\sqrt{12}} \cdot \frac{13-\sqrt{147}}{4+\sqrt{27}}$$

β) Αν $x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha+1}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $y = 10x^2 - x^4$ είναι φυσικός.

7.11 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει $1 \le x \le 2$ και $3 \le y \le 5$, καθώς και η παράσταση:

$$A = |x-1| + |3x-6| + |y-3| - |2y-10|$$

α) Να γράψετε την παράσταση A χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή της παράστασης A.

7.12 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \left(\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2 \quad \text{και}$$

$$\beta = \sqrt[3]{3+\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{4-\sqrt{7}}$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Αν ισχύει $\alpha < x < \beta$, να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9}$$

είναι ανεξάρτητη του x.

7.13 Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y για τα οποία ισχύουν:

$$|x-3| \le 2 \quad \text{και} \quad |y-6| \le 4$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$1 \le x \le 5 \quad \text{και} \quad 2 \le y \le 10$$

β) Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y.

(Τ.Θ. - 2ο θέμα)

7.14 Δίνονται ετερόσημοι αριθμοί $\alpha, \beta \neq 0$ για τους οποίους ισχύει $|2\alpha - \beta| = |\alpha + 3\beta|$.

α) Να βρείτε τον λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$x = \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{2\alpha^2 + 3\alpha\beta - \beta^2}$$

είναι ακέραιος.

7.15 Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-4| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} < \frac{x^2}{x+22} < 1$.

β) Θεωρούμε τον αριθμό:

$$\alpha = \big||x-3|-2\big| + \big||x-5|-2\big|$$

i) Να αποδείξετε ότι η τιμή του α είναι ανεξάρτητη του x.

ii) Αν ισχύει $|\beta-\gamma| = |\gamma-\delta| - \alpha$ και επιπλέον είναι $|\beta-\varepsilon| = \alpha^2 - |\varepsilon-\delta|$, να αποδείξετε ότι:

$$2 \le |\beta-\delta| \le 4$$

7.16 Για τους θετικούς αριθμούς x, y και z ισχύει:

$$xy + yz + zx = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $(x+z)(x+y) = 1 + x^2$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

7.17 Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε:

α) να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = (3\alpha-\beta)^3 + (3\beta-\gamma)^3 + (3\gamma-\alpha)^3$$

β) να αποδείξετε ότι $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha\beta$,

γ) να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$B = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta(\gamma-2)}{\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}$$

είναι σταθερή,

δ) να συγκρίνετε τους αριθμούς γ^2 και $4\alpha\beta$.

7.18 **α)** Αν x, $y \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Αν α, β, $\gamma \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\alpha\gamma} \leq \alpha + \beta + \gamma$$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{8} < 9$$

7.19 **α)** Για κάθε $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$$

β) Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{\frac{\kappa+1}{2} + \sqrt{\kappa}} - \sqrt{\frac{\kappa+1}{2} - \sqrt{\kappa}}$$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του κ ορίζεται η παράσταση Α.

ii) Αν $\kappa \geq 1$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης Α είναι σταθερή.

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$y = \frac{\sqrt{4030}}{\sqrt{1008 + \sqrt{2015}} + \sqrt{1008 - \sqrt{2015}}}$$

είναι ακέραιος.

δ) Αν α, $\beta > 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$B = \frac{\sqrt{\alpha + 1 + \sqrt{2\alpha + 1}} - \sqrt{\alpha + 1 - \sqrt{2\alpha + 1}}}{\sqrt{\beta + 2 + \sqrt{2\beta + 3}} - \sqrt{\beta + 2 - \sqrt{2\beta + 3}}}$$

7.20 **α)** Για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$ και α, $\beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta} = \frac{(x\beta - y\alpha)^2}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^4}{12} + \frac{x^8}{13} = \frac{(x^2 + x^4)^2}{25}$.

γ) Για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$ και α, $\beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} \geq \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$$

δ) Για κάθε x, y, $z \in \mathbb{R}$ και α, β, $\gamma \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

ε) Για κάθε x, y, $z \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

στ) Για κάθε α, β, $\gamma \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\beta+\gamma} + \frac{1}{\gamma+\alpha} \geq \frac{9}{2(\alpha+\beta+\gamma)}$$