

Αποδείξεις

3.73 Να αποδείξετε τις ταυτοτητες:

α) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$

β) $a^2 + (2a + 5)^2 = (a + 4)^2 + (2a + 3)^2$

γ) $(a - 2)^2 + 2 = 2(a - 1)^2 - (a - 2)(a + 2)$

δ) $(a - \beta)(a + \beta)(a^2 + \beta^2) + \beta^4 = a^4$

ε) $(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = [(x - y)(x + y)]^2$

3.74 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(3x + 2)^2 - (2x + 3)^2 = 5(x + 1)(x - 1)$

β) $\frac{(a - 3\beta)^2 - (\beta - 3a)^2}{8} = (\beta - a)(\beta + a)$

γ) $x(-x - 1)^2 - (2x)^2 = (-1 + x)^2 - (-x + 1)^3$

δ) $(\omega + 2)^3 - 6(\omega + 1)^2 = \omega^3 + 2$

ε) $(x^3 + 1)^2 + (-x^2 - 1)^3 = (2x)^3 - 3x^2(x + 1)^2$

3.75 Να αποδείξετε ότι:

α) $(x - 2y)^3 + 3(x - 2y)^2(x + 2y) + 3(x - 2y)(x + 2y)^2 + (x + 2y)^3 = 8x^3$

β) $(a^2 - \alpha\beta + \gamma^2)^2 - 2(a^2 + \gamma^2 - \alpha\beta)(\gamma^2 - \beta^2 + \alpha\beta) + (\beta^2 - \alpha\beta - \gamma^2)^2 = (a - \beta)^4$

3.78 Αν ισχύει:

$$(a + 1)^2 - (\beta - 1)^2 - (a - \beta)(a + \beta) = 6$$

να αποδείξετε ότι $a + \beta = 3$.

3.79 Αν $a + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$a^3(\beta + 1) - \beta^3(a + 1) = a - \beta$$

3.80 Αν $(a + \beta)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right) = 4$, με $a, \beta \neq 0$,

ποδείξετε ότι $a = \beta$.

3.81 Αν ισχύει $a + \beta + \gamma = 2\tau$, να αποδείξετε ότι:

$$(\tau - a)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 + \tau^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

3.82 Αν ισχύει $a + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $a(a + \beta)(a + \gamma) = \beta(\beta + \gamma)(\beta + a)$

β) $(a + \beta)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma + a)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2$

3.83 Αν για τους αριθμούς $a, \beta, \gamma \neq 0$ ισχύει ότι $a + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

3.84 Αν ισχύει $a + \beta + \gamma = x$, να αποδείξετε ότι:

$$(x - 3a)^3 + (x - 3\beta)^3 + (x - 3\gamma)^3 = 3(x - 3a)(x - 3\beta)(x - 3\gamma)$$

3.85 Για τους πραγματικούς μη μηδενικούς αριθμούς a, β και γ ισχύουν:

$$a + \beta + \gamma = 3 \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = a\beta + \beta\gamma + \gamma a$$

β) Να αποδείξετε ότι $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9$.

3.87 Αν ο αριθμός x^2 είναι άρρητος, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός x είναι άρρητος.

3.88 Ο αριθμός a είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $(a + 3)^2$ είναι άρτιος, τότε ο αριθμός a είναι περιττός.

3.89 Οι αριθμοί a και β είναι ακέραιοι. Αν ο αριθμός $(a + 2\beta + 1)^2$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός a είναι περιττός.

3.90 Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί a και β . Αν οι αριθμοί β και $a^2 + \beta^2$ είναι περιττοί, να αποδείξετε ότι ο αριθμός a είναι άρτιος.

3.91 Με ένα αντιπαράδειγμα να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ισχυρισμοί δεν είναι αληθείς.

α) Για κάθε $a > 0$ ισχύει ότι:

$$a > \frac{1}{a}$$

β) Για κάθε $a < 5$ ισχύει ότι:

$$a^2 < 25$$

γ) Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$, με $a < 5$ και $\beta < 10$, ισχύει ότι $a\beta < 50$.

δ) Για κάθε $a > 6$ και $\beta > 2$ ισχύει ότι:

$$\frac{a}{\beta} > 3$$