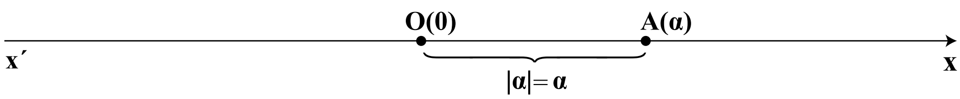
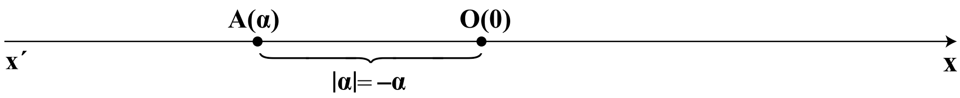
2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα.





Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε ο άξονας προκύπτει ότι:

- $|2|=2,\ \left|\frac{13}{5}\right|=\frac{13}{5},\ |\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ και γενικά: $|\alpha| = \alpha$ **, για κάθε** $\alpha > 0$.

  Δηλαδή:

  Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

- $|-2|=2,\ \left|-\frac{13}{5}\right|=\frac{13}{5},\ |-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$ και γενικά: $|\alpha| = -\alpha$**, για κάθε** $\alpha < 0$.

  Δηλαδή:
  Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- $|0| = 0$

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Για παράδειγμα,

✓ $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

✓ $|\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta| \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta$ ή $\alpha - \beta = 3\beta - 2\alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta \text{ ή } \alpha = \frac{4}{3}\beta$$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Οι ιδιότητες αυτές, όμως, μπορούν να αποδειχθούν και με τη βοήθεια των προηγούμενων συμπερασμάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

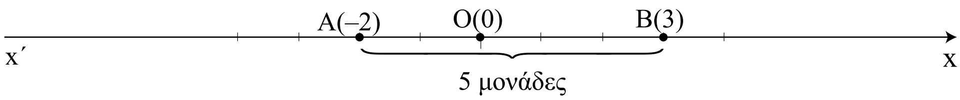
Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- Η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα:
  $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \ldots \cdot |\alpha_\nu|$
  Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha$, έχουμε:
  $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$
- Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Συγκεκριμένα:
  $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|$

Απόσταση δυο αριθμών

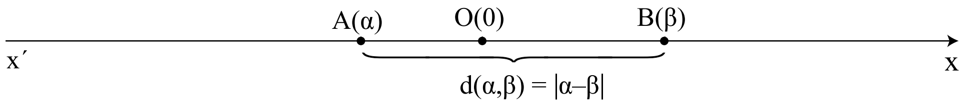
- Ας πάρουμε τώρα δυο αριθμούς, για παράδειγμα τους –2 και 3, που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών –2 και 3. Παρατηρούμε ότι

$$(AB) = 5 = |(-2) - 3| = |3 - (-2)|.$$

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.

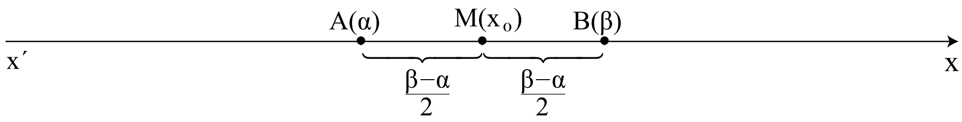


Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α,β) και είναι ίση με |α − β|. Είναι δηλαδή:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

Προφανώς ισχύει d(α, β) = d(β, α). Στην περίπτωση μάλιστα που είναι α < β, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με β − α και λέγεται **μήκος** του διαστήματος [α, β].

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα [α, β] και ας ονομάσουμε Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



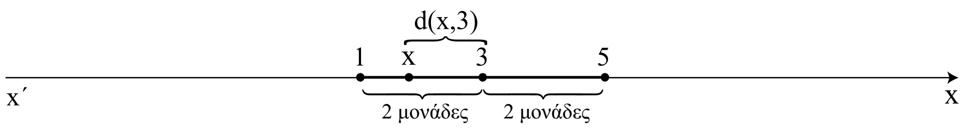
Αν $M(x_0)$ είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}(MA) = (MB) &\Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta)\\ &\Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta|\\ &\Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0, \qquad (\text{αφού } \alpha < x_0 < \beta)\\ &\Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta\\ &\Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}\end{aligned}$$

Ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται **κέντρο** του διαστήματος [α, β], ενώ ο αριθμός $\rho = \frac{\beta-\alpha}{2}$ λέγεται **ακτίνα** του [α, β].

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β), [α, β) και (α, β] ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος [α, β].

- Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει |x − 3| < 2.



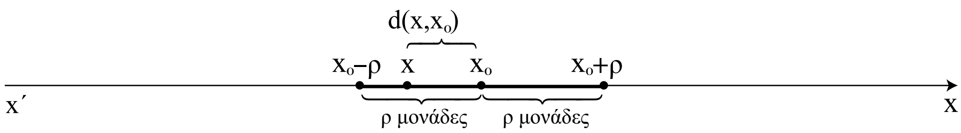
Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$\begin{aligned} |x-3|<2 &\Leftrightarrow d(x,3)<2 \\ &\Leftrightarrow 3-2<x<3+2 \\ &\Leftrightarrow x \in (3-2,\ 3+2) \end{aligned}$$

Γενικά:

> Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:
> $$\begin{aligned} |x-x_0|<\rho &\Leftrightarrow x \in (x_0-\rho,\ x_0+\rho) \\ &\Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho \end{aligned}$$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x-x_0|<\rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.



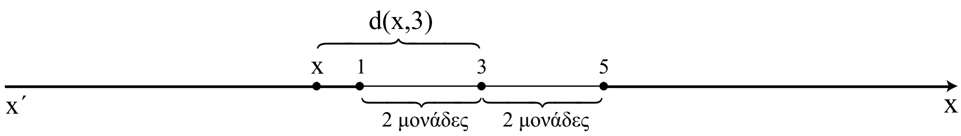
Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε:

$$|x|<\rho \Leftrightarrow x \in (-\rho,\ \rho) \Leftrightarrow -\rho<x<\rho\ .$$

Για παράδειγμα,

$$|x|<2 \Leftrightarrow x \in (-2,\ 2) \Leftrightarrow -2<x<2\ .$$

- Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-3|>2$.



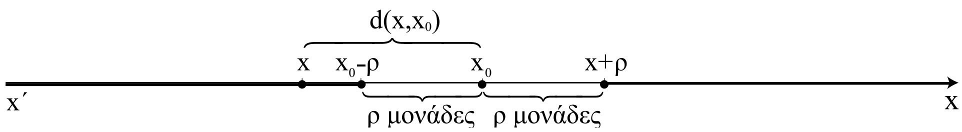
Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$\begin{aligned} |x-3|>2 &\Leftrightarrow d(x,3)>2 \\ &\Leftrightarrow x<3-2 \text{ ή } x>3+2 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty,\ 3-2)\cup(3+2,\ +\infty). \end{aligned}$$

Γενικά:

> Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:
> $$\begin{aligned} |x-x_0|>\rho &\Leftrightarrow x \in (-\infty,\ x_0-\rho)\cup(x_0+\rho,\ +\infty) \\ &\Leftrightarrow x<x_0-\rho \text{ ή } x>x_0+\rho \end{aligned}$$

Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > \rho$ αντιστοιχούν σε σημεία Μ(x) του άξονα x′x που απέχουν από το σημείο $K(x_0)$ απόσταση μεγαλύτερη του ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, η τελευταία ισοδυναμία παίρνει τη μορφή:

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$$

Για παράδειγμα:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi - 3|$ **ii)** $|\pi - 4|$

iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi|$ **iv)** $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right|$.

2. Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x - 3| + |x - 4|$$

3. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x - 3| - |4 - x|$, όταν:

i) $x < 3$ **ii)** $x > 4$.

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha}\right|$.

5. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}.$$

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ		
Απόλυτη Τιμή	**Απόσταση**	**Διάστημα ή ένωση διαστημάτων**
$\|x-4\| \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2,6]$
$\|x+3\| < 4$		
$\|x-4\| > 2$		
$\|x+3\| \geq 4$		
	$d(x,5) < 1$	
	$d(x,-1) > 2$	
	$d(x,5) \geq 1$	
	$d(x,-1) \leq 2$	
		$(-2, 2)$
		$[-5, 1]$
		$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
		$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha-\beta| \leq |\alpha-\gamma| + |\gamma-\beta|$.

2. Αν $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ **ii)** $\beta = \dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

3. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y:

i) Η ισότητα $|x| + |y| = 0$; **ii)** Η ανισότητα $|x| + |y| > 0$;

4. Έστω $0 < \alpha < \beta$.

i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$1, \ \frac{\alpha}{\beta} \ \text{και} \ \frac{\beta}{\alpha}.$$

ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ό,τι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$.

5. Αν $|x - 2| < 0{,}1$ και $|y - 4| < 0{,}2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων: