

Συνεπαγωγή, επαγωγή, «ή», «και»

1.5 Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α), αν αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό α , ή ως ψευδή (Ψ) σε κάθε άλλη περίπτωση:

- α) $\alpha^2 = 25 \Rightarrow \alpha = 5$
- β) $\alpha = 4 \Rightarrow \alpha^2 = 16$
- γ) $\alpha^2 = 100 \Leftrightarrow (\alpha = 10 \text{ ή } \alpha = -10)$
- δ) $\alpha^2 \neq 9 \Rightarrow \alpha \neq 3$
- ε) $\alpha \neq 7 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 49$
- στ) $\alpha > 3 \Rightarrow \alpha^2 > 9$
- ζ) $\alpha < 3 \Rightarrow \alpha^2 < 9$
- η) $\alpha^2 > 9 \Rightarrow \alpha > 3$
- θ) $\alpha^2 < 9 \Rightarrow \alpha < 3$
- ι) $2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha^2 = 9$
- ια) $\alpha^2 = 16 \Rightarrow 3\alpha = 12$
- ιβ) $3\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha^3 = 8$

1.6 Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α), αν αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ή ως ψευδή (Ψ) σε κάθε άλλη περίπτωση:

- α) $(\alpha = 2 \text{ και } \beta = 4) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6$
- β) $(\alpha = 3 \text{ και } \beta = 5) \Rightarrow \alpha\beta = 15$
- γ) $\alpha\beta = 21 \Rightarrow (\alpha = 3 \text{ και } \beta = 7)$
- δ) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$
- ε) $(\alpha < 2 \text{ και } \beta < 4) \Rightarrow \alpha\beta < 8$
- στ) $(\alpha \neq 2 \text{ και } \beta \neq 3) \Rightarrow \alpha + \beta \neq 5$

1.7 Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α) Ο ισχυρισμός $(x - 1)(y + 2) = 0$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό:

- A: $x = 1$ και $y = -2$
- B: $x \neq 1$ και $y \neq -2$
- Γ: $x = 1$ ή $y = -2$
- Δ: $x \neq 1$ ή $y \neq -2$.

β) Ο ισχυρισμός $x(y - 3) \neq 0$ είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό:

- A: $x = 0$ και $y = 3$
- B: $x \neq 0$ και $y \neq 3$
- Γ: $x = 0$ ή $y = 3$
- Δ: $x \neq 0$ ή $y \neq 3$

1.8 Θεωρούμε τους ισχυρισμούς:

- P: $(x - 1)(x - 2) = 0$, και
- Q: $(x - 2)(x - 3) = 0$

Να αντιστοιχίσετε τους ισχυρισμούς στη στήλη Α με τους ισοδύναμους ισχυρισμούς από τη στήλη Β:

Στήλη Α:

- α) P
- β) Q
- γ) P ή Q
- δ) P και Q

Στήλη Β:

- 1. $x = 2$
- 2. $x = 1$ και $x = 2$
- 3. $x = 1$ ή $x = 2$
- 4. $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$
- 5. $x = 2$ ή $x = 3$
- 6. $x = 2$ και $x = 3$

1.9 Δίνονται οι ισχυρισμοί:

- A: $x^2 = 9$
- B: $(x + 3)(x - 3) = 0$
- Γ: $x = 0$

Να αντιστοιχίσετε τους ισχυρισμούς στη στήλη Α με τους ισοδύναμους ισχυρισμούς στη στήλη Β.

Στήλη Α:

- α) A και B
- β) B και Γ
- γ) A και B
- δ) A ή B

Στήλη Β:

- 1. $x = 1$
- 2. $x = 3$
- 3. $x = -3$ ή $x = 3$
- 4. $x = -3$ ή $x = 1$
- 5. $x = -3$
- 6. $x = -3$ και $x = 1$ και $x = 3$
- 7. $x = -3$ ή $x = 1$ ή $x = 3$

1.10 Οι αριθμοί α και β είναι φυσικοί με $\beta \neq 0$. Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α), αν αληθεύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς α και β , ή ως ψευδή (Ψ) σε κάθε άλλη περίπτωση:

- α) Ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι φυσικός.
- β) Ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι φυσικός.
- γ) Ο αριθμός $\alpha\beta$ είναι φυσικός.
- δ) Ο αριθμός $\alpha:\beta$ είναι φυσικός.

1.11 Έστω α και β δύο περιττοί αριθμοί. Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α), ή ως ψευδή (Ψ) σε κάθε άλλη περίπτωση:

- α) Ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι άρτιος.
- β) Ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι περιττός.
- γ) Ο αριθμός $\alpha\beta$ είναι περιττός.
- δ) Ο αριθμός $\alpha + 2$ είναι περιττός.
- ε) Ο αριθμός $\frac{\alpha+1}{2}$ είναι ακέραιος
- στ) Ο αριθμός $2(\alpha + 1)$ διαιρείται με το 4.

1.12 Θεωρούμε τους ισχυρισμούς:

K: «Οι αριθμοί α και β είναι άρτιοι».
M: « $\alpha\beta > 0$ ».

Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α), αν αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ή ως ψευδή (Ψ) σε κάθε άλλη περίπτωση:

- α) $K \Rightarrow M$
- β) $\Lambda \Rightarrow M$
- γ) $M \Rightarrow K$
- δ) $M \Leftrightarrow \Lambda$
- ε) $M \Leftrightarrow (K \text{ ή } \Lambda)$

1.13 Θεωρούμε τους ισχυρισμούς:

K: Ο ακέραιος x διαιρείται με το 2
Λ: Ο ακέραιος x διαιρείται με το 3
M: Ο ακέραιος x διαιρείται με το 6

Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α), αν αληθεύει για όλους τους ακέραιους x , ή ως ψευδή (Ψ) σε κάθε άλλη περίπτωση:

- α) $M \Rightarrow K$
- β) $M \Rightarrow \Lambda$
- γ) $K \Rightarrow M$.
- δ) $\Lambda \Leftrightarrow M$
- ε) $M \Leftrightarrow (K \text{ ή } \Lambda)$
- στ) $M \Leftrightarrow (K \text{ και } \Lambda)$

1.14 Θεωρούμε τους ισχυρισμούς:

K: «Οι α, β είναι θετικοί αριθμοί»
Λ: $\alpha + \beta > 0$
M: $\alpha\beta > 0$

Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α), αν αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ή ως ψευδή (Ψ) σε κάθε άλλη περίπτωση:

- α) $K \Rightarrow \Lambda$
- β) $M \Rightarrow K$
- γ) $M \Rightarrow \Lambda$
- δ) $K \Rightarrow M$
- ε) $\Lambda \Rightarrow M$
- στ) $\Lambda \Rightarrow K$
- ζ) $K \Leftrightarrow (\Lambda \text{ και } M)$
- η) $K \Leftrightarrow (\Lambda \text{ ή } M)$

1.21 Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τις επόμενες προτάσεις ως αληθή (Α) ή ως ψευδή (Ψ).

- α) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$.
- β) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$
- γ) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$
- δ) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

1.22 α) Το κλάσμα $\frac{1}{(x-1)/(x+2)}$ ορίζεται όταν:

A: $x \neq 1$ ή $x \neq -2$

B: $x = 1$ ή $x = -2$

Γ: $x \neq 1$ και $x \neq -2$

Δ: $x = 1$ και $x = -2$

β) Το κλάσμα $\frac{1}{(x+3)/(x-2)}$ ορίζεται όταν:

A: $x \neq -3$ ή $x \neq 2$

B: $x = -3$ ή $x = 2$

Γ: $x \neq -3$ και $x \neq 2$

Δ: $x = -3$ και $x = 2$

1.23 Θεωρούμε τους ισχυρισμούς:

P: $\alpha = \beta$

Q: $3\alpha = 3\beta$

S: $\alpha + 3 = \beta + 3$

T: $\alpha^2 = \beta^2$

Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α), αν αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ή ως ψευδή (Ψ) σε κάθε άλλη περίπτωση.

α) $P \Rightarrow Q$

β) $S \Rightarrow P$

γ) $Q \Rightarrow S$

δ) $P \Rightarrow T$

ε) $T \Rightarrow P$

ζ) $S \Rightarrow T$

Σύνολα

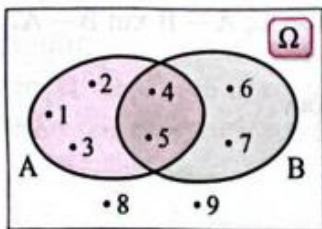
2.15 Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

- α) $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 5\}$
 β) $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x < 2\}$
 γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} / -2 \leq x \leq 3\}$
 δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{N} / x^3 = 4x\}$
 ε) $E = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 = 9x\}$

2.16 Να γράψετε τα παρακάτω σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους:

- α) $\{(x, y) / x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \text{ και } x + y = 4\}$
 β) $\{(x, y) / x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \text{ και } xy = 12\}$

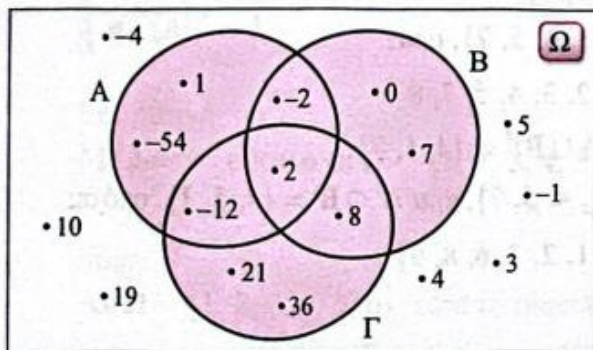
2.17 Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα Venn.



Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

- α) A β) B γ) $A \cup B$
 δ) $A \cap B$ ε) Ω στ) A'
 ζ) $(A \cup B)'$ η) $(A \cap B)'$ θ) $A - B$

2.18 Στο επόμενο σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ένα βασικό σύνολο Ω και τρία υποσύνολά του A , B και Γ .



α) Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των συνόλων A , B και Γ ;

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

- i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$
 iii) $A \cup (B \cap \Gamma)$ iv) $A \cap B \cap \Gamma$
 v) A' vi) $A - B$
 vii) $A - \Gamma$ viii) $A - (B \cap \Gamma)$

2.19 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{και } \Gamma = \{1, 4, 7\}$$

Να βρείτε τα σύνολα:

- α) $A \cup B$ β) $A - \Gamma$
 γ) $B \cap \Gamma$ δ) $(A \cap B) \cup \Gamma$
 ε) $(A \cap \Gamma) \cap B$ στ) $(A \cup B) \cap \Gamma$

2.20 Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και τα υποσύνολά του:

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{και} \quad B = \{3, 4\}$$

α) Να βρείτε τα σύνολα:

- i) A' ii) $(A \cap B)'$ iii) $(A \cup B)'$
 iv) $A' \cup B$ v) $A \cap B'$ vi) $B - A'$

β) Να γράψετε το σύνολο:

$$\Gamma = \{(x, y) / x \in A \text{ και } y \in B\}$$

με αναγραφή των στοιχείων του.

2.21 Δίνεται το βασικό σύνολο:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$$

και τα υποσύνολά του $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 5\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x \leq 8\}$. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

- α) $A \cup B$ β) $A \cap B$ γ) A'
 δ) $B - A$ ε) $(A \cup B)'$ στ) $A \cup B'$
 ζ) $A' - B$ η) $A' \cup B'$ θ) $(A - B)'$

2.22 Θεωρούμε τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 12\}$$

και:

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 18\}$$

- α) Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.
 β) Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $A - B$.

2.22 Θεωρούμε τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 12\}$$

και:

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 18\}$$

- α) Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.
β) Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $A - B$.

2.23 Θεωρούμε ως βασικό σύνολο το:

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$$

καθώς και τα υποσύνολά του $A = \{x \in \Omega / x \text{ άρτιος}\}$ και $B = \{x \in \Omega / x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$.

- α) Να παραστήσετε τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.
β) Να βρείτε τα σύνολα:
i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) A'
iv) $B - A$ v) $(A \cup B)'$ vi) $A \cap B'$

2.24 Με βασικό σύνολο το:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

θεωρούμε τα υποσύνολά του:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{και} \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα:

- α) $(A \cup B)'$ και $A' \cap B'$ β) $(A \cap B)'$ και $A' \cup B'$
γ) $A - B$ και $A \cap B'$
δ) $(A \cup B) - (A \cap B)$ και $(A - B) \cup (B - A)$

2.25 Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, x - y, x + y\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$. Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα σύνολα A και B να είναι ίσα.

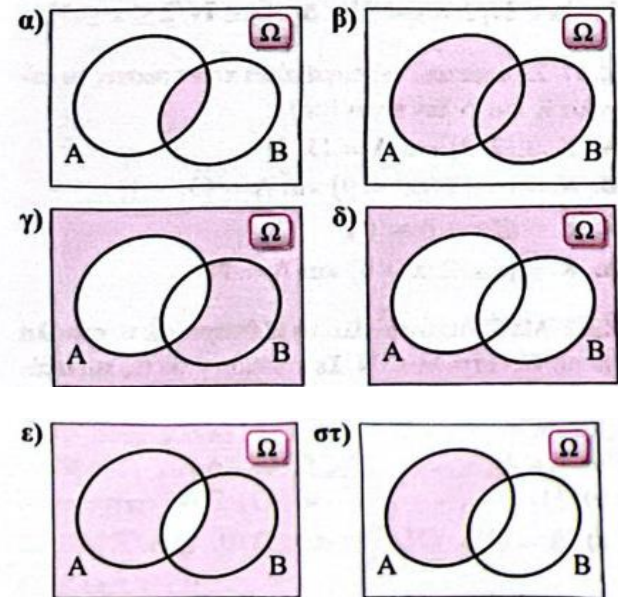
2.26 Με βασικό σύνολο το $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, x\}$ και $B = \{1, x - 1, 6 - x\}$, με $x \neq 1$, για τα οποία ισχύει ότι $A \subseteq B$.

- α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x.
β) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:
i) $A \cap B$ ii) $A \cup B$ iii) $A - B$
iv) $A' - B'$ v) $(B - A)'$ vi) $A' \cap B'$

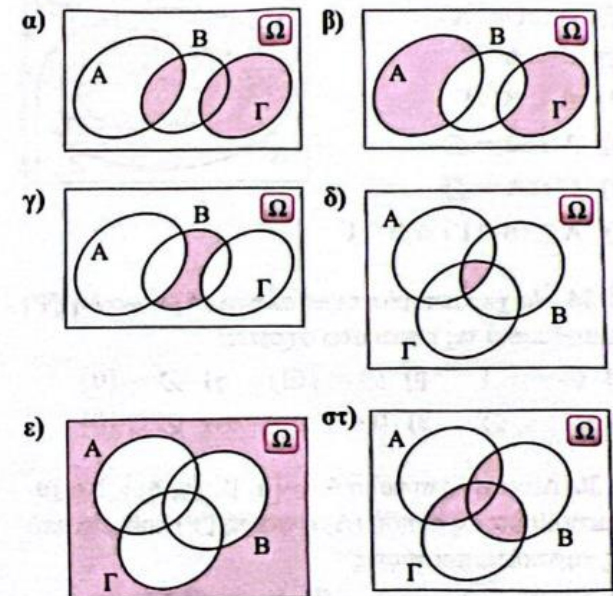
2.27 Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του συνόλου:

- α) $A = \{x, y\}$ β) $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

2.28 Να εκφράσετε ως πράξεις μεταξύ των A και B τα σύνολα που αντιστοιχούν στα χρωματισμένα μέρη των επόμενων διαγραμμάτων Venn.



2.29 Να γράψετε με τη βοήθεια των συνόλων A, B, Γ, A', B' και Γ' τα ενδεχόμενα που είναι χρωματισμένα σε καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα Venn.



2.30 Για τα σύνολα A και B ισχύει ότι:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap B = \{4, 6\} \quad \text{και}$$

$$A - B = \{1, 3, 5\}$$

Να βρείτε τα σύνολα A και B.

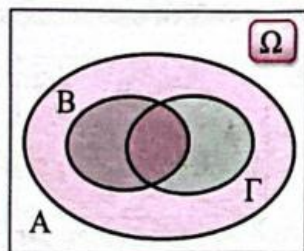
2.31 Αν A και B είναι δύο σύνολα, να χαρακτηρίσετε ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) καθεμία από τις επόμενες σχέσεις:

- α) $A \subseteq A \cup B$ β) $B \subseteq A \cap B$
 γ) $A \cap B \subseteq A$ δ) $A \cup B \subseteq B$
 ε) $A \cap B \subseteq A \cup B$ στ) $A - B \subseteq A$
 ζ) $A - B \subseteq B$ η) $\emptyset \subseteq A$

2.32 Δίνεται το σύνολο $A = \{0, 1\}$. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

2.33 Με τη βοήθεια του παρακάτω διαγράμματος Venn να χαρακτηρίσετε ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

- α) $A \cap B = B$
 β) $A \cup \Gamma = A$
 γ) $B \subseteq A$
 δ) $A \subseteq B \cup \Gamma$
 ε) $A' \cap B = \emptyset$
 στ) $\Gamma' \cap A = \emptyset$
 ζ) $A \cap (B \cap \Gamma) = B \cap \Gamma$



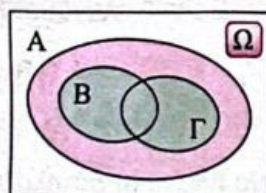
2.34 Να χαρακτηρίσετε ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

- α) $\emptyset = \{ \}$ β) $\emptyset = \{\emptyset\}$ γ) $\emptyset = \{0\}$
 δ) $\{ \} \subseteq \emptyset$ ε) $0 \in \emptyset$ στ) $\emptyset \subseteq \{0\}$

2.35 Δίνεται το σύνολο $A = \{a, \beta, \{\gamma, \delta\}\}$. Να χαρακτηρίσετε ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

- α) $\{a, \beta\} \subseteq A$ β) $\{\gamma, \delta\} \subseteq A$
 γ) $\{a\} \in A$ δ) $\{\gamma, \delta\} \in A$

2.36 Έστω A , B και Γ υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω τα οποία φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα Venn. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):



- α) $A \subseteq \Gamma$ β) $B \subseteq A$
 γ) $B \cup \Gamma \subseteq A$ δ) $A \cup B = A$
 ε) $A \cap \Gamma = A$
 ς) $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) = B \cup \Gamma$
 ζ) $(B \cup \Gamma) \cap A' = \emptyset$
 η) $(A - B) \cap (A - \Gamma) = \emptyset$

2.37 Δίνονται τα σύνολα:

$$K = \{1, 2, 3, 4\} \text{ και } \Lambda = \{2, 3, 4, 5\}$$

Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι υποσύνολο του συνόλου $K \cap \Lambda$;

- A: $\{1, 2, 3\}$ B: $\{3, 4, 5\}$
 Γ: $\{2, 3\}$ Δ: $\{5\}$

2.38 Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσο με το κενό σύνολο;

- A: $\{x \in \mathbb{N} / x^2 - 16 = 0\}$
 B: $\{x \in \mathbb{Q} / 4x^2 - 1 = 0\}$
 Γ: $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3 = 0\}$
 Δ: $\{x \in \mathbb{Q} / x^2 - 2 = 0\}$

2.39 Έστω $K = \{x, y\}$ και $\Lambda = \{y, x\}$. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι λανθασμένη;

- A: $K \subseteq \Lambda$ B: $K = \Lambda$
 Γ: $K \cap \Lambda = K$ Δ: $K - \Lambda = K$

2.40 Από τα παρακάτω σύνολα, ίσο με το κενό είναι το:

- A: $\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$ B: $\{x \in \mathbb{N} / 1 < x < 3\}$
 Γ: $\{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 3\}$ Δ: $\{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x \leq 3\}$

2.41 Σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις τα σύνολα K και Λ δεν είναι ίσα;

- A: $K = \{2, 3\}$ και $\Lambda = \{3, 2\}$
 B: $K = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = 9\}$ και $\Lambda = \{3, -3\}$
 Γ: $K = \emptyset$ και $\Lambda = \{ \}$
 Δ: $K = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 0\}$ και $\Lambda = \mathbb{N}$

2.42 Με βασικό σύνολο το Ω θεωρούμε τα σύνολα M και N , ώστε $M \subseteq N$. Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση:

α) Το σύνολο $M \cap N$ είναι ίσο με:

A: M B: N Γ: Ω Δ: \emptyset

β) Το σύνολο $M \cup N$ είναι ίσο με:

A: M B: N Γ: Ω Δ: \emptyset

γ) Το σύνολο $M - N$ είναι ίσο με:

A: M B: N Γ: Ω Δ: \emptyset

δ) Το σύνολο $(M - N)'$ είναι ίσο με:

A: M B: N Γ: Ω Δ: \emptyset

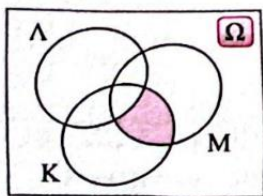
2.43 Στο διπλανό διάγραμμα Venn η χρωματισμένη περιοχή παριστάνει το σύνολο:

A: $(K \cup M) - \Lambda$

B: $M - (K \cup \Lambda)$

Γ: $(K \cap M) - \Lambda$

Δ: $M - (K \cap \Lambda)$



2.44 Στο διπλανό διάγραμμα Venn η χρωματισμένη περιοχή παριστάνει το σύνολο:

A: $K \cap (\Lambda \cup M)$

B: $K - (\Lambda \cup M)$

Γ: $K - (\Lambda \cap M)$

Δ: $K - (\Lambda - M)$

