2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

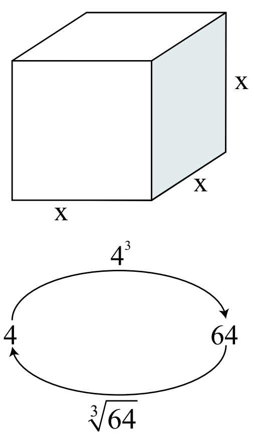
Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών γνωρίσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού



Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κυβική δεξαμενή χωρητικότητας 64 κυβικών μέτρων και ζητάμε την πλευρά της. Αν x μέτρα είναι η πλευρά της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα είναι x^3 κυβικά μέτρα και επομένως θα ισχύει: $x^3 = 64$.

Αναζητούμε λοιπόν έναν αριθμό x που, όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 64. Ο αριθμός αυτός, αφού παριστάνει μήκος, πρέπει να είναι θετικός. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 4, διότι $4^3 = 64$.

Ο αριθμός 4 λέγεται **τρίτη ρίζα** του 64 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{64}$. Δηλαδή $\sqrt[3]{64} = 4$. Η τρίτη ρίζα ενός αριθμού λέγεται και **κυβική ρίζα** του αριθμού αυτού.
Γενικεύοντας τώρα τα παραπάνω για **κάθε θετικό ακέραιο ν**, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός[(1)] που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Επίσης γράφουμε

$$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha \text{ και } \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}.$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι $10^4 = 10000$, οπότε $\sqrt[4]{10000} = 10$. Είναι επίσης και $(-10)^4 = 10000$. Όμως, δεν επιτρέπεται να γράφουμε $\sqrt[4]{10000} = -10$, αφού, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η $\sqrt[4]{10000}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^4 = 10000$.

Ιδιότητες των ριζών

Από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α, συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha \text{ και } \sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha.$$

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|.$$

[(1)] Αποδεικνύεται ότι υπάρχει και είναι μοναδικός.

Για παράδειγμα:

$$\sqrt[6]{2^6} = 2, \text{ ενώ } \sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2.$$

Ισχύουν όμως και οι ακόλουθες ιδιότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας:

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta \neq 0$)

3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$

4. $\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta})^\nu = (\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta})^\nu \\ &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu \cdot (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha \cdot \beta \\ &\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta, \qquad \text{που ισχύει.} \end{aligned}$$

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

3. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha} &\Leftrightarrow (\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}})^{\mu \cdot \nu} = (\sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha})^{\mu \cdot \nu} \\ &\Leftrightarrow \left[(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}})^\mu \right]^\nu = \alpha \\ &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

4. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^\mu)^\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η ιδιότητα 1. ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[\nu]{\alpha_\kappa}=\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\kappa}$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\kappa=\alpha\geq 0$, ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=(\sqrt[\nu]{\alpha})^\kappa,$$

οπότε, λόγω της ιδιότητας 1, για $\alpha, \beta\geq 0$ έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}.$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, που $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποίες θα ονομάσουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.

Τι θα πρέπει, για παράδειγμα, να σημαίνει το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $(\alpha^p)^q=\alpha^{pq}$ και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^5=3^{\frac{2}{5}\cdot 5}=3^2$.

Άρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^5=3^2$.

Δηλαδή πρέπει να είναι $3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\boldsymbol{\alpha>0}$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$. Για παράδειγμα:

$$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4 \qquad \text{και} \qquad 27^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{27^{-4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}}=\frac{1}{3^4}.$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι έχουμε για παράδειγμα:

$$\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha}=\alpha^{\frac{1}{4}}\cdot\alpha^{\frac{1}{3}}=\alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=\alpha^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{\alpha^7}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$$\alpha<\beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}<(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow \alpha<\beta, \qquad \text{που ισχύει.}$$

2. Να τραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στους παρονομαστές:

i) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ **ii)** $\dfrac{10}{\sqrt{5}-1}$ **iii)** $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

i) $$\frac{15}{\sqrt{3}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}.$$

ii) $$\frac{10}{\sqrt{5}-1}=\frac{10(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{10(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{10(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

iii) $$\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=3(\sqrt{7}-\sqrt{5}).$$

3. Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40}=10.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40}=10^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot40^{\frac{1}{6}}=(2\cdot5)^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot(2^3\cdot5)^{\frac{1}{6}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{3}{6}}\cdot5^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{6}}$$
$$=2^{1}\cdot5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2\cdot5=10.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[5]{100000}$.

ii) $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$.

iii) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt[3]{0,001}$, $\sqrt[4]{0,0001}$, $\sqrt[5]{0,00001}$.

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά:

i) $\sqrt{(\pi-4)^2}$ **ii)** $\sqrt{(-20)^2}$ **iii)** $\sqrt{(x-1)^2}$ **iv)** $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$.

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=1.$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3})\cdot(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=-8.$$

5. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\sqrt{8}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32})=-14$

ii) $(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32})\cdot(\sqrt{63}-\sqrt{32})=31$.

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=2$

ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=2$.

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$

ii) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$.

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3\cdot\sqrt[12]{3}$ **ii)** $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2\cdot\sqrt[18]{2^{13}}$ **iii)** $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=25\cdot\sqrt{5}$.

9. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}}=10$ **ii)** $\frac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}}=18$.

10. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές:

i) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ **ii)** $\dfrac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ **iii)** $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$.

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}}=16$ **ii)** $\sqrt{\dfrac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^{6}}}=3$,

αφού αναλύσετε τα υπόρριζα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+\sqrt{6}$$

ii) Αν α, β > 0 να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}.$$

2. i) Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$(3+2\sqrt{7})^2$ και $(3-2\sqrt{7})^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{37+12\sqrt{7}}-\sqrt{37-12\sqrt{7}}=6.$$

3. i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός.

ii) Αν α θετικός ρητός, να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha}+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός.

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=4$ **ii)** $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}-\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^2}=8\sqrt{3}$.

5. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι $AB=\sqrt{\alpha}$ και $A\Gamma=\sqrt{\beta}$.

i) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.

ii) Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

iii) Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.
Πότε ισχύει η ισότητα;