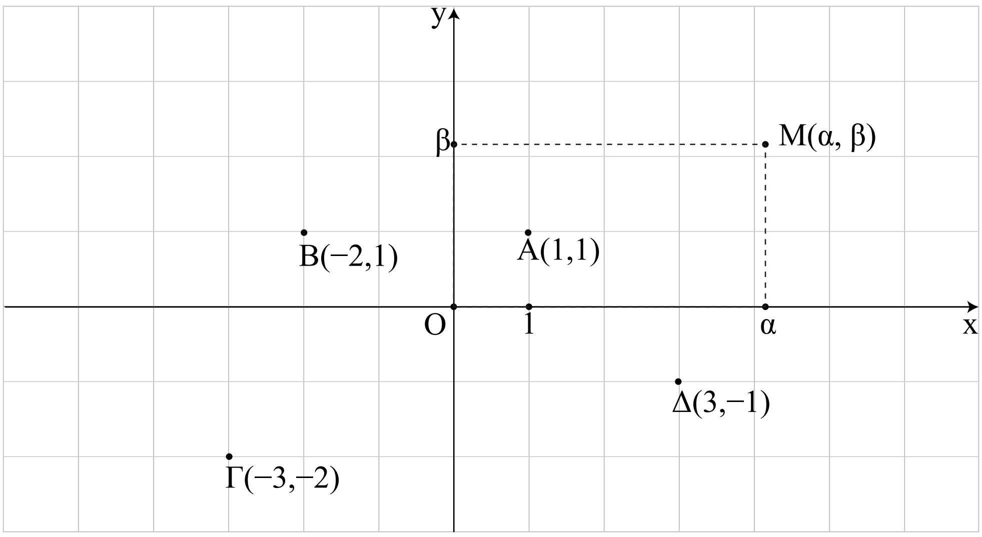
6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών βοήθησε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Η παράσταση αυτή, όπως μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις, γίνεται ως εξής:

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή ένα σημείο Ο. Από αυτούς ο οριζόντιος $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x**, ενώ ο κατακόρυφος $y'y$ **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y**.

Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο Μ του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Οι αριθμοί **α, β** λέγονται **συντεταγμένες** του Μ. Ειδικότερα ο **α** λέγεται **τετμημένη** και ο **β τεταγμένη** του σημείου Μ. Το σημείο Μ που έχει συντεταγμένες **α** και **β** συμβολίζεται με **Μ(α, β)** ή, απλά, με **(α, β)**.

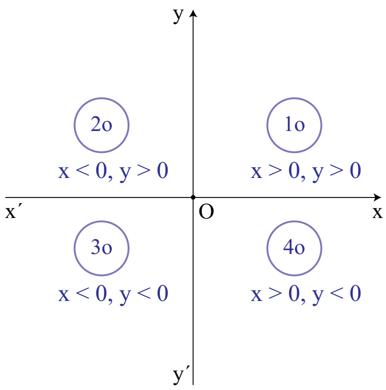
Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy, ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

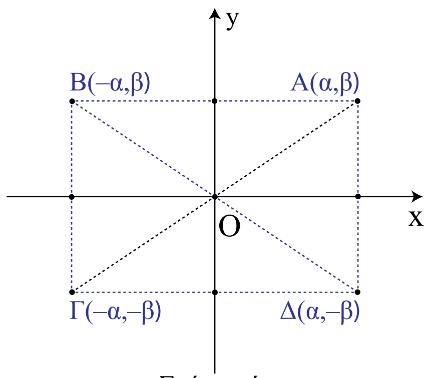
Στα επόμενα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν λέμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα εννοούμε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων στο επίπεδο. Τότε:

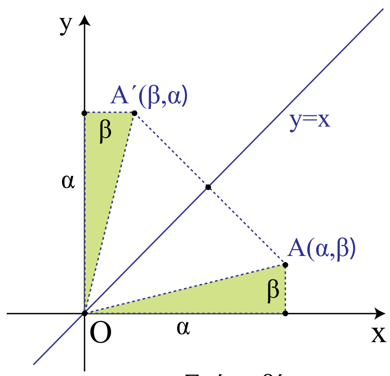
- Τα σημεία του άξονα $x'x$ και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα $y'y$ και μόνο αυτά έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $x\hat{O}y$, $y\hat{O}x'$, $x'\hat{O}y'$ και $y'\hat{O}x$ και ονομάζεται 1ο, 2ο, 3ο και 4ο, τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



- Αν Α(α,β) είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:
  - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο Δ(α,–β), που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη (Σχ. α').
  - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο Β(–α,β), που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη (Σχ. α').
  - ✓ Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Γ(–α,–β), που έχει αντίθετες συντεταγμένες (Σχ. α').
  - ✓ Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α'(β,α) που έχει τετμημένη την τεταγμένη του Α και τεταγμένη την τετμημένη του Α (Σχ. β').



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

Απόσταση σημείων

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία αυτού. Θα δείξουμε ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

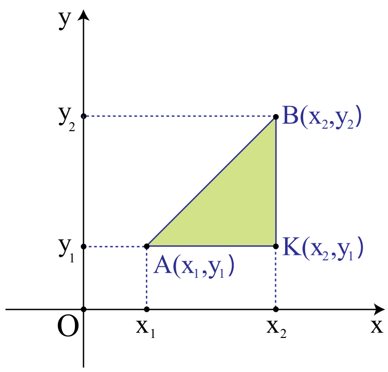
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\hat{A}B$ του διπλανού σχήματος έχουμε:

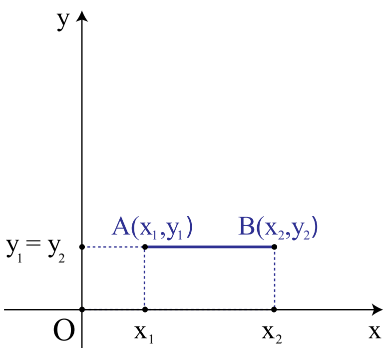
$$\begin{aligned}(AB)^2&=(KA)^2+(KB)^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\end{aligned}$$

οπότε:

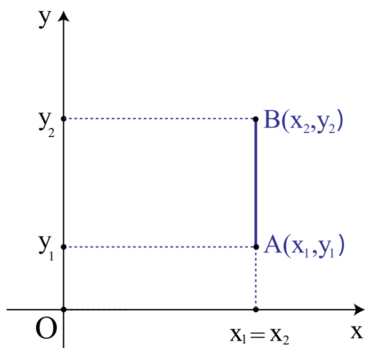
$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η AB είναι παράλληλη με τον άξονα x′x (Σχήμα γ′) ή παράλληλη με τον άξονα y′y (Σχήμα δ′).



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Για παράδειγμα, αν A(3,1), B(3,5) και Γ(−1,1) είναι οι κορυφές ενός τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$, τότε θα είναι:

$$(AB)=\sqrt{(3-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{4^2}=4$$

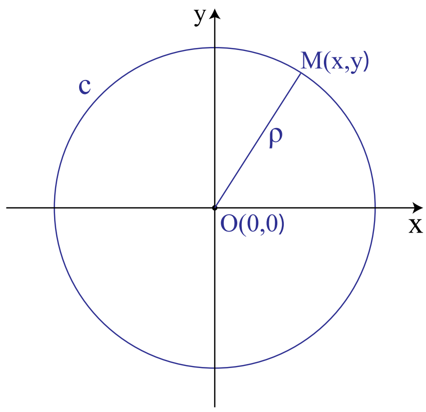
$$(A\Gamma)=\sqrt{(-1-3)^2+(1-1)^2}=\sqrt{4^2}=4$$

$$(B\Gamma)=\sqrt{(-1-3)^2+(1-5)^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}.$$

Αφού, λοιπόν, είναι (ΑΒ) = (ΑΓ), το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι ισοσκελές και επειδή επιπλέον ισχύει $(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 = 32 = (\mathrm{B\Gamma})^2$, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι και ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω C ο κύκλος με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα ρ. Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο Μ(x, y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει $x^2 + y^2 = \rho^2$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι προφανές ότι ένα σημείο Μ(x,y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει (ΟΜ) = ρ.

Όμως $(\mathrm{OM}) = \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε έχουμε:

$$(\mathrm{OM}) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$$

Επομένως το σημείο Μ (x,y) ανήκει στον κύκλο C (O,ρ), αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση

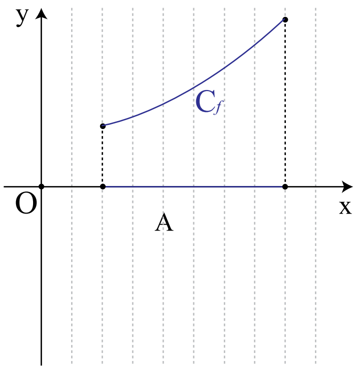
$$\mathbf{x^2 + y^2 = \rho^2} \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1), που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων του κύκλου C (O, ρ) και μόνο από αυτές, λέγεται **εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ.**
Για παράδειγμα, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 1 είναι η $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται και **μοναδιαίος κύκλος**.

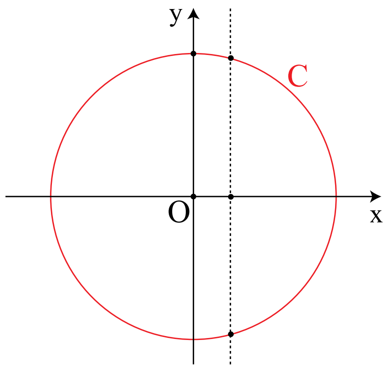
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων Μ(x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f. Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με $y = f(x)$.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β').

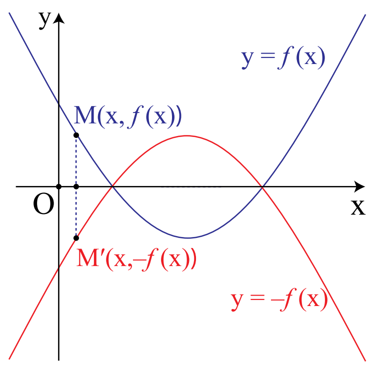


Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x′x και τούτο διότι η γραφική παράσταση της $-f$ αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x′x.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, που είναι ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία:

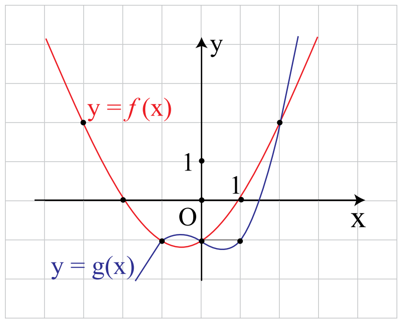
$$-3, -2, -1, 0, 1 \text{ και } 2$$

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x) = 0,\ f(x) = 2 \text{ και } f(x) = g(x)$$

iii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$f(x) > 0 \text{ και } f(x) > g(x).$$



ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$$f(-3)=2,\ f(-2)=0,\ f(-1)=-1,\ f(0)=-1,\ f(1)=0 \text{ και } f(2)=2.$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα x′x, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-2$ και $x_2=1$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 2, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-3$ και $x_2=2$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, δηλαδή οι αριθμοί $x_1=-1$, $x_2=0$ και $x_3=2$.

iii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x′x, δηλαδή όλα τα $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

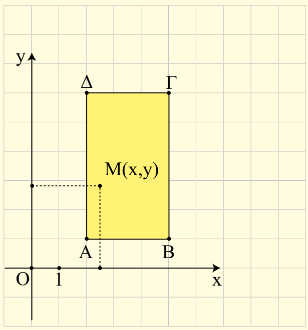
Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, δηλαδή όλα τα $x\in(-\infty,-1)\cup(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

$$A(-1,2),\ B(3,4),\ O(0,0),\ \Gamma(3,0),\ \Delta(0,-5) \text{ και } E(-2,-3).$$

2. Ένα σημείο M(x,y) κινείται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος. Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y;



3. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A(−1,3),

i) ως προς τον άξονα x′x

ii) ως προς τον άξονα y′y

iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

iv) ως προς την αρχή O των αξόνων.

4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

i) O(0,0) και A(4,−2)

ii) A(−1,1) και B(3,4)

iii) A(−3,−1) και B(1,−1)

iv) A(1,−1) και B(1,4).

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία Α(1,2), Β(4,−2) και Γ(−3,5) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Τα σημεία Α(1,−1), Β(−1,1) και Γ(4,2) είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

6. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία:

$$Α(2,5),\ \ Β(5,1),\ \ Γ(2,-3),\ \ Δ(-1,1)$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

7. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

i) $f(x)=x^2+k$, Μ(2,6)

ii) $g(x)=kx^3$, Μ(−2,8)

iii) $h(x)=k\sqrt{x+1}$, Μ(3,8).

8. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

i) $f(x)=x-4$ **ii)** $g(x)=(x-2)(x-3)$

iii) $h(x)=(x-1)^2$ **iv)** $q(x)=x^2+x+1$

v) $φ(x)=x\sqrt{x-1}$ **vi)** $ψ(x)=x\sqrt{x^2-4}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-1$. Να βρείτε:

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-5x+4$ και $g(x)=2x-6$. Να βρείτε:

i) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.