2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, ορίστηκαν ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε **β < α**.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

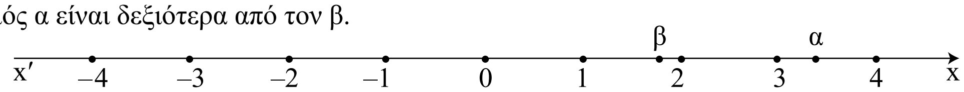
• Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.

• Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Γεωμετρικά η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β.



Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\boldsymbol{\alpha \geq \beta}$ και διαβάζουμε: **«α μεγαλύτερος ή ίσος του β»**.

Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

$$(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$
$$(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

$$\alpha, \beta \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

$$\alpha, \beta \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
(Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

Από την τελευταία εύκολα προκύπτουν και οι ισοδυναμίες:

$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0}$$
$$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0}$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία $\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$, μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$

2.
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3.
- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή:
  $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Η ιδιότητα 3 ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Συγκεκριμένα:

✓ $(\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και } \ldots \text{ και } \alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$

✓ Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι **θετικοί** αριθμοί, τότε:
$(\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και } \ldots \text{ και } \alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$ (*)

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε και την παρακάτω ιδιότητα.

4. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Έστω $\alpha > \beta$. Τότε, από τη (*), για

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu = \alpha > 0 \text{ και } \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_\nu = \beta > 0,$$

προκύπτει ότι: $\alpha^\nu > \beta^\nu$.

• Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$ και $\alpha \leq \beta$. Τότε:

✓ αν ήταν $\alpha = \beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ

✓ αν ήταν $\alpha < \beta$, θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

Άρα, $\alpha > \beta$.

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας θα αποδείξουμε τώρα ότι:

Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Έστω $\alpha = \beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$.

• Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:

✓ αν ήταν $\alpha > \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ

✓ αν ήταν $\alpha < \beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

Άρα, $\alpha = \beta$.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι

$$10 > 6 \text{ και } 7 > 2, \text{ αλλά } 10 - 7 < 6 - 2.$$

2ο Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση. Για παράδειγμα, είναι

$$24 > 10 \text{ και } 6 > 2, \text{ αλλά } \frac{24}{6} < \frac{10}{2}.$$

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$ λέγεται **κλειστό διάστημα από α μέχρι β** και συμβολίζεται με **[α, β]**.

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα **[α, β]** παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β** που συμβολίζεται με **(α, β)**.

Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των **α** και **β** λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.

Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.

Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα [α, β)** που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha \leq x < \beta}$ και

✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα (α, β]** που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha < x \leq \beta}$.

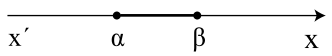
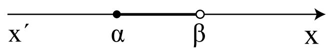
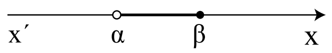
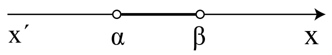
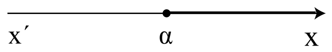
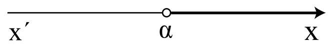
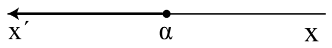
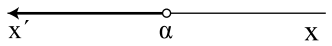
Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha \leq x}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{[\alpha, +\infty)}$, ενώ

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{x \leq \alpha}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{(-\infty, \alpha]}$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα $\boldsymbol{(\alpha, +\infty)}$ και $\boldsymbol{(-\infty, \alpha)}$. Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται **«συν άπειρο»** και **«πλην άπειρο»** αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους:

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχθεί ότι:

i) Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\boldsymbol{\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}}$

ii) Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta}$

iii) Αν $\boldsymbol{\alpha > 0}$**, τότε** $\boldsymbol{\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αφού α, β είναι ομόσημοι αριθμοί έχουμε $\alpha\beta > 0$. Επομένως ισχύει:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

ii) Έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

iii) Έχουμε:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

2. Αν $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$ και $-\frac{2}{3}<y<\frac{5}{6}$, να αποδειχθεί ότι:

$$-11<8x-12y+3<17.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ανισότητα $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$ έχουμε διαδοχικά:

$$8\left(-\frac{1}{2}\right)<8x<8\cdot\frac{3}{4}$$

$$-4<8x<6 \qquad (1)$$

Ομοίως από την $-\frac{2}{3}<y<\frac{5}{6}$ έχουμε διαδοχικά:

$$12\left(-\frac{2}{3}\right)<12y<12\cdot\frac{5}{6}$$

$$-8<12y<10$$

$$8>-12y>-10$$

$$-10<-12y<8 \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), που έχουν την ίδια φορά, και έχουμε:

$$-14<8x-12y<14,$$

οπότε θα ισχύει:

$$-14+3<8x-12y+3<14+3$$

Άρα $$-11<8x-12y+3<17$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2+9\geq 6\alpha$ **ii)** $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$

2. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1\geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $(x-2)^2+(y+1)^2=0$ **ii)** Αν $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

4. Αν $4{,}5<x<4{,}6$ και $5{,}3<y<5{,}4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $x+y$ **ii)** $x-y$ **iii)** $\frac{x}{y}$ **iv)** x^2+y^2

5. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2<x<3$ και $3<y<5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές:

i) της περιμέτρου **ii)** του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

6. Αν $0\le\alpha<\beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}$.

7. Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Έστω $x>5$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$x>5$$
$$5x>25$$
$$5x-x^2>25-x^2$$
$$x(5-x)>(5+x)(5-x)$$
$$x>5+x$$
$$0>5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ με θετικούς όρους και ένας θετικός αριθμός γ. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\frac{\alpha}{\beta}<1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}>\frac{\alpha}{\beta}$

ii) Αν $\frac{\alpha}{\beta}>1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<\frac{\alpha}{\beta}$

2. Αν $\alpha>1>\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta>1+\alpha\beta$.

3. Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\ge 4$.

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\ge 0$ **ii)** $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\ge 0$