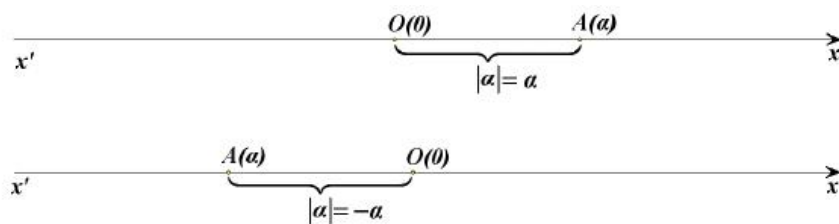


23 Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα.



Η απόσταση του σημείου A από την αρχή O (δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA) ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και την συμβολίζεται με $|\alpha|$.

Έτσι, προκύπτει ότι:

- Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει:

$$|\alpha| = \alpha$$

Δηλαδή η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού ισούται με τον εαυτό της

- Για κάθε $\alpha < 0$ ισχύει:

$$|\alpha| = (-1) \cdot \alpha = -\alpha$$

Δηλαδή η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού ισούται με τον αντίθετό της (σε πρόσημο)

- Για κάθε $\alpha = 0$ ισχύει:

$$\text{Το } |\alpha| = \alpha \text{ γίνεται } |0| = 0$$

Δηλαδή η απόλυτη τιμή του μηδενός ισούται με τον εαυτό του

Απόλυτη τιμή

Άρα, η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \\ \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Παραδείγματα

✓ $|2| = 2$
✓ $|-3| = 3$
✓ $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

✓ $\left|\frac{11}{5}\right| = \frac{11}{5}$
✓ $\left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}$
✓ $|0| = 0$

Συμπεράσματα

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|a| = |-a| \geq 0$
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$
- $|a|^2 = a^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$ (1)
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$ (2)

Παραδείγματα

- ✓ Το $|x| = 5$ λύνεται ως

$$|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = -5 \quad (\text{βάση της 1})$$

- ✓ Το $|x| = |3|$ λύνεται ως

$$|x| = |3| \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3 \quad (\text{βάση της 2})$$

- ✓ Το $|x - 1| = 2$ λύνεται ως

$$\begin{aligned} |x - 1| = 2 &\Leftrightarrow \\ x - 1 = 2 \text{ ή } x - 1 = -2 &\Leftrightarrow \\ x = 3 \text{ ή } x = -1 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

(βάση της 1)

- ✓ Το $|a - \beta| = |2\alpha - 3\beta|$ λύνεται ως

$$\begin{aligned} |a - \beta| &= |2\alpha - 3\beta| \Leftrightarrow \\ a - \beta &= 2\alpha - 3\beta \text{ ή } a - \beta = -(2\alpha - 3\beta) \Leftrightarrow \\ a - \beta &= 2\alpha - 3\beta \text{ ή } a - \beta = 3\beta - 2\alpha \Leftrightarrow \\ 2\alpha - \alpha &= 3\beta - \beta \text{ ή } 2\alpha + \alpha = 3\beta + \beta \Leftrightarrow \\ \alpha &= 2\beta \text{ ή } 3\alpha = 4\beta \Leftrightarrow \\ \alpha &= 2\beta \text{ ή } \alpha = \frac{4}{3}\beta \end{aligned}$$

(βάση της ιδιότητας 2)

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
2. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
4. $|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$ (χωρίς απόδειξη)

Αποδείξεις:

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, δηλ.

- $|\alpha \cdot \beta| \geq 0$ και
- $|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0$

έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$$

$$|\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \quad \text{που ισχύει.}$$

(1) Υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο

(2) $|\alpha \cdot \beta| \geq 0$ άρα και $|\alpha \cdot \beta|^2 \geq 0$,
 $|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0$ άρα και $(|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \geq 0$

(3) $|\alpha|^2 \geq 0$ άρα $|\alpha|^2 = \alpha^2$ (όμοια το β)

2. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \text{όπως και στην απόδειξη 1 (βήμα 3)}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \text{που ισχύει.}$$

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, δηλ.

- $|\alpha + \beta| \geq 0$ και
- $|\alpha| + |\beta| \geq 0$

έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow$$

$$|\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta|$$

$$\alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν:

οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι

ή

ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Απόσταση δυο αριθμών

Έστω δύο σημεία A και B . Έχουμε πει ότι 2 σημεία σχηματίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών α και β , συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και είναι ίση με $|\alpha - \beta|$. Είναι δηλαδή:

Έστω δύο αριθμοί

- $\alpha = -2$, και
- $\beta = 3$

Οι αριθμοί αυτοί απεικονίζονται στον άξονα που βλέπουμε παρακάτω με την μορφή των σημείων A και B :



Το μήκος του τμήματος AB λέγεται απόσταση των αριθμών -2 και 3 . Παρατηρούμε ότι

$$(AB) = 5$$

Δηλαδή, το -2 με το 3 απέχει 5 μονάδες ($-2 \rightarrow -1 \rightarrow -0 \rightarrow -1 \rightarrow -2 \rightarrow -3$). Καλύτερα δηλαδή να πούμε:

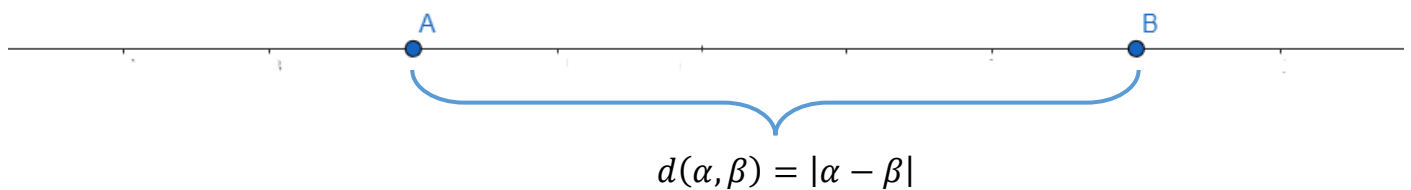
$$(AB) = 5 = |(-2) - 3| = |3 - (-2)|$$

Έτσι:

Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση των αριθμών** α και β , συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$ και είναι ίση με $|\alpha - \beta|$. Είναι δηλαδή:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$$

Φαίνεται και παρακάτω:



Απόσταση δυο αριθμών

Έστω $M(x_0)$ το μέσο του τμήματος AB τότε έχουμε τα σημεία $A(\alpha)$, $B(\beta)$ και $M(x_0)$



- Το AB είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- Αφού το M είναι το μέσο του τμήματος AB τότε τα τμήματα MA και MB είναι ίσα
 - ο $MA = d(x_0, \alpha) = |x_0 - \alpha|$
 - ο $MB = d(x_0, \beta) = |x_0 - \beta|$

και αφού είναι ίσα τότε:

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow$$

$$d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta) \Leftrightarrow$$

$$|x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta| \Leftrightarrow$$

$$x_0 - \alpha = -(x_0 - \beta) \stackrel{*}{\Leftrightarrow}$$

$$2x_0 = \alpha + \beta \Leftrightarrow$$

$$x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

- $|x_0 - \alpha| = x_0 - \alpha$ γιατί $x_0 > \alpha \Leftrightarrow x_0 - \alpha > 0$
- $|x_0 - \beta| = -(x_0 - \beta)$ γιατί $x_0 < \beta \Leftrightarrow x_0 - \beta < 0$