ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

► Παραμετρικές

9.28 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda(x-1)-3\left(x-\frac{3}{\lambda}\right)=0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον λύση για οποιαδήποτε δεκτή τιμή της παραμέτρου λ.

β) Για την τιμή του λ που η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον 2 λύσεις να λύσετε την εξίσωση:

$$\mu(x-\lambda+2)-(\mu-2)^2=(\lambda-1)(x-1) \quad (2)$$

για τις διάφορες τιμές του μ.

9.29 Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\lambda^2x=1-\lambda(x+\lambda) \quad (1)$$

$$-2\mu x=-\mu(\mu x-1)+\lambda^{2017}-\lambda^{2018} \quad (2)$$

$$\mu(\mu x+1)-\lambda(\lambda-4x)=1 \quad (3)$$

Αν οι εξισώσεις (1) και (2) είναι ταυτότητες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (3) έχει λύση τον αριθμό:

$$2016^{2017}$$

9.30 Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\lambda^2(x+1)=2\left[(\lambda-1)^2-1+8x\right] \quad (1)$$

και

$$\mu^2(x-1)(\mu-10)=5\mu\left[5(3\mu+x)-2(5x+6\mu)\right] \quad (2)$$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα και η εξίσωση (2) είναι αδύνατη, τότε:

α) να βρείτε τις τιμές των λ και μ,

β) να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x+\lambda^{\frac{1}{2}}}{\mu}-\frac{\lambda x-1}{10}+\frac{\mu x-2}{\lambda^{\frac{3}{2}}}=\frac{x+1}{4}$$

9.31 Δίνεται η εξίσωση:

$$5x-\mu+\lambda\left[(4+\lambda)x-1\right]=\kappa\left[1+x(2-\kappa)\right]$$

Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ και μ, ώστε η παραπάνω εξίσωση να είναι ταυτότητα.

9.32 Αν η εξίσωση $(\alpha+\beta-2)x=\gamma-\delta+3$ είναι ταυτότητα, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=(2\alpha-3\gamma)^3+(3\beta+2\delta)^3+(\delta-\beta-13)^3$$

9.33 Η εξίσωση:

$$\alpha(x+\beta)-\beta(2\alpha-x)=-(1-3x)$$

είναι ταυτότητα. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=\alpha^2+\beta^2$ **β)** $B=\alpha^3+\beta^3$

γ) $\Gamma=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ **δ)** $\Delta=(\alpha-\beta)^2$

9.34 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(\lambda x-1)+2x(\lambda-1)^2=2(5x-\lambda)$$

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση, να αποδείξετε ότι αυτή είναι μικρότερη από το $\frac{1}{8}$.

9.35 Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\lambda^2(x-1)=2(\lambda x+3)-5\lambda \quad (1)$$

και:

$$y(3-\lambda)(\lambda+3)=5y-(2y+1)(\lambda-2) \quad (2)$$

Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν μοναδικές λύσεις x_0 και y_0 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει:

$$x_0+y_0=1-\frac{1}{2y_0}$$

9.36 **α)** Για οποιαδήποτε $\mu,\ \nu \in \mathbb{R}$, τα οποία δεν είναι συγχρόνως μηδέν, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}\leq\frac{1}{2}$$

β) Δίνεται η εξίσωση:

$$2(2x-\alpha)(\beta^2+9)=\alpha^2\beta(3-\beta x)-3(3\alpha^2x-4\beta) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση, η οποία είναι μικρότερη ή ίση του 1.

► Με απόλυτα

10.55 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$|\alpha-3|+|3\alpha-2\beta+1|=0$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

β) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|2-x|+8^{\frac{2}{3}}}{\alpha}-\frac{|\alpha x-6|-1}{\alpha\beta}=\frac{|x-2|+6}{5}$$

10.56 **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\geq 0$$

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|x+3|=|x|+3$

ii) $|x+4029|=|x+2015|+2014$

10.57 **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\leq 0$$

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|x-2|=|x|+2$

ii) $|2x-37|=|2x-16|+21$

10.58 **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$\big||\alpha|-|\beta|\big|=|\alpha+\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\leq 0$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\big||x+2|-5\big|=|x+7|$$

10.59 **α)** Να αποδείξετε ότι:

$$\big||\alpha|-|\beta|\big|=|\alpha-\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta\geq 0$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\big||x+8|-3\big|=|x+5|$$

10.60 Δίνεται η εξίσωση:

$$\lambda^2(x+1)-2(\lambda-1)(\lambda+1)=2(\lambda x-1) \quad (1)$$

Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, τότε:

α) να βρείτε την τιμή του λ,

β) να λύσετε την εξίσωση $\left|\frac{|x|-\lambda}{|x|-1}\right|=\lambda$.

10.61 Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{|1-x|-2x^2+4x-2}{|x-1|}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $A=1$ **ii)** $A=-1$

10.62 Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{|x^2-9|}{|x^2+3x|+|3x+9|}$$

α) Για ποια x ορίζεται η παράσταση Α;

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A=1$.

10.63 Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{x^2+3|x|}{x^2-9}-\frac{|x|-3}{x^2-6|x|+9}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A=3$.

10.64 Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Τ.Θ. - 4ο θέμα)

10.65 Δίνεται η εξίσωση:

$$|\lambda+1|x-|\lambda-8|=3(x-2) \quad (1)$$

με άγνωστο τον x.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση.

β) Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, να λύσετε την εξίσωση:

$$|y|^{\lambda+1}=\lambda y^{\lambda}$$

γ) Αν $\lambda \in (-1, 2) \cup (2, 8)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει σταθερή λύση (ανεξάρτητη του λ).

δ) Αν $\lambda > 8$ και ρ είναι λύση της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει ότι:

$$|6-4\rho|=|\rho-3|+\sqrt{4\rho^2-12\rho+9}$$