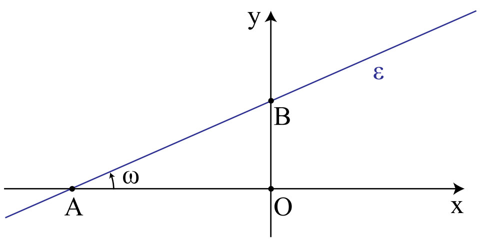
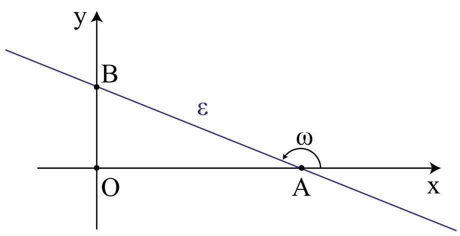
6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = αx + β$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο A.





Τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax, όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη *θετική φορά*[1] μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε ***γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x′x***. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x ή συμπίπτει με αυτόν, τότε λέμε ότι η ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία $ω = 0°$. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει

$$0° \leq ω < 180°.$$

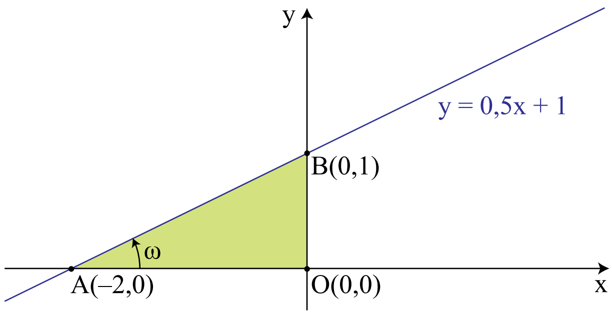
Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x′x. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε συμβολίζεται συνήθως με $λ_ε$ ή απλά με λ. Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία, αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία και μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν. Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι ίση με 90°, δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x′x, <u>δεν ορίζουμε</u> συντελεστή διεύθυνσης για την ε.

---

[1] Ως θετική φορά περιστροφής εννοούμε τη φορά κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί ο ημιάξονας Ox για να συμπέσει με τον ημιάξονα Oy, αφού προηγουμένως διαγράψει γωνία 90°.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 0{,}5x + 1$. Όπως πρακτικά διαπιστώσαμε στο Γυμνάσιο, η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία γραμμή με εξίσωση $y = 0{,}5x+1$ (Σχήμα).



Η ευθεία αυτή:

✓ Τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2,0)$, αφού για $y = 0$ βρίσκουμε $x = -2$, και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,1)$, αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$ και

✓ Έχει κλίση:

$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \frac{(OB)}{(OA)} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

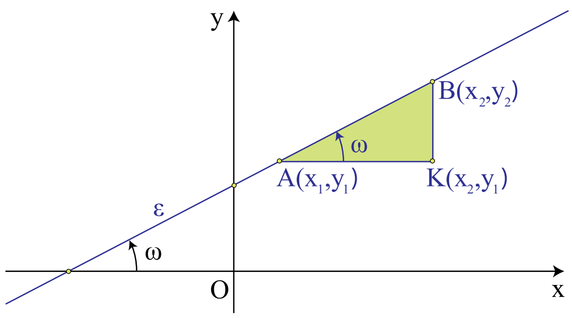
Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η κλίση λ της ευθείας $y = 0{,}5x+1$ είναι ίση με το συντελεστή του x.

Γενικά, όπως θα αποδείξουμε στη Β′ Λυκείου, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μία ευθεία, με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $B(0,\beta)$ και έχει κλίση $\lambda = \alpha$. Είναι φανερό ότι:

- αν $\alpha > 0$, τότε $0° < \omega < 90°$
- αν $\alpha < 0$, τότε $90° < \omega < 180°$
- αν $\alpha = 0$, τότε $\omega = 0°$.

Στην περίπτωση που είναι $\alpha = 0$, η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x) = \beta$ και λέγεται **σταθερή συνάρτηση**, διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαία σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ της ευθείας $y = \alpha x + \beta$.



Τότε θα ισχύει:

$$y_1 = αx_1 + β \quad \text{και} \quad y_2 = αx_2 + β,$$

οπότε θα έχουμε:

$$y_2 - y_1 = (αx_2 + β) - (αx_1 + β) = α(x_2 - x_1).$$

Επομένως θα είναι:

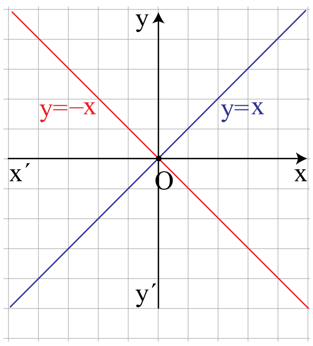
$$α = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $Α(-1,3)$ και $Β(3,6)$ έχει κλίση $α = \frac{6-3}{3-(-1)} = 0,75$. Επομένως, η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $ω$ με $εφω = 0,75$, οπότε θα είναι $ω \simeq 36,87°$.

Η συνάρτηση $f(x) = αx$

Αν $β = 0$, τότε η f παίρνει τη μορφή $f(x) = αx$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = αx$ και περνάει από την αρχή των αξόνων. Ειδικότερα:

✓ Για $α = 1$ έχουμε την ευθεία $y = x$. Για τη γωνία $ω$, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $εφω = α = 1$, δηλαδή $ω = 45°$. Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ των αξόνων.



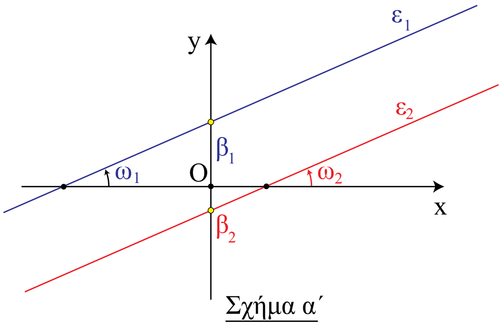
✓ Για $α = -1$ έχουμε την ευθεία $y = -x$. Για τη γωνία $ω$, που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $εφω = α = -1$, δηλαδή $ω = 135°$.
Επομένως η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος των γωνιών $y\hat{O}x'$ και $y'\hat{O}x$ των αξόνων.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

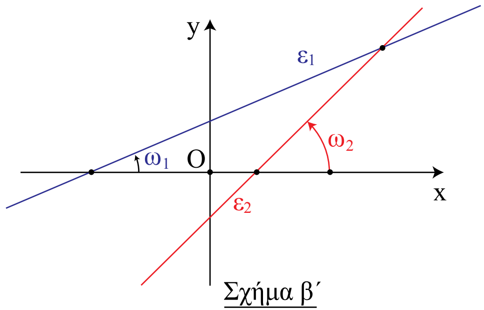
Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις $y = α_1x + β_1$ και $y = α_2x + β_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες $ω_1$ και $ω_2$ αντιστοίχως.

- Αν $α_1 = α_2$, τότε $εφω_1 = εφω_2$, οπότε $ω_1 = ω_2$ και άρα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Ειδικότερα:
  ✓ Αν $α_1 = α_2$ και $β_1 \neq β_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχ. α′), ενώ
  ✓ Αν $α_1 = α_2$ και $β_1 = β_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

• Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 \neq \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. (Σχ. β′)



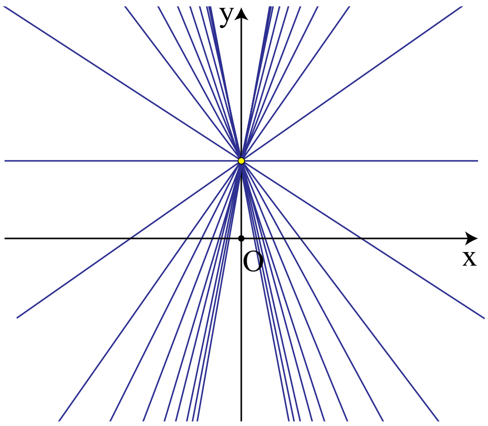
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

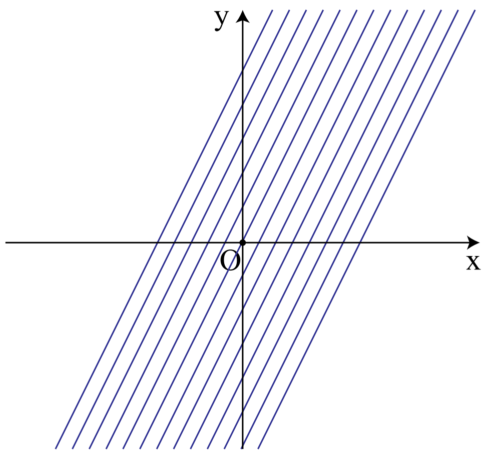
Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα:

• Οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + 1$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = 2x + 1$ κτλ., διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο, το σημείο 1 του άξονα $y'y$.



Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, όπου β σταθερό και α μεταβλητό διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$.

• Οι ευθείες της μορφής $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, όπως είναι για παράδειγμα οι ευθείες: $y = 2x$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 3$ κτλ., είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν όλες κλίση $\alpha = 2$.



Γενικά, οι ευθείες της μορφής $y = \alpha x + \beta$, όπου α σταθερό και β μεταβλητό, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.

Η συνάρτηση f(x) = | x |

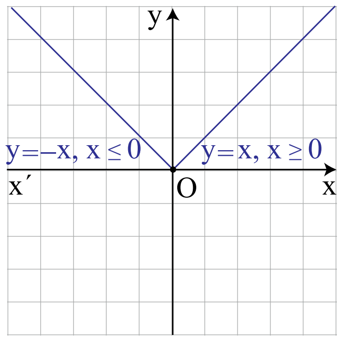
Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

✓ $y = -x$, με $x \leq 0$ και

✓ $y = x$, με $x \geq 0$ που διχοτομούν τις γωνίες $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ αντιστοίχως.



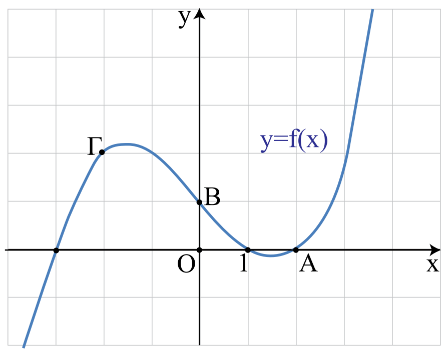
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι ορισμένη σε όλο το ℝ.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο Γ.

ii) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$$f(x) > -0{,}5x + 1\,.$$



ΛΥΣΗ

i) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α(2,0) και Β(0,1) θα ισχύει:

$$0 = \alpha \cdot 2 + \beta \quad \text{και} \quad 1 = \alpha \cdot 0 + \beta,$$

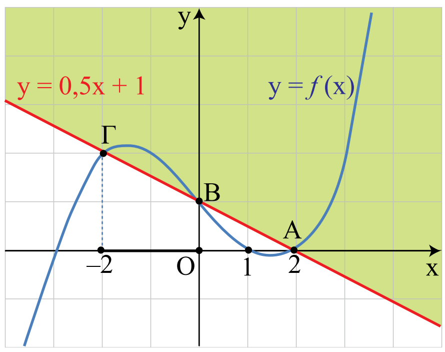
οπότε θα έχουμε:

$$\alpha = -\,0{,}5 \text{ και } \beta = 1.$$

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

$$y = -0{,}5 \cdot x + 1.$$

Για να δείξουμε τώρα ότι το σημείο Γ



ανήκει στην ευθεία ΑΒ, αρκεί να δείξουμε ότι το ζεύγος $(-2,2)$ των συντεταγμένων του επαληθεύει την εξίσωση αυτής, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $2 = -0,5 \cdot (-2) + 1$, που ισχύει.

ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > -0,5 \cdot x + 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = -0,5 \cdot x + 1$, δηλαδή πάνω από την ευθεία ΑΒ. Επομένως, η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-2,0) \cup (2, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x′x η ευθεία:

i) $y = x + 2$ **ii)** $y = \sqrt{3}x - 1$

iii) $y = -x + 1$ **iv)** $y = -\sqrt{3}x + 2$.

2. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) Α(1,2) και Β(2,3) **ii)** Α(1,2) και Β(2,1)

iii) Α(2,1) και Β(−1,1) **iv)** Α(1,3) και Β(2,1).

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

i) Έχει κλίση $\alpha = -1$ και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Β(0,2).

ii) Σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία $\omega = 45°$ και τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Β(0,1).

iii) Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 3$ και διέρχεται από το σημείο Α(1,1).

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i) Α(1,2) και Β(2,3) **ii)** Α(1,2) και Β(2,1)

iii) Α(2,1) και Β(−1,1) **iv)** Α(1,3) και Β(2,1).

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας C σε βαθμούς Celsius και της θερμοκρασίας F σε βαθμούς Fahrenheit είναι η

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Γνωρίζουμε ότι το νερό παγώνει σε 0°C ή 32°F και βράζει σε 100°C ή 212°F. Υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον ίδιο αριθμό;

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

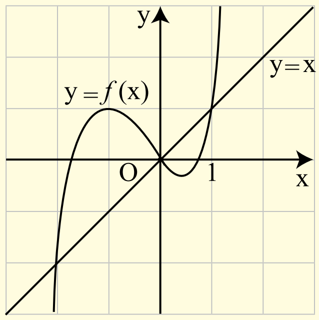
$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ 2, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x+1, & \text{αν } 1 \leq x \end{cases}$$

7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ και η ευθεία $y = x$.

Να λύσετε γραφικά:

i) Τις εξισώσεις:
$f(x) = 1$ και $f(x) = x$.

ii) Τις ανισώσεις:
$f(x) < 1$ και $f(x) \geq x$.



8. i) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| \text{ και } g(x) = 1$$

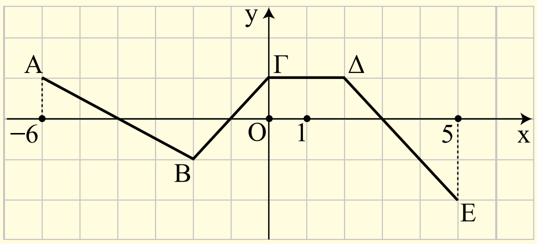
και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις:

$$|x| \leq 1 \text{ και } |x| > 1.$$

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕ του παρακάτω σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο διάστημα $[-6,5]$.



i) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f σε κάθε ακέραιο $x \in [-6,5]$.

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x)=0,\ f(x)=-1 \ \text{ και } \ f(x)=1$$

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΔ και στη συνέχεια να λύσετε γραφικά την ανίσωση

$$f(x) \le 0{,}5 \cdot x.$$

2. Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας $y = 1 - x$ και ανακλάται στον άξονα $x'x$. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.

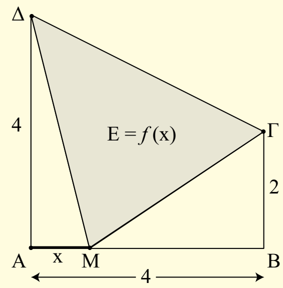
3. Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 λίτρα βενζίνης. Ένα βυτιοφόρο που περιέχει 2000 λίτρα βενζίνης αρχίζει να γεμίζει τη δεξαμενή. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 λίτρα το λεπτό και η δεξαμενή χωράει όλη τη βενζίνη του βυτιοφόρου:

i) Να βρείτε τις συναρτήσεις που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, την ποσότητα της βενζίνης:

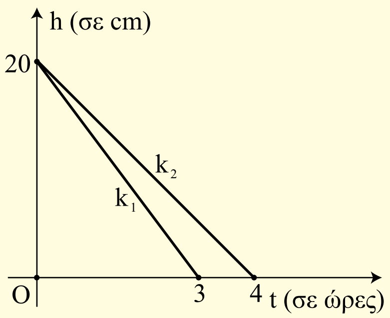
α) στο βυτιοφόρο και **β)** στη δεξαμενή.

ii) Να παραστήσετε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις και να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν την ίδια ποσότητα βενζίνης.

4. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το Α προς το Β. Συμβολίζουμε με x το μήκος της διαδρομής ΑΜ του σημείου Μ και με $f(x)$ το εμβαδό του τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΜΓΔ}}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $E = f(x)$ και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.



5. Δύο κεριά K_1 και K_2, ύψους 20cm το καθένα, άρχισαν να καίγονται την ίδια χρονική στιγμή και το πρώτο κερί κάηκε σε 3 ώρες, ενώ το δεύτερο κάηκε σε 4 ώρες. Τα ύψη των κεριών K_1 και K_2, συναρτήσει του χρόνου t, κατά το χρονικό διάστημα που καθένα από αυτά καιγόταν, παριστάνονται με τα ευθύγραμμα τμήματα k_1 και k_2 του παρακάτω σχήματος.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $h = h_1(t)$ και $h = h_2(t)$ που εκφράζουν, συναρτήσει του χρόνου t, τα ύψη των κεριών K_1 και K_2 αντιστοίχως.

ii) Να βρείτε πότε το κερί K_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί K_1.

iii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα και στη γενική περίπτωση που το αρχικό ύψος των κεριών ήταν ίσο με υ. Τι παρατηρείτε;