# 環上加群の降下とモナド

@algebraic_ghost

2023 年 5 月 21 日

概要

本稿では降下理論について概説する．第 1 節では位相空間を用いた素朴な降下の理論を考えることで一般的な降下理論に必要になる幾つかの基本的な概念を導入する．この節に於ける議論は [8] を参考にしている．第 2 節ではそれらをモナドと呼ばれる圏論的な概念を用いて再解釈する．これにより，降下の理論をより広範な文脈で考察することが可能になる上に，Beck のモナド性定理という非常に強力な圏論の定理を用いることが出来るようになる．最終節では [9] による，可換環の圏に於けるモナド的有効降下射の特徴付け (Corollary 5.4) を紹介する．

なお，筆者の好みにより，本稿では一般的な日本語訳が未だ定着していない術語に関しても，原語をそのまま用いるのではなく積極的に日本語 (漢語) 訳を当てるようにした．広く行われていない訳語には短剣符 † を付して注意を促した．

## 目次

# 1 位相空間上の降下

## 1.1 関数の降下

数学では局所的な情報を貼り合わせて大域的な情報を得るという操作が頻繁に行われる．例えば，位相空間 $B$ に対して，その上の何らかの実数値連続関数 $f\colon B \to \mathbb{R}$ を構成したいとする．このとき，次のような手順で関数を構成する方法が考えられる:

1. 先ず $B$ をその開集合で被覆する．即ち，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = B$ となる $B$ の開集合族 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を取る;
2. 各々の $U_\lambda$ に対して，その上の実数値連続関数 $f_\lambda\colon U_\lambda \to \mathbb{R}$ を構成する;
3. $\mathfrak{U}$ に含まれる二つの開集合 $U_\lambda, U_\mu$ (但し $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ であるとする) に対して，$f_\lambda$ と $f_\mu$ が $U_\lambda \cap U_\mu$ 上で整合的であること，即ち，任意の $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ に対して $f_\lambda(x) = f_\mu(x)$ であることを示し，$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を貼り合わせて $f\colon B \to \mathbb{R}$ へ延長する．

このような操作は，まさに関数 $f\colon B \to \mathbb{R}$ を “局所的に” 構成した後，それらを貼り合わせることで “大域的な” 関数を構成していると言える．言い方を変えると，この構成方法は，$E = \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 上で関数を構成し，それを $B$ 上に降ろして来ていると表現することも可能である[*1]．ここで注意すべきことは，$E$ 上の関数は必ず $B$ 上に降ろせるとは限らず，$B$ 上に降ろせる為には何かしらの条件が必要であるということである．上述の例に於いて，その条件はそれぞれの開集合上で定義された関数が開集合の交叉上で整合的であるという条件であった．また，もし $E$ 上の関数 $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ が $B$ 上の関数 $f$ へ降ろして来られるならば，$f$ に自然な写像 $p\colon E \to B$; $(x \in U_\lambda) \mapsto x$ (これは連続である) を合成した関数 $f \circ p\colon E \to \mathbb{R}$ は $\tilde{f}$ と一致するということが証明出来るし，逆に $B$ 上の関数を $p$ との合成によって $E$ 上へ持ち上げ，それを再び $B$ 上に降ろしてくると，これは元の関数に一致しているということも証明出来る．これによって，上述の事実を以下のような形式で述べることも出来る:

**命題 1.1**
$B$ を位相空間とし，$\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をその開被覆とする．$E = \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とし，$p\colon E \to B$ を自然な写像とする．このとき，$E$ 上の実数値連続関数 $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ が $B$ から来ている，即ち或る実数値連続関数 $f\colon B \to \mathbb{R}$ が存在して $\tilde{f} = f \circ p$ となる必要十分条件は，$\tilde{f}$ が整合性に関する上述の条件を満たしていることである．

証明は容易であるので省略する．$B$ 上の関数 $f$ があれば，それに $f \circ p$ を割り当てることによって $E$ 上の関数が定まることは明らかであるので，この命題は以下の様な形で主張することも出来る:

[*1] 「降ろす」という表現は，$E$ が $B$ を被覆しているという点で $B$ の上にある空間であるという感覚に基づいた表現である．

**命題 1.2**
前命題と同じ状況を考える．$B$ 上の実数値連続関数 $f$ を与えることと，$E$ 上の実数値連続関数 $\tilde{f}$ で整合性に関する条件を満たすものを与えることは同値である．

詳細な証明は割愛する．この命題に述べられているように，或る空間上 $B$ 上で何かしらの対象を定めることと，$B$ の “上にある” 空間 $E$ 上で特定の条件を満たす対象を定めることが同値になることが屢々ある．このような現象を**降下** ([英] descent; [仏] descente)[*2][*3]と呼ぶ．命題 1.1 の形で降下を表現するならば，降下とは即ち “上にある” 空間上で定義された対象を，特定の条件の下でそれが “下の” 空間に由来するものであることを見出すこと，と言えよう．

このような降下の例を一つ見ておく．$B$ として円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を考える．このとき，$B$ の開被覆として $U_1 = B \cap \{x > -1/2\}, U_2 = B \cap \{x < 1/2\}$ が考えられる．これは半円を少し延長したものである．今，円周上の関数 $f$ を定めたいとする．上の命題より，$f$ を定めることは，$U_1$ と $U_2$ 上の関数 $f_1$, $f_2$ で，$U_1 \cap U_2 =$ 円周の南極と北極の近傍 ($y$ 座標が $\sqrt{3}/2$ より大きい部分) 上で一致するものを定めることと同値である．

## 1.2 束の降下 (1)

今まで見てきた例とは聊か異なる降下の例を見てみよう．先ず，**束** ([英] bundle)[*4]という概念を定義する．

**定義 1.3**
$B$ を位相空間とする．$B$ 上の **束** ([英] bundle) とは，$B$ と

- 位相空間 $C$,
- 連続写像 $\gamma\colon C \to B$

からなる三つ組 $(C, \gamma, B)$ のことである．$\gamma$ 及び $B$ が文脈から明らかな場合は，これらを明示せず $C$ のみで束を表す．また，$\gamma$ を束 $(C, \gamma, B)$ の**構造射** ([英] structure morphism) という．また，$B$ 上の束の圏を $\mathbf{Top}_{/B}$ と表す．

通常，この条件のみでは条件が弱すぎることが殆どである．従って，多くの場合は構造射 $\gamma$ に付加的な条件を課している．しかし，本稿では何ら条件を課さない最も広い意味での束の降下に関して考察する．この様な状況に於ける降下理論を**大域的降下**[†]([英] global descent) という．大域的で

[*2] 降下という術語に厳密な定義があるわけではない．これとは若干異なる意味で降下という術語が用いられる場合 (e.g., Descartes 図式に於ける射の性質の降下) もあるので，注意が必要である．

[*3] 英語の descent が用いられることが多いが，Grothendieck をはじめとするフランス学派の影響で descente というフランス語としての綴りが用いられることも見られる．この場合「デサント」と読まれる．

[*4] 余談であるが，束と訳される術語は bundle 以外にも lattice というものがある．これらの概念は (少なくとも素朴には) 無関係のものである．

ない降下の理論に関しては [8, Section 1] を参照のこと．

続いて，**引き戻し** ([英] pullback) という概念を導入しよう．これにより，束を $B$ 上から $B$ の上にある空間 $E$ ($E$ は必ずしも前節で定義された様な形の空間である必要はなく，$B$ への連続写像さえ存在すれば良いが，基本的に暫くの間は従前と同じ方法で，即ち開被覆の非交和として，構成された空間を考える) へと移すことが出来る．

**定義 1.4**

以下の様な位相空間の図式を考える[a]:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\gamma"] \\ E \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

このとき，$E$ と $C$ の $B$ 上の**引き戻し** ([英] pullback) $E \times_B C$ を，

$$E \times_B C = \{(x, c) \mid p(x) = \gamma(c)\}$$

という集合に直積空間 $E \times C$ の部分空間としての位相を入れたものとして定める．また，$E \times_B C$ から $E$ 及び $C$ へ自然な写像

$$\begin{aligned} \pi_1 \colon E \times_B C \to E; \quad (x, c) \mapsto x, \\ \pi_2 \colon E \times_B C \to C; \quad (x, c) \mapsto c \end{aligned}$$

が定まる．$\pi_1, \pi_2$ をそれぞれ第 1 成分，第 2 成分への**自然な射影** ([英] natural projection) と呼ぶ．$B$ 上の束 $(C, \gamma, B)$ を $E$ 上の束 $(E \times_B C, \pi_1, E)$ に割り当てる対応は関手的であり，関手 $\mathbf{Top}_{/B} \to \mathbf{Top}_{/E}$ を定める．これを**引き戻し関手** ([英] pullback functor) といい，$p^*$ で表す．

[a] 斯様な図式を屡々 $\left(E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{\gamma} C\right)$ と表す．

具体的な引き戻しの計算例は命題 1.6 に挙げられているので，この概念に慣れたい読者は先にこの命題の証明を読むと良いだろう．

このようにして定義した引き戻しは，圏論的な引き戻しと一致している．即ち，$E \times_B C$ は次の普遍性を満たす．任意の位相空間 $Z$ に対して，次の集合間に自然な，つまり $Z$ に関して関手的な全単射が存在する:

- 連続写像 $f\colon Z \to E$ と $g\colon Z \to C$ で，$p \circ f = \gamma \circ g$ を満たすものの組;
- 連続写像 $h\colon Z \to E \times_B C$.

この全単射を通して $f$ と $g$ に対応する写像 $Z \to E \times_B C$ を $(f, g)$ と表す．位相空間の場合 $(f, g)$ を明示的に構成するのは容易であり，$(f, g)\colon z \mapsto (f(z), g(z))$ で表される (これが実際に求められ

ている条件を満たすことを確認せよ).

さて，先に論じた関数の降下を思い出そう．今我々が考えるべきことは，$E = \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 上の束 $(D, \delta, E)$ が与えられたとき，それが $B$ 上から誘導されたものである為の条件は何かということである．$E$ 上の束を定めることは即ち各々の $U_\lambda$ 上の束 $(D_\lambda, \delta_\lambda, U_\lambda)$ を定めることに他ならないことに注意する．以下では，表記の簡略の為に $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $U_\lambda \cap U_\mu$ を $U_{\lambda\mu}$ と表し，更に $D_{\lambda\mu} = \delta_\lambda^{-1}(U_{\lambda\mu}) \subseteq D_\lambda$ と表すことにする．三つ以上の添字 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda$ に関しても同様に，$U_{\lambda_1\cdots\lambda_r} = U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap U_{\lambda_r}$, $D_{\lambda_1\cdots\lambda_r} = \delta_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1\cdots\lambda_r}) \subseteq D_{\lambda_1}$ と定める．一般に $U_{\lambda\mu} = U_{\mu\lambda}$ は成立するが，$D_{\lambda\mu} \cong D_{\mu\lambda}$ は成立しないことに注意せよ．

各々の $D_\lambda$ を貼り合わせて $B$ 上に降ろすことが出来たとすると，$D_{\lambda\mu}$ と $D_{\mu\lambda}$ はどちらも同一の開集合 $U_{\lambda\mu}$ 上の対象であることから，これら二つの空間は同相であるべきである．従って，降下の為の条件の試案として，全ての $\lambda, \mu \in \Lambda$ (但し $U_{\lambda\mu} \neq \emptyset$) に対して $U_{\lambda\mu}$ 上の同相写像 $\sigma_{\lambda\mu} \colon D_{\lambda\mu} \to D_{\mu\lambda}$ が存在する，という条件を考えてみる．ここで，「$U_{\lambda\mu}$ 上の」という条件は，$x \in D_{\lambda\mu}$ に対して $\delta_\mu \circ \sigma_{\lambda\mu}(x) = \delta_\lambda$ が成立する，即ち次の図式が可換であるということである:

$$\begin{tikzcd} D_{\lambda\mu} \arrow[rr, "\sigma_{\lambda\mu}"] \arrow[dr, "\delta_\lambda"'] & & D_{\mu\lambda} \arrow[dl, "\delta_\mu"] \\ & U_{\lambda\mu} & \end{tikzcd}$$

今我々が考えている $B$, $E$, $D$ の状況は図 1.2 の如く示される．これから考える降下の基本的な方針は，与えられた束 $D$ を，$\sigma_{\lambda\mu}$ のどれかで移り合う点同士を同一視することによって $B$ 上へ降ろしてくるというものである．同一視するという操作を具体的に述べると，$D$ の点 $x$, $y$ に対して $x \sim y \Leftrightarrow$ 或る $\lambda$, $\mu \in \Lambda$ が存在して $y = \sigma_{\lambda\mu}(x)$ となる，という関係を (これが同値関係となる様に適宜条件を課した上で) 考え，それによる商 $D/\sim$ を取るということである．この方針の下，$\{\sigma_{\lambda\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ が満たすべき条件を考えていくが，以下の議論は飽く迄発見的なものであって，必要十分な議論を展開している訳ではないということに注意されたい．

先ず，$\lambda = \mu$ と取った場合，$\sigma_{\lambda\mu}$ は恒等写像となるべきである．従って，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\sigma_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{D_\lambda}$ という条件を課すべきである．実際，この条件によって問題となっている関係が反射律，即ち任意の $x \in D$ に対して $x \sim x$ であるという条件が保証される．何故ならば，$x \in D_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ を取れば $x = \sigma_{\lambda\lambda}(x)$ となる為，$x \sim x$ が分かるからである．

続いて，対称律を考える．対称律とは，今考えている状況に置き換えれば即ち或る $\lambda$, $\mu \in \Lambda$ に対して $y = \sigma_{\lambda\mu}(x)$ となっているならば，別の $\lambda'$, $\mu' \in \Lambda$ が存在して $x = \sigma_{\lambda'\mu'}(y)$ となる，という条件を意味している．もし任意の $\lambda$, $\mu \in \Lambda$ に対して $\sigma_{\lambda\mu}^{-1} = \sigma_{\mu\lambda}$ が成立していれば，この条件は満たされていることが簡単に確認出来る．従って，ここではその条件も課してみよう．

最後，推移律に相当する条件を考える．三つの添字 $\lambda$, $\mu$, $\nu \in \Lambda$ で $U_{\lambda\mu\nu} \neq \emptyset$ となるものに対して，$\sigma_{\mu\nu}|_{D_{\mu\lambda\nu}} \circ \sigma_{\lambda\mu}|_{D_{\lambda\mu\nu}} = \sigma_{\lambda\nu}|_{D_{\lambda\mu\nu}}$ という等式が成立している，即ち次の図式は可換になっているとする:

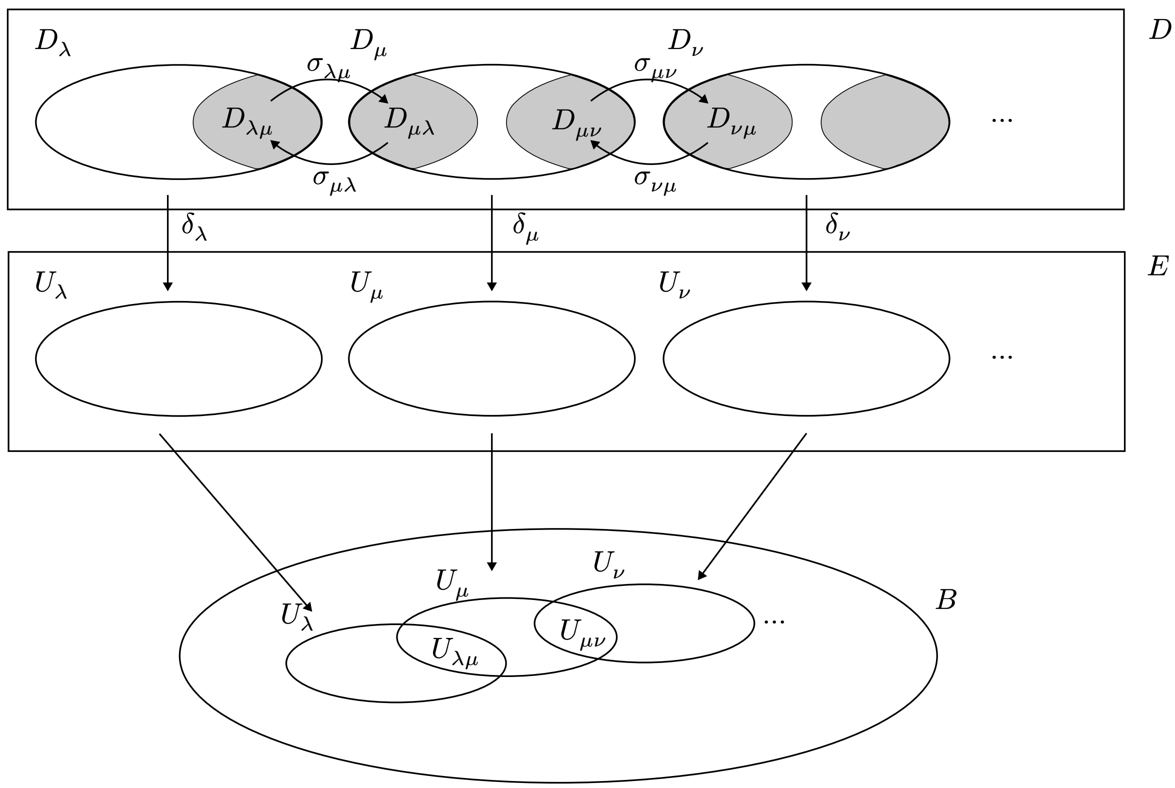


図 1　束の降下

$$\begin{tikzcd}
D_{\lambda\mu\nu} \arrow[rr, "\sigma_{\lambda\mu}|_{D_{\lambda\mu\nu}}"] \arrow[dr, "\sigma_{\lambda\nu}|_{D_{\lambda\mu\nu}}"'] & & D_{\mu\lambda\nu} \arrow[dl, "\sigma_{\mu\nu}|_{D_{\mu\lambda\nu}}"] \\
& D_{\nu\lambda\mu} &
\end{tikzcd}$$

このとき，問題となっている関係は推移律を満たす，即ち $x, y, z \in D$ に対して $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ であるということが分かる．何故ならば，$x \in D_\lambda$, $y \in D_\mu$, $z \in D_\nu$ であり $y = \sigma_{\lambda\mu}(x)$, $z = \sigma_{\mu\nu}(y)$ であれば，$z = \sigma_{\mu\nu} \circ \sigma_{\lambda\mu}(x) = \sigma_{\lambda\nu}(x)$ となるからである．

以上の議論より，$\{\sigma_{\lambda\mu} \colon D_{\lambda\mu} \to D_{\mu\lambda}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ が少なくとも

i) $\sigma_{\lambda\mu} \colon D_{\lambda\mu} \to D_{\mu\lambda}$ は $U_{\lambda\mu}$ 上の同相写像である;
ii) 任意の添字 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\sigma_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{D_\lambda}$ である;
iii) 任意の二つの添字 $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して，$\sigma_{\lambda\mu}^{-1} = \sigma_{\mu\lambda}$ である;
iv) 任意の三つの添字 $\lambda$, $\mu$, $\nu \in \Lambda$ で $U_{\lambda\mu\nu} \neq \emptyset$ となるものに対して，$\sigma_{\mu\nu}|_{D_{\mu\lambda\nu}} \circ \sigma_{\lambda\mu}|_{D_{\lambda\mu\nu}} = \sigma_{\lambda\nu}|_{D_{\lambda\mu\nu}}$ である;

という条件を満たしていれば，前述の方法で $D$ 上の同値関係 $\sim$ を定義することが出来，更にこれによる商空間 $D/\sim$ は $D$ の降下を与えるということが証明出来る．

ここで，実は上に挙げた条件の iv) が ii) 及び iii) を導くということに注意しよう．実際，$\lambda = \mu = \nu$ と取れば $\sigma_{\lambda\lambda} \circ \sigma_{\lambda\lambda} = \sigma_{\lambda\lambda}$ となるが，$\sigma_{\lambda\lambda}$ は同相写像であると仮定されていた為，$\sigma_{\lambda\lambda}^{-1}$ は存在し，これを先ほどの式に合成すれば $\sigma_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{U_\lambda}$ が分かる．更に，今度は $\lambda = \nu$ と取れば $\sigma_{\mu\lambda} \circ \sigma_{\lambda\mu} = \sigma_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{U_\lambda}$ となり，同様に $\sigma_{\lambda\mu} \circ \sigma\mu\lambda$ も恒等写像であることが示せるので，$\sigma_{\lambda\mu}^{-1} = \sigma_{\mu\lambda}$ が成立することが分かる．

以上の結果を命題の形に纏めておく．

**命題 1.5**
$B, E, p$ は今までと同様とする．このとき，$E$ 上の束 $(D, \delta, E)$ が $B$ 上の束の引き戻しとして表示出来る為の必要十分条件は，写像族 $\{\sigma_{\lambda\mu} \colon D_{\lambda\mu} \to D_{\mu\lambda}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ で，

i) $\sigma_{\lambda\mu} \colon D_{\lambda\mu} \to D_{\mu\lambda}$ は $U_{\lambda\mu}$ 上の同相写像である;
ii) 任意の三つの添字 $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ で $U_{\lambda\mu\nu} \neq \emptyset$ となるものに対して，$\sigma_{\mu\nu}|_{D_{\mu\lambda\nu}} \circ \sigma_{\lambda\mu}|_{D_{\lambda\mu\nu}} = \sigma_{\lambda\nu}|_{D_{\lambda\mu\nu}}$ である;

という条件を満たすものが存在することと同値である．

同相写像族 $\{\sigma_{\lambda\mu} \colon D_{\lambda\mu} \to D_{\mu\lambda}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ は降下に関して致命的な情報を持っている為，$p$ に関する**降下情報**†([英] descent datum) と呼ばれる．この術語を用いれば，$B$ 上の束を定めることと $E$ 上の束で降下情報を備えたものを定めることは同値である，と言うことが出来る．

尚，以上の議論で現れた $\sigma_{\mu\nu} \circ \sigma_{\lambda\mu} = \sigma_{\lambda\nu}$ という形の条件は，数学の様々な場面で現れる極めて重要な条件であり，**1 余輪体条件**†([英] 1-cocycle condition) と呼ばれる．

## 1.3 束の降下 (2)

前節までの議論で一通り束の降下に関する結果が得られたので，今度はこれらの結果をより洗練された形式に纏めよう．そうすることで，更なる議論への見通しが開ける．先ず，この先の議論で必要になる引き戻しを予め幾つか計算しておこう．

**命題 1.6**
$B$ を位相空間，$E$ を $B$ の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ から定まる空間 $E = \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とし，$p \colon E \to B$ を自然な写像とする．$\delta \colon D \to E$ を連続写像とする (即ち $D$ は $E$ 上の束である)．
(1) 図式 $\left(E \xrightarrow{p} B \xleftarrow{p} E\right)$ の引き戻し $E \times_B E$ は $\coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} U_{\lambda\mu}$ と同相であり，自然な射影は

$$\pi_1 \colon \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} U_{\lambda\mu} \to E = \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda; \quad (x \in U_{\lambda_0\mu_0}) \mapsto (x \in U_{\lambda_0}),$$
$$\pi_2 \colon \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} U_{\lambda\mu} \to E = \coprod_{\mu\in\Lambda} U_\mu; \quad (x \in U_{\lambda_0\mu_0}) \mapsto (x \in U_{\mu_0})$$

である．

(2) 図式 $\left(E \times_B E \xrightarrow{\pi_1} E \xleftarrow{\delta} D\right)$ の引き戻し $(E \times_B E) \times_E^1 D$[a]$(\cong D \times_B E)$ は $\coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} D_{\lambda\mu}$ と同相であり，自然な射影は

$$\pi_1^{(1)}\colon \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} D_{\lambda\mu} \to E \times_B E = \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} U_{\lambda\mu}; \quad (d \in D_{\lambda_0\mu_0}) \mapsto (\delta_{\lambda_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0}),$$
$$\pi_2^{(1)}\colon \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} D_{\lambda\mu} \to D; \quad (d \in D_{\lambda_0\mu_0}) \mapsto d$$

である．

(3) 図式 $\left(E \times_B E \xrightarrow{\pi_2} E \xleftarrow{\delta} D\right)$ の引き戻し $(E \times_B E) \times_E^2 D(\cong E \times_B D)$ は $\coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} D_{\mu\lambda}$ と同相であり，自然な射影は

$$\pi_1^{(2)}\colon \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} D_{\mu\lambda} \to E \times_B E = \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} U_{\lambda\mu}; \quad (d \in D_{\mu_0\lambda_0}) \mapsto (\delta_{\mu_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0}),$$
$$\pi_2^{(2)}\colon \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} D_{\mu\lambda} \to D; \quad (d \in D_{\lambda_0\mu_0}) \mapsto d$$

である．

[a] (2) と (3) を区別する為に，$\times$ の右肩に 1, 2 を添える．

**証明**

(1) 引き戻しの定義通り考えると，

$$\begin{aligned} E \times_B E &= \{((x \in U_\lambda), (y \in U_\mu)) \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ p(x) = p(y)\} \cdots (*) \\ &= \{((x \in U_\lambda), (y \in U_\mu)) \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ x = y\} \\ &\cong \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} U_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

である．$(x \in U_{\lambda_0\mu_0})$ に対応する $(*)$ の元は $((x \in U_{\lambda_0}), (x \in U_{\mu_0}))$ であるので，

$$\pi_1(x \in U_{\lambda_0\mu_0}) = (x \in U_{\lambda_0})$$
$$\pi_2(x \in U_{\lambda_0\mu_0}) = (x \in U_{\mu_0})$$

であることが分かる．

(2) (1) と同様に，定義通り考えると，

$$\begin{aligned}
(E \times_B E) \times_E^1 D &= \left( \coprod_{\lambda,\mu \in \Lambda} U_{\lambda\mu} \right) \times_E^1 D \\
&= \{((x \in U_{\lambda\mu}), d) \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ \pi_1(x \in U_{\lambda\mu}) = \delta(d)\} \cdots (**) \\
&= \{((x \in U_{\lambda\mu}), d) \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ (x \in U_\lambda) = \delta(d)\} \\
&= \{((x \in U_{\lambda\mu}), d) \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ d \in \delta_\lambda^{-1}(U_{\lambda\mu}) = D_{\lambda\mu},\ x = \delta_\lambda(d)\} \\
&\cong \coprod_{\lambda,\mu \in \Lambda} D_{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

である．$(d \in D_{\lambda_0\mu_0})$ に対応する $(**)$ の元は $((\delta_{\lambda_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0}), d)$ であるので，

$$\begin{aligned}
&\pi_1^{(1)}(d \in D_{\lambda_0\mu_0}) = (\delta_{\lambda_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0}), \\
&\pi_2^{(1)}(d \in D_{\lambda_0\mu_0}) = d
\end{aligned}$$

である．

(3) (2) と同様に考えると，

$$\begin{aligned}
(E \times_B E) \times_E^2 D &= \left( \coprod_{\lambda,\mu \in \Lambda} U_{\lambda\mu} \right) \times_E^2 D \\
&= \{((x \in U_{\lambda\mu}), d) \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ \pi_2(x \in U_{\lambda\mu}) = \delta(d)\} \cdots (***) \\
&= \{((x \in U_{\lambda\mu}), d) \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ (x \in U_\mu) = \delta(d)\} \\
&= \{((x \in U_{\lambda\mu}), d) \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ d \in \delta_\mu^{-1}(U_{\lambda\mu}) = D_{\mu\lambda},\ x = \delta_\mu(d)\} \\
&\cong \coprod_{\lambda,\mu \in \Lambda} D_{\mu\lambda}
\end{aligned}$$

である．$(d \in D_{\mu_0\lambda_0})$ に対応する $(***)$ の元は $((\delta_{\mu_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0}), d)$ であるので，

$$\begin{aligned}
&\pi_1^{(2)}(d \in D_{\lambda_0\mu_0}) = (\delta_{\mu_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0}), \\
&\pi_2^{(2)}(d \in D_{\lambda_0\mu_0}) = d
\end{aligned}$$

である． $\square$

以下では，表記の簡明の為，$(E \times_B E) \times_E^i D$ $(i = 1, 2)$ を $\pi_i^* D$ $(i = 1, 2)$ と書くことにする (写像 $f$ による引き戻し関手が $f^*$ と記されていたことを思い出そう)．

続いて，三つ以上の対象の引き戻しを考察する．これらの命題の証明は，煩雑である割に特別難しくもない (愚直に計算すれば良いのみである) ので省略する．

**命題 1.7**
(1) 引き戻しは結合的である．即ち，位相空間 $X$ 上の対象 $Y_1, Y_2, Y_3$ に対して，自然な同相

$$(Y_1 \times_X Y_2) \times_X Y_3 \cong Y_1 \times_X (Y_2 \times_X Y_3)$$

が存在する．よって，これ以降では三つ以上の空間の引き戻しも括弧を省略して書く．
(2) $E \times_B E \times_B E \cong \coprod_{\lambda,\mu,\nu \in \Lambda} U_{\lambda\mu\nu}$ であり，自然な射影は

$$\begin{aligned}
\pi'_1\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu} \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda; &\quad (x \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto (x \in U_{\lambda_0}),\\
\pi'_2\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu} \to \coprod_{\mu\in\Lambda} U_\lambda; &\quad (x \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto (x \in U_{\mu_0}),\\
\pi'_3\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu} \to \coprod_{\nu\in\Lambda} U_\lambda; &\quad (x \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto (x \in U_{\nu_0})
\end{aligned}$$

である．また，$E \times_B E \times_B E$ から $E \times_B E$ への写像として，以下の三つを定義が定義出来る:

$$\begin{aligned}
\rho_{23}\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu} \to \coprod_{\mu,\nu\in\Lambda} U_{\mu\nu}; &\quad (x \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto (x \in U_{\mu_0\nu_0}),\\
\rho_{13}\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu} \to \coprod_{\lambda,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\nu}; &\quad (x \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto (x \in U_{\lambda_0\nu_0}),\\
\rho_{12}\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu} \to \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} U_{\lambda\mu}; &\quad (x \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto (x \in U_{\lambda_0\mu_0}).
\end{aligned}$$

これらは，それぞれ $E \times_B E \times_B E$ の第 1, 2, 3 成分を除く写像であると解釈することも出来る．
(3) 図式 $\left(E \times_B E \times_B E \xrightarrow{\pi'_1} E \xleftarrow{\delta} D\right)$ の引き戻し $(E \times_B E \times_B E) \times_E^1 D = {\pi'_1}^* D (\cong D \times_B E \times_B E)$ は $\coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\lambda\mu\nu}$ と同相であり，自然な射影は

$$\begin{aligned}
&{\pi'}^{(1)}_1\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\lambda\mu\nu} \to E \times_B E \times_B E = \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu};\ (d \in D_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto (\delta_{\lambda_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}),\\
&{\pi'}^{(1)}_2\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\lambda\mu\nu} \to D;\ (d \in D_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto d
\end{aligned}$$

である．
(4) 図式 $\left(E \times_B E \times_B E \xrightarrow{\pi'_2} E \xleftarrow{\delta} D\right)$ の引き戻し $(E \times_B E \times_B E) \times_E^2 D = {\pi'_2}^* D (\cong E \times_B D \times_B E)$ は $\coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\mu\lambda\nu}$ と同相であり，自然な射影は

$$\begin{aligned}
&{\pi'}^{(2)}_1\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\mu\lambda\nu} \to E \times_B E \times_B E = \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu};\ (d \in D_{\mu_0\lambda_0\nu_0}) \mapsto (\delta_{\mu_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}),\\
&{\pi'}^{(2)}_2\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\lambda\mu\nu} \to D;\ (d \in D_{\mu_0\lambda_0\nu_0}) \mapsto d
\end{aligned}$$

である．

(5) 図式 $\left(E \times_B E \times_B E \xrightarrow{\pi_3'} E \xleftarrow{\delta} D\right)$ の引き戻し $(E \times_B E \times_B E) \times_E^3 D = {\pi_3'}^* D (\cong E \times_B E \times_B D)$ は $\coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\nu\lambda\mu}$ と同相であり，自然な射影は

$$\pi_1'^{(3)}\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\nu\lambda\mu} \to E \times_B E \times_B E = \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} U_{\lambda\mu\nu};\ (d \in D_{\nu_0\lambda_0\mu_0}) \mapsto (\delta_{\nu_0}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0\nu_0}),$$
$$\pi_2'^{(3)}\colon \coprod_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} D_{\lambda\mu\nu} \to D;\ (d \in D_{\lambda_0\mu_0\nu_0}) \mapsto d$$

である．

ここまでで大量の写像が現れたので，一旦図式を用いて整理しておこう．列挙した性質のうち後半の三つは関手の同型であることに注意せよ．

$$\begin{tikzcd}
{\pi_k'}^* D \arrow[rr] \arrow[d, "\pi_1'^{(k)}"] \arrow[rrr, bend left, "\pi_2'^{(k)}"] & & \pi_i^* D \arrow[r, "\pi_2^{(i)}"] \arrow[d, "\pi_1^{(i)}"] & D \arrow[d, "\delta"] & \\
E \times_B E \times_B E \arrow[rr, "\rho_{jj'}"] \arrow[rrr, bend right, "\pi_k'"'] & & E \times_B E \arrow[r, "\pi_i"] & E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

**成立する性質:**

$\pi_1 \circ \rho_{12} = \pi_1 \circ \rho_{13} = \pi_1'$

$\pi_2 \circ \rho_{12} = \pi_1 \circ \rho_{23} = \pi_2'$

$\pi_2 \circ \rho_{13} = \pi_2 \circ \rho_{23} = \pi_3'$

$\rho_{12}^* \circ \pi_1^* \cong \rho_{13}^* \circ \pi_1^* \cong {\pi_1'}^*$

$\rho_{12}^* \circ \pi_2^* \cong \rho_{23}^* \circ \pi_1^* \cong {\pi_2'}^*$

$\rho_{13}^* \circ \pi_2^* \cong \rho_{23}^* \circ \pi_2^* \cong {\pi_3'}^*$

以上の準備の下，降下情報をより簡潔に記述することが出来る．

**命題 1.8**

$E$ 上の束 $(D, \delta, E)$ に関する降下情報 $\{\sigma_{\lambda\mu}\colon D_{\lambda\mu} \to D_{\mu\lambda}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ を定めることは，$E \times_B E$ 上の同相写像 $\sigma\colon \pi_1^* D \to \pi_2^* D$ で，次の図式を可換にするものを定めることと同値である:

$$\begin{tikzcd}
\rho_{13}^*\pi_1^* D \cong {\pi_1'}^* D \cong \rho_{12}^*\pi_1^* D \arrow[rr, "\rho_{12}^*\sigma"] \arrow[dr, "\rho_{13}^*\sigma"'] & & \rho_{12}^*\pi_2^* D \cong {\pi_2'}^* D \cong \rho_{23}^*\pi_1^* D \arrow[dl, "\rho_{23}^*\sigma"] \\
& \rho_{13}^*\pi_2^* D \cong {\pi_3'}^* D \cong \rho_{23}^*\pi_2^* D &
\end{tikzcd}$$

ここで，同相写像は全て上に挙げた関手の同型から誘導されるものである[a]．今後，斯様な同相写像のことも降下情報と呼ぶ．

[a] 屡々この条件は同型を無視して単に $\rho_{23}^*\sigma \circ \rho_{12}^*\sigma = \rho_{13}^*\sigma$ という式で表される．

**証明**

降下情報 $\{\sigma_{\lambda\mu}\colon D_{\lambda\mu} \to D_{\mu\lambda}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ が与えられたとき，$\pi_1^* D = \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} D_{\lambda\mu}$ から $\pi_2^* D = \coprod_{\lambda,\mu\in\Lambda} D_{\mu\lambda}$ への連続写像 $\sigma$ を，$\sigma(d \in D_{\lambda_0\mu_0}) = (\sigma_{\lambda_0\mu_0}(d) \in D_{\mu_0\lambda_0})$ として定めることが出来る．逆写像も全く同様にして定めることが出来る為，斯くして定まる $\sigma$ は同相写像であることが分かる．また，$(d \in D_{\lambda_0\mu_0}) \in \pi_1^* D$ に対して

$$\pi_1^{(2)} \circ \sigma(d \in D_{\lambda_0\mu_0}) = \delta_{\mu_0}(\sigma_{\lambda_0\mu_0}(d)) = \delta_{\lambda_0}(d) = \pi_1^{(1)}(d)$$

であるので，$\sigma$ が $E \times_B E$ 上の写像であることも分かる．又，$\rho_{12}^* \sigma$ は各々の $D_{\lambda\mu\nu}$ 上で $\sigma_{\lambda\mu}|_{D_{\lambda\mu\nu}}$ で与えられ，$\rho_{23}^*\sigma$, $\rho_{13}^*\sigma$ もこれと同様に計算すると，条件として課されていた可換性は $\{\sigma_{\lambda\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ が満たすべき性質 (命題 1.5 ii)) から分かる．

逆に，$E \times_B E$ 上の同相写像 $\sigma\colon \pi_1^* D \to \pi_2^* D$ が与えられたとする．$\sigma$ を $D_{\lambda_0\mu_0}$ に制限した写像を $\sigma_{\lambda_0\mu_0}$ と記すことにする (これは当然連続写像である)．$\sigma$ が $E \times_B E$ 上の写像であることより，$(d \in D_{\lambda_0\mu_0}) \in \pi_1^* D$ に対して，$\pi_1^{(2)}(\sigma_{\lambda_0\mu_0}(d)) = \pi_1^{(1)}(d) \in U_{\lambda_0\mu_0}$ である．命題 1.6 (3) で与えた $\pi_1^{(2)}$ の表示より，$(\pi_1^{(2)})^{-1}(U_{\lambda_0\mu_0}) = D_{\mu_0\lambda_0}$ であるので，$\sigma_{\lambda_0\mu_0}$ は写像 $\sigma_{\lambda_0\mu_0}\colon D_{\lambda_0\mu_0} \to D_{\mu_0\lambda_0}$ を定める．これと同様の議論によって 各々の $\sigma_{\lambda_0\mu_0}$ の逆写像を構成することも出来る為，これらが同相写像であることが分かる．

$\sigma_{\lambda\mu}$ が $U_{\lambda\mu}$ 上の写像であることは容易に確かめられる．また，問題の可換性条件 $\rho_{23}^*\sigma \circ \rho_{12}^*\sigma = \rho_{13}^*\sigma$ は命題 1.5 ii) に他ならないことも分かる． □

降下情報を以上のように表示することにより，その圏論的取り扱いが容易になる．

**定義 1.9**
$p\colon E = \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \to B$ を今まで通りとする．このとき，$p$ に関する降下情報の圏 $\mathbf{Desc}(p)$ を以下の様に定める:

**対象**　$E$ 上の束 $(D, \delta, E)$ と降下情報 $\sigma\colon \pi_1^* D \to \pi_2^* D$ の組 $(D, \delta, E; \sigma)$;

**射**　$(D, \delta, E; \sigma)$, $(D', \delta', E; \sigma')$ の間の射は，$E$ 上の射 $\phi\colon D \to D'$ であって，可換図式

$$\begin{tikzcd} \pi_1^* D \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi_1^*\phi"] & \pi_2^* D \arrow[d, "\pi_2^*\phi"] \\ \pi_1^* D' \arrow[r, "\sigma'"] & \pi_2^* D' \end{tikzcd}$$

を満たすもの．

$B$ 上の束 $(C, \gamma, B)$ に対して，$p$ によるその引き戻し $(E \times_B C, \pi_1, E)$ は $E$ 上の束を定めているが，これは自然な降下情報を備えている．即ち，$E \times_B E \to E \times_B E$; $(x, y) \mapsto (y, x)$ から定まる $\sigma\colon \pi_1^*(E \times_B C) \cong (E \times_B E) \times_B^1 C \to \pi_2^*(E \times_B C) \cong (E \times_B^2 E) \times_B C$ である (詳細な議論は読者

に委ねる)．これにより，関手

$$\Phi^p\colon \mathbf{Top}_{/B} \to \mathbf{Desc}(p)$$

が定まる．この関手を**比較関手** ([英] comparison functor) と呼ぶ．この降下情報によって $E \times_B C$ を $B$ 上に降下した束は $C$ と一致する．今までの議論より，$B$ 上の束を与えることと $E$ 上の束で降下情報を備えたものを与えることが同値であったので，次の定理が成立する (再び詳細は読者に委ねる)．

**定理 1.10**
比較関手

$$\Phi^p\colon \mathbf{Top}_{/B} \to \mathbf{Desc}(p)$$

は圏同値である．

## 1.4 降下写像

命題 1.5 の形式で記述した降下情報は，$E$ という空間が $E = \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ という形をしていたことに依存していたが，命題 1.8 の形式で述べられたものに関しては，最早 $E$ の性質に依存しておらず，任意の連続写像 $p\colon E \to B$ に対して定義することが出来る[*5]ということに注目しよう．すると，自然に導かれる疑問は，定理 1.10 はどのような $p$ に対して成立するのか，というものである．任意の $p$ に対して定理 1.10 が成立する訳ではないことは言うまでもない (例えば，一点空間から離散二点空間への包含写像 $\{x\} \to \{x, y\}$ を考えれば良い)．実際，この問題は難しい問題であり，その考察の為に先ずは幾つかの概念を新たに導入する．以下では，$p\colon E \to B$ として任意の位相空間の連続写像を考えることにする．

**定義 1.11**
$p\colon E \to B$ を位相空間の連続写像とする．
(1) $p$ が**降下写像**[†]([英] descent morphism) であるとは，$p$ に関する比較関手 $\Phi^p\colon \mathbf{Top}_{/B} \to \mathbf{Desc}(p)$ が忠実充満関手であることである．
(2) $p$ が**有効降下写像**[†]([英] effective descent morphism) であるとは，$p$ に関する比較関手 $\Phi^p\colon \mathbf{Top}_{/B} \to \mathbf{Desc}(p)$ が圏同値であることである．

即ち，$p$ が降下写像であるというのは，$B$ 上の二つの束の間の写像を与えることと，それらを $E$ 上に引き戻した束の間の写像で自然な降下情報と可換なものを与えることが同値であるということであり，$p$ が有効降下写像であるというのは，$B$ 上の束を与えることと $E$ 上の束で降下情報

[*5] 更に言えば，有限個の対象に関する引き戻しを持つ圏で定義出来る．

を備えたものを与えることが同値であるということである．前節迄の議論によって，少なくとも $\coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \to E$ という形の写像は有効降下写像であるということが分かっている．一般に有効降下写像や降下写像を特徴付けることは非自明な問題であるが，既に結果が得られているので，それを証明無しで紹介する．詳細は [8, Section 1] などを参照せよ．

位相空間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が全射であり，かつ任意の部分集合 $U \subseteq Y$ に対して，$U$ が $Y$ の開集合であることと $f^{-1}(U)$ が $X$ の開集合であることが同値であるとき，$f$ を**商写像** ([英] quotient map) という．また，$f$ の任意の引き戻しが再び商写像になる，即ち任意の連続写像 $Z \to Y$ に関する引き戻しで誘導される写像 $X \times_Y Z \to Z$ もまた商写像であるとき，$f$ は**普遍的商写像** ([英] universal quotient map) であるという．今我々が問題にしている状況に於ける降下写像は，まさにこの普遍的商写像と同等な概念であるということが証明出来る [8, Section 1.7].

有効降下写像に関しても特徴付けが存在するが，それを述べる為には幾らかの準備が必要であるので，ここでは割愛する．詳しくは [8, Theorem 1.10] を参照せよ．但し，この特徴付けも確認が簡単なものとは言えない．

# 2 モナド的降下

前節までで，位相空間上に於ける降下理論を概説した．そこでは (有効) 降下写像という概念を定義したが，或る与えられた写像が実際に (有効) 降下写像であることを確認することは簡単ではないということを述べた．本節では，(有効) 降下写像という概念を，圏論に現れる**モナド** ([英] monad) という概念を用いて再解釈する．そうすることにより，Beck のモナド性定理という非常に強力な圏論の定理の恩恵に与ることが出来る様になる．この理論は**モナド的降下理論**†([英] monadic descent theory) と呼ばれる．この理論に於いて非常に重要なのは，降下情報とモナドの Eilenberg–Moore 代数が等価になるという事実 (定理 2.8) である．

## 2.1 随伴関手

先ず，随伴関手という概念を定義する．

**定義 2.1**
二つの関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を考える．$F$ が $G$ の**左随伴関手** ([英] left adjoint functor) である (或いは，$G$ が $F$ の**右随伴関手** ([英] right adjoint functor) であると言っても同義である) とは，任意の $X \in \operatorname{Obj}\mathcal{C}$ と $Y \in \operatorname{Obj}\mathcal{D}$ に対して，自然な全単射

$$\phi_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

が成立することである．$F$ が $G$ の左随伴関手である ($G$ が $F$ の右随伴関手である) ことを $F \dashv G$ と表す．ここで，「自然な」というのは，この全単射が $X$ と $Y$ に関して関手的である，即ち，任意の射 $(\phi\colon X' \to X) \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ と $(\psi\colon Y \to Y') \in \operatorname{Mor}\mathcal{D}$ に対して，それらが

誘導する図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\psi\circ(-)\circ F\phi"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \arrow[d, "\psi\circ(-)\circ F\phi"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X'),Y') \arrow[r, "\phi_{X',Y'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',G(Y'))
\end{tikzcd}$$

が可換であるということを意味している[a].

[a] 即ち，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ から **Set** への関手間の自然同型

$$\phi\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G(-))$$

が存在するということである．

圏論の創始者の一人である S. Mac Lane は著書 *Categories for the Working Mathematician* [12] の中で

> Adjoint functors arise everywhere.(随伴関手はあらゆるところに現れる．)

という標語を掲げており，実際に随伴関手の例は枚挙に暇が無い．ここで例を挙げるにしても極めて限られた数しか挙げられないであろうから，ここでは例を挙げない．具体例は，例えば T. Leinster による圏論の入門的教科書 *Basic Category Theory* の該当箇所 [10, Section 2.1] などを参照せよ．この教科書は邦訳も出ているが，原著 (英語) に関しては筆者自身が arXiv 上にデータを公開している (`https://arxiv.org/abs/1612.09375`) 為，無料で閲覧することが出来る．

続いて，随伴 $F \dashv G$ が与えられたときに自然に定まる幾つかの射を定義する．

**定義 2.2**
今までと同様の状況を考える．各々の $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ に対して，随伴から定まる全単射

$$\phi_{X,F(X)}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(X))$$

を通して $\mathrm{id}_{F(X)} \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$ に対応する射 $\eta_X\colon X \to GF(X) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ が得られる．これは自然変換

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$$

を定め，随伴 $F \dashv G$ の**単位** ([英] unit) と呼ばれる．同様にして，各々の $Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$ に対して，随伴から定まる全単射

$$\phi_{G(Y),Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y),X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y),G(Y))$$

を通して $\mathrm{id}_{G(Y)} \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ に対応する射 $\epsilon_Y\colon FG(Y) \to Y \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$ が得られる．これは自然変換

$$\epsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

を定め，随伴 $F \dashv G$ の**余単位** ([英] counit) と呼ばれる．

単位と余単位を用いることにより，随伴の対応を具体的に記述することが出来る．

**命題 2.3**
(1) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ に対応する射は $Gf \circ \eta_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ である．
(2) $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ に対応する射は $\epsilon_Y \circ Fg \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ である．
(3) $\eta$, $\epsilon$ は図式

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon_{F(-)}"] \\
& F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta_{G(-)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}
$$

を可換にする．この二つの図式によって表される関係式を**三角等式** ([英] triangle identities) という．

**証明**

(1) 随伴の自然性から定まる以下の図式を考える:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\phi_{X,F(X)}"] \arrow[d, "f\circ(-)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[d, "Gf\circ(-)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F(X)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_X \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto] & Gf \circ \eta_X
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X))$ の行き先を追跡すれば，$f$ に対応する射が $Gf \circ \eta_X$ であることが分かる．
(2) (1) と同様にして証明することが出来る．
(3) 一つ目の図式の可換性を示す為には，任意の $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ に対して，図式

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{F(X)}"'] & FGF(X) \arrow[d, "\epsilon_{F(X)}"] \\
& F(X)
\end{tikzcd}
$$

が可換であること，即ち $\epsilon_{F(X)} \circ F\eta_X = \mathrm{id}_{F(X)}$ を示せば良いが，(2) よりこれは $\eta_X$ に対応する射である．単位の定義より，$\eta_X$ は $\mathrm{id}_{F(X)}$ に対応する射であったので，$\epsilon_{F(X)} \circ F\eta_X = \mathrm{id}_{F(X)}$ でなければならない．二つ目の図式に関しても全く同様である．□

実は，これらの自然変換は随伴から定まるのみならず，随伴を定めている．

**定理 2.4**
$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ の間の随伴 ($F$ が $G$ の左随伴関手になるとする) を定めることと，自然変換 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$, $\epsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ で，三角等式を満たすものを定めることと同値である．

**証明**

[10, Theorem 2.2.5] などを参照せよ． □

## 2.2 モナド

この節ではこれから先の議論で重要な役割を果たす**モナド** ([英] monad) という概念を導入する．

**定義 2.5**
$\mathcal{C}$ を圏とする．$\mathcal{C}$ に於ける**モナド** ([英] monad) とは，$\mathcal{C}$ の自己関手 $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ と自然変換

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T, \quad \mu\colon T^2 = T \circ T \to T$$

の組 $(T, \eta, \mu)$ で，以下の図式を可換にするものである:

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

モナドの例として，随伴関手から定まるモナドを考える．

**命題 2.6**
$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を随伴関手の組とする ($F \dashv G$)．このとき，$T = GF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ として定めた自己関手，随伴の単位 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$，及び随伴の余単位から定まる自然変換 $\mu = G\epsilon F\colon GFGF = T^2 \to G\mathrm{id}_{\mathcal{D}}F = T$ は $\mathcal{C}$ 上のモナドを定めている．

**証明**

一つ目の図式は，以下のように表される:

$$\begin{tikzcd} GFGFGF \arrow[r, "GFG\epsilon F"] \arrow[d, "G\epsilon FGF"'] & GFGF \arrow[d, "G\epsilon F"] \\ GFGF \arrow[r, "G\epsilon F"] & GF \end{tikzcd}$$

これの可換性を示す為には，左端の $G$ と右端の $F$ を除いた図式

$$\begin{tikzcd} FGFG \arrow[r, "FG\epsilon"] \arrow[d, "\epsilon FG"'] & FG \arrow[d, "\epsilon"] \\ FG \arrow[r, "\epsilon"] & \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

の可換性，即ち，任意の $Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$ に対して $\epsilon_Y \circ FG\epsilon_Y = \epsilon_Y \circ \epsilon_{FG(Y)}$ が成立することを示せば良い．随伴を通して $\epsilon_Y \circ \epsilon_{FG(Y)}$ に対応する射を考えると[a] $G\epsilon_Y$ となるが，命題 2.3 (2) を用いて，これに対応する射を構成すると，$\epsilon_Y \circ FG\epsilon_Y$ となる．従って，求めていた式が成立する．

二つ目の図式に関しては，三角等式から容易に導かれる． □

[a] 自然性条件などを用いる．詳細は省略する．

続いてモナド上の **Eilenberg–Moore 代数** ([英] Eilenberg–Moore algebra) と呼ばれる対象を定義する．

**定義 2.7**
$\mathcal{C}$ を圏とし，$(T, \eta, \mu)$ を $\mathcal{C}$ 上のモナドとする．$T$ の **Eilenberg–Moore 代数** ([英] Eilenberg–Moore algebra)，或いはただ単に $T$ **代数** ([英] $T$-algebra) とは，$\mathcal{C}$ の対象 $X$ と射 $h\colon T(X) \to X$ の組 $(X, h)$ で，以下の図式を可換にするものである:

$$\begin{tikzcd} T^2(X) \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\mu_X"] & T(X) \arrow[d, "h"] \\ T(X) \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & T(X) \arrow[d, "h"] \\ & X \end{tikzcd}$$

また，二つの $T$ 代数 $(X, h)$, $(X', h')$ 間の射は，$\mathcal{C}$ に於ける射 $f\colon X \to X'$ で，以下の図式を可換にするものとする:

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "Tf"] & X \arrow[d, "f"] \\ T(X') \arrow[r, "h'"] & X' \end{tikzcd}$$

以上の定義によって定まる $T$ 代数の圏を $\mathcal{C}^T$ と書き，$\mathcal{C}$ の **Eilenberg–Moore 圏** ([英] Eilenberg–Moore category) という．

随伴関手から定まるモナドの代数に関して考察を進める．随伴関手の記号などは従前と同様とする．このとき，**比較関手** ([英] comparison functor) と呼ばれる関手 $\Phi^T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$ が次のようにして定まる．$Y \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$ に対して $T$ 代数 $\Phi^T(Y)$ を $(G(Y), h = G\epsilon_Y\colon T(G(Y)) = GFG(Y) \to G(Y))$ として定める．これが実際に $T$ 代数を定めていることは，命題 2.6 の証明と同様の手法に

よって確かめられる．

ここで，前節で降下理論を論じたときにも比較関手と呼ばれる関手が現れたことを思い出そう．降下理論に於いては，比較関手とは $B$ 上の束の圏から $E$ 上の束で降下情報を備えたものの圏への関手 $\Phi^p\colon \mathbf{Top}_{/B} \to \mathbf{Desc}(p)$ であった．実際，降下理論に於ける比較関手と先ほど導入した比較関手は関連した概念であることが後に判明するであろう．次節で考察するように，降下理論に於いても或る随伴が存在し，その随伴の代数がまさに降下情報を備えた束と同値になるということが示せる．

## 2.3 位相空間上の降下のモナド的解釈

連続写像 $p\colon E \to B$ から引き戻し関手と呼ばれる関手 $p^*\colon \mathbf{Top}_{/B} \to \mathbf{Top}_{/E}$ が定義されることは以前に見た通りだが，$p$ から別の関手

$$p_!\colon \mathbf{Top}_{/E} \to \mathbf{Top}_{/B};\quad (D,\delta,E) \mapsto (D,\delta\circ p,B)$$

を構成することが出来る．更に，この関手は $p^*$ の左随伴関手になっている．即ち，任意の $D \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Top}_{/E}$ と $C \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Top}_{/B}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_{/B}}(p_!D, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_{/E}}(D, p^*C)$$

という全単射が自然に成立する．この随伴の単位 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Top}_{/E}} \to p^*p_!$ と余単位 $\epsilon\colon p_!p^* \to \mathrm{id}_{\mathbf{Top}_{/B}}$ は，$(C,\gamma,B) \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Top}_{/B}$, $(D,\delta,E) \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Top}_{/E}$ に対して

$$\begin{aligned}\eta_D &= (\delta,\mathrm{id}_D)\colon D \to E\times_B D;\quad d \mapsto (\delta(d),d),\\ \epsilon_C &= \mathrm{pr}_2\colon E\times_B C \to C;\quad (x,c)\mapsto c.\end{aligned}$$

但し，$(\delta,\mathrm{id}_D)$ は引き戻しの普遍性から定まる射であり，$\mathrm{pr}_2$ は第 2 成分への自然な射影を意味している*6.

前節での議論より，$T_p = p^*p_!$ は $\mathbf{Top}_{/E}$ 上のモナド $(T_p,\eta,\mu = p^*\epsilon p_!)$ を定めている．$(D,\delta,E) \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Top}_{/E}$ に対して $T_p$ の作用を具体的に記述すると，$T_p(D,\delta,E) = (E\times_B D, \mathrm{pr}_1, E)$ である．また，$\mu$ は $(D,\delta,E) \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Top}_{/E}$ に対して

$$\mu_D = p^*\epsilon_{p_!D}\colon p^*p_!p^*p_!D = E\times_B E\times_B D \to p^*p_!D = E\times_B D;\ (x,y,d)\mapsto(x,d)$$

で与えられる射である．

以上の状況に於いて，降下情報を定めることとモナドの代数を定めることが同値であるということが証明出来る．

---

*6 前節では自然な射影を $\pi_i$ という記号で表していたが，$\pi_i$ という記号は命題 1.7 の後で整理した通りの意味で用いたいので，これ以降は別の記号を割り当てることにする．

**定理 2.8**
$(D, \delta, E) \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Top}_{/E}$ に対して，$D$ に対する降下情報 $\sigma\colon \pi_1^* D \to \pi_2^* D$ を定めることと，$D$ 上の代数構造 $h\colon T_p(D) = E \times_B D \to D$ を定めることは同値である (即ち，$D$ 上の降下情報と代数構造は全単射に対応する).

<u>**証明**</u>

降下情報 $\sigma\colon \pi_1^* D \cong D \times_B E \to E \times_B D \cong \pi_2^* D$ が与えられたとする．$\mathrm{pr}_1 \circ \sigma^{-1}$, $\mathrm{pr}_2 \circ \sigma^{-1}$ をそれぞれ $\sigma_D^{-1}$, $\sigma_E^{-1}$ と略記することにする．このとき，$\sigma\colon E \times_B D \to D \times_B E$ は

$$\sigma\colon (x, d) \mapsto (\sigma_D^{-1}(x, d), \sigma_E^{-1}(x, d))$$

と表示される．今，$h = \sigma_D^{-1}\colon E \times_B D \to D$ と定めたとき，これが $D$ 上の代数構造を定めることを証明する．

$\sigma^{-1}$ は $E \times_B E$ 上の写像であるので，次の可換図式を満たしている:

$$\begin{tikzcd}
E \times_B D \arrow[rr, "\sigma^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_E \times_B \delta"'] & & D \times_B E \arrow[dl, "\delta \times_B \mathrm{id}_E"] \\
& E \times_B E &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x, d) \arrow[r, mapsto, "\sigma^{-1}"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{id}_E \times_B \delta"] & (\sigma_D^{-1}(x, d), \sigma_E^{-1}(x, d)) \arrow[d, mapsto, "\delta \times_B \mathrm{id}_E"] \\
(x, \delta(d)) \arrow[r, equal] & (\delta(\sigma_D^{-1}(x, d)), \sigma_E^{-1}(x, d))
\end{tikzcd}$$

即ち，任意の $(x, d) \in E \times_B D$ に対して

$$x = \delta(\sigma_D^{-1}(x, d)), \tag{1}$$
$$\delta(d) = \sigma_E^{-1}(x, d) \tag{2}$$

が成立している．また，降下情報の条件より，$\sigma^{-1}$ は次の可換図式も満たしている:

$$\begin{tikzcd}
D \times_B E \times_B E & & E \times_B D \times_B E \arrow[ll, "\rho_{12}^* \sigma^{-1}"'] \\
& E \times_B E \times_B D \arrow[ul, "\rho_{13}^* \sigma^{-1}"] \arrow[ur, "\rho_{23}^* \sigma^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\sigma_D^{-1}(x, \sigma_D^{-1}(y, d)), \sigma_E^{-1}(x, \sigma_D^{-1}(y, d)), \sigma_E^{-1}(y, d)) \arrow[d, equal] & (x, \sigma_D^{-1}(y, d), \sigma_E^{-1}(y, d)) \arrow[l, mapsto, "\rho_{12}^* \sigma^{-1}"'] \\
(\sigma_D^{-1}(x, d), y, \sigma_E^{-1}(x, d)) & (x, y, d) \arrow[l, mapsto, "\rho_{13}^* \sigma^{-1}"'] \arrow[u, mapsto, "\rho_{23}^* \sigma^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

即ち，任意の $(x, y, d) \in E \times_B E \times_B D$ に対して

$$\sigma_D^{-1}(x, d) = \sigma_D^{-1}(x, \sigma_D^{-1}(y, d)), \tag{3}$$
$$y = \sigma_E^{-1}(x, \sigma_D^{-1}(y, d)), \tag{4}$$
$$\sigma_E^{-1}(x, d) = \sigma_E^{-1}(y, d) \tag{5}$$

が成立している．

先ず，代数の構造射 $h\colon E\times_B D\to D$ は $E$ 上の射，即ち，以下の図式を可換にする射でなければならない:

$$
\begin{tikzcd}
E\times_B D \arrow[rr, "h=\sigma_D^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & D \arrow[dl, "\delta"] \\
& E &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x,d) \arrow[r, mapsto, "h"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{pr}_1"] & \sigma_D^{-1}(x,d) \arrow[d, mapsto, "\delta"] \\
x \arrow[r, equal, "?"] & \delta(\sigma_D^{-1}(x,d))
\end{tikzcd}
$$

これは式 (1) に他ならない.

続いて，定義 2.7 の一つ目の図式を考える．これは現在考えている状況では，次の図式の可換性を意味している:

$$
\begin{tikzcd}
E\times_B E\times_B D \arrow[r, "T_p h"] \arrow[d, "\mu_D"] & E\times_B D \arrow[d, "h"] \\
E\times_B D \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x,y,d) \arrow[rr, mapsto, "T_p h"] \arrow[d, mapsto, "\mu_D"] & & (x,\sigma_D^{-1}(y,d)) \arrow[d, mapsto, "h"] \\
(x,d) \arrow[r, mapsto, "h"] & \sigma_D^{-1}(x,d) \arrow[r, phantom, "\overset{?}{=}"] & \sigma_D^{-1}(x,\sigma_D^{-1}(y,d))
\end{tikzcd}
$$

これは式 (3) に他ならない.

最後に，定義 2.7 の二つ目の図式を考える．これは現在考えている状況では，次の図式の可換性を意味している:

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_D"] & E\times_B D \arrow[d, "h"] \\
& D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, mapsto, "\eta"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{id}_D"] & (\delta(d),d) \arrow[d, mapsto, "h"] \\
d \arrow[r, equal, "?"] & \sigma_D^{-1}(\delta(d),d)
\end{tikzcd}
$$

従って，示すべきことは $d=\sigma_D^{-1}(\delta(d),d)$ であるが，$\sigma^{-1}$ は同相写像であるので，これを示す為には $\sigma^{-1}(\delta(d),d)=\sigma^{-1}(\delta(d),\sigma_D^{-1}(\delta(d),d))$，即ち，成分ごとに表示すれば

$$
\begin{aligned}
\sigma_D^{-1}(\delta(d),d) &= \sigma_D^{-1}(\delta(d),\sigma_D^{-1}(\delta(d),d)),\\
\sigma_E^{-1}(\delta(d),d) &= \sigma_E^{-1}(\delta(d),\sigma_D^{-1}(\delta(d),d))
\end{aligned}
$$

という等式を証明すれば良い．これらの等式は，式 (2), (3), (4) に於いて $x=y=\delta(d)$ と置いたものから証明出来る.

逆に，代数構造 $h\colon E\times_B D\to D$ が与えられたとき，代数としての条件から成立する等式は以下の通りである (但し $(x,y,d)\in E\times_B E\times_B D$):

$$
\begin{aligned}
&x=\delta(h(x,d)),\\
&h(x,d)=h(x,h(y,\delta(d))),\\
&d=h(\delta(d),d).
\end{aligned}
$$

ここで，二つの写像

$$E \times_B D \to D \times_B E; \quad (x, d) \mapsto (h(x, d), \delta(d)),$$
$$D \times_B E \to E \times_B D; \quad (d, x) \mapsto (\delta(d), h(x, d))$$

を考えると，これらは互いに逆写像を成しているということが確認出来る．従って，この二つは同相写像であり，それぞれを $\sigma^{-1}$, $\sigma$ とする．このとき $\sigma$ が降下情報であるということは，先ほどの議論と同様の図式の追跡によって確認することが出来る．

以上に述べた対応によって，降下情報と代数構造が全単射に対応するということも容易に確認することが出来る． □

**系 2.9**
降下情報の圏 $\mathbf{Desc}(p)$ と，随伴 $p_! \dashv p^*$ から定まるモナド $T_p$ の Eilenberg–Moore 圏 $\mathbf{Top}_{/E}^{T_p}$ は,

$$\mathbf{Desc}(p) \to \mathbf{Top}_{/E}^{T_p};\ (D, (\sigma\colon D \times_B E \to E \times_B D)) \mapsto (D, (E \times_B D \xrightarrow{\sigma^{-1}} D \times_B E \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} D)),$$
$$\mathbf{Top}_{/E}^{T_p} \to \mathbf{Desc}(p);\ (D, (h\colon D \times_B E \to D)) \mapsto (D, (D \times_B E \xrightarrow{(\delta, h\circ(\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_1))} E \times_B D))$$

という関手によって同値になり，この同値を通して今までに定義した二つの比較関手は同一視される．

**注 2.10**
本稿では，位相空間上の降下情報と Eilenberg–Moore 代数の等価性しか証明しないが，この等価性はこれより遙かに広い範疇で証明することが出来る．実際，両者の等価性を見出した嚆矢とも言える Bénabou–Roubaud の論文 [2] では，**Beck–Chvalley 条件** ([英] Beck–Chvalley conditon) という条件を満たす**双繊維化**†([英] bifibration) という，極めて一般的な状況に於ける両者の同値性が証明されている (Bénabou–Roubaud の定理).

## 2.4 モナド的降下

前節の議論により，降下情報とモナドの代数が結びついた．この結びつきは，一見すると降下情報という概念を別の言葉で書き換えただけの単なる無用な知的遊戯に見えるかもしれないが，それは正しくない．モナドの理論は **Beck のモナド性定理** ([英] Beck's monadicity theorem) という非常に強力な定理を持っており，先ほどの同値性によりこの定理を降下理論に対して応用出来るようになるのである．本節ではその定理の主張を紹介する．その前に，幾つかの概念を新たに導入しよう．以下で定義されるモナド的 (有効) 降下射という概念は既に導入されている (有効) 降下写像

のモナド論的な類似であるが，位相空間の圏のみならず，有限個の対象の引き戻しを持つ圏に対して定義される広範な概念であることに注意されたい．

**定義 2.11**
関手 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を考える．
(1) $G$ が**前モナド的関手**†([英] premonadic functor) であるとは, $G$ が左随伴関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を持ち，それに付随するモナド $T$ に関する比較関手 $\Phi^T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$ が忠実充満関手であることである．
(2) $G$ が**モナド的関手**†([英] monadic functor) であるとは，$G$ が左随伴関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を持ち，それに付随するモナド $T$ に関する比較関手 $\Phi^T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$ が圏同値であることである．
特に，$\mathcal{C}$ を有限個の対象の引き戻しを持つ圏とすると，任意の $(p\colon E \to B) \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ に対して二つの関手

$$\begin{aligned} p_!\colon \mathcal{C}_{/E} \to \mathcal{C}_{/B}; &\quad (D \to E) \mapsto (D \to E \xrightarrow{p} B), \\ p^*\colon \mathcal{C}_{/B} \to \mathcal{C}_{/E}; &\quad (D \to B) \mapsto (E \times_B D \to E) \end{aligned}$$

は随伴 $p_! \dashv p^*$ を定める．
(3) $p$ が**モナド的降下射**†([英] monadic descent morphism) であるとは，$p^*$ が前モナド的関手であることである．
(4) $p$ が**モナド的有効降下射**†([英] monadic effective descent morphism) であるとは，$p^*$ がモナド的関手であることである．

**定義 2.12**
(1) 関手 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が**同型を反映する** ([英] reflects isomorphisms) とは，$f \in \operatorname{Mor}\mathcal{D}$ に対して $Gf \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ が同型であれば $f$ も同型であるということである．
(2) 写像の組 $(f, g\colon X \to Y) \in \operatorname{Mor}\mathcal{D}$ が**可縮**†([英] contractible) であるとは，或る射 $j\colon Y \to X$ が存在して，$f \circ j = \mathrm{id}_Y$ 及び $g \circ j \circ f = g \circ j \circ g$ が成立するということである．
また，斯様な条件を満たす $t\colon Y \to X$ を $(f, g)$ の**引き込み**†([英] retract) と呼ぶ．
(3) 圏 $\mathcal{D}$ に於ける**叉**(サ)†([英] fork) とは，図式

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$$

で $h \circ f = h \circ g$ を満たすものである．如上の叉を $\left(X \xrightarrow{f,g} Y \xrightarrow{h} Z\right)$ と略記することがある．
(4) 圏 $\mathcal{D}$ に於ける叉 $\left(X \xrightarrow{f,g} Y \xrightarrow{h} Z\right)$ を考える．$Z$ と $h\colon Y \to Z$ の組 $(Z, h)$ が写像の組 $(f, g\colon X \to Y) \in \operatorname{Mor}\mathcal{D}$ の**余等化子** ([英] coequalizer) であるとは，これが次の性質を満たすことである: 任意の射 $h'\colon Y \to Z'$ で $h' \circ f = h' \circ g$ を満たすものに対して，射 $\phi\colon Z \to Z'$ で $h' = \phi \circ h$ を満たすものが一意的に存在する．斯様な性質を持つ $Z$ 及び $h$

は，存在すれば同型を除いて一意に定まり，$Z$ を $\mathrm{Coeq}(f,g)$，$h$ を $\mathrm{coeq}(f,g)$ と表す．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "\mathrm{coeq}(f,g)"] \arrow[dr, "{}^{\forall}h'"'] & \mathrm{Coeq}(f,g) \arrow[d, dashed, "{}^{\exists!}\phi"] \\
 & & {}^{\forall}Z'
\end{tikzcd}
$$

Beck のモナド性定理とは，モナド的関手の特徴付けを与える定理である．様々な形の主張があるが，ここでは [9, Theorem 2.1] で述べられている形を掲載する．証明は [12, Theorem 5.7.1] などを参照せよ．

**定理 2.13: Beck のモナド性定理**
$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を余等化子を持つ圏とする．関手 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ がモナド的関手であることは，以下の条件と同値である:

i) $G$ は左随伴を持つ;
ii) $G$ は同型を反映する;
iii) 始域と終域を同じくする射の組 $(f,g)$ で，$(Gf, Gg)$ が可縮なものに対して，$G$ は $(f,g)$ の余等化子を保つ[a].

[a] $\mathrm{Coeq}(Gf, Gg) \cong G(\mathrm{Coeq}(f,g))$ であるということである．

$F \dashv G$ の余単位 $\epsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ が

続いて，この定理の別の定式化を導く．次節ではその定式化を用いて可換環の圏に於ける有効降下射を特徴付けることとなる．

**定義 2.14**
(1) 圏 $\mathcal{D}$ に於ける図式

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[l, bend right=60, "t"'] \arrow[r, "h"] & Z \arrow[l, bend right=60, "s"']
\end{tikzcd}
$$

を考える．ただし，$\left(X \overset{f,g}{\longrightarrow} Y \overset{h}{\to} Z\right)$ は叉であるとする．組 $(Z,h,s,t)$ が写像の組 $(f,g\colon X \to Y) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$ の**分裂余等化子** ([英] split coequalizer) であるとは，これが次の性質を満たすことである:$h \circ s = \mathrm{id}_Z$, $s \circ h = g \circ t$, $f \circ t = \mathrm{id}_Y$．このとき，$Z$ は写像の組 $(f,g\colon X \to Y)$ の余等化子であることが証明出来る．また，斯様な $s$, $t$ が存在する叉 $\left(X \overset{f,g}{\longrightarrow} Y \overset{h}{\to} Z; s, t\right)$ のことを，**分裂叉** ([英] split fork) と呼ぶ．
(2) 射 $f\colon X \to Y$ が**分裂エピ射** ([英] split epimorphism) であるとは，射 $s\colon Y \to X$ で $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在することである．如上の $s$ を $f$ の**切断** ([英] section) とい

う．一般に，切断は一意に定まるとは限らない．また，分裂エピ射はエピ射であることが証明出来る．
(3) 射 $f\colon X \to Y$ が**極値的エピ射**†([英] extremal epimorphism) であるとは，$f$ の任意の分解 $f = m \circ g$ で $m$ がモノ射である様なものに対して、$m$ が必ず同型となることである．

**命題 2.15**
(1) $\left(X \overset{f,g}{\longrightarrow} Y \overset{h}{\to} Z; s, t\right)$ を圏 $\mathcal{D}$ に於ける分裂叉とする (従って，$Z$ は $(f,g)$ の (分裂) 余等化子である)．このとき，$\mathcal{D}$ から任意の圏への任意の関手 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ に関して，$G(Z)$ は圏 $\mathcal{C}$ に於いて $\mathrm{Coeq}(Gf, Gg)$ と同型である[a]．
(2) 或る叉 (と射 $s\colon Z \to Y$, $t\colon Y \to X$ の組) $\left(X \overset{f,g}{\longrightarrow} Y \overset{h}{\to} Z; s, t\right)$ が分裂叉である為の必要十分条件は，$Z$ が $f$ と $g$ の余等化子であり，且つ $(f,g)$ が可縮である，即ち，射 $t\colon Y \to X$ で $f \circ t = \mathrm{id}_Y$, $g \circ t \circ f = g \circ t \circ g$ を満たすものが存在することである．

[a] このように，全ての関手によって保存される余等化子を**絶対余等化子** ([英] absolute coequalizer) と呼ぶ．

**証明**

(1) 分裂余等化子は射に関する関係式から定まっており，これらの関係式は明らかに如何なる関手によっても保存される為，分裂余等化子は任意の関手によって保存される．従ってこれは絶対余等化子である．
(2) $\left(X \overset{f,g}{\longrightarrow} Y \overset{h}{\to} Z; s, t\right)$ が分裂叉であれば $Z$ は $(f,g)$ の分裂余等化子であるので余等化子でもあり，また，分裂を与えている $t$ が $(f,g)$ の引き込みとなることも容易に確認出来る．

逆に $Z$ が $(f,g)$ の余等化子であり，且つ $t\colon Y \to X$ が $(f,g)$ の引き込みであるとする．このとき，図式 $\left(X \overset{f,g}{\longrightarrow} Y \overset{g \circ t}{\longrightarrow} Y\right)$ は叉であることが $(f,g)$ の可縮性より証明出来るので，余等化子の普遍性により，射 $s\colon Z \to Y$で，$s \circ h = g \circ t$ を満たすものが存在することが一意的に分かる．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g\circ t"'] & Z \arrow[d, dashed, "\exists! s"] \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

このとき，$\left(X \overset{f,g}{\longrightarrow} Y \overset{h}{\to} Z; s, t\right)$ が分裂叉であることが証明出来る．実際，この図式が分裂叉である為の条件は $h \circ s = \mathrm{id}_Z$, $s \circ h = g \circ t$, $f \circ t = \mathrm{id}_Y$ であり，このうち $s \circ h = g \circ t$ は $s$ の定義から，また $f \circ t = \mathrm{id}_Y$ は $t$ が $(f,g)$ の引き込みであることからすぐに分かるので，示すべき等式は $h \circ s = \mathrm{id}_Z$ のみである．一般に，射の組 $\left(X \overset{f,g}{\longrightarrow} Y\right)$ に対して，余等化子が存在すれば，自然な射 $\mathrm{coeq}(f,g)\colon Y \to \mathrm{Coeq}(f,g)$ はエピ射であるので[a]，$h \circ s = \mathrm{id}_Z$ という

等式を証明する為には $h \circ s \circ h = h$ という等式を証明すれば十分である．既知の関係式より

$$\begin{aligned} h \circ s \circ h &= h \circ g \circ t \\ &= h \circ f \circ t \\ &= h \end{aligned}$$

が導ける． □

[a] このように，或る射の組の余等化子になる射を**正則エピ射** ([英] regular epimorphism) と呼ぶ．正則エピ射がエピ射であることは容易に確認出来る．

**命題 2.16**
図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "t"] & Y \arrow[d, shift left, "v"] \\ X' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] \arrow[u, shift left, "s"] & Y' \arrow[u, shift left, "u"] \end{tikzcd}$$

で $v \circ f = f' \circ t$, $v \circ g = g' \circ t$, $f \circ s = u \circ f'$, $g \circ s = u \circ g'$, $t \circ s = \mathrm{id}_{X'}$, $v \circ u = \mathrm{id}_{Y'}$ を満たすものに関して，$(f, g)$ が可縮ならば $(f', g')$ も可縮である．

**証明**

$t\colon Y \to X$ を $(f, g)$ の引き込みとしたとき，$t' = t \circ j \circ u\colon Y' \to X'$ が $(f', g')$ の引き込みを与えることが証明出来る． □

**系 2.17**
$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を任意の圏とする．$\mathcal{D}$ と $\mathcal{C}$ の間の二つの関手 $\Phi, \Psi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ の間に分裂エピ射 $\tau\colon \Phi \to \Psi$ が存在しているとする．このとき，始域と終域を同じくする射の組 $(f, g)$ に関して，$(\Phi f, \Phi g)$ が可縮であれば，$(\Psi f, \Psi g)$ も可縮である．

**定理 2.18: Beck のモナド性定理 [9, Theorem 2.3]**
$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を余等化子を持つ圏とする．関手 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ がモナド的関手であることは，以下の条件と同値である:

i) $G$ は左随伴関手 $F$ を持つ;
ii) $G$ は同型を反映する;

iii) (同型を除いて) 可換な圏の図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] & \mathcal{C} \arrow[d, "H'"] \\ \mathcal{Y} \arrow[r, "G'"] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

で，以下の条件を満たすものが存在する:

iii-1) $H\epsilon\colon HFG \to H$ は分裂エピ射である;

iii-2) 始域と終域を同じくする射の組 $(f, g)$ で，$(Gf, Gg)$ が可縮なものに対して，$H$ は $(f, g)$ の余等化子を保つ;

iii-3) $H'$ は同型を反映する．

**証明**

関手 $G$ が上述の条件 i)–iii) を満たしているとする．このとき，定理 2.13 の iii) 以外の条件は満たされているので，その条件が満たされていることを証明すれば十分である．具体的には，射の組 $(f, g\colon X \to Y) \in \operatorname{Mor}\mathcal{D}$ で $(Gf, Gg)$ が可縮であるものに関して $G(\operatorname{Coeq}(f, g)) \cong \operatorname{Coeq}(Gf, Gg)$ であるということを証明すれば良い．$(Gf, Gg)$ の可縮性より $\operatorname{Coeq}(Gf, Gg)$ は分裂余等化子であるので，命題 2.15 (1) よりこの (分裂) 余等化子は任意の関手によって保存され，特に $H'$ によっても保存される．

一方，可縮な射の組を関手で移しても依然として可縮であるので，$(HFGf, HFGg)$ は可縮であり，これと仮定 iii-1) 及び系 2.17 より，$(Hf, Hg)$ も可縮である．従って，この組の余等化子は凡ゆる関手によって保存され，特に $G'$ によっても保存される．ここで，仮定 iii-2) より $(f, g)$ の余等化子は $H$ によって保たれるので，$(f, g)$ の余等化子は $G'H \cong H'G$ によって保存されることが分かる．

以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, shift left, "Gf"] \arrow[r, shift right, "Gg"'] \arrow[d, equal] & G(Y) \arrow[r, "\operatorname{coeq}(Gf, Gg)"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Coeq}(Gf, Gg) \arrow[d, dashed, "\exists! \phi"] \\ G(X) \arrow[r, shift left, "Gf"] \arrow[r, shift right, "Gg"'] & G(Y) \arrow[r, "G\operatorname{coeq}(f, g)"] & G(\operatorname{Coeq}(f, g)) \end{tikzcd}$$

従前の議論により，この図式を関手 $H'$ で移した図式は，上下の行いずれも余等化子を定める叉となる為，$H'\phi$ は同型である．今，仮定 iii-3) より $H'$ は同型を反映するので，$\phi$ も同型である．従って，我々が求めていた $G(\operatorname{Coeq}(f, g)) \cong \operatorname{Coeq}(Gf, Gg)$ という同型が成立することが証明された．

逆に，$G$ がモナド的関手であると仮定したとき，$H = G$, $H' = G' = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ とすれば，定理 2.13 や三角等式から求めている条件が導ける． □

この定理によって，(モナド的) 有効降下射の判定が行えるようになる場合がある．詳しい例は次の節で見る．

# 3 環上加群の降下

## 3.1 忠実平坦降下

$f\colon R \to S$ を可換環の射とする．このとき，テンソル積によって**係数拡大関手** ([英] extension-of-scalars functor)

$$f^*\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod};\quad M \mapsto S \otimes_R M$$

が定まる．この関手は，**係数制限関手** ([英] restriction-of-scalars functor) と呼ばれる関手

$$f_*\colon S\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod};\quad N \mapsto N_R \quad (N_R \text{ は } N \text{ を } f \text{ を通じて } R \text{ 加群と見做した加群})$$

を右随伴関手に持つ．従って，双対を取って $f^*\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \to S\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}}$ と $f_*\colon S\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \to R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}}$ を考えれば，これは随伴 $f_* \dashv f^*$ を定める．この随伴に関するモナド的降下を考察する[*7]．

この状況に於いて，$S$ 加群 $N$ の降下情報とは，$S \otimes_R S$ 加群の射 $\sigma\colon N \otimes_R S \xrightarrow{\cong} S \otimes_R N$ で，図式

$$\begin{tikzcd}
N \otimes_R S \otimes_R S \arrow[rr, "\rho_{12}^*\sigma"] \arrow[dr, "\rho_{13}^*\sigma"'] & & S \otimes_R N \otimes_R S \arrow[dl, "\rho_{23}^*\sigma"] \\
& S \otimes_R S \otimes_R N &
\end{tikzcd}$$

を可換にするものである．

このとき，問うべき問題は，可換環の有効降下射，即ち $R$-$\mathbf{Mod}$ と降下情報を備えた $S$ 加群の圏が比較関手を通して同値になるような可換環の射 $f\colon R \to S$ はどのようなものであるか，というものである．

この問題に対して**忠実平坦射** ([英] faithfully flat morphism; [仏] morphisme fidèlement plat) という射が十分条件を与える，即ち**忠実平坦降下** ([英] faithfully flat descent; [仏] descente fidèlement plate) が成立するということは古くより知られていた．

**定理 3.1: 忠実平坦降下 [5, Lemme VIII.1.6]**
$N'$ を可換環の射 $A \to A'$ に関する降下情報を備えた $A'$ 加群とする．$N$ を $N'$ の部分 $A$ 加群で，$\phi(x \otimes_{A'} 1_{A'}) = 1_{A'} \otimes_{A'} x$ を満たす元 $x$ 全てからなるものとする．このとき，自然な射

$$N \otimes_A A' \to N'$$

[*7] 双対を取るとモナド的降下になるので，双対を取る前の状況は**余モナド的降下**[†]([英] comonadic descent) である．

(これは降下情報とも可換である) を考える．もし $A'$ が $A$ 上忠実平坦ならば，この射は同型である．

忠実平坦射が有効降下射であるという事実自体は Beck のモナド性定理から帰結することが出来る[*8]が，先ほど引用した命題ではより精密に，降下して得られる加群の表示も与えているという点で，単なる降下可能性の主張よりも強い主張を与えている．

**注 3.2**

以上に述べた状況は純粋に可換環論的なものであるが，**スキーム** ([英] scheme) という代数幾何学に於ける概念を用いることで第 1 節で述べた位相空間に関する降下理論と並行的に解釈することが出来るようになる．スキーム論に於いては可換環 $R$ は**アフィンスキーム** ([英] affine scheme) と呼ばれる局所環付空間 $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ と見做され，可換環の射 $f\colon R \to S$ はアフィンスキームの射 $f^{\#}\colon (\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}) \to (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ と見做される．このもとで，$R$ 加群は $\operatorname{Spec} R$ 上の**層** ([英] sheaf) と同一視され，如上の降下情報はまさにこれらの層の貼り合わせの為の情報と見做せる．本稿ではスキーム論に関して触れることは出来ないが，基本的な文献としては [7] や [11] などが挙げられるので，興味のある向きはそちらを参照されたい．

スキームの降下を考えるときには忠実平坦性を課すのみでは降下をすることが証明することが出来ず，更に**擬コンパクト** ([英] quasi-compact; [仏] quasi-compact) という或る種の有限性を仮定した，**fpqc 射** ([英] fpqc morphism; [仏] morphisme fpqc, morphisme fidèlement plat et quasi-compact) という射を考える必要がある．この理論は **fpqc 降下** ([英] fpqc descent; [仏] descente fidèlement plate et quasi-compacte) と呼ばれる．fpqc 降下に関しては [4, Chapter 1][a]や [5, Exposé VIII] などの文献に詳しい．

[a] 第一章 Descent Theory に関してはホームページから閲覧することが出来る: `https://doi.org/10.1142/9569`.

## 3.2 可換環の有効降下射の特徴付け

我々の目標であった [9, Corollary 5.4] の結果を述べる為に必要な**純性射**†([英] pure morphism) という概念を導入する．

**定義 3.3**

可換環 $R$ に対して，$R$ 加群の射 $f\colon M \to M'$ が**純性射**†([英] pure monomorphism) であるとは，任意の $R$ 加群 $N$ に対して，$\mathrm{id}_N \otimes_R f\colon N \otimes_R M \to N \otimes_R M'$ が単射であることであ

[*8] その証明に関しては例えば [3, Proposition 4.4.3] などを参照．

る．また，可換環の射 $f\colon R \to S$ が純性射であるとは，$f$ を $R$ 加群の射と見做したときにこれが前述の意味で純性射である，即ち，任意の $R$ 加群 $M$ に対して $\mathrm{id}_M \otimes_R f\colon M \to S \otimes_R M$ が単射であることである．

特に，忠実平坦射が純射であることは容易に証明される．我々が最終的に証明したい結果は，可換環の圏に於ける有効降下射と純性射が同値であることを主張する定理である．

我々の目標は Beck のモナド性定理 (定理 2.18) を用いて可換環の有効降下射を特徴付けることであるが，その為には何らかの関手が同型を反映することを証明する必要がある．幸いなことに，その関手が右随伴関手である (即ち，左随伴関手を持つ場合) には，同型の反映の同値な言い換えが存在する．

**命題 3.4**
右随伴関手 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が同型を反映する為の必要十分条件は，その随伴の余単位 $\epsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ の全ての成分 (即ち，任意の $X \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$ に対する $\epsilon_X\colon FG(X) \to X$) が極値的エピ射 (定義 2.14) であることである．

**証明**

[1, Remark 1.5] などを参照せよ． □

さて，愈々 Beck のモナド性定理 (定理 2.18) を用いて，可換環の有効降下射と純性射の同値性の証明を試みよう．定理 2.18 には，$\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$ という四つの圏と，$G$, $H$, $G'$, $H'$ という四つの関手が登場したが，これらを以下の様に定める:

$\mathcal{D} = R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}}$:$R$ 加群の圏の双対圏;
$\mathcal{C} = S\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}}$:$S$ 加群の圏の双対圏;
$\mathcal{Y} = R\text{-}\mathbf{Mod}$:$R$ 加群の圏;
$\mathcal{X} = \mathbf{Ab}$: Abel 群の圏 (=$\mathbb{Z}$ 加群の圏);
$G = S \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \to S\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}}$;
$H = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$;
$G' = \mathrm{Hom}_R(S, -)\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$;
$H' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon S\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$.

$$\begin{tikzcd} R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "S\otimes_R -"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})"'] & S\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})"] \\ R\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(S,-)"] & \mathbf{Ab} \end{tikzcd}$$

ここで，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は Abel 群の圏 $\mathbf{Ab}$ に於ける**入射的余生成対象** ([英] injective cogenerator) である[*9]為，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は忠実完全関手であることに注意せよ．

[*9] 例えば [15, Proposition 15.3.2] などを参照せよ．

**命題 3.5: [13, Lemma 1]**
$R$ 加群の射 $f\colon M \to M'$ に対して，$f$ が純性射であることと，

$$Hf = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が分裂エピ射であることは同値である．

**証明**

$f$ が純性射である場合，次の可換図式を考える．ここで，縦の同型は tensor–hom 随伴[a]から定まる同型である．

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(H(M), H(M')) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(H(M),Hf)} & \mathrm{Hom}_R(H(M), H(M)) \\
\downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong} \\
H(H(M) \otimes_R M') & \xrightarrow{H(\mathrm{id}_{H(M)} \otimes_R f)} & H(H(M) \otimes_R M)
\end{array}$$

今，$f$ の純性より，$\mathrm{id}_{H(M)} \otimes_R f$ は単射であるので $H$(反変関手であることに注意) の完全性より $H(\mathrm{id}_{H(M)} \otimes_R f)$ は全射である．従って，$\mathrm{Hom}_R(H(M), Hf)$ によって $\mathrm{id}_{H(M)} \in \mathrm{Hom}_R(H(M), H(M))$ に移される $\mathrm{Hom}_R(H(M), H(M'))$ の元が存在する為，$Hf$ は分裂エピ射である．

逆に，$Hf$ が分裂エピ射である場合，任意の $R$ 加群 $N$ に対して，次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(N, H(M')) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(N,Hf)} & \mathrm{Hom}_R(N, N) \\
\downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong} \\
H(N \otimes_R M') & \xrightarrow{H(\mathrm{id}_N \otimes_R f)} & H(N \otimes_R M)
\end{array}$$

分裂エピ射は任意の関手によって保存されるので，$\mathrm{Hom}_R(N, Hf)$ も全射であり，従って $H(\mathrm{id}_N \otimes_R f)$ も全射 (エピ射) である．$H$ は忠実関手である為エピ射を反映し，従って $\mathrm{id}_N \otimes_R f$ は単射であることが分かる．従って $f$ は純性射である． $\square$

[a] (可換とは限らない) 環 $R$, $S$ と，右 $R$ 加群 $A$, 両側 $(R, S)$ 加群 $B$, 左 $S$ 加群 $C$ に対して，関手的な同型

$$\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)); (f\colon A \otimes_R B \to C) \mapsto (\tilde{f}\colon a \mapsto (b \mapsto f(a \otimes b))$$

が成立する．詳細は [14, Theorem 2.75] などを参照せよ．

愈々，我々が求めていた結果を証明することが出来る．

**定理 3.6**
可換環の射 $f\colon R \to S$ がモナド的有効降下射である為の必要十分条件は，$f$ が純性射であることである．

**証明**

$f$ が純性射であるとする．このとき，$f$ から定まる係数拡大関手 $f^* = S \otimes_R - = G\colon R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}} \to S\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}}$ は定理 2.18 の仮定を満たすことを証明する．

$G$ が左随伴関手を持つことは既に分かっている．従って，命題 3.4 より，$G$ が同型を反映する為の必要十分条件は，任意の $R$ 加群 $M$ に対して $(S \otimes_R M \to M) \in \mathrm{Mor}\, R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}}$ (双対圏で考えていることに注意！) が極値的エピ射であることである．$R\text{-}\mathbf{Mod}^{\mathrm{op}}$ に於ける極値的エピ射は $R\text{-}\mathbf{Mod}$ に於けるモノ射と同値な概念であり，従って，この条件は任意の $R$ 加群 $M$ に対して $M \to S \otimes_R M$ が (集合論的) 単射であることと同値である．これはまさに $f$ の純性である．今，$f$ は純性射であると仮定されているので，$G$ は同型を反映するということが分かる．

続いて条件 iii) を確認する．図式の (同型を除いての) 可換性は，任意の $R$ 加群 $M$ に対して tensor–hom 随伴から導かれる自然な同型

$$\mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

によって確認することが出来る．条件 iii-1) で問題となっている自然変換 $H\epsilon\colon HFG \to H$ の $M \in \mathrm{Obj}\, R\text{-}\mathbf{Mod}$ に於ける成分

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\epsilon_M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

は

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(f \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

と同一視出来るが，再び tensor–hom 随伴によってこれは更に

$$\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))\colon \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

と同一視出来る．ここで，命題 3.5 より，$f$ の純性から

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

は分裂エピ射であるので，

$$\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))\colon \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

も分裂エピ射であることが分かる．これにより iii-1) が確認出来た．

iii-2) は或る条件下での余等化子の保存性を要請しているが，$H$ は完全関手であったので，抑も任意の余等化子 (余核) を保存する．

iii-3) は，$H' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ が忠実完全関手であるという事実から導かれる．

逆に，$f$ がモナド的降下射であれば，$f$ による係数拡大関手 $G$ は同型を反映し，従って命題 3.4 より随伴 $F \dashv G$ の余単位の任意の成分 $\epsilon\colon M \to S \otimes_R M$ は単射である．従って，$f$ は純性射である．$\square$

**注 3.7**

Janelidze–Tholen の論文 [9] では，可換環に限らない一般の間に関して有効降下射の考察を行なっている．考えている環が可換でない場合，有効降下射と純性射は同値な概念とはならず，次のような結果が得られる:

**定理 3.8: [9, Theorem 5.3]**
環の射 $f\colon R \to S$ に対して，以下の三条件 (a)–(c) に関して (a)⇒(b)⇒(c) という含意が成立する:

(a) $f$ は $(R, R)$ 両側加群の純性射である;
(b) 係数拡大関手 $S \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ は余モナド的関手である;
(c) $f$ は右 $R$ 加群の純性射である．

これらの結果に関する詳細な議論は，当該論文 [9] を参照されたい．

# 参考文献


[1] Adámek, J., Herrlich, H., Tholen, W., Monadic decompositions, *J. Pure Appl. Algebra* **59**(1989), no.2, 111–123, `https://doi.org/10.1016/0022-4049(89)90129-1`.

[2] Bénabou, J., Roubaud, J., Monades et descente, *C. R. Acad. Sc. Paris*, Ser. A **270** (1970), 96–98.
`https://ncatlab.org/nlab/files/BenabouRoubaud-MonadesEtDescente.pdf` から原著論文 (仏語) が，また `https://mathoverflow.net/a/279152/485871` から P. Heinig による英訳が閲覧可能である．

[3] Borceux, F., Janelidze, G., *Galois Theories*, Cambridge Studies in Adv. Math. **72**, Cambridge Univ. Press, 2001.

[4] Fu, L., *Etale Cohomology Theory* Revised ed., Nankai Tracts in Math. **14**, World Scientific, 2015.
第一章 Descent Theory に関してはホームページから閲覧することが出来る: `https://doi.org/10.1142/9569`.

[5] Grothendieck, A., Raynaud, M., *Revêtements étales et groupe fondamental*(SGA 1), Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, 1971.
B. Edixhoven によって LaTeX を用いて組版し直された版が `https://arxiv.org/abs/math/0206203` より閲覧可能である．

[6] Grothendieck, A., Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats, *Séminaire Bourbaki* **190**(1960), `http://www.numdam.org/item/SB_1958-1960__5__299_0/`.

[7] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer-Verlag New York, 1977.

[8] Janelidze, G., Tholen, W., Facets of descent, I, *Appl. Categor. Struct.* **2**(1994), 245–281, `https://doi.org/10.1007/BF00878100`.

[9] Janelidze, G., Tholen, W., Facets of descent III: Monadic Descent for Rings and Algebras, *Appl. Categor. Struct.* **12**(2004), 461–477, `https://doi.org/10.1023/B:APCS.0000049312.36783.0a`.

[10] Leinster, T., *Basic Category Theory*, Cambridge Univ. Press, 2014.
邦訳は 斎藤恭司 監修，土岡俊介 訳『ベーシック圏論』丸善出版，2017．原著は筆者自身が arXiv で公開している：`https://arxiv.org/abs/1612.09375`.

[11] Liu, Q., *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Math. **6**, Oxford Univ. Press, 2002.

[12] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician* 2nd. ed., GTM **5**, Springer-Verlag New York, 1978.
邦訳は 三好博之，高木理 訳『圏論の基礎』丸善出版，2012.

[13] Mesablishvili, B., Pure morphisms of commutative rings are effective descent morphisms for modules — a new proof, *Theory Appl. Categ.* **7**(2000), 38–42.

[14] Rotman, J., *An Introduction to Homological Algebra* 2nd. ed., Universitext, Springer-Verlag New York, 2009, `https://doi.org/10.1007/b98977`.

[15] Schubert, H., *Categories*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, `https://doi.org/10.1007/978-3-642-65364-3`.