Álgebra Lineal II y Cuadrática

Con ejemplos e ilustraciones

Segunda Edición

Diego Huaraca
Jaime Toaquiza
EPN, Ecuador.

Un aporte a la sociedad.

Índice general

1

Aplicaciones Multilineales

1.1. Aplicaciones Multilineales

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $E_1, E_2, \ldots, E_p, F$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

Definición 1

Diremos que la aplicación φ de $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ en F

$$\begin{aligned} \varphi\colon E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n &\to \mathrm{F} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) &\to \varphi(x) \end{aligned}$$

es multilineal si φ es lineal respecto a cada variable, es decir, si cualesquiera que sean $\alpha \in \mathbb{K}$, y $x_i \in E_i$ con $1 \leq i \leq n$ se satisface

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, (\alpha x_i + y_i), x_{i+1}, \ldots, x_p) =& \alpha\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) + \\ & \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Determinante de una matriz

$$\begin{aligned} \det\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\to \det\left([x_1]\ [x_2]\ \ldots\ [x_n]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det\left([x_1] \ldots [\alpha x_i + y_i] \ldots [x_n]\right) &= \det\left([x_1] \ldots [\alpha x_i] \ldots [x_n]\right) + \det\left([x_1] \ldots [y_i] \ldots [x_n]\right) \\ &= \alpha \det\left([x_1] \ldots [x_i] \ldots [x_n]\right) + \det\left([x_1] \ldots [y_i] \ldots [x_n]\right) \end{aligned}$$

Si $F = \mathbb{K}$ entonces la aplicación es una forma multilineal

1.2. Formas Multilineales

Definición 2

Llamaremos forma multilineal a la aplicación ϕ de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ en $\mathbb{K}$ que es lineal respecto a cada una de sus variables. Es decir, para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x_i \in E_i$ con

$1 \leq i \leq n$ se verifica que

$$\begin{aligned}\phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, (\alpha x_i + y_i), x_{i+1}, \ldots, x_p) =& \alpha\phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) + \\ & \phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)\end{aligned}$$

Definición 3

Una forma multilineal ϕ es alternada, si para cualesquiera i, j se tiene

$$\phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_j, \ldots, x_n) = -\phi(x_1, \ldots, x_j, \ldots x_i, \ldots, x_n)$$

Teorema 1

Dada una base ordenada $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de un espacio vectorial V, existe una única forma multilineal alternada D de orden n que verifica

$$D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$$

A dicha n-forma se le llama determinante.

Así, si $x_1, x_2, \ldots x_n$ son vectores de V, expresadas sus coordenadas respecto a la base B del teorema anterior en la siguiente matriz cuadrada $M = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)$ formada por las coordenadas de los vectores puestos en columna, se tiene

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]$$

De la definición y del teorema anterior se derivan todas las propiedades que conocemos sobre los determinantes.
Nos interesaremos en las aplicaciones de $E_1 \times E_2$ en F también conocidas como aplicaciones bilineales de $E_1 \times E_2$ en F.

1.3. Aplicaciones Bilineales

Definición 4

Dados tres espacios vectoriales U, V, W sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $f : U \times V \to W$ se dice que es bilineal si es lineal en cada una de sus variables, es decir:

$$f(\alpha\ u_1 + u_2, v1) = \alpha\ f(u_1, v_1) + f(u_2, v_1)$$

$$f(u_1, \alpha\ v1 + v_2) = \alpha\ f(u_1, v_1) + f(u_1, v_2)$$

para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{K}$, $u_1, u_2 \in U$ y $v_1, v_2 \in V$.