

# Confronto delle prestazioni CPU-GPU per la simulazione di un reticolo di Ising-2D

Stefano Mandelli  
Matricola: 861838

13 - Luglio - 2016

## Introduzione

In questo lavoro vengono messe a confronto le prestazioni di CPU<sup>1</sup> e GPU<sup>2</sup>, usando come banco di prova un modello fisico ben conosciuto di cui sono note, in modo analitico, le espressioni delle varie grandezze fisiche che si vogliono simulare. Il modello in questione è il *reticolo di Ising bidimensionale*.

Durante l'implementazione da CPU a GPU, è stato possibile riportare il codice, da un ambiente all'altro, mantenendo lo stesso algoritmo e quindi lo stesso numero di operazioni che vengono fatte durante l'aggiornamento dei siti reticolari.

È stato possibile riportare da un ambiente all'altro anche il generatore di numeri pseudorandom, in modo da rendere consistente la valutazione dello speed-up. Se si fosse usato un generatore di numeri pseudorandom diverso, la comparazione sarebbe stata correlata anche al tipo di implementazione del *Generatore di Numeri Pseudorandom (PNRG)*.

Il lavoro consisterà in una prima presentazione del modello fisico usato a cui seguirà la presentazione dell'algoritmo usato per l'update dei siti reticolari. Una volta presentati modello e algoritmo di update viene descritta l'implementazione su GPU discutendo in primis la consistenza fisica della simulazione e successivamente i vari accorgimenti per ottimizzare le prestazioni.

---

<sup>1</sup>Central Processing unit

<sup>2</sup>Graphics Processing Unit

# 1 Scelta del modello

Il modello di *Ising-2D* è un modello che si presta molto bene ad essere parallelizzato in quanto è un tipico modello interagente a corto range. Per questo tipo di interazioni è facile trovare strategie di parallelizzazione efficaci.

Il modello di Ising è caratterizzato da un reticolo in  $D$  dimensioni. Ad ogni cella del reticolo viene associato uno spin che può essere solo del tipo  $s_i = \{+1, -1\}$  a seconda che la direzione del dipolo magnetico, associato alla cella  $i$  -esima del reticolo, risulti verso l'alto o verso il basso.

Il sistema è descritto dall'Hamiltoniana di Ising

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i, \quad (1)$$

dove  $h$  identifica un eventuale campo magnetico uniforme esterno. La prima sommatoria è su tutte le coppie di siti primi vicini e  $J$  indica la costante di accoppiamento tra spin.

In questo lavoro si considera il caso  $D = 2$  dimensionale,  $J > 0$  e a campo magnetico esterno nullo quindi  $h = 0$ . Al limite termodinamico, il modello di Ising (escluso il caso  $1D$ ) presenta una *transizione di fase* in prossimità di una temperatura critica  $T_c$ . Per temperature maggiori di  $T_c$  il sistema è perfettamente *paramagnetico*. Per temperature inferiori invece si ha un fenomeno di *magnetizzazione spontanea*.

Le principali grandezze fisiche che possono essere calcolate sono la *magnetizzazione media* del sistema  $\langle M \rangle$  e la *capacità termica* a volume costante  $\langle C_V \rangle$  che viene calcolata col teorema di fluttuazione-dissipazione. Tutte queste quantità estensive divergono al limite termodinamico.

Nelle simulazioni statistiche vengono considerati dei modelli finiti di  $N = L \times L$  spins che si desidera confrontare per diversi size. È utile pertanto confrontare la *densità di calore specifico*  $c_V = CV/N$  e di *magnetizzazione* che è la variabile coniugata al campo esterno  $h$

$$m = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i s_i \right\rangle. \quad (2)$$

Per il caso  $h = 0$  e  $T > T_c$ ,  $\langle M \rangle$  si annulla. Questo comportamento può essere spiegato a causa del fatto che per  $T > T_c$  le fluttuazioni termiche prevalgono sulla tendenza del termine di interazione  $J$  ad allineare gli spin in un'unica direzione. La lunghezza di correlazione diventa molto piccola e ogni spin ha la stessa probabilità di avere come valore  $+1$  o  $-1$ . In questo modo  $\langle M \rangle$  risulta nulla.

Per temperature  $T < T_c$  gli spin risentono fortemente dell'interazione coi loro primi vicini. Si nota che in questo range di temperature il *modello di Ising*  $2D$ , presenta una transizione di fase netta. Scendendo con la temperatura sotto a  $T_c$ , il sistema passa in modo spontaneo, da una situazione totalmente disordinata, ad una ordinata in cui gli spin sono in gran parte allineati nella stessa direzione. I due casi (tutti spin *up* o tutti spin *down*), per campo magnetico esterno nullo ( $h = 0$ ), sono equiprobabili, in quanto per  $h = 0$  l'Hamiltoniana di Ising è pari per inversione di tutti gli spins. Per tempi molto lunghi entrambi gli stati vengono popolati per la stessa quantità di tempo facendo risultare, anche in questo caso,  $\langle M \rangle = 0$ .

Per modelli finiti sufficientemente grandi è possibile effettuare delle valutazioni e misure di magnetizzazione media spontanea del sistema per  $T < T_c$  che abbiano valore non nullo. Questo si ottiene settando lo stato di partenza in modo tale che uno dei due stati sia più popolato dell'altro. Se per convenzione si sceglie uno stato di partenza con una maggioranza di spins a valore  $+1$ , lo stato di equilibrio dell'Hamiltoniana di Ising con molti spin a valore  $+1$  sarà favorito.

## 1.1 Algoritmo di Metropolis

L'algoritmo usato per far evolvere il sistema è quello di *Metropolis*, con aggiornamento del sito per *singolo spin flip*. I vari stati vengono generati in modo che il successivo sia differente dal precedente per il flip di un singolo spin del reticolo preso in modo casuale, quindi lo stato  $\mu$  e quello  $\nu$  differiscono tra loro solo per il flip di un singolo spin.

Si denisce quindi l'algoritmo di Metropolis per un reticolo di Ising, caratterizzato da aggiornamento a singolo spin flip, tramite la definizione di una probabilità di selezionare lo spin da aggiornare, chiamata *probabilità di selezione*  $g(\mu \rightarrow \nu)$  e una probabilità di accettare l'update proposto, chiamata *probabilità di accettazione*  $A(\mu \rightarrow \nu)$ . Essendo la dinamica a *singolo spin flip* si ha che la probabilità che uno spin ha di essere selezionato è la stessa per tutti gli spin. Dato  $N$  il numero totale di spin nel reticolo, si ha che

$$g(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{N}. \quad (3)$$

Con la probabilità di selezione definita in questo modo la condizione del *bilancio dettagliato* prende la forma

$$\frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu)}{g(\nu \rightarrow \mu)A(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{p_\nu}{p_\mu} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} \quad (4)$$

e dato che  $g(\mu \rightarrow \nu) = g(\nu \rightarrow \mu)$  si sceglie il *rateo di accettazione* in modo tale che soddisfi l'equazione (4)

$$\frac{A(\mu \rightarrow \nu)}{A(\nu \rightarrow \mu)} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}, \quad (5)$$

da cui è possibile dedurre che

$$A(\mu \rightarrow \nu) = A_0 e^{-\frac{1}{2}\beta(E_\nu - E_\mu)}. \quad (6)$$

Per avere un algoritmo che sia il più efficiente possibile il *rateo di accettazione* deve essere significativamente diverso da zero. Il parametro  $A_0$  è scelto in funzione ad alcune considerazioni relative alla struttura dell'Hamiltoniana di Ising. È facile osservare che la differenza di energia tra due stati, in modulo, è al massimo pari a  $|\Delta E| = 2zJ$  dove  $z$  è il numero di primi vicini. Nel caso di reticolo  $2D$  vale  $z = 4$ , quindi per il reticolo  $2D$  abbiamo che al massimo  $|\Delta E| = 8J$ . La differenza di energia tra lo stato  $\mu$  e  $\nu$  è

$$|E_\nu - E_\mu| \leq 2zJ. \quad (7)$$

In questo modo, il massimo valore possibile dell'esponentiale è

$$e^{-\frac{1}{2}\beta(E_\nu - E_\mu)} \leq e^{\beta z J} \quad (8)$$

che permette di stabilire la scelta migliore possibile del coefficiente

$$A_0 = e^{-\beta z J}. \quad (9)$$

La scrittura finale per il *rateo di accettazione* risulta quindi essere

$$A(\mu \rightarrow \nu) = e^{-\frac{1}{2}\beta(E_\nu - E_\mu + 2zJ)}, \quad (10)$$

in modo da avere  $A(\mu \rightarrow \nu) \leq 1$ . Si può verificare che l' $A(\mu \rightarrow \nu)$  scritta ora è molto inefficiente. Il sistema rimane per troppo tempo nello stesso stato. Una scelta migliore che rispetta tutte le condizioni di quella precedente è quella in Fig. 1, data proprio dall'acceptance ratio proposta da Metropolis

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \begin{cases} e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} & E_\nu - E_\mu > 0 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (11)$$

Per il modello di Ising i *ratei di accettazione* appena descritti hanno la particolarità che possono essere calcolati mediante la sola conoscenza degli spins primi vicini allo spin di cui si propone il suo flip, questo perchè l'interazione nel modello di Ising è a corto raggio.

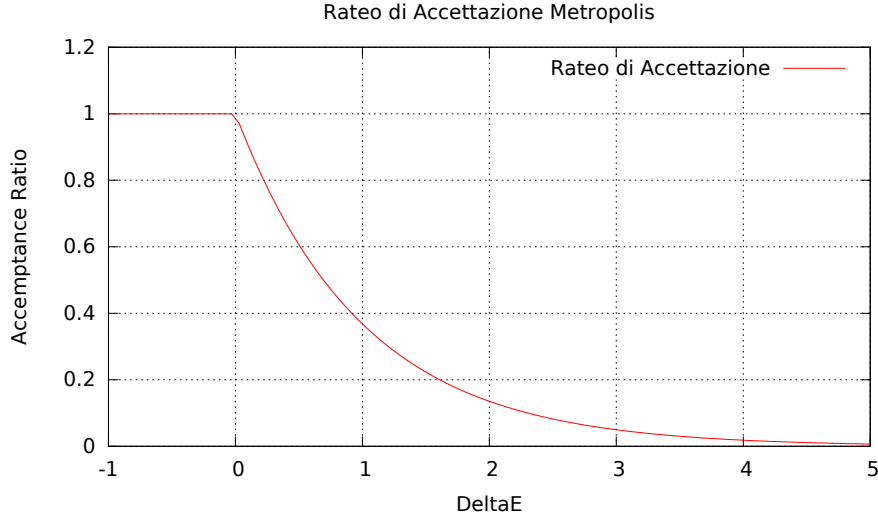


Figura 1: Rateo di Accettazione Metropolis in funzione a  $\Delta E$

Nel caso dell'Hamiltoniana di Ising, questa differenza è possibile scriverla in modo molto semplice, in funzione solo dagli spin primi vicini dello spin di cui si propone il flip

$$\begin{aligned}
 E_\nu - E_\mu &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i^\nu s_j^\nu + J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i^\mu s_j^\mu = \\
 &= -J \sum_{i \neq k} s_i^\nu (s_k^\nu - s_k^\mu) = -2J s_k^\mu \sum_{i \neq k} s_i^\mu. \quad (12)
 \end{aligned}$$

## 2 Implementazione del codice

La strategia di implementazione che è stata adottata in questo lavoro consiste in una prima implementazione su CPU e la successiva implementazione su scheda grafica. L'obiettivo è quello di riottenere gli stessi risultati fisici e valutare lo *speed-up* dato dall'utilizzo della GPU.

La consistenza fisica della simulazione viene fatta comparando i grafici di *Magnetizzazione* e *Calore Specifico* in funzione di  $\beta$ , con la soluzione esatta di Onsager al limite Termodinamico. Successivamente sono stati confrontati gli stessi risultati ottenuti su GPU e CPU.

Il secondo risultato che viene presentato riguarda le caratteristiche (punti favorevoli e punti sfavorevoli) di diversi PRNG, nel particolare è stato confrontato il numero di step di termalizzazione in funzione alla complessità numerica della generazione.

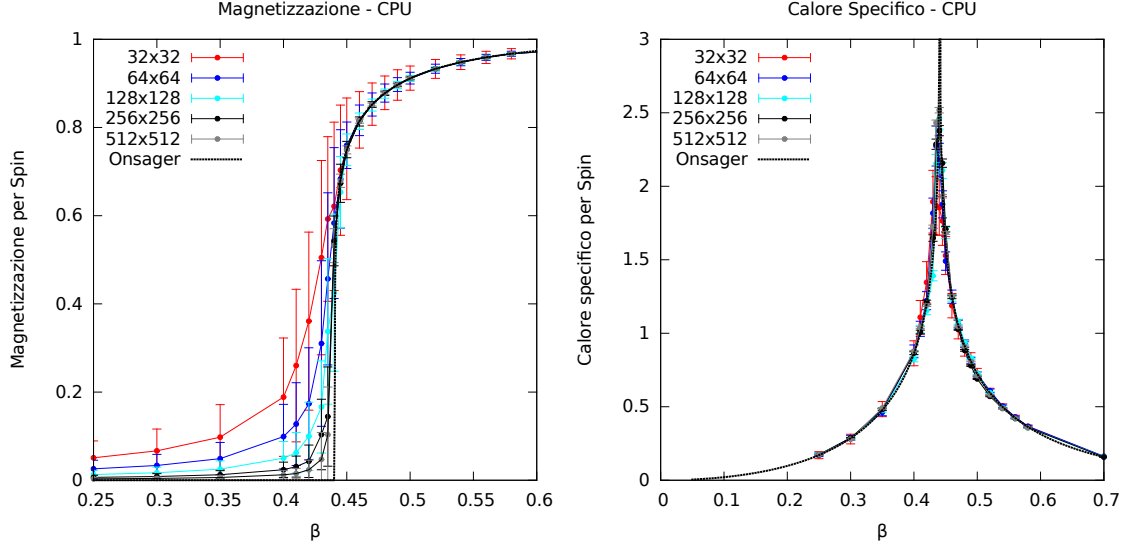


Figura 2: *Magnetizzazione e Calore Specifico* per diverse taglie di reticolo, in funzione di  $\beta$  generati su CPU

Il terzo risultato che viene presentato riguarda la ricerca di un BLOCKL di dimensione tale da portare a saturazione ogni singolo WARP. Tenendo in considerazione il fatto che in un blocco possono operare in modo parallelo 1024 threads è necessario trovare il numero corretto di threads in  $x$  e  $y$  in modo da avvicinarsi il più possibile a 1024.

Le conclusioni finali sull'ottimizzazione del programma terranno conto di tutte le conclusioni presentate precedentemente.

## 2.1 Implementazione su CPU

In Fig. 2 sono presentati i risultati di *Magnetizzazione* e *Calore specifico*, per diversi size in funzione di  $\beta$ , comparati con la soluzione analitica al limite termodinamico di Onsager.

Si notano in modo evidente gli effetti di *size-scaling* per reticoli molto piccoli. Al crescere della taglia del reticolo i risultati della simulazione si avvicinano sempre di più al modello al limite termodinamico.

I risultati riportati in Fig. 2 mostrano anche che l'implementazione dell'algoritmo di update scritto precedente restituisce, su CPU, i valori attesi. Verificata la compatibilità tra i valori numerici simulati e quelli teorici della soluzione di Onsager, è ora possibile passare all'implementazione su GPU con l'obiettivo di ottenere gli stessi risultati numerici valutando il relativo *speed-up*.

In Fig. 3 viene presentato il confronto tra tre diversi PNRG. Come si nota,

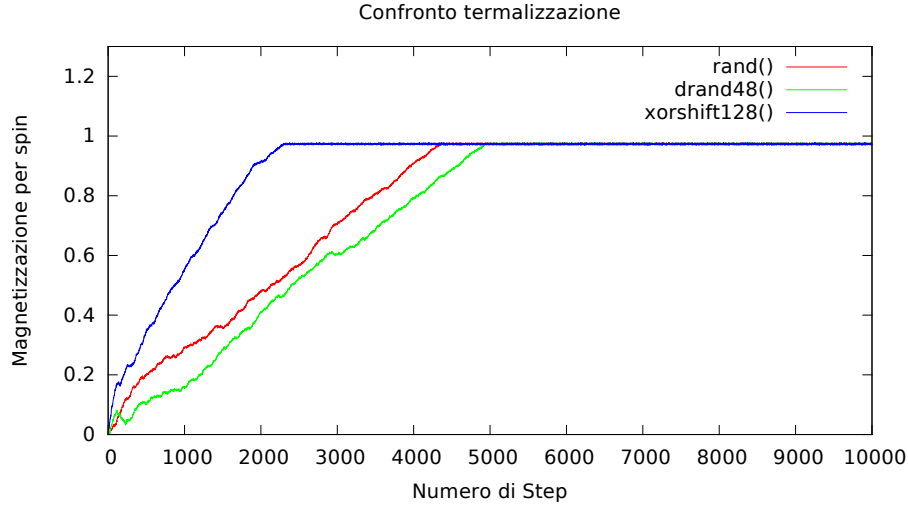


Figura 3: *Passi Montecarlo* necessari per raggiungere la termalizzazione in funzione a tre diversi PNRG.

diversi generatori fanno termalizzare il sistema in un numero molto diverso di step. Tra i passi di termalizzazione del generatore più performante e quello meno performante c'è circa un fattore tre.

## 2.2 Implementazione su GPU

L'implementazione del codice su GPU passa attraverso due fasi. La prima consiste nell'organizzare il reticolo di Ising sulla GPU. L'obiettivo che ci si pone è quello di usare nel modo migliore le aree di memorie in modo da garantire sempre coalescenza, velocità di lettura/scrittura e minimizzazione di bank conflict.

La coalescenza consiste nell'effettuare chiamate ad aree di memoria allineate in modo da massimizzare le performance. La velocità di lettura e scrittura dipende dal tipo di memoria usata mentre il problema del bank conflict consiste nel fatto che due aree di memoria non possono essere lette contemporaneamente. Se nel programma ci sono chiamate di questo tipo, vengono schedate in modo sequenziale perdendo tutto il vantaggio della parallelizzazione.

Una seconda fase consiste nel riportare, operazione per operazione, il codice per il PNRG usato nel caso per CPU, in parallelo su GPU. Questo tipo di passaggio non è immediato in quanto la generazione di numeri pseudorandom è per definizione seriale.

La generazione del numero  $n + 1$  dipende dal numero  $n$ . Dato che l'evoluzione del nostro modello è di tipo *Metropolis* e i numeri random sono quindi una necessità principe, per non perdere parallelizzazione del codice è necessario

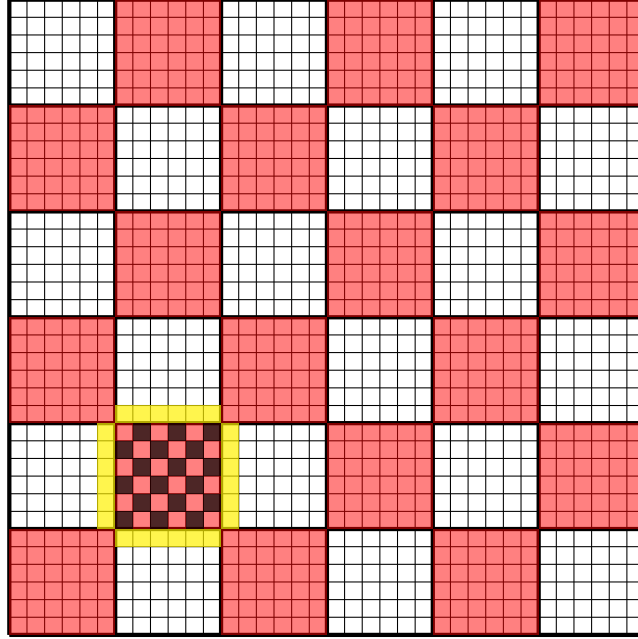


Figura 4: È possibil notare la strategia di update a doppia scacchiera. I blocchi vengono attivati a scacchiera. In ogni blocco, l'update degli spin è a sua volta fatto a scacchiera. In giallo sono identificati gli spin di *cornice* che devono essere storiati nella memoria shared, di ogni blocco, per garantire la condizione di raccordo *blocco-blocco*

elaborare una strategia di estrazione parallela e performante per le GPU.

## Implementazione del modello

Il reticolo di Ising è stato posizionato sulla griglia della GPU utilizzando la *memoria shared* per ottenere migliori performance. La *memoria shared* è divisa in blocchi indipendenti tra loro, questo fa sì che il reticolo iniziale, una volta caricato in *memoria shared* necessita che vengano specificate le relative condizioni di raccordo blocco/blocco e quindi effettuare l'update degli spin usando una doppia scacchiera.

Il primo livello di scacchiera, a blocchi grandi relativi ai blocchi della *memoria shared*; il secondo livello di scacchiera, a blocchi piccoli nel senso che l'update dei siti viene svolto a scacchiera anche tra i threads all'interno dello stesso blocco. Tutti i threads dello stesso blocco condividono la stessa area di memoria shared. In Fig. 8 sono stati plottati il tempo per proporre un update in funzione al size del reticolo.

Anche su GPU è stata verificata l'attendibilità fisica del modello simulato.



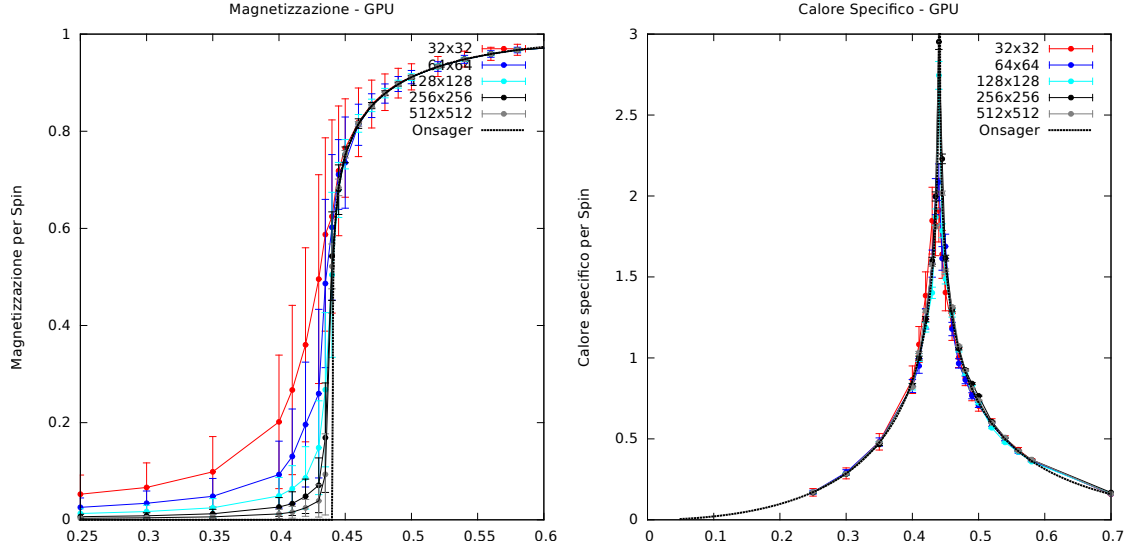


Figura 5: *Magnetizzazione e Calore Specifico* per diverse taglie di reticolo, in funzione di  $\beta$  generati su GPU

In Fig. 5 sono rappresentati i grafici di *Magnetizzazione* e *Calore Specifico* a confronto con la soluzione analitica di Onsager al limite termodinamico.

## Confronto performance dei vari PNRG

Insieme al numero di step necessari a far termalizzare il sistema è necessario indagare anche le performance temporali di ogni singolo PNRG per verificare se l'effettivo guadagno in numero di step è un effettivo guadagno in termini di tempi di simulazione. Un generatore caratterizzato da una miglior statistica e randomicità dei dati può far termalizzare prima il sistema ma va comunque valutato il costo temporale necessario a generarli.

Mettendo insieme i risultati esposti in Fig. 3 ed in Fig. 6 si può notare che, l'algoritmo *XorShift 128-bit* impiega circa 1600 step a termalizzare. Con la funzione *rand 31-bit* impegna quasi 4000 step, quindi un generatore a 31bit impegna circa 2.5 volte in più a termalizzare rispetto ad uno a 128 bit. Per quanto riguarda i tempi, un generatore a 128 – *bit*, rispetto ad uno a 32 – *bit* è solamente 2 volte più lento. Questo fa sì che la soluzione più performante sia quella che prevede di utilizzare un generatore di numeri pseudorandom più lento ma che permetta al sistema di termalizzare in un numero inferiori di step Monte Carlo.

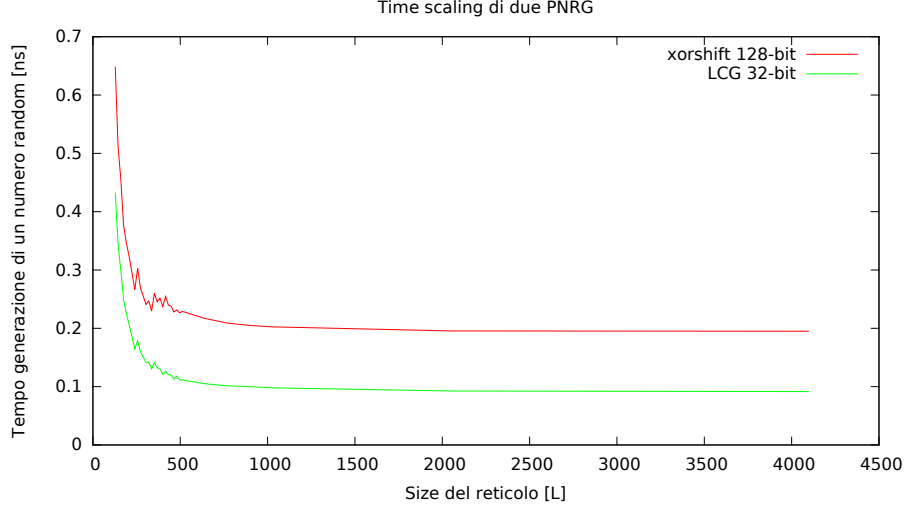


Figura 6: Confronto del tempo di generazione di un numero pseudorandom per due differenti PNRG

## Ottimizzazione della dimensione del blocco

### 3 Consistenza del modello Fisico

Nelle Figure [2] e [5] sono raffigurati tre grafici. Il primo rappresenta la magnetizzazione (per spin) in funzione di  $\beta$ , il secondo il calore specifico per spin, sempre in funzione di  $\beta$  e nel terzo viene fatto un fit dei valori di magnetizzazione, per ricavare l'esponente critico  $\alpha$ . Nell'intorno del  $\beta_c$  la magnetizzazione si comporta come

$$M(\beta) \sim \left| 1 - \frac{\beta_c}{\beta} \right|^\alpha. \quad (13)$$

Effettuando un fit dei valori intorno alla temperatura critica, mettendo come parametri liberi  $\alpha$  e  $\beta_c$  è quindi possibile ricavare il valore dell'esponente critico e della temperatura critica di transizione di fase. Nelle immagini 2 e 5 sono riportati i valori del fit trovati che sono compatibili con quelli noti.

### 4 Discussione sulla diversità dei risultati

In Tabella 1 sono riportati i valori di magnetizzazione per un reticolo  $32 \times 32$ , con relativo errore, in funzione di  $\beta$ . Come detto in precedenza, si è riusciti a portare completamente, operazione per operazione, l'algoritmo usato su CPU alle schede grafiche, quindi ci si aspettava che dopo lo stesso numero di passi di

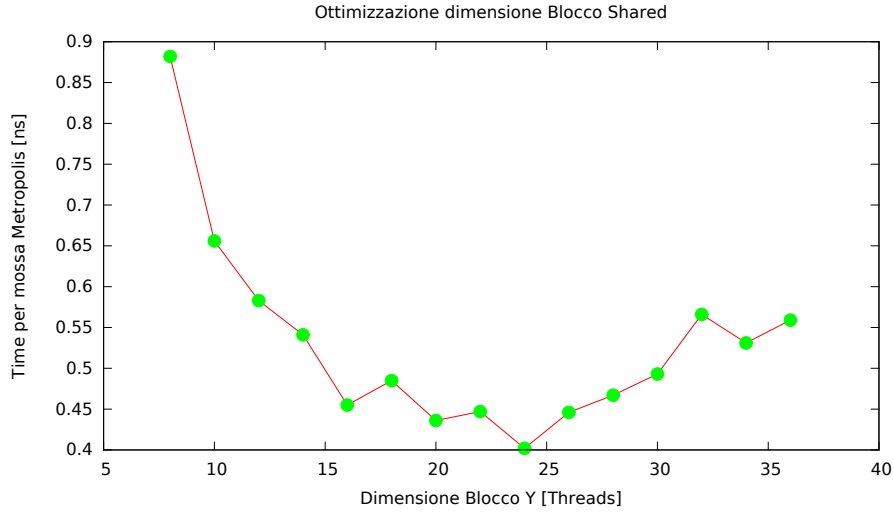


Figura 7

termalizzazione e di step Monte Carlo, il dato sia proprio identicamente lo stesso. Come si può notare in tabella i dati, seppur compatibili tra loro all'interno del proprio errore, non sono identicamente lo stesso dato. La spiegazione consiste nel modo in cui vengono estratti i numeri pseudocasuali. Nel caso dell'CPU, in modo seriale, l'evoluzione di uno spin è contraddistinto da un certo numero PR della catena e così via in modo ordinato su tutta l'estensione del reticolo, per tutti gli step Monte Carlo usati. Nel caso della GPU, la catena di numeri pseudo random viene suddivisa in sottocatene. Il numero pseudorandom che caratterizzava l'evoluzione dello spin nominato precedentemente, sulla GPU può caratterizzare un altro spin. È quindi corretto ritrovarsi con valori differenti, ma molto vicini tra loro e compatibilissimi all'interno del loro errore statistico. In conclusione i dati ci stanno dicendo è che nonostante ci sia un rimescolamento dei numeri casuali, la statistica del sistema rimane sempre la stessa, quindi i due dati sono perfettamente compatibili.

## 5 Comparazione delle prestazioni

Il codice è stato implementato in CPP per singola CPU, ed in cuda C con due varianti, la prima con il reticolo tutto su global memory la seconda utilizzando l'apporto anche della memoria shared. I risultati sono riportati in Figura 8. Come è possibile notare, una volta saturato il sensore, lo speed-up raggiunto è nell'ordine dei 2 ordini di grandezza rispetto allo stesso codice girato da CPU. L'utilizzo della memoria shared non ha velocizzato il processo. Le migliori prestazioni sono state ottenute aggiornando il reticolo a scacchiera sulla memoria globale.

$\beta$	$\langle M \rangle$ -GPU	$\sigma_{\langle M \rangle-GPU}$	$\langle M \rangle$ -CPU	$\sigma_{\langle M \rangle-CPU}$
0,250000	0,052712	0,039474	0,050932	0,038267
0,300000	0,066671	0,050460	0,066645	0,049545
0,350000	0,098850	0,072529	0,097678	0,073882
0,400000	0,201638	0,137473	0,188406	0,134147
0,410000	0,267280	0,174247	0,260063	0,172984
0,420000	0,360316	0,199749	0,360821	0,201873
0,430000	0,495578	0,214933	0,504824	0,220384
0,435000	0,587416	0,199017	0,592545	0,186706
0,440000	0,624490	0,198886	0,621196	0,190946
0,445000	0,718453	0,133490	0,703127	0,147649
0,450000	0,765466	0,101283	0,751676	0,115272
0,460000	0,818402	0,070646	0,817304	0,063977
0,470000	0,855991	0,049240	0,853003	0,048010
0,480000	0,880319	0,037618	0,878726	0,038106
0,490000	0,899063	0,030522	0,896382	0,034484
0,500000	0,912002	0,026942	0,912000	0,027388
0,520000	0,933304	0,020621	0,932910	0,021438
0,540000	0,948533	0,016265	0,948100	0,016604
0,560000	0,959347	0,013461	0,958931	0,013762
0,580000	0,967683	0,011340	0,967213	0,011583
0,700000	0,990200	0,005175	0,990184	0,005217

Tabella 1: Valori di magnetizzazione con il loro errore.

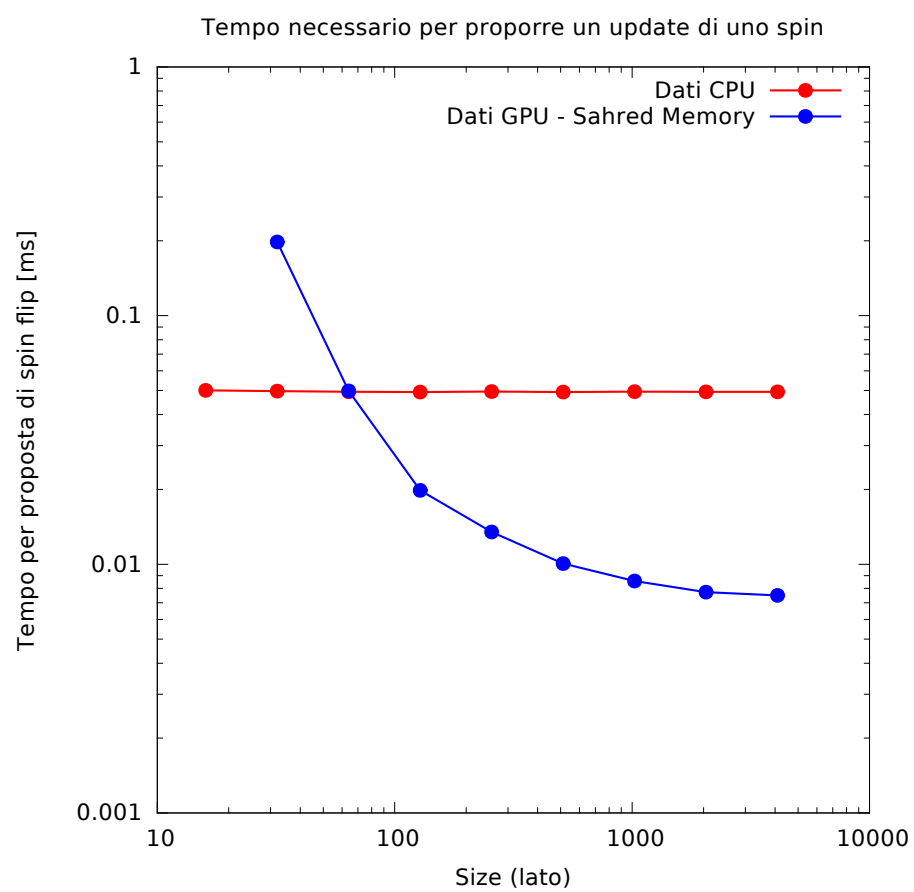


Figura 8: CPU/GPU