Lineare Algebra 2

Christian Haase
Jan Marten Sevenster
Theresa Graeber
Eva Schinzel

Freie Universität Berlin

Hausaufgabe 1

Abgabe Montag, 8. Mai 2023 um 10h00 (ein PDF, eine Seite pro Aufgabe)

Aufgabe 1.1 **4 Punkte**

Es sei K ein Körper und $f \in K[t]$ ein nicht konstantes Polynom vom Grad höchstens 3. Ein Polynom heißt *irreduzibel*, wenn seine einzigen Faktorisierungen trivial sind, d.h.

$$f = gh \text{ impliziert } g \in K[t]^* \text{ oder } h \in K[t]^*,$$

wobei $K[t]^*$ die Menge der invertierbaren Elementen von $K[t]$ ist.

Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist, wenn es keine Nullstellen hat.

Aufgabe 1.2 **4 Punkte**

(1) Es sei K ein Körper von Charakteristik 0 und $f \in K[t]$, zeigen Sie, dass für $x \in K$ gilt

$$\mu(f, x) = \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^{(n)}(x) = 0\}.$$

(2) Geben Sie ein Beispiel an, woraus deutlich wird, dass diese Gleichheit nicht gilt für $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 1.3 **4 Punkte**

Es sei $(F_n)_{n\geq 0}$ die bekannte Fibonacchi Folge, gegeben durch

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1, \; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Wir können diese Rekursion wie folgt formulieren:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Diagonalisieren Sie die Matrix A.

(2) Geben Sie eine geschlossene Formel für A^n an.

(3) Geben Sie eine geschlossene Formel für F_n an.