1. 说明

数学推导部分作者已经在文中说明的很详细了，那么我做的工作一方面是把文中的推导自己过一遍，加强自己的理解；另一方面是把自己理解后的推导按照自己的逻辑整理下来，并展示出来

2. *VWAP*算法

$VWAP$算法的基本公式为：

$$VWAP = \frac{\sum_j v_j P_j}{\sum_j v_j}$$

将一段时间内的市场分成J个时间区间，按照区间提交订单并统计价格，那么其中v_j是第j笔订单的成交量，P_j是第j笔订单的成交价

$VWAP$算法交易原理如下：

将一段时间内的市场划分为J个交易时间区间之后，那么根据交易量和价格，这段时间的市场就会自动形成一个$VWAP$价格。如果我们能够预测到未来某段时间各个时间区间的交易量的分布，那么就可以按照该分布下单，最终在这段时间内形成的$VWAP$价格与市场的$VWAP$价格是接近的。

因此，$VAWP$交易策略的目的就是找出交易的$VWAP$，使得与市场的$VWAP$尽可能地接近：

$$min\delta = (VWAP_{trader} - VWAP_{market})^2$$

自然，该问题就转化成了一段时间内交易量分布地预测问题。假设一段时间设为一个交易日内地交易时间，论文中介绍了一种简单易行的预测方法——移动加权平均预测法，即用前L个交易日的历史数据来预测第$L+1$天的日内成交量的分布：

$$u_j = \frac{\sum_{i=1}^{L} f(i) u_{ij}}{\sum_{i=1}^{L} f(i)}$$

其中u_j表示该交易日内第j个交易区间的交易量占全天交易量的比例，u_{ij}表示交易日前第i天第j个交易区间的交易量占该天交易总量的比例，$f(i)$表示加权平均所用的权数函数。在论文中，作者简化为$f(i) = 1$

3. IS 算法（AC 模型）

（1）连续情形下的模型

考虑进行单个股票交易。在时间$t=0$时，手上持有q_0的股票，$q_0>0$, 表示交易员持有多头，$q_0<0$, 表示持有空头

考虑在一段窗口期$[0,T]$内平仓，将交易员在该时间段内的持仓量定义为$q_{t,\ t\in[0,T]}$，那么有方程

$$dq_t = v_t dt$$

相应的股票价格满足过程S_t，其中交易会影响价格，假设冲击为线性的，那么有

$$dS_t = \sigma dW_t + k v_t dt, k>0$$

我们在时间t的交易价格满足$S_t + g\left(\frac{v_t}{V_t}\right)$, 其中$g$是一个递增函数，表示交易的执行成本，$V_t$是市场交易过程，代表其他中间商的交易量，确定、连续、正有界的过程。用交易成本函数L代替g，$L(\rho)=\rho g(\rho)$

设现金账户过程为X_t,那么

$$\begin{aligned} dX_t &= -v_t\left(S_t + g\left(\frac{v_t}{V_t}\right)\right)dt \\ &= -v_t S_t dt - V_t L\left(\frac{v_t}{V_t}\right)dt \end{aligned}$$

而我们需要确定的是交易过程v_t， 求解范围被定义为：

$$\mathcal{A} = \left\{(v_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{H}^0(\mathbb{R},(\mathcal{F}_t)_t), \int_0^T v_t dt = -q_0, \int_0^T |v_t| dt \in L^\infty(\Omega)\right\}$$

显然这是一个最优化的问题，最优化的度量标准为：

$$\mathbb{E}[-\exp(-\gamma X_T)]$$

其中γ为正常数。

在接下来的论述中，作者讨论了确定策略，即策略不会随市场价格的变动而变动，以及随机策略，即策略随市场价格的改变而改变的情况。

在确定策略中，作者通过最大化效用函数来证明，策略的最优解等价为一个变分问题：

$$\min J(q) = \int_0^T \left(V_t L\left(\frac{q'(t)}{V_t} + \frac{\gamma}{2}\sigma^2 q_t^2\right)\right)dt$$

其中$q\in W^{1,1}(0,T)$满足$q(0)=q_0$和$q(T)=0$

(2) 离散情形下的模型

作者主要论述了参数的设定情况和参数的具体信息：

$$q_{n+1} = q_n + v_{n+1}\Delta t, 0 < n < N$$

Δt为被分交易区间的单位交易区间的长度，N 为被分的交易区间的个数

市场价格为

$$S_{n+1} = S_n + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_{n+1} + kv_{n+1}\Delta t, 0 \le n \le N$$

$$\epsilon_i \sim N(0,1), i.i.d$$

单位交易区间的总交易量为：

$$V_{n+1}\Delta t$$

现金账户的变动过程为

$$X_{n+1} = X_n - v_{n+1}S_n\Delta t - L\left(\frac{v_{n+1}}{V_{n+1}}\right)V_{n+1}\Delta t, 0 \le n < N$$

确定的求解范围为

$$(v_n)_n \in \mathcal{A}_{det} = \left\{(v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N, \sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1}\Delta t = -q_0\right\}$$

此外，作者还证明了最终账户现金价值是一个正态分布。

4. 风险平价

（1） 风险平价模型本身

假设现在要做N个资产的投资组合，用r_i和x_i分别表示第i种资产的投资组合，则投资组合的收益率为

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i$$

方差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}}$$

σ_{ij}表协方差，当$i = j$时表方差

首先定义i种资产的风险贡献程度

$$MRC_i = \frac{\partial \sigma_p}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N} x_i \sigma_{ij} = cov(r_i, r_p)$$

那么每种资产在投资组合中的贡献程度

$$TRC_i = x_i MRC_i$$

那么有

$$\sum_{i=1}^{N} TRC_i = \sigma_P^2$$

所谓风险平价，就是让每种资产在投资组合中的贡献程度相等，即

$$TRC_i = TRC_j = \lambda, \lambda 为待定常数$$

那么为了方便表达，我们把它改写成矩阵形式

设协方差矩阵为Ω, 那么

$$[MRC_1, MRC_2, \ldots, MRC_N]^T = \Omega x$$

其中$x = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T$

又$MRC_i = \frac{TRC_i}{x_i}$, 那么

$$[MRC_1, MRC_2, \ldots, MRC_N]^T = \left[\frac{TRC_1}{x_1}, \frac{TRC_2}{x_2}, \frac{TRC_3}{x_3}, \ldots, \frac{TRC_N}{x_N}\right]^T = \lambda * \frac{1}{x}$$

其中$\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_N}\right]^T$

从而有方程

$$\Omega x = \lambda * \frac{1}{x}$$

该方程是求解在所有资产的风险贡献程度相同的情况下，各种资产的分配比例问题。

作者给出了两种数值解法，后续应用只应用到了一种，因此这里只将用到的算法整理。

（2）迭代算法求解

假设$\beta_i = \frac{MRC_i}{\sigma_p^2} = \frac{\mathrm{e_i^T} \Omega x}{x^T \Omega x}$，其中$e_i^T = [0, \ldots, 1, \ldots, 0]$, 那么，我们有算法

第一步：

初始化x, 得到$x^{(0)}$,设置最大迭代次数M和收敛的阈值ϵ

第二步：

根据设置的$x^{(n)}$, 计算每个资产对应的$\beta_i^{(n)}$

第三步：

判断

$$\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(n)}\beta_i^{(n)}-\frac{1}{N}\right)^2} < \epsilon$$

如果成立，迭代停止，如果迭代次数大于M，迭代停止。否则计算新的权重：

$$x_i^{(n+1)} = \frac{\frac{1}{\beta_i^{(n)}}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\beta_i^{(n)}}}$$

然后回到第二步。

最终可以解出x

5. 风险平价和IS策略的结合

这里用风险平价的方法定义IS策略AC模型的最优策略。

我们将每个时间区间上交易的股票看作一种资产的话，如果一个特定的时间被分成了N个时间区间来交易，那么我们就得到了N个资产的投资组合。

考虑离散情形下的AC模型，假设在$t=0$时，交易员手上持有q_0的股票，目标是在T时间平仓。将时间段$[0,T]$分成N个长度为τ的区间，在时间区间$[t_{n-1},t_n]$开始的时候，交易员要决定在这个时间区间内他需要交易的股票数量，记作k_n, 交易员手上的仓位变化为

$$q_{n+1} = q_n + k_n, 0 \le n < N$$

市场价格为

$$S_{n+1} = S_n + \sigma\sqrt{\tau}\epsilon_{n+1} - \tau g\left(\frac{k_{n+1}}{\tau}\right), 0 \le n < N$$

交易的执行价格为

$$\tilde{S}_{n+1} = S_n - h\left(\frac{k_{n+1}}{\tau}\right), 0 \le n < N$$

这里作者假设市场冲击函数h是线性的

确定策略下，市场价格的方差为

$$\mathbb{V}[S_i] = i\tau\sigma^2, 0 \leq i < N$$

同样地，可以得到资产i(时间区间i交易价格)的方差为

$$\mathbb{V}[\tilde{S}_i] = \mathbb{V}[S_{i-1}]$$

资产i和j的协方差为

$$cov(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j) = \mathbb{V}[S_{i-1}]$$

那么我们可以得到关于N个资产也就是N个时间区间的交易价格的协方差矩阵，进一步地，根据风险平价所建立的模型，我们可以导出一个方程，来求解k_i, 即每个时间区间需要交易的股票数量或者股票数量占总交易量的比例

此外，由于$\mathbb{V}[\tilde{S}_1] = \mathbb{V}[S_0] = 0$，且$cov(\tilde{S}_1, \tilde{S}_j) = \mathbb{V}[S_0] = 0$

所以在构建协方差矩阵时，暂时不考虑第一个时间区间的交易

有方程：

$$\tau\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & N-1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_N \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{k_N} \end{bmatrix}$$

可以利用迭代算法求解。