Теорія ігор

Виграшні позиції, ретроспективний аналіз та функція Шпрага-Гранді.

Проста гра

У вас з другом є купка з 10 камінчиків. Ви берете по черзі 1,2 чи 3 камінця з цієї купки. Той, хто забере останній камінець переміг. Чи повинні ви брати камінчик перші, чи повинні дозволити брати першому вашому другу?

Проста гра

- відповісти навмання
- перебрати усі варіанти розвитку подій
- шукати закономірності
- динамічне програмування?

Гра

- можливість нічиєї
- кількість гравців
- симетричність(рівноправність)
- з нульовою чи ненульовою сумою
- паралельні і послідовні
- повнота інформації

Позиції гри

- як охарактеризувати ситуацію після кожного ходу?
- як залежить можливість виграти від кількості у купці?
- яка позиція кінцева?
- як визначити, позиція є виграшною чи програшною?

Ретроспективний аналіз

- Якщо відомо про виграшність/програшність деяких позицій, як визначити те саме для інших позицій?
- Що таке дерево гри?
- Яким чином пришвидшити очевидний розв’язок?

```cpp
vector<int> g [100];
bool win [100];
bool loose [100];
bool used[100];
int degree[100];
void dfs (int v) {
	used[v] = true;
	for (vector<int>::iterator i = g[v].begin(); i != g[v].end(); ++i)
		if (!used[*i]) {
			if (loose[v])
				win[*i] = true;
			else if (--degree[*i] == 0)
					loose[*i] = true;
			else
			continue;
		dfs (*i);
	}
}
```

Нім

- рівноправна, без нічиїх, скінчена, послідовна гра двох гравців з повною інформацією
- гру можна описати орієнтовним ациклічним графом
- K купок у кожній з яких ai камінців

Теорема Бутона

Позиція є виграшною тоді і тільки тоді, коли XOR-сума кількостей камінців у купках не дорівнює нулеві.

Нім зі збільшенням

Лема: Якщо до правил звичайного німу додати таке деяке правило, згідно з яким кількість камінців у деяких купках можна збільшувати і гра залишиться скінченою, то теорема Бутона буде працювати і для цього німу.

Теорема Шпрага-Гранді

Нехай маємо деякий стан v для рівноправної гри двох гравців. Нехай також із цього стану ми можемо перейти в стани v1,v2,...,vk. Тоді стану v цієї гри можна поставити у відповідність купку німу деякого розміру x, яка буде повністю еквівалентна нашій грі. Число x називається числом Шпрага-Гранді стану v і рахується рекурсивно за формулою :

x=mex{x1,...,xk}, де xi - число Шпрага-Гранді стану vi, mex - minimal excludant

Функція F(v)=x називається функцією Шпрага-Гранді

Застосування теореми Шпрага-Гранді

Нехай маємо деякий стан v. Тоді:

1. Знайдемо усі можливі переходи з стану v.
2. Кожний перехід може вести або в одну гру, або в суму незалежних ігор. У першому випадку порахуємо функцію ШГ рекурсивно. У другому поруxаємо рекурсивно значення ФШГ для кожної з ігор, а потім скажемо, що ФШГ від суми ігор дорівнює XOR-сумі цих значень.
3. Рахуємо MEX значень ФШГ - це і є число ШГ для даного стану. Якщо воно дорівнює нулю, позиція є програшною, інакше - виграшною.

Нім Мура

Маємо n купок, у кожній з яких a_i камінців. За один хід гравець може зменшити розміри від однієї до k купок. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв’язок

- Запишемо розміри всіх купок у двійковій системі числення
- Просумуємо їх порозрядно по модулю (k+1)
- Якщо отримуємо 0, позиція є програшною - інакше є виграшною.