Einführung in die Stochastik - Mitschrieb

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

15. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Deskriptive Statistik **8**
1.1 Der Grundraum 8
1.2 Absolute und relative Häufigkeit 8
1.3 Histogramm 8
1.4 Lagemaße 8
1.5 Streuungsmaße 10
1.6 Empirischer Korrelationskoeffizient 10

2 Ereignisse und Zufallsvariablen **12**
2.1 Definition 12
2.2 Beispiele 12
2.3 Bemerkung (Mengentheoretische Operationen) 12
2.4 Definition 13
2.5 Definition 13
2.6 Definition 14
2.7 Bemerkungen (Rechenregeln für Indikatorfunktionen) 14
2.8 Definition 14

3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume **16**
3.1 Motivation 16
3.2 Definition 16
3.3 Folgerung 17
3.4 Satz 18
3.5 Definition + Satz 18
3.6 Definition 18
3.7 Definition 19
3.8 Definition 19
3.9 Satz 19

4 Kombinatorik **20**
4.1 Grundregeln 20
4.2 Satz 20
4.3 Beispiel (Urnenmodelle) 20

4.4 Definition 21
4.5 Satz 21
4.6 Beispiel (Geburtstagsproblem) 22
4.7 Beispiel 22
4.8 Beispiel (Besetzungsmodelle) 22

5 Der Erwartungswert **23**
5.1 Definition 23
5.2 Satz 23
5.3 Folgerung 24
5.4 Satz (Transformationsformel) 24
5.5 Beispiele 25

6 Die hypergeometrische Verteilung und die Binomialverteilung **26**
6.1 Definition 26
6.2 Satz 27
6.3 Motivation 27
6.4 Definition 27
6.5 Satz 28

7 Mehrstufige Experimente **29**
7.1 Beispiel 29
7.2 Definition 29
7.3 Satz 30
7.4 Beispiel 30

8 Bedingte Wahrscheinlichkeiten **32**
8.1 Definition 32
8.2 Satz 32
8.3 Bemerkung (Zusammenhang zu Übergangswahrscheinlichkeiten) 33
8.4 Satz (Multiplikationsformel) 33
8.5 Satz 33
8.6 Beispiel 34
8.7 Beispiel (Ziegenproblem) 34
8.8 Beispiel (Simpson-Paradoxon) 35

9 Stochastische Unabhängigkeit **36**
9.1 Definition 36
9.2 Bemerkung 36
9.3 Bemerkungen 37
9.4 Beispiel (Produkträume) 37
9.5 Satz 38

9.6 Satz (Blockungslemma) 39
9.7 Satz 40
9.8 Beispiel (Bernoulli-Kette der Länge n) 40

10 Gemeinsame Verteilung **41**
10.1 Definition 41
10.2 Beispiel 42
10.3 Beispiel 42
10.4 Definition 42
10.5 Satz 43
10.6 Satz (Blockungslemma) 43
10.7 Satz (allgemeine Transformations-Formel) 44
10.8 Satz 44
10.9 Satz (Faltungsformel) 44
10.10 Satz (Additionsgesetz für Binomialverteilungen) 45

11 Varianz, Kovarianz, Korrelation **46**
11.1 Definition 46
11.2 Bemerkungen 46
11.3 Satz 47
11.4 Beispiel 47
11.5 Definition 48
11.6 Satz (Tschebyschov-Ungleichung) 48
11.7 Definition 49
11.8 Satz 49
11.9 Folgerung 50
11.10 Beispiel 51
11.11 Satz 51
11.12 Folgerung 52
11.13 Bemerkung 52

12 Wichtige diskrete Verteilungen **53**
12.1 Satz (Gesetz seltener Ereignisse) 53
12.2 Definition 54
12.3 Satz 54
12.4 Definition und Satz 55
12.5 Definition und Satz 56
12.6 Satz 56
12.7 Bemerkungen 57
12.8 Beispiel (Multinomiales Versuchsschema) 57
12.9 Definition 57
12.10 Folgerung 58

13 Bedingte Erwartungswerte und bedingte Verteilungen **59**
13.1 Definition 59
13.2 Bemerkungen 59
13.3 Beispiel 60
13.4 Satz (Formel vom totalen Erwartungswert) 60
13.5 Beispiel 60
13.6 Satz (Eigenschaften) 61
13.7 Satz (Substitutionsformel) 61
13.8 Beispiel (Würfelwurf) 62
13.9 Definition 62
13.10Beispiel 63
13.11Satz 63

14 Grenzwertsätze **64**
14.1 Satz (Schwache Gesetz der großen Zahlen, SGGZ) 64
14.2 Definition 64
14.3 Folgerung (SGGZ von Jakob Bernoulli) 65
14.4 Satz 65
14.5 Definition 67
14.6 Satz 67
14.7 Satz (ZGWS Lindeberg-Levy) 67

15 Statistik - Schätzprobleme **69**
15.1 Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit einer Bernoulli-Kette 69
15.2 Allgemeiner Modellrahmen 70
15.3 Beispiel (Binomialverteilung) 70
15.4 Beispiel 71
15.5 Definition 71
15.6 Bemerkungen 71
15.7 Definition 72
15.8 Bemerkung 72
15.9 Definition 72
15.10Beispiel 72
15.11Definition 73
15.12Beispiel 73
15.13Beispiel (vgl. 15.4) 73

16 Konfidenzbereiche **75**
16.1 Beispiel 75
16.2 Definition 75
16.3 Bemerkungen 76
16.4 Beispiel (Konfidenzschranken für p in $Bin(n, p)$) 76
16.5 Allgemeines Konstruktionsprinzip 78
16.6 Bemerkung 78

16.7 Definition . . . 79
16.8 $(Bin(n, p), S_n := X_1 + \ldots + X_n)$ . . . 79

17 Testtheorie: fällt weg **80**

18 Allgemeine Modelle **81**
18.1 Definition . . . 81
18.2 Bemerkungen . . . 81
18.3 Lemma . . . 82
18.4 Satz und Definition . . . 82
18.5 Folgerung . . . 82
18.6 Folgerung und Definition . . . 82
18.7 Definition (Axiomensystem von Kolmogrov) . . . 84
18.8 Bemerkung . . . 84
18.9 Definition und Satz . . . 84
18.10Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . 85
18.11Satz . . . 85
18.12Beispiel . . . 86
18.13Beispiel . . . 87
18.14Definition . . . 87
18.15Beispiel . . . 88
18.16Beispiel . . . 88
18.17Definition und Bemerkung . . . 89

19 Zufallsvariablen **90**
19.1 Definition und Satz . . . 90
19.2 Bemerkung . . . 90
19.3 Bemerkung . . . 92
19.4 Bemerkung . . . 92
19.5 Bemerkung . . . 93
19.6 Beispiel . . . 93
19.7 Definition . . . 94
19.8 Bemerkung . . . 94

20 Rechnen mit Dichten **95**
20.1 Satz . . . 95
20.2 Beispiel . . . 96
20.3 Beispiel . . . 96
20.4 Beispiel . . . 96
20.5 Satz . . . 96
20.6 Beispiel (Polarmethode) . . . 97
20.7 Beispiel . . . 97
20.8 Bemerkung . . . 98
20.9 Beispiel . . . 98

20.10Satz (Additionsgesetz für Nomalv.) 99
20.11Definition und Satz 99

21 Kenngrößen von Verteilungen 100
21.1 Definition 101
21.2 Satz 101

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung "Einführung in die Stochastik" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Günther Last gehalten wird.

Kapitel 1

Deskriptive Statistik

1.1 Der Grundraum

$\emptyset \neq \Omega =$ Grundraum (Grundgesamtheit, Merkmalsraum, Stichprobenraum)
Annahme: Ω ist diskret(endlich oder abzählbar unendlich) (Häufig $\Omega \subseteq \mathbb{R}$)

1.2 Absolute und relative Häufigkeit

$x_1, \ldots, x_n \in \Omega$ ("Daten")
$h(\omega) = \operatorname{card}\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon x_j = \omega\}, \omega \in \Omega$, absolute Häufigkeit von ω

Bemerkung $\sum\limits_{\omega \in \Omega} h(\omega) = n$

Definition $\frac{1}{n} h(\omega) =$ relative Häufigkeit von ω
$h(A) = \operatorname{card}\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon x_j \in A\}, A \subset \Omega =$ absolute Häufigkeit von A,
$\frac{1}{n} h(A) =$ relative Häufigkeit von A

1.3 Histogramm

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, b_1 < b_2 < \ldots < b_s$ mit $b_1 \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i, b_s > \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$
TODO: BILD
$d_j(b_{j+1} - b_j) = h([b_j, b_{j+1})) = \operatorname{card}\{i \in \{1, \ldots, n\} \colon b_j \leq x_i < b_{j+1}\}$

1.4 Lagemaße

Definition Ein **Lagemaß** ist eine Abbildung $l \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$l(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = l(x_1, \ldots, x_n) + a$$

"Verschiebungskovarianz". $x_1, \ldots, x_n, a \in \mathbb{R}$

1.4.1 Arithmetisches Mittel

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \bar{x} := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ "Schwerpunkt der Daten"

Fakt $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_i - t)^2 \xrightarrow{t} \text{Min}$
Lösung: $t = \bar{x}$
"Prinzip der kleinsten Quadrate"

Beweis $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - t)^2 = t^2 - 2\bar{x}t + \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 = (t - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 - (\bar{x})^2$

1.4.2 Median, Quantile

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ geordnete Stichprobe

Definition

$$x_{1/2} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

heißt **Median** von $x_1, \ldots, x_n$.

Fakt $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - x_{1/2}| = \min\limits_{t} \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - t|$ Übungsaufgabe

Bemerkung Der Median ist "robust" gegenüber "Ausreißern". Ist etwa $x_1 = \ldots = x_9 = 1$ und $x_{10} = 1000 (n = 10)$, so gilt $\bar{x} = 100,9, x_{1/2} = 1$

Definition Für 0 < p < 1 heißt

$$x_p := \begin{cases} x_{(\lfloor n \cdot p + 1 \rfloor)} & \text{, falls } n \cdot p \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p + 1)}) & \text{, falls } n \cdot p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

p-Quantil von $x_1, \ldots, x_n$.

Interpretation Mindestens $p \cdot 100\%$ der Daten liegen links von x_p und mindestens $(1 - p) \cdot 100\%$ liegen rechts von x_p.
$x_{1/4}$ = unteres Quartil, $x_{3/4}$ = oberes Quartil

1.5 Streuungsmaße

Definition Eine Abbildung $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\sigma(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = \sigma(x_1, \ldots, x_n) \text{ (Translationsinvarianz)}$$

heißt **Streuungsmaß**.

1.5.1 Empirische Varianz

$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$ = **empirische Varianz** von $x_1, \ldots, x_n$

1.5.2 Empirische Standardabweichung

$s := +\sqrt{s^2}$ = **empirische Standardabweichung** von $x_1, \ldots, x_n$

1.5.3 Spannweite

$x_{(n)} - x_{(1)}$ = **Spannweite** von $x_1, \ldots, x_n$

1.5.4 Quartilsabstand

$x_{(3/4)} - x_{(1/4)}$ = **Quartilsabstand** von $x_1, \ldots, x_n$

1.6 Empirischer Korrelationskoeffizient

$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ TODO: BILD
Gesucht: Gerade $y = a + b \cdot x$ so, dass

$$(*) \sum_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_j)^2 \xrightarrow{a,b} \text{Min}$$

Definition $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$ $\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2$

$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$ **empirische Kovarianz** $\sigma_x^2 > 0, \sigma_y^2 > 0.$

Lösung von (*): $b^* = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}}, a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$

$\min\limits_{a,b} \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_j)^2 \stackrel{!}{=} \min\limits_{b} \sum\limits_{j=1}^{n} (y_i - \bar{y} - b(x_j - \bar{x}))^2 = \ldots$

"lineare Regression"

Einsetzen von a^* und b^* in die Zielfunktion:

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} (y_j - a^* - b^* x_j)^2 = \ldots = n\sigma_y^2 (1 - (\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y})^2)$$

Definition $r_{xy} := \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ heißt **empirischer Korrelationskoeffizient** (*Pearson*).

Folgerung $|r_{xy}| \leq 1$
Es gilt $r_{xy} = \pm 1 \Leftrightarrow$ Punktewolke liegt exakt auf der Geraden $y = a^* + b^* x$.
Dabei ist $b^* > 0$, falls $r_{xy} = 1$ und $b^* < 0$, falls $r_{xy} = -1$.
Dieser empirische Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die (affin) lineare Abhängigkeit zwischen den x_j und den y_j.

Kapitel 2

Ereignisse und Zufallsvariablen

2.1 Definition

Gegeben sei eine Grundmenge Ω. Die Elemente von Ω heißen **Elementarereignisse**. Teilmengen von Ω heißen **Ereignisse**. (Idee: $\omega \in \Omega$ ist Ausgang eines zufälligen Versuchs.)

Interpretation Ein Ereignis $A \subset \Omega$ "tritt ein", wenn $\omega \in A$.

2.2 Beispiele

- (i) (Münzwurf)
  $\Omega = \{0, 1\}$(oder $\Omega = \{W, Z\}$)
- (ii) (m Münzwürfe)
  $\Omega = \{0, 1\}^m (A = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) : \sum_{j=1}^{m} \omega_j \geq k\}$ Ereignis)
- (iii) Werfen von 2 Würfeln
  $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$
- (iv) Brownsche Bewegung
  (TODO: BILD) Bewegung eines Blütenpollens in einer Flüssigkeit
  $\Rightarrow$ Zukunftsmusik
  $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R}^2)$

2.3 Bemerkung (Mengentheoretische Operationen)

Seien $A, B, A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$.
$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ und } \omega \in B\} \mathrel{\hat=}$ "A und B treten ein"
$A \cup B \mathrel{\hat=}$ "A oder B treten ein"
$\bar{A} \equiv A^c := \Omega \backslash A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} \mathrel{\hat=}$ "A tritt nicht ein"

$A \backslash B = A \cap B^c \mathrel{\hat{=}}$ "A tritt ein, aber nicht B"
$A \subset B \mathrel{\hat{=}}$ "wenn A, dann B"
$\emptyset \mathrel{\hat{=}}$ "unmögliches Ereignis"
$\Omega \mathrel{\hat{=}}$ "sicheres Ereignis"

Abkürzung $AB = A \cap B$

2.4 Definition

Eine Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt (reelle) **Zufallsvariable**. Für $\omega \in \Omega$ heißt $X(\omega)$ **Realisierung** der Zufallsvariable zu ω.

Idee Mit $\omega \in \Omega$ bekommt auch $X(\omega)$ einen zufälligen Charakter.

Definition $X^{-1}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\Omega) = \{A\colon A \in \Omega\}$ ist definiert durch

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in A\} \text{ ("Urbild von A unter X")}$$

Bemerkung

- $X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B), A, B \subset \mathbb{R}$
- $X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$
- $X^{-1}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X^{-1}(A_j)$
- $X^{-1}(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X^{-1}(A_j)$

Vereinbarung Es sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$. Wir setzen

- $\{X = t\} := \{\omega\colon X(\omega) = t\} (= X^{-1}(t))$
- $\{X \geq t\} := \{\omega\colon X(\omega) \geq t\}$

2.5 Definition

Sind X, Y Zufallsvariablen, so definiert man

- $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$
- $(X - Y)(\omega) = X(\omega) - Y(\omega)$
- $(X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$

$\omega \in \Omega$, neue Zufallsvariablen $X+Y, X-Y, X \cdot Y$
analog für $a \in \mathbb{R}$

- $aX(\omega) = a \cdot (X(\omega))$
- $\min(X,Y) = (X \wedge Y)(\omega) := \min\{X(\omega), Y(\omega)\} \ldots$

2.6 Definition

Sei $A \subset \Omega$. Die Funktion $1_A \colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \omega \in A \\ 0 & \text{, falls } \omega \notin A \end{cases}$$

und heißt **Indikatorfunktion** von A.

2.7 Bemerkungen (Rechenregeln für Indikatorfunktionen)

- $1_\emptyset \equiv 0$
- $1_\Omega \equiv 1$
- $(1_A)^2 = 1_A$
- $1_{A^c} = 1 - 1_A$
- $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$
- $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$
- $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$
- $1_{A \triangle B} = |1_A - 1_B|$

2.8 Definition

Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$. Die Zufallsvariable

$$X := \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$$

heißt **Zählvariable** oder **Indikatorsumme**.

Bemerkung

- $\{X = 0\} = \{\omega\colon X(\omega) = 0\} = A_1^c \cap \dots A_n^c$
- $\{X = n\} = A_1 \cap \dots \cap A_n$
- $\{X = k\}$ = "genau k der Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ treten ein" = $\bigcup\limits_{T\subset\{1,\dots,n\},|T|=k} \big(\bigcap\limits_{j\in T} A_j \cap \bigcap\limits_{j\notin T} A_j^c\big)$
  $(T \subset \{1, \dots, n\}, |T| = \text{card } T = k)$

Kapitel 3

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

3.1 Motivation

Zufallsexperiment mit Ausgängen in Ω
n-malige, 'unabhängige' Wiederholung
$\Rightarrow$ Ergebnis $(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega^n$
$r_n(A) := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} 1_A(a_j), A \subset \Omega$ relative Häufigkeit von A
$0 \leq r_n(A) \leq 1, r_n(\emptyset) = 0, r_n(\Omega) = 1$
$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B), A \cap B = \emptyset$
empirisches Gesetz über Stabilisierung relativer Häufigkeiten:
$r_n(A) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} ?$

3.2 Definition

Ein Paar $(\Omega, \mathbb{P})$ bestehend aus einer diskreten Menge $\Omega \neq \emptyset$ und einer Funktion $\mathbb{P}\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ heißt **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**, falls:

- (P1) $\mathbb{P}(A) \geq 0, A \subset \Omega$
- (P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- (P3) $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
  Diese Eigenschaft heißt σ-Additivität.

Man nennt $\mathbb{P}$ **Wahrscheinlichkeitsmaß (auf Ω)** (oder Wahrscheinlichkeitsverteilung) und $\mathbb{P}(A)$ heißt **Wahrscheinlichkeit von A**.

3.3 Folgerung

- a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- b) $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
- c) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, A \subset \Omega$
- d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B), A, B \subset \Omega$
- e) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonie)
- f) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (Komplementärwahrscheinlichkeit)
- g) $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ (Subadditivität)
- h) $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (Stetigkeit von unten)
- i) $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (Stetigkeit von oben)

Beweis • a): $A_j = \emptyset, j \in \mathbb{N}$ (P3) [1] $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
• b): $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ in P3!
• c) + f): Für $A \subset \Omega$ gilt nach b) (für n = 2):
$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$
• d): Nach b) gilt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B)$ und somit $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(A \cup B)$
• e): Wegen $B = A \cup (B \backslash A)$ folgt[2] $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \geq \mathbb{P}(A)$
• g): $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \backslash A_1, \ldots, B_n := A_n \backslash (\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j), n \geq 2$.
Dann gilt $B_n \subset A_n$ und $\bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ sowie $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$.
Es folgt aus (P3):
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \overset{!}{=} \mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j) \overset{(P3)}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j) \overset{e)}{\leq} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$ (∞ ist zugelassen)
• h) + i): Übungsaufgabe

[1] $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) = 2 \cdot \mathbb{P}(\emptyset)$
[2] (aus der Additivität)

3.4 Satz

Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$. Setze

$$S_k := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Dann gilt

- a) $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$ 'Siebformel'
- b) $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \le \sum_{k=1}^{2s+1} (-1)^{k-1} S_k, s = 0, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

  $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \ge \sum_{k=1}^{2s} (-1)^{k-1} S_k, s = 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Beweisidee für Siebformel vollständige Induktion nach n:
<u>n=2:</u> $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \overset{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = S_1 - S_2$
<u>n=3:</u> $\mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cup A_2} \cup A_3) \overset{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap A_3)$ [3]
$\overset{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = S_1 - S_2 + S_3$

3.5 Definition + Satz

a) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$ **Wahrscheinlichkeitsfunktion** (von $\mathbb{P}$).
Es gilt $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), A \subset \Omega$.
b) Sind Ω diskret und $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $p(\omega) \ge 0$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, so erhält man vermöge $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

Beweis • a) σ-Additivität $(A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\})$
• b) σ-Additivität: Großer Umordnungssatz! (Analysis)

3.6 Definition

$|\Omega| =: n < \infty$. Definiere $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n}$. Dann heißt $(\Omega, \mathbb{P})$ (ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum!) **Laplace-Raum**. Man nennt $\mathbb{P}$ **Gleichverteilung** auf Ω.
('homogene Münze', 'Würfeln', …)

[3] $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$

3.7 Definition

Sei $\Omega \neq \emptyset$ beliebig! $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $\Leftrightarrow$ $\exists$ abzählbare Menge $\Omega_0 \subset \Omega$, $\exists p\colon \Omega \to [0,\infty)$ mit $p(\omega = 0)$ für alle $\omega \notin \Omega_0$, und $\sum\limits_{\omega \in \Omega_0} p(\omega) = 1$, und $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega \in A \cap \Omega_0} p(\omega), A \subset \Omega$.

Wiederholung $(\Omega, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum
$p\colon \Omega \to [0,1]$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
$\mathbb{P}(A) := \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega), A \subset \Omega$
$p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$

Ω allgemeine Menge, $\Omega_0 \subset \Omega$ diskret
$p\colon \Omega \to [0,1]$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega_0} p(\omega) = 1, p(\omega) = 0, \omega \notin \Omega_0$
$\mathbb{P}(A) := \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega) := \sum\limits_{\omega \in A \cap \Omega_0} p(\omega)$
$\Omega_0 =$ Träger von $\mathbb{P}$

3.8 Definition

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Träger Ω_0. Es sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion $\mathbb{P}^X : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\mathbb{P}^X(B) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right), B \subset \mathbb{R}$ **Verteilung um** X.

3.9 Satz

In der Situation von Definition 3.8 ist $(\mathbb{R}, \mathbb{P}^X)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Träger $B_0 := X(\Omega_0) = \{X(\omega)\colon \omega \in \Omega_0\}$

Beweis. Für $B \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^X(B) &= \mathbb{P}(\{\omega\colon X(\omega) \in B\}) \\ &\overset{!}{=} \mathbb{P}(\{\omega\colon X(\omega) \in B \cap B_0\})\end{aligned}$$

Definiert man für $t \in \mathbb{R}$

$$p_t = \mathbb{P}(\{\omega\colon X(\omega) = t\}) = \mathbb{P}(X = t)$$

so ergibt sich aus der σ-Additivität von $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}^X(B) = \sum_{t \in B \cap B_0} \mathbb{P}(\{\omega\colon X(\omega) = t\}) = \sum_{t \in B \cap B_0} p_t$$

$\square$

Kapitel 4

Kombinatorik

$|A| = card(A) =$ Anzahl der Elemente einer endlichen Menge A

4.1 Grundregeln

$A_1, \ldots, A_k$ endliche Menge

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow \left| \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \right| = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j$

(ii) $|A_1 \times \ldots \times A_n| = \prod\limits_{j=1}^{k} |A_j|$

4.2 Satz

Es sollen k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ durch sukzessives Festlegen von $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nach folgenden Regeln gebildet werden:

- es gibt j_1 Möglichkeiten für die Wahl von a_1
- es gibt (dann) j_2 Möglichkeiten für die Wahl von a_2
- ...
- es gibt (dann) j_k Möglichkeiten für die Wahl von a_k

Dann gibt es genau $j_1 \cdot \ldots \cdot j_k$ solcher Tupel.

4.3 Beispiel (Urnenmodelle)

Betrachte Urne mit n durchnummerierten Kugeln.Es werden k Kugeln nach folgenden Regeln gezogen: ($M := \{1, \ldots, n\}$)

Zurücklegen (Wiederholung) \ Beachtung der Reihenfolge	ja	nein
ja	k-Permutationen aus M mit Wiederholung, Per_k^n	k-Kombinationen aus M mit Wiederholung, Kom_k^n
nein	k-Permutationen aus M ohne Wiederholung, $Per_{k,\neq}^n$	k-Kombinationen aus M ohne Wiederholung, $Kom_{k,\neq}^n$

4.4 Definition

$M = \{1, \ldots, n\} (n \in \mathbb{N})$

- $Per_k^n := M^k$
- $Per_{k,\neq}^n := \{(a_1, \ldots, a_k) \in M^k \colon a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$
- $Kom_k^n := \{(a_1, \ldots, a_k =\in M^k \colon a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k\}$
- $(Kom_{k,\neq}^n := \{(a_1, \ldots, a_k) \in M^k \colon a_1 < a_2 < \ldots < a_k\}$

4.5 Satz

- (i) $|Per_k^n| = n^k$
- (ii) $|Per_{k,\neq}^n| := n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
- (iii) $|Kom_k^n| = \binom{n+k-1}{k}$
- (iv) $|Kom_{k,\neq}^n| = \binom{n}{k}$

Beweis. (i): 4.1.(ii)
(ii) Satz 4.2
(iv) Betrachte Äquivalenzrelation

$$(a_1, \ldots, a_k) \sim (b_1, \ldots, b_k) \Leftrightarrow \{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\}$$

auf $Per_{k,\neq}^n$. Jede Äquivalenzklasse hat $k!$ Elemente! Es folgt

$$|Kom_{k,\neq}^n| \cdot k! = |Per_{k,\neq}^n| = n^{\underline{k}}$$

(iii) Die Abbildung $g \colon Kom_k^n \to Kom_{k,\neq}^{n+k-1}$ definiert durch

$$(a_1, \ldots, a_k) \mapsto (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \ldots, a_k + k - 1)$$

ist eine Bijektion! (Umkehrabbildung!) Es folgt(!)

$$|Kom_k^n| = |Kom_{k,\neq}^{n+k-1}| = \binom{n+k-1}{k}$$

□

4.6 Beispiel (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter k rein zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?

Antwort Betrachte $\Sigma = Per_k^n$ mit $n = 365$, und der Laplace-Verteilung. Es sei $A := \{(a_1, \dots, a_k) \in \Omega\colon$ es gibt $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j, a_i = a_j\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Per_{k,\neq}^n) \\
&\stackrel{!}{=} 1 - \frac{|Per_{k,\neq}^n|}{card\Omega} \\
&= 1 - \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \\
&= 1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&= 1 - (1 - \frac{1}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n})
\end{aligned}$$

$\underline{k = 23:}$ $\mathbb{P}(A) \approx 0,507 > \frac{1}{2}$
$n = \binom{49}{6}, k = 4004, \mathbb{P}(A) = 0,5001 > \frac{1}{2}$

4.7 Beispiel

n Personen bringen (zu einer Feier) je ein Geschenk mit. Geschenke werden "rein zufällig" verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt mindestens eine Person ihr eigenes Geschenk?
$\rightsquigarrow$ Siebformel!

4.8 Beispiel (Besetzungsmodelle)

k Teilchen sollen auf n nummerierte Fächer verteilt werden. Analogie zu Urnenmodell: Nummer der Kugel $\hat{=}$ Nummer des Fachs, Nummer der Ziehung $\hat{=}$ Nummer des Teilchens

Unterscheidbare Teilchen \ Mehrfachbesetzungen	ja	nein
ja	Per_k^n Maxwell-Boltzmann	Kom_k^n Bose-Einstein-Statistik
nein	$Per_{k,\neq}^n$ Fermi-Dirak-Statistik	$Kom_{k,\neq}^n$

Statistische Physik

Kapitel 5

Der Erwartungswert

$p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$, $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

5.1 Definition

- Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ existiert (genauer: X ist integrierbar bezüglich $\mathbb{P}$), falls

  $$\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| p(\omega) < \infty \tag{5.1}$$

  In diesem Fall heißt

  $$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

  (Physik: $< X >= \mathbb{E}[X]$) **Erwartungswert von** X.

- Ist $X \geq 0$ eine Zufallsvariable, so heißt

  $$\mathbb{E}X := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) \in [0, \infty]$$

  ebenfalls Erwartungswert von X.

5.2 Satz

Sei $L^1 \equiv L^1(\mathbb{P}) := \{X \colon X \text{ erfüllt } 5.1\}$. Dann ist L^1 ein reeller Vektorraum. Genauer:

- (i) $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, X, Y \in L^1$
- (ii) $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}X, X \in L^1, a \in \mathbb{R}$
- (iii) $\mathbb{E}1_A = \mathbb{P}(A), A \subset \Omega$

- (iv) $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$
- (v) $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$

Beweis. (i) $|(X+Y)(\omega)| \leq |X(\omega)| + |Y(\omega)|$.
Also $X + Y \in L^1(\mathbb{P})$ und

$$\sum_{\omega\in\Omega} (X(\omega) + Y(\omega))p(\omega) \overset{!}{=} \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)p(\omega)$$

(ii) analog
(iii) $\mathbb{E}1_A = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \mathbb{P}(A)$
(iv) + (v) Übungsaufgabe □

5.3 Folgerung

Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ und $X := \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$. Dann gilt $\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$.
(Gilt auch für ∞ viele Ereignisse.)

5.4 Satz (Transformationsformel)

Seien $X \colon \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ und $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiere $g(X) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$g(X)(\omega) = g(X(\omega)).$$

Dann ist $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$ genau dann, wenn

$$\sum_{x\colon \mathbb{P}(X=x)>0} |g(x)|\mathbb{P}(X = x) < \infty$$

[1]

In diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}g(x) = \sum_{x\colon \mathbb{P}(X=x)>0} g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{\omega\in\Omega} |g(X(\omega))|p(\omega) = \sum_{x\in\mathbb{R}\colon \mathbb{P}(X=x)>0} |g(x)| \sum_{\omega\in\Omega\colon X(\omega)=x} p(\omega)$$

$$\Omega = \bigcup_{x\in\mathbb{R}\colon X(\omega)=x, \mathbb{P}(X=x)>0} \{\omega\colon X(\omega) = x\} \cup \Omega', \mathbb{P}(\Omega') = 0$$

---

[1] $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x\})$

$$= \sum |g\left(X(\omega)\right)|p(\omega) = \sum_{\omega \notin \Omega'} |g\left(X(\omega)\right)|p(\omega)$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{R}:\, \mathbb{P}(X=x)>0} \; \sum_{\omega \in \{\omega \in \Omega:\, X(\omega)=x\}} |g(X(\omega))|p(\omega)$$

$$= \sum_{x\cdots} |g(x)|\mathbb{P}(X = x)$$

Ist das endlich, so gilt die Rechnung auch ohne Betragsstriche!
Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x)\,(g(x) \equiv x)$$

□

5.5 Beispiele

- Würfelwurf, X=Augenzahl, $\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{6}$.
  Also
  $$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{6} j \cdot \mathbb{P}(X = j) = \frac{6 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$
- Zweifacher Würfelwurf, X=Maximum der Augenzahlen ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2, \mathbb{P} =$ Gleichverteilung)
  $$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{36}$$
  $$\mathbb{P}(X = 2) = p((1, 2)) + p((2, 1)) + p((2, 2)) = \frac{3}{36}$$
  Allgemein: $\mathbb{P}(X = j) = \frac{2j-1}{36}, j = 1, \ldots, 6$
  Es folgt
  $$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{6} j \cdot \frac{2j-1}{36} \overset{?}{\approx} 4,47$$

Kapitel 6

Die hypergeometrische Verteilung und die Binomialverteilung

Urne mit Kugeln $\underbrace{1, 2, \ldots, r}_{rot}, \underbrace{r+1, \ldots, r+s}_{schwarz}$
$r, s \in \mathbb{N}_0, r + s > 0.$

6.1 Definition

- n mal Ziehen ohne Zurücklegen
- $a_j :=$ Nummer der j-ten gezogenen Kugel
- $\Omega = Per^{r+s}_{n,\neq}$
- $\mathbb{P} =$ Gleichverteilung ("unabhängiges", "rein zufälliges" Ziehen)
- $A_j := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega \colon a_j \leq r\} \hat{=} \{$j-te gezogene Kugel ist rot$\}$
- $X := \sum\limits_{j=1}^{n} 1_{A_j} =$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$\mathbb{P}^X$ (die Verteilung von X) heißt **hypergeometrische Verteilung** mit Parametern r, s, n, kurz:

$$X \sim Hyp(n, r, s), n \leq r + s$$

$$\mathbb{P}^X = Hyp(n, r, s)$$

6.2 Satz

Es gilt

- (i) $\mathbb{E}X = n \cdot \frac{r}{r+s}$
- (ii) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, k = 0, \ldots, r \wedge n$

Beweis. (i) Es gilt (Symmetrieargument!) $|A_j| = r \cdot (r+s-1)^{\underline{n-1}}$
$|\Omega| = (r+s)^{\underline{n}} \Rightarrow \mathbb{P}(A_j) = \frac{|A_j|}{|\Omega|} = \frac{r}{r+s}$
Aus 5.3 folgt $\mathbb{E}X = n \cdot \frac{r}{r+s}$
(ii) $|\{X = k\}| \overset{!}{=} \binom{n}{k} r^{\underline{k}} s^{\underline{n-k}}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k} r^{\underline{k}} s^{\underline{n-k}}}{(r+s)^{\underline{n}}} = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$ □

6.3 Motivation

X Zufallsvariable, $\sum\limits_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ "unabhängige" Wiederholungen von X (= Ergebnis eines zufälligen Versuchs)
$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ Zufallsvariable!
Mit $h_j := card\{i \in \{1, \ldots, n\} \colon X_i = x_j\}$ gilt $\bar{X} \overset{!}{=} \frac{1}{n}(h_1 x_1 + h_2 x_2 + \ldots + h_n x_n)$
empirisches Gesetz über Stabilität relativer Häufigkeiten
$\underset{n \to \infty}{\to} \mathbb{P}(X = x_1)x_1 + \ldots + \mathbb{P}(X = x_r)x_r \overset{!}{=} \mathbb{E}X$
$X \sim Hyp(n, r, s) = \mathbb{P}^X, n \leq r + s$
$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, k = 0, \ldots, n$
Wegen $\binom{m}{l} := 0$ für $m < l$ gilt: $\mathbb{P}(X = k) = 0$ für $k < r$ und für $n - k > s (k < n - s)$

6.4 Definition

Binomialverteilung:

- n maliges Ziehen aus einer Urne mit $r + s$ Kugeln mit Zurücklegen
- $\Omega = Per_n^{r+s} = \{(a_1, \ldots, a_n) \colon 1 \leq a_i \leq r + s, i = 1, \ldots, n\}$
- $\mathbb{P}$ Gleichverteilung

$X := \sum\limits_{j=1}^{n} 1_{A_j}, A_j := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega \colon a_j \leq r\}$
$\mathbb{P}^X$ heißt Binomialverteilung mit Parametern n und $p := \frac{r}{r+s}$. Man schreibt auch $Bin(n, p) := \mathbb{P}^X$.

6.5 Satz

Es gilt

1. $\mathbb{E}X = np$
2. $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n$

Beweis.

1. $|A_j| = r \cdot (r+s)^{n-1}$
   $|\Omega| = (r+s)^n \rightsquigarrow \mathbb{P}(A_j) = \frac{|A_j|}{|\Omega|} = \frac{r}{r+s} = p$
   Folgerung 5.3 $\rightsquigarrow \mathbb{E}X = np$.
2. $card\{X = k\} = \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$
   $\rightsquigarrow \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^k (r+s)^{n-k}}$

$\square$

Bemerkung $Bin(n,p)$ ist für jedes $p \in [0,1]$ definiert.

Kapitel 7

Mehrstufige Experimente

7.1 Beispiel

Urne mit einer roten und drei schwarzen Kugeln
1. Experiment Kugel ziehen, Farbe notieren, Kugel und eine weitere Kugel derselben Farbe zurücklegen
2. Experiment Erneut Kugel ziehen
Modell: $\Omega := \{0,1\} \times \{0,1\}, \quad (0 \hat{=} s, 1 \hat{=} r)$

Konstruktion von $\mathbb{P}$ $\quad p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$

$$\left.\begin{aligned} p(1,1) &:= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{2}{20} = \tfrac{1}{10} \\ p(1,0) &:= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{20} \\ p(0,1) &:= \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{5} = \tfrac{3}{20} \\ p(0,0) &:= \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{12}{20} \end{aligned}\right\} \text{1. Pfadregel}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Betrachte $B := \{(1,1),(0,1)\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B) = p(1,1) + p(0,1) = (\text{2. Pfadregel})$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{3}{20} = \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(\text{erste Kugel ist rot})$$

(TODO: Bild(Baumdiagramm))

7.2 Definition

Mehrstufige Experimente $\quad \Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ ($\Omega_j \hat{=}$ Grundraum für j-tes Teilexperiment)
$\omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$
Problem: Definiere $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$

1. Startverteilung $p_1 \colon \Omega_1 \to [0,1] \quad \sum\limits_{\omega \in \Omega_1} p_1(\omega) = 1$
2. Übergangswahrscheinlichkeiten $p_2(a_2|a_1) \geq 0 \quad \sum\limits_{a_2 \in \Omega_2} p_2(a_2|a_1) \stackrel{!}{=} 1$

   ($p_2(a_2|a_1) \hat{=}$ Wahrscheinlichkeit, dass 2. Versuch das Ergebnis a_2 liefert unter der Bedingung, dass 1. Versuch Ergebnis a_1 geliefert hat.)
   $p_3(a_3|a_1, a_2) \geq 0 \quad \sum\limits_{a_3 \in \Omega_3} p_3(a_3|a_1, a_2) = 1$
   ...
   $p_n(a_n|a_1, \ldots, a_{n-1}) \geq 0 \quad \sum\limits_{a_n \in \Omega_n} p_n(a_n|a_1, \ldots, a_{n-1}) = 1$

Setze für $\omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$

$p(\omega) := p_1(a_1) \cdot p_2(a_2|a_1) \cdot p_3(a_3|a_1, a_2) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n|a_1, \ldots, a_{n-1})$ 1. Pfadregel

Schließlich sei

$\mathbb{P}(A) := \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega), \quad A \subset \Omega$ Produkt von Übergangswahrscheinlichkeiten

7.3 Satz

$(\Omega, \mathbb{P})$ ist diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Beweis. zu zeigen: $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
Induktion (oder direkt)! Zum Beispiel gilt für $n = 2$

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{(a_1, a_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} p_1(a_1) p_2(a_2|a_1) = \sum_{a_1 \in \Omega_1} \sum_{a_2 \in \Omega_2} p_1(a_1) p_2(a_2|a_1)$$

$$\sum_{a_1 \in \Omega_1} p_1(a_1) \cdot 1 = 1.$$

□

7.4 Beispiel

Unabhängige Experimente $(\Omega_j, \mathbb{P}_j), j = 1, \ldots, n$, diskrete Wahrscheinlichkeitsräume, $p_i(a_i) = \mathbb{P}_i(\{a_i\})$
Idee: "Unabhängiges" Durchführen der zugehörigen Experimente

$$\Omega := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, p(\omega) := p_1(a_1) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n), \omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$$

$\big(p_2(a_2|a_1) = p_2(a_2), \ldots, p_n(a_n|a_1, \ldots, a_{n-1}) = p_n(a_n)\big)$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

Man nennt $\mathbb{P}$ das **Produkt** von $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ und schreibt

$$\mathbb{P} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i.$$

z.B. kann $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \{1, \ldots, 6\}$
$p_1(a_1) = p_2(a_2) = \frac{1}{6}$
Dann ist

$$p(a_1, a_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

und $\mathbb{P}$ ist die Laplace-Verteilung auf Ω.

Kapitel 8

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

8.1 Definition

Sei $B \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von $A \subset \Omega$ unter der Bedingung B.
Alternativ: $P_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$

8.2 Satz

P_B ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. Dabei ist $P_B(A) = 1$ falls $B \subset A$ und $P_B(A) = 0$ falls $A \cap B = \emptyset$. Es gilt:

$$p_B(\omega) := \begin{cases} \frac{p(\omega)}{\mathbb{P}(B)} & \text{, falls } \omega \in B \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \text{mit } p_B(\omega) := \mathbb{P}_B(\{\omega\})$$

Beweis ist klar! ($\sum\limits_{\omega \in \Omega} p_B(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum\limits_{\omega \in B} p(\omega) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.)

Motivation Für $A \subset B$

$$\frac{h_n(A)}{h_n(B)} = \frac{\frac{1}{n} h_n(A)}{\frac{1}{n} h_n(B)} \rightsquigarrow \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

8.3 Bemerkung (Zusammenhang zu Übergangswahrscheinlichkeiten)

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad p(\omega) = p_1(a_1)p_2(a_2|a_1), \quad \omega = (a_1, a_2)$
Für $a_1 \in \Omega_1$ sei

$$B := \{a_1\} \times \Omega_2.$$

Für $a_2 \in \Omega_2$ sei

$$A := \Omega_1 \times \{a_2\}.$$

Es gilt $A \cap B = \{(a_1, a_2)\}$,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \sum_{\omega \in A \cap B} p(\omega) = \sum_{(b_1, b_2) \in A \cap B} p_1(b_1)p_2(b_2|b_1) = p_1(a_1)p_2(a_2|a_1),$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{b_2 \in \Omega_2} p(a_1|b_2) = \sum_{b_2 \in \Omega_2} p_1(a_1)p_2(b_2|a_1) = p_1(a_1)$$

Es folgt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{p_1(a_1)>0}{=} p_2(a_2|a_1)$$

8.4 Satz (Multiplikationsformel)

Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Dann gilt

$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

Beweis. Für $n = 2$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1)$$

Allgemein: Ausschreiben der Definitionen + kürzen
$n = 3$: rechte Seite: $\mathbb{P}(A_1) \cdot \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ □

8.5 Satz

Sei $A_1, A_2, \ldots$ Zerlegung von $\Omega(\bigcup A_i = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$.
Sei $B \subset \Omega$. Dann gilt

1. $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)$ Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

2. [1] Für $\mathbb{P}(B) > 0$, so gilt

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

[1] Formel von Bayes

(Man vereinbart $\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j) := 0$, falls $\mathbb{P}(A_j) = 0$)

Beweis. 1. $B = B \cap \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{B \cap A_j}_{\text{paarweise disjunkt}}$ Aus der σ-Additivität von $\mathbb{P}$ folgt

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)$$

2. rechte Seite der Behauptung: $\frac{\mathbb{P}(B\cap A_k)}{\mathbb{P}(B)} \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(A_k|B)$

□

8.6 Beispiel

Eine Krankheit komme bei 4% der Bevölkerung vor[2]. Ein Test spreche bei 90% der Kranken an und bei 20% der Gesunden!

Modell

- Ω : Menge der Personen in Deutschland
- $K \subset \Omega$: Menge der kranken Personen
- $A \subset \Omega$: Menge der (hypothetisch) positiv getesteten Personen
- $\mathbb{P}$ = Gleichverteilung auf Ω

Dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(K|A) &= \text{ Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person krank ist} \\
&\stackrel{Bayes}{=} \frac{\mathbb{P}(K)\mathbb{P}(A|K)}{\mathbb{P}(K)\mathbb{P}(A|K) + \mathbb{P}(K^c)\mathbb{P}(A|K^c)} \quad (K = A_j, K^c = A_k) \\
&= \frac{0,04 \cdot 0,9}{0,04 \cdot 0,9 + 0,96 \cdot 0,2} = \frac{0,036}{0,036 + 0,192} = \frac{0,036}{0,228} = 0,158
\end{aligned}$$

8.7 Beispiel (Ziegenproblem)

Ausgelassen.

[2]Die Mediziner sprechen von "Prävalenz".

8.8 Beispiel (Simpson-Paradoxon)

Zulassung von Studenten in Berkeley (1973)

- Zulassungsrate Männer: 44%
- Zulassungsrate Frauen: 35%

Aber: Zulassungsraten der Männer in den einzelnen Fächern kleiner als die der Frauen

Erklärung

- $A \hat{=}$ Zulassung [3]
- $B \hat{=}$ Frau [4]
- $K_j \hat{=}$ Bewerbung für Fach j

Dann kann gelten

$$\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A|B^c)$$

aber

$$\mathbb{P}(A|B \cap K_j) > \mathbb{P}(A|B^c \cap K_j), \quad j = 1, 2, \ldots$$

Denn:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_j \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap K_j)}{\mathbb{P}(B)} \frac{\mathbb{P}(B \cap K_j)}{\mathbb{P}(B \cap K_j)}$$

$$= \sum_j \underbrace{\mathbb{P}(K_j|B)}_{\text{Bewerbungsrate der Frauen im j-ten Fach}} \underbrace{\mathbb{P}(A|B \cap K_j)}_{\text{siehe oben}}$$

analog

$$\mathbb{P}(A|B^c) = \sum \mathbb{P}(K_j|B^c)\mathbb{P}(A|B^c \cap K_j)$$

Die absolute Erfolgsquote ist eine gewichtete Summe der relativen Erfolgsquoten.

[3] Ereignis, dass rein zufällig ausgewählter Bewerber erfolgreich ist mit seiner Bewerbung.
[4] Ereignis, dass zufällig ausgewählte weibliche Bewerberin erfolgreich ist.

Kapitel 9

Stochastische Unabhängigkeit

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

9.1 Definition

$A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j \in T} A_j) = \prod_{j \in T} \mathbb{P}(A_j), \quad T \subseteq \{1, \ldots, n\}, |T| \geq 2.$$

($2^n - n - 1$ Gleichungen.)

9.2 Bemerkung

1. A, B stochastisch unabhängig
   $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
   $\overset{\mathbb{P}(B)>0}{\Leftrightarrow} \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ (Interpretation!) [1]
   $\Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) \overset{\mathbb{P}(B)>0}{=} \mathbb{P}(B)$

2. $\mathbb{P}(B) = 0 \rightsquigarrow A$ und B sind stochastisch unabhängig
   $\mathbb{P}(B) = 1 \rightsquigarrow A$ und B sind stochastisch unabhängig

3. A, B, C unabhängig $\Leftrightarrow$
   $$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \end{array}\right\} \text{paarweise stochastische Unabhängigkeit}$$
   $$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

[1] Wenn die Kenntnis des Eintretens von B keinerlei Rückschlüsse auf das Eintreten von A zulässt.

Wiederholung $A, B \subset \Omega$ stochastisch unabhängig

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

$A_1, \ldots, A_n$ stochastisch unabhängig $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j \in T} A_j) = \prod_{j \in T} \mathbb{P}(A_j), \quad T \subset \{1, \ldots, n\}, |T| \geq 2$$

9.3 Bemerkungen

(iv) A, B stochastisch unabhängig. Dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &\stackrel{!}{=} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

Also sind A und B^c (also auch A^c und B^c bzw. A^c und B) stochastisch unabhängig.

(v) Seien $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig und $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Dann sind $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ stochastisch unabhängig.

(vi) Ist A von A unabhängig, so ist

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$$

d.h. $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

(vii) Man nennt $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ stochastisch unabhängig

$$\stackrel{d}{\Leftrightarrow} A_1, \ldots, A_n \text{ stochastisch unabhängig für jedes } n \geq 2.$$

9.4 Beispiel (Produkträume)

Sei $(\Omega, \mathbb{P}) := (\bigotimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathbb{P}_j)$, d.h.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{(a_1, \ldots, a_n)\}) &= p(\omega) \quad \omega = (a_1, \ldots, a_n) \\ &= p_1(a_1) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n) \quad (p_i(a_i) = \mathbb{P}_i(\{a_i\}))\end{aligned}$$

Sei $B = B_1^* \times \ldots \times B_n^*, \quad B_i^* \in \Omega_i$. Dann $\mathbb{P}(B_1^* \times \ldots \times B_n^*)$

$$= \sum_{(a_1, \ldots, a_n) \in B_1^* \times \ldots \times B_n^*} p_1(a_1) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n)$$

$$= \sum_{a_1 \in B_1^*} \dots \sum_{a_n \in B_n^*} p_1(a_1) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \sum_{a \in B_j^*} p_j(a) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_j(B_j^*) \qquad (*)$$

Sei jetzt $A_j^* \subset \Omega_j, j = 1, \dots, n$.

Behauptung $A_j = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times A_j^* \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n, \quad j = 1, \dots, n$ stochastisch unabhängig.

Beweis. Sei $T \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|T| \geq 2$.
Definiere

$$B_j^* := \begin{cases} A_j^*, & j \in T, \\ \Omega_j, & j \notin T. \end{cases}$$

Dann

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j \in T} A_j) = \mathbb{P}(B_1^* \times \ldots \times B_n^*)$$

[2]

$$\overset{(*)}{=} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_j(B_j^*) = \prod_{j \in T} \mathbb{P}_j(A_j^*)$$

$$\overset{(*)}{=} \prod_{j \in T} \mathbb{P}_j(A_j)$$

[3] □

9.5 Satz

$A_1, \dots, A_n$ stochastisch unabhängig $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j \in I} A_j \cap \bigcap_{j \in J} A_j^c) = \prod_{j \in I} \mathbb{P}(A_j) \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j^c) \quad I, J \subset \{1, \dots, n\}, I \cap J = \emptyset$$

(Hierbei $\bigcap_{j \in \emptyset} B_j := \Omega$, $\prod_{j \in \emptyset} a_j := 1$)

Beweis. Induktion über Anzahl der Elemente von J (vergleiche auch Bemerkung 9.3 (iv)) □

[2] $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$
[3] mit $B_i^* = \Omega_i$ bis auf ein i

Definition Für $A \subset \Omega$ sei $A^0 := A^c, A^1 := A$.
Für $B_1, \ldots, B_n \subset \Omega$ sei

$$\sigma(B_1, \ldots, B_k) := \{B \subset \Omega \colon \exists U \subset \{0,1\}^k \text{ mit } B = \bigcup_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in U} B_1^{\epsilon_1} \cap \ldots \cap B_k^{\epsilon_k}\}.$$

(Die von $B_1, \ldots, B_k$ erzeugte Algebra).

Beispiel 9.1. *(TODO: Bild)*

Bemerkung 9.1. *Eine Menge der Form*

$$B_1^{\epsilon_1} \cap \ldots \cap B_k^{\epsilon_k} \textit{ für } (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k) \in \{0,1\}^k$$

heißt Atom von $\sigma(B_1, \ldots, B_k)$. Jede Menge in $\sigma(B_1, \ldots, B_k)$ ist Vereinigung von Atomen. Insbesondere gilt

$$B_1, \ldots, B_k \in \sigma(B_1, \ldots, B_k), \emptyset \in \sigma(B_1, \ldots, B_k), \Omega \in \sigma(B_1, \ldots, B_k).$$

9.6 Satz (Blockungslemma)

Seien $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n$ stochastisch unabhängig und
$B \in \sigma(A_1, \ldots, A_k), C \in \sigma(A_{k+1}, \ldots, A_n)$. Dann sind B und C stochastisch unabhängig.

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}\left(\underbrace{(\bigcup_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k)\in U} A_1^{\epsilon_1} \cap \ldots A_k^{\epsilon_k})}_{B} \cap \underbrace{(\bigcup_{(\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_n)\in V} A_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} \cap \ldots \cap A_n^{\epsilon_n})}_{C}\right)$$

disjunkte Vereinigung

$$= \sum_U \mathbb{P}\left((A_1^{\epsilon_1} \cap \ldots \cap A_k^{\epsilon_k}) \cap \bigcup_V (A_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} \cap \ldots \cap A_n^{\epsilon_n})\right)$$

$$= \sum_{U,V} \mathbb{P}(A_1^{\epsilon_1} \cap \ldots \cap A_k^{\epsilon_k} \cap A_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} \cap \ldots A_n^{\epsilon_n})$$

$$= \sum_{U,V} \left(\underbrace{\prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j^{\epsilon_j})}_{\mathbb{P}(A_1^{\epsilon_1} \cap \ldots \cap A_k^{\epsilon_k})} \underbrace{\prod_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(A_j^{\epsilon_j})}_{\mathbb{P}(A_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} \cap \ldots \cap A_n^{\epsilon_n})} \right)$$

$$= \sum_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k)\in U} \mathbb{P}(A_1^{\epsilon_1} \cap \ldots \cap A_k^{\epsilon_k}) \sum_{(\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_n)\in V} \mathbb{P}(A_{k+1}^{\epsilon_{k+1}} \cap \ldots \cap A_n^{\epsilon_n})$$

$$\stackrel{!}{=} \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

□

9.7 Satz

$A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ stochastisch unabhängig. Ferner gelte $\mathbb{P}(A_i) = p, \quad i = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$X := \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$$

$Bin(n,p)$-verteilt.

Beweis. Es gilt

$$\{X = k\} = \bigcup_{T\subseteq\{1,\ldots,n\},|T|=k} \left(\bigcap_{j\in T} A_j \cap \bigcap_{j\notin T} A_j^c \right)$$

disjunkte Vereinigung, also

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{T\subseteq\{1,\ldots,n\},|T|=k} \mathbb{P}(\bigcap_{j\in T} A_j \cap \bigcap_{j\notin T} A_j^c)$$

$$\stackrel{\text{Voraussetzung}}{=} \sum_{T\subseteq\{1,\ldots,n\},|T|=k} p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

□

9.8 Beispiel (Bernoulli-Kette der Länge n)

$(\Omega, \mathbb{P}) := \bigotimes_{j=1}^{n} (\Omega_j, \mathbb{P}_j)$
$\Omega_1 = \ldots = \Omega_n = \{0, 1\}$
$\mathbb{P}_j(\{1\}) = 1 - \mathbb{P}_j(\{0\}) = p, \quad j = 1, \ldots, n$
Die Ereignisse

$$A_j := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega \colon a_j = 1\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

sind stochastisch unabhängig.
Ferner $\mathbb{P}(A_j) = p$.

Kapitel 10

Gemeinsame Verteilung

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (mit Träger Ω_0).

10.1 Definition

Seien $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, k)$ Zufallsvariablen. Definiere $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ vermöge $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_k(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Dann heißt X k-**dimensionaler Zufallsvektor**.
Für $B \subset \mathbb{R}^k$ sei $X^{-1}(B) \equiv \{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$. Die Abbildung

$$\mathbb{P}^X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$$

definiert durch

$$\mathbb{P}^X(B) := \mathbb{P}(\{X \in B\})(= \mathbb{P}(X \in B))$$

heißt Verteilung von X oder auch gemeinsame Verteilung von $X_1, \dots, X_k$.
Die Verteilung von X_j heißt j**-te Marginalverteilung (von X_j)**.

Wiederholung $(\Omega, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum
$\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0\}$ diskret
$X = (X_1, \dots, X_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$
Verteilung: $\mathbb{P}^X$

$$\mathbb{P}^X(A) := \mathbb{P}(X \in A) \equiv \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\}), \quad A \subset \mathbb{R}^k$$

Bemerkung Die gemeinsame Verteilung legt Randverteilungen fest. $(k = 2)$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1) \quad \left(= \mathbb{P}^{X_1}(\{x_1\})\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\{X_1 = x_1\} \cap \bigcup_{x_2 \in X_2(\Omega_0)} \{X_2 = x_2\}\right)$$

$$\overset{\sigma\text{-Additivität}}{=} \sum_{x_2 \in X_2(\Omega_0)} \underbrace{\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \{X_2 = x_2\})}_{\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}$$
$$= \sum_{x_2 \in X_2(\Omega_0)} \mathbb{P}^{(X_1, X_2)}(\{(x_1, x_2)\})$$

10.2 Beispiel

$\Omega := \{1, \ldots, 6\}^2$
$\mathbb{P} =$ Gleichverteilung (2-maliger Würfelwurf)

$$X_1((k,l)) := \min(k,l), X_2((k,l)) := \max(k,l)$$

(TODO: Tabelle)

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j), \quad i, j = 1, \ldots, 6$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \mathbb{P}(X_2 = 7 - i), \quad i = 1, \ldots, 6$$
$$\rightsquigarrow \mathbb{P}^{X_1} = \mathbb{P}^{7 - X_2} \quad (X_1 \neq 7 - X_2)$$
$$X_1 \overset{d}{=} 7 - X_2 \quad \text{Verteilungsgleichheit}$$

10.3 Beispiel

$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j)$
($c \in [0, \frac{1}{2}]$ fest)

i \ j	1	2	
1	c	$\frac{1}{2} - c$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2} - c$	c	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2)$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{P}^{X_1} = \mathbb{P}^{X_2} \mathrel{\hat{=}} \text{fairer Münzwurf!}$$

Also legen die Randverteilungen $\mathbb{P}^{X_1}, \mathbb{P}^{X_2}$ die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}^{(X_1, X_2)}$ <u>nicht</u> fest.

10.4 Definition

$X_1, \ldots, X_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißen **stochastisch unabhängig**

$$\Leftrightarrow \{X_1 \in B_1\}, \ldots, \{X_k \in B_k\} \text{ stochastisch unabhängig } \forall B_1, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}$$

10.5 Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $X_1, \dots, X_k$ sind stochastisch unabhängig
2. $\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_k \in B_k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i \in B_i) \quad B_1, \dots, B_k \subset \mathbb{R}$
3. $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = x_i) \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Klar nach Definition.
(2) $\Rightarrow$ (1): Wähle in der Definition $B_j = \mathbb{R}$ für $j \notin T(\{X_j \in B_j\} = \Omega)$
(2) $\Rightarrow$ (3): Setze $B_i = \{x_i\}$
(3) $\Rightarrow$ (2): Für $B_1, \dots, B_k \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_k \in B_k) \quad (= \mathbb{P}^{(X_1,\dots,X_k)}(B_1 \times \ldots \times B_k)) \quad (B_i \subset \underbrace{X_i(\Omega_0)}_{\text{diskret}})& \\
= \sum_{x_1 \in B_1, \dots, x_k \in B_k} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k)& \\
\overset{(3)}{=} \sum \mathbb{P}(X_1 = x_1) \ldots \mathbb{P}(X_k = x_k)& \\
= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_k \in B_k)&
\end{aligned}$$

[1] $\square$

Bemerkung Im Falle stochastischer Unabhängigkeit legen die Randverteilungen die gemeinsame Verteilung fest.

10.6 Satz (Blockungslemma)

Es seien $X_1, \dots, X_k$ stochastisch unabhängige, eindimensionale Zufallsvariablen und $1 \le l \le k-1$, $g\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, $h\colon \mathbb{R}^{k-l} \to \mathbb{R}$. Dann sind $g(X_1, \dots, X_l)$ und $h(X_{l+1}, \dots, X_k)$ stochastisch unabhängig.

Beweis. Übung! $\square$

[1] $\sum\limits_{i,j} a_i b_j = (\sum a_i)(\sum b_j)$ "Fubini"

10.7 Satz (allgemeine Transformations-Formel)

Seien $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ Zufallsvektor, $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Setze

$$M := \{z \in \mathbb{R}^k \colon \mathbb{P}(Z = z) > 0\}.$$

Dann ist $g(Z)$ integrierbar[2] genau dann, wenn

$$\sum_{z \in M} |g(z)| \cdot \mathbb{P}(Z = z) < \infty$$

In diesem Fall ist der Erwartungswert

$$\mathbb{E}g(Z) = \sum_{z \in M} g(z) \cdot \mathbb{P}(Z = z)$$

Beweis. vgl. eindimensionalen Spezialfall. □

10.8 Satz

Seien $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stochastisch unabhängig. Sind X, Y integrierbar, so ist auch $X \cdot Y$ integrierbar und $\mathbb{E}(X \cdot Y) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$.

Beweis. Setze $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \mathbb{P}(X = x, Y = y) > 0\} = \{(x, y) \colon \mathbb{P}(X = x) > 0, \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$. Dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X \cdot Y| &= \sum_{\omega \in \Omega_0} |X(\omega)||Y(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&\overset{!}{=} \sum_{(x,y) \in M} |x||y| \underbrace{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}_{\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{x\colon \mathbb{P}(X=x)>0} |x|\mathbb{P}(X = x)\right)}_{<\infty} \cdot \underbrace{\left(\sum_{y\colon \mathbb{P}(Y=y)>0} |y|\mathbb{P}(Y = y)\right)}_{<\infty}
\end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung "ohne Betragsstriche" liefert die behauptete Formel. □

10.9 Satz (Faltungsformel)

Sind X, Y unabhängige reelle Zufallsvariablen, so gilt

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega_0)} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = z - x), \quad z \in \mathbb{R}$$

[2] d.h. der Erwartungswert existiert.

Beweis. Ohne Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{P}(X+Y=z) \overset{!}{=} \sum_{X \in X(\Omega_0)} \mathbb{P}(X=x, Y=z-x)$$

□

10.10 Satz (Additionsgesetz für Binomialverteilungen)

Seien $X \sim Bin(m,p), Y \sim Bin(n,p)$ stochastisch unabhängig.
Dann ist $X+Y \sim Bin(m+n,p) \quad \forall m,n \geq 1, p \in [0,1]$

Beweis. Es seien $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_{m+n}$ unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_i) = p$. Dann sind

$$X' := \sum_{i=1}^{m} 1_{A_i}, \qquad Y' := \sum_{i=m+1}^{m+n} 1_{A_i}$$

$Bin(m,p)$ bzw. $Bin(n,p)$ Binomialverteilt. (Bernoulli-Kette)
Nach Blockungslemma sind X', Y' stochastisch unabhängig! Außerdem

$$X' + Y' = \sum_{i=1}^{m+n} 1_{A_i} \sim Bin(m+n,p)$$

Aber aus $(X', Y') \overset{d}{=} (X, Y)$ folgt

$$X' + Y' \overset{d}{=} X + Y, \text{ d.h. } X+Y \sim Bin(m+n,p)$$
$$\mathbb{P}^{X'+Y'} = \mathbb{P}^{X+Y}$$

□

Kapitel 11

Varianz, Kovarianz, Korrelation

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

11.1 Definition

Falls X Zufallsvariable und $\mathbb{E}X^2 < \infty$, so heißt

$$V(X) \equiv Var(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

Varianz von X.

11.2 Bemerkungen

1. Wegen
$$|X| \leq 1 + X^2$$
$$(X - a)^2 \leq X^2 + 2|a||X| + a^2$$
ist $V(X)$ wohldefiniert.

2. Gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$, so ist
$$V(X) = \sum (x_i - \mathbb{E}X)^2 \mathbb{P}(X = x_i) \quad \text{(Transformationsformel)}$$

3. Es gilt
$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X^2 - 2\underbrace{(\mathbb{E}X)}_{\mu} X + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{\mu^2}) \\ &= \mathbb{E}X^2 - 2\mu\mathbb{E}X + \mu^2 \quad \text{(Linearität des Erwartungswertes)} \\ &= \mathbb{E}X^2 - \mu^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \end{aligned}$$

4. Varianz kann als Trägheitsmoment interpretiert werden.

11.3 Satz

Sei $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

1. $V(X) = \mathbb{E}(X-c)^2 - (\mathbb{E}X - c)^2, \quad c \in \mathbb{R}$ (Steiner-Formel)
2. $V(X) = \min_c \mathbb{E}(X-c)^2$
3. $V(aX+b) = a^2 V(X)$
4. $V(X) = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}\colon \mathbb{P}(X=a) = 1.$

Beweis. (1) $V(X) =$

$$= \mathbb{E}(\underbrace{X-c}+\underbrace{c-\mathbb{E}X})^2$$

$$= \mathbb{E}(X-c)^2 + 2\underbrace{\mathbb{E}(X-c)(c-\mathbb{E}X)}+(c-\mathbb{E}X)^2$$

[1]

$$= \mathbb{E}(X-c)^2 - 2\mathbb{E}(c-\mathbb{E}X)^2 + (c-\mathbb{E}X)^2$$

(2) (1) $\rightsquigarrow \mathbb{E}(X-c)^2 = V(X) + (\mathbb{E}X - c)^2$
(3) $\mathbb{E}(aX+b-\mathbb{E}(aX+b))^2$

$$= \mathbb{E}(aX+b-a\mathbb{E}X-b)^2$$

$$= a^2\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$$

(4) Bemerkung 11.2.(2) $\rightsquigarrow$

$$V(X) = 0 \Leftrightarrow (x_i - \mathbb{E}X)^2\mathbb{P}(X=x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \text{ mit } \mathbb{P}(X=x_i) \text{ gilt } x_i = \mathbb{E}X$$

$$\Leftrightarrow \text{ Es gibt nur ein } i_0 \text{ mit } \mathbb{P}(X=x_{i_0}) > 0$$

$$\text{Dann ist } \mathbb{P}(X=x_{i_0}) = 1, \text{ und } x_{i_0} = \mathbb{E}X.$$

□

11.4 Beispiel

1. $X = 1_A, \quad A \subset \Omega.$

$$VarX = \mathbb{E}1_A^2 - (\mathbb{E}1_A)^2 = \mathbb{E}1_A - (\mathbb{E}1_A)^2$$

$$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A))$$

[1] $\mathbb{E}c = c$

2. $X = \sum\limits_{i=1}^{n} 1_{A_i}, \quad A_i \subset \Omega_i, i = 1, \ldots, n$

$$V(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}\right) - (\mathbb{E} \sum 1_{A_i})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - (\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i))^2$$

Es gelte etwa (für ein $c \geq -r, r, s \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{r}{r+s} =: p$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{r}{r+s} \frac{r+c}{r+s+c}, \quad i \neq j$$

($c = -1$: Ziehen ohne Zurücklegen, $c = 0 \hat{=}$ Ziehen mit Zurücklegen, $c > 0$: Polyasches Urnenschema). Dann

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = np(1-p) \cdot \left(1 + \frac{(n-1) \cdot c}{r+s+c}\right)$$

(3) $X \sim Bin(n,p) : V(x) = np(1-p) \quad (c = 0)$
(4) $X \sim Hyp(n,r,s) : V(X) = np(1-p)\left(1 - \frac{(n-1)}{r+s-1}\right) \quad (c = -1)$

11.5 Definition

X heißt standardisiert, wenn $\mathbb{E}X = 0$ und $V(X) = 1$. Ist X eine beliebige Zufallsvariable ($\mathbb{E}X^2 < \infty$), so heißt (falls $V(X) > 0$)

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{V(X)}}$$

Standardisierung von X. (Es gilt $\mathbb{E}X^* = 0, V(X^*) = 1$)

Bemerkung $X \sim Bin(n,p), \quad X^* = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

11.6 Satz (Tschebyschov-Ungleichung)

Für jede Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$ gilt

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq c) \leq \frac{V(X)}{c^2}), \quad c > 0.$$

Beweis. Es sei (für gegebenes $c > 0$)

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |t - \mathbb{E}X| \geq c \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ferner sei

$$h(t) = \frac{(t - \mathbb{E}X)^2}{c^2}$$

(TODO: Bild)
Wegen $g \leq h$ ist $g(X) \leq h(X)$, also

$$\underbrace{\mathbb{E}g(X)}_{=\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X|\geq c)} \leq \underbrace{\mathbb{E}h(X)}_{=\underbrace{\mathbb{E}\frac{(X-\mathbb{E}X)^2}{c^2}}_{=\frac{1}{c^2}V(X)}}$$

□

11.7 Definition

Es gelte $\mathbb{E}X^2 < \infty, \mathbb{E}Y^2 < \infty$. Die Zahl

$$(Cov(X,Y) =)C(X,Y) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$$

heißt **Kovarianz zwischen** X **und** Y. Gilt $C(X,Y) = 0$, so heißen X und Y **unkorreliert**. Gilt $V(X) > 0, V(Y) > 0$, so heißt

$$\rho(X,Y) := \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

Korrelationskoeffizient zwischen X **und** Y. (Wegen $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ist $(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) \in L^1(\mathbb{P})$)[2].

11.8 Satz

1. $C(X,Y) = \mathbb{E}XY - (\mathbb{E}X\mathbb{E}Y)$
2. $C(X,Y) = C(Y,X), \quad C(X,X) = V(X)$
3. $C(aX + b, cY + d) = a \cdot c \cdot C(X,Y)$
4. X, Y unabhängig $\Rightarrow C(X,Y) = 0$
5. $V(X,Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X,Y)$

[2] $L^1(\mathbb{P}) \rightsquigarrow$ integrierbar

6. $V(\sum_{j=1}^{n} X_j) = \sum V(X_j) + \sum_{i \neq j} C(X,Y)$

7. $C(1_A, 1_B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

8. $C(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j) = \sum_{i,j} C(X_i, Y_j)$

9. $\rho(aX + b, cY + d) = sgn(a \cdot c)\rho(X,Y)$

Beweis. a),b),c) stimmt.
d) Satz 10.8.

$$C(X,Y) = \mathbb{E}X \cdot Y - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0.$$

e) folgt aus f, f folgt aus h
h) linke Seite

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sum_i X_i - \sum_i \mathbb{E}X_i, \sum_j X_j - \sum_j \mathbb{E}X_j) \\ &= \mathbb{E}(\sum_i (X_i - \mathbb{E}X_i))(\sum_j (X_j - \mathbb{E}X_j)) \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i) \cdot (Y_j - \mathbb{E}Y_j) \end{aligned}$$

i) für $a, b \in \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\rho(aX + b, cY + d) \\ &\overset{Def}{=} \frac{cov(aX + b, cY + d)}{\sqrt{Var(aX + b) \cdot Var(cY + d)}} \\ &\overset{11.8.c}{=} \frac{acCov(X,Y)}{\sqrt{a^2c^2}\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} \\ &= sgn(ac) \cdot \rho(X,Y) \end{aligned}$$

□

11.9 Folgerung

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, so folgt

$$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \quad \text{(aus iv+vi(d+f))}$$

11.10 Beispiel

Für $X \sim Bin(n,p)$ gilt (nach Satz 9.6)

$$X \overset{d}{=} X_1 + \ldots + X_n$$

mit $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Also ist nach 11.9 und 11.4.i

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$
$$= n \cdot V(X_1) = np(1-p)$$

in Übereinstimmmung mit 11.4.iii (siehe auch Übung). Das folgende Resultat ist analog zu 1.6:

11.11 Satz

Gilt $\mathbb{E}X^2 < \infty, \mathbb{E}Y^2 < \infty$ und $V(X)V(Y) > 0$, so folgt

$$\min_{a,b} \mathbb{E}(Y - a - bX)^2 = V(Y)(1 - \rho^2(X,Y))$$

Die Minimalstelle (a^*, b^*) ist gegeben durch

$$b^* = \frac{C(X,Y)}{V(X)}, \quad a^* = \mathbb{E}Y - b^*\mathbb{E}X$$

Beweis. $\left(\text{allg. } \inf_{x,y} f(x,y) = \inf_x \inf_y f(x,y) = \inf_y \inf_x f(x,y)\right)$
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $Z := Y - bX$. Dann ist

$$\mathbb{E}(Y - bX - a)^2 = \mathbb{E}(Z - a)^2$$
$$\overset{11.3.i,Steiner}{=} V(Z) + \underbrace{(\mathbb{E}Z - a)^2}_{\geq 0}$$

Also ist $a^* = \mathbb{E}Z = \mathbb{E}Y - b^*\mathbb{E}X$.
Es verbleibt die Aufgabe

$$\min_b \underbrace{\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y - b(X - \mathbb{E}X))^2}_{=:f(b)}$$

$$f(b) = Var(Y) - 2bC(X,Y) + b^2 Var(X)$$

$$= {}^3 V(X)\underbrace{\left(b - \frac{C(X,Y)}{V(X)}\right)^2}_{\geq 0} + V(Y) - \frac{C(X,Y)^2}{V(X)}$$

$$\Rightarrow b^* = \frac{C(X,Y)}{V(X)}$$

□

11.12 Folgerung

1. $C(X,Y)^2 \leq V(X) \cdot V(Y)$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
2. $|\rho(X,Y)| \leq 1$
3. $|\rho(X,Y)| = 1$

$$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}\colon \mathbb{E}(Y - a - bX)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}\colon \mathbb{P}(Y - a - bX = 0) = 1$$

$$(\Leftrightarrow Y = a + bX \quad \mathbb{P} - \text{fast sicher})$$

insbesondere $\rho(X,Y) = 1 \Rightarrow b > 0$

$$(b^* = \frac{C(X,Y)}{V(X}) = \rho(X,Y) \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{V(Y)}{V(X)}}}_{>0}$$

und $\rho(X,Y) = -1 \Rightarrow b < 0$.

11.13 Bemerkung

Falls $\mathbb{P}(X = x_j, Y = y_j) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq j \leq n)$ so

$$\mathbb{E}(Y - a - bX)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot (y_j - a - bx_j)^2$$

$\rightsquigarrow$ Methode der kleinsten Quadrate $\rightsquigarrow$ Kapitel 1 (empirischer Korrelationskoeffizient)

[3] quadratische Ergänzung

Kapitel 12

Wichtige diskrete Verteilungen

1. Binomialverteilung $Bin(n,p) \rightsquigarrow$ Kapitel 6, 9.6
2. Hypergeometrische Verteilung $Hyp(n,r,s) \rightsquigarrow$ Kapitel 6
3. Poisson-Verteilung $Po(\lambda)$
4. Geometrische Verteilung $G(p)$
5. Negative Binomialverteilung $Nb(r,p)$
6. Multinomialverteilung $Mult(n,p_1,\dots,p_s)$

12.1 Satz (Gesetz seltener Ereignisse)

Sei $(p_n)_{n\geq 1}, 0 \leq p_n \leq 1$ eine Folge mit

$$np_n \overset{n\to\infty}{\to} \lambda \quad (0 < \lambda < \infty)$$

Dann gilt

$$\underbrace{\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}}_{=\mathbb{P}(X_n=k) \text{ für } X_n\sim Bin(n,p_n)} \overset{n\to\infty}{\to} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Beweis. linke Seite:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}\cdot(n\cdot p_n)^k(1-\frac{n\cdot p_n}{n})^{n-k}$$

$$\frac{1}{k!}\underbrace{\frac{n^k}{n^k}}_{\to 1}\underbrace{(n,p_n)^k}_{\to\lambda^k}\underbrace{(1-\frac{n\cdot p_n}{n})^{n-k}}_{\to e^{-\lambda}}$$

$$\frac{n^k}{n^k} = \frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-k+1)}{n}$$

und allgemein für $a_n \to 1$ gilt

$$(1 + \frac{a_n}{n})^n \to e^a$$

□

12.2 Definition

$$X \sim Po(\lambda) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = k) = e^k \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

(Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$) Also, falls $n \cdot p_n \to \lambda$,

$$Bin(n, p_n) \to Po(\lambda) \text{ im Sinne von 12.1}$$

12.3 Satz

1. $X \sim Po(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}X = V(X) = \lambda$
2. X, Y unabhängig, $X \sim Po(\lambda), Y \sim Po(\mu)$

$$\Rightarrow X + Y \sim Po(\lambda + \mu)(\text{Additivgesetz})$$

Beweis. 1.

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}} = \lambda$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}X - \mathbb{E}X^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

2. Faltungsformel (Übung!)

□

12.4 Definition und Satz

Sei $0 < p < 1$.

$$X \sim G(p) :\Leftrightarrow \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k \cdot p, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

(geometrische Verteilung mit Parameter p)
Es gilt

1. $\mathbb{E}X = \frac{1}{p} - 1$
2. $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

X modelliert Anzahl der Nieten vor dem ersten Treffer in einer unendlichen Bernoulli-Kette mit Trefferwahrscheinlichkeit p.

Beweis.

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k \equiv \frac{1}{1-x} \text{ auf } (-1,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ für } |x| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k \cdot p = p(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$p(1-p)\frac{1}{(1-(1-p))^2}$$

$$= \frac{1-p}{p}$$

$$\mathbb{E}X(X-1) = p(1-p)^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}}_{=\frac{2}{p^3}}$$

$$= 2\left(\frac{(1-p)}{p}\right)^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = 2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{1-p}{p} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \frac{1-p}{p} = \left(\frac{1-p}{p}\right) \underbrace{\left(\frac{1-p}{p} + 1\right)}_{=\frac{1}{p}} = \frac{1-p}{p^2}$$

□

12.5 Definition und Satz

X hat eine negative Binomialverteilung mit Parametern r und p ($r \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$), falls gilt:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Es gilt

$$\mathbb{E}X = r \cdot \frac{1-p}{p}$$
$$V(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2},$$

Notation: $X \sim Nb(r,p)$

12.6 Satz

$X_1, \ldots, X_r \overset{u.i.v.1}{\sim} G(p)$

$$\Rightarrow X_1 + \ldots + X_r \sim Nb(r,p)$$

Beweis. Faltungsformel (Übung) □

Bemerkung

1. $X \sim Nb(r,p)$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{(k+r-1)^{\underline{k}}}{k!} p^r (1-p)^k$$
$$= \frac{-r \cdot (-r-1) \cdot \ldots \cdot (-r-k+1)}{k!} (-1)^k p^r (1-p)^k$$
$$= \binom{-r}{k} \cdot p^r (-(1-p))^k$$

wobei $\binom{-r}{k} = \frac{-r^{\underline{k}}}{k!} \quad \forall r \in \mathbb{R}$

$X \sim Nb(r,p)$, falls

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k$$
$$= \boxed{\binom{-r}{k} p^r (-(1-p))^k}$$

$k = 0,1,2,\ldots$ ($\binom{x}{k} := \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$) Wkt. für k Fehlversuche bis zum r-ten Erfolg in einer ("unendlichen" Bernoulli-Kette) $r = 1 : \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$

[1] unabhängig identisch verteilt

12.7 Bemerkungen

1. Siehe Box oben.
2. $X \sim Nb(r,p), Y \sim Nb(r,p), X$ und Y unabhängig
$$\Leftarrow X + Y \sim Nb(r+s,p)$$

Beweis. Faltungsformel. Inhaltlich folgt das aus der Interpretation der negativen Binomialverteilung. □

12.8 Beispiel (Multinomiales Versuchsschema)

n unabhängige Experimente mit Ausgängen in $\{1,\ldots,s\}$ mit $s \geq 2$. (Ausgang $k\hat{=}$ Treffer der k-ten Art)
$p_k =$ Wkt. für Treffer der k-ten Art
$p_1 + \ldots + p_s = 1$

Modell: $(\Omega, \mathbb{P}) = (\bigotimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathbb{P}_j)$
$\Omega = \{1,\ldots,s\}, \mathbb{P}_j(\{k\}) = p_k$

$$A_j^{(k)} := \{\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega \mid \omega_j = k\}$$

$$X_k := \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j^{(k)}} \quad \text{Anzahl der Treffer } k\text{-ter Art}$$

$$X_1 + \ldots + X_s = n$$

Es gilt für $i_1,\ldots,l_s \in \mathbb{N}_0, i_1 + \ldots + i_s = n$

$$\begin{aligned} &|\{X_1 = i_1,\ldots,X_s = i_s\}| \\ &= \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\cdots\binom{n-i_1\ldots-i_{s-1}}{i_s} \\ &= \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_s!} =: \binom{n}{i_1\ldots i_s} \end{aligned}$$

$(p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdots p_s^{i_s})$

12.9 Definition

$(X_1,\ldots,X_s) \sim Mult(n,p_1,\ldots,p_s)$, falls

$$\mathbb{P}(X_1 = i_1,\ldots,X_s = i_s) = \binom{n}{i_1\cdots i_s} p_1^{i_1}\cdots p_s^{i_s}$$

$i_1,\ldots,i_s \in \mathbb{N}_0, i_1 + \ldots + i_s = n$.

12.10 Folgerung

Es gelte $(X_1, \ldots, X_s) \sim Mult(n, p_1, \ldots, p_s)$

1. $X_k \sim Bin(n, p_k)$
2. $X_{i_1} + \ldots + X_{i_0} \sim Bin(n, p_{i_1} + \ldots + p_{i_\nu}), \quad (\{i_1, \ldots, i_\nu\} \subset \{1, \ldots, s\})$
3. $C(X_i, X_j) = -np_ip_j, \quad i \neq j.$
4. $\rho(X_i, X_j) = -\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}, \quad i \neq j, p_i < 1, p_j < 1.$

Beweis. 1. Ist Spezialfall von (2) $(\nu = 1)$.
Bildung der Randverteilung von $(X_1, \ldots, X_s)$
Benutze Multinomialformel

$$(X_1 + \ldots + X_s)^n = \sum_{j_1, \ldots, j_s} \binom{n}{j_1 \cdots j_s} X_1^{j_1} X_2^{j_2} \cdots X_s^{i_s}$$

$\underline{n = 2}$ $\binom{n}{j_1 j_2} = \binom{n}{j_1} = \binom{n}{j_2}, \quad j_1 + j_2 = n$

2. $B_j := \bigcup_{k=1}^{\nu} A_j^{(i,k)}$ = im j-ten Versuch liegt Erfolg mit Typ in $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$ vor
$B_1, \ldots, B_n$ sind unabhängig (!) und es gilt

$$\mathbb{P}(B_j) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_\nu} =: q$$

Satz 9.6 $\rightsquigarrow$

$$X_{i_1} + \ldots + X_{i_\nu} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} 1_{B_j} \sim Bin(n, q)$$

3. $$Var(X_i + X_j) \stackrel{(2)}{=} n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$$
$$= Var(X_i) + Var(X_j) + 2Cov(X_i, X_j)$$
$$= np_i(1 - p) + np_j(1 - p_j)$$
$$\rightsquigarrow 2Cov(X_i, X_j) = -2np_ip_j$$

4. $$\rho(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{var(X_i)}\sqrt{Var(X_j)}} = \frac{-np_ip_j}{\sqrt{np_i(1 - p_i)}\sqrt{np_j(1 - p_j)}}$$
$$= -\frac{\sqrt{p_i}\sqrt{p_j}}{\sqrt{1 - p_i}\sqrt{1 - p_j}}$$

□

Kapitel 13

Bedingte Erwartungswerte und bedingte Verteilungen

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(X) < \infty$.

13.1 Definition

1. Für $A \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ heißt

$$\mathbb{E}[X|A] := \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \cdot \sum_{\omega \in A} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

   bedingter Erwartungswert von X unter (der Bedingung) A.

2. Ist speziell $A = \{Z = z\}, z \in \mathbb{R}^k$, für einen Zufallsvektor $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$, so heißt

$$\mathbb{E}[X|Z = z] := \mathbb{E}[X|\{Z = z\}] = \frac{1}{\mathbb{P}(Z = z)} \cdot \sum_{\omega\colon Z(\omega)=z} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

   bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung $Z = z$. (Annahme: $\mathbb{P}(Z = z) > 0$)

13.2 Bemerkungen

1. Sei $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$. Dann ist $\mathbb{P}_A$ ein Wahrscheinlichkeits-Maß.
   Denn: $\mathbb{E}[X|A] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}_A(\{\omega\})$

2. $\mathbb{E}[X|A]\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}X1_A \quad \left(X = 1_B, \mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B|A)\right)$

13.3 Beispiel

X_1, X_2 unabhängig, $\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{1}{6}, k = 1, \ldots, 6$ ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2, \mathbb{P} =$ Gleichverteilung)
$\mathbb{E}[X_1 | X_1 + X_2 = 10] =?$
$A = \{X_1 + X_2 = 10\} = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
$\mathbb{E}[X_1|A] = 12(4 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36})$
$= \frac{1}{3}(15) = 5$
Übung: $\mathbb{E}[X_1 | X_1 + X_2 \geq 10]$

13.4 Satz (Formel vom totalen Erwartungswert)

Es gelte $\Omega = \bigcup_j A_j$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ Für $i \neq j$ und $\mathbb{P}(A_j) > 0, j = 1, 2, \ldots$.
Dann

$$\mathbb{E}X = \sum_j \mathbb{E}[X|A_j]\mathbb{P}(A_j)$$

($X = 1_B \rightsquigarrow$ Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)

Beweis. Analog zur Formel der totalen Wahrscheinlichkeit! □

13.5 Beispiel

"Unendliche" Bernoulli-Kette.
Beobachte bis erstmalig "1 1" auftritt. Sei X die Anzahl der Versuche.

$$\mathbb{E}X =?$$

Sei $A_1 = \{\text{Kette beginnt mit } 0\}$.

$$\mathbb{E}[X|A_1] = 1 + \mathbb{E}X$$

$A_2 := \{$Kette beginnt "1,0"

$$\mathbb{E}[X|A_2] = 2 + \mathbb{E}X$$

$A_3 = \{$Kette beginnt mit "1,1"$\}$

$$\mathbb{E}[X|A_3] = 2$$

13.4 $\rightsquigarrow \mathbb{E}X = (1-p)(\mathbb{E}X + 1) + p(1-p)(2 + \mathbb{E}X) + p^2 \cdot 2$

$$\mathbb{E}X\big(1 - (1-p) - p(1-p)\big) = 1 - p + 2p(1-p) + 2p^2$$

$$(\mathbb{E}X)p^2 = 1 + p$$

Erinnerung $\mathbb{E}[X|A] = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$
$\mathbb{E}X = \sum_j \mathbb{E}[A|A_j]\mathbb{P}(A_j)$

13.6 Satz (Eigenschaften)

$\mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{E}|Y| < \infty, Z\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{P}(Z = z) > 0$.

1. $\mathbb{E}[X + Y|A] = \mathbb{E}[X|A] + \mathbb{E}[Y|A]$
2. $\mathbb{E}[aX|A] = a\mathbb{E}[X|A]$
3. $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|A] < \mathbb{E}[Y|A]$
4. $\mathbb{E}[1_A|B] = \mathbb{P}(A|B)$
5. $\mathbb{E}[X|A] = \sum_j x_j \mathbb{P}(X = x_j|A) \qquad \sum_j \mathbb{P}(X = x_j) = 1$
6. $\mathbb{E}[X|Z = z] = \sum_j x_j \mathbb{P}(X = x_j|Z = z)$
7. $\mathbb{E}[X|Z = z] = \mathbb{E}X$ falls X und Z stochastisch unabhängig

Beweis. 13.2 und Satz 5.4 □

13.7 Satz (Substitutionsformel)

Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, Z\colon \Omega \to \mathbb{R}^k, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ mit $\mathbb{E}|g(X, Z)| < \infty$. Dann gilt für $z \in \mathbb{R}^k$ mit $\mathbb{P}(Z = z > 0)$

$$\mathbb{E}[g(X, Z)|Z = z] = \mathbb{E}[g(X, z)|Z = z]$$

Beweis.

$$\mathbb{E}[g(X, Z)|Z = z] = \frac{1}{\mathbb{P}(Z = z)} \sum_{\omega \in \Omega\colon Z(\omega) = z} g(X(\omega), Z(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\})$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Z = z)} \sum_{\omega \in \Omega\colon Z(\omega) = z} g(X(\omega), z)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \text{ rechte Seite der Behauptung.}$$

□

13.8 Beispiel (Würfelwurf)

Falls k auftritt, wird noch k mal gewürfelt.
Sei X die Gesamtaugensumme.
$\mathbb{E}X =?$

Modell: $\Omega = \{1, \dots, 6\}^7, \mathbb{P} =$ Gleichverteilung
$X_j(\omega) = \omega_j \quad \omega = (\omega_0, \dots, \omega_6) \in \Omega$
$X_0, \dots, X_6$ stochastisch unabhängig. Dann

$$X = X_0 + \sum_{j=1}^{X_0} X_j$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|X_0 = k] &= \mathbb{E}[X_0 + \sum_{j=1}^{X_0} X_j | X_0 = k] \\
&= \mathbb{E}[k + \sum_{j=1}^{k} X_j | X_0 = k] \\
&= k + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[X_j | X_0 = k] \\
&\overset{g}{=} k + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}X_j = k + k \cdot 3,5 = 4,5k \\
\mathbb{E}X &= \sum_{j=1}^{6} \mathbb{E}[X|X_0 = k]\mathbb{P}(X_0 = k) \\
&= 4,5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^{6} k = \frac{9}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{42}{2} = \frac{63}{4}
\end{aligned}$$

13.9 Definition

Es sei $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ mit $\mathbb{P}(Z = z_j) > 0, j \geq 1, \sum_j \mathbb{P}(Z = z_j) = 1$.
Es sei X Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) < \infty$. Dann heißt die durch

$$\mathbb{E}[X|Z](\omega) := \begin{cases} \mathbb{E}[X|Z = z_j], & \text{falls } Z(\omega) = z_j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

definierte <u>Zufallsvariable</u> $\mathbb{E}[X|Z]$ die **bedingte Erwartung** von X bei gegebenem Z.

13.10 Beispiel

In Bsp. 13.8 gilt

$$\mathbb{E}[X|X_0] = \frac{9}{2}X_0$$

13.11 Satz

Sei $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ (wie in 13.9), $h\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}h(Z)^2 < \infty$. Dann wird

$$\mathbb{E}(X - h(Z))^2$$

minimal für $h(Z) = \mathbb{E}[X|Z]$.

Beweis. Beweis durch Verwirrung und Klammerchaos. (Ohne Gewähr)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X - h(Z))^2 \\ &\overset{13.4}{=} \sum_j \mathbb{E}[(X - h(Z))^2 | Z = z_j]\mathbb{P}(Z = z_j) \\ &= \sum_j \mathbb{E}[(X - h(z_j))^2 | Z = z_j]\mathbb{P}(Z = z_j) \end{aligned}$$

$$= \sum_j (\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Z = z_j]) + (\mathbb{E}[X|Z = z_j] - h(z_j))^2 | Z = z_j]\mathbb{P}(Z = z_j)$$

TODO: Rauskriegen, was das heißen soll

$$\sum_j \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Z = z_j]))^2 | Z = z_j]\mathbb{P}(Z = z_j)$$

$$2\sum_j \mathbb{E}[(\underbrace{\mathbb{E}[X|Z = z_j] - h(z_j))]}_{\text{Vor den EW ziehen}}(X - \mathbb{E}[X|Z = z_j])|Z = z_j)\mathbb{P}(Z = z_j)$$

$$+ \sum_j (\mathbb{E}[X|Z = z_j] - h(z_j))^2 \mathbb{P}(Z = z_j)$$

Nebenrechnung: $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X|Z = z_j]|Z = z_j] = 0$

$$\rightsquigarrow \text{Minimierer: } h(z_j) = \mathbb{E}[X|Z = z_j]$$

$\square$

Kapitel 14

Grenzwertsätze

14.1 Satz (Schwache Gesetz der großen Zahlen, SGGZ)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung und $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Sei

$$\bar{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}(|\bar{X_n} - \mathbb{E}X_1| > \epsilon) \to 0$$

$\lim n \to \infty, \epsilon > 0$

Beweis.

$$\mathbb{E}\bar{X_n} = \frac{1}{n}(\mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n) = \mathbb{E}X_1$$

$$V(\bar{X_n}) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + \ldots + V(X_n)) = \frac{1}{n}V(X_1)$$

Tschebyschevsche Ungleichung (Satz 11.6)

$$\mathbb{P}(|\bar{X_n} - \mathbb{E}\bar{X_n}| > \epsilon) \leq \frac{V(\bar{X_n})}{\epsilon^2} = \frac{V(X_1)}{n\epsilon^2}$$

□

14.2 Definition

Sind $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ Zufallsvariablen, so schreibt man

$$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \text{ für } n \to \infty$$

$$\mathbb{P}(|Y_n - Y| > \epsilon) \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \forall \epsilon > 0.$$

(SGGZ: $\bar{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1$)

Bemerkung Auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum gibt es keine unendlichen Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen. Lösung:

$$\mathbb{P} \to \mathbb{P}_n$$

$\rightsquigarrow$ Wahrscheinlichkeitstheorie-Vorlesung

14.3 Folgerung (SGGZ von Jakob Bernoulli)

Seien $A_1, A_2, \ldots$ unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_j) = p, j \geq 1$. Dann

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j} \xrightarrow{\mathbb{P}} p$$

Bemerkung $\forall \epsilon > 0 \forall \delta \in (0,1) \exists n \in \mathbb{N} \colon \mathbb{P}(|R_n - p| \leq \epsilon) \geq 1 - \delta$
Das bedeutet nicht

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n>=n_0} \{|R_n - p| \leq \epsilon\}) \geq 1 - \delta!$$

$\rightsquigarrow$ Starkes GGZ (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige $Bern(p)$-verteilte Zufallsvariablen. Setze [1]

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n, n > 1 \quad \text{Irrfahrt, } X_i \in \{-1, 1\} \text{ besser!}$$

Frage Wie stark schwankt S_n um seinen Erwartungswert np? (TODO: Bild)

14.4 Satz

Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - np| \leq a_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{a_n}{\sqrt{n}} \to \infty \\ 0 & \text{falls } \frac{a_n}{\sqrt{n}} \to 0 \end{cases}$$

Wiederholung $S_n := X_1 + \ldots + X_n, X_i$ unabhänbh. $Bern(p) = \underbrace{Bin(1,p)}_{\text{entweder } p \text{ oder } 1-p}$
(TODO: Bild)
absolute Häufigkeiten!

[1] Random Walk

Satz

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - np| \leq a_n) = \begin{cases} 1 & \frac{a_n}{\sqrt{n}} \to \infty \\ 0 & \frac{a_n}{\sqrt{n}} \to 0 \end{cases}$

Beweis. Sterlingsche Formel (Ausblick/Exkurs)
$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}(1 + R(n))$ mit $R(n) \to 0$ für $n \to \infty, n \in \mathbb{N}$
Genauer $R(n) = e^{\eta(n)} - 1, 0 \leq \eta(n) \leq \frac{1}{12n}$
Insbesondere $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ für $n \to \infty$
$((c_n) \sim (d_n) \Leftrightarrow \frac{c_n}{d_n} \to 1)$

Nun:

- Tschebyschevsche Ungleichung
  $\mathbb{P}(|S_n - np| \leq a_n) = 1 - \mathbb{P}(|S_n - np| > a_n) \geq 1 - \frac{V(S_n)}{a_n^2} = 1 - \frac{np(1-p)}{a_n^2}$
  Im Fall $a_n/\sqrt{n} \to \infty$ strebt das gegen 1.

- Für den anderen Fall setzen wir $p = \frac{1}{2}$ (der Einfachheut halber!)
  $\mathbb{P}(|S_n - np| \leq a_n) = \sum_{n\colon |K-\frac{n}{2}|\leq a_n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{max. wenn } k \text{ halb so groß wie } n} \underbrace{2^{-n}}_{\text{Konstante}} \leq$

  $\underbrace{(2a_n + 1)\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}_{\text{nach unten abgeschätzt}} 2^{-n}$

  Für $n = 2m$ gilt $\binom{2m}{m} \cdot 2^{-n} = \frac{(2m)!}{m!m!} \cdot 2^{-2m} \overset{\text{Asymm., äquiv.}}{\approx}$
  $\frac{\sqrt{2\pi \cdot 2m}(2m)^{2m}e^{-2m}}{2\pi m \cdot m^n \cdot m^m e^{-m} e^{-m}} \cdot 2^{-2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$
  Es folgt

  $$\limsup_{m\to\infty} \mathbb{P}(|S_{2m} - 2mp| \leq a_{2m}) \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{2a_{2m} + 1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{m}}$$

  $$= \frac{\sqrt{2}2}{\sqrt{\pi}} \lim_{m\to\infty} \frac{a_{2m}}{\sqrt{2m}} = 0, \text{ falls } \frac{a_n}{\sqrt{n}} \to 0$$

  Analog für $m = 2n + 1$!

□

Fazit: Die Abweichungen von S_n vom Erwartungswert weichen "typischerweise" wie $\sqrt{n}$.

Beachte: S_n^* [2] $:= \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \mathbb{E}S_n^* = 0, V(S_n^*) = 1$

[2] standardisiert

Fragen: $\mathbb{P}(|S_n^*| \leq a) \underset{n\to\infty}{\to} ? \quad (a \in \mathbb{R})$

14.5 Definition

1. Sei $l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$ ($l(x)$ = Gaußsche Glockenkurve) heißt **Dichte der standardisierten Normalverteilung**.
2. $\phi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} l(t)dt, x \in \mathbb{R}$ [3] heißt **Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung**.

Bemerkung

$\int_{-\infty}^{\infty} l(t)dt = 1$ (Analysis 3).
Dann ist $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 1$
(TODO: Bild)

14.6 Satz

Immernoch in der Bernoullikette gilt

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq S_n^* \leq b) = \underbrace{\phi(b)}_{=\int_a^b l(t)dt} - \phi(a)$ und $\lim_{n\to-\infty} \mathbb{P}(\ldots) = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n^* \leq b) = \phi(b) \quad \to$ (Moivre-Laplace)

Beweis. Sterlingsche Formel! (2 Seiten Rechnung) $\rightsquigarrow$ Wahrscheinlichkeitstheorie-Vorlesung im Sommersemester
(TODO: Bild) □

14.7 Satz (ZGWS Lindeberg-Levy)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig auf gleicher Verteilung mit $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Setze

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$S_n^* = \frac{S_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n \cdot V(X_1)}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt $lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(S_n^y \leq h) = \phi(h), \quad h \in \mathbb{R}$

Beweis. Wahrscheinlichkeitstheorie im Sommersemester. □

[3] uneigentliches Riemann-Integral

Anwendung: Sei $S_n \sim Bin(n,p)$.

Nun sei $\mathbb{P}(a \leq S_n \leq b) = \frac{a-np^{+\frac{1}{2}}}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \underbrace{\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{S_n^*} \leq \frac{b-np^{+\frac{1}{2}}}{\sqrt{np(1-p)}} =$

$\phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

erst standardisieren, dann approximieren

Stetigkeitskorrekturen

$\limsup$: $n = 600, p = \frac{1}{6} \quad a = 90, b = 110$

Exakter Wert: 0.7531

Approx. Wert: 0.7264 mit Stetigkeitskorrektur 0.7498

Kapitel 15

Statistik - Schätzprobleme

15.1 Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit einer Bernoulli-Kette

(als Motivation)

k-Treffer in einer B-Kette im Umfang n mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit p.
Wie groß ist p?

Modell Annahme einer zufälligen Trefferzahl mit $S_n \sim Bin(n, p)$ [1].
Ereignis $S_n = k$ sei eingetreten.

$$\mathbb{P}_p(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

[2]

Plausibler "Schätzer" für p:

$$\hat{p} := \frac{k}{n} \text{ (relative Häufigkeit)}$$

$\hat{p}$ ist Realisierung einer Zufallsvariable $R_n := \frac{1}{n} S_n$

1.

2.

(TODO: Rest texen)

---

[1] auch ohne es zu kennen
[2] abhängig vom Parameter p

Erinnerung $S_n \sim Bin(n,p) \quad (S_n := X_1 + \ldots + X_n)$

$$\mathbb{P}_p(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$S_n = k \text{ Realisierung}$$

$$p = ?$$

natürliche Idee: $\hat{p} = \frac{k}{n}$
$\hat{p}$ ist Realisierung der Zufallsvariable $R_n = \frac{1}{n} S_n$
Die Funktion

$$p \mapsto L_k(p) = \mathbb{P}(S_n = k)$$

heißt **Likelyhood-Funktion**.
$\hat{p}$ maximiert L_k!

15.2 Allgemeiner Modellrahmen

Daten $x \in \mathcal{X}$ = "Stichprobenraum" gegeben.
Oft: $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n)$

Annahme: $x = X(\omega)$ Realisierung einer $\mathcal{X}$-wertigen Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathcal{X}$

Gesucht: Verteilung $\mathbb{P}^X$ von X!
Ω spielt "keine Rolle".
Wichtig ist das (unbekannte) $\mathbb{P}^X$.

Oft: $\Omega = \mathcal{X}, X = id_\Omega, \mathbb{P} = \mathbb{P}^X$

Annahme: $\mathbb{P} \in \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ wobei $\Theta \neq \emptyset$ Parameterraum (A priori-Informationen!)
$(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ heißt **statistisches Modell**.
Falls $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\vartheta$, so schreiben wir $\mathbb{P}_\vartheta(X = x), \mathbb{E}_\vartheta X, V_\vartheta(X), \ldots$

15.3 Beispiel (Binomialverteilung)

$\mathcal{X} = \{0,1\}^n, \quad X = (X_1, \ldots, X_n), \quad X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, $Bern(p)$[3]
$\vartheta \in \Theta = (0,1)$
$\mathbb{P}_\vartheta(X = (x_1, \ldots, x_n)) = \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k}, \quad k = x_1 + \ldots + x_n.$
[4]
$\mathbb{P}_\vartheta(X_1 + \ldots + X_n = k) = \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k}$

---

[3] $= Bin(1,p)$
[4] Unabhängig verteilt: $\mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_1 = i_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n = i_n)$

15.4 Beispiel

Warensendung vom Umfang N mit ϑ defekten und $N-\vartheta$ intakten Exemplaren. n-maliges Ziehen ohne Zurücklegen.

$$X_j := \begin{cases} 1 & j-\text{te entnommene Exemplar ist defekt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \quad (n \leq N)$$

$$\Theta = \{0, \ldots, N\}, \quad \vartheta \,\hat{=}\, \text{Anzahl der defekten Exemplare}$$

$$\mathbb{P}_\vartheta(X = (x_1, \ldots, x_n)) = (*) \quad k = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(*) $\frac{\vartheta}{N} \cdot \frac{\vartheta-1}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{\vartheta-k+1}{N-k+1} \cdot \frac{N-\vartheta}{(N-k)} \cdots \frac{N-\vartheta-(n-k)+1}{(N-k+1)} = \frac{\vartheta^{\underline{k}}(N-\vartheta)^{\underline{n-k}}}{N^{\underline{n}}}$

$X_1 + \ldots + X_n \sim Hyp(\underbrace{n, N}_{\text{fix}} - \vartheta, \underbrace{\vartheta}_{=?})$ Qualitätskontrolle

15.5 Definition

Sei $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ ein statistisches Modell.
Ein (Punkt)**Schätzer** (für den unbekannten Parameter ϑ) ist eine Abbildung

$$T : \mathcal{X} \to \widetilde{\Theta} \supset \Theta$$

(oft $\widetilde{\Theta} = \Theta$)
$T(x)$ heißt **konkreter Schätzwert**[5].

15.6 Bemerkungen

1. Allgemein heißt eine Abbildung auf $\mathcal{X}$ **Stichprobenfunktion**.

2. $\mathbb{P}_\vartheta$ "steuert" Auftreten von x und damit $T(x)$. T ist eine auf $\mathcal{X}$ definierte Zufallsvariable! Ist T eine Schätzfunktion, so definiert

$$\mathbb{P}_\vartheta(T = t) := \mathbb{P}_\vartheta(\{x \in \mathcal{X} : T(x) = t\})$$

Wünschenswert: $\mathbb{P}_\vartheta(T = \vartheta) \approx 1$[6]$, \vartheta \in \Theta$
$\mathbb{P}_\vartheta(|T - \vartheta| \leq 1) \approx 1, \vartheta \in \Theta$

[5] auf der Grundlage der Daten
[6] nicht erreichbar

15.7 Definition

Sei $T\colon \mathcal{X} \to \widetilde{\Theta} \supset \Theta \quad (\widetilde{\Theta} \subset \mathbb{R})$. Dann

$$\mathbb{E}_\vartheta T^2 = \sum_{x \in \underbrace{\mathcal{X}}_{\text{diskret!}}} T(x)^2 \mathbb{P}_\vartheta(\{x\}) < \infty, \quad \vartheta \in \widetilde{\Theta} \subset \mathbb{R}$$

1. $MQA_T(\vartheta) := \mathbb{E}_\vartheta(T-\vartheta)^2 = \sum\limits_{x\in\mathcal{X}} (T(x)-\vartheta)^2 \mathbb{P}_\vartheta(\{x\})$ heißt **mittlere quadratische Abweichung** von T an der Stelle ϑ.

2. $b_T(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta T - \vartheta$ heißt **Verzerrung** (Bias) von T an der Stelle ϑ.
   Gilt $b_T(\vartheta) = 0$, so heißt T **erwartungstreu**.[7]

15.8 Bemerkung

Es gilt $MQA_T(\vartheta) = V_\vartheta(T) + b_T(\vartheta)^2$ (Steiner-Formel)
Wünschenswert: $MQA_T(\vartheta) \leq MQA_{T^*}(\vartheta), \quad \forall \vartheta \forall T^*$
(*) ist nicht erfüllbar, da $T^*(x) = \vartheta^*, \quad x \in \mathcal{X} \quad (\vartheta^* \in \Theta)$
Es gilt $V_\vartheta(T^*) = 0$ [8] und deswegen:

$$b_T(\vartheta)^2 = (\vartheta^* - \vartheta)^2$$

(TODO: Bild: Parabel)

15.9 Definition

Gegeben sei eine Folge $(\mathcal{X}_n, \{\mathbb{P}_\vartheta^{(n)}\colon \vartheta \in \Theta\})$ von statistischen Modellen. Die Zufallsvariablen seinen von der Form $X^{(n)}$ ($n \hat{=}$ Stichprobenumfang).
Eine Folge $T_n\colon \mathcal{X}_n \to \widetilde{\Theta}$ heißt **Schätzfolge**.

1. (T_n) heißt **konsistent**, wenn $\mathbb{P}_\vartheta^{(n)}(|T_n - \vartheta| \geq \epsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

2. (T_n) heißt **asymptotisch erwartungstreu**, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}_\vartheta T_n = \vartheta, \quad \vartheta \in \Theta$.

15.10 Beispiel

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig, $Bern(p)$. $T_n := (x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ $(\mathbb{E}_\vartheta T_n = \vartheta)$ ist konsistent!

[7] In dem Fall ist die mittlere quadratische Abweichung nichts anderes als die Varianz.
[8] Zufallsvariable konstant, Varianz 0

Wiederholung $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\vartheta \colon \vartheta \in \Theta\})$ statistisches Modell
$x = X(\omega)$ Beobachtung (Daten)
$T \colon \mathcal{X} \to \widetilde{\Theta} \supset \Theta$ Schätzfunktion
Idee: $T(x)$ schätzt den unbekannten Parameter
$MQA_T(\vartheta) := \mathbb{E}_\vartheta(T - \vartheta)^2 \quad (\Theta \subset \mathbb{R})$

Bemerkung 15.8:

$$MQA_T(\vartheta) = V_\vartheta(T) + b_T(\vartheta)^2$$

nicht erfüllbarer Wunsch für T: $MQA_T(\vartheta) \leq MQA_{T^*}(\vartheta), \quad \forall\vartheta\forall T^*$

15.11 Definition

$(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\vartheta \colon \vartheta \in \Theta\})$ statistisches Modell
$x \in \mathcal{X}$. Definiere $L_x \colon \Theta \to [0,1]$

$$L_x(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(X = x), \quad \vartheta \in \Theta.$$

Diese Funktion heißt **Likelihood-Funktion** zu gegebenen x. Existiert ein $\hat{\vartheta}(x) \in \Theta$ (manchmal: $\widetilde{\vartheta} \in \widetilde{\Theta}$) mit

$$L_x(\hat{\vartheta}(x)) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L_x(\vartheta) \quad (*)$$

so heißt $\hat{\vartheta}(x)$ ML-Schätzwert (von ϑ) zu x.
Ein Schätzer $\hat{\vartheta} \colon \mathcal{X} \to \Theta$ mit (*) für jedes $x \in \mathcal{X}$ heißt ML-Schätzer. [9]

15.12 Beispiel

$L_\vartheta(x) = \vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k}$
$X = (x_1, \ldots, x_n), k = \sum_{i=1}^n x_i$
$\hat{\vartheta}(x) = \frac{k}{n}$

15.13 Beispiel (vgl. 15.4)

$$\mathbb{P}_\vartheta(X = x) = L_x(\vartheta) = \frac{\vartheta^{\underline{k}}(N-\vartheta)^{\underline{n-k}}}{N^{\underline{n}}}$$

ML-Schätzer? $x_1 + \ldots + x_n = k$

1. $k = 0 \quad L_x(\vartheta) = \frac{(N-\vartheta)^{\underline{n}}}{N^{\underline{n}}} \rightsquigarrow \hat{\vartheta}(x) = 0.$

[9] Zu geg. Datum wähle mir den Parameterwert, welcher das Datum am wahrscheinlichsten macht.

2. $k = n \quad L_x(\vartheta) = \frac{\vartheta^{\underline{n}}}{N^{\underline{n}}} \rightsquigarrow \hat{\vartheta}(x) = N$

3. $0 < k < n$:

$$\frac{L_x(\vartheta+1)}{L_x(\vartheta)} \overset{!}{=} \frac{\vartheta+1}{\vartheta-k+1}\frac{N-\vartheta+k-n}{N-\vartheta} > 1$$

$$\Leftrightarrow \vartheta < \frac{k(N+1)}{n} - 1$$

$$\Rightarrow \hat{\vartheta}(x) : \begin{cases} \lfloor \frac{k(N+1)}{n} \rfloor & \text{falls } \frac{k(N+1)}{n} \notin \mathbb{N} \\ \in \{\frac{k(N+1)}{n} - 1, \frac{k(N+1)}{n}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Vergleich mit heur. Schätzer:

$$\frac{k}{n} = \frac{\vartheta}{N} \Rightarrow \hat{\vartheta} = \frac{Nk}{n}$$

Kapitel 16

Konfidenzbereiche

16.1 Beispiel

Sei $S_n \sim Bin(n,p), \quad p \in [0,1]$ unbekannt.

$$\mathbb{E}_p S_n = np, \quad V_p(S_n) = np(1-p)$$

Für $R_n = \frac{1}{n} S_n$

$$\mathbb{E}_p R_n = p, \quad V_p(R_n) = \frac{p(1-p)}{n} \overset{!}{\leq} \frac{1}{4n}$$

Sei $\alpha \in (0,1)$ (z.B. $\alpha = 0.05$). Dann:

$$\mathbb{P}_p(R_n - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}} \leq p \leq R_n + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}})$$

$$= \mathbb{P}_p(|R_n - p| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}) \geq 1 - \frac{V_p(R_n)}{(\frac{1}{2\sqrt{\alpha n}})^2} = 1 - \frac{p(1-p)4\alpha n}{n} \geq 1 - \alpha$$

[1]

Mit

$$I_n := [\max\{0, R_n - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}, \min\{1, R_n + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}\}]$$

gilt

$$\mathbb{P}_p(I_n \ni p) \geq 1 - \alpha \quad \text{(z.B. } \geq 0.95)$$

16.2 Definition

Sei $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\})$ statistisches Modell
$\alpha \in (0,1)$. Eine Abbildung

$$C : \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\Theta)$$

[1] Hier wurde die Tschebyschew- Ungl. benutzt.

heißt **Konfidenzbereich** (für ϑ) zum Konfidenzwert $1-\alpha$, falls

$$\mathbb{P}_\vartheta(\{x \in \mathcal{X} \colon C(x) \ni \vartheta\}) \geq 1-\alpha \quad \vartheta \in \Theta$$

Falls $\Theta \subset \mathbb{R}$ und $C(x)$ Intervall ($\forall x$), so heißt C **Konfidenzintervall**.

16.3 Bemerkungen

1. C ist $\mathcal{P}(\Theta)$-wertige Zufallsvariable.
2. $C(x) = \Theta, x \in \mathcal{X}$, ist ein Konfidenzbereich. Sinnlos! (Ziel: $C(x)$ "klein")
3. $C(x)$ konkreter Konfidenzbereich. Die Tatsache, dass $\vartheta \in C(x)$ gilt, hat keine Wahrscheinlichkeit.
4. Es sei $\Theta \subset \mathbb{R}$ und $\beta \in (0,1)$. Dann heißt
   - $$O \colon \mathcal{X} \to \Theta$$
     obere Konfidenzschranke (für ϑ) zum Konfidenzniveau $1-\beta$, falls
     $$\mathbb{P}_\vartheta(\{x \in \mathcal{X} \colon \vartheta \leq O(x)\}) \geq 1-\beta$$
   - $$U \colon \mathcal{X} \to \Theta$$
     untere Konfidenzschranke (für ϑ) zum Konfidenzniveau $1-\beta$, falls
     $$\mathbb{P}_\vartheta(\{x \in \mathcal{X} \colon U(x) \leq \vartheta\}) \geq 1-\beta$$

16.4 Beispiel (Konfidenzschranken für p in $Bin(n,p)$)

Sei $S_n \sim Bin(n,p)$. Gesucht $p_u, p_o \colon \{0,\dots,n\} \to [0,1]$ mit

$$\mathbb{P}_p(p \leq p_o(S_n) \geq 1-\beta), \quad p \in [0,1] \quad (2)$$

$$\mathbb{P}_p(p_u(S_n) \leq p) \geq 1-\beta), \quad p \in [0,1] \quad (3)$$

1. $k=0: \quad p_u(0) := 0 \quad p_o(0) := 1-\beta^{\frac{1}{n}}$
   Dann gilt $\beta = (1-p_o(0))^n \geq (1-p)^n$, falls $p \geq p_o(0)$
2. $k=n: \quad p_o(n) := 1, \quad p_u(n) := \beta^{\frac{1}{n}}$
   Dann gilt $p_u(n)^n = \beta \geq p^n, \quad p \leq p_u(n)$
3. $0 < k < n: \quad p_o(k)$ ist Lösung von $P(S_n \leq k) = \beta$

Behauptung Dann gilt (2)!

Wiederholung $(\mathcal{X}, \{\mathbb{P}_\vartheta \colon \vartheta \in \Theta\}), \quad x \mapsto C(x) \subset \Theta$
$\mathbb{P}_\vartheta(\{x \in \mathcal{X} \colon C(x) \ni \vartheta\}) \geq 1 - \alpha$
$\Theta \subset \mathbb{R}:$
$\mathbb{P}_\vartheta(\{x \in \mathcal{X} \colon \vartheta \leq O(x)\}) \geq 1 - \beta$ obere Konfidenzschranke
$\mathbb{P}_\vartheta(\{x \in \mathcal{X} \colon U(x) \leq \vartheta\}) \geq 1 - \beta$ untere Konfidenzschranke

Beispiel

$S_n \sim Bin(n,p)$ [2], $S_n = k$

$$(*) \quad \mathbb{P}_p(S_n \leq k) = \beta$$

(stetige Funktion von p) [3]
$p_o(k)$ Lösung von (*)
$p_u(k)$ Lösung von

$$\mathbb{P}_p(S_n \geq k) = \beta \quad (**)$$

Es gelte $p \in (0,1)$. Setze

$$M := \{j \in \{0, \dots, n\} \colon p > p_o(j)\}$$

zu zeigen: $\mathbb{P}_p(p > p_o(S_n)) \leq \beta$,! d.h.

$$\mathbb{P}_p(S_n \in M) \leq \beta.$$

Nebenrechnung $M \neq \emptyset$
$k_0 := \max M$
$M \subset \{0, \dots, k_0\}$

Es folgt

$$\mathbb{P}_p(S_n \in M) \leq \mathbb{P}_p(S_n \leq k_0)$$

[4] Fällt in p! (Übung)
$p_o(k_0) < p$

$$\leq \mathbb{P}_{p_o(k_0)}(S_n \leq k_0) \underset{*}{=} \beta$$

[5]

Analog folgt

$$\mathbb{P}_p(p < p_u(S_n)) \leq \beta.$$

[2] n bekannt, p unbekannt
[3] β ist vorgegeben
[4] Wegen der Monotonie der Wahrscheinlichkeitsmaße
[5] benutzt: Monotonie und Tatsache, dass k in M ist

16.5 Allgemeines Konstruktionsprinzip

Wähle zu jedem $\vartheta \in \Theta$ eine Menge $A(\vartheta) \subset \mathcal{X}$ mit

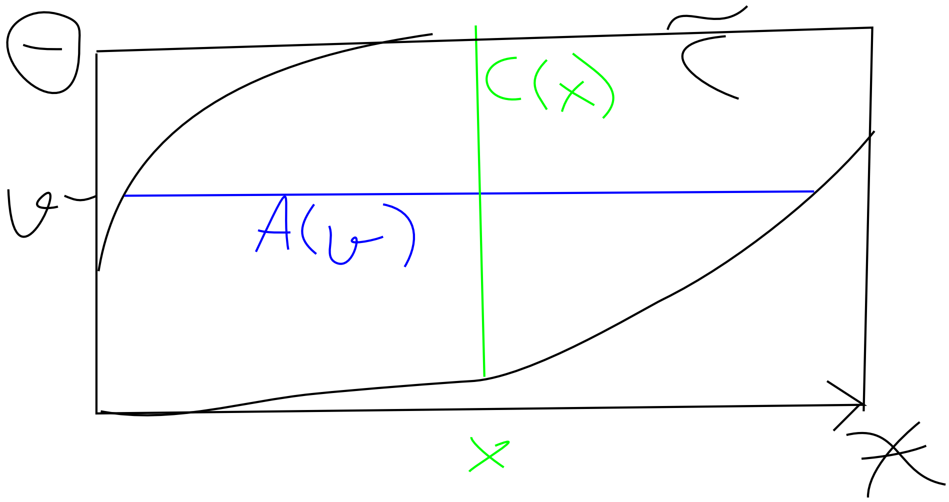
$$\mathbb{P}_\vartheta(A(\vartheta)) \geq 1 - \alpha$$

Setze

$$C(x) := \{\vartheta \in \Theta \colon x \in A(\vartheta)\}$$

[6] Dann gilt

$$x \in A(\vartheta) \Leftrightarrow \vartheta \in C(x)$$



$$\widetilde{C} := \{(x, \vartheta) \colon x \in A(\vartheta)\}$$

Ziel: $C(x)$ "möglichst klein", d.h. $A(\vartheta)$ möglichst klein

16.6 Bemerkung

Setzt man in 16.4

$$\mathcal{X} = \{0, \ldots, n\}, \Theta = [0, 1]$$

$$A(\vartheta) := \{x \in \mathcal{X} \colon u(\vartheta) \leq x \leq o(\vartheta =\},$$

wobei

$$u(\vartheta) := \max \left\{ k \in \mathcal{X} \colon \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \vartheta^j (1-\vartheta)^{n-j} \leq \frac{\alpha}{2} \right\},$$

$$o(\vartheta) := \min \left\{ k \in \mathcal{X} \colon \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} \vartheta^j (1-\vartheta)^{n-j} \leq \frac{\alpha}{2} \right\}$$

Dann folgt 16.5 auf den in 16.4 angegebenen Konfidenzbereich $[p_u(k), p_o(k)]$.

[6] Konfidenzbereich

16.7 Definition

Betrachte Folge $(\mathcal{X}_n, \{\mathbb{P}_\vartheta \colon \vartheta \in \Theta\})$ von stochastischen Modellen. Eine Folge $C_n \colon \mathcal{X}_n$ heißt **asymptotischer Konfidenzbereich zum Niveau** $1-\alpha$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\vartheta(\{x \in \mathcal{X}_n \,:\, C_n(x) \ni \vartheta\}) \geq 1-\alpha$$

16.8 $(Bin(n,p), S_n := X_1 + \ldots + X_n)$

$X_1 + \ldots + X_n$ unabhängig, $Bin(1,p) = Bern(p)$ verteilt.

$$R_n := \frac{1}{n} S_n.$$

Dann gilt für $h > 0$

$$\mathbb{P}_\vartheta\left(-h \leq \frac{S_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}} \leq h\right) \underset{n\to\infty}{\overset{ZGWS}{\longrightarrow}} \phi(h) - \phi(-h) = 2\phi(h) - 1$$

[7]

$$\begin{aligned} A_n(\vartheta)\text{“} \Leftrightarrow \text{„}\frac{|S-n-n\vartheta|}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}} &\leq h \\ \Leftrightarrow \sqrt{n}|R_n - n\vartheta| &\leq h\sqrt{\vartheta(1-\vartheta)} \\ \Leftrightarrow (n+h^2)\vartheta^2 - (2nR_n + h^2)\vartheta + nR_n^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow U_n \leq \vartheta &\leq O_n, \end{aligned}$$

wobei

$$O_n = \frac{R_n + \frac{h^2}{2n} + \frac{h}{\sqrt{n}}\sqrt{R_n(1-R_n) + \frac{h^2}{4n}}}{1+\frac{h^2}{n}}$$

$$U_n = \frac{R_n + \frac{h^2}{2n} - \frac{h}{\sqrt{n}}\sqrt{R_n(1-R_n) + \frac{h^2}{4n}}}{1+\frac{h^2}{n}}$$

Damit ist

$$\mathbb{P}_\vartheta(U_n \leq \vartheta \leq O_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\phi(h) - 1$$

$h : 2\phi(h) - 1 = \alpha$

[7] nach dem Zentralen Grenzwertsatz

Kapitel 17

Testtheorie: fällt weg

Kapitel 18

Allgemeine Modelle

Bisher: Ω diskret, $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

Aber: Im Fall $\Omega = \mathbb{R}^k$ ist die Wahl $\mathcal{P}(\Omega)$ keine gute Idee! Zum Beispiel gibt es dann[1] kein Wahrscheinlichkeitsmaß (vgl. unten folgende Definition) mit

$$\mathbb{P}([a,b]) = b - a \quad 0 \le a \le b \le 1$$

18.1 Definition

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ-Algebra (über Ω)**, falls

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ [2]
3. $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

18.2 Bemerkungen

$\mathcal{A}$ sei σ-Algebra

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ $(\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A})$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
   $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$ [3]
3. $A_n, B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup A_n^c)^c \in \mathcal{A}$

[1] im Fall $k = 1$

[2] Abgeschlossenheit unter Komplementbildung

[3] Eine σ-Algebra ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten.

4. $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra.
   Wie auch $\{\emptyset, \Omega\}$.

18.3 Lemma

Seien $I \neq \emptyset, \mathcal{A}_i$ σ-Algebren über $\Omega, i \in I$.
Dann ist

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

eine σ-Algebra.

Beweis. klar! □

18.4 Satz und Definition

Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann existiert genau eine σ-Algebra $\sigma(\mathcal{M})$ über Ω mit

1. $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{M})$
2. Für alle σ-Algebren $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, dann ist $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$.

Man nennt $\sigma(\mathcal{M})$ die **von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra** und $\mathcal{M}$ **Erzeuger von** $\sigma(\mathcal{M})$.

Beweis.

$$\bigcap_{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebren}, \mathcal{M} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

q.e.d. (Lemma 18.3) □

18.5 Folgerung

1. $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1 \subset \sigma(\mathcal{M}_2))$
2. $\sigma(\sigma(\mathcal{M})) \subset \sigma(\mathcal{M})$
3. $\mathcal{M}_1 \subset \sigma(\mathcal{M}_2)$ und $M_2 \subset \sigma(\mathcal{M}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) = \sigma(\mathcal{M}_2)$ Übungsaufgabe

18.6 Folgerung und Definition

Seien $k \in \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{O}^k := \{A \subset \mathbb{R}^n \colon A \text{ offen } \},$$

$$\mathcal{A}^k := \{A \subset \mathbb{R}^n \colon A \text{ abgeschlossen } \},$$

$$\mathcal{K}^k := \{A \subset \mathbb{R}^n \colon A \text{ kompakt } \},$$

$$\mathcal{I}^k := \{(x,y]\colon x,y \in \mathbb{R}^k, x < y\}$$

[4] wobei $x \leq y := x_i \leq y_i, \quad i = 1,\dots,k$,
$x < y := x_i < y_i, \quad i = 1,\dots,k$

$$\mathcal{B}^k := \sigma(\mathcal{O}^k)$$

heißt **σ-Algebra der Borelmengen** [5] Es gilt

1. $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{A}^k)$
2. $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{K}^k)$
3. $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{I}^k)$

Wiederholung $\Omega \neq \emptyset, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebren

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\dashv' \sigma-Algebra, \dashv' \supset \mathcal{M}} \dashv'$$

$$\mathcal{B}^k := \sigma(\{U \subset \mathbb{R}^k \colon U \text{ offen})$$

Borelsche σ-Algebra

1. $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{A}^k)$

   Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ abgeschlossen. Dann ist $\mathbb{R}^k \backslash A$ offen, also in B^k. Also ist $A \in \mathcal{B}^k$, d.h. $\mathcal{A}^k \subset \mathcal{B}^k$. Also ist $\sigma(\mathcal{A}^k) \subset \mathcal{B}^k$. Umgekehrt analog. □

2. $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{K}^k)$

   Beweis. $(\subset)$ klar nach (1).
   Sei $A \in \mathcal{A}^k$. Dann gilt

   $$A \cap [-n,n]^k \uparrow_{n\to\infty} A,$$

   d.h. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A \cap [-n,n]^k = A$.
   Damit ist $A \in \sigma(\mathcal{K}^k)$, d.h.

   $$\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{A}^k) \subset \sigma(\mathcal{K}^k)$$

   □

3. $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{I}^k)$

   Beweis. Übungsaufgabe □

[4] halboffene Quader
[5] Die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält.

18.7 Definition (Axiomensystem von Kolmogrov)

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\Omega \neq \emptyset, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra und einem Wahrscheinlichkeitsmaß (auf $(\Omega, \mathcal{A})$, auf $\mathcal{A}$, auf Ω) $\mathbb{P}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ mit:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{A}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j), \quad A_j \in \mathcal{A}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$. ($\sigma$-Additivität)

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen **Ereignisse**.

18.8 Bemerkung

Alle bisherigen Definitionen und Resultate (Stetigkeit von oben bzw. unten, Bayes' Formel, Unabhängigkeit) bleiben erhalten.

18.9 Definition und Satz

$\mathbb{P}$ sei Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}^1$.
Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ definiert durch

$$F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]), x \in \mathbb{R},$$

heißt **Verteilungsfunktion** (VF) von $\mathbb{P}$. Es gilt

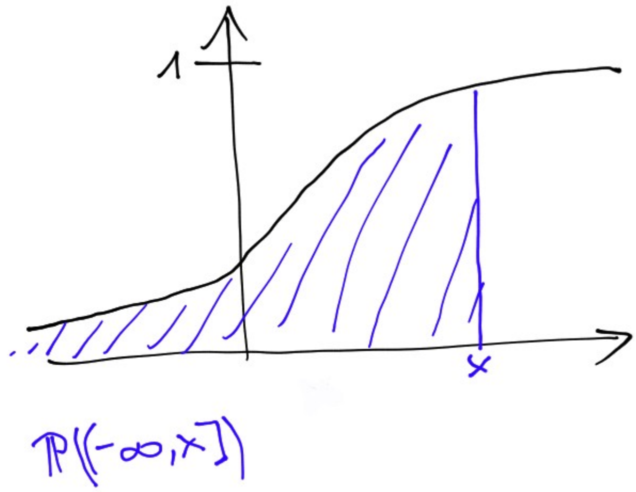
1. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
2. F ist rechtsseitig stetig.
3. $F(-\infty) := \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,$
4. $F(\infty) := \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Beweis. 1. $(-\infty, x] \subset (-\infty, y] \quad (x \leq y)$. $\mathbb{P}$ monoton $\rightsquigarrow F(x) \leq F(y)$

2. Es gelte $x_n \downarrow x$. Dann ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, x]$
   $\mathbb{P}$ ist stetig von oben $\rightsquigarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}((-\infty, x_n]) = \mathbb{P}((-\infty, x])$$

3.
$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n],$$
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n]$$



□

18.10 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion, d.h. es gelte (1)-(3). Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}^1$ mit

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. WT. □

18.11 Satz

Sei F Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}^1$.

1. $\mathbb{P}((a,b]) = F(b) - F(a), \quad a \leq b$
2. $\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - F(\underbrace{x-}_{\text{linksseitiger Grenzwert}})$
3. $\mathbb{P}(\{x\}) = 0 \Leftrightarrow F$ ist stetig in x

4. F besitzt höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen.

Beweis. 1. Für $a \leq b$ gilt $(-\infty, a] \cup (a, b] = (-\infty, b]$ also

$$F(a) + \mathbb{P}((a, b]) = F(b).$$

2. Sei $x_n \uparrow x$ mit $x_n < x$. Dann

$$(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]$$

also

$$\mathbb{P}((-\infty, x)) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x-)$$

Damit

$$\begin{aligned} F(x) - F(x-) &= \mathbb{P}((-\infty, x]) - \mathbb{P}((-\infty, x)) \\ &= \mathbb{P}((-\infty, x] \setminus (-\infty, x)) = \mathbb{P}(\{x\}). \end{aligned}$$

3. klar.

4. $\{x \colon F(x) \neq F(x-)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \colon \mathbb{P}(\{x\}) \geq \frac{1}{n}\}}_{\text{hat höchstens } n \text{ Punkte}}$

□

18.12 Beispiel

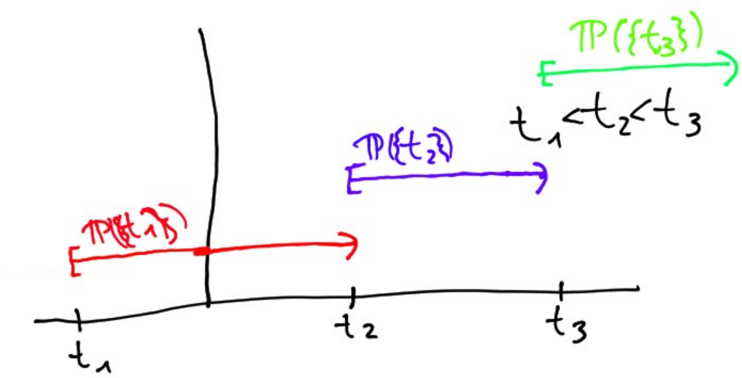
Sei $\mathbb{P}$ diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}^1$ mit Träger

$$T = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\},$$

d.h. $\mathbb{P}(\{t_j\}) > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{t_j\}) = 1$

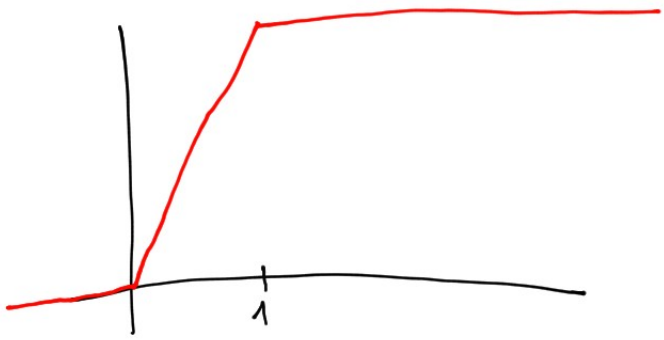
Dann gilt (nach Definition)

$$F(x) = \sum_{j \colon t_j \leq x} \mathbb{P}(\{t_j\})$$



18.13 Beispiel

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$



Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}^1$ heißt **Gleichverteilung** auf $[0,1]$ ($\mathbb{P} = U([0,1])$). Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \mathbb{P})$ modelliert einen "rein zufälligen" Punkt in $[0,1]$.

18.14 Definition

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **(Lebesque)Dichte** (über $\mathbb{R}$), falls

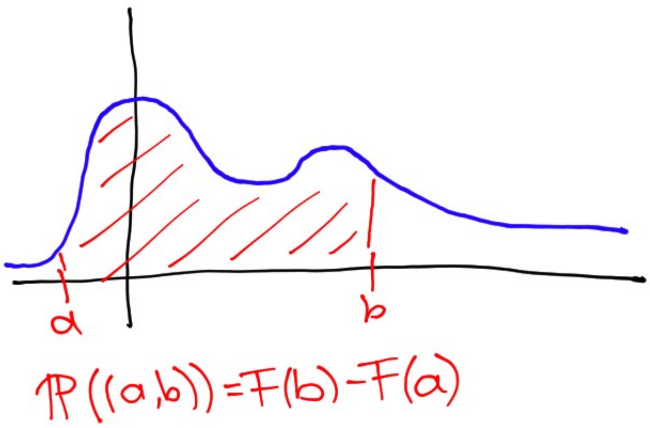
1. $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$
2. $\{x\colon f(x) \geq c\} \in \mathcal{B}^1, c \in \mathbb{R}$. ($f$ ist Borel-messbar)
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (Lebesque-Integral)

Die durch

$$F(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy, x \in \mathbb{R}$$

definiterte Funktion $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ ist stetig und ist eine Verteilungsfunktion im Sinne von 18.9(1),(2),(3). Das nach 18.10 zu F gehörende Wahrscheinlichkeitsmapß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}^1$ erfüllt

$$\mathbb{P}(a,b]) = \int\limits_{a}^{b} f(y)dy$$



Ist f in x stetig, dann ist F in x stetig differenzierbar und $F'(x) = (x)$.

Das bedeutet

$$"\mathbb{P}((x, x + dx]) \approx f(x)dx"$$

(TODO: Rest texen)

18.15 Beispiel

Seien $f_1, \ldots, f_k$ Dichten auf $\mathbb{R}$. Setze

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j), \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$$

Diese Funktion ist messbar und

$$\int f(x)dx = \int \ldots \int f_1(x_1) \ldots f_k(x_k)dx_1 \ldots dx_k = \prod_{j=1}^{k} \int f_j(x_j)dx_j = 1$$

18.16 Beispiel

$f_j(t) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp[-\frac{t^2}{2}]$
Dann ist

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} exp[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} x_j^2]$$

die Dichte der k-dimensionalen Normalverteilung.

18.17 Definition und Bemerkung

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^k$. Für $j \in \{1, \ldots, k\}$ sei

$$\mathbb{P}_j(B) := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{j-1} \times B \times \mathbb{R}^{k-j}), B \in \mathcal{B}^1$$

Das ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Man nennt es j-te Randverteilung von $\mathbb{P}$. Hat $\mathbb{P}$ die Dichte f, so hat $\mathbb{P}_j$ die Dichte

$$f_j(t) = \int \ldots \int f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+q}, \ldots, x_k) dx_1 \ldots dx_{j-1} \ldots dx_k$$

(Fubini)

Kapitel 19

Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum.
Früher: $X\colon \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{P}^X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B))$

19.1 Definition und Satz

Sei $\Omega' \neq \emptyset, \mathcal{A}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ σ-Algebra.

Eine Abbildung $X\colon \Omega \to \Omega'$ heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$**-messbar**, falls

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{A}'.$$

Dann heißt X Ω'**-wertige Zufallsvariable**.

Die Verteilung $\mathbb{P}^X(\mathbb{P}(X_{...}), \mathcal{L}(x), \mathbb{P}X^{-1}, \ldots)$ von X ist definiert als

$$\mathbb{P}^X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)), B \in \mathcal{A}'$$

Das ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$. (ÜA). Ist $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$, nennt man X einen k-dimensionalen Zufallsvektor. Im Fall $k = 1$ spricht man von einer Zufallsvariable.

19.2 Bemerkung

1. Sei $\mathcal{M}' \subset \mathcal{A}'$ mit $\sigma(\mathcal{M}') = \mathcal{A}'$. Dann gilt

   $$X^{-1}(A') \in \mathcal{A}', A' \in \mathcal{M}' \Leftrightarrow X^{-1}(A') \in \mathcal{A}', A' \in \mathcal{U}'.$$

   Zu zeigen ist $(\Rightarrow)$. Setze

   $$\mathcal{G} := \{A' \subset \Omega' \colon X^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

   Das ist eine σ-Algebra (ÜA).

   Also gilt (wegen $\mathcal{M}' \subset \mathcal{G}$)

   $$\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{M}') \subset \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$$

2. Sei $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ stetig. Dann gilt
$$g^{-1}(A') \in \mathcal{O}^k \subset \mathcal{B}^k, A' \in \mathcal{O}^l$$
Wegen $\sigma(\mathcal{O}^l) = \mathcal{B}^l$ folgt aus (i)
$$g^{-1}(A') \in \mathcal{B}^k, A' \in \mathcal{B}^l.$$
Also ist g messbar.

3. $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ messbar (d.h. $(\mathcal{B}^k, \mathcal{B}^1)$-messbar) $\Leftrightarrow$
$$\{x\colon g(x) \geq c\} \in \mathcal{B}^k.$$
Beweis. Das System
$$\{[c, \infty)\colon c \in \mathbb{R}\}$$
ist ein Erzeuger von $\mathcal{B}^1$.
Man benutze jetzt (i). □

4. Sei $X\colon \Omega \to \Omega'$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar.
Sei $h\colon \Omega' \to \Omega''$ $(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$-messbar, wobei $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{P}(\Omega'')$ eine σ-Algebra ist.
Dann ist die Abbildung $h \circ X\colon \Omega \to \Omega''$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-messbar. Für $A'' \in \mathcal{A}''$
$$(h \circ X)^{-1}(A'') = X^{-1}(\underbrace{h^{-1}(A'')}_{\in \mathcal{A}'}) \in \mathcal{A}.$$

5. Sei $\mathcal{D}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}^X = \mathcal{D}$.
Dazu: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k, \mathcal{D})$,
$$X = id_{\mathbb{R}^k}$$

Erinnerung $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ $\quad X\colon \Omega \to \Omega'$ $\mathcal{A}'$

Messbarkeit: $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}'$
$\mathbb{P}^X$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$
$$\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) =: \mathbb{P}(X \in B)$$
$(= \mathbb{P}(\{X \in B\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\}))$

$\Omega' = \mathbb{R}^k$ $\quad \mathcal{B}^k$ Zufallsvektor
$k = 1$ Zufallsvariable

19.3 Bemerkung

Sei $\mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^k$.
$X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ mit Verteilung $\mathbb{Q}$. Man schreibt

$$X \sim \mathbb{Q}$$

("X ist nach $\mathbb{Q}$ verteilt.")

z.B.: $X \sim U[a,b]$ [1]
$X \sim Exp(\lambda), X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Hat $\mathbb{Q}$ die Dichte f, so sagt man "X hat Dichte f".
Man sagt X ist eine (absolut) stetige Zufallsvariable. [2]

$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = \int\limits_a^b f(x)dx, \quad a \le b$$

$$\mathbb{P}(X = t) = 0!$$

19.4 Bemerkung

Sei $\mathcal{Q}^k := \{[a,b] : a \le b\}$ [3]
Für $\lambda^k([a,b]) := \prod\limits_{j=1}^{k} (b_j - a_j)$ [4]
$N \in \mathcal{B}^k$ heißt **Nullmenge**

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists k_1, k_2, \ldots \in \mathcal{Q}^k$$

mit $N \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} k_i$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda^k(k_j) \le \epsilon$.
(Hyperebenen $\{x : <x, n>= c\}$ sind Nullmengen)

Sind $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Dichten eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$, so gilt

$$f(x) = g(x), \quad x \notin N,$$

mit einer Nullmenge N.

[1] X auf dem Intervall $[a,b]$ gleichverteilt.
[2] Das bedeutet: X hat eine Dichte.
[3] $a, b \in \mathbb{R}^k$
[4] Lebesque-Maß

19.5 Bemerkung

Hat ein k-dimensionaler Zufallsvektor die Dichte f, so hat die X_j die Dichte

$$f_j(t) = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

19.6 Beispiel

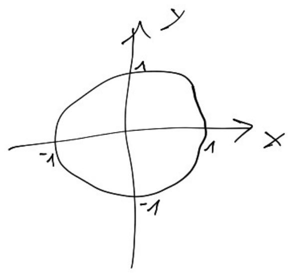
(X, Y) habe Dichte

$$f(x,y) := \frac{1}{\pi} 1_{\{} x^2 + y^2 \leq 1\} \equiv 1_K(x,y), K = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\})$$

Dann

$$f_1(x) = \int f(x,y)dy = \int 1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dy = \int 1_{\{|y| \leq \sqrt{1-x^2}\}} dy$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| > 1 \\ \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & \text{falls } |x| \leq 1 \end{cases}$$

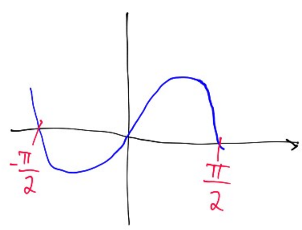


Ferner

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_1(x)dx = \int\limits_{-1}^{t} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(t) + \frac{1}{\pi} t\sqrt{1-t^2}$$

(Differentiation und $\frac{\partial}{\partial t}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$)



19.7 Definition

1. [5] $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j \in T} A_j) = \prod_{j \in T} \mathbb{P}(A_j), \quad T \subset \{1, \ldots, n\}, T \neq \emptyset$$

2. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen **stochastisch unabhängig**, falls

   $X_1^{-1}(B_1), \ldots, X_n^{-1}(B_n)$ stochastisch unabhängig, für alle $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}^1$,

   bzw. falls

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots X_n \in B_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in B_j) \text{ für alle } B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}^1.$$

19.8 Bemerkung

Hat $(X_1, \ldots, X_n)$ die Dichte f. Dann gilt:

1. $f(x) = \prod\limits_{j=1}^{n} f_j(x_j) \Rightarrow X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig

2. $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig $\Rightarrow f(x) = \prod\limits_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ außerhalb einer Nullmenge

Beweis. (1) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in B_1 \times \ldots \times B_n) \\
&= \mathbb{P}^X(B_1 \times \ldots \times B_n) = \int\limits_{B_1 \times \ldots \times B_n} f(x)dx \\
&\overset{(1), Fubuni}{=} \int\limits_{B_1} \int\limits_{B_2} \ldots \int\limits_{B_n} f(x_1) \ldots f(x_n) dx_n \ldots dx_1 \\
&= \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{B_j} f_j(x)dx = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}^{X_j}(B_j) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in B_j)
\end{aligned}$$

(2) : WT □

[5] Die Ereignisse

Kapitel 20

Rechnen mit Dichten

$X = (X_1, \dots, X_k)$ k-dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte f. Sei

$$T \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s \quad (s \leq k)$$

Sei $Y := T(X)$. (Y ist s-dimensionaler Zufallsvektor, falls Z messbar ist.)

20.1 Satz

Sei $K = 1$, d.h. X sei reelle Zufallsvariable. Die Dichte f sei stückweise stetig und es gelte

$$\mathbb{P}(X \in I) = 1$$

für ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die Einschränkung $T\big|_I$ (von T auf I) sei stetig differenzierbar, streng monoton und $T'(x) \neq 0, x \in I$. Dann hat $Y = T(X)$ die Verteilungsfunktion

$$G(y) = \begin{cases} F(T^{-1}(y)), y \in T(I), & \text{falls } T \uparrow \\ 1 - F(T(y)), y \in T(I), & \text{falls } T \downarrow \end{cases}$$

wobei F die Verteilungsfunktion von X ist. Ferner hat G die Dichte

$$g(y) = \frac{f(T^{-1}(y))}{|T'(T^{-1}(y))|}, \quad y \in T(I)$$

und $g(y) = 0$ für $y \notin T(I)$.

Beweis. Sei T wachsend. Dann

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(T(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq T^{-1}(y)) \quad y \in T(I) \end{aligned}$$

Die Funktion G ist stetig differenzierbar mit Ableitung

$$g(y) = G'(y) = \frac{f(T^{-1}(y))}{T'(T^{-1}(y))}$$

□

20.2 Beispiel

$T(x) = ax + b, \quad a \neq 0, b \in \mathbb{R}$
$T'(x) = a, T^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$
$g(y) = \frac{1}{|a|} f(\frac{y-b}{a})$

20.3 Beispiel

$X \sim N(0,1)$ [1], $T(x) = \sigma x + \mu$ ($\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$), $Y := T(X) = \sigma X + \mu$

$$g(y) = \frac{1}{\sigma} \varphi(\frac{y-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}]$$

[2]

20.4 Beispiel

$T(x) = x^2, Y = X^2$

$$\begin{aligned} G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X^2 \leq y) \\ &\stackrel{y \geq 0}{=} \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

[3] Dichte ($y > 0$):

$$g(y) = f(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Erinnerung $f \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Dichtefunktion von $X = (X_1, \ldots, X_k)$
$Y = T(X)$ [4]
$\mathbb{P}(X \notin U) = 0 = \int\limits_{U^c} f(x)dx$

20.5 Satz

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^k \colon f(x) > 0\}$ offen, $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, $T \colon U \to V$ bijektiv, stetig differenzierbar, $T'(x) \neq 0, \quad x \in U$. Dann hat $Y := T(X)$ die Dichte

$$g(y) = \frac{f(T^{-1}(y))}{|\det T'(T^{-1}(y))|}, \quad y \in V$$

($g(y) = 0, \quad y \notin V$.)

[1] Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1
[2] φ ist die Dichte der Standardnormalverteilung
[3] F ist die Verteilungsfunktion von X.
[4] Transformation von X

Beweis. zu zeigen:

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \int_B f(y)dy, \quad B \in \mathcal{B}^k \qquad (*)$$

Wir zeigen $(*)$ für offenes $B \subset V$. (Das genügt!) [5] Dann

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(X \in T^{-1}(B))$$

$$= \int_{T^{-1}(B)} f(x)dx \qquad |x = T^{-1}(y), y = T(x)$$

$$= \int_B f(T^{-1}(y) \left(\det T'(T^{-1}(y))\right)^{-1} dy$$

Analysis 3! [6] □

20.6 Beispiel (Polarmethode)

Seien X_1, X_2 stochastisch unabhängig und $U(0,1)$-verteilt. Dann $f(x_1, x_2) = 1_{(0,1)^2}(x_1, x_2)$ Es sei

$$T(x_1, x_2) = (\sqrt{-2\log x_1}\cos(2\pi x_1), \sqrt{-2\log x_2}\sin(2\pi x_2))$$

Dann ist $T((0,1)^2) = \mathbb{R}^1 \backslash \{(y_1, y_2) \colon y_1 \geq 0, y_2 = 0\}$. (Nullmenge)
$\det T'(x_1, x_2) = \frac{2\pi}{x_1}$ (Übung!)
Aus Satz 20.5 folgt $(x_1 = \exp[-\frac{1}{2}(y_1^2, y_2^2)])$

$$g(y_1, y_2) = (\frac{2\pi}{\exp[-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)]})^{-1} 1_V(y_1, y_2)$$

$$\stackrel{!}{=} f(y_1) f(y_2)$$

19.8.(i) $\rightsquigarrow Y_1, Y_2$ unabhängig $N(0,1)$-verteilt.

20.7 Beispiel

$T(x) = Ax + b$,
$A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^k, Y = T(X)$ hat Dichte

$$g(y) = \frac{f(A^{-1}(y-b))}{|\det A|}$$

[5] siehe Maßtheorie
[6] Jacobi-Determinante

20.8 Bemerkung

Sei $T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ mit $k > s$. Betrachte

$$\widetilde{T}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{s+(k-s)}$$

mit

$$\widetilde{T}(x) = (T_1(x), \ldots, T_s(x), \underbrace{T_{s+1}(x), \ldots, T_k(x)}_{\text{"Auffüllen"}})$$

Erfüllt $\widetilde{T}$ die Voraussetzung von Satz 20.5, dann hat

$$\widetilde{Y} := \widetilde{T}(x)$$

eine Dichte $f_{\widetilde{Y}}$. Wegen

$$Y = (\widetilde{Y_1}, \widetilde{Y_2})$$

folgt , dass Y die Dichte

$$f_Y(y_1, \ldots, y_s) = \int \int f_{\widetilde{Y}}(y_1, \ldots, y_s, y_{s+1}, \ldots, y_k) dy_{s+1} \ldots dy_k$$

20.9 Beispiel

$k = 2, s = 1$

$$Y := T(X) := X_1 + X_2$$

$$\widetilde{T}(x_1, x_2) := (x_1 + x_2, x_1)$$

Dann hat $\widetilde{T}$ die Jacobi-Determinante 1 und $\widetilde{Y} := (x_1 + x_2, x_2)$ die Dichte $f_{\widetilde{y}}(y_1, y_2) = f(y_2, y_1 - y_2)1$ und damit die Dichte

$$f_{X_1+X_2} = \int f(y_2, y_1 - y_2) dy_2$$

Sind X_1, X_2 unabhängig, d.h. $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$, dann gilt

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int f_{X_1}(t) f_{X_2}(z - t) dt$$

(Faltungsformel)

$(= f_1 * f_2(z))$

20.10 Satz (Additionsgesetz für Nomalv.)

Seien X, Y unabhängig, $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\nu, \tau^2)$. Dann gilt

$$X + Y \sim N(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$$

Beweis. Seien U, V unabhängig $N(0,1)$-verteilt. Setze

$$\widetilde{X} := \sigma U + \mu, \widetilde{Y} := \tau V + U.$$

Dann sind $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ unabhängig und es gilt

$$(X, Y) \stackrel{d}{=} (\widetilde{X}, \widetilde{Y}).$$

Damit (!)

$$X + Y \stackrel{d}{=} \widetilde{X} + \widetilde{Y} = \sigma U + \tau V + \mu + \nu$$
$$= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \underbrace{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} U + \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} V \right)}_{N(0,1) \text{ ÜA!}} + (\mu + \nu)$$

Faltungsformel! □

20.11 Definition und Satz

Seien $X_1, \ldots, X_k$ unabhängig $N(0,1)$-verteilt.

Betrachte $Y := X_1^2 + \ldots + X_k^2$. Die Verteilung von Y heißt χ^2**-Verteilung** mit k **Freiheitsgraden** (kurz $Y \sim \chi_k^2$). Y hat die Dichte

$$f_k(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Beweisidee: $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0.$ $(\Gamma(k) = (k-1)!)$.

Man beweist zunächst den Fall $k = 1$ (Transformationsformel).

Der allgemeine Fall folgt induktiv mit Faltungsformel. Allgemeiner gilt ein Additionsgesetz für Gammaverteilungen (siehe Übungsblatt).

Kapitel 21

Kenngrößen von Verteilungen

Erinnerung: $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum
$X\colon \Omega \to \mathbb{R}$

1. $\mathbb{E}X := \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$
2. $= \sum\limits_{X\,:\,\mathbb{P}(X=x)>0} x\mathbb{P}(X = x)$

Jetzt: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable.

Ziel: Definition von $\mathbb{E}X$!

1. $X \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$X_n(\omega) := \begin{cases} 0, & \text{falls } X(\omega) = 0 \\ \frac{j-1}{2^n}, & \text{falls } \frac{j-1}{2^n} < X \leq \frac{j}{2^n}, j = 1, \dots, n2^n \\ n, & \text{falls } X(\omega) > n. \end{cases}$$

Es gilt [1] $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, und wir definieren

$$\mathbb{E}X_n := \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \left(F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\right) + n(1 - F(n))$$

[2], wobei $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$. (Motivation kommt von (2).)
Es gilt

$$\mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_{n-1}$$

und wir definieren:

$$\mathbb{E}X := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \in [0, \infty].$$

[1] Linke Intervallgrenze als Approx
[2] F Verteilungsfkt.

Erwartungswert von X ($\mathbb{E}X = \int X d\mathbb{P}$).

2. X beliebig. Dann gilt
$$X = X^+ - X^-$$
mit $X^+ := \max\{X, 0\}, X^- := -\min\{X, 0\}$
(Es gilt $|X| = X^+ + X^-$.)

21.1 Definition

X ist **integrierbar**, wenn $\mathbb{E}X^+ < \infty$ und $\mathbb{E}X^- < \infty$. In diesem Fall sei $\mathbb{E}X := \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^- \big(= \int X d\mathbb{P} = \int X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)\big)$

21.2 Satz

Besitzt X eine Dichte f, dann ist X genau dann integrierbar, wenn
$$\int |x| f(x) dx < \infty.$$
Dann gilt
$$\int x f(x) dx = \mathbb{E}X.$$