Einführung in die Stochastik - Mitschrieb

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

2. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist ein sporadischer Mitschrieb der Übung "Einführung in die Stochastik" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie.

Kapitel 1

24.11.11

1.0.1 Aufgabe 16

Beweis. weiterhin gilt

$$B^{i_1,\dots,i_k} = \bigcap_{\mu=1}^{k} A_{i_\mu} \cap \bigcap_{\nu\notin\{i_1,\dots,i_k\}} A_\nu^c$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} 1_{B^{i_1,\dots,i_k}}$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \prod_{\mu=1}^{k} 1_{A_{i_\mu}} \prod_{\nu\notin\{i_1,\dots,i_k\}} (1-1_{1_\nu})$$

allgemein gilt für Funktionen f, g:

$$\prod_{\nu}^{m}(f_\nu+g_\nu) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{1\le i_1<\dots<i_r\le m} \prod_{\nu=1}^{r} g_\nu \prod_{\mu\notin\{i_1,\dots,i_r\}} f_\mu$$

(Beweis mit vollst. Induktion über m)
hier $f_\nu \equiv 1, g_\nu \equiv -1_{A_\nu}$

$$\Rightarrow \prod_{\nu\notin\{i_1,\dots,i_k\}} (1-1_{A_\nu}) = \prod_{\nu=j_1,\dots,j_{n-k}} (1-1_{A_\nu})$$

(wobei $\{j_1,\dots,j_{n-k}\} = \{1,\dots,n\}\backslash\{i_1,\dots,i_k\}$)

$$= \prod_{\nu=1}^{n-k} (1-1_{A_\nu})$$

$$= \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{1\le i_1<\dots<i_r\le n} \underbrace{\prod_{\nu=1}^{r} (-1_{A_\nu})}_{=(-1)^r \prod_{\nu=1}^{r} 1_{A_\nu}} \cdot 1$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n, i_1,\ldots,i_r\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} \prod_{\mu=1}^{k} 1_{A_{i_\mu}} \prod_{\nu=1}^{r} 1_{A_{i_\nu}}$$

statt erst k, dann weitere r Indizes zu wählen, wähle nun direkt $(k+r)$ Indizes $\rightsquigarrow \binom{k+r}{k}$ Möglichkeiten
(z.B. für die Wahl der Indizes $1,2,3$ gibt es für $k=1$ die Möglichkeiten

$$i_1 = 1, \quad j_1, j_2 = 2, 3$$

$$i_1 = 2, \quad j_1, j_2 = 1, 3$$

$$i_1 = 3, \quad j_1, j_2 = 1, 2)$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r (\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k+r}\le n} \prod_{\mu=1}^{k+r} 1_{A_{i_\mu}}) \cdot (\binom{k+r}{k}))$$

$$\Rightarrow P(X=k) = E(1_{\{X=k\}})$$

$$= \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{k+r}{k} \sum_{1\le i_1 y\ldots<i_{k+r}\le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k+r}})$$

$j = r + k:$

$$= \underbrace{\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} S_j}_{\binom{k+r}{k} = \binom{k+r}{r} = \binom{j}{j-k} = \binom{j}{k}}$$

$\square$

1.0.2 Zusatz 1

Modell Fächer von 1 bis n nummeriert. Es werden k Kugeln auf diese Fächer verteilt (gleichwahrscheinlich)

$$X_{n,k} \widehat{=} \text{ Anzahl der Fächer, die leer geblieben sind}$$

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \colon 1 \le \omega_i \le n\} = \{1, \ldots, n\}^k$$

$$P \text{ Gleichverteilung auf } \Omega$$

$$A_j = \{\text{j-tes Fach leer geblieben}\}$$

$$\Rightarrow X_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$$

Sei nun $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$.

$$\bigcap_{\nu=1}^{r} A_{i_\nu} = \{\omega \colon \omega_1, \ldots, \omega_k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}\}$$

$$\Rightarrow P(\bigcap_{\nu=1}^{r} A_{i_\nu}) = \frac{(n-r)^k}{n^k} = \left(1 - \frac{r}{n}\right)^k$$

$$\Rightarrow P(X_{n,k} = 1) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \underbrace{S_r}_{\binom{n}{r}(1-\frac{r}{n})^k}$$

1.0.3 Aufgabe 12

$\Omega = Per^n_{n,\neq}$

$$A_j = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega \colon a_j \geq 1\}$$

$$E(\sum_{j=2}^{n} 1_{A_j}) = \sum_{j=2}^{n} \underbrace{E(1_{A_j})}_{=P(A_j)}$$

Berechne für $j = 1, \ldots, n$

$$P(A_j)$$

$$|A_j| = \underbrace{n-j+1}_{\text{Möglichkeiten, den j-ten Eintrag festzulegen}} \cdot \underbrace{|Per^{n-1}_{n-1,\neq}|}_{=(n-1)!}$$

$$|\Omega| = n! \Rightarrow P(A_j) = \frac{n-j+1}{n}$$

$$\Rightarrow E\left(\sum_{j=2}^{n} 1_{A_j}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} (n-j+1)$$

$$= \frac{1}{n}(n-1)(n+1) + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-j)}_{=-\sum\limits_{j=1}^{n} j+1=-\frac{n(n+1)}{2}+1}$$

$$= \ldots = \frac{n-1}{2}$$

1.0.4 Aufgabe 15

r rote, s schwarze Kugeln
nach dem Ziehen die Kugel und $c \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$ zusätzliche zurücklegen.

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 = \{0, 1\}^2$$

$$0 \hat{=} \text{ schwarz}$$

Startverteilung:

$$p_1 \colon \Omega_1 \to [0, 1] :$$

$$p_1(0) := \frac{s}{r+s}, p_1(1) = \frac{r}{r+s}$$

Übergangsverteilung:

$$p_2(0|0) = \frac{s+c}{r+s+c}, p_2(1|0) = \frac{r}{r+s+c}$$

$$p_2(0|1) = \frac{s}{r+s+c}, p_2(1|1) = \frac{r+c}{r+s+c}$$

$$z.B.P\left((0,1)\right) = p_1(0) \cdot p_2(1|0) = \frac{s}{r+s}\frac{r}{r+s+c}$$

Kapitel 2

08.12.2011

2.1 A17

Aufgabe in anschaulich: http://www.mister-mueller.de/mathe/beispiele/ziege/ziege5.html
Dreistufiges Experiment.
$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$
S_1 ZV, die die erste Wahl des Spielers angibt.
Es gilt $\mathbb{P}(S_1 = i) = \frac{1}{3}(i = 1, 2, 3)$.
oBdA sei der Gewinn hinter Tür 1.
$\Omega_2 = \{2, 3\}, \Omega_3 = \{1, 2, 3\}$
M bezeichne die Wahl des Moderators (welche Tür er öffnet).
S_2 bezeichne die zweite Auswahl ds Spielers.

1. die bedingte Verteilung von M unter S_1 ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(M = 2|S_1 = 1) = \mathbb{P}(M = 3|S_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(M = 3|S_1 = 2) = 1, \mathbb{P}(M = 2|S = 2) = 0$$

$$\mathbb{P}(M = 2|S_1 = 3) = 1, \mathbb{P}(M = 3|S = 3) = 0$$

   Dies ergibt die gemeinsame Verteilung von M und S_1: allgemein: $\mathbb{P}(M = j|S_1 = k) = \frac{\mathbb{P}(M=j,S_1=k)}{\mathbb{P}(S_1=k)}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(M = 2, S = 2) = \mathbb{P}(M = 3, S = 3) = 0$$

$$\mathbb{P}(M = 2, S_1 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(M = 3, S_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(M = 3, S_1 = 2) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(M=2,S_1=3)=\frac{1}{3}$$

Die bedingte Verteilung von S_2 unter (S_1,M) ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(S_2=3|S_1=1,M=2)=\mathbb{P}(S_2=2|S_1=1,M=3)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=1|S_2=2,M=3)=\mathbb{P}(S_2=1|S_1=3,M=2)$$
$$=1$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_2=1)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=1|S_1=2,M=3)\cdot\mathbb{P}(S_1=2,M=3)+\mathbb{P}(S_2=1|S_1=3,M=2)\cdot\mathbb{P}(S_1=3,M=2)$$

(Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_2=1)=1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt.

2. jetzt
$$\mathbb{P}(M=2|S_1=i)$$
$$=\mathbb{P}(M=3|S_1=i)=\frac{1}{2}(i=1,2,3)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(M=k,S_1=i)$$
$$=\mathbb{P}(M=k|S_1=i)\cdot\mathbb{P}(S_1=i)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\qquad(k=1,2;\quad i=1,2,3)$$
$$\mathbb{P}(S_2=j|M=k,S_1=i)\text{ wie oben}$$

und zusätzlich
$$\mathbb{P}(S_2=1|M=2,S_1=2)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=3|M=2,S_1=2)=\frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(S_2=1|M=3,S_1=3)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=2|M=3,S_1=3)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_2=1)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=1|S_1=2,M=3)\cdot\mathbb{P}(S_1=2,M=3)$$
$$+\mathbb{P}(S_2=1|S_1=3,M=2)\cdot\mathbb{P}(S_1=3,M=2)$$
$$+\mathbb{P}(S_2=1|S_1=2,M=2)\cdot\mathbb{P}(S_1=2,M=2)$$
$$+\mathbb{P}(S_2=1|S_1=3,M=3)\cdot\mathbb{P}(S_1=3,M=3)$$
$$=1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

2.2 A18

Die Ereignisse $W_1, \dots, W_6$ seien definiert durch

$$W_i = \text{"i wird geworfen"}$$

$$A = \text{"im ersten Zug wird eine rote Kugel gezogen"}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A|W_i) = \begin{cases} \frac{r-i}{r+s}, & i \text{ gerade} \\ \frac{r+i}{r+s}, & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= \frac{r-(-1)^i i}{r+s}, i = 1, \dots, 6$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A|W_i) \cdot \mathbb{P}(W_i)$$

$$= \frac{2r-1}{2(r+s)}$$

$$B = \text{"im zweiten Zug wird eine rote Kugel gezogen"}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{2r-1}{2(r+s)}$$

und

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \text{ (Ziehen mit Zurücklegen)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \left(\frac{2r-1}{2(r+s)}\right)^2$$

die Wkt, dass beide gezogenen Kugeln rot sind.

$$C = \text{"im 2. Zug wird schwarz gezogen"}$$

$$\Rightarrow C = B^c$$

d.h. A und C^c sind unabhängig.

$$\Rightarrow A \text{ und } C \text{ sind unabhängig}$$

2.3 A19

$$G_k = \text{"}I_k \text{ wurde gesendet"}$$
$$E_k = \text{"}I_k \text{ wurde empfangen"}$$

1.

$$\mathbb{P}(\text{"es wird eine Information empfangen, die nicht gesendet wurde"})$$
$$= \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(E_k^c|_k) \cdot \mathbb{P}(G_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(G_k^c|E_k) \cdot \mathbb{P}(E_k)$$
$$\mathbb{P}(E_k^c|G_k) = 1 - \mathbb{P}(E_k|G_k) = \frac{k}{k+1}$$
$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow p = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{30+40+45+48}{60}\right) = \frac{163}{240} \approx 68\%$$

2.

$$\mathbb{P}(G_k|E_k)$$
$$= \frac{\mathbb{P}(G_k, E_k)}{\mathbb{P}(E_k)} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(G_k, E_k|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i)}{\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(E_k|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(E_k|G_k)\mathbb{P}(G_k)}{\sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(E_k|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i)}$$
$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k+1}}{\sum_{i \neq k, i=1,\dots,4} \mathbb{P}(E_k|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i) + \mathbb{P}(E_k|G_i)\mathbb{P}(G_k)}$$
$$= \frac{\frac{1}{4(k+1)}}{\sum_{i \neq k} \frac{i}{3(i+1)} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{4}}$$

d.h.

$$\mathbb{P}(G_1|E_1) = \frac{\frac{1}{4\cdot 2}}{(\frac{3}{9}+\frac{3}{12}+\frac{4}{15})\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{12}+\frac{4}{15}} = \frac{90}{223} \approx 40,4\%$$

analog ergibt sich

$$\mathbb{P}(G_2|E_2) = \frac{20}{61}$$
$$\mathbb{P}(G_3|E_3) = \frac{45}{163}$$
$$\mathbb{P}(G_4|E_4) = \frac{36}{151}$$

2.4 A20

$X_1, X_2 \overset{u.i.v.}{\sim} U(\{-1,1\})$

$$Z := X_1X_2$$

1.

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = -1)$$
$$= \mathbb{P}(X_1 = 1)\cdot\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\cdot\mathbb{P}(X_2 = -1)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Z=-1) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Z=1, X_1=1) = \mathbb{P}(X_1X_2 = 1, X_1 = 1)$$
$$= \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1) = \frac{1}{4}$$
$$= \mathbb{P}(Z=1)\cdot\mathbb{P}(X_1=1)$$

analog $\mathbb{P}(Z=-1, X_1=1) = \mathbb{P}(Z=-1)\mathbb{P}(X_1=-1)$

$$\mathbb{P}(Z=1, X_1=-1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Z=1)\mathbb{P}(X_1=-1)$$
$$\mathbb{P}(Z=-1, X_1=-1) = \mathbb{P}(Z=-1)\cdot\mathbb{P}(X_1=-1)$$
$$\Rightarrow Z \text{ und } X_1 \text{ sind unabhängig.}$$

analog: Z und X_2 sind unabhängig.

2.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, Z = 1)\\&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)\\&= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

aber $\mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow X_1, X_2$ und Z sind <u>nicht</u> unabhängig.

3.

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot Z) = \mathbb{E}(Z^2) = 1$$

Kapitel 3

19.01.2012

SGGZ
$X_1, X_2, \dots$ unabhängig mit gleicher Verteilung, wobei $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$.

$$\bar{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X_n} - \mathbb{E}X_1| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

3.1 A27

a) $X_1, X_2, \dots$ Folge von ZVen mit $V(X_j) \leq M < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_j) = m \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \forall i,j \in \mathbb{N}\colon (|i-j| \geq k \Rightarrow C(X_i, X_j) = 0)$$

nach Vorlesung gilt:

$$C(X_i, X_j) \leq \sqrt{\underbrace{Var(X_i)}_{\leq M}\underbrace{Var(X_j)}_{\leq M}} \leq M$$

$V(\bar{X_n})$

$$= V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \frac{1}{n^2 \sum\limits_{i,j=1,i\neq j}^{n} Cov(X_i, X_j)}$$

$$\overset{symm.}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \frac{2}{n^2}\sum_{i,j=1,i>j}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{\min\{n,j+k-1\}} \underbrace{Cov(X_i, X_j)}_{\leq M}$$

da für $i \geq j+k : Cov(X_i, X_j) = 0$

$$\Rightarrow V(\bar{X_n}) \leq \frac{1}{n^2} n \cdot M + \frac{2}{n^2} n \cdot (k-1) \cdot M$$

$$= \frac{(2k-1)M}{n}$$

Sei $\epsilon > 0$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|\bar{X_n} - m| \geq \epsilon) \overset{Tsch.}{\leq} \frac{V(\bar{X_n})}{\epsilon^2} \leq \frac{(2k-1)M}{n\epsilon^2} \overset{n \to \infty}{\to} 0$$

b) $Y_1, Y_2, \ldots$ Folge unabh. Würfelwürfe.

$$A_j := \{Y_j < Y_{j+1}\}$$

wir betrachten $X_j := 1_{\{A_j\}}$.
Es gilt $Var(X_j) \leq 1 < \infty$

$$\mathbb{E}(X_j) = \underline{\mathbb{P}(A_j)}$$

es gilt:

$$1 = \mathbb{P}(Y_j < Y_{j+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(Y_j > Y_{j+1})}_{\overset{symm.}{=} \mathbb{P}(Y_j < Y[j+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(Y_j = Y_{j+1})}_{= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(Y_j = Y_{j+1} | Y_j = i) \cdot \mathbb{P}(Y_j = i) = \sum_{i=1}^{6} \underbrace{\mathbb{P}(Y_{j+1} = i | Y_j = i)}_{\overset{unabh.}{=} \underbrace{\mathbb{P}(Y_{j+1} = i)}_{=\frac{1}{6}}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y_j = i)}_{=\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_j) = \frac{5}{12}$$

und für $|i - j| \geq 2$ gilt:

$$1_{A_j} = 1_{\{Y_j < Y_{j+1}\}}$$

und

$$1_{A_i} = 1_{\{Y_i < Y_{i+1}\}}$$

sind unabh. (nach Blockungslemma)

$$\overset{a)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(|\bar{X_n} - \frac{5}{12}| \geq \epsilon) \overset{n \to \infty}{\to} 0. \quad \square$$

3.2 A28

Für $n \in \mathbb{N}$

$$K_n = Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_n$$

mit $\mathbb{P}(Y_i = \frac{5}{3}) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y_i = \frac{1}{2})$
a) es gilt $\mathbb{E}(Y_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$

$$\mathbb{E}(K_n) = \mathbb{E}(Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_n) \overset{unabh.}{=} \mathbb{E}(Y_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(Y_n) = \left(\frac{13}{12}\right)^n \underset{(n\to\infty)}{\to} \infty$$

b) $Z_i := ln(Y_i)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Z_i) = \frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{ln\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:\mu} < 0$$

es gilt $ln(K_n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} ln(K_n) \xrightarrow{p} \mu$$

(SGGZ für $Z_1, Z_2, \ldots$)
d.h. $\mathbb{P}(|\frac{1}{n} ln(K_n) - \mu| \geq \delta) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall \delta > 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\frac{1}{n} ln(K_n) - \mu \geq \delta) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Sei nun $\epsilon > 0$ und $\delta \in (0, |\mu|)$
Dann gilt $e^{n\delta + n\mu} = e^{n(\delta - |\mu|)}$
d.h. $\exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \quad e^{n(\delta - |\mu|)} \leq \epsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(K_n \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(K_n \geq e^{n(\delta - |\mu|)}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n} ln(K_n) - \mu \leq \delta) = 0$$

$$K_n > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|K_n - 0| \geq \epsilon) = 0$$

d.h. $K_n \xrightarrow{p} 0$.

3.3 A29

a) $a, c > 0$

$$\mathbb{P}(X \leq c) \overset{X\geq 0}{=} \mathbb{E}[1_{[0,c]}(X)]$$

es gilt

$$1_{[0,c]}(x) \leq e^{a(c-x)}$$

- $x \notin [0, c]$: $1_{[0,c]}(x) = 0 \leq e^{a(c-x)}$

- $x \in [0,c]$: $1_{[0,c]}(x) = 1 \leq e^{a(c-x)}$, da $a(c-x) \geq 0$.

  Aus der Monotonie des Erwartungswertes folgt

$$\mathbb{E}[1_{[0,c]}(X)] \leq \mathbb{E}[e^{a(c-X)}] = e^{ac}\mathbb{E}[\underbrace{e^{-aX}}_{\leq 1}] \leq e^{ac}$$

$\Rightarrow e^{-aX}$ ist integrierbar + Beh.

b)

$$\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(X \cdot 1_{\{X \geq c\}})$$

[1]

$$\geq \mathbb{E}(c \cdot 1_{\{X \geq c\}}) = c \cdot \mathbb{P}(X \geq c)$$

$\Rightarrow$ Beh.

3.4 Ergänzung zur Vorlesung

Sei $S_n \sim Bin(n,p)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(S_n \leq k) = 1 - \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \int_0^p t^k (1-t)^{n-k-1} dt.$$

Beweis. Beweis per vollständiger Induktion über $k = 0, \ldots, n$.

1. $k = 0$:

$$\mathbb{P}(S_n \leq 0) = (1-p)^n$$

$$1 - \underbrace{\frac{n!}{0!(n-1)!}}_{n} \underbrace{\int_0^p (1-t)^{n-1} dt}_{[-\frac{1}{n}(1-t)^n]_0^p} = 1 - n(-\frac{1}{n}(1-p)^n + \frac{1}{n}) = (1-p)^n$$

2. $k \rightsquigarrow k+1$ für $k \leq n-1$

$$\mathbb{P}(S_n \leq k+1) = \mathbb{P}(S_n \leq k) + \underbrace{\mathbb{P}(S_n = k+1)}_{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (n-p)^{n-k-1}}$$

$$1 - \frac{n!}{k+1!(n-k-2)!} \underbrace{\int_0^p \underbrace{t^{k+1}}_{u(t)} \underbrace{(1-t)^{n-k-2}}_{v'(t)} dt}_{I_{k+1}}$$

[1] wegen Monotonie

[2]

$$\Rightarrow I_{k+1} = [-\frac{1}{n-k-1}t^{k+1}(1-t)^{n-k-1}]_0^p - \int\limits_0^p (k+1)t^k(-\frac{1}{n-k-1})(1-t)^{n-k-1}dt.$$

$$\Rightarrow I_{k+1} = -\frac{1}{n-k-1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} + \frac{k+1}{n-k-1}\int\limits_0^p t^k(1-t)^{n-k-1}dt$$

d.h. die rechte Seite der Gleichung

$$1+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} - \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int\limits_0^p t^k(1-t)^{n-k-1}dt$$

$$= \mathbb{P}(S_n \leq k) + \mathbb{P}(S_n = k+1)$$

□

D.h. $S_n^{(p)} \sim Bin(n,p)$ ist stochastisch monoton (wachsend) in p, also $\mathbb{P}(S_n^{(p_1)} \geq k) \leq \mathbb{P}(S_n^{(p_2)} \geq k)$ für $p_1 \leq p_2$.

3.5 A26

a) $\Omega_k := \{\omega \in (a_1, \ldots, a_r) \in Kom^s_{r,\neq} : a_1 = k\}, \widetilde{p}$ Gleichverteilung auf Ω_k

$$\Rightarrow |\Omega_k| = \binom{s-k}{r-1} \quad (a_2 < \ldots < a_r \text{ aus } k+1, \ldots, s \text{ ziehen})$$

$$|\{X_{(r)} = j\}| = \binom{j-k-1}{r-2} \quad (a_2 < \ldots < a_{r-1} \text{ aus } k+1, \ldots, j-1 \text{ ziehen})$$

$\Rightarrow$ Beh.

[2] partielle Integration

Kapitel 4

02.02.2012

4.1 A30

$\vartheta \in \Theta = \mathbb{N}$
$X_1, \dots, X_n$ unabh. ZVen, identisch verteilt mit $\mathbb{P}_\vartheta(X_i = x_i) = \frac{1}{\vartheta}$ für $x_i \in \{1, \dots, \vartheta\}$
$x = (x_1, \dots, x_n)$ Beobachtung, $x \in \mathbb{N}^n$
$X := (X_1, \dots, X_n)$

a)

$$L_x(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(X = x)$$
$$= \mathbb{P}_\vartheta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$
$$L_x(\vartheta) = \begin{cases} (\frac{1}{\vartheta})^n & \max\limits_{1 \le j \le n} x_j \le \vartheta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\Rightarrow L_x(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^n} \cdot 1_{\{\max\limits_{1 \le j \le n} x_j \le \vartheta\}}$$

b)

1. $\vartheta < \max\limits_{1 \le j \le n} x_n$: $L_x(\vartheta) = 0$
2. $\vartheta \ge \max\limits_{1 \le j \le n} x_j$: $L_x(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta^n} > 0, L_x$ fallend in ϑ.

$\Rightarrow \hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n) = \max\limits_{1 \le j \le n} X_j$
$\hat{\vartheta}_n$ ist ML-Schätzer für ϑ.

c) $\mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n \le k) = \mathbb{P}_\vartheta(\max_{1\le j\le n} X_j \le k)$

$$= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_\vartheta(X_j \le k) = (\frac{k}{\vartheta})^n, \quad k = 1, \ldots, \vartheta.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n = k) =$$
$$\mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n \le k) - \mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n \le k-1)$$
$$= (\frac{k}{\vartheta})^n - (\frac{k-1}{\vartheta})^n$$

d)

$$\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}_n] = \sum_{k=1}^{\vartheta} k \cdot ((\frac{k}{\vartheta})^n - (\frac{k-1}{\vartheta})^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{k^{n+1}}{\vartheta^n} - \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{(k-1)^{n+1}}{\vartheta^n} - \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{(k-1)^n}{\vartheta^n}$$

$$= \vartheta - \frac{1}{\vartheta^n} \sum_{k=2}^{\vartheta} (k-1)^n < \vartheta, \quad \vartheta \ge 2$$

$\Rightarrow \hat{\vartheta}_n$ ist <u>nicht</u> erwartungstreu.

e) nach d) gilt

$$\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta - \frac{1}{\vartheta^n} \sum_{k=2}^{n} (k-1)^n$$

und

$$0 \le \frac{1}{\vartheta^n} \sum_{k=2}^{\vartheta} \underbrace{(k-1)}_{\le \vartheta - 1}{}^n \le \frac{1}{\vartheta^n} \cdot (\vartheta - 1) \cdot (\vartheta - 1)^n$$

$$= (\vartheta - 1) \cdot (\frac{\vartheta - 1}{\vartheta})^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

d.h. $\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) \to \vartheta \quad (n \to \infty)$.
$\Rightarrow \hat{\vartheta}_n$ ist asymptotisch erwartungstreu.
Zu zeigen:

$$\hat{\vartheta}_n \overset{\mathbb{P}_\vartheta}{\to} \vartheta \quad \forall \vartheta \in \Theta = \mathbb{N}$$

sei $0 < \epsilon < 1$.

$$\mathbb{P}(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| \ge \epsilon)$$
$$= \mathbb{P}(\hat{\vartheta}_n \le \vartheta - 1)$$

(da $\vartheta \in \mathbb{N}, \hat{\vartheta}_n \in \{1, \ldots, \vartheta\}$)

$$= (\frac{\vartheta - 1}{\vartheta})^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Sei $\hat{\epsilon} \geq 1$:

$$\mathbb{P}(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| \geq \hat{\epsilon}) \leq \mathbb{P}(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| \geq \epsilon) \text{ für ein } \epsilon > 1.$$

$\Rightarrow (\hat{\vartheta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konsistent.

f) $\widetilde{\vartheta_n} := \frac{\hat{\vartheta}_n^{n+1} - (\hat{\vartheta}_n - 1)^{n+1}}{\hat{\vartheta}_n^n - (\hat{\vartheta}_n - 1)^n}$

$$\mathbb{E}_\vartheta(\underbrace{\widetilde{\vartheta_n}}_{=f(\hat{\vartheta}_n)}) = \sum_{k=1}^{\vartheta} f(k) \cdot \mathbb{P}(\hat{\vartheta}_n = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot ((\frac{k}{\vartheta})^n - (\frac{k-1}{\vartheta})^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{\vartheta^n} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{\vartheta^{n+1}}{\vartheta^n} - \frac{0}{\vartheta^n} = \vartheta$$

$\Rightarrow \widetilde{\hat{\vartheta}_n}$ ist erwartungstreu.

g) $\hat{\vartheta}_{10}(x_1, \ldots, x_{10}) = 113$

$$\to \widetilde{\vartheta}_{10} = f(113) \approx 123,76$$

4.2 A32

a) zu zeigen: $\alpha^{-\frac{1}{n}} \cdot \hat{\vartheta}_n$ ist eine obere Konfidenzschranke für ϑ zum Niveau $1 - \alpha$.

$$\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \leq \alpha^{-\frac{1}{n}\hat{\vartheta}_n})$$
$$= \mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n \geq \alpha^{\frac{1}{n}} \cdot \vartheta) = \underbrace{1 - \mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n < \vartheta \sqrt[n]{\alpha})}_{=:p_\alpha}$$

1. $\vartheta \sqrt[n]{\alpha} \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n < \vartheta \sqrt[n]{\alpha}) = \left(\underbrace{\frac{\vartheta \sqrt[n]{\alpha} - 1}{\vartheta}}_{\sqrt[n]{\alpha} - \frac{1}{\vartheta}}\right)^n < \alpha$$

2. $\vartheta \sqrt[n]{\alpha} \notin \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n < \vartheta \sqrt[n]{\alpha}) = \left(\frac{\lfloor \vartheta \sqrt[n]{\alpha} \rfloor}{\vartheta}\right)^n < \alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \leq \alpha^{-\frac{1}{n}}) > 1 - \alpha \qquad \square$$

b)

$$\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \leq 1.1 \cdot \hat{\vartheta}_n) \geq 0.99$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n \geq \frac{\vartheta}{1.1}) \geq 0.99$$
$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n < \frac{\vartheta}{1.1}) \geq 0.99$$
$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\lfloor \frac{\vartheta}{1.1} \rfloor}{\vartheta}\right)^n \geq 0.99$$
$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \geq 0.99$$
$$\Leftrightarrow n \geq 49$$

4.3 A31

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit $Po(\lambda)$ [1]
ZGWS:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\lambda(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right|) \leq h = \phi(h) - \phi(-h) = 2\phi(h) - 1$$

$$\bar{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Es gilt

$$\left|\frac{n \cdot \bar{X_n} - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right| \leq h$$
$$\Leftrightarrow (n\bar{X_n} - n\lambda)^2 \leq h^2 \cdot n\lambda$$
$$\Leftrightarrow n^2\lambda^2 - nh^2\lambda - 2n^2\bar{X_n}\lambda + n^2\bar{X_n}^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(2\bar{X_n} + \frac{h^2}{n}) + \bar{X_n}^2 \leq 0$$

[1] Poisson-Verteilung

[2] $"=0"$ für $\lambda_{1,2} = (\bar{X_n} + \frac{h^2}{2n}) \pm \underbrace{\sqrt{(\bar{X_n} + \frac{h^2}{n})^2 - \bar{X_n}^2}}_{=\sqrt{\bar{X_n}\frac{h^2}{n} + \frac{h^4}{4n^2}}}$

Definiere

$$U_n := \bar{X_n} + \frac{h^2}{2n} - \sqrt{\bar{X_n}\frac{h^2}{n} + \frac{h^4}{4n^2}}$$

$$O_n := \bar{X_n} + \frac{h^2}{2n} + \sqrt{\bar{X_n}\frac{h^2}{n} + \frac{h^4}{4n^2}}$$

Dann gilt $U_n \leq \lambda \leq O_n \Leftrightarrow \left|\frac{n\bar{X_n} - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right| \leq h$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\overset{!}{=} 2\phi(h) - 1 \\ \Leftrightarrow \phi(h) &= \frac{2-\alpha}{2} \\ \Leftrightarrow h &= \phi^{-1}(\frac{2-\alpha}{2}) \\ &= \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

Für $h = \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ ist also $[U_n(h), O_n(h)]$ ein asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$.

4.4 A33

$X_1, \ldots, X_n \overset{u.i.v.}{\sim} \mathcal{G}(\vartheta) \quad \vartheta \in \Theta = (0,1)$ [3]

a)

$$\begin{aligned} L_x(\vartheta) &= \mathbb{P}_\vartheta((X_1, \ldots, X_n) = x) \\ = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\vartheta(X_i = x_i) &= \prod_{i=1}^n (\vartheta \cdot (1-\vartheta)^{x_i}) \\ &= \vartheta^n \cdot (1-\vartheta)^{\sum\limits_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

$$\bar{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,$$

$$\bar{x_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\Rightarrow \log L_x(\vartheta) = n \cdot \log(\vartheta) + n \cdot \bar{x_n} \log(1-\vartheta)$$

[2]nach oben geöffnete Parabel
[3]Geometrische Verteilung

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log L_x(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} - n\bar{x_n}\cdot\frac{1}{1-\vartheta} \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-\vartheta}{\vartheta} = \bar{X_n} \Leftrightarrow \vartheta = \frac{1}{1+\bar{x_n}}$$
$$\frac{\partial^2}{(\partial\vartheta)^2} = -\frac{n}{\vartheta^2} - n\bar{x_n}\frac{1}{(1-\vartheta)^2} < 0$$

$\Rightarrow \hat{\vartheta}_n = \frac{1}{1+\bar{X_n}}$ ist ML-Schätzer

$$\hat{\vartheta}_n = f(\bar{X_n})$$

Hinweis: $f(\bar{X_n}) > f(a) + f'(a)\cdot(\bar{X_n} - a) \quad \forall a > 0$ (da $\bar{X_n}$ <u>nicht</u> konstant, insbesondere gilt nicht $\bar{X_n} \equiv a$)

$$\mathbb{E}_\vartheta\hat{\vartheta}_n) > \mathbb{E}(f(a) + f'(a)(\bar{X_n} - a))$$
$$= f(a) + f'(a)(\mathbb{E}(\bar{X_n}) - a) \quad \forall a > 0$$

insbesondere für $a = \mathbb{E}(\bar{X_n}) = \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{1-\vartheta}$ [4]
$\Rightarrow f(a) = \vartheta$ und $\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) > \vartheta$

[4] durch die Unabhängigkeit