

# **Einführung in die Stochastik - Mitschrieb**

**Vorlesung im Wintersemester 2011/2012**

Sarah Lutteropp

17. November 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Deskriptive Statistik</b>	<b>4</b>
1.1	Der Grundraum	4
1.2	Absolute und relative Häufigkeit	4
1.3	Histogramm	4
1.4	Lagemaße	4
1.5	Streuungsmaße	6
1.6	Empirischer Korrelationskoeffizient	6
<b>2</b>	<b>Ereignisse und Zufallsvariablen</b>	<b>8</b>
2.1	Definition	8
2.2	Beispiele	8
2.3	Bemerkung (Mengentheoretische Operationen)	8
2.4	Definition	9
2.5	Definition	9
2.6	Definition	10
2.7	Bemerkungen (Rechenregeln für Indikatorfunktionen)	10
2.8	Definition	10
<b>3</b>	<b>Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>12</b>
3.1	Motivation	12
3.2	Definition	12
3.3	Folgerung	13
3.4	Satz	14
3.5	Definition + Satz	14
3.6	Definition	14
3.7	Definition	15
3.8	Definition	15
3.9	Satz	15
<b>4</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>16</b>
4.1	Grundregeln	16
4.2	Satz	16
4.3	Beispiel (Urnenmodelle)	16

4.4	Definition	17
4.5	Satz	17
4.6	Beispiel (Geburtstagsproblem)	18
4.7	Beispiel	18
4.8	Beispiel (Besetzungsmodelle)	18
<b>5</b>	<b>Der Erwartungswert</b>	<b>19</b>
5.1	Definition	19
5.2	Satz	19
5.3	Folgerung	20
5.4	Satz (Transformationsformel)	20
5.5	Beispiele	21
<b>6</b>	<b>Die hypergeometrische Verteilung und die Binomialverteilung</b>	<b>22</b>
6.1	Definition	22
6.2	Satz	23
6.3	Motivation	23
6.4	Definition	23
6.5	Satz	24
<b>7</b>	<b>Mehrstufige Experimente</b>	<b>25</b>
7.1	Beispiel	25
7.2	Definition	25
7.3	Satz	26
7.4	Beispiel	26
<b>8</b>	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>28</b>
8.1	Definition	28
8.2	Satz	28
8.3	Bemerkung (Zusammenhang zu Übergangswahrscheinlichkeiten)	29
8.4	Satz (Multiplikationsformel)	29
8.5	Satz	29
8.6	Beispiel	30
8.7	Beispiel (Ziegenproblem)	30
8.8	Beispiel (Simpson-Paradoxon)	31

## Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Stochastik” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Günther Last gehalten wird.

# Kapitel 1

## Deskriptive Statistik

### 1.1 Der Grundraum

$\emptyset \neq \Omega$  = Grundraum (Grundgesamtheit, Merkmalsraum, Stichprobenraum)  
Annahme:  $\Omega$  ist diskret (endlich oder abzählbar unendlich) (Häufig  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ )

### 1.2 Absolute und relative Häufigkeit

$x_1, \dots, x_n \in \Omega$  ("Daten")  
 $h(\omega) = \text{card} \{j \in \{1, \dots, n\} : x_j = \omega\}, \omega \in \Omega$ , absolute Häufigkeit von  $\omega$

**Bemerkung**  $\sum_{\omega \in \Omega} h(\omega) = n$

**Definition**  $\frac{1}{n}h(\omega)$  = relative Häufigkeit von  $\omega$   
 $h(A) = \text{card} \{j \in \{1, \dots, n\} : x_j \in A\}, A \subset \Omega$  = absolute Häufigkeit von A,  
 $\frac{1}{n}h(A)$  = relative Häufigkeit von A

### 1.3 Histogramm

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, b_1 < b_2 < \dots < b_s$  mit  $b_1 \leq \min_{1 \leq i \leq n} x_i, b_s > \max_{1 \leq i \leq n} x_i$   
TODO: BILD  
 $d_j(b_{j+1} - b_j) = h([b_j, b_{j+1})) = \text{card} \{i \in \{1, \dots, n\} : b_j \leq x_i < b_{j+1}\}$

### 1.4 Lagemaße

**Definition** Ein **Lagemaß** ist eine Abbildung  $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$l(x_1 + a, \dots, x_n + a) = l(x_1, \dots, x_n) + a$$

"Verschiebungskovarianz".  $x_1, \dots, x_n, a \in \mathbb{R}$

### 1.4.1 Arithmetisches Mittel

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$  "Schwerpunkt der Daten"

**Fakt**  $\sum_{j=1}^n (x_j - t)^2 \xrightarrow{t} \text{Min}$

Lösung:  $t = \bar{x}$

"Prinzip der kleinsten Quadrate"

**Beweis**  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - t)^2 = t^2 - 2\bar{x}t + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 = (t - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 - (\bar{x})^2$

### 1.4.2 Median, Quantile

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  geordnete Stichprobe

**Definition**

$$x_{1/2} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & , \text{ falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

heißt **Median** von  $x_1, \dots, x_n$ .

**Fakt**  $\sum_{j=1}^n |x_j - x_{1/2}| = \min_t \sum_{j=1}^n |x_j - t|$  Übungsaufgabe

**Bemerkung** Der Median ist "robust" gegenüber "Ausreißern". Ist etwa  $x_1 = \dots = x_9 = 1$  und  $x_{10} = 1000$  ( $n = 10$ ), so gilt  $\bar{x} = 100,9, x_{1/2} = 1$

**Definition** Für  $0 < p < 1$  heißt

$$x_p := \begin{cases} x_{(\lfloor n \cdot p + 1 \rfloor)} & , \text{ falls } n \cdot p \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p + 1)}) & , \text{ falls } n \cdot p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**p-Quantil** von  $x_1, \dots, x_n$ .

**Interpretation** Mindestens  $p \cdot 100\%$  der Daten liegen links von  $x_p$  und mindestens  $(1 - p) \cdot 100\%$  liegen rechts von  $x_p$ .

$x_{1/4}$  = unteres Quartil,  $x_{3/4}$  = oberes Quartil

## 1.5 Streuungsmaße

**Definition** Eine Abbildung  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\sigma(x_1 + a, \dots, x_n + a) = \sigma(x_1, \dots, x_n) \text{ (Translationsinvarianz)}$$

heißt **Streuungsmaß**.

### 1.5.1 Empirische Varianz

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 = \text{empirische Varianz von } x_1, \dots, x_n$$

### 1.5.2 Empirische Standardabweichung

$$s := +\sqrt{s^2} = \text{empirische Standardabweichung von } x_1, \dots, x_n$$

### 1.5.3 Spannweite

$$x_{(n)} - x_{(1)} = \text{Spannweite von } x_1, \dots, x_n$$

### 1.5.4 Quartilsabstand

$$x_{(3/4)} - x_{(1/4)} = \text{Quartilsabstand von } x_1, \dots, x_n$$

## 1.6 Empirischer Korrelationskoeffizient

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$  TODO: BILD

Gesucht: Gerade  $y = a + b \cdot x$  so, dass

$$(*) \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2 \xrightarrow{a,b} \text{Min}$$

$$\text{Definition } \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \text{ empirische Kovarianz } \sigma_x^2 > 0, \sigma_y^2 > 0.$$

$$\text{Lösung von } (*): b^* = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}, a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$$

$$\min_{a,b} \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2 \stackrel{!}{=} \min_b \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} - b(x_j - \bar{x}))^2 = \dots$$

"lineare Regression"

Einsetzen von  $a^*$  und  $b^*$  in die Zielfunktion:

$$0 \leq \sum_{j=1}^n (y_j - a^* - b^* x_j)^2 = \dots = n\sigma_y^2 \left(1 - \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\right)^2\right)$$

**Definition**  $r_{xy} := \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$  heißt **empirischer Korrelationskoeffizient** (*Pearson*).

**Folgerung**  $|r_{xy}| \leq 1$

Es gilt  $r_{xy} = \pm 1 \Leftrightarrow$  Punktwolke liegt exakt auf der Geraden  $y = a^* + b^*x$ .  
Dabei ist  $b^* > 0$ , falls  $r_{xy} = 1$  und  $b^* < 0$ , falls  $r_{xy} = -1$ .

*Dieser empirische Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die (affin) lineare Abhängigkeit zwischen den  $x_j$  und den  $y_j$ .*

## Kapitel 2

# Ereignisse und Zufallsvariablen

### 2.1 Definition

Gegeben sei eine Grundmenge  $\Omega$ . Die Elemente von  $\Omega$  heißen **Elementarereignisse**. Teilmengen von  $\Omega$  heißen **Ereignisse**. (Idee:  $\omega \in \Omega$  ist Ausgang eines zufälligen Versuchs.)

**Interpretation** Ein Ereignis  $A \subset \Omega$  "tritt ein", wenn  $\omega \in A$ .

### 2.2 Beispiele

- (i) (Münzwurf)  
 $\Omega = \{0, 1\}$  (oder  $\Omega = \{W, Z\}$ )
- (ii) (m Münzwürfe)  
 $\Omega = \{0, 1\}^m (A = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) : \sum_{j=1}^m \omega_j \geq k\} \text{ Ereignis } )$
- (iii) Werfen von 2 Würfeln  
 $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$
- (iv) Brownsche Bewegung  
(TODO: BILD) Bewegung eines Blütenpollens in einer Flüssigkeit  
 $\Rightarrow$  Zukunftsmusik  
 $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R}^2)$

### 2.3 Bemerkung (Mengentheoretische Operationen)

Seien  $A, B, A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ .

$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ und } \omega \in B\} \hat{=} \text{"A und B treten ein"}$

$A \cup B \hat{=} \text{"A oder B treten ein"}$

$\bar{A} \equiv A^c := \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} \hat{=} \text{"A tritt nicht ein"}$



$A \setminus B = A \cap B^c \hat{=}$  "A tritt ein, aber nicht B"

$A \subset B \hat{=}$  "wenn A, dann B"

$\emptyset \hat{=}$  "unmögliches Ereignis"

$\Omega \hat{=}$  "sicheres Ereignis"

**Abkürzung**  $AB = A \cap B$

## 2.4 Definition

Eine Abbildung  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (reelle) **Zufallsvariable**. Für  $\omega \in \Omega$  heißt  $X(\omega)$  **Realisierung** der Zufallsvariable zu  $\omega$ .

**Idee** Mit  $\omega \in \Omega$  bekommt auch  $X(\omega)$  einen zufälligen Charakter.

**Definition**  $X^{-1}: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega) = \{A: A \subset \Omega\}$  ist definiert durch

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A\} \text{ ("Urbild von A unter X")}$$

**Bemerkung**

- $X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B), A, B \subset \mathbb{R}$
- $X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$
- $X^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} X^{-1}(A_j)$
- $X^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} X^{-1}(A_j)$

**Vereinbarung** Es sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $t \in \mathbb{R}$ . Wir setzen

- $\{X = t\} := \{\omega: X(\omega) = t\} (= X^{-1}(t))$
- $\{X \geq t\} := \{\omega: X(\omega) \geq t\}$

## 2.5 Definition

Sind  $X, Y$  Zufallsvariablen, so definiert man

- $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$
- $(X - Y)(\omega) = X(\omega) - Y(\omega)$
- $(X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$

$\omega \in \Omega$ , neue Zufallsvariablen  $X + Y, X - Y, X \cdot Y$   
 analog für  $a \in \mathbb{R}$

- $aX(\omega) = a \cdot (X(\omega))$
- $\min(X, Y) = (X \wedge Y)(\omega) := \min\{X(\omega), Y(\omega)\} \dots$

## 2.6 Definition

Sei  $A \subset \Omega$ . Die Funktion  $1_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \omega \in A \\ 0 & , \text{ falls } \omega \notin A \end{cases}$$

und heißt **Indikatorfunktion** von  $A$ .

## 2.7 Bemerkungen (Rechenregeln für Indikatorfunktionen)

- $1_\emptyset \equiv 0$
- $1_\Omega \equiv 1$
- $(1_A)^2 = 1_A$
- $1_{A^c} = 1 - 1_A$
- $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$
- $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$
- $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$
- $1_{A \Delta B} = |1_A - 1_B|$

## 2.8 Definition

Seien  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ . Die Zufallsvariable

$$X := \sum_{j=1}^n 1_{A_j}$$

heißt **Zählvariable** oder **Indikatorsumme**.

**Bemerkung**

- $\{X = 0\} = \{\omega : X(\omega) = 0\} = A_1^c \cap \dots \cap A_n^c$
- $\{X = n\} = A_1 \cap \dots \cap A_n$
- $\{X = k\} = \text{"genau } k \text{ der Ereignisse } A_1, \dots, A_n \text{ treten ein"} =$   

$$\bigcup_{T \subset \{1, \dots, n\}, |T|=k} \left( \bigcap_{j \in T} A_j \cap \bigcap_{j \notin T} A_j^c \right)$$
 $(T \subset \{1, \dots, n\}, |T| = \text{card } T = k)$

# Kapitel 3

## Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

### 3.1 Motivation

Zufallsexperiment mit Ausgängen in  $\Omega$

$n$ -malige, ‘unabhängige’ Wiederholung

$\Rightarrow$  Ergebnis  $(a_1, \dots, a_n) \in \Omega^n$

$r_n(A) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_A(a_j)$ ,  $A \subset \Omega$  relative Häufigkeit von  $A$

$0 \leq r_n(A) \leq 1$ ,  $r_n(\emptyset) = 0$ ,  $r_n(\Omega) = 1$

$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B)$ ,  $A \cap B = \emptyset$

empirisches Gesetz über Stabilisierung relativer Häufigkeiten:

$r_n(A) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} ?$

### 3.2 Definition

Ein Paar  $(\Omega, \mathbb{P})$  bestehend aus einer diskreten Menge  $\Omega \neq \emptyset$  und einer Funktion  $\mathbb{P}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**, falls:

- (P1)  $\mathbb{P}(A) \geq 0$ ,  $A \subset \Omega$
- (P2)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- (P3)  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$

Diese Eigenschaft heißt  $\sigma$ -Additivität.

Man nennt  $\mathbb{P}$  **Wahrscheinlichkeitsmaß (auf  $\Omega$ )** (oder Wahrscheinlichkeitsverteilung) und  $\mathbb{P}(A)$  heißt **Wahrscheinlichkeit von  $A$** .

### 3.3 Folgerung

- a)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- b)  $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
- c)  $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, A \subset \Omega$
- d)  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B), A, B \subset \Omega$
- e)  $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  (Monotonie)
- f)  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$  (Komplementärwahrscheinlichkeit)
- g)  $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$  (Subadditivität)
- h)  $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$  (Stetigkeit von unten)
- i)  $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$  (Stetigkeit von oben)

**Beweis** • a):  $A_j = \emptyset, j \in \mathbb{N}$  (P3) <sup>1</sup>  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

• b):  $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$  in P3!

• c) + f): Für  $A \subset \Omega$  gilt nach b) (für  $n = 2$ ):

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) \stackrel{(b)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

• d): Nach b) gilt  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$ ,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$  und

$$\text{somit } \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) \stackrel{(b)}{=} \mathbb{P}(A \cup B)$$

• e): Wegen  $B = A \cup (B \setminus A)$  folgt<sup>2</sup>  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$

• g):  $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus (\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j), n \geq 2$ .

Dann gilt  $B_n \subset A_n$  und  $\bigcup_{j=1}^n B_j = \bigcup_{j=1}^n A_j$  sowie  $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ .

Es folgt aus (P3):

$$\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \stackrel{(P3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) \stackrel{e)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \quad (\infty \text{ ist zugelassen})$$

• h) + i): Übungsaufgabe

---

<sup>1</sup>  $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) = 2 \cdot \mathbb{P}(\emptyset)$

<sup>2</sup> (aus der Additivität)

### 3.4 Satz

Seien  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ . Setze

$$S_k := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Dann gilt

- a)  $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k$  ‘Siebformel’
- b)  $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^n A_j) \leq \sum_{k=1}^{2s+1} (-1)^{k-1} S_k, s = 0, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$   
 $\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^n A_j) \geq \sum_{k=1}^{2s} (-1)^{k-1} S_k, s = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

**Beweisidee für Siebformel** vollständige Induktion nach  $n$ :

$$\underline{n=2}: \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \stackrel{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = S_1 - S_2$$

$$\underline{n=3}: \mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cup A_2}_{\text{}} \cup A_3) \stackrel{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \quad ^3$$

$$\stackrel{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = S_1 - S_2 + S_3$$

### 3.5 Definition + Satz

a) Sei  $(\Omega, \mathbb{P})$  diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt  $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$  **Wahrscheinlichkeitsfunktion** (von  $\mathbb{P}$ ).

Es gilt  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), A \subset \Omega$ .

b) Sind  $\Omega$  diskret und  $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung mit  $p(\omega) \geq 0$  und  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ , so erhält man vermöge  $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$  einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

**Beweis** • a)  $\sigma$ -Additivität ( $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ )

• b)  $\sigma$ -Additivität: Großer Umordnungssatz! (Analysis)

### 3.6 Definition

$|\Omega| =: n < \infty$ . Definiere  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n}$ . Dann heißt  $(\Omega, \mathbb{P})$  (ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum!) **Laplace-Raum**. Man nennt  $\mathbb{P}$  **Gleichverteilung** auf  $\Omega$ .

(‘homogene Münze’, ‘Würfeln’, ...)

---

<sup>3</sup> $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$

### 3.7 Definition

Sei  $\Omega \neq \emptyset$  beliebig!  $(\Omega, \mathbb{P})$  diskreter Wahrscheinlichkeitsraum  $\Leftrightarrow \exists$  abzählbare Menge  $\Omega_0 \subset \Omega$ ,  $\exists p: \Omega \rightarrow [0, \infty)$  mit  $p(\omega) = 0$  für alle  $\omega \notin \Omega_0$ , und  $\sum_{\omega \in \Omega_0} p(\omega) = 1$ , und  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A \cap \Omega_0} p(\omega)$ ,  $A \subset \Omega$ .

**Wiederholung**  $(\Omega, \mathbb{P})$  Wahrscheinlichkeitsraum

$$\begin{aligned} p: \Omega &\rightarrow [0, 1], \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \\ \mathbb{P}(A) &:= \sum_{\omega \in A} p(\omega), A \subset \Omega \\ p(\omega) &:= \mathbb{P}(\{\omega\}) \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned} \Omega &\text{ allgemeine Menge, } \Omega_0 \subset \Omega \text{ diskret} \\ p: \Omega &\rightarrow [0, 1], \sum_{\omega \in \Omega_0} p(\omega) = 1, p(\omega) = 0, \omega \notin \Omega_0 \\ \mathbb{P}(A) &:= \sum_{\omega \in A} p(\omega) := \sum_{\omega \in A \cap \Omega_0} p(\omega) \\ \Omega_0 &= \text{Träger von } \mathbb{P} \end{aligned}$$

### 3.8 Definition

$(\Omega, \mathbb{P})$  diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Träger  $\Omega_0$ . Es sei  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion  $\mathbb{P}^X: \mathbb{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $\mathbb{P}^X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ ,  $B \subset \mathbb{R}$  **Verteilung um  $X$** .

### 3.9 Satz

In der Situation von Definition 3.8 ist  $(\mathbb{R}, \mathbb{P}^X)$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Träger  $B_0 := X(\Omega_0) = \{X(\omega): \omega \in \Omega_0\}$

*Beweis.* Für  $B \subset \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^X(B) &= \mathbb{P}(\{\omega: X(\omega) \in B\}) \\ &\stackrel{!}{=} \mathbb{P}(\{\omega: X(\omega) \in B \cap B_0\}) \end{aligned}$$

Definiert man für  $t \in \mathbb{R}$

$$p_t = \mathbb{P}(\{\omega: X(\omega) = t\}) = \mathbb{P}(X = t)$$

so ergibt sich aus der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}^X(B) = \sum_{t \in B \cap B_0} \mathbb{P}(\{\omega: X(\omega) = t\}) = \sum_{t \in B \cap B_0} p_t$$

□

# Kapitel 4

## Kombinatorik

$|A| = \text{card}(A) = \text{Anzahl der Elemente einer endlichen Menge } A$

### 4.1 Grundregeln

$A_1, \dots, A_k$  endliche Menge

(i)  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow \left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| = \sum_{j=1}^n |A_j|$

(ii)  $|A_1 \times \dots \times A_n| = \prod_{j=1}^k |A_j|$

### 4.2 Satz

Es sollen  $k$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_k)$  durch sukzessives Festlegen von  $a_1, a_2, \dots, a_k$  nach folgenden Regeln gebildet werden:

- es gibt  $j_1$  Möglichkeiten für die Wahl von  $a_1$
- es gibt (dann)  $j_2$  Möglichkeiten für die Wahl von  $a_2$
- ...
- es gibt (dann)  $j_k$  Möglichkeiten für die Wahl von  $a_k$

Dann gibt es genau  $j_1 \cdot \dots \cdot j_k$  solcher Tupel.

### 4.3 Beispiel (Urnenmodelle)

Betrachte Urne mit  $n$  durchnummerierten Kugeln. Es werden  $k$  Kugeln nach folgenden Regeln gezogen: ( $M := \{1, \dots, n\}$ )



Zurücklegen (Wiederholung) \ Beachtung der Reihenfolge	ja	nein
ja	$k$ -Permutationen aus $M$ mit Wiederholung, $Per_k^n$	$k$ -Kombinationen aus $M$ mit Wiederholung, $Kom_k^n$
nein	$k$ -Permutationen aus $M$ ohne Wiederholung, $Per_{k,\neq}^n$	$k$ -Kombinationen aus $M$ ohne Wiederholung, $Kom_{k,\neq}^n$

#### 4.4 Definition

$$M = \{1, \dots, n\} (n \in \mathbb{N})$$

- $Per_k^n := M^k$
- $Per_{k,\neq}^n := \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k : a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$
- $Kom_k^n := \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k : a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k\}$
- $(Kom_{k,\neq}^n := \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k : a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$

#### 4.5 Satz

- (i)  $|Per_k^n| = n^k$
- (ii)  $|Per_{k,\neq}^n| := n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$
- (iii)  $|Kom_k^n| = \binom{n+k-1}{k}$
- (iv)  $|Kom_{k,\neq}^n| = \binom{n}{k}$

*Beweis.* (i): 4.1.(ii)

(ii) Satz 4.2

(iv) Betrachte Äquivalenzrelation

$$(a_1, \dots, a_k) \sim (b_1, \dots, b_k) \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_k\} = \{b_1, \dots, b_k\}$$

auf  $Per_{k,\neq}^n$ . Jede Äquivalenzklasse hat  $k!$  Elemente! Es folgt

$$|Kom_{k,\neq}^n| \cdot k! = |Per_{k,\neq}^n| = n^{\underline{k}}$$

(iii) Die Abbildung  $g: Kom_k^n \rightarrow Kom_{k,\neq}^{n+k-1}$  definiert durch

$$(a_1, \dots, a_k) \mapsto (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \dots, a_k + k - 1)$$

ist eine Bijektion! (Umkehrabbildung!) Es folgt(!)

$$|Kom_k^n| = |Kom_{k,\neq}^{n+k-1}| = \binom{n+k-1}{k}$$

□

## 4.6 Beispiel (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter  $k$  rein zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?

**Antwort** Betrachte  $\Sigma = \text{Per}_k^n$  mit  $n = 365$ , und der Laplace-Verteilung. Es sei  $A := \{(a_1, \dots, a_k) \in \Omega : \text{es gibt } i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } i \neq j, a_i = a_j\}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{Per}_{k,\neq}^n) \\ &\stackrel{!}{=} 1 - \frac{|\text{Per}_{k,\neq}^n|}{\text{card}\Omega} \\ &= 1 - \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \\ &= 1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 23: \mathbb{P}(A) &\approx 0,507 > \frac{1}{2} \\ n = \binom{49}{6}, k = 4004, \mathbb{P}(A) &= 0,5001 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 4.7 Beispiel

$n$  Personen bringen (zu einer Feier) je ein Geschenk mit. Geschenke werden "rein zufällig" verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt mindestens eine Person ihr eigenes Geschenk?

$\rightsquigarrow$  Siebformel!

## 4.8 Beispiel (Besetzungsmodelle)

$k$  Teilchen sollen auf  $n$  nummerierte Fächer verteilt werden. Analogie zu Urnenmodell: Nummer der Kugel  $\hat{=}$  Nummer des Fachs, Nummer der Ziehung  $\hat{=}$  Nummer des Teilchens

Unterscheidbare Teilchen \ Mehrfachbesetzungen	ja	nein
	ja	nein
ja	$\text{Per}_k^n$ Maxwell-Boltzmann	$\text{Kom}_k^n$ Bose-Einstein-Statistik
nein	$\text{Per}_{k,\neq}^n$ Fermi-Dirak-Statistik	$\text{Kom}_{k,\neq}^n$

Statistische Physik

## Kapitel 5

# Der Erwartungswert

$p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$ ,  $(\Omega, \mathbb{P})$  diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

### 5.1 Definition

- Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existiert (genauer:  $X$  ist integrierbar bezüglich  $\mathbb{P}$ ), falls

$$\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| p(\omega) < \infty \quad (5.1)$$

In diesem Fall heißt

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

(Physik:  $\langle X \rangle = \mathbb{E}[X]$ ) **Erwartungswert von  $X$ .**

- Ist  $X \geq 0$  eine Zufallsvariable, so heißt

$$\mathbb{E}X := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) \in [0, \infty]$$

ebenfalls Erwartungswert von  $X$ .

### 5.2 Satz

Sei  $L^1 \equiv L^1(\mathbb{P}) := \{X: X \text{ erfüllt 5.1}\}$ . Dann ist  $L^1$  ein reeller Vektorraum.  
Genauer:

- (i)  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, X, Y \in L^1$
- (ii)  $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}X, X \in L^1, a \in \mathbb{R}$
- (iii)  $\mathbb{E}1_A = \mathbb{P}(A), A \subset \Omega$

- (iv)  $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$
- (v)  $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$

*Beweis.* (i)  $|(X+Y)(\omega)| \leq |X(\omega)| + |Y(\omega)|$ .

Also  $X+Y \in L^1(\mathbb{P})$  und

$$\sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega))p(\omega) \stackrel{!}{=} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)p(\omega)$$

(ii) analog

(iii)  $\mathbb{E}1_A = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \mathbb{P}(A)$

(iv) + (v) Übungsaufgabe

□

### 5.3 Folgerung

Seien  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$  und  $X := \sum_{j=1}^n 1_{A_j}$ . Dann gilt  $\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$ .  
(Gilt auch für  $\infty$  viele Ereignisse.)

### 5.4 Satz (Transformationsformel)

Seien  $X: \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiere  $g(X): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(X)(\omega) = g(X(\omega)).$$

Dann ist  $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$  genau dann, wenn

$$\sum_{x: \mathbb{P}(X=x)>0} |g(x)| \mathbb{P}(X=x) < \infty$$

<sup>1</sup>

In diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}g(X) = \sum_{x: \mathbb{P}(X=x)>0} g(x) \mathbb{P}(X=x)$$

*Beweis.* Es gilt

$$\sum_{\omega \in \Omega} |g(X(\omega))| p(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}: \mathbb{P}(X=x)>0} |g(x)| \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} p(\omega)$$

---


$$\Omega = \bigcup_{x \in \mathbb{R}: \mathbb{P}(X=x)>0} \{\omega: X(\omega) = x\} \cup \Omega', \mathbb{P}(\Omega') = 0$$


---

---


$$\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\})$$


---

$$\begin{aligned}
&= \sum |g(X(\omega))| p(\omega) = \sum_{\omega \notin \Omega'} |g(X(\omega))| p(\omega) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}: \mathbb{P}(X=x) > 0} \sum_{\omega \in \{\omega \in \Omega: X(\omega)=x\}} |g(X(\omega))| p(\omega) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \mathbb{P}(X=x)
\end{aligned}$$

Ist das endlich, so gilt die Rechnung auch ohne Betragsstriche!  
 Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbb{P}(X=x) \quad (g(x) \equiv x)$$

□

## 5.5 Beispiele

- Würfelwurf,  $X$ =Augenzahl,  $\mathbb{P}(X=j) = \frac{1}{6}$ .  
 Also

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^6 j \cdot \mathbb{P}(X=j) = \frac{6 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

- Zweifacher Würfelwurf,  $X$ =Maximum der Augenzahlen ( $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ ,  $\mathbb{P}$  = Gleichverteilung)

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = p((1,2)) + p((2,1)) + p((2,2)) = \frac{3}{36}$$

Allgemein:  $\mathbb{P}(X=j) = \frac{2j-1}{36}, j=1, \dots, 6$   
 Es folgt

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^6 j \cdot \frac{2j-1}{36} \stackrel{?}{\approx} 4,47$$

## Kapitel 6

# Die hypergeometrische Verteilung und die Binomialverteilung

Urne mit Kugeln  $\underbrace{1, 2, \dots, r}_{rot}, \underbrace{r+1, \dots, r+s}_{schwarz}$   
 $r, s \in \mathbb{N}_0, r+s > 0$ .

### 6.1 Definition

- $n$  mal Ziehen ohne Zurücklegen
- $a_j :=$  Nummer der  $j$ -ten gezogenen Kugel
- $\Omega = Per_{n,\neq}^{r+s}$
- $\mathbb{P} =$  Gleichverteilung ("unabhängiges", "rein zufälliges" Ziehen)
- $A_j := \{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega : a_j \leq r\} \hat{=} \{\text{j-te gezogene Kugel ist rot}\}$
- $X := \sum_{j=1}^n 1_{A_j} =$  Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$\mathbb{P}^X$  (die Verteilung von  $X$ ) heißt **hypergeometrische Verteilung** mit Parametern  $r, s, n$ , kurz:

$$X \sim Hyp(n, r, s), n \leq r+s$$

$$\mathbb{P}^X = Hyp(n, r, s)$$

## 6.2 Satz

Es gilt

- (i)  $\mathbb{E}X = n \cdot \frac{r}{r+s}$
- (ii)  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{s} \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, k = 0, \dots, r \wedge n$

*Beweis.* (i) Es gilt (Symmetrieargument!)  $|A_j| = r \cdot (r+s-1)^{n-1}$

$$|\Omega| = (r+s)^n \Rightarrow \mathbb{P}(A_j) = \frac{|A_j|}{|\Omega|} = \frac{r}{r+s}$$

Aus 5.3 folgt  $\mathbb{E}X = n \cdot \frac{r}{r+s}$

$$(ii) |\{X = k\}| \stackrel{!}{=} \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^n} = \frac{\binom{r}{s} \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} \quad \square$$

## 6.3 Motivation

$X$  Zufallsvariable,  $\sum_{k=1}^r \mathbb{P}(X = x_k) = 1$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  "unabhängige" Wiederholungen von  $X$  (= Ergebnis eines zufälligen Versuchs)

$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  Zufallsvariable!

Mit  $h_j := \text{card}\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i = x_j\}$  gilt  $\bar{X} \stackrel{!}{=} \frac{1}{n}(h_1 x_1 + h_2 x_2 + \dots + h_n x_n)$

empirisches Gesetz über Stabilität relativer Häufigkeiten

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = x_1)x_1 + \dots + \mathbb{P}(X = x_r)x_r \stackrel{!}{=} \mathbb{E}X$$

$$X \sim \text{Hyp}(n, r, s) = \mathbb{P}^X, n \leq r+s$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{s} \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, k = 0, \dots, n$$

Wegen  $\binom{m}{l} := 0$  für  $m < l$  gilt:  $\mathbb{P}(X = k) = 0$  für  $k < r$  und für  $n - k > s$  ( $k < n - s$ )

## 6.4 Definition

**Binomialverteilung:**

- $n$  maliges Ziehen aus einer Urne mit  $r+s$  Kugeln mit Zurücklegen
- $\Omega = \text{Per}_n^{r+s} = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r+s, i = 1, \dots, n\}$
- $\mathbb{P}$  Gleichverteilung

$$X := \sum_{j=1}^n 1_{A_j}, A_j := \{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega : a_j \leq r\}$$

$\mathbb{P}^X$  heißt Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $p := \frac{r}{r+s}$ . Man schreibt auch  $\text{Bin}(n, p) := \mathbb{P}^X$ .

## 6.5 Satz

Es gilt

$$1. \mathbb{E}X = np$$

$$2. \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n$$

*Beweis.* 1.  $|A_j| = r \cdot (r+s)^{n-1}$   
 $|\Omega| = (r+s)^n \rightsquigarrow \mathbb{P}(A_j) = \frac{|A_j|}{|\Omega|} = \frac{r}{r+s} = p$   
 Folgerung 5.3  $\rightsquigarrow \mathbb{E}X = np$ .

$$2. \text{card}\{X = k\} = \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^k (r+s)^{n-k}}$$

□

**Bemerkung**  $\text{Bin}(n, p)$  ist für jedes  $p \in [0, 1]$  definiert.



## Kapitel 7

# Mehrstufige Experimente

### 7.1 Beispiel

Urne mit einer roten und drei schwarzen Kugeln

1. Experiment Kugel ziehen, Farbe notieren, Kugel und eine weitere Kugel derselben Farbe zurücklegen

2. Experiment Erneut Kugel ziehen

Modell:  $\Omega := \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ ,  $(0 \hat{=} s, 1 \hat{=} r)$

**Konstruktion von  $\mathbb{P}$**   $p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$

$$\left. \begin{aligned} p(1, 1) &:= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \\ p(1, 0) &:= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20} \\ p(0, 1) &:= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20} \\ p(0, 0) &:= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{20} \end{aligned} \right\} 1. \text{ Pfadregel}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Betrachte  $B := \{(1, 1), (0, 1)\}$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(B) = p(1, 1) + p(0, 1) = (2. \text{ Pfadregel})$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{3}{20} = \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(\text{erste Kugel ist rot})$$

(TODO: Bild(Baumdiagramm))

### 7.2 Definition

**Mehrstufige Experimente**  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$  ( $\Omega_j \hat{=}$  Grundraum für  $j$ -tes Telexperiment)

$\omega = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$

Problem: Definiere  $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$

1. Startverteilung  $p_1: \Omega_1 \rightarrow [0, 1]$   $\sum_{\omega \in \Omega_1} p_1(\omega) = 1$
2. Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_2(a_2|a_1) \geq 0$   $\sum_{a_2 \in \Omega_2} p_2(a_2|a_1) \stackrel{!}{=} 1$   
 $(p_2(a_2|a_1) \hat{=} \text{Wahrscheinlichkeit, dass 2. Versuch das Ergebnis } a_2 \text{ liefert unter der Bedingung, dass 1. Versuch Ergebnis } a_1 \text{ geliefert hat.})$   
 $p_3(a_3|a_1, a_2) \geq 0$   $\sum_{a_3 \in \Omega_3} p_3(a_3|a_1, a_2) = 1$   
 $\dots$   
 $p_n(a_n|a_1, \dots, a_{n-1}) \geq 0$   $\sum_{a_n \in \Omega_n} p_n(a_n|a_1, \dots, a_{n-1}) = 1$

Setze für  $\omega = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$

$$p(\omega) := p_1(a_1) \cdot p_2(a_2|a_1) \cdot p_3(a_3|a_1, a_2) \cdot \dots \cdot p_n(a_n|a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \text{1. Pfadregel}$$

Schließlich sei

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad A \subset \Omega \quad \text{Produkt von Übergangswahrscheinlichkeiten}$$

### 7.3 Satz

$(\Omega, \mathbb{P})$  ist diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

*Beweis.* zu zeigen:  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Induktion (oder direkt)! Zum Beispiel gilt für  $n = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) &= \sum_{(a_1, a_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} p_1(a_1)p_2(a_2|a_1) = \sum_{a_1 \in \Omega_1} \sum_{a_2 \in \Omega_2} p_1(a_1)p_2(a_2|a_1) \\ &= \sum_{a_1 \in \Omega_1} p_1(a_1) \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

□

### 7.4 Beispiel

**Unabhängige Experimente**  $(\Omega_j, \mathbb{P}_j), j = 1, \dots, n$ , diskrete Wahrscheinlichkeitsräume,  $p_i(a_i) = \mathbb{P}_i(\{a_i\})$

Idee: "Unabhängiges" Durchführen der zugehörigen Experimente

$$\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, p(\omega) := p_1(a_1) \cdot \dots \cdot p_n(a_n), \omega = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$$

$$(p_2(a_2|a_1) = p_2(a_2), \dots, p_n(a_n|a_1, \dots, a_{n-1}) = p_n(a_n))$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

Man nennt  $\mathbb{P}$  das **Produkt** von  $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$  und schreibt

$$\mathbb{P} := \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}_i.$$

z.B. kann  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, \dots, 6\}$

$$p_1(a_1) = p_2(a_2) = \frac{1}{6}$$

Dann ist

$$p(a_1, a_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

und  $\mathbb{P}$  ist die Laplace-Verteilung auf  $\Omega$ .

## Kapitel 8

# Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$(\Omega, \mathbb{P})$  diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

### 8.1 Definition

Sei  $B \subset \Omega$  mit  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

**bedingte Wahrscheinlichkeit** von  $A \subset \Omega$  unter der Bedingung  $B$ .

Alternativ:  $P_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$

### 8.2 Satz

$P_B$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$ . Dabei ist  $P_B(A) = 1$  falls  $B \subset A$  und  $P_B(A) = 0$  falls  $A \cap B = \emptyset$ . Es gilt:

$$p_B(\omega) := \begin{cases} \frac{p(\omega)}{\mathbb{P}(B)} & , \text{ falls } \omega \in B \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{mit } p_B(\omega) := \mathbb{P}_B(\{\omega\})$$

Beweis ist klar! ( $\sum_{\omega \in \Omega} p_B(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{\omega \in B} p(\omega) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$ .)

**Motivation** Für  $A \subset B$

$$\frac{h_n(A)}{h_n(B)} = \frac{\frac{1}{n}h_n(A)}{\frac{1}{n}h_n(B)} \rightsquigarrow \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

### 8.3 Bemerkung (Zusammenhang zu Übergangswahrscheinlichkeiten)

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $p(\omega) = p_1(a_1)p_2(a_2|a_1)$ ,  $\omega = (a_1, a_2)$

Für  $a_1 \in \Omega_1$  sei

$$B := \{a_1\} \times \Omega_2.$$

Für  $a_2 \in \Omega_2$  sei

$$A := \Omega_1 \times \{a_2\}.$$

Es gilt  $A \cap B = \{(a_1, a_2)\}$ ,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \sum_{\omega \in A \cap B} p(\omega) = \sum_{(b_1, b_2) \in A \cap B} p_1(b_1)p_2(b_2|b_1) = p_1(a_1)p_2(a_2|a_1),$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{b_2 \in \Omega_2} p(a_1|b_2) = \sum_{b_2 \in \Omega_2} p_1(a_1)p_2(b_2|a_1) = p_1(a_1)$$

Es folgt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \stackrel{p_1(a_1) > 0}{=} p_2(a_2|a_1)$$

### 8.4 Satz (Multiplikationsformel)

Seien  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$  mit  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

*Beweis.* Für  $n = 2$ :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1)$$

Allgemein: Ausschreiben der Definitionen + kürzen

$$n = 3: \text{ rechte Seite: } \mathbb{P}(A_1) \cdot \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \square$$

### 8.5 Satz

Sei  $A_1, A_2, \dots$  Zerlegung von  $\Omega$  ( $\bigcup A_i = \Omega$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ).

Sei  $B \subset \Omega$ . Dann gilt

$$1. \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j) \quad \text{Formel der totalen Wahrscheinlichkeit}$$

2. <sup>1</sup> Für  $\mathbb{P}(B) > 0$ , so gilt

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

---

<sup>1</sup>Formel von Bayes

(Man vereinbart  $\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j) := 0$ , falls  $\mathbb{P}(A_j) = 0$ )

*Beweis.* 1.  $B = B \cap \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{B \cap A_j}_{\text{paarweise disjunkt}}$  Aus der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathbb{P}$

folgt

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)$$

2. rechte Seite der Behauptung:  $\frac{\mathbb{P}(B \cap A_k)}{\mathbb{P}(B)} \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(A_k|B)$

□

## 8.6 Beispiel

Eine Krankheit komme bei 4% der Bevölkerung vor<sup>2</sup>. Ein Test spreche bei 90% der Kranken an und bei 20% der Gesunden!

### Modell

- $\Omega$  : Menge der Personen in Deutschland
- $K \subset \Omega$  : Menge der kranken Personen
- $A \subset \Omega$  : Menge der (hypothetisch) positiv getesteten Personen
- $\mathbb{P}$  = Gleichverteilung auf  $\Omega$

Dann

$\mathbb{P}(K|A)$  = Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person krank ist

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(K)\mathbb{P}(A|K)}{\mathbb{P}(K)\mathbb{P}(A|K) + \mathbb{P}(K^c)\mathbb{P}(A|K^c)} \quad (K = A_j, K^c = A_k) \\ & = \frac{0,04 \cdot 0,9}{0,04 \cdot 0,9 + 0,96 \cdot 0,2} = \frac{0,036}{0,036 + 0,192} = \frac{0,036}{0,228} = 0,158 \end{aligned}$$

## 8.7 Beispiel (Ziegenproblem)

Ausgelassen.

<sup>2</sup>Die Mediziner sprechen von "Prävalenz".

## 8.8 Beispiel (Simpson-Paradoxon)

Zulassung von Studenten in Berkeley (1973)

- Zulassungsrate Männer: 44%
- Zulassungsrate Frauen: 35%

Aber: Zulassungsraten der Männer in den einzelnen Fächern kleiner als die der Frauen

### Erklärung

- $A \hat{=}$  Zulassung <sup>3</sup>
- $B \hat{=}$  Frau <sup>4</sup>
- $K_j \hat{=}$  Bewerbung für Fach  $j$

Dann kann gelten

$$\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A|B^c)$$

aber

$$\mathbb{P}(A|B \cap K_j) > \mathbb{P}(A|B^c \cap K_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

Denn:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_j \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap K_j)}{\mathbb{P}(B)} \frac{\mathbb{P}(B \cap K_j)}{\mathbb{P}(B \cap K_j)} \\ &= \sum_j \underbrace{\mathbb{P}(K_j|B)}_{\text{Bewerbungsrate der Frauen im } j\text{-ten Fach}} \underbrace{\mathbb{P}(A|B \cap K_j)}_{\text{siehe oben}} \end{aligned}$$

analog

$$\mathbb{P}(A|B^c) = \sum \mathbb{P}(K_j|B^c) \mathbb{P}(A|B^c \cap K_j)$$

Die absolute Erfolgsquote ist eine gewichtete Summe der relativen Erfolgsquoten.

---

<sup>3</sup>Ereignis, dass rein zufällig ausgewählter Bewerber erfolgreich ist mit seiner Bewerbung.

<sup>4</sup>Ereignis, dass zufällig ausgewählte weibliche Bewerberin erfolgreich ist.