Einführung in die Stochastik - Mitschrieb

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

10. November 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung “Einführung in die Stochastik” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Prof. Dr. Günther Last gehalten wird.

Kapitel 1

Deskriptive Statistik

1.1 Der Grundraum

$\emptyset \neq \Omega =$ Grundraum (Grundgesamtheit, Merkmalsraum, Stichprobenraum)
Annahme: Ω ist diskret(endlich oder abzählbar unendlich) (Häufig $\Omega \subseteq \mathbb{R}$)

1.2 Absolute und relative Häufigkeit

$x_1, \ldots, x_n \in \Omega$ ("Daten")
$h(\omega) = \operatorname{card}\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon x_j = \omega\}, \omega \in \Omega$, absolute Häufigkeit von ω

Bemerkung $\sum\limits_{\omega \in \Omega} h(\omega) = n$

Definition $\frac{1}{n} h(\omega) =$ relative Häufigkeit von ω
$h(A) = \operatorname{card}\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon x_j \in A\}, A \subset \Omega =$ absolute Häufigkeit von A,
$\frac{1}{n} h(A) =$ relative Häufigkeit von A

1.3 Histogramm

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, b_1 < b_2 < \ldots < b_s$ mit $b_1 \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i, b_s > \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$
TODO: BILD
$d_j(b_{j+1} - b_j) = h([b_j, b_{j+1})) = \operatorname{card}\{i \in \{1, \ldots, n\} \colon b_j \leq x_i < b_{j+1}\}$

1.4 Lagemaße

Definition Ein **Lagemaß** ist eine Abbildung $l \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$l(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = l(x_1, \ldots, x_n) + a$$

"Verschiebungskovarianz". $x_1, \ldots, x_n, a \in \mathbb{R}$

1.4.1 Arithmetisches Mittel

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \bar{x} := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ "Schwerpunkt der Daten"

Fakt $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_i - t)^2 \xrightarrow{t} \text{Min}$
Lösung: $t = \bar{x}$
"Prinzip der kleinsten Quadrate"

Beweis $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - t)^2 = t^2 - 2\bar{x}t + \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 = (t - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 - (\bar{x})^2$

1.4.2 Median, Quantile

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ geordnete Stichprobe

Definition

$$x_{1/2} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

heißt **Median** von $x_1, \ldots, x_n$.

Fakt $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - x_{1/2}| = \min\limits_{t} \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - t|$ Übungsaufgabe

Bemerkung Der Median ist "robust" gegenüber "Ausreißern". Ist etwa $x_1 = \ldots = x_9 = 1$ und $x_{10} = 1000 (n = 10)$, so gilt $\bar{x} = 100,9, x_{1/2} = 1$

Definition Für 0 < p < 1 heißt

$$x_p := \begin{cases} x_{(\lfloor n \cdot p+1 \rfloor)} & \text{, falls } n \cdot p \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p+1)}) & \text{, falls } n \cdot p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

p-Quantil von $x_1, \ldots, x_n$.

Interpretation Mindestens $p \cdot 100\%$ der Daten liegen links von x_p und mindestens $(1 - p) \cdot 100\%$ liegen rechts von x_p.
$x_{1/4}$ = unteres Quartil, $x_{3/4}$ = oberes Quartil

1.5 Streuungsmaße

Definition Eine Abbildung $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\sigma(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = \sigma(x_1, \ldots, x_n) \text{ (Translationsinvarianz)}$$

heißt **Streuungsmaß**.

1.5.1 Empirische Varianz

$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$ = **empirische Varianz** von $x_1, \ldots, x_n$

1.5.2 Empirische Standardabweichung

$s := +\sqrt{s^2}$ = **empirische Standardabweichung** von $x_1, \ldots, x_n$

1.5.3 Spannweite

$x_{(n)} - x_{(1)}$ = **Spannweite** von $x_1, \ldots, x_n$

1.5.4 Quartilsabstand

$x_{(3/4)} - x_{(1/4)}$ = **Quartilsabstand** von $x_1, \ldots, x_n$

1.6 Empirischer Korrelationskoeffizient

$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ TODO: BILD
Gesucht: Gerade $y = a + b \cdot x$ so, dass

$$(*) \sum_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_j)^2 \xrightarrow{a,b} \text{Min}$$

Definition $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$ $\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2$

$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$ **empirische Kovarianz** $\sigma_x^2 > 0, \sigma_y^2 > 0$.
Lösung von (*): $b^* = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}}, a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$
$\min\limits_{a,b} \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_j)^2 \overset{!}{=} \min\limits_{b} \sum\limits_{j=1}^{n} (y_i - \bar{y} - b(x_j - \bar{x}))^2 = \ldots$
"lineare Regression"

Einsetzen von a^* und b^* in die Zielfunktion:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} (y_j - a^* - b^* x_j)^2 = \ldots = n\sigma_y^2 (1 - (\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y})^2)$$

Definition $r_{xy} := \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ heißt **empirischer Korrelationskoeffizient** (*Pearson*).

Folgerung $|r_{xy}| \leq 1$
Es gilt $r_{xy} = \pm 1 \Leftrightarrow$ Punktewolke liegt exakt auf der Geraden $y = a^* + b^* x$.
Dabei ist $b^* > 0$, falls $r_{xy} = 1$ und $b^* < 0$, falls $r_{xy} = -1$.
Dieser empirische Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die (affin) lineare Abhängigkeit zwischen den x_j und den y_j.

Kapitel 2

Ereignisse und Zufallsvariablen

2.1 Definition

Gegeben sei eine Grundmenge Ω. Die Elemente von Ω heißen **Elementarereignisse**. Teilmengen von Ω heißen **Ereignisse**. (Idee: $\omega \in \Omega$ ist Ausgang eines zufälligen Versuchs.)

Interpretation Ein Ereignis $A \subset \Omega$ "tritt ein", wenn $\omega \in A$.

2.2 Beispiele

- (i) (Münzwurf)
  $\Omega = \{0,1\}$(oder $\Omega = \{W, Z\}$)
- (ii) (m Münzwürfe)
  $\Omega = \{0,1\}^m (A = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) : \sum_{j=1}^{m} \omega_j \geq k\}$ Ereignis)
- (iii) Werfen von 2 Würfeln
  $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$
- (iv) Brownsche Bewegung
  (TODO: BILD) Bewegung eines Blütenpollens in einer Flüssigkeit
  $\Rightarrow$ Zukunftsmusik
  $\Omega = C([0,1], \mathbb{R}^2)$

2.3 Bemerkung (Mengentheoretische Operationen)

Seien $A, B, A_1, A_2, \dots \subset \Omega$.
$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A$ und $\omega \in B\} \mathrel{\hat{=}}$ "A und B treten ein"
$A \cup B \mathrel{\hat{=}}$ "A oder B treten ein"
$\bar{A} \equiv A^c := \Omega \backslash A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} \mathrel{\hat{=}}$ "A tritt nicht ein"

$A \backslash B = A \cap B^c \,\hat{=}\,$ "A tritt ein, aber nicht B"
$A \subset B \,\hat{=}\,$ "wenn A, dann B"
$\emptyset \,\hat{=}\,$ "unmögliches Ereignis"
$\Omega \,\hat{=}\,$ "sicheres Ereignis"

Abkürzung $AB = A \cap B$

2.4 Definition

Eine Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt (reelle) **Zufallsvariable**. Für $\omega \in \Omega$ heißt $X(\omega)$ **Realisierung** der Zufallsvariable zu ω.

Idee Mit $\omega \in \Omega$ bekommt auch $X(\omega)$ einen zufälligen Charakter.

Definition $X^{-1}\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\Omega) = \{A\colon A \in \Omega\}$ ist definiert durch

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in A\} \text{ ("Urbild von A unter X")}$$

Bemerkung

- $X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B), A, B \subset \mathbb{R}$
- $X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$
- $X^{-1}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X^{-1}(A_j)$
- $X^{-1}(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X^{-1}(A_j)$

Vereinbarung Es sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$. Wir setzen

- $\{X = t\} := \{\omega\colon X(\omega) = t\} (= X^{-1}(t))$
- $\{X \geq t\} := \{\omega\colon X(\omega) \geq t\}$

2.5 Definition

Sind X, Y Zufallsvariablen, so definiert man

- $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$
- $(X - Y)(\omega) = X(\omega) - Y(\omega)$
- $(X \cdot Y)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$

$\omega \in \Omega$, neue Zufallsvariablen $X+Y, X-Y, X \cdot Y$
analog für $a \in \mathbb{R}$

- $aX(\omega) = a \cdot (X(\omega))$
- $\min(X,Y) = (X \wedge Y)(\omega) := \min\{X(\omega), Y(\omega)\} \ldots$

2.6 Definition

Sei $A \subset \Omega$. Die Funktion $1_A \colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \omega \in A \\ 0 & \text{, falls } \omega \notin A \end{cases}$$

und heißt **Indikatorfunktion** von A.

2.7 Bemerkungen (Rechenregeln für Indikatorfunktionen)

- $1_\emptyset \equiv 0$
- $1_\Omega \equiv 1$
- $(1_A)^2 = 1_A$
- $1_{A^c} = 1 - 1_A$
- $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$
- $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$
- $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$
- $1_{A \triangle B} = |1_A - 1_B|$

2.8 Definition

Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$. Die Zufallsvariable

$$X := \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$$

heißt **Zählvariable** oder **Indikatorsumme**.

Bemerkung

- $\{X = 0\} = \{\omega\colon X(\omega) = 0\} = A_1^c \cap \dots A_n^c$
- $\{X = n\} = A_1 \cap \dots \cap A_n$
- $\{X = k\}$ = "genau k der Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ treten ein" $= \bigcup\limits_{T \subset \{1,\dots,n\}, |T|=k} \big(\bigcap\limits_{j \in T} A_j \cap \bigcap\limits_{j \notin T} A_j^c \big)$
  $(T \subset \{1, \dots, n\}, |T| = \text{card } T = k)$

Kapitel 3

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

3.1 Motivation

Zufallsexperiment mit Ausgängen in Ω
n-malige, 'unabhängige' Wiederholung
$\Rightarrow$ Ergebnis $(a_1, \dots, a_n) \in \Omega^n$
$r_n(A) := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} 1_A(a_j), A \subset \Omega$ relative Häufigkeit von A
$0 \leq r_n(A) \leq 1, r_n(\emptyset) = 0, r_n(\Omega) = 1$
$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B), A \cap B = \emptyset$
empirisches Gesetz über Stabilisierung relativer Häufigkeiten:
$r_n(A) \underset{n \to \infty}{\leadsto} ?$

3.2 Definition

Ein Paar $(\Omega, \mathbb{P})$ bestehend aus einer diskreten Menge $\Omega \neq \emptyset$ und einer Funktion $\mathbb{P}\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ heißt **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**, falls:

- (P1) $\mathbb{P}(A) \geq 0, A \subset \Omega$
- (P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- (P3) $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
  Diese Eigenschaft heißt σ-Additivität.

Man nennt $\mathbb{P}$ **Wahrscheinlichkeitsmaß (auf Ω)** (oder Wahrscheinlichkeitsverteilung) und $\mathbb{P}(A)$ heißt **Wahrscheinlichkeit von A**.

3.3 Folgerung

- a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- b) $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j), A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
- c) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, A \subset \Omega$
- d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B), A, B \subset \Omega$
- e) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonie)
- f) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (Komplementärwahrscheinlichkeit)
- g) $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ (Subadditivität)
- h) $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (Stetigkeit von unten)
- i) $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (Stetigkeit von oben)

Beweis • a): $A_j = \emptyset, j \in \mathbb{N}$ (P3) [1] $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
• b): $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ in P3!
• c) + f): Für $A \subset \Omega$ gilt nach b) (für n = 2):
$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$
• d): Nach b) gilt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B)$ und somit $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(A \cup B)$
• e): Wegen $B = A \cup (B \backslash A)$ folgt[2] $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A) \geq \mathbb{P}(A)$
• g): $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \backslash A_1, \ldots, B_n := A_n \backslash (\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j), n \geq 2$.
Dann gilt $B_n \subset A_n$ und $\bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ sowie $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$.
Es folgt aus (P3):
$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \overset{!}{=} \mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j) \overset{(P3)}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j) \overset{e)}{\leq} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$ (∞ ist zugelassen)
• h) + i): Übungsaufgabe

[1] $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) = 2 \cdot \mathbb{P}(\emptyset)$
[2] (aus der Additivität)

3.4 Satz

Seien $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$. Setze

$$S_k := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Dann gilt

- a) $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$ 'Siebformel'
- b) $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j) \le \sum\limits_{k=1}^{2s+1} (-1)^{k-1} S_k, s = 0, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$
  $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j) \ge \sum\limits_{k=1}^{2s} (-1)^{k-1} S_k, s = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Beweisidee für Siebformel vollständige Induktion nach n:
<u>n=2:</u> $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \overset{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = S_1 - S_2$
<u>n=3:</u> $\mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cup A_2} \cup A_3) \overset{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap A_3)$ [3]
$\overset{(d)}{=} \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = S_1 - S_2 + S_3$

3.5 Definition + Satz

a) Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$ **Wahrscheinlichkeitsfunktion** (von $\mathbb{P}$).
Es gilt $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega), A \subset \Omega$.
b) Sind Ω diskret und $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $p(\omega) \ge 0$ und $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, so erhält man vermöge $\mathbb{P}(A) := \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$ einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

Beweis • a) σ-Additivität $(A = \bigcup\limits_{\omega \in A} \{\omega\})$
• b) σ-Additivität: Großer Umordnungssatz! (Analysis)

3.6 Definition

$|\Omega| =: n < \infty$. Definiere $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n}$. Dann heißt $(\Omega, \mathbb{P})$ (ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum!) **Laplace-Raum**. Man nennt $\mathbb{P}$ **Gleichverteilung** auf Ω.
('homogene Münze', 'Würfeln', ...)

[3] $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$

3.7 Definition

Sei $\Omega \neq \emptyset$ beliebig! $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $\Leftrightarrow$ $\exists$ abzählbare Menge $\Omega_0 \subset \Omega$, $\exists p \colon \Omega \to [0, \infty)$ mit $p(\omega = 0)$ für alle $\omega \notin \Omega_0$, und $\sum\limits_{\omega \in \Omega_0} p(\omega) = 1$, und $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{\omega \in A \cap \Omega_0} p(\omega)$, $A \subset \Omega$.

Wiederholung $(\Omega, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum
$p \colon \Omega \longrightarrow [0, 1]$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
$\mathbb{P}(A) := \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega), A \subset \Omega$
$p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$

Ω allgemeine Menge, $\Omega_0 \subset \Omega$ diskret
$p \colon \Omega \longrightarrow [0, 1]$, $\sum\limits_{\omega \in \Omega_0} p(\omega) = 1, p(\omega) = 0, \omega \notin \Omega_0$
$\mathbb{P}(A) := \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega) := \sum\limits_{\omega \in A \cap \Omega_0} p(\omega)$
$\Omega_0 =$ Träger von $\mathbb{P}$

3.8 Definition

$(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Träger Ω_0. Es sei $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion $\mathbb{P}^X : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\mathbb{P}^X(B) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right), B \subset \mathbb{R}$ **Verteilung um** X.

3.9 Satz

In der Situation von Definition 3.8 ist $(\mathbb{R}, \mathbb{P}^X)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Träger $B_0 := X(\Omega_0) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega_0\}$

Beweis. Für $B \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^X(B) &= \mathbb{P}(\{\omega \colon X(\omega) \in B\}) \\ &\overset{!}{=} \mathbb{P}(\{\omega \colon X(\omega) \in B \cap B_0\}) \end{aligned}$$

Definiert man für $t \in \mathbb{R}$

$$p_t = \mathbb{P}(\{\omega \colon X(\omega) = t\}) = \mathbb{P}(X = t)$$

so ergibt sich aus der σ-Additivität von $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}^X(B) = \sum_{t \in B \cap B_0} \mathbb{P}(\{\omega \colon X(\omega) = t\}) = \sum_{t \in B \cap B_0} p_t$$

$\square$

Kapitel 4

Kombinatorik

$|A| = card(A) =$ Anzahl der Elemente einer endlichen Menge A

4.1 Grundregeln

$A_1, \ldots, A_k$ endliche Menge

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow \left| \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \right| = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j$

(ii) $|A_1 \times \ldots \times A_n| = \prod\limits_{j=1}^{k} |A_j|$

4.2 Satz

Es sollen k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k)$ durch sukzessives Festlegen von $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nach folgenden Regeln gebildet werden:

- es gibt j_1 Möglichkeiten für die Wahl von a_1
- es gibt (dann) j_2 Möglichkeiten für die Wahl von a_2
- $\ldots$
- es gibt (dann) j_k Möglichkeiten für die Wahl von a_k

Dann gibt es genau $j_1 \cdot \ldots \cdot j_k$ solcher Tupel.

4.3 Beispiel (Urnenmodelle)

Betrachte Urne mit n durchnummerierten Kugeln.Es werden k Kugeln nach folgenden Regeln gezogen: $(M := \{1, \ldots, n\})$

Zurücklegen (Wiederholung) \ Beachtung der Reihenfolge	ja	nein
ja	k-Permutationen aus M mit Wiederholung, Per_k^n	k-Kombinationen aus M mit Wiederholung, Kom_k^n
nein	k-Permutationen aus M ohne Wiederholung, $Per_{k,\neq}^n$	k-Kombinationen aus M ohne Wiederholung, $Kom_{k,\neq}^n$

4.4 Definition

$M = \{1, \dots, n\} (n \in \mathbb{N})$

- $Per_k^n := M^k$
- $Per_{k,\neq}^n := \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k \colon a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$
- $Kom_k^n := \{(a_1, \dots, a_k =\in M^k \colon a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k\}$
- $(Kom_{k,\neq}^n := \{(a_1, \dots, a_k) \in M^k \colon a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$

4.5 Satz

- (i) $|Per_k^n| = n^k$
- (ii) $|Per_{k,\neq}^n| := n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
- (iii) $|Kom_k^n| = \binom{n+k-1}{k}$
- (iv) $|Kom_{k,\neq}^n| = \binom{n}{k}$

Beweis. (i): 4.1.(ii)
(ii) Satz 4.2
(iv) Betrachte Äquivalenzrelation

$$(a_1, \dots, a_k) \sim (b_1, \dots, b_k) \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_k\} = \{b_1, \dots, b_k\}$$

auf $Per_{k,\neq}^n$. Jede Äquivalenzklasse hat $k!$ Elemente! Es folgt

$$|Kom_{k,\neq}^n| \cdot k! = |Per_{k,\neq}^n| = n^{\underline{k}}$$

(iii) Die Abbildung $g \colon Kom_k^n \to Kom_{k,\neq}^{n+k-1}$ definiert durch

$$(a_1, \dots, a_k) \mapsto (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \dots, a_k + k - 1)$$

ist eine Bijektion! (Umkehrabbildung!) Es folgt(!)

$$|Kom_k^n| = |Kom_{k,\neq}^{n+k-1}| = \binom{n+k-1}{k}$$

□

4.6 Beispiel (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter k rein zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?

Antwort Betrachte $\Sigma = Per_k^n$ mit $n = 365$, und der Laplace-Verteilung. Es sei $A := \{(a_1, \dots, a_k) \in \Omega\colon$ es gibt $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j, a_i = a_j\}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c)\\ &= 1 - \mathbb{P}(Per_{k,\neq}^n)\\ &\overset{!}{=} 1 - \frac{|Per_{k,\neq}^n|}{card\Omega}\\ &= 1 - \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k}\\ &= 1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}\\ &= 1 - (1 - \frac{1}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n})\end{aligned}$$

$\underline{k = 23:}$ $\mathbb{P}(A) \approx 0,507 > \frac{1}{2}$
$n = \binom{49}{6}, k = 4004, \mathbb{P}(A) = 0,5001 > \frac{1}{2}$

4.7 Beispiel

n Personen bringen (zu einer Feier) je ein Geschenk mit. Geschenke werden "rein zufällig" verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt mindestens eine Person ihr eigenes Geschenk?
$\rightsquigarrow$ Siebformel!

4.8 Beispiel (Besetzungsmodelle)

k Teilchen sollen auf n nummerierte Fächer verteilt werden. Analogie zu Urnenmodell: Nummer der Kugel $\hat{=}$ Nummer des Fachs, Nummer der Ziehung $\hat{=}$ Nummer des Teilchens

Unterscheidbare Teilchen \ Mehrfachbesetzungen	ja	nein
ja	Per_k^n Maxwell-Boltzmann	Kom_k^n Bose-Einstein-Statistik
nein	$Per_{k,\neq}^n$ Fermi-Dirac-Statistik	$Kom_{k,\neq}^n$

Statistische Physik

Kapitel 5

Der Erwartungswert

$p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$, $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

5.1 Definition

- Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ existiert (genauer: X ist integrierbar bezüglich $\mathbb{P}$), falls

$$\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| p(\omega) < \infty \tag{5.1}$$

  In diesem Fall heißt

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

  (Physik: $< X >= \mathbb{E}[X]$) **Erwartungswert von** X.

- Ist $X \geq 0$ eine Zufallsvariable, so heißt

$$\mathbb{E}X := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) \in [0, \infty]$$

  ebenfalls Erwartungswert von X.

5.2 Satz

Sei $L^1 \equiv L^1(\mathbb{P}) := \{X\colon X \text{ erfüllt } 5.1\}$. Dann ist L^1 ein reeller Vektorraum. Genauer:

- (i) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, X, Y \in L^1$
- (ii) $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}X, X \in L^1, a \in \mathbb{R}$
- (iii) $\mathbb{E}1_A = \mathbb{P}(A), A \subset \Omega$

- (iv) $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$
- (v) $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$

Beweis. (i) $|(X+Y)(\omega)| \leq |X(\omega)| + |Y(\omega)|$.
Also $X + Y \in L^1(\mathbb{P})$ und

$$\sum_{\omega\in\Omega} (X(\omega)+Y(\omega))p(\omega) \stackrel{!}{=} \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)p(\omega)$$

(ii) analog
(iii) $\mathbb{E}1_A = \sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \mathbb{P}(A)$
(iv) + (v) Übungsaufgabe □

5.3 Folgerung

Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ und $X := \sum\limits_{j=1}^{n} 1_{A_j}$. Dann gilt $\mathbb{E}X = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$.
(Gilt auch für ∞ viele Ereignisse.)

5.4 Satz (Transformationsformel)

Seien $X\colon \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definiere $g(X)\colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$g(X)(\omega) = g(X(\omega)).$$

Dann ist $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$ genau dann, wenn

$$\sum_{x\colon \mathbb{P}(X=x)>0} |g(x)|\mathbb{P}(X=x) < \infty$$

[1]

In diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}g(x) = \sum_{x\colon \mathbb{P}(X=x)>0} g(x)\mathbb{P}(X=x)$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{\omega\in\Omega} |g(X(\omega))|p(\omega) = \sum_{x\in\mathbb{R}\colon \mathbb{P}(X=x)>0} |g(x)| \sum_{\omega\in\Omega\colon X(\omega)=x} p(\omega)$$

$$\Omega = \bigcup_{x\in\mathbb{R}\colon X(\omega)=x, \mathbb{P}(X=x)>0} \{\omega\colon X(\omega)=x\} \cup \Omega', \mathbb{P}(\Omega') = 0$$

---

[1] $\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\colon X(\omega)=x\})$

$$= \sum |g(X(\omega))|p(\omega) = \sum_{\omega \notin \Omega'} |g(X(\omega))|p(\omega)$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{R}:\, \mathbb{P}(X=x)>0} \sum_{\omega \in \{\omega \in \Omega:\, X(\omega)=x\}} |g(X(\omega))|p(\omega)$$

$$= \sum_{x \cdots} |g(x)|\mathbb{P}(X = x)$$

Ist das endlich, so gilt die Rechnung auch ohne Betragsstriche!
Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x) \; (g(x) \equiv x)$$

$\square$

5.5 Beispiele

- Würfelwurf, X=Augenzahl, $\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{6}$.
  Also

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{6} j \cdot \mathbb{P}(X = j) = \frac{6 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

- Zweifacher Würfelwurf, X=Maximum der Augenzahlen ($\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2, \mathbb{P} =$ Gleichverteilung)

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = p((1, 2)) + p((2, 1)) + p((2, 2)) = \frac{3}{36}$$

  Allgemein: $\mathbb{P}(X = j) = \frac{2j-1}{36}, j = 1, \ldots, 6$
  Es folgt

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{6} j \cdot \frac{2j - 1}{36} \overset{?}{\approx} 4,47$$

Kapitel 6

Die hypergeometrische Verteilung und die Binomialverteilung

Urne mit Kugeln $\underbrace{1, 2, \ldots, r}_{rot}, \underbrace{r+1, \ldots, r+s}_{schwarz}$
$r, s \in \mathbb{N}_0, r+s > 0$.

6.1 Definition

- n mal Ziehen ohne Zurücklegen
- $a_j :=$ Nummer der j-ten gezogenen Kugel
- $\Omega = Per^{r+s}_{n,\neq}$
- $\mathbb{P} =$ Gleichverteilung ("unabhängiges", "rein zufälliges" Ziehen)
- $A_j := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega \colon a_j \leq r\} \hat{=} \{$j-te gezogene Kugel ist rot$\}$
- $X := \sum\limits_{j=1}^{n} 1_{A_j} =$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$\mathbb{P}^X$ (die Verteilung von X) heißt **hypergeometrische Verteilung** mit Parametern r, s, n, kurz:

$$X \sim Hyp(n, r, s), n \leq r+s$$

$$\mathbb{P}^X = Hyp(n, r, s)$$

6.2 Satz

Es gilt

- (i) $\mathbb{E}X = n \cdot \frac{r}{r+s}$
- (ii) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{s}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, k = 0, \ldots, r \wedge n$

Beweis. (i) Es gilt (Symmetrieargument!) $|A_j| = r \cdot (r+s-1)^{\underline{n-1}}$
$|\Omega| = (r+s)^{\underline{n}} \Rightarrow \mathbb{P}(A_j) = \frac{|A_j|}{|\Omega|} = \frac{r}{r+s}$
Aus 5.3 folgt $\mathbb{E}X = n \cdot \frac{r}{r+s}$
(ii) $|\{X = k\}| \overset{!}{=} \binom{n}{k} r^{\underline{k}} s^{\underline{n-k}}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k} r^{\underline{k}} s^{\underline{n-k}}}{(r+s)^{\underline{n}}} = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$ $\square$