Einführung in die Stochastik - Mitschrieb

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

24. November 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung "Einführung in die Stochastik" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie.

Kapitel 1

24.11.11

1.0.1 Aufgabe 16

Beweis. weiterhin gilt

$$B^{i_1,\ldots,i_k} = \bigcap_{\mu=1}^{k} A_{i_\mu} \cap \bigcap_{\nu\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} A_\nu^c$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} 1_{B^{i_1,\ldots,i_k}}$$

$$= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \prod_{\mu=1}^{k} 1_{A_{i_\mu}} \prod_{\nu\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} (1-1_{1_\nu})$$

allgemein gilt für Funktionen f, g:

$$\prod_{\nu}^{m} (f_\nu + g_\nu) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m} \prod_{\nu=1}^{r} g_\nu \prod_{\mu\notin\{i_1,\ldots,i_r\}} f_\mu$$

(Beweis mit vollst. Induktion über m)
hier $f_\nu \equiv 1, g_\nu \equiv -1_{A_\nu}$

$$\Rightarrow \prod_{\nu\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} (1-1_{A_\nu}) = \prod_{\nu=j_1,\ldots,j_{n-k}} (1-1_{A_\nu})$$

(wobei $\{j_1,\ldots,j_{n-k}\} = \{1,\ldots,n\}\backslash\{i_1,\ldots,i_k\}$)

$$= \prod_{\nu=1}^{n-k} (1-1_{A_\nu})$$

$$= \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq n} \underbrace{\prod_{\nu=1}^{r} (-1_{A_\nu})}_{=(-1)^r \prod_{\nu=1}^{r} 1_{A_\nu}} \cdot 1$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n, i_1,\ldots,i_r\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} \prod_{\mu=1}^{k} 1_{A_{i_\mu}} \prod_{\nu=1}^{r} 1_{A_{i_\nu}}$$

statt erst k, dann weitere r Indizes zu wählen, wähle nun direkt $(k+r)$ Indizes $\rightsquigarrow \binom{k+r}{k}$ Möglichkeiten
(z.B. für die Wahl der Indizes $1,2,3$ gibt es für $k=1$ die Möglichkeiten

$$i_1 = 1, \quad j_1, j_2 = 2, 3$$

$$i_1 = 2, \quad j_1, j_2 = 1, 3$$

$$i_1 = 3, \quad j_1, j_2 = 1, 2)$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r (\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k+r}\le n} \prod_{\mu=1}^{k+r} 1_{A_{i_\mu}}) \cdot (\binom{k+r}{k}))$$

$$\Rightarrow P(X=k) = E(1_{\{X=k\}})$$

$$= \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{k+r}{k} \sum_{1\le i_1 y\ldots<i_{k+r}\le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k+r}})$$

$j = r + k$:

$$= \underbrace{\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} S_j}_{\binom{k+r}{k}=\binom{k+r}{r}=\binom{j}{j-k}=\binom{j}{k}}$$

□

1.0.2 Zusatz 1

Modell Fächer von 1 bis n nummeriert. Es werden k Kugeln auf diese Fächer verteilt (gleichwahrscheinlich)

$$X_{n,k} \mathrel{\hat{=}} \text{Anzahl der Fächer, die leer geblieben sind}$$

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \colon 1 \le \omega_i \le n\} = \{1, \ldots, n\}^k$$

$$P \text{ Gleichverteilung auf } \Omega$$

$$A_j = \{\text{j-tes Fach leer geblieben}\}$$

$$\Rightarrow X_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$$

Sei nun $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$.

$$\bigcap_{\nu=1}^{r} A_{i_\nu} = \{\omega \colon \omega_1, \ldots, \omega_k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}\}$$

$$\Rightarrow P(\bigcap_{\nu=1}^{r} A_{i_\nu}) = \frac{(n-r)^k}{n^k} = \Big(1-\frac{r}{n}\Big)^k$$

$$\Rightarrow P(X_{n,k}=1) = \sum_{r=j}^{n}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\underbrace{S_r}_{\binom{n}{r}(1-\frac{r}{n})^k}$$

1.0.3 Aufgabe 12

$\Omega = Per^n_{n,\neq}$

$$A_j = \{(a_1,\dots,a_n)\in\Omega\colon a_j \geq 1\}$$

$$E(\sum_{j=2}^{n} 1_{A_j}) = \sum_{j=2}^{n}\underbrace{E(1_{A_j})}_{=P(A_j)}$$

Berechne für $j = 1,\dots,n$

$$P(A_j)$$

$$|A_j| = \underbrace{n-j+1}_{\text{Möglichkeiten, den j-ten Eintrag festzulegen}} \cdot \underbrace{|Per^{n-1}_{n-1,\neq}|}_{=(n-1)!}$$

$$|\Omega| = n! \Rightarrow P(A_j) = \frac{n-j+1}{n}$$

$$\Rightarrow E\left(\sum_{j=2}^{n} 1_{A_j}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(n-j+1)$$

$$= \frac{1}{n}(n-1)(n+1) + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{j=2}^{n}(-j)}_{=-\sum\limits_{j=1}^{n} j+1=-\frac{n(n+1)}{2}+1}$$

$$= \dots = \frac{n-1}{2}$$

1.0.4 Aufgabe 15

r rote, s schwarze Kugeln
nach dem Ziehen die Kugel und $c \in \{-1,0,1,\dots\}$ zusätzliche zurücklegen.

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 = \{0,1\}^2$$

$$0 \hat{=} \text{ schwarz}$$

Startverteilung:

$$p_1\colon \Omega_1 \to [0,1]:$$

$$p_1(0) := \frac{s}{r+s}, p_1(1) = \frac{r}{r+s}$$

Übergangsverteilung:

$$p_2(0|0) = \frac{s+c}{r+s+c}, p_2(1|0) = \frac{r}{r+s+c}$$

$$p_2(0|1) = \frac{s}{r+s+c}, p_2(1|1) = \frac{r+c}{r+s+c}$$

$$z.B.P\left((0,1)\right) = p_1(0) \cdot p_2(1|0) = \frac{s}{r+s}\frac{r}{r+s+c}$$