Einführung in die Stochastik - Mitschrieb

Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

8. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist ein sporadischer Mitschrieb der Übung “Einführung in die Stochastik” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie.

Kapitel 1

24.11.11

1.0.1 Aufgabe 16

Beweis. weiterhin gilt

$$B^{i_1,\ldots,i_k} = \bigcap_{\mu=1}^{k} A_{i_\mu} \cap \bigcap_{\nu\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} A_\nu^c$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} 1_{B^{i_1,\ldots,i_k}}$$

$$= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \prod_{\mu=1}^{k} 1_{A_{i_\mu}} \prod_{\nu\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} (1-1_{1_\nu})$$

allgemein gilt für Funktionen f, g:

$$\prod_{\nu}^{m}(f_\nu+g_\nu) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le m} \prod_{\nu=1}^{r} g_\nu \prod_{\mu\notin\{i_1,\ldots,i_r\}} f_\mu$$

(Beweis mit vollst. Induktion über m)
hier $f_\nu \equiv 1, g_\nu \equiv -1_{A_\nu}$

$$\Rightarrow \prod_{\nu\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} (1-1_{A_\nu}) = \prod_{\nu=j_1,\ldots,j_{n-k}} (1-1_{A_\nu})$$

(wobei $\{j_1,\ldots,j_{n-k}\} = \{1,\ldots,n\}\backslash\{i_1,\ldots,i_k\}$)

$$= \prod_{\nu=1}^{n-k}(1-1_{A_\nu})$$

$$= \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n} \underbrace{\prod_{\nu=1}^{r}(-1_{A_\nu})}_{=(-1)^r\prod_{\nu=1}^{r}1_{A_\nu}} \cdot 1$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{r=0}^{n-k} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq n, i_1,\ldots,i_r\notin\{i_1,\ldots,i_k\}} \prod_{\mu=1}^{k} 1_{A_{i_\mu}} \prod_{\nu=1}^{r} 1_{A_{i_\nu}}$$

statt erst k, dann weitere r Indizes zu wählen, wähle nun direkt $(k+r)$ Indizes $\rightsquigarrow \binom{k+r}{k}$ Möglichkeiten
(z.B. für die Wahl der Indizes $1, 2, 3$ gibt es für $k = 1$ die Möglichkeiten

$$i_1 = 1, \quad j_1, j_2 = 2, 3$$

$$i_1 = 2, \quad j_1, j_2 = 1, 3$$

$$i_1 = 3, \quad j_1, j_2 = 1, 2)$$

$$\Rightarrow 1_{\{X=k\}} = \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{k+r}\leq n} \prod_{\mu=1}^{k+r} 1_{A_{i_\mu}} \Big) \cdot \left(\binom{k+r}{k} \right) \Big)$$

$$\Rightarrow P(X = k) = E(1_{\{X=k\}})$$

$$= \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{k+r}{k} \sum_{1\leq i_1 y\ldots<i_{k+r}\leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{k+r}})$$

$j = r + k$:

$$= \underbrace{\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} S_j}_{\binom{k+r}{k}=\binom{k+r}{r}=\binom{j}{j-k}=\binom{j}{k}}$$

$\square$

1.0.2 Zusatz 1

Modell Fächer von 1 bis n nummeriert. Es werden k Kugeln auf diese Fächer verteilt (gleichwahrscheinlich)

$$X_{n,k} \mathrel{\hat{=}} \text{Anzahl der Fächer, die leer geblieben sind}$$

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \colon 1 \leq \omega_i \leq n\} = \{1, \ldots, n\}^k$$

$$P \text{ Gleichverteilung auf } \Omega$$

$$A_j = \{\text{j-tes Fach leer geblieben}\}$$

$$\Rightarrow X_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$$

Sei nun $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$.

$$\bigcap_{\nu=1}^{r} A_{i_\nu} = \{\omega \colon \omega_1, \ldots, \omega_k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}\}$$

$$\Rightarrow P(\bigcap_{\nu=1}^{r} A_{i_\nu}) = \frac{(n-r)^k}{n^k} = \left(1 - \frac{r}{n}\right)^k$$

$$\Rightarrow P(X_{n,k} = 1) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \underbrace{S_r}_{\binom{n}{r}(1-\frac{r}{n})^k}$$

1.0.3 Aufgabe 12

$\Omega = Per^n_{n,\neq}$

$$A_j = \{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega \colon a_j \geq 1\}$$

$$E(\sum_{j=2}^{n} 1_{A_j}) = \sum_{j=2}^{n} \underbrace{E(1_{A_j})}_{=P(A_j)}$$

Berechne für $j = 1, \dots, n$

$$P(A_j)$$

$$|A_j| = \underbrace{n - j + 1}_{\text{Möglichkeiten, den j-ten Eintrag festzulegen}} \cdot \underbrace{|Per^{n-1}_{n-1,\neq}|}_{=(n-1)!}$$

$$|\Omega| = n! \Rightarrow P(A_j) = \frac{n-j+1}{n}$$

$$\Rightarrow E\left(\sum_{j=2}^{n} 1_{A_j}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} (n - j + 1)$$

$$= \frac{1}{n}(n-1)(n+1) + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-j)}_{=-\sum_{j=1}^{n} j+1 = -\frac{n(n+1)}{2}+1}$$

$$= \dots = \frac{n-1}{2}$$

1.0.4 Aufgabe 15

r rote, s schwarze Kugeln
nach dem Ziehen die Kugel und $c \in \{-1, 0, 1, \dots\}$ zusätzliche zurücklegen.

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 = \{0, 1\}^2$$

$$0 \hat{=} \text{ schwarz}$$

Startverteilung:

$$p_1 \colon \Omega_1 \to [0, 1] :$$

$$p_1(0) := \frac{s}{r+s}, p_1(1) = \frac{r}{r+s}$$

Übergangsverteilung:

$$p_2(0|0) = \frac{s+c}{r+s+c}, p_2(1|0) = \frac{r}{r+s+c}$$

$$p_2(0|1) = \frac{s}{r+s+c}, p_2(1|1) = \frac{r+c}{r+s+c}$$

$$z.B. P\left((0,1)\right) = p_1(0) \cdot p_2(1|0) = \frac{s}{r+s}\frac{r}{r+s+c}$$

Kapitel 2

08.12.2011

2.1 A17

Aufgabe in anschaulich: http://www.mister-mueller.de/mathe/beispiele/ziege/ziege5.html
Dreistufiges Experiment.
$\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$
S_1 ZV, die die erste Wahl des Spielers angibt.
Es gilt $\mathbb{P}(S_1 = i) = \frac{1}{3}(i = 1, 2, 3)$.
oBdA sei der Gewinn hinter Tür 1.
$\Omega_2 = \{2, 3\}, \Omega_3 = \{1, 2, 3\}$
M bezeichne die Wahl des Moderators (welche Tür er öffnet).
S_2 bezeichne die zweite Auswahl ds Spielers.

1. die bedingte Verteilung von M unter S_1 ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(M = 2|S_1 = 1) = \mathbb{P}(M = 3|S_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(M = 3|S_1 = 2) = 1, \mathbb{P}(M = 2|S = 2) = 0$$

$$\mathbb{P}(M = 2|S_1 = 3) = 1, \mathbb{P}(M = 3|S = 3) = 0$$

Dies ergibt die gemeinsame Verteilung von M und S_1: allgemein: $\mathbb{P}(M = j|S_1 = k) = \frac{\mathbb{P}(M=j,S_1=k)}{\mathbb{P}(S_1=k)}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(M = 2, S = 2) = \mathbb{P}(M = 3, S = 3) = 0$$

$$\mathbb{P}(M = 2, S_1 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(M = 3, S_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(M = 3, S_1 = 2) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(M=2,S_1=3)=\frac{1}{3}$$

Die bedingte Verteilung von S_2 unter (S_1, M) ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(S_2=3|S_1=1,M=2)=\mathbb{P}(S_2=2|S_1=1,M=3)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=1|S_2=2,M=3)=\mathbb{P}(S_2=1|S_1=3,M=2)$$
$$=1$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_2=1)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=1|S_1=2,M=3)\cdot\mathbb{P}(S_1=2,M=3)+\mathbb{P}(S_2=1|S_1=3,M=2)\cdot\mathbb{P}(S_1=3,M=2)$$

(Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_2=1)=1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt.

2. jetzt

$$\mathbb{P}(M=2|S_1=i)$$
$$=\mathbb{P}(M=3|S_1=i)=\frac{1}{2}(i=1,2,3)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(M=k,S_1=i)$$
$$=\mathbb{P}(M=k|S_1=i)\cdot\mathbb{P}(S_1=i)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\qquad(k=1,2;\quad i=1,2,3)$$
$$\mathbb{P}(S_2=j|M=k,S_1=i)\text{ wie oben}$$

und zusätzlich

$$\mathbb{P}(S_2=1|M=2,S_1=2)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=3|M=2,S_1=2)=\frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(S_2=1|M=3,S_1=3)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=2|M=3,S_1=3)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_2=1)$$
$$=\mathbb{P}(S_2=1|S_1=2,M=3)\cdot\mathbb{P}(S_1=2,M=3)$$
$$+\mathbb{P}(S_2=1|S_1=3,M=2)\cdot\mathbb{P}(S_1=3,M=2)$$
$$+\mathbb{P}(S_2=1|S_1=2,M=2)\cdot\mathbb{P}(S_1=2,M=2)$$
$$+\mathbb{P}(S_2=1|S_1=3,M=3)\cdot\mathbb{P}(S_1=3,M=3)$$
$$=1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

2.2 A18

Die Ereignisse $W_1, \ldots, W_6$ seien definiert durch

$$W_i = \text{"i wird geworfen"}$$

$$A = \text{"im ersten Zug wird eine rote Kugel gezogen"}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A|W_i) = \begin{cases} \frac{r-i}{r+s}, & i \text{ gerade} \\ \frac{r+i}{r+s}, & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$= \frac{r-(-1)^i i}{r+s}, i = 1, \ldots, 6$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A|W_i) \cdot \mathbb{P}(W_i)$$

$$= \frac{2r-1}{2(r+s)}$$

$$B = \text{"im zweiten Zug wird eine rote Kugel gezogen"}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{2r-1}{2(r+s)}$$

und

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \text{ (Ziehen mit Zurücklegen)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \left(\frac{2r-1}{2(r+s)}\right)^2$$

die Wkt, dass beide gezogenen Kugeln rot sind.

$$C = \text{"im 2. Zug wird schwarz gezogen"}$$

$$\Rightarrow C = B^c$$

d.h. A und C^c sind unabhängig.

$$\Rightarrow A \text{ und } C \text{ sind unabhängig}$$

2.3 A19

$$G_k = \text{"}I_k \text{ wurde gesendet"}$$
$$E_k = \text{"}I_k \text{ wurde empfangen"}$$

1.

$$\mathbb{P}(\text{"es wird eine Information empfangen, die nicht gesendet wurde"})$$
$$= \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(E_k^c|_k) \cdot \mathbb{P}(G_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(G_k^c|E_k) \cdot \mathbb{P}(E_k)$$
$$\mathbb{P}(E_k^c|G_k) = 1 - \mathbb{P}(E_k|G_k) = \frac{k}{k+1}$$
$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow p = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{30+40+45+48}{60}\right) = \frac{163}{240} \approx 68\%$$

2.

$$\mathbb{P}(G_k|E_k)$$
$$= \frac{\mathbb{P}(G_k, E_k)}{\mathbb{P}(E_k)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} \mathbb{P}(G_k, E_k|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i)}{\sum\limits_{k=1}^{4} \mathbb{P}(E_k|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(E_k|G_k)\mathbb{P}(G_k)}{\sum\limits_{i=1}^{4} \mathbb{P}(E_k|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i)}$$
$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k+1}}{\sum\limits_{i \neq k, i=1,\ldots,4} \mathbb{P}(E_k|G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i) + \mathbb{P}(E_k|G_i)\mathbb{P}(G_k)}$$
$$= \frac{\frac{1}{4(k+1)}}{\sum\limits_{i \neq k} \frac{i}{3(i+1)} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{4}}$$

d.h.

$$\mathbb{P}(G_1|E_1) = \frac{\frac{1}{4\cdot 2}}{(\frac{3}{9}+\frac{3}{12}+\frac{4}{15})\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{12}+\frac{4}{15}} = \frac{90}{223} \approx 40,4\%$$

analog ergibt sich

$$\mathbb{P}(G_2|E_2) = \frac{20}{61}$$
$$\mathbb{P}(G_3|E_3) = \frac{45}{163}$$
$$\mathbb{P}(G_4|E_4) = \frac{36}{151}$$

2.4 A20

$X_1, X_2 \overset{u.i.v.}{\sim} U(\{-1,1\})$

$$Z := X_1 X_2$$

1.

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = -1)$$
$$= \mathbb{P}(X_1 = 1)\cdot\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\cdot\mathbb{P}(X_2 = -1)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Z=-1) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Z=1, X_1=1) = \mathbb{P}(X_1X_2 = 1, X_1 = 1)$$
$$= \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1) = \frac{1}{4}$$
$$= \mathbb{P}(Z=1)\cdot\mathbb{P}(X_1=1)$$

analog $\mathbb{P}(Z=-1, X_1=1) = \mathbb{P}(Z=-1)\mathbb{P}(X_1=-1)$

$$\mathbb{P}(Z=1, X_1=-1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Z=1)\mathbb{P}(X_1=-1)$$
$$\mathbb{P}(Z=-1, X_1=-1) = \mathbb{P}(Z=-1)\cdot\mathbb{P}(X_1=-1)$$
$$\Rightarrow Z \text{ und } X_1 \text{ sind unabhängig.}$$

analog: Z und X_2 sind unabhängig.

2.
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, Z = 1)\\&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)\\&= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

aber $\mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow X_1, X_2 \text{ und } Z \text{ sind } \underline{\text{nicht}} \text{ unabhängig.}$$

3.
$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot Z) = \mathbb{E}(Z^2) = 1$$