Funktionentheorie - Mitschrieb -

Vorlesung im Sommersemester 2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

sarah.lutteropp@student.kit.edu, simon-bischof@t-online.de

18. April 2012

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung "Funktionentheorie" vom Sommersemester 2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Dr. Andreas Müller-Rettkowski gehalten wird.

Kapitel 0

Organisatorisches

Ausweichtermin Fr. 11:30 Uhr
Übungsblatt Dienstags auf Homepage
Übungsbetrieb auf Englisch

0 Themen der Vorlesung

Ziel der VL: Cauchy Integralsatz
$\mathbb{C}$, topologische Grundlage, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Zweite Hälfte der VL: Anwendungen: Residuensatz

Kapitel 1

Komplexe Zahlen

1 Definition der komplexen Zahlen

Definition 1.1. Eine komplexe Zahl ist ein geordnetes Paar von rellen Zahlen (x, y)
Für $z = (x, y), w = (u, v)$ gilt $(z = w) :\Leftrightarrow x = u$ und $y = v$.

Definition von $\mathbb{C}$

Exkurs: Gleichheit bei rationalen Zahlen als Tupel ganzer Zahlen
Hier ist $(1, 2) = (2, 4)$, denn $(1, 2) \hat{=} \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \hat{=} (2, 4)$.

Definition 1.2. Seien $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{C}$.

$$z + w := (x + u, y + v)$$

$$z \cdot w := (xu - yv, yu + xv)$$

Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

Exkurs Warum nicht $z \cdot w = (xu, yv)$?
$zw = 0 \Leftrightarrow z = 0$ oder $w = 0$ ist falsch!

Satz 1.1. Mit $+, \cdot$ wird $\mathbb{C}$ ein Körper.

- $0 := (0, 0)$ ist das neutrale Element für $+$
- $1 := (1, 0)$ ist das neutrale Element für $\cdot$
- Inverses zu $z = (x, y)$ bzgl. $+$: $-z := (-x, -y)$
- Inverses zu $z = (x, y)$ bzgl. $\cdot$ für $z \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 0$:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Exkurs Durch die Körperaxiome folgt:

- $z + a = b$ ist (eindeutig) lösbar.
- $az = b$ ist (eindeutig) lösbar für $a \neq 0$.

Satz 1.2. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$
- $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$

Komplexe Zahlen der Form $(x, 0)$ haben dieselben arithmetischen Eigenschaften wie die reellen Zahlen x. Deshalb werden die komplexen Zahlen $(x, 0)$ mit den reellen Zahlen x identifiziert. Ab jetzt schreiben wir $(x, 0) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)(y, 0) = x + (0, 1)y$$

Definition 1.3. $(0, 1) =: i$

Imaginäre Einheit

Satz 1.3. $i^2 = -1$

Satz 1.4. Für reelle Zahlen x, y hat man $(x, y) = x + iy \quad (= z)$

Bemerkung x, y stehen standardmäßig für reelle, z für komplexe Zahlen.

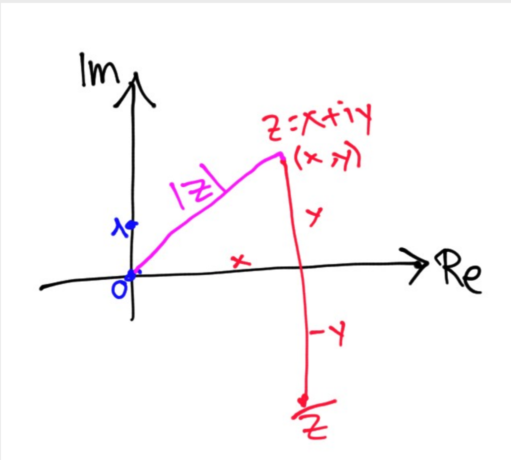
2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Definition 1.4. Zu $z = x + iy$ ist $\bar{z} = x - iy$ die konjugiert komplexe Zahl.

konjugiert komplexe

$$x = Re(z), \quad y = Im(z)$$

Beachte $Im(z) \in \mathbb{R}$!



Es gelten $(z, w \in \mathbb{C})$:

- $Re(z + w) = Re(z) + Re(w)$
- $Im(z + w) = Im(z) + Im(w)$
- Für $z = x + iy$: $x = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = y$

Satz 1.5. Seien $z, w \in \mathbb{C}$

a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

b) $\bar{\bar{z}} = z$

c) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

d) $z\bar{z} \in \mathbb{R}, z\bar{z} > 0 \Leftrightarrow z \neq 0, z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Zu d): $z = x + iy, z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

Definition 1.5. Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$ der Betrag. *Betrag*
Speziell: $z = x \in \mathbb{R} : |z| = |x| = \sqrt{x^2}$

Exkurs Beweis von $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$:

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{1\bar{w}}{w\bar{w}}\right)} = \overline{\left(\frac{\bar{w}}{|w|^2}\right)} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{1}{\bar{w}}$$

und dann Verwendung von $\overline{(\frac{z}{w})} = \overline{(z\frac{1}{w})}$

Satz 1.6. $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|\bar{z}| = |z|$

c) $|zw| = |z||w| \Rightarrow |\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$

d) $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$

e) $|z + w| \leq |z| + |w|$

f) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(\bar{z}w)$

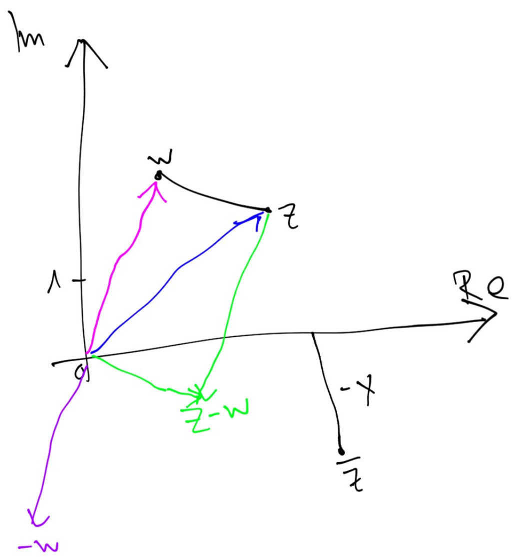
g) $|z - w|$ ist der Abstand von z zu w.

h) $|\lambda z| = |\lambda||z|, \lambda \in \mathbb{R}$

normierter Raum

Beweis. zu e) $z + w = 0$✓ Sei $z + w \neq 0$. $1 = Re\frac{z}{z+w} + Re\frac{w}{z+w} \leq \frac{|z|}{|z+w|} + \frac{|w|}{|z+w|}$
Übung: Wann gilt "="? □

Exkurs $w = u + iv$
$z = x + iy$
$z - w = (x - u) + i(y - v)$
$|z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$



Beispiel $\{z \mid |z-5| < 3\}$ ist Kreis um 5 mit Radius 3.

3 Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen

Durch $d(z,w) := |z-w|, z, w \in \mathbb{C}$ wird auf $\mathbb{C}$ eine Metrik definiert.

Definition 1.6. (z_k) sei Folge komplexer Zahlen.
(z_k) heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\lim_{k\to\infty} |z_k - a| = 0 \quad \left(\lim_{k\to\infty} z_k = a \text{ oder } z_k \to a (k \to \infty)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n : |z_k - a| < \epsilon$$

a heißt Grenzwert.

Satz 1.7. $z_k \to a \quad (k \to \infty) \Leftrightarrow Re(z_k) \to Re(a)$ und $Im(z_k) \to Im(a) \quad (k \to \infty)$
Denn: $|z_k|^2 = (Re(z_k) - Re(a))^2 + (Im(z_k) - Im(a))^2$

Definition 1.7. Die Folge (z_k) heißt Cauchy-Folge, falls *Cauchy-Folge*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k, l \geq N : \quad |z_k - z_l| < \epsilon$$

$\Rightarrow$ Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Definition 1.8. Die Folge $(z_k) \subset \mathbb{C}$ heißt beschränkt, falls es ein $R > 0$ gibt, dass $|z_k| < R \quad \forall k \in \mathbb{N}$ gilt. *Beschränktheit von Folgen*

Satz 1.8. Bolzano-Weierstraß In $\mathbb{C}$ gelten:

1) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2) Jede Cauchy-Folge ist auch konvergent ($\mathbb{C}$ ist vollständig).

Übungsaufgabe

$\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3} =: a$, gesucht: $Re(a), Im(a)$

Es ist $\overline{\left(\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}\right)} = \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$

$\Rightarrow a = 2Re\left(\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}\right)$ und $Im(a) = 0$.

$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i \Rightarrow a = 2Re((1+i)i^3) = 2Re(-i(1+i)) = 2$.