Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } r := |z| \text{ und}$$

$$\varphi = \arg(z) := \begin{cases} \operatorname{sign}(y) \arccos(\frac{x}{r}) & z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \\ \pi & z \in (-\infty, 0) \end{cases} \in (-\pi, \pi]$$

Spezielle Werte von $\arccos$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Polynomdivision Nullstelle raten, durch x minus Nullstelle teilen

p-q-Formel $x^2 + px + q = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

n-te Einheitswurzel $z^n = r \cdot e^{i\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}$ hat n Lösungen der Form

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{2\pi k + \varphi}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Generell: Darauf achten, dass der Winkel φ in $(-\pi, \pi]$ liegt! Bei n-ten Wurzeln macht es also Sinn, z in Polarkoordinaten darzustellen

Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

Gleichung für Kreis mit Zentrum a und Radius r $|z - a| = r$

Gleicher Abstand von zwei Punkten Wird ausgedrückt durch $|z - a| = |z - b|$

Stetigkeit von Funktionen

- $f(z)$ ist nicht stetig in p: Folge z_n angeben, sodass gilt $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$, $f(z_n) \nrightarrow f(p)$ für $n \to \infty$. Beliebte Folgen für $p = 0$: $1/n$, i/n, $(i+1)/n$
- $f(z)$ ist stetig in p: Zeige $f(z) \overset{z\to p}{\longrightarrow} f(p)$. Für $f(p) = 0$ bietet es sich an, zu zeigen dass $|f(z)| \overset{z\to p}{\longrightarrow} 0$.

Stereographische Projektion

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

$$p(x + iy) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \cdot (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)$$

Chordaler Abstand

$$\chi(z, w) = ||p(z) - p(w)|| = 2\frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \cdot \sqrt{1 + |w|^2}}$$

Verallgemeinerter Kreis $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}, \varepsilon\beta < |\alpha|^2, \varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$$

Für $\varepsilon = 1$ ist das die Gleichung des Kreises um $-\alpha$ mit Radius $\sqrt{|\alpha|^2 - \beta}$.
Für $\varepsilon = 0$ ist das eine Gerade.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen $u(x, y) \hat{=}$ Realteil von $f(x + iy)$, $v(x, y) \hat{=}$ Imaginärteil von $f(x + iy)$
$D_1 u = D_2 v, \quad D_2 u = -D_1 v$

Komplexe Differenzierbarkeit f ist komplex diffbar $\Leftrightarrow$ f ist reell diffbar und die Cauchy-Riemannschen DGL sind erfüllt. Dann:

$$f'(x + iy) = D_1 u(x, y) + i \cdot D_1 v(x, y)$$

Konforme Abbildung $f \in \mathcal{H}(G), f'(z) \neq 0$ heißt **konforme Abbildung**. Sie erhält Winkel in Größe und Drehsinn.

Ableitungsregeln

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f(f^{-1}(y))}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dw} z^w = \log(z) z^w$$

Integrationsregeln

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, \quad a \neq 0$$

Substitutionsregel:

1. Substituiere $u = u(x)$
2. dx ersetzen: $u' = \frac{du}{dx}$ nach dx auflösen
3. a und b durch $u(a)$ und $u(b)$ ersetzen
4. Bei unbestimmten Integralen: Danach Rücksubstitution

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u(x)) du$$

Häufungspunkt z_0 heißt Häufungspunkt von M

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in M \backslash \{z_0\} \quad z \in D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Trick mit der Dreiecksungleichung

$$|a - b| = |a - b + c - c| \leq |a - c| + |c - b|$$

Kompakte Menge Die Menge $K \subset \mathbb{C}$ heißt kompakt, falls aus jeder Folge $(z_n) \subset K$ eine Teilfolge ausgewählt werden kann, die gegen ein Element aus K konvergiert.

$$K \subset \mathbb{C} \text{ kompakt } \Leftrightarrow K \text{ beschränkt und abgeschlossen}$$

Bolzano-Weierstraß Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Unbeschränkt in Umgebung von $z \in \mathbb{C}$ Wenn eine Funktion in jeder Umgebung von z unbeschränkt ist, kann sie dort nicht differenzierbar sein.

Harmonische Funktion

$$u \in C^2(D, \mathbb{R}) \text{ harmonisch } :\Leftrightarrow \Delta u(x, y) = D_1^2 u + D_2^2 u = 0$$

Etwas über Konvergenz von Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ konvergiert } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_k) \text{ konvergiert}$$

Majorantenkriterium

$$|a_k| \leq |b_k| \forall k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ ist konvergent } \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist absolut konvergent}$$

Eine divergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ ist divergent.}$$

Trivialkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Rightarrow a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Folge, die gegen e geht

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \quad (n \to \infty)$$

Quotientenkriterium und Wurzelkriterium

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

Wenn > 1 (bei Quotientenkriterium $\liminf$): divergent

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ mit } |q| < 1 \text{ konvergiert gegen } \frac{1}{1-q}$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}|}$$

Die Folgen $\sqrt[n]{n}$, $\sqrt[n]{x}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1 \quad x \in \mathbb{R}, x > 0$$

Möbiustransformation $T\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ Möbiustransformation $\Leftrightarrow$ es gibt Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ und

$$T(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \in \mathbb{C}\setminus -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & z = \infty \\ \infty & z = -\frac{d}{c} \end{cases}$$

Wikipedia: Umkehrabbildung ist gegeben durch $\frac{dz-b}{-cz+a}$

$$T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

Möbiustransformation, die $z_1 \mapsto 0, z_2 \mapsto 1, z_3 \mapsto \infty$ abbildet.

$$T(z) = \begin{cases} \frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} & (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C} \\ \frac{z_2-z_3}{z-z_3} & z_1 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_3} & z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1} & z_3 = \infty \end{cases}$$

Doppelverhältnis (z, z_1, z_2, z_3)

Es gilt: $(z, z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}, z_i$ paarweise verschieden$, S$ Möbiustransformation$)$:

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3))$$

Möbiustransformationen und Kreise $T\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ Möbiustransformation.

- T bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.
- da T stetig, werden zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abgebildet.
- G offen: $T(G) \cap T(\partial G) = \emptyset$
- T ist holomorph und bijektiv.
- Falls T $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ abbildet, gilt $\overline{T(z)} = T(\overline{z})$.
- T ist symmetrieerhaltend, winkel-, orientierungs- und gebietstreu.
- T hat mehr als 2 Fixpunkte $\Rightarrow T = id$

Was zu Unendlichkeiten ...

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Es gibt also kein $-\infty$ in $\widehat{\mathbb{C}}$!!!
∞ liegt auf keinem Kreis und auf jeder Geraden.

Spiegeln an verallgemeinerten Kreisen z_1, z_2, z_3 auf verallgemeinertem Kreis K. Spiegelung von z an K:

$$(\varrho_K(z), z_1, z_3, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$$

L Gerade mit $z(t) = a + te^{i\varphi}, a \in \mathbb{C}, \varphi \in \mathbb{R}$ fest. Dann:

$$\varrho_L(z) = e^{2i\varphi}(\overline{z} - \overline{a}) + a$$

An Kreis K um a mit Radius R:

$$\varrho_K(z) = a + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}$$

Hauptzweig des Logarithmus

$$\log(z) = \ln(|z|) + i \cdot \arg(z), \quad -\pi < \arg(z) < \pi, \quad z \neq 0$$

ist auf $E_{-\pi} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definiert.
Warnung: das Logarithmusgesetz gilt i.A. nicht!

$$\log(a \cdot b) \neq \log(a) + \log(b), \text{ falls } |arg(a) + arg(b)| \geq \pi$$

Potenzen

$$a^b = e^{b \log(a)}, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

Einige Reihendarstellungen

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad |z-1| < 1 \quad \text{(Hauptzweig)}$$

Nette Funktionen, die man kennen sollte Einheitskreis: $f(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(t) = c + r \cdot e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \text{Kreislinie um c mit Radius r}$$

Ableitung: $i \cdot r \cdot e^{it}$

$$\gamma(t) = w + t(z - w), \quad t \in [0, 1] \qquad \text{Verbindungsstrecke von w nach z}$$

$$\hat{\gamma}(t) = \gamma(b - t + a), \quad t \in [a, b] \qquad \text{Rückwärtsweg}$$

Kurvenintegral $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar.

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t)$$

Standardabschätzung für Wegintegrale

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq l(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)|$$

Bogenlänge $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar.

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Integration über Summe von Wegen

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$$

Integral über Rückwärtsweg

$$\int\limits_{-\gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)dz$$

Cauchy Integralsatz für sternförmige Gebiete Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein *sternförmiges* Gebiet, $f \in H(D)$ und $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Insbesondere besitzt f eine Stammfunktion auf D.

Cauchy Integralformel für sternförmige Gebiete Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein *sternförmiges* Gebiet, $f \in H(D)$ und $\Gamma \subseteq D$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt

$$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D \backslash \Gamma.$$

Insbesondere für $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Cauchy Integralformel / Integralsatz Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \subseteq D$ geschlossene Kurven mit $\sum\limits_{j=1}^m n(\Gamma_j; w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \backslash D$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^m n(\Gamma_j; z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D \backslash \bigcup_j \Gamma_j.$$

und $\sum\limits_{j=1}^m \int\limits_{\Gamma_j} f(z)dz = 0$.

Cauchy Integralformel für Kreisringe um 0

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \text{ im Kreisring}$$

Windungszahl $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ geschlossene Kurve und $z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma$.

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w-z}$$

Cauchyprodukt allgemein $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^\infty b_n$ absolut konvergent.

$$\left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^\infty b_n\right) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Cauchyprodukt von Potenzreihen

$$\left(\sum_{n=0}^\infty a_n (x-x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^\infty b_n (x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) (x-x_0)^n$$

Ableitung einer Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}(z-z_0)^n$$

dran denken: $0^0 = 1$

Entwicklungssatz $z_0 \in \mathbb{C}, A = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-z_0| < R_2\}, f \in \mathcal{H}(A), z \in A, r$ beliebig mit $R_1 < r < R_2, n \in \mathbb{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

$$f^{(n)}(z) = n! \cdot a_n \quad n \in \mathbb{N}_0$$

c-Stelle G Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G), f \neq$ konst.

$$z_0 \textbf{ c-Stelle der Ordnung m } :\Leftrightarrow f(z_0) = c, f^{(j)}(z_0) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m-1), f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Identitätssatz G Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G), z_0 \in G$. Aus $f(z) = 0$ für unendlich viele sich in z_0 häufende Punkte $z \in G$ folgt $f \equiv 0$ in G.

Cauchy- Abschätzung $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ mit $M(r) := \max\limits_{z \in \partial B(z_0;r)} |f(z)|$

Satz von Liouville Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Parsevalsche Formel $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(z_0 + r \cdot e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$

Maximumsprinzip Es sei G ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G)$, $f \neq$ konst. Dann nimmt $|f|$ in G kein Maximum an. Alternative Formulierung: $G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G) \cap C(\overline{G})$. Dann $|f(z)| \leq \max\limits_{\xi \in \partial G} f(\xi)$ für $z \in G$. "="nur wenn f konstant.

Gebietstreue Es sei $G \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(G)$ und $f \neq$ konst. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.

Schwarzsches Lemma Es bezeichne $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Sei $f\colon D \to D$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z| \; \forall z \in D$ und $|f'(0)| \leq 1$. Falls in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{D}, z_0 \neq 0$ die Gleichheit $|f(z_0)| = |z_0|$ besteht oder $|f'(0)| = 1$ gilt, so ist $f(z) = e^{i\lambda} \cdot z$ für ein passendes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Folgerung für biholomorphe Abbildungen $f\colon D \to D$ Es sei $a \in D$ und $f \in \mathcal{H}(D)$ mit $|f(z)| \leq 1, z \in D$. Es gilt:

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

Satz von Morera Es sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für jedes in U gelegene abgeschlossene Dreieck Δ verschwinde das Kurvenintegral über die Randkurve des Dreiecks, d.h. $\oint_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$. Dann ist f holomorph auf U.

Lemma von Goursat G Gebiet, $p \in G$, $f \in \mathcal{H}(G \backslash \{p\}) \cap C(G)$. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck Δ in G: $\int\limits_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$

Rechnen mit komplexen Zahlen

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad z\overline{z} = |z|^2$$

$$|e^{i\phi}| = 1, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\text{Re}(\overline{z}w)$$

Rechnen mit Beträgen

$$|a| < |b| \Leftrightarrow |a|^2 < |b|^2$$

isolierte Singularität Die Funktion f sei holomorph auf einer punktierten Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt z_0 **isolierte Singularität** von f.

Riemannscher Hebbarkeitssatz Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und z_0 ein Punkt von G. Die Funktion f sei auf $G\backslash\{z_0\}$ holomorph und bei z_0 beschränkt, d.h. $\exists$ Umgebung $U \subset G$ von $z_0, M \in \mathbb{R}$: $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in U\backslash\{z_0\}$. Dann lässt sich f eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf ganz G fortsetzen (mit $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$).

z_0 heißt dann **hebbare Singularität** von f.

Polstelle, wesentliche Singularität Es sei z_0 eine isolierte Singularität von f.

1. Wenn $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$ gilt, heißt z_0 **Pol(stelle)** von f

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) \text{ ex. und k minimal } \Rightarrow \textbf{ Pol k-ter Ordnung}$$

2. Ist z_0 weder hebbare Singularität noch Polstelle von f, so heißt z_0 **wesentliche Singularität** von f.

   Eine wesentliche Singularität liegt also genau dann vor, wenn es Folgen z_n, z'_n im Definitionsbereich von f gibt mit $z_n \to z_0, z'_n \to z_0$, so dass $f(z_n)$ eine beschränkte und $f(z'_n)$ eine unbeschränkte Folge ist.

Singularitäten aus Laurentreihe bestimmen z_0 isolierte Singularität, f holomorph auf einer punktierten Kreisscheibe um z_0. Liegt in z_0 ein **Pol n-ter Ordnung** vor, so ist der kleinste Grad der Laurentreihe gerade $-n$, d.h. der Hauptteil der Laurentreihe besteht aus genau n Partialsummen; Liegt in z_0 eine **hebbare Singularität**, so ist der Hauptteil gleich 0; Liegt in z_0 eine **wesentliche Singularität**, so besteht der Hauptteil aus unendlich vielen Partialsummen.

Laurentreihenentwicklung Trick: $\frac{1}{z^2} \overset{\text{Aufleiten}}{\rightarrow} -\frac{1}{z} \overset{\text{Entwickeln}}{\rightarrow} \ldots \overset{\text{Ableiten}}{\rightarrow} \ldots$ nicht bei Logarithmus in der Aufleitung

Partialbruchzerlegung

1. Polynomdivision machen, damit Grad(Zähler) $\leq$ Grad(Nenner)
2. vom Restbruch R die Nullstellen mit Vielfachheiten des Nenners ermitteln (beachte: auch das komplex konjugierte ist Nullstelle)
3. Der Rest ist straight-forward. Bsp.: Der Nenner habe die NST c_1 mit Vielfachheit 1 und die NST c_2 mit Vielfachheit 2. Dann ist der Ansatz:
$$R(z) = \frac{a}{(z-c_1)} + \frac{b}{(z-c_1)^2} + \frac{c}{(z-c_2)}$$
4. Auflösen (mit Hauptnenner multiplizieren) und dann Koeffizientenvergleich.

Formel von Simon:
$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)\frac{1}{a-b}$$

Rechenregeln Sinus und Kosinus $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha), \quad \sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$$

sinh und cosh $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Satz von Rouche Es seien f und g holomorph in einer Umgebung von $\overline{G}$, wobei G ein positiv berandetes Gebiet ist. Auf ∂G gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Dann haben f und g gleichviele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) in G.

Nullstelle N-ter Ordnung $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(N-1)}(z_0) = 0, f^{(N)}(z_0) \neq 0$ Nullstelle N-ter Ordnung

Bestimmung von Residuen

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, A(z_0) \neq 0, B(z_0) = 0, B'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}$$

Hat f in z_0 Polstelle k-ter Ordnung $\Rightarrow \operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} D^{k-1} \left((z - z_0)^k \cdot f(z) \right)$ Hat f in z_0 eine Nullstelle N-ter Ordnung ("Polstelle N-ter Ordnung $\hat{=}$ Nullstelle $-N$-ter Ordnung") $\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0 \right) = N$

Residuensatz $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(G \backslash \{a_1, \ldots, a_m\}), \Gamma$ geschlossener Weg in G mit $a_j \notin |\Gamma|, j = 1, \ldots, m$ und $n(\Gamma, w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \backslash G$. Dann gilt

$$\int\limits_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m n(\Gamma; a_j) \cdot \operatorname{Res}(f; a_j)$$

Reelle Integrale $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, p, q Polynome mit Grad(q)-Grad(p) ≥ 2, q hat keine reellen Nullstellen, $z_1, \ldots, z_m$ Polstellen von f in der oberen Halbebene. Dann:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(f; z_j)$$

$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, p, q Polynome mit Grad(q)-Grad(p) ≥ 1, f keine reellen Polstellen außer vllt. in 0 Polstelle 1. Ordnung, $z_1, \ldots, z_m$ Polstellen von f in der oberen Halbebene. Dann:

$$\mathrm{CH} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = \pi i \cdot \operatorname{Res}(f; 0) + 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(f(z) e^{iz}; z_j)$$