Funktionentheorie - Mitschrieb -

Vorlesung im Sommersemester 2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

sarah.lutteropp@student.kit.edu, simon-bischof@t-online.de

16. April 2012

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesung "Funktionentheorie" vom Sommersemester 2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Herrn Dr. Andreas Müller-Rettkowski gehalten wird.

Kapitel 0

Organisatorisches

Ausweichtermin Fr. 11:30 Uhr
Übungsblatt Dienstags auf Homepage
Übungsbetrieb auf Englisch

0 Themen der Vorlesung

Ziel der VL: Cauchy Integralsatz
$\mathbb{C}$, topologische Grundlage, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Zweite Hälfte der VL: Anwendungen: Residuensatz

Kapitel 1

Komplexe Zahlen

1 Definition der komplexen Zahlen

Definition 1.1. Eine komplexe Zahl ist ein geordnetes Paar von rellen Zahlen (x, y)
Für $z = (x, y), w = (u, v)$ gilt $(z = w) \Leftrightarrow x = u$ und $y = v$.

Definition von $\mathbb{C}$

Definition 1.2. Seien $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{C}$.

$$z + w := (x + u, y + v)$$

$$z \cdot w := (xu - yv, yu + xv)$$

Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

Exkurs Warum nicht $z \cdot w = (xu, yv)$?
$zw = 0 \Leftrightarrow z = 0$ oder $w = 0$ ist falsch!

Satz 1.1. Mit $+, \cdot$ wird $\mathbb{C}$ ein Körper.

- $0 := (0, 0)$ ist das neutrale Element für $+$
- $1 := (1, 0)$ ist das neutrale Element für $\cdot$
- Inverses zu $z = (x, y)$ bzgl. $+$: $-z := (-x, -y)$
- Inverses zu $z = (x, y)$ bzgl. $\cdot$ für $z \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 0$:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Exkurs Durch die Körperaxiome folgt:

- $z + a = b$ ist lösbar.
- $az = b$ ist lösbar für $a \neq 0$.

Satz 1.2. $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$
- $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$

Komplexe Zahlen der Form $(x, 0)$ haben dieselben arithmetischen Eigenschaften wie die reellen Zahlen x. Deshalb werden die komplexen Zahlen $(x, 0)$ mit den reellen Zahlen x identifiziert. Ab jetzt schreiben wir $(x, 0) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)(y, 0) = x + (0, 1)y$$

Definition 1.3. $(0,1) =: i$

Imaginäre Einheit

Satz 1.3. $i^2 = -1$

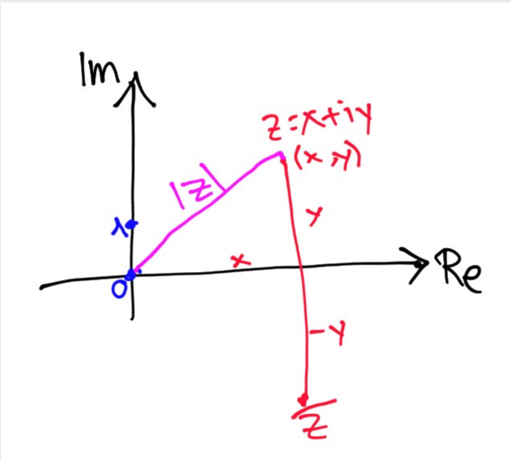
Satz 1.4. Für reelle Zahlen x, y hat man $(x,y) = x + iy \quad (= z)$

2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Definition 1.4. Zu $z = x + iy$ ist $\bar{z} = x - iy$ die konjugiert komplexe Zahl.

konjugiert komplexe

$$x = Re(z), \quad y = Im(z)$$



Es gelten ($z, w \in \mathbb{C}$):

- $Re(z + w) = Re(z) + Re(w)$
- $Im(z + w) = Im(z) + Im(w)$
- $x = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = y$

Satz 1.5. $z, w \in \mathbb{C}$

a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

b) $\bar{\bar{z}} = z$

c) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

d) $z\bar{z} \in \mathbb{R}, z\bar{z} > 0 \Leftrightarrow z \neq 0, z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Zu d): $z = x + iy, z\bar{z} = x^2 + y^2 =: (z)^2$

Definition 1.5. Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ der Betrag.
Speziell: $z = x \in \mathbb{R} : |z| = |x| = \sqrt{x^2}$

Betrag

Exkurs Beweis von $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$:

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{1\bar{w}}{w\bar{w}}\right)} = \overline{\left(\frac{\bar{w}}{|w|^2}\right)} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{1}{\bar{w}}$$

mit Verwendung von $\overline{(\frac{z}{w})} = \overline{\left(z\frac{1}{w}\right)}$

Satz 1.6. $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $|z| \geq 0$ und $= 0$ nur für $z = 0$

b) $|\bar{z}| = |z|$

c) $|zw| = |z||w| \Rightarrow |\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$

d) $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$

e) $|z + w| \leq |z| + |w|$

f) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re\bar{z}w$

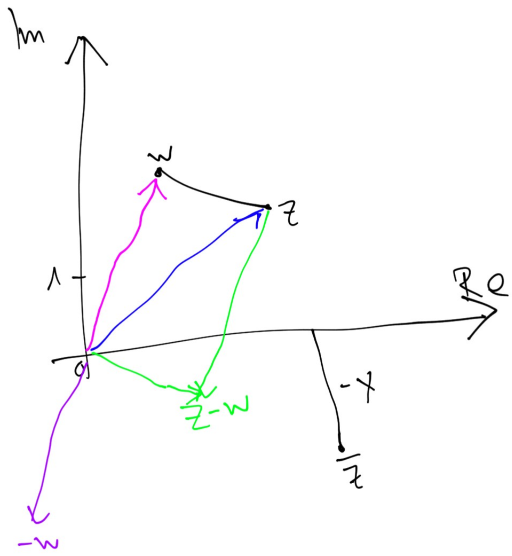
g) $|z - w|$ ist der Abstand von z zu w.

h) $|\lambda z| = |\lambda||z|, \lambda \in \mathbb{R}$

normierter Raum

Beweis. zu e) $z + w = 0\checkmark$ Sei $z + w \neq 0$. $1 = Re\frac{z}{z+w} + Re\frac{w}{z+w} \leq \frac{|z|}{|z+w|} + \frac{|w|}{|z+w|}$
Übung: Wann gilt "="? □

Exkurs $w = u + iv$
$z = x + iy$
$z - w = (x - u) + i(y - v)$
$|z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$



$\{z \mid |z - 5| < 3\}$

3 Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen

Durch $d(z, w) := |z - w|, z, w \in \mathbb{C}$ wird auf $\mathbb{C}$ eine <u>Metrik</u> definiert.