

# Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Übung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

12. Februar 2012



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>24.10.2011</b>	<b>3</b>
1.1	Induzierte Topologie . . . . .	3
1.2	Offen und abgeschlossen . . . . .	3
1.3	Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie . . . . .	4
1.4	Teilraumtopologie . . . . .	4
1.5	Homotopieäquivalenz . . . . .	4
<b>2</b>	<b>31.10.2011</b>	<b>6</b>
2.1	Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie . . . . .	6
2.2	Homöomorphismen . . . . .	7
2.3	Die Peano-Kurve . . . . .	8
<b>3</b>	<b>07.11.2011</b>	<b>9</b>
3.1	Nachträge und Wiederholungen zur Vorlesung . . . . .	9
<b>4</b>	<b>14.11.2011</b>	<b>13</b>
4.1	Beispiele für Beweise im Kontext von Hausdorffräumen . . . . .	13
4.2	Beispiele für Mannigfaltigkeiten . . . . .	13
<b>5</b>	<b>21.11.11</b>	<b>17</b>
5.1	Untermannigfaltigkeiten . . . . .	17
5.2	Wichtige Spezialfälle (und Beispiele) von Untermannigfaltig- keiten . . . . .	18
<b>6</b>	<b>05.12.2011</b>	<b>22</b>
6.1	Homotopieäquivalenzen . . . . .	22
6.2	Beispiele zu Homotopien . . . . .	23
6.3	Kontrahierbarkeit . . . . .	24
6.4	Deformationsretrakte . . . . .	25
<b>7</b>	<b>12.12.2011</b>	<b>26</b>
7.1	Anwendungen zu Sätzen aus der Vorlesung . . . . .	26
7.2	Homotopien und Fundamentalgruppe . . . . .	26

<b>8</b>	<b>19.12.2011</b>	<b>30</b>
8.1	Überlagerungen und Liftungen . . . . .	30
8.2	Folgerungen aus dem Satz über das Hochheben von Homotopien	31
<b>9</b>	<b>09.01.2012</b>	<b>34</b>
9.1	Überlagerungen und Decktransformationen . . . . .	34
9.2	Einschub Gruppenoperationen . . . . .	35
<b>10</b>	<b>23.01.2012</b>	<b>39</b>
10.1	Geometrie von Flächen . . . . .	39
<b>11</b>	<b>30.01.2012</b>	<b>42</b>
11.1	Nachtrag zur Topologie von Flächen . . . . .	42
11.2	Berechnung des Flächeninhalts der Sphäre $S^2$ . . . . .	44
<b>12</b>	<b>06.02.2012</b>	<b>46</b>
12.1	Anwendungen und Folgerungen der lokalen Version des Satzes von Gauß und Bonnet . . . . .	46

## Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Frau Dipl.-Math. Sandra Lenz gehalten wird.

# Kapitel 1

24.10.2011

## 1.1 Induzierte Topologie

**Definition 1.1** (Induzierte Topologie). Sei  $X$  eine Menge. Sei  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik. Diese Metrik  $d$  definiert durch folgende Bedingung eine Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ :

$O \subseteq X$  ist genau dann offen (d.h.  $O \in \mathcal{O}_d$ ), wenn für alle  $x \in O$  ein  $\epsilon > 0$  existiert mit

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

( $B_\epsilon$  nennt man offenen  $\epsilon$ -Ball.)

## 1.2 Offen und abgeschlossen

Sei  $X$  eine Menge.

- Mengen können sowohl offen als auch abgeschlossen (zugleich) sein.

**Beispiel 1.1.** Betrachte  $\emptyset$  und  $X$  in der trivialen Topologie  $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$ .

Es gilt:  $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$  nach Definition, d.h.  $X$  und  $\emptyset$  sind offen.

Außerdem gilt:  $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$ , ebenso:  $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$ , d.h. die Komplemente von  $X$  und  $\emptyset$  sind offen und somit  $X$  und  $\emptyset$  abgeschlossen.

- Mengen können weder offen noch abgeschlossen sein.

**Beispiel 1.2.** Betrachte  $\mathbb{R}$  mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie. Es ist  $[0, 1[$  nicht offen in dieser Topologie, denn für den Punkt 0 finden wir kein  $\epsilon > 0$ , so dass  $B_\epsilon(0)$  in  $[0, 1[$  liegt. Die Menge  $[0, 1[$  ist aber auch nicht abgeschlossen, da ihr Komplement  $\mathbb{R} \setminus [0, 1[ = ]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$  nicht offen ist.

- Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen müssen nicht notwendigerweise offen sein.

**Beispiel 1.3.** Betrachte  $\mathbb{R}$  mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie.

Definiere  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

Es gilt für die in  $\mathbb{R}$  offene Menge  $] - 1, 1[$ :

$f(] - 1, 1[) = [0, 1[$  und  $[0, 1[$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}$ .

### 1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

### 1.4 Teilraumtopologie

Es sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$ .

Die Teilraumtopologie (oder Spurtopologie) ist definiert durch

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

**Satz 1.1.** In der Tat definiert  $\mathcal{O}|_A$  eine Topologie auf  $A$ .

*Beweis.* • z.z.: Für jede Indexmenge  $I$  gilt:  $\forall i \in I: O_i \in \mathcal{O}|_A \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}|_A$ .

Sei  $I$  beliebige Indexmenge. Für alle  $i \in I$  mit  $O_i \in \mathcal{O}|_A$  gilt: Es existieren  $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$  mit  $O_i = \mathcal{U}_i \cap A$ . Es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = (\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i) \cap A \in \mathcal{O}|_A$$

(da  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$ ).

• z.z.:  $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}|_A: O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}|_A$ .

Seien  $O_1, O_2 \in \mathcal{O}|_A$ . Dann ex.  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$  mit  $O_i = \mathcal{U}_i \cap A, i \in \{1, 2\}$ . Es gilt:  $O_1 \cap O_2 = (\mathcal{U}_1 \cap A) \cap (\mathcal{U}_2 \cap A) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap A \in \mathcal{O}|_A$ , da  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ .

• z.z.:  $A, \emptyset \in \mathcal{O}|_A$ .

Es gilt:  $A = X \cap A \in \mathcal{O}|_A$ , da  $X \in \mathcal{O}$  nach Definition von  $\mathcal{O}$ .

Es gilt:  $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}|_A$ , da  $\emptyset \in \mathcal{O}$  nach Definition von  $\mathcal{O}$ . □

### 1.5 Homotopieäquivalenz

**Definition 1.2** (homotopieäquivalent). Seien  $X, Y$  topologische Räume.  $X$  heißt homotopieäquivalent zu  $Y$ , falls es stetige Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $f \circ g \simeq id_Y$  und  $g \circ f \simeq id_X$ .

**Satz 1.2.**  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist homotopieäquivalent zur Sphäre  $S^{n-1}$ .

*Beweis.* Sei  $f: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \mapsto x$  (Inklusionsabbildung). Dann ist  $f$  stetig.

Sei weiter  $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ . Dann ist auch  $g$  stetig und es gilt:  $g \circ f = id_{S^{n-1}}$ , also insbesondere  $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$ .

Für  $f \circ g$  betrachte folgende Abbildung:

$$H: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (x, t) \mapsto (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + t \cdot x$$

Dann ist  $H$  stetig und es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ :

$$H(x, 1) = x = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x)$$

$$H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = (f \circ g)(x)$$

Dann ist  $H$  Homotopie von  $f \circ g$  nach  $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$  (in Zeichen:  $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ ).

□

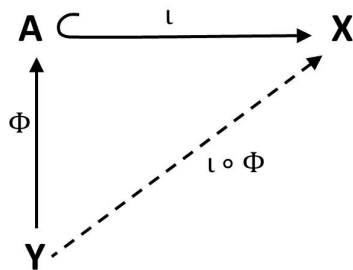
# Kapitel 2

31.10.2011

## 2.1 Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie

Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  versehen mit der Teilraumtopologie  $\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$ . Weiter sei  $\iota: A \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildung und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  ein weiterer topologischer Raum.

**Satz 2.1.** Behauptung Eine Abbildung  $\phi: Y \rightarrow A$  ist genau dann stetig, wenn die Komposition  $\iota \circ \phi: Y \rightarrow X$  stetig ist.



*Beweis.* '⇒': Es sei  $\phi: Y \rightarrow A$  stetig. [z.z.:  $\iota \circ \phi$  ist stetig, d.h.  $\forall O \in \mathcal{O}_X: (\iota \circ \phi)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$ ]

Sei  $O \in \mathcal{O}_X$ . Dann gilt  $(\iota \circ \phi)^{-1}(O) = \phi^{-1}(\iota^{-1}(O))$  und es ist  $\iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$ , da  $\iota$  stetig ist.

Es gilt somit  $\phi^{-1}(\iota^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_Y$ , da  $\phi$  stetig ist (nach Voraussetzung).

'⇐': Es sei  $\phi: Y \rightarrow A$  eine Abbildung, so dass  $\iota \circ \phi: Y \rightarrow X$  stetig ist. [z.z.:  $\phi$  ist stetig, d.h.  $\forall O \in \mathcal{O}_A: \phi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$ .]

Sei also  $O \in \mathcal{O}_A$ . Dann existiert  $O' \in \mathcal{O}_X$ , so dass  $O = O' \cap A$ . Es gilt:  $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O$ .

$\phi^{-1}(O) = \phi^{-1}(O' \cap A) = \phi^{-1}(\iota^{-1}(O')) = (\iota \circ \phi)^{-1}(O') \in \mathcal{O}_Y$ , da  $\iota \circ \phi$  stetig (nach Voraussetzung). □

**Bemerkung 2.1.** (Bemerkung in der Vorlesung)

Die Teilraumtopologie ist die grösste Topologie, bezüglich der die Inklusionsabbildung  $\iota: A \hookrightarrow X$  stetig ist.

*Beweis.* Stetigkeit der Inklusionsabbildung: [z.z.:  $\forall O \in \mathcal{O}_X: \iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$ ]  
Sei  $O \in \mathcal{O}_X$ . Dann gilt  $\iota^{-1}(O) = O \cap A \in \mathcal{O}_A$ .  $\square$

*Beweis.* Nichtstetigkeit in grösseren Topologien: [z.z.:  $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O' \in \mathcal{O}_X: \iota^{-1}(O') \notin \tilde{\mathcal{O}}$ ]

Sei  $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}_A: O \notin \tilde{\mathcal{O}}$ . Dann  $\exists O' \in \mathcal{O}_X: O = O' \cap A$ . Damit ist aber  $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O \notin \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \iota: (A, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  ist nicht stetig.  $\square$

**2.2 Homöomorphismen**

Zeigen Sie, dass für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  das Intervall  $(a, b)$  homöomorph zum Intervall  $(0, 1)$  ist, sowie dass  $(0, 1)$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}$ .

Definiere  $f: (a, b) \rightarrow (0, 1), x \mapsto \frac{a-x}{a-b}$ , und  $g: (0, 1) \rightarrow (a, b), x \mapsto (1-x) \cdot a + x \cdot b$ .

Es gilt für alle  $x \in (a, b)$ :

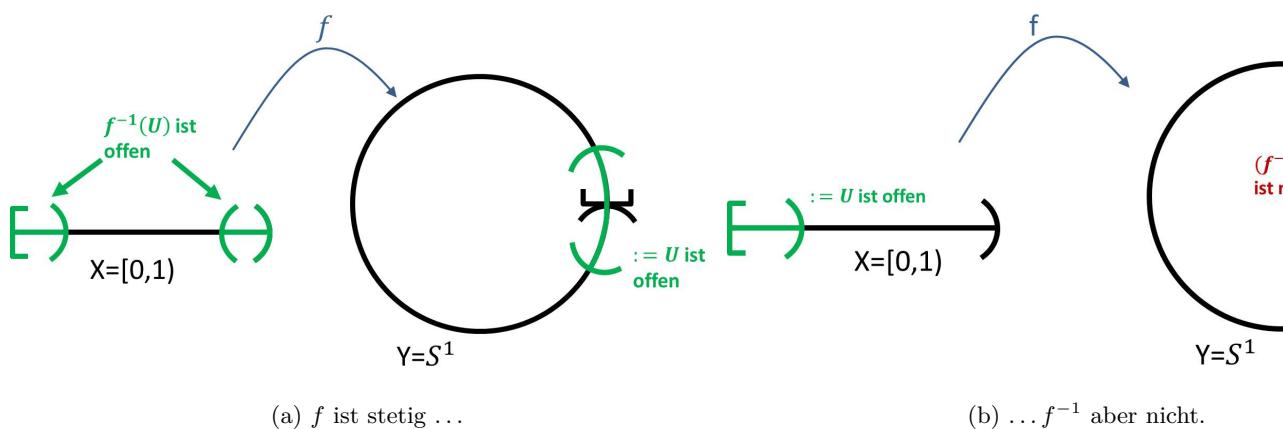
$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{a-x}{a-b}\right) = \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right)a + \frac{a-x}{a-b}b = \left(\frac{a-b-a+x}{a-b}\right)a + \frac{a-x}{a-b}b = \frac{x-b}{a-b}a + \frac{a-x}{a-b}b = \frac{ax-ab+ab-bx}{a-b} = x.$$

Es gilt für alle  $x \in (0, 1)$ :

$$(f \circ g)(x) = f((1-x) \cdot a + x \cdot b) = \frac{a - ((1-x)a + bx)}{a-b} = \frac{a-a+ax-bx}{a-b} = x. \text{ Somit ist } f \text{ bijektiv. Da } f \text{ und } g = f^{-1} \text{ stetig sind, gilt damit: } f \text{ ist ein Homöomorphismus, d.h. } (a, b) \equiv (0, 1).$$

Definiere  $h: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left((x - \frac{1}{2})\pi\right)$ .

$f: [0, 1) \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} (= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$  ist kein Homöomorphismus (da die Umkehrabbildung nicht stetig ist).





## 2.3 Die Peano-Kurve

(Guiseppe Peano,  $\sim 1890$ )

**Satz 2.2.** Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung  $I = [0, 1] \rightarrow I \times I$ .

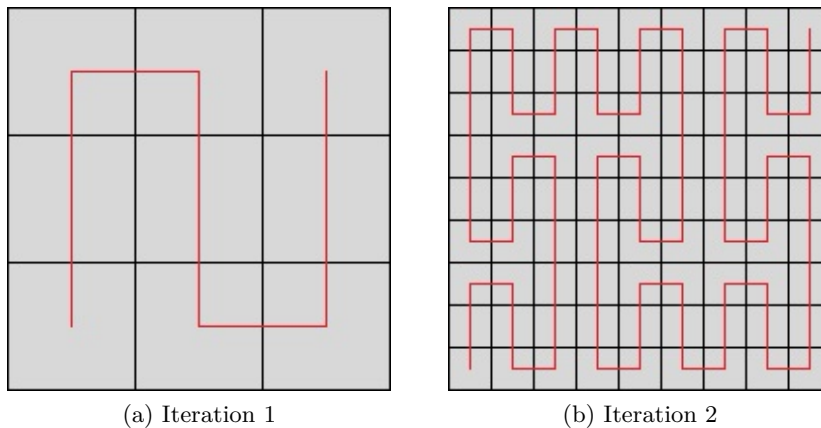


Abbildung 2.1: Prinzip der Peano-Kurve

### Verallgemeinerung

- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung  $I \rightarrow I^n = I \times I \times \dots \times I$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

#### 2.3.1 Zugang mit Hilfe der Cantor-Menge $\mathcal{C}$

Definiere  $f: \mathcal{C} \rightarrow I$ ,  $f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$  für  $a_i \in \{0, 2\}$ .

Dann ist  $f$  surjektiv und stetig.

Definiere  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ,  $g\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i}}{3^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i+1}}{3^i}\right) =: (g_1, g_2)$  für  $a_i \in \{0, 2\}$ .

Dann ist  $g$  surjektiv und stetig.

Es ist auch  $h: \mathcal{C} \rightarrow I \times I$ ,  $x \mapsto (f(g_1(x)), f(g_2(x)))$  surjektiv und stetig.

Setze die Abbildung  $h$  durch lineare Fortsetzungen stetig auf  $I$  fort.

# Kapitel 3

07.11.2011

## 3.1 Nachträge und Wiederholungen zur Vorlesung

### 3.1.1 Überdeckung, Teilüberdeckung und Kompaktheit

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

**Definition 3.1** (Überdeckung, kompakt). • Eine Familie  $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$  von Teilmengen von  $X$  heißt Überdeckung von  $X$ , falls gilt:  $X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$ .

- Eine Überdeckung heißt offen (bzw. abgeschlossen), falls alle  $\mathcal{U}_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) offen (bzw. abgeschlossen) sind.
- Es heißt  $X$  kompakt, falls jede offene Überdeckung  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha, \alpha \in A\}$  eine endliche Teilüberdeckung  $\mathcal{U}'$  besitzt, d.h. es existiert  $A' \subset A$  endlich, so dass  $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A'\}$  eine offene Überdeckung von  $X$  ist.

**Beispiel 3.1.** • Endliche Räume und mit der trivialen Topologie versehene Räume sind kompakt.

- Diskrete Räume sind genau dann kompakt, wenn sie aus endlich vielen Elementen bestehen.
- $\mathbb{R}$  (versehen mit der Standardtopologie) ist nicht kompakt,  $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$  schon. ( $\mathcal{T}_1 = \{\mathbb{R} \setminus E \mid E \text{ endliche Teilmenge von } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ )

**Definition 3.2** (kompakte Menge). Eine kompakte Menge ist eine Teilmenge eines vom Kontext her klaren topologischen Raumes, die bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.

**Beispiel 3.2.**  $[0, 1) (\subseteq \mathbb{R})$  ist nicht kompakt, denn: Die Überdeckung  $\{(-1, 1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$  von  $[0, 1)$  enthält keine endliche Teilüberdeckung.

**Bemerkung 3.1.** • Satz von Heine-Borel: Teilmengen euklidischer, endlich dimensionaler Räume sind genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind.

- Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.
- Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt, d.h. ist  $X$  eine kompakte Menge,  $Y$  topologischer Raum,  $f: X \rightarrow Y$  stetig, dann ist  $f(X)$  kompakt.
- Ist  $X$  kompakt,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f(X)$  kompakt und  $f$  nimmt auf  $X$  Maximum und Minimum an.
- Lebesgue-Lemma: Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetige Abbildung topologischer Räume und  $X$  metrisch und kompakt, so gilt:  
Ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , so existiert  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass für alle  $A \subseteq X$  mit  $\text{diam } A < \delta$  ein  $U' \in \mathcal{U}$  mit  $f(A) \subseteq U'$  existiert.

### 3.1.2 Wegzusammenhang

**Definition 3.3** (Weg, Wegzusammenhangskomponente). • Ein Weg in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: I(=[0, 1]) \rightarrow X$  mit Anfangspunkt  $\gamma(0)$  und Endpunkt  $\gamma(1)$ .

- Man nennt  $X$  wegzusammenhängend, falls für alle  $x, y \in X$  ein Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  in  $X$  existiert mit  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ .
- Eine Wegzusammenhangskomponente von  $X$  ist eine wegzusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die in keiner echt größeren solchen Teilmenge enthalten ist.

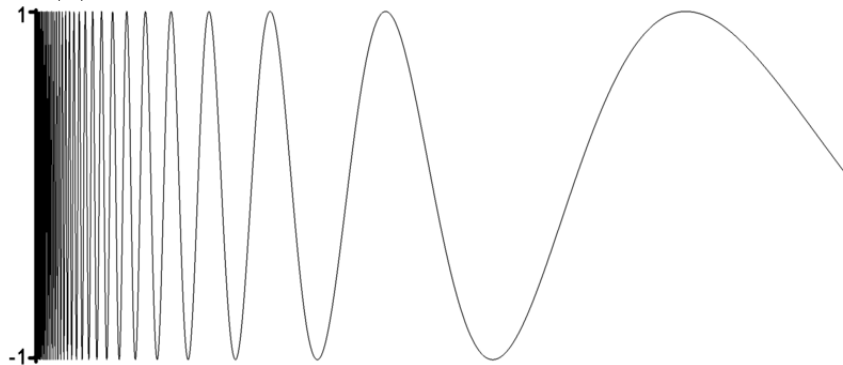
**Bemerkung 3.2.** • Jeder Punkt von  $X$  liegt in genau einer Wegzusammenhangskomponente von  $X$ , und zwei solche Komponenten sind entweder gleich oder disjunkt.

- Stetige Bilder wegzusammenhängender Mengen sind wegzusammenhängend.

**Korollar 3.1.** Wegzusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, ebenso die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten.

Wegzusammenhängende topologische Räume sind zusammenhängend (Übungsaufgabe), die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Beispiel eines Raumes, der zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist** Definiere  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\}$ ,  $X := A \cup \{(0, 0)\}$ .



Es gilt:

- Es ist  $A$  wegzusammenhängend, denn:  
 $A \cong (0, +\infty) \cong \mathbb{R}$ , und  $\mathbb{R}$  ist wegzusammenhängend.
- Es ist  $X$  zusammenhängend, denn:  
 Es gilt:  $\bar{A} = A \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$  ist als Abschluss einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend (siehe Bemerkung in der Vorlesung).  
 Außerdem gilt:  $A \subseteq X \subseteq \bar{A}$ , und  $X$  ist als Teilmenge des Abschlusses eines zusammenhängenden Raumes wieder zusammenhängend. (Allgemein: Es sei  $A$  zusammenhängend,  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ . Dann ist auch  $B$  zusammenhängend.)
- Es ist  $X$  nicht wegzusammenhängend, denn:  
 Es lässt sich  $(0, 0)$  nicht über einen Weg in  $X$  mit einem beliebigen anderen Punkt aus  $X$  verbinden<sup>1</sup>.

**Bemerkung 3.3.** Der Abschluss wegzusammenhängender Räume ist im Allgemeinen nicht wegzusammenhängend!

**Beispiel 3.3** (Beispiel von oben). Der Abschluss von  $A$  in  $X$  - nicht in  $\mathbb{R}^2$  - ist  $X$ , und  $X$  ist (s.o.) nicht wegzusammenhängend.

**Bemerkung 3.4.** Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raumes  $X$  eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind alle Wegzusammenhangskomponenten offen in  $X$ , und  $X$  ist genau dann wegzusammenhängend, wenn  $X$  zusammenhängend ist.

**Beispiel 3.4.** Offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend sind, denn:

<sup>1</sup>Formale Begründung: Jeder in  $(0, 0)$  startende Weg ist konstant.

---

Jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  besitzt dann als offene Umgebung einen offenen Ball, und offene Bälle sind wegzusammenhängend.

# Kapitel 4

14.11.2011

## 4.1 Beispiele für Beweise im Kontext von Hausdorffräumen

**Satz 4.1.** Behauptung: Ist  $X$  ein Hausdorffraum, so besitzt jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  höchstens einen Grenzwert.

*Beweis.* Sei  $X$  ein Hausdorffraum.

Annahme: Es existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  mit  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x'$  und  $x \neq x'$ .

Da  $X$  Hausdorffsch ist, existieren offene Teilmengen  $U, V \subseteq X$ , mit  $U \cap V = \emptyset$  und  $x \in U, x' \in V$ . Dann existieren  $n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in U, x_m \in V$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, m \in \mathbb{N}_{\geq n'_0}$ . Dann gilt also für alle  $k \geq \max\{n_0, n'_0\}$ :  $x_k \in U \cap V = \emptyset$ .  $\nmid$   $\square$

**Satz 4.2.** Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch.

z.z.:  $\forall x \neq y \in X \exists U_x, U_y \subseteq X: U_x \cap U_y = \emptyset$ . Seien  $x \neq y \in X$ . Wähle  $U_x := B_{\frac{d(x,y)}{3}}(x), U_y := B_{\frac{d(x,y)}{3}}(y)$ .

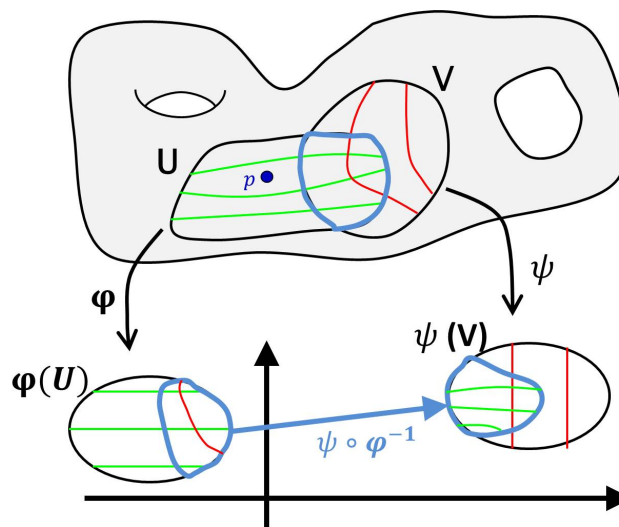
Dann gilt:  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .  $\square$

## 4.2 Beispiele für Mannigfaltigkeiten

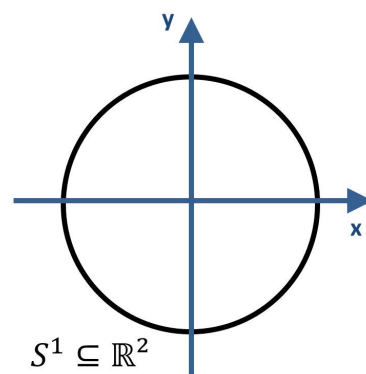
1. Was sind 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten?

- Abzählbare diskrete Mengen.

2. 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten



- Offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  sind 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten, denn: Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ .
  - $(a, b)$  ist als metrischer Raum Hausdorffsch.
  - Es ist  $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbare Basis der Topologie.
  - $(a, b)$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}$ , denn: Es gilt:  $id: (a, b) \mapsto (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ist ein Homöomorphismus einer offenen Menge in eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Somit ist  $((a, b), id_{(a,b)})$  eine (globale)<sup>1</sup> Karte.
  - Für den Kartenwechsel gilt:  $id_{(a,b)} \circ id_{(a,b)}^{-1}: (a, b) \rightarrow (a, b), x \mapsto x$ , ist eine glatte Abbildung.
- $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$



ist eine 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn:

- Es ist  $S^1$  als Teilmenge des metrischen Raumes  $\mathbb{R}^2$  Hausdorffsch.

<sup>1</sup>Global, da für die ganze Mannigfaltigkeit gleich.

Ebenso besitzt  $S^1$  eine abzählbare Basis der Topologie.

– Definiere

$$U_1 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\} = S^1 \setminus \{N\} \quad (N := (0, 1))$$

und

$$U_2 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\} = S^1 \setminus \{S\} \quad (S := (0, -1)).$$

Dann gilt:

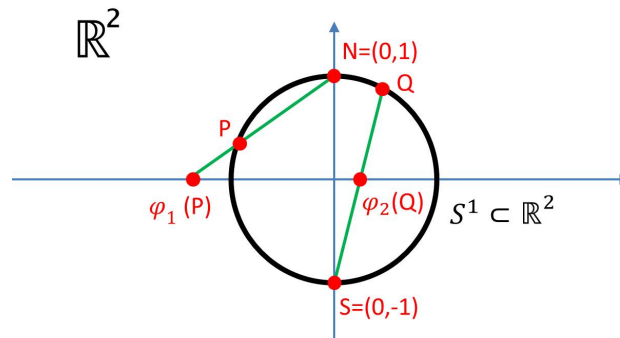
–  $U_1 \cup U_2 = S^1$ ,

– Es sind  $U_1$  und  $U_2$  offene Teilmengen von  $S^1$ , denn sie sind jeweils Komplement einer einpunktigen und damit abgeschlossenen Menge.

– Definiere

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1-y},$$

$$\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1+y}.$$



Im Folgenden zeigen wir, dass  $(U_1, \varphi_1)$  eine Karte ist. Analoges gilt auch für  $(U_2, \varphi_2)$  mit analoger Rechnung.

– Definiere

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, u \mapsto \left( \frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right).$$

Dann gilt:

$$\varphi_1 \circ \psi = id_{\mathbb{R}},$$

$$\psi \circ \varphi_1 = id_{U_1}.$$

Damit ist  $\varphi_1$  bijektiv.

Da  $\varphi_1$  und  $\psi$  stetig sind, ist  $\varphi_1$  damit ein Homöomorphismus.



- Die Kartenwechsel sind glatt, denn es gilt:

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Für alle  $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(u) = (\varphi_2 \circ \psi)(u) = \frac{1}{u},$$

und dies ist tatsächlich ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus<sup>2</sup>  
 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

3. Es ist  $\mathbb{R}^n$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn:

- $\mathbb{R}^n$  ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.
- $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$  ist eine globale Karte.

**Bemerkung 4.1.** Jeder Atlas, der aus nur einer Karte besteht, ist glatt.

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{A} = \{(\varphi, U)\}$  dieser Atlas. Dann gilt:

Es gibt nur genau einen Kartenwechsel:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\varphi(U)}: \varphi(U) \rightarrow \varphi(U)$$

und dieser ist natürlich glatt. □

**Satz 4.3.** Offene Teilmengen von  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten sind wieder  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten.

*Beweis.* Es sei  $M$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ ,  $N \subseteq_{\text{offen}} M$ .

- Als Teilmenge von  $M$  ist  $N$  Hausdorffsch und auch die abzählbare Basis der Topologie überträgt sich.
- Es sei  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ( $\Lambda$  Indexmenge) ein  $C^k$ -Atlas von  $M$ . Für alle  $\alpha \in \Lambda$  ist  $U_\alpha \cap N$  offen in  $N$  und es gilt:

$$\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}: U_\alpha \cap N \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap N) \subseteq \mathbb{R}^n$$

und  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap N)$  ist als stetiges Bild der offenen Menge  $U_\alpha \cap N$  wieder offen.

Somit ist  $\{(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}, U_\alpha \cap N) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ein Atlas für  $N$ .

Da die Kartenwechsel weiterhin  $C^k$ -Abbildungen sind, ist dieser Atlas ein  $C^k$ -Atlas für  $N$ . □

**Beispiel 4.1.** Es gilt:  $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n^2}$

---

<sup>2</sup>d.h. bijektiv und unendlich oft differenzierbar und mit unendlich oft differenzierbarer Umkehrabbildung

# Kapitel 5

## 21.11.11

### 5.1 Untermannigfaltigkeiten

**Satz 5.1.**  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^{n+l}$  sind  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten. Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ , versehen mit der Teilraumtopologie, und  $\{\psi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$  eine Menge lokaler Parametrisierungen (siehe Untermannigfaltigkeitskriterium, (c)) mit  $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ .

Dann ist  $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas für  $M$  und  $M$  somit eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* • Es gilt:  $M$  ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie (als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+l}$ ).

- Es ist  $\mathcal{A}$  ein Atlas (nach Definition der lokalen Parametrisierungen).
- [z.z.: Die Kartenwechsel sind glatt, d.h.:

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda: (U_\alpha \cap M) \cap (U_\beta \cap M) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha: \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$$

ist glatt.]

Seien  $\alpha, \beta \in \Lambda$  mit  $(U_\alpha \cap M) \cap (U_\beta \cap M) \neq \emptyset$ .

(Vorsicht: Es ist  $\psi_\beta^{-1}$  nicht auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+l}$  definiert, daher ist die Kettenregel nicht direkt anwendbar!)

Zeige: Es ist  $\psi_\beta^{-1}$  auf einer (offenen) Umgebung eines jeden Punktes  $y \in U_\alpha \cap U_\beta \cap M$  eine glatte Abbildung.

Sei  $x \in \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$ . Nach dem Untermannigfaltigkeits-Kriterium (b) existiert eine Umgebung  $U \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$  von  $\psi_\alpha(x) \in M$  in  $\mathbb{R}^{n+l}$  und ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$  mit  $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

Definiere  $\pi: \mathbb{R}^{n+l} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die Projektion auf die ersten  $n$

Komponenten und  $\iota: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+l}, x \mapsto (x, 0)$ , die Inklusion. Dann gilt auf  $\varphi(U \cap M) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$ :  $\iota \circ \pi = id$ . Daher gilt auf  $\psi_\alpha^{-1}(U \cap M)$ :

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha = \psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi_\alpha = (\psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \iota) \circ (\pi \circ \varphi \circ \psi_\alpha).$$

Es sind  $(\psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \iota) = (\pi \circ \varphi \circ \psi_\beta)^{-1}$  und  $\pi \circ \varphi \circ \psi_\alpha$  glatte Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  und somit auch die Komposition  $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ .

□

## 5.2 Wichtige Spezialfälle (und Beispiele) von Untermannigfaltigkeiten

**(a) Niveaumengen** Es seien  $V \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$  offen,  $f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l)$  und  $c \in \mathbb{R}^l$ . Gilt  $\text{Rang } Df(x) = l$  in jedem Punkt  $x$  der Niveaumenge

$$f^{-1}(c) := f^{-1}(\{c\}) = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

so ist  $f^{-1}(c)$  eine  $n$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ .

*Beweis.* Wende Untermannigfaltigkeits-Kriterium (a) auf die Abbildung

$$g = f - c: x \mapsto f(x) - c$$

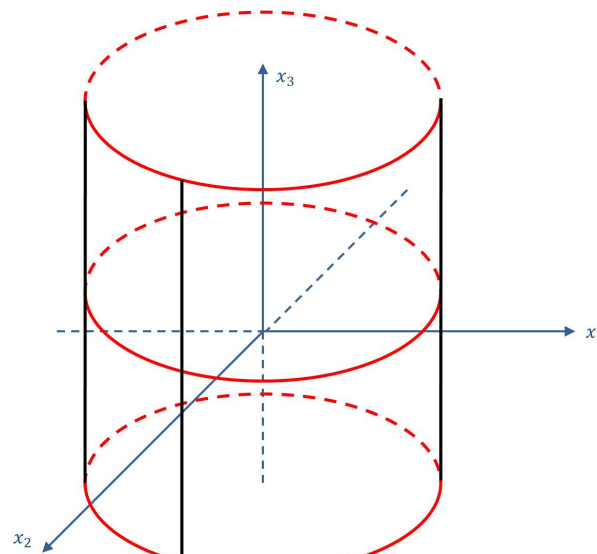
an.

[z.z.:  $\text{Rang } Df(x) = l$  auf einer Umgebung  $U$  von  $f^{-1}(c)$ , nicht nur auf der Niveaumenge selbst!]

Sei  $x_0 \in f^{-1}(c)$ . Da  $\text{Rang } Df(x_0) = l$ , existiert eine  $(l \times l)$ -Unterdeterminante  $A(x)$  von  $\det Df(x)$ , so dass  $A(x_0) \neq 0$ . Da  $f$  stetig ist, ist die Abbildung  $x \mapsto A(x)$  stetig, und somit folgt:  $A(x) \neq 0$  auf einer Umgebung  $U(x_0)$  von  $x_0$ . Dann ist  $\text{Rang } Df(x) = l$  für alle  $x \in U(x_0)$ .

Setze  $U := \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(c)} U(x_0)$ , dann folgt die Behauptung.

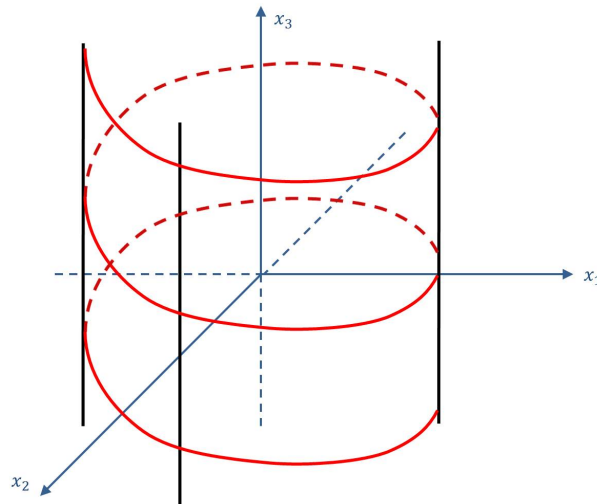
□


**Beispiel 5.1.**

Der Zylinder  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist als Niveaumenge der Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \underbrace{x^2 + y^2} - 1$ , eine  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

(b)

**Beispiel 5.2.** Der Graph der Abbildung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ , d.h. die Menge  $\{(\cos(t), \sin(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ , die Helix, ist eine 1-dimensionale



glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

**(c) Global parametrisierte Untermannigfaltigkeiten** Es sei  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$  glatt mit  $\text{Rang } D\psi(w) = n$  für alle  $w \in W$ . Es

sei ferner  $\psi: W \rightarrow \psi(W)$  Homöomorphismus. Dann ist  $\psi(W)$  eine  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$  (nach Untermannigfaltigkeits-Kriterium (c) mit  $U := \mathbb{R}^{n+l}$ ).

Für  $n = 2$  und  $l = 1$  heißt  $\psi(W)$  eine parametrisierte Fläche von  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel 5.3.** 1. Parametrisierung des Zylinders:

Betrachte die glatte Abbildung  $\psi: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, s) \mapsto (\cos(t), \sin(t), s)$ . Das Bild dieser Abbildung ist der Zylinder im  $\mathbb{R}^3$  (wie oben, ohne eine Gerade). Es gilt:

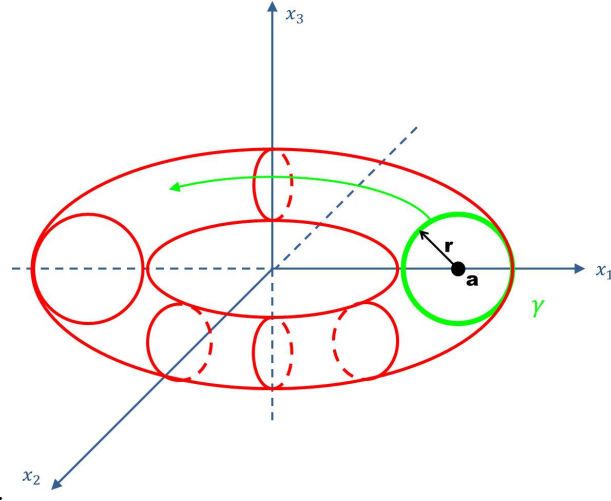
$$D\psi(t, s) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & 0 \\ \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ , und damit:  $\text{Rang } D\psi(t, s) = 2$  für alle  $(t, s) \in \mathbb{R}$ , da  $\sin$  und  $\cos$  keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Damit ist  $\psi$  eine (globale) Parametrisierung des Zylinders.

2. (Rotationsflächen im  $\mathbb{R}^3$ )

Rotiere für Konstanten  $0 < r < a$  die Kurve  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (a +$



$r \cdot \cos(t), 0, r \cdot \sin(t)$ .

in der  $x_1x_3$ -Ebene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ 0 \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} (a + r \cdot \cos(t)) \cos(\Theta) \\ (a + r \cdot \cos(t)) \sin(\Theta) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}}_{(*)}$$

Dann definiert  $\Phi_\gamma: (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (\Theta, t) \mapsto (*)$  eine parametrisierte Fläche, den Rotationstorus.

- Der Rotationstorus  $T \subseteq \mathbb{R}^3$  lässt sich als Niveaumenge definieren:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = r^2\}.$$

- Eine weitere (aus der Vorlesung bekannte) Darstellung des Torus ist

$$S^1 \times S^1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \wedge (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1\},$$

und dies ist nicht die letzte Möglichkeit der Darstellung des Torus (siehe nächste Vorlesung) ...

# Kapitel 6

05.12.2011

## 6.1 Homotopieäquivalenzen

**Definition** Für zwei topologische Räume  $X, Y$  heißt eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$   $\underbrace{f \in C(X, Y)}$

**Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $g \circ f \simeq id_X$  und  $f \circ g \simeq id_Y$  gilt.

**Proposition 6.1.** Es seien  $X, Y$  topologische Räume. Die Relation " $\simeq$ " ist eine Äquivalenzrelation auf  $C(X, Y)$ .

*Beweis.* • Reflexivität: Es sei  $f \in C(X, Y)$ . Definiere  $H: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto f(x)$ . Dann ist  $H$  eine Homotopie von  $f$  nach  $f$ , was die Reflexivität von " $\simeq$ " zeigt.

- Symmetrie: Es seien  $f, g \in C(X, Y)$  mit  $f \simeq g$ , d.h. es existiert eine Homotopie  $H$  von  $f$  nach  $g$ . Definiere  $G: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$ . Dann ist  $G$  Homotopie von  $g$  nach  $f$  und die Symmetrie von " $\simeq$ " gezeigt.

- Transitivität: Es seien  $f, g, h \in C(X, Y)$  mit  $f \simeq g \simeq h$  durch die Homotopien  $H_1$  und  $H_2$ . Definiere

$$H: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann gilt für alle  $x \in X$ :

- $H(x, 0) = H_1(x, 0) = f(x)$ ,
- $H(x, 1) = H_2(x, 1) = h(x)$ ,

Für  $t = \frac{1}{2}$  betrachte:

$$\lim_{t \nearrow \frac{1}{2}} H(x, t) = \lim_{t \nearrow \frac{1}{2}} H_1(x, 2t) = H_1(x, 1) = g(x),$$

$$\lim_{t \searrow \frac{1}{2}} H(x, t) = \lim_{t \searrow \frac{1}{2}} H_2(x, 2t - 1) = H_2(x, 0) = g(x).$$

Damit ist  $H$  Homotopie von  $f$  nach  $h$  und die Transitivität von " $\simeq$ " gezeigt. □

## 6.2 Beispiele zu Homotopien

1. Beh.: Für einen topologischen Raum  $X$  sind je zwei Abbildungen  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  homotop.

*Beweis.* Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$ . Definiere  $H: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, t) \mapsto (1-t)f(x) + t \cdot g(x)$ . Dann ist  $H$  Homotopie von  $f$  nach  $g$ , eine **lineare** Homotopie. □

2. Beh.: Jede stetige Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow Y, Y$  topologischer Raum, ist nullhomotop.

*Beweis.* Es sei  $Y$  topologischer Raum  $f \in C(\mathbb{R}^n, Y)$ . Definiere  $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto f((1-t)x)$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ :

- $H(x, 0) = f((1-0)x) = f(x),$
- $H(x, 1) = f((1-1)x) = f(0).$

Dann ist  $H$  Homotopie  $f$  nach  $c_{f(0)} (= c \equiv f(0))$ . □

**Definition:** Es seien  $X, Y$  topologische Räume,  $A \subseteq X$ . Seien  $f, g \in C(X, Y)$ . Es heißt  $f$  relativ  $A$  homotop zu  $g$  (in Zeichen  $f \simeq g \text{ rel } A$ ), falls eine Homotopie  $H: X \times I \rightarrow Y$  von  $f$  nach  $g$  existiert, so dass  $H(a, t) = H(a, 0)$  für alle  $a \in A, t \in I$ .

**Bemerkung 6.1.** Es seien  $X, Y$  topologische Räume,  $A \subseteq X$ . Dann ist "Homotopie rel  $A$ " eine Äquivalenzrelation.

**Proposition 6.2.** Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation (auf der Klasse der topologischen Räume).

**Bemerkung 6.2.**

- Reflexivität: Es sei  $X$  topologischer Raum. Es gilt:  $X \simeq X$  durch die Homotopieäquivalenz  $\tilde{f}, \tilde{g} := id_X$ .
- Symmetrie: Seien  $X, Y$  topologische Räume mit  $X \simeq Y$ , d.h. es existieren  $\tilde{f} \in C(X, Y), \tilde{g} \in C(Y, X)$  mit  $\tilde{g} \circ \tilde{f} \simeq id_X, \tilde{f} \circ \tilde{g} \simeq id_Y$ . Definiere  $f := \tilde{g}, g := \tilde{f}$ . Dann gilt  $f \circ g \simeq id_X, g \circ f \simeq id_Y$ , d.h.  $Y \simeq X$ .

---

<sup>1</sup>Statt  $\mathbb{R}^n$  reicht: kontrahierbarer Raum



- Transitivität: Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume mit  $X \simeq Y \simeq Z$ , d.h. es existieren  $f_1 \in C(X, Y), g_1 \in C(Y, X), f_2 \in C(Y, Z), g_2 \in C(Z, Y)$  mit

$$g_1 \circ f_1 \simeq id_X, f_1 \circ g_1 \simeq id_Y$$

$$g_2 \circ f_2 \simeq id_Y, f_2 \circ g_2 \simeq id_Z$$

Definiere  $f := f_2 \circ f_1, g := g_1 \circ g_2$ . Dann gilt:

$$g \circ f \simeq id_X, f \circ g \simeq id_Z,$$

d.h.  $X \simeq Z$ .

## 6.3 Kontrahierbarkeit

Es sei  $X$  ein topologischer Raum.

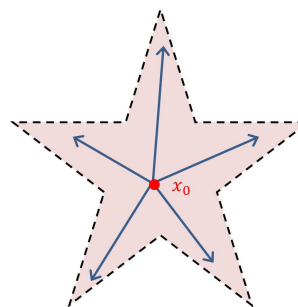
**Definition** Man nennt  $X$  **kontrahierbar**, falls gilt:  $X \simeq \{pt\}$ .

**Bemerkung 6.3.** Es gilt:

$$X \text{ kontrahierbar} \Leftrightarrow id_X \text{ ist nullhomotop.}$$

**Beispiel 6.1.**

- Es ist  $\mathbb{R}^n$  kontrahierbar, denn:  
Definiere  $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, t) \mapsto (1-t)x$ . Dann ist  $H$  Homotopie von  $id_X$  nach  $c_0$ , d.h.  $\mathbb{R}^n$  ist kontrahierbar nach obiger Bemerkung.



- Genauer ist jede **sternförmige**<sup>2</sup> Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  kontrahierbar.

Teilmenge

**Beispiel 6.2.**  $D^n, B^n$ .

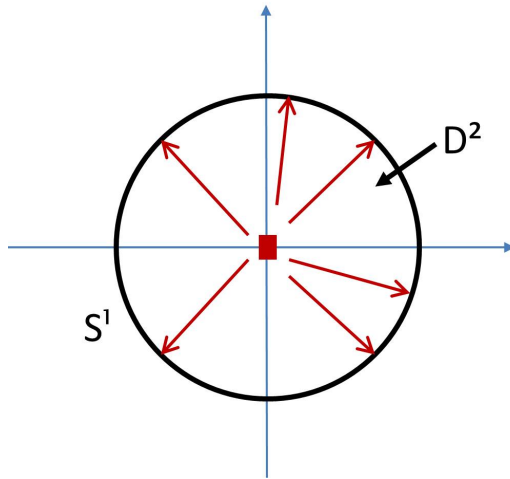
**Bemerkung 6.4.**

- Kontrahierbarkeit ist eine topologische Invariante.
- Kontrahierbare Räume sind einfach-zusammenhängend.

<sup>2</sup>Es existiert  $x_0 \in M$ , so dass für alle  $x \in M$  gilt:  $(1-t)x + t \cdot x_0 \in M$

## 6.4 Deformationsretrakte

**Behauptung:**  $S^{n-1}$  ist (starker) Deformationsretrakt von  $D^k \setminus \{0\}$ .



*Beweis.* Betrachte die Abbildung

$$H: D^n \setminus \{0\} \times I \rightarrow D^n \setminus \{0\}, (x, t) \mapsto (1-t)x + t \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

Definiere  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$  für alle  $x \in D^n \setminus \{0\}$ .

□

# Kapitel 7

12.12.2011

## 7.1 Anwendungen zu Sätzen aus der Vorlesung

**Satz 7.1** (Brouwerscher Fixpunktsatz). Jede stetige Abbildung  $f: D^2 \rightarrow D^2$  besitzt einen Fixpunkt, d.h. es ex.  $x \in D^2$  mit  $f(x) = x$ .

### Fundamentalsatz der Algebra

**Satz 7.2** (Borsuk-Ulam). Ist  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig, so existiert ein  $x \in S^2$  mit  $f(x) = f(-x)$ .

**Korollar 7.1.** Es lässt sich  $S^2$  nicht in  $\mathbb{R}^2$  einbetten.

**Korollar 7.2.** Auf der Erde existieren immer zwei verschiedene Punkte mit gleichem Luftdruck und gleicher Temperatur.

## 7.2 Homotopien und Fundamentalgruppe

### 7.2.1 Der komplex projektive Raum $\mathbb{CP}^n$

Der komplex projektive Raum  $\mathbb{CP}^n = \{\text{komplexe Geraden durch } 0 \in \mathbb{C}^{n+1}\} = \{1\text{-dim. komplexe lineare Teilräume von } \mathbb{C}^{n+1}\}$  lässt sich auch wie folgt darstellen:

Führt man auf  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  durch

$$v \sim w :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda v = w$$

eine Äquivalenzrelation ein, so kann man  $\mathbb{CP}^n$  mit  $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  identifizieren.

Betrachte  $S^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|v\| = 1\}$  als Teilraum von  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Dann induziert die Inklusion  $S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  einen Homöomorphismus

$$S^{2n+1}/\sim \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim.$$

Seine Inverse ist die von der radialen Projektion

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^{2n+1}, v \mapsto \frac{1}{\|v\|} v,$$

induzierte stetige Abbildung  $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \cong S^{2n+1}/\sim$ .

Da  $S^{2n+1}$  kompakt ist und die Äquivalenzklassen in  $S^{2n+1}$  abgeschlossen sind, ist  $\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/\sim$  kompakter Hausdorffraum.

- $n=0$ :  $\mathbb{CP}^0 = \{\text{komplexe Geraden durch } 0 \in \mathbb{C}\}$  ist ein einpunktiger Raum.
- $n=1$ :  $\mathbb{CP}^1$  ist homöomorph zu  $S^3/\sim \cong S^2$ , und damit gilt:  
 $\pi_1(\mathbb{CP}^1) = \{0\}$ , denn nach Vorlesung gilt  $\pi_1(S^n) = \{0\}$  für alle  $n \geq 2$   
 und homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen.  
 Der Homöomorphismus ist gegeben durch die folgende Abbildung

$$\varphi: \underbrace{S^3}_{\subseteq \mathbb{C}^2} \rightarrow S^2, \quad (z, w) \mapsto (2\bar{z}w, |w|^2 - |z|^2),$$

welche einen Homöomorphismus  $S^3/\sim \cong S^2$  induziert.

Allgemein gilt: Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $\mathbb{CP}^n$  einfach zusammenhängend (da wegzusammenhängend:  $\pi_1(\mathbb{CP}^n) = \{0\}$ ).

**Bemerkung 7.1.** Der reell projektive Raum  $\mathbb{RP}^n$  ist für kein  $n \in \mathbb{N}$  einfach zusammenhängend, seine Fundamentalgruppe ist nicht trivial.

### 7.2.2 Die spezielle unitäre Gruppe $SU(n)$

Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachte die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^* A = I_n, \det(A) = 1\}$$

( $A^*$  bezeichnet die "Adjungierte":  $A^* = \bar{A}^T$ )

Es ist  $SU(n)$  als Urbild abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen abgeschlossen in  $\mathbb{C}^{n^2}$ . Da die Spalten einer unitären Matrix orthonormal zueinander sind und somit Einheitsvektoren bilden, ist  $SU(n)$  beschränkt. Nach dem Satz von Heine-Borel (welcher anwendbar ist, da  $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ ) ist  $SU(n)$  damit kompakt.

- $n=1$ :  $SU(1) = \{z \in \mathbb{C}, \bar{z}z = 1, \det(z) = 1\} = \{1\}$  ist ein einpunktiger Raum.
- $n=2$ :  $SU(2)$  ist homöomorph zu  $S^3$  und damit einfach zusammenhängend (mit gleicher Begründung wie für  $\mathbb{CP}^1$ ).  
 Zum Homöomorphismus:

Betrachte  $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  als Teilraum von  $\mathbb{C}^2$ .  
Dann ist

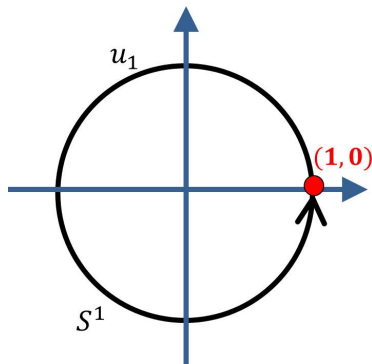
$$\varphi: S^3 \rightarrow SU(2), \quad (z, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

ein Homöomorphismus  $S^3 \cong SU(2)$ .

- Allgemein gilt: Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $SU(n)$  einfach zusammenhängend.

### 7.2.3 Die Kreislinie $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

**Behauptung 7.1.**  $S^1$  ist nicht einfach zusammenhängend.



Was sind geschlossene Wege in  $S^1$ ?

Für  $k \in \mathbb{Z}$  definiere

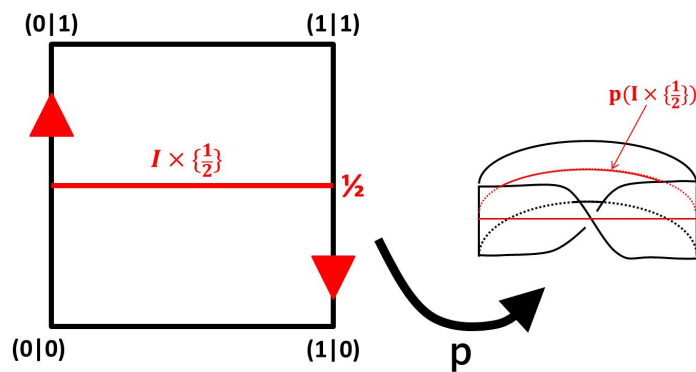
$$u_k: I \rightarrow S^1, \quad t \mapsto (\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt)$$

Solche Schleifen lassen sich für  $k \neq 0$  nicht zusammenziehen.

### 7.2.4 Das Möbiusband

Das Möbiusband  $M$  entsteht durch Verklebung zweier gegenüberliegender Seiten im Einheitsquadrat  $I^2$  in entgegengesetzter Richtung:

$$M = I^2 / [(0, t) \sim (1, 1-t)]$$



Es bezeichnet  $p: I^2 \rightarrow M$  die Projektion und  $S := p(I \times \{\frac{1}{2}\})$ .

Man kann zeigen, dass  $S$  ein Deformationsretrakt von  $M$  ist. Somit sind  $S$  und  $M$  vom selben Homotopietyp und damit

$$\pi_1(M) \underset{\text{isomorph}}{\approx} \pi_1(S).$$

Andererseits gilt:  $S$  ist homöomorph zu  $S^1$  und somit:

$$\pi_1(S^1) \approx \pi_1(S) \approx \pi_1(M).$$

# Kapitel 8

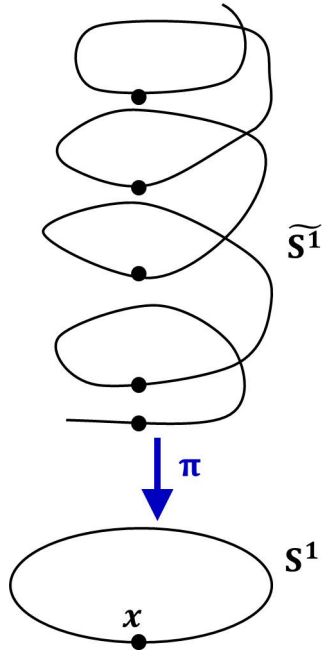
19.12.2011

## 8.1 Überlagerungen und Liftungen

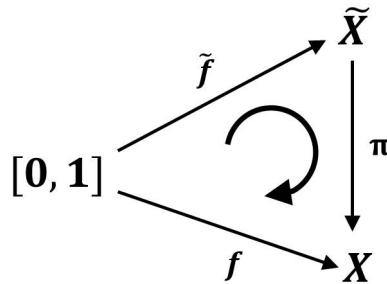
**Definition 8.1** (Überlagerung). Eine Überlagerung eines topologischen Raumes  $X$  ist ein Raum  $\tilde{X}$  zusammen mit einer surjektiven stetigen Abbildung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ , so dass für alle Punkte  $x \in X$  eine Umgebung  $U = U(x)$  existiert mit

1.  $\pi^{-1}$  ist eine nichtleere Vereinigung paarweise disjunkter offener Mengen  $\tilde{U}_j \subseteq \tilde{X}, j \in J$ ,
2. Für alle  $j \in J$  ist  $\pi|_{\tilde{U}_j}: \tilde{U}_j \rightarrow U$  ein Homöomorphismus.

$[\pi \text{ Überlagerungsabbildung, } |J| \text{ Blätterzahl, } \tilde{X} \text{ Totalraum, } X \text{ Basisraum, } \pi^{-1}(x) \text{ Faser über } x \text{ (für } x \in X)]$



**Definition 8.2** (Lift). Ist  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $f: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg, so heißt  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  Lift von  $f$ , falls  $\pi \circ \tilde{f} = f$  gilt.



## 8.2 Folgerungen aus dem Satz über das Hochheben von Homotopien

**Korollar 8.1.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung,  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ . Weiter sei  $f: S^1 \rightarrow X$  eine Schleife in  $x_0$  und  $\tilde{f}$  der Lift von  $f$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$ . Dann gilt:

$$\tilde{f} \text{ ist Schleife} \Leftrightarrow [f] \in \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$

wobei  $\pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  die induzierte Abbildung bezeichne.

*Beweis.* " $\Rightarrow$ ": Es sei  $\tilde{f}$  eine Schleife (d.h. ein geschlossener Weg). Dann ist  $[\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  und somit:

$$[f] = [\pi \circ \tilde{f}] = \pi_*([\tilde{f}]) \in \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$



" $\Leftarrow$ ": Es sei  $[f] \in \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .

Es sei  $\tilde{g}$  eine Schleife in  $\tilde{x}_0$  mit

$$[f] = \pi_*([\tilde{g}]) = [\pi \circ \tilde{g}].$$

Dann sind  $f$  und  $\pi \circ \tilde{g}$  homotop vermöge einer Homotopie  $H: f \simeq \pi \circ \tilde{g}$ . Es sei  $\tilde{H}$  der Lift von  $H$  mit  $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ ,  $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$ .

Nach dem Monodromie-Lemma haben alle Wege  $\tilde{H}_t$  den gleichen Endpunkt. Damit folgt:

$$\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{g}(1) = \tilde{H}_1(1) \stackrel{\text{Monodromie-Lemma}}{=} \tilde{H}_0(1) = \tilde{f}(1).$$

Also ist  $\tilde{f}$  eine Schleife (in  $\tilde{x}_0$ ). □

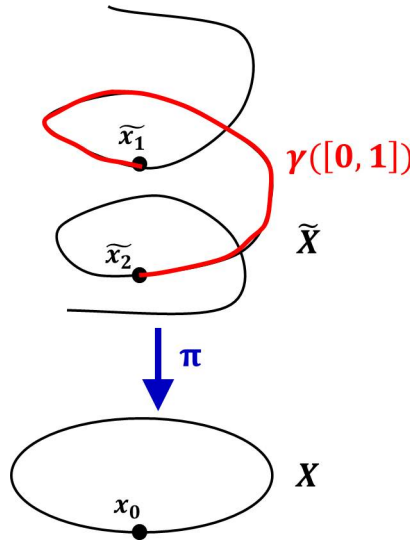
**Korollar 8.2.** Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum, der eine wegzusammenhängende nichttriviale Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  besitze (d.h.  $\pi$  ist mindestens zweiblättrig). Ist  $x_0 \in X$ , so gilt:

$$\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}.$$

*Beweis.* Sei  $x_0 \in X$ . Es seien  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x_0)$  mit  $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$ . Ferner sei

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$$

ein Weg von  $\tilde{x}_1$  zu  $\tilde{x}_2$ .



Dann ist  $\pi \circ \gamma$  ein geschlossener Weg in  $X$ , der sich nicht in einen geschlossenen Weg liften lässt. es gilt also:  $\pi \circ \gamma \in \pi_1(X, x_0)$ . Nach obigem Korollar gilt aber: Der Lift von  $\pi \circ \gamma$  ist nicht im Bild von  $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ . Somit gibt es ein Element in  $\pi_1(X, x_0)$ , welches nicht im Bild der induzierten Abbildung

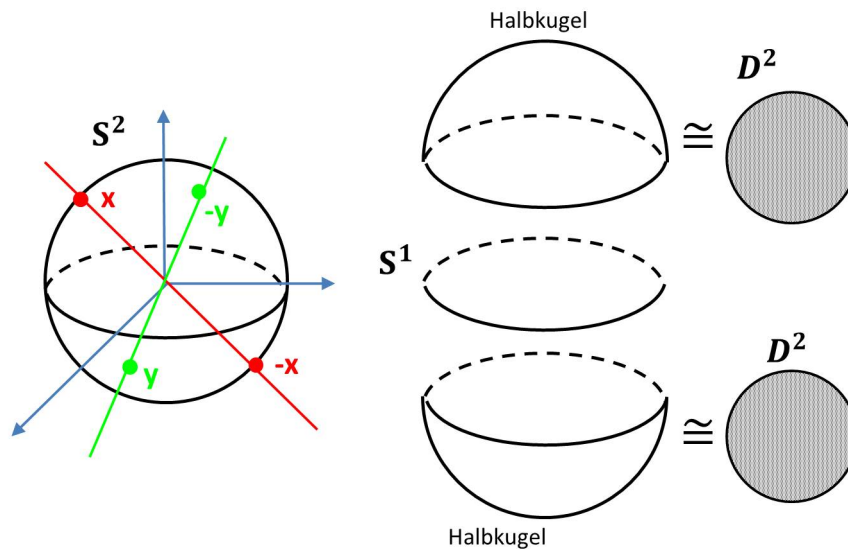
$$\pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \underbrace{\tilde{x}_0}_{\in \pi^{-1}(x_0)}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

liegt.

Da  $\pi_*$  ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt sicher:  $1 \in \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .

Also folgt:  $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$ .  $\square$

**Beispiel 8.1.** Die kanonische Projektion  $S^2 \rightarrow S^2/[x \sim (-x)] = \mathbb{RP}^2$  ist eine zweiblättrige Überlagerung.

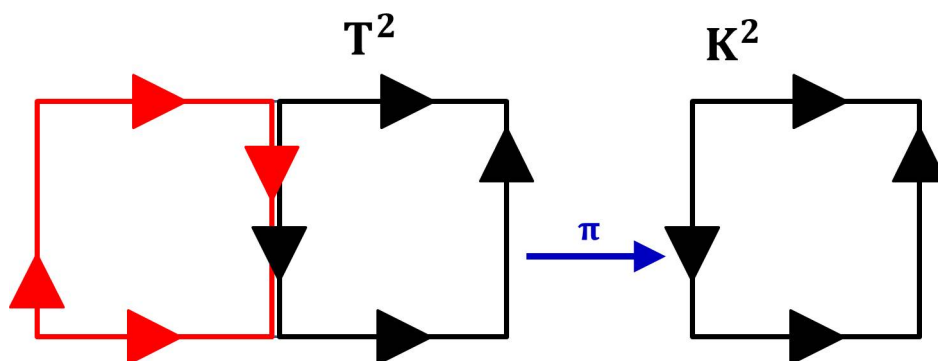


Es sind sowohl  $S^2$  als auch  $\mathbb{RP}^2$  wegzusammenhängend. Dann folgt mit dem Korollar:

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \neq \{1\} \text{ (zu jedem beliebigen Basispunkt).}$$

Nach Vorlesung ist  $S^2$  einfach zusammenhängend (d.h. wegzusammenhängend und mit trivialer Fundamentalgruppe). Da homöomorphe Räume isomorphe Fundamentalgruppen haben, können also  $S^2$  und  $\mathbb{RP}^2$  nicht homöomorph sein.

**Beispiel 8.2.** Der Torus ist eine zweiblättrige Überlagerung der Kleinschen Flasche.



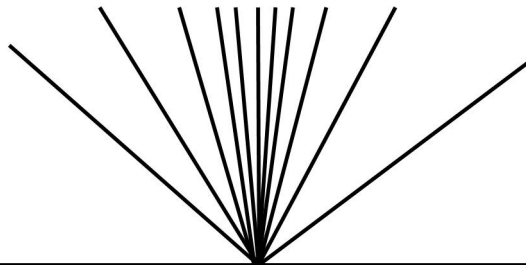
# Kapitel 9


09.01.2012

## 9.1 Überlagerungen und Decktransformationen

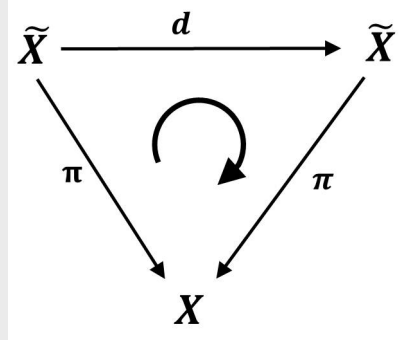
**Definition 9.1** (lokal wegzusammenhängend). Ein topologischer Raum  $X$  heißt lokal wegzusammenhängend, falls jede offene Umgebung  $U$  eines Punktes  $x \in X$  eine wegzusammenhängende Umgebung enthält, d.h.  $\forall x \in X \quad \forall U = U(x) \quad \exists V \subseteq U: x \in V$  und  $V$  wegzusammenhängend.

**Bemerkung 9.1.** Ein lokal wegzusammenhängender Raum ist genau dann wegzusammenhängend, wenn er zusammenhängend ist.

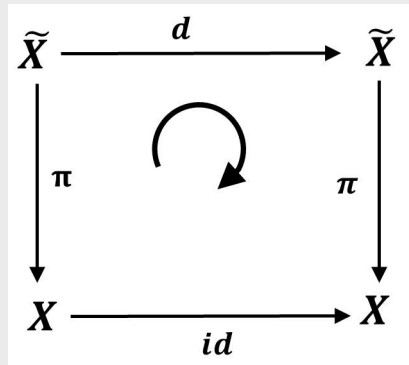


**Beispiel 9.1.**  Wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend.

**Definition 9.2** (Decktransformation). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Decktransformation (oder -bewegung) einer Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus  $d: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\pi = \pi \circ d$ .



(Alternativ: Decktransformationen überlagern die Identität  $X \rightarrow X$ .



)

**Beispiel 9.2.** • Für  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ , sind die Deckbewegungen die ganzzahligen Translationen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + z$  mit  $z \in \mathbb{Z}$ ; und für die Deckbewegungsgruppe erhält man  $D \cong \mathbb{Z}$ .

- Für  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1 \cong T^2$  sind die Deckbewegungen die Translationen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + m, y + n)$  für  $m, n \in \mathbb{Z}$ ; und es gilt:  $D \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .
- Für  $\pi: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  sind die Deckbewegungen Drehungen um ein Vielfaches des Winkels  $\frac{2\pi}{n}$ ; und es gilt:  $D \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

## 9.2 Einschub Gruppenoperationen

**Erinnerung** Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe  $G$ , die zugleich ein topologischer Raum ist, so dass

$$G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh,$$

$$G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

Es seien  $G$  eine topologische Gruppe,  $X$  ein topologischer Raum.

**Definition 9.3** (Operation, Wirkung). • Eine Operation oder Wirkung von  $G$  auf  $X$  ist eine stetige Abbildung

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g.x$$

mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\forall x \in X: e.x = x$  für das neutrale Element  $e \in G$ ;
  2.  $\forall x \in X \quad \forall g_1, g_2 \in G: g_1.(g_2.x) = (g_1 g_2).x$
- Die Menge  $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$  heißt Orbit oder Bahn von  $x$  unter  $G$ .
  - $G$  operiert transitiv auf  $X$ , falls für alle  $x, y \in X$  ein  $g \in G$  existiert mit  $g.x = y$ .
  - $G$  operiert eigentlich diskontinuierlich auf  $X$ , falls zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x) = U$  existiert mit  $g.U \cap U = \emptyset$  für alle  $g \in G \setminus \{e\}$ .  
(Dann ist auch  $g.U \cap g'.U = \emptyset$  für alle  $g, g' \in G$  mit  $g \neq g'$ .)

**Satz 9.1.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum, auf dem eine topologische Gruppe  $G$  eigentlich diskontinuierlich wirkt. Dann ist  $\pi: X \rightarrow X/G$  auf den sogenannten Orbit- oder Bahnenraum  $X/G$  eine Überlagerung, deren Blätterzahl der Mächtigkeit von  $G$  entspricht.

*Beweis.* Für  $x \in X$  sei  $U$  eine Umgebung von  $x$  mit  $g.U \cap g'.U = \emptyset$  für alle  $g, g' \in G$  mit  $g \neq g'$ .

Dann ist  $V = \pi(U) \subseteq X/G$  eine

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \pi \\ X/G \end{array}$$

überlagerte Umgebung von  $\pi(x)$  in  $X/G$  (da  $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g.U$  (disjunkte Vereinigung).)

Die Blätter über  $V$  sind die offenen Mengen  $g.U$  für  $g \in G$ .  $\square$

**Beispiel 9.3.** Die Gruppe  $\mathbb{Z}^n$  operiert auf  $\mathbb{R}^n$  durch  $(a, x) \mapsto a + x$  eigentlich diskontinuierlich.

Daher ist  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong T^n$  eine unendlich-blättrige Überlagerung.

Es sei  $f: \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ Faktoren}}$  der Homöomorphismus

$$\pi(x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$$

Dann ist  $f \circ \pi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^1 \times \dots \times S^1$  ebenfalls eine Überlagerung.

Verschärfung des Satzes:

**Satz 9.2.** Wirkt eine topologische Gruppe  $G$  eigentlich diskontinuierlich auf einen wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden topologischen Raum  $X$ , so ist die Projektion  $\pi: X \rightarrow X/G$  eine reguläre Überlagerung mit Deckbewegungsgruppe  $D = G$ .

**Definition 9.4** (reguläre/normale Überlagerung). Eine Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt regulär (oder normal), falls die Deckbewegungsgruppe transitiv auf  $\pi^{-1}(x)$  für  $x \in X$  operiert.

**Definition 9.5** (semilokal einfach zusammenhängend). Ein topologischer Raum heißt semilokal einfach zusammenhängend, falls für jeden Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U = U(x)$  existiert, so dass jeder in  $U$  liegende geschlossene Weg in  $X$  nullhomotop ist.

**Satz 9.3** (Klassifikationssatz für Überlagerungen). Es sei  $X$  ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum, der eine einfach zusammenhängende (d.h. eine sogenannte universelle) Überlagerung besitze.

Die Äquivalenzklassen der Überlagerungen mit Basispunkten, die auf  $x_0 \in X$  abgebildet werden, entsprechen bijektiv den Untergruppen von  $\pi_1(X, x)$ .

(Die Bijektion ist gegeben durch  $\tilde{X} \leftrightarrow \pi_*(\pi_1(\tilde{X}))$  für eine Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ .)

**Beispiel 9.4.** Die Untergruppen von  $\pi_1(S^2) \cong \mathbb{Z}$  sind  $n\mathbb{Z}$  für  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Die zugehörigen Überlagerungen sind

$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} \text{ für } n = 0,$$

$$\pi_n: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n \text{ für } n \geq 1.$$

**Definition 9.6** (universelle Überlagerung). Für einen wegzusammenhängenden Raum  $X$  heißt eine Überlagerung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  universell, falls  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist.

**Warum "universell"?** Eine einfach zusammenhängende Überlagerung überlagert selbst wieder jede andere Überlagerung und alle einfach zusammenhängenden Überlagerungen sind äquivalent.

**Hauptresultat** Jeder wegzusammenhängende, lokal wegzusammenhängende und semilokal einfach zusammenhängende topologische Raum besitzt eine universelle Überlagerung!

# Kapitel 10

23.01.2012

## 10.1 Geometrie von Flächen

**Definition 10.1** (Fläche in  $\mathbb{R}^3$ ). Eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$  ist eine glatte, 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

**Bemerkung 10.1.**  $F \subset \mathbb{R}^3$  ist Fläche in  $\mathbb{R}^3$  genau dann, wenn für jeden Punkt  $x \in F$  eine Umgebung  $U = U(x) \subseteq F$  existiert und  $r: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  für eine Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^2$ , so dass gilt:

1.  $r: V \rightarrow U$  ist Homöomorphismus,
2.  $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  ist glatt,
3.  $r_u := \frac{\partial r}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$  und  $r_v := \frac{\partial r}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$  sind in jedem Punkt <sup>1</sup> linear unabhängig.

**Beispiel 10.1.** • Torus:

Eine Parameterdarstellung des Torus ist für  $a, b > 0$  gegeben durch

$$r(u, v) = (a + b \cdot \cos u)(\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + b \cdot \sin u \cdot e_3$$

- Allgem. Rotationsfläche:

$$r(u, v) = f(u)(\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + u \cdot e_3$$

$\Rightarrow$  Spezialfall: Zylinder

$$\begin{aligned} r(u, v) &= a(\cos v \cdot e_1 + \sin v \cdot e_2) + u \cdot e_3 \\ &= (a \cdot \cos v, a \cdot \sin v, u) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>von  $V$



**Definition 10.2** (Bogenlänge einer glatten Kurve). Die Bogenlänge einer glatten Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow F$  in  $F$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma' \cdot \gamma'} dt = \int_a^b \sqrt{(r_u u' + r_v v') \cdot (r_u u' + r_v v')} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{E \cdot (u')^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot (v')^2} dt \end{aligned}$$

mit  $E := r_u \cdot r_u$ ,  $F := r_u \cdot r_v$ ,  $G := r_v \cdot r_v$ .

**Definition 10.3** (erste Fundamentalform). Die erste Fundamentalform einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist gegeben durch

$$I := E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2$$

mit  $E, F, G$  wie oben.

**Beispiel 10.2** (Erste Fundamentalform des Zylinders). Parametrisierung des Zylinders ist gegeben durch

$$r(u, v) = (a \cdot \cos v, a \cdot \sin v, u).$$

<sup>2</sup> Es gilt:

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{\partial r}{\partial u} = (0, 0, 1), \\ r_v &= \frac{\partial r}{\partial v} = (-a \cdot \sin v, a \cdot \cos v, 0). \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} E &= r_u \cdot r_u = 1, \\ F &= r_u \cdot r_v = 0, \end{aligned}$$

<sup>3</sup>

$$G = r_v \cdot r_v = a^2.$$

Also gilt für die erste Fundamentalform:

$$\begin{aligned} I_{\text{Zylinder}} &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ &= du^2 + a^2 dv^2 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Hinweis: Fundamentalform ausrechnen lassen könnte in der Klausur drankommen.

<sup>3</sup>Hier überall Skalarprodukt!

**Die Sphäre**  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  Eine Parameterdarstellung der Sphäre  $S^2$  ist gegeben durch

$$r(u, v) = (a \cdot \cos u \cos v, a \cdot \sin u \cos v, a \cdot \sin v)$$

(für  $a > 0, u \in [0, 2\pi], v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ).

Für die Tangentialvektoren  $r_u$  und  $r_v$  gilt:

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = (-a \cdot \sin u \cos v, a \cdot \cos u \cos v, 0)$$

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (-a \cdot \cos u \sin v, -a \cdot \sin u \sin v, a \cdot \cos v)$$

Der Tangentialraum  $T_x S^2$  im Punkte  $x \in S^2$  ist der Aufspann von  $(r_u \circ r^{-1})(x)$  und  $(r_v \circ r^{-1})(x)$ .

**(Einheits-) Normalenvektoren** Es gilt:

$$r_u \times r_v = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin u \cos v \\ a \cdot \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \cdot \cos v \sin v \\ -a \cdot \sin u \sin v \\ a \cdot \cos v \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin v \cos v \end{pmatrix}.$$

4

**Wiederholung Kreuzprodukt** für  $a, b \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

**Erste Fundamentalform** Es gilt:

$$E = r_u \cdot r_u = a^2 \cdot \cos^2 v,$$

$$F = r_u \cdot r_v = 0,$$

$$G = r_v \cdot r_v = a^2.$$

Damit folgt für die erste Fundamentalform:

$$I_{\text{Sphäre}} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = a^2 \cdot \cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$$

---

Aufgabe 5 außerhalb der Wertung

$\Rightarrow$  48 Punkte zu erreichen  $\Rightarrow$  24 Punkte und mehr: bestanden

---

<sup>4</sup>Muss (für Einheitsnormalenvektoren) noch durch die Norm geteilt werden

# Kapitel 11

30.01.2012

**Vortragsankündigung** Vortrag "Krümmung und Symmetrie" (Prof. A. Dessai) Di. 31.01. 17:30 Uhr im Neuen HS (Architektur)

## 11.1 Nachtrag zur Topologie von Flächen

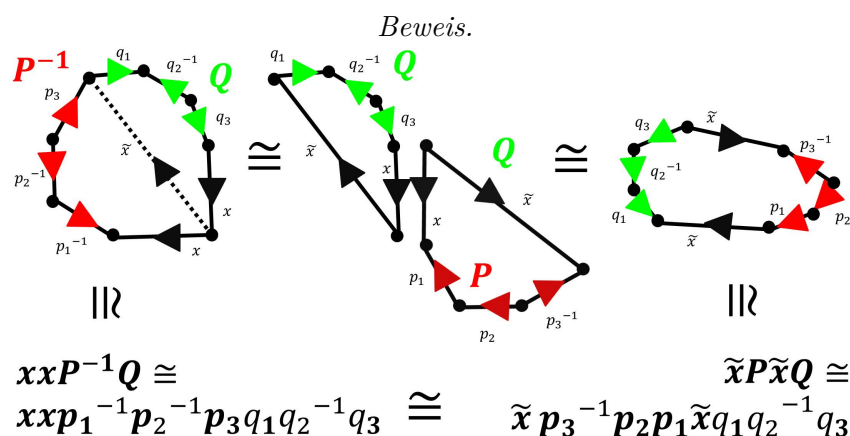
**Behauptung:** Es gilt:

1.  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong K^2$
2.  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong T^2 \# \mathbb{RP}^2$

**Lemma 11.1.** Es bezeichne  $x$  eine Seite eines Polygons mit gerader Seitenzahl,  $P$  und  $Q$  seien jeweils eine Folge von Seiten desselben. Es gilt:

$$xxP^{-1}Q \cong \tilde{x}P\tilde{x}Q.$$

1



2

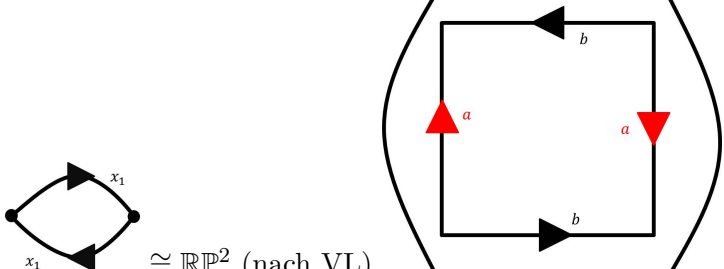
□

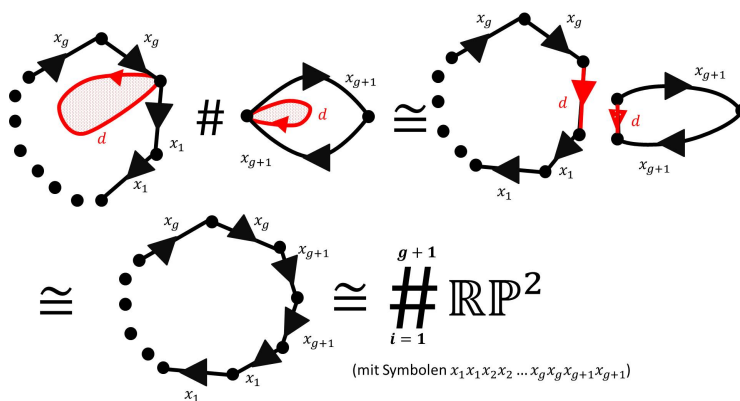
<sup>1</sup>"Classification of Surfaces" (R. Koch)

<sup>2</sup> $(p_1^{-1}p_2^{-1}p_3)^{-1} = p_3^{-1}p_2p_1$

**Lemma 11.2.** Die zusammenhängende Summe  $\#_{i=1}^g \mathbb{RP}^2$  lässt sich als  $2g$ -seitiges Polygon mit den Symbolen  $x_1 x_1 x_2 x_2 \cdots x_g x_g$  darstellen.

*Beweis.* (per Induktion über  $g$ .)

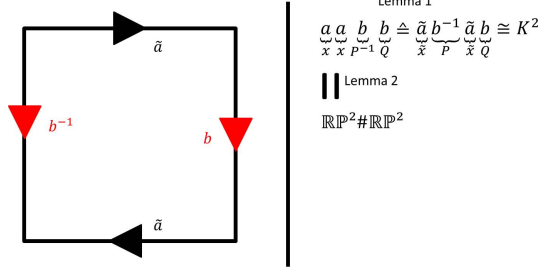
- $g=1$ :   $\cong \mathbb{RP}^2$  (nach VL)
- Die Behauptung gelte für die zusammenhängende Summe von  $g$  Kopien des  $\mathbb{RP}^2$ .



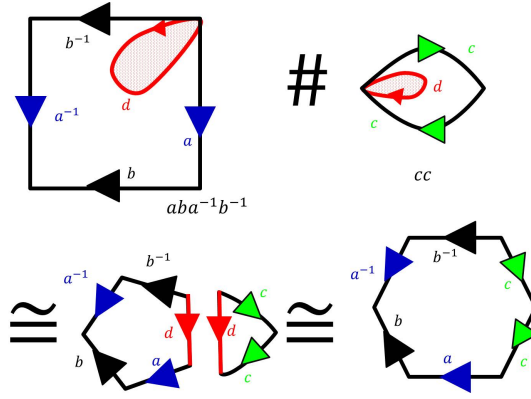
□

*Beweis.* Beweis der Behauptung:

1. (1)



2. (2)  $T^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong$



$T^2 \# \mathbb{RP}^2$  lässt sich als 6-seitiges Polygon mit den Symbolen  $ccaba^{-1}b^{-1}$  darstellen.

Iteriertes Anwenden von Lemma 1 liefert:

$$\begin{aligned}
 cc(ab)(a^{-1}b^{-1}) &\stackrel{\text{Lemma 1}}{\cong} \tilde{c}(ab)^{-1}\tilde{c}(a^{-1}b^{-1}) \cong \tilde{c}b^{-1}a^{-1}\tilde{c}(a^{-1}b^{-1}) = b^{-1}a^{-1}\tilde{c}a^{-1}b^{-1}\tilde{c} \\
 &\stackrel{\text{Lemma 1}}{\cong} \tilde{b}\tilde{b}(a^{-1}\tilde{c}a^{-1})^{-1}\tilde{c} \cong \tilde{b}\tilde{b}a\tilde{c}^{-1}a\tilde{c} \cong (\tilde{c}\tilde{b}\tilde{b})a(\tilde{c}^{-1})a \\
 &\stackrel{\text{Lemma 1}}{\cong} \tilde{a}\tilde{a}\tilde{c}\tilde{c}\tilde{b}\tilde{b}.
 \end{aligned}$$

□

## 11.2 Berechnung des Flächeninhalts der Sphäre $S^2$

Eine Parametrisierung der Sphäre  $S^2$  ist gegeben durch

$$\underbrace{r : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}_V \rightarrow \mathbb{R}^3, (\varphi, \Theta) \mapsto (\cos \varphi \cos \Theta, \sin \varphi \cos \Theta, \sin \Theta)$$

$$A = \int_V \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\Theta$$

$$r_\varphi = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi \cos \Theta, \cos \varphi \cos \Theta, 0)$$

$$r_\Theta = \frac{\partial r}{\partial \Theta} = (-\cos \varphi \sin \Theta, -\sin \varphi \sin \Theta, \cos \Theta)$$

Aus diesen Tangentialvektoren ergeben sich die Koeffizienten der ersten Fundamentalform:

$$E = r_\varphi \cdot r_\varphi = \cos^2 \Theta,$$

$$F = r_\varphi \cdot r_\Theta = 0,$$

$$G = r_\Theta \cdot r_\Theta = 1.$$

Für den Flächeninhalt gilt damit:

$$A = \int_V \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\Theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \Theta d\Theta = 2\pi \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 4\pi.$$

(TODO: Rest texten)

# Kapitel 12

06.02.2012

## 12.1 Anwendungen und Folgerungen der lokalen Version des Satzes von Gauß und Bonnet

**Satz 12.1** (Gauß-Bonnet (lokale Version)). Es sei  $\gamma$  eine einfache geschlossene Kurve, die ganz in einer Kartenumgebung einer orientierbaren Fläche  $F$  im  $\mathbb{R}^3$  verlaufe und einen Integrationsbereich  $R$  umschließe.

$$\int_{\gamma} \kappa_g ds = 2\pi - \int_R K dA$$

Dabei bezeichne  $\kappa_g$  die geodätische Krümmung von  $\gamma$ ,  $ds$  das Bogenlängenelement von  $\gamma$ ,  $K$  die Gauß-Krümmung von  $M$ ,  $dA$  das Flächenelement von  $M$ .

### Folgerungen

1. Entspricht  $F$  der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$ , so gilt für die Gauß-Krümmung  $K = 0$  und die lokale Version des Satzes von Gauß-Bonnet spezialisiert sich zum Umlaufsatz von Hopf für ebene Kurven:

**Satz 12.2** (Hopfscher Umlaufsatz). Für eine einfache geschlossene Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert und eben ist ( $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ), gilt:

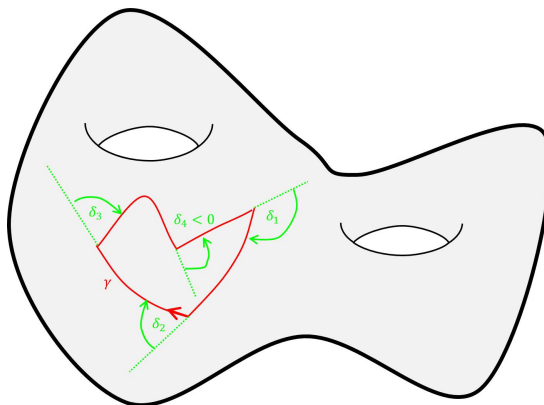
$$\int_a^b \kappa(s) ds = \pm 2\pi.$$

2. Gauß-Bonnet für stückweise glatte Kurven:

Es sei  $\gamma$  eine einfache geschlossene, stückweise glatte Kurve. Sind für  $i = 1, \dots, k$  die Ecken von  $\gamma$  durch  $\gamma(t_i)$  gegeben, die Außenwinkel mit

$\delta_i$ , so gilt:

$$\int_R K dA + \sum_{i=2}^{k+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \kappa_g(s) ds + \sum_{i=1}^k \delta_i = 2\pi.$$



**3. a)** Ist nun  $\gamma$  ein sogenanntes geodätisches Polygon, d.h. die einzelnen Abschnitte sind jeweils kürzeste Verbindungen zwischen den Eckpunkten  $\gamma(t_i)$ , so ist  $\kappa_g = 0$  und es gilt:

$$\int_R K dA + \sum_{i=1}^k \delta_i = 2\pi.$$

**b)** Für die Innenwinkel  $\alpha_i$  an den Ecken  $\gamma(t_i)$  gilt  $\alpha_i = \pi - \delta_i$  und somit folgt für ein geodätisches  $n$ -Eck:

$$\int_R K dA = 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = \pi(2 - n) + \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Insbesondere gilt also für ein geodätisches Dreieck  $\Delta$  mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ :

$$\int_{\Delta} K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Es lässt sich also die Gauß-Krümmung anhand der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks charakterisieren:

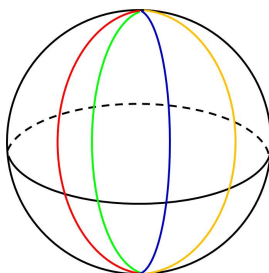
$$\alpha + \beta + \gamma \begin{cases} > \pi \\ = \pi \\ < \pi \end{cases}, \text{ falls } \begin{cases} K > 0 \\ K = 0 \\ K < 0 \end{cases}.$$

Beispiel für  $K = 1$  ist die Einheitssphäre  $S^2(1)$ , für  $K = 0$  die Ebene und für  $K = -1$  die hyperbolische Ebene.



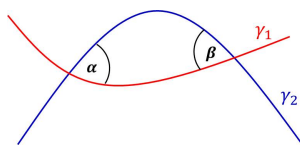
## Anwendungen

1. Ist  $K \leq 0$  auf einem Flächenstück  $F$ , so schneiden sich zwei nach Bogenlänge parametrisierte, voneinander verschiedene Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  höchstens einmal.



*Beweis.* Angenommen, die Kurven schneiden sich mehr als einmal.

Dann entsteht ein geodätisches 2-Eck, für das für die beiden Innenwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  gilt:  $\alpha > 0, \beta < 0$ .



Nach Folgerung 3.b) aus der lokalen Version des Satzes von Gauß-Bonnet gilt aber

$$0 \geq \int_F K dA = \pi(2 - 2) + \alpha + \beta = \alpha + \beta > 0. \quad \text{!}$$

□

2. Ein Großkreis(segment) auf der Einheitssphäre  $S^2(1)$  erfüllt (wie eine Gerade in der Ebene)  $\kappa_g = 0$ ,

denn: Ist beispielsweise  $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$ , so ist

$$t = \gamma' = \frac{d\gamma}{ds} = (-\sin(s), \cos(s), 0).$$

Damit folgt:

$$t' = \gamma'' = \frac{d^2\gamma}{ds^2} = -(\cos(s), \sin(s), 0),$$

d.h.  $t'$  steht senkrecht auf der Sphäre, d.h. die geodätische Krümmung  $\kappa_g$  verschwindet als tangentielle Komponente von  $t'$  an  $S^2$ .

Da für die Gauß-Krümmung auf der Einheitssphäre  $S^2(1)$  gilt  $K = 1$ ,  
folgt für ein (beliebiges) Dreieck mit den (Innen-)Winkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} \underbrace{K}_{\equiv 1} dA = \pi + \text{Flächeninhalt}(\Delta).$$