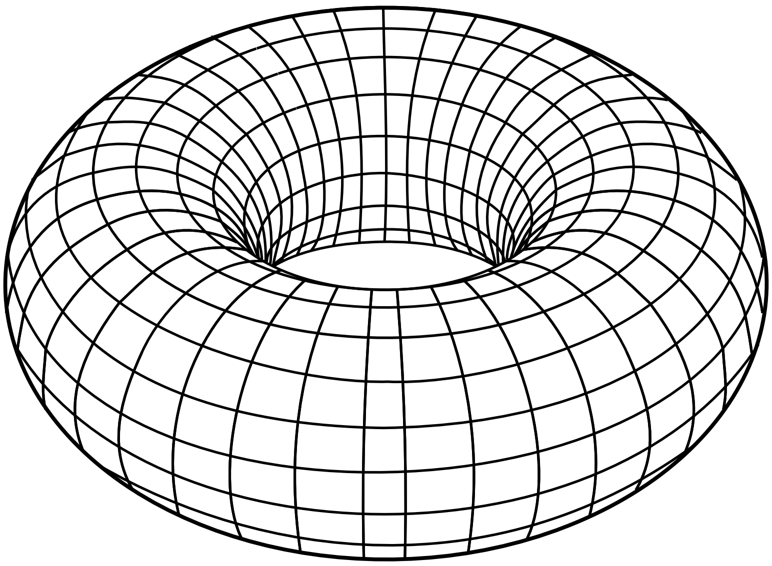
Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Übung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

29. Oktober 2011



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung "Einführung in die Geometrie und Topologie" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Frau Dipl.-Math. Sandra Lenz gehalten wird.

Kapitel 1

24.10.2011

1.1 Induzierte Topologie

Definition 1.1 (Induzierte Topologie)**.** *Sei X eine Menge. Sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Diese Metrik d definiert durch folgende Bedingung eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X:*
$O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{O}_d$), wenn für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

(B_ϵ nennt man offenen ϵ-Ball.)

1.2 Offen und abgeschlossen

Sei X eine Menge.

- Mengen können sowohl offen als auch abgeschlossen (zugleich) sein.

  Beispiel 1.1. *Betrachte $\emptyset$ und X in der trivialen Topologie $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$.*
  Es gilt: $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition, d.h. X und $\emptyset$ sind offen.
  Außerdem gilt: $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$, ebenso: $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$, d.h. die Komplemente von X und $\emptyset$ sind offen und somit X und $\emptyset$ abgeschlossen.

- Mengen können weder offen noch abgeschlossen sein.

  Beispiel 1.2. *Betrachte $\mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie. Es ist $[0, 1[$ nicht offen in dieser Topologie, denn für den Punkt 0 finden wir kein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(0)$ in $[0, 1[$ liegt. Die Menge $[0, 1[$ ist aber auch nicht abgeschlossen, da ihr Komplement $\mathbb{R}\backslash[0, 1[=] - \infty, 0[\cup [\underline{1}, \infty[$ nicht offen ist.*

- Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen müssen nicht notwendigerweise offen sein.

Beispiel 1.3. *Betrachte $\mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie.*
Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
Es gilt für die in $\mathbb{R}$ offene Menge $]-1,1[$:
$f(]-1,1[) = [0,1[$ *und* $[0,1[$ *ist nicht offen in* $\mathbb{R}$.

1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

1.4 Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.
Die Teilraumtopologie (oder Spurtopologie) ist definiert durch

$$\mathcal{O}\big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

Satz 1.1. *In der Tat definiert $\mathcal{O}\big|_A$ eine Topologie auf A.*

Beweis. •<u>z.z.</u>: Für jede Indexmenge I gilt: $\forall i \in I\colon O_i \in \mathcal{O}\big|_A \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}\big|_A$.
Sei I beliebige Indexmenge. Für alle $i \in I$ mit $O_i \in \mathcal{O}\big|_A$ gilt: Es existieren $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A$. Es gilt:

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = (\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i) \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$$

(da $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$).
• <u>z.z.</u>: $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}\big|_A\colon O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\big|_A$.
Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{O}\big|_A$. Dann ex. $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A, i \in \{1,2\}$. Es gilt: $O_1 \cap O_2 = (\mathcal{U}_1 \cap A) \cap (\mathcal{U}_2 \cap A) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$.
• <u>z.z.</u>: $A, \emptyset \in \mathcal{O}\big|_A$.
Es gilt: $A = X \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $X \in \mathcal{O}$ nach Definition von $\mathcal{O}$.
Es gilt: $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $\emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition von $\mathcal{O}$. □

1.5 Homotopieäquivalenz

Definition 1.2. *Seien X, Y topologische Räume. X heißt <u>homotopieäquivalent zu Y</u>, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$.*

Satz 1.2. $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *ist homotopieäquivalent zur Sphäre* S^{n-1}.

Beweis. Sei $f\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, x \mapsto x$ (Inklusionsabbildung). Dann ist f stetig.
Sei weiter $g\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{||x||}$. Dann ist auch g stetig und es gilt: $g \circ f = id_{S^{n-1}}$, also insbesondere $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.
Für $f \circ g$ betrachte folgende Abbildung:

$$H\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, (x,t) \mapsto (1-t)\frac{x}{||x||} + t \cdot x$$

Dann ist H stetig und es gilt für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$:
$H(x,1) = x = id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}(x)$
$H(x,0) = \frac{x}{||x||} = (f \circ g)(x)$
Dann ist H Homotopie von $f \circ g$ nach $id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$ (in Zeichen: $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$). $\square$