

Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Übung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

22. November 2011



Inhaltsverzeichnis

1	24.10.2011	2
1.1	Induzierte Topologie	2
1.2	Offen und abgeschlossen	2
1.3	Basis der von der Standardmetrik auf dem \mathbb{R}^n definierten Topologie	3
1.4	Teilraumtopologie	3
1.5	Homotopieäquivalenz	3
2	31.10.2011	5
2.1	Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie	5
2.2	Homöomorphismen	6
2.3	Die Peano-Kurve	7
3	07.11.2011	8
3.1	Nachträge und Wiederholungen zur Vorlesung	8
4	14.11.2011	11
4.1	Beispiele für Beweise im Kontext von Hausdorffräumen	11
4.2	Beispiele für Mannigfaltigkeiten	11
5	21.11.11	15
5.1	Untermannigfaltigkeiten	15
5.2	Wichtige Spezialfälle (und Beispiele) von Untermannigfaltig- keiten	16

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Frau Dipl.-Math. Sandra Lenz gehalten wird.

Kapitel 1

24.10.2011

1.1 Induzierte Topologie

Definition 1.1 (Induzierte Topologie). Sei X eine Menge. Sei $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik. Diese Metrik d definiert durch folgende Bedingung eine Topologie \mathcal{O} auf X :

$O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{O}_d$), wenn für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

(B_ϵ nennt man offenen ϵ -Ball.)

1.2 Offen und abgeschlossen

Sei X eine Menge.

- Mengen können sowohl offen als auch abgeschlossen (zugleich) sein.

Beispiel 1.1. Betrachte \emptyset und X in der trivialen Topologie $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$.

Es gilt: $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition, d.h. X und \emptyset sind offen.

Außerdem gilt: $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$, ebenso: $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$, d.h. die Komplemente von X und \emptyset sind offen und somit X und \emptyset abgeschlossen.

- Mengen können weder offen noch abgeschlossen sein.

Beispiel 1.2. Betrachte \mathbb{R} mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie. Es ist $[0, 1[$ nicht offen in dieser Topologie, denn für den Punkt 0 finden wir kein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(0)$ in $[0, 1[$ liegt. Die Menge $[0, 1[$ ist aber auch nicht abgeschlossen, da ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus [0, 1[=] - \infty, 0[\cup [1, \infty[$ nicht offen ist.

- Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen müssen nicht notwendigerweise offen sein.

Beispiel 1.3. Betrachte \mathbb{R} mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie.

Definiere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Es gilt für die in \mathbb{R} offene Menge $] - 1, 1[$:

$f(] - 1, 1[) = [0, 1[$ und $[0, 1[$ ist nicht offen in \mathbb{R} .

1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem \mathbb{R}^n definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

1.4 Teilraumtopologie

Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.

Die Teilraumtopologie (oder Spurtopologie) ist definiert durch

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

Satz 1.1. In der Tat definiert $\mathcal{O}|_A$ eine Topologie auf A .

Beweis. • z.z.: Für jede Indexmenge I gilt: $\forall i \in I: O_i \in \mathcal{O}|_A \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}|_A$.

Sei I beliebige Indexmenge. Für alle $i \in I$ mit $O_i \in \mathcal{O}|_A$ gilt: Es existieren $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A$. Es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) \cap A \in \mathcal{O}|_A$$

(da $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$).

• z.z.: $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}|_A: O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}|_A$.

Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{O}|_A$. Dann ex. $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A, i \in \{1, 2\}$. Es gilt: $O_1 \cap O_2 = (\mathcal{U}_1 \cap A) \cap (\mathcal{U}_2 \cap A) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap A \in \mathcal{O}|_A$, da $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$.

• z.z.: $A, \emptyset \in \mathcal{O}|_A$.

Es gilt: $A = X \cap A \in \mathcal{O}|_A$, da $X \in \mathcal{O}$ nach Definition von \mathcal{O} .

Es gilt: $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}|_A$, da $\emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition von \mathcal{O} . □

1.5 Homotopieäquivalenz

Definition 1.2. Seien X, Y topologische Räume. X heißt homotopieäquivalent zu Y , falls es stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$.

Satz 1.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist homotopieäquivalent zur Sphäre S^{n-1} .

Beweis. Sei $f: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \mapsto x$ (Inklusionsabbildung). Dann ist f stetig.

Sei weiter $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Dann ist auch g stetig und es gilt: $g \circ f = id_{S^{n-1}}$, also insbesondere $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.

Für $f \circ g$ betrachte folgende Abbildung:

$$H: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (x, t) \mapsto (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + t \cdot x$$

Dann ist H stetig und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$H(x, 1) = x = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x)$$

$$H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = (f \circ g)(x)$$

Dann ist H Homotopie von $f \circ g$ nach $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ (in Zeichen: $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$).

□

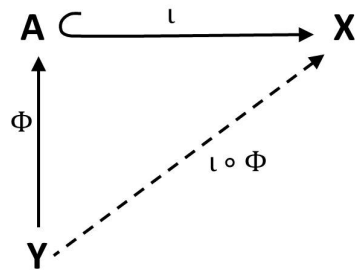
Kapitel 2

31.10.2011

2.1 Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie

Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ versehen mit der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$. Weiter sei $\iota: A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung und (Y, \mathcal{O}_Y) ein weiterer topologischer Raum.

Satz 2.1. *Behauptung Eine Abbildung $\phi: Y \rightarrow A$ ist genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota \circ \phi: Y \rightarrow X$ stetig ist.*



Beweis. ' \Rightarrow ': Es sei $\phi: Y \rightarrow A$ stetig. [z.z.: $\iota \circ \phi$ ist stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}_X: (\iota \circ \phi)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$]

Sei $O \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt $(\iota \circ \phi)^{-1}(O) = \phi^{-1}(\iota^{-1}(O))$ und es ist $\iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$, da ι stetig ist.

Es gilt somit $\phi^{-1}(\iota^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_Y$, da ϕ stetig ist (nach Voraussetzung).

' \Leftarrow ': Es sei $\phi: Y \rightarrow A$ eine Abbildung, so dass $\iota \circ \phi: Y \rightarrow X$ stetig ist. [z.z.: ϕ ist stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}_A: \phi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$.]

Sei also $O \in \mathcal{O}_A$. Dann existiert $O' \in \mathcal{O}_X$, so dass $O = O' \cap A$. Es gilt: $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O$.

$\phi^{-1}(O) = \phi^{-1}(O' \cap A) = \phi^{-1}(\iota^{-1}(O')) = (\iota \circ \phi)^{-1}(O') \in \mathcal{O}_Y$, da $\iota \circ \phi$ stetig (nach Voraussetzung). \square

Bemerkung 2.1. (Bemerkung in der Vorlesung)

Die Teilraumtopologie ist die grösste Topologie, bezüglich der die Inklusionsabbildung $\iota: A \hookrightarrow X$ stetig ist.

Beweis. Stetigkeit der Inklusionsabbildung: [z.z.: $\forall O \in \mathcal{O}_X: \iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$]
Sei $O \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt $\iota^{-1}(O) = O \cap A \in \mathcal{O}_A$. \square

Beweis. Nichtstetigkeit in größeren Topologien: [z.z.: $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O' \in \mathcal{O}_X: \iota^{-1}(O') \notin \tilde{\mathcal{O}}$]

Sei $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}_A: O \notin \tilde{\mathcal{O}}$. Dann $\exists O' \in \mathcal{O}_X: O = O' \cap A$. Damit ist aber $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O \notin \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \iota: (A, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ist nicht stetig. \square

2.2 Homöomorphismen

Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das Intervall (a, b) homöomorph zum Intervall $(0, 1)$ ist, sowie dass $(0, 1)$ homöomorph ist zu \mathbb{R} .

Definiere $f: (a, b) \rightarrow (0, 1), x \mapsto \frac{a-x}{a-b}$, und $g: (0, 1) \rightarrow (a, b), x \mapsto (1-x) \cdot a + x \cdot b$.

Es gilt für alle $x \in (a, b)$:

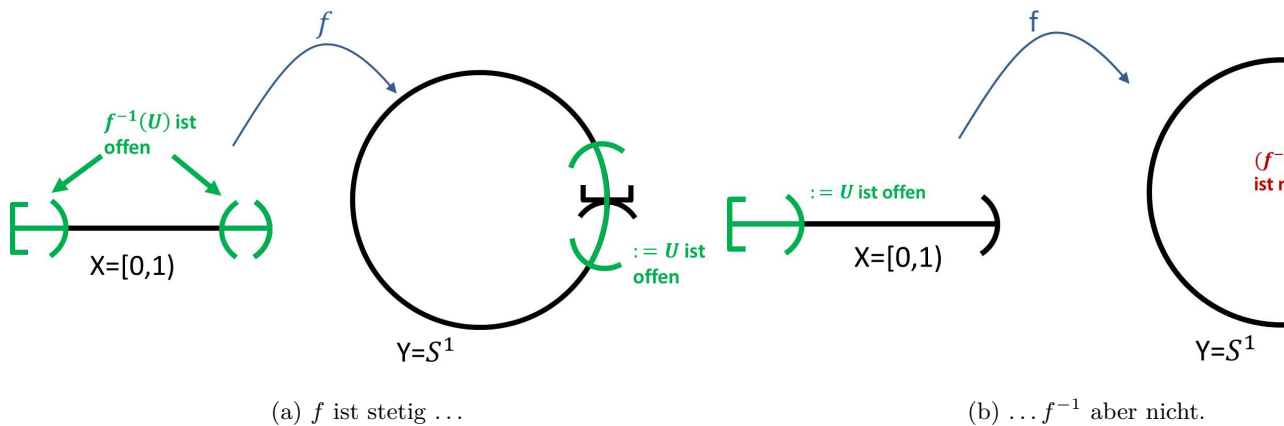
$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{a-x}{a-b}\right) = \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right)a + \frac{a-x}{a-b}b = \left(\frac{a-b-a+x}{a-b}\right)a + \frac{a-x}{a-b}b = \frac{x-b}{a-b}a + \frac{a-x}{a-b}b = \frac{ax-ab+ab-bx}{a-b} = x.$$

Es gilt für alle $x \in (0, 1)$:

$$(f \circ g)(x) = f((1-x) \cdot a + x \cdot b) = \frac{a - ((1-x)a + bx)}{a-b} = \frac{a-a+ax-bx}{a-b} = x. \text{ Somit ist } f \text{ bijektiv. Da } f \text{ und } g = f^{-1} \text{ stetig sind, gilt damit: } f \text{ ist ein Homöomorphismus, d.h. } (a, b) \equiv (0, 1).$$

Definiere $h: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left((x - \frac{1}{2})\pi\right)$.

$f: [0, 1) \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} (= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$ ist kein Homöomorphismus (da die Umkehrabbildung nicht stetig ist).



2.3 Die Peano-Kurve

(Guiseppe Peano, ~ 1890)

Satz 2.2. *Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $I = [0, 1] \rightarrow I \times I$.*

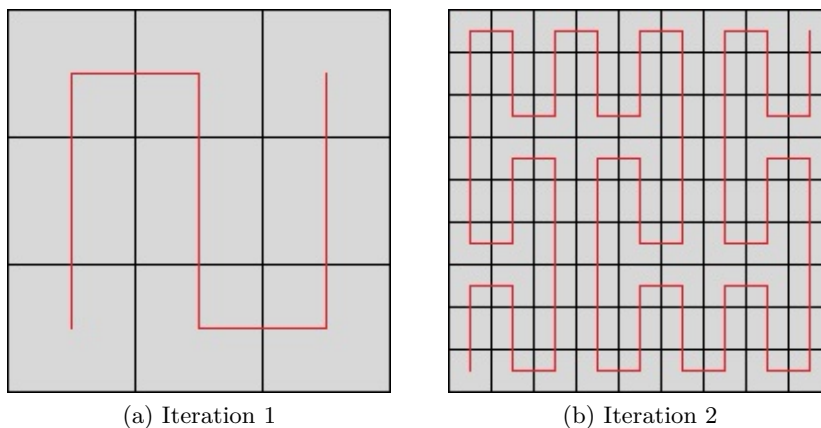


Abbildung 2.1: Prinzip der Peano-Kurve

Verallgemeinerung

- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $I \rightarrow I^n = I \times I \times \dots \times I (n \in \mathbb{N})$.
- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2.3.1 Zugang mit Hilfe der Cantor-Menge \mathcal{C}

Definiere $f: \mathcal{C} \rightarrow I, f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ für $a_i \in \{0, 2\}$.

Dann ist f surjektiv und stetig.

Definiere $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}, g\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i}}{3^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i+1}}{3^i}\right) =: (g_1, g_2)$ für $a_i \in \{0, 2\}$.

Dann ist g surjektiv und stetig.

Es ist auch $h: \mathcal{C} \rightarrow I \times I, x \mapsto (f(g_1(x)), f(g_2(x)))$ surjektiv und stetig.

Setze die Abbildung h durch lineare Fortsetzungen stetig auf I fort.

Kapitel 3

07.11.2011

3.1 Nachträge und Wiederholungen zur Vorlesung

3.1.1 Überdeckung, Teilüberdeckung und Kompaktheit

Sei X ein topologischer Raum.

Definition 3.1. • Eine Familie $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X , falls gilt: $X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$.

- Eine Überdeckung heißt offen (bzw. abgeschlossen), falls alle \mathcal{U}_α ($\alpha \in A$) offen (bzw. abgeschlossen) sind.
- Es heißt X kompakt, falls jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha, \alpha \in A\}$ eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{U}' besitzt, d.h. es existiert $A' \subset A$ endlich, so dass $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ eine offene Überdeckung von X ist.

Beispiel 3.1. • Endliche Räume und mit der trivialen Topologie versehene Räume sind kompakt.

- Diskrete Räume sind genau dann kompakt, wenn sie aus endlich vielen Elementen bestehen.
- \mathbb{R} (versehen mit der Standardtopologie) ist nicht kompakt, $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ schon. ($\mathcal{T}_1 = \{\mathbb{R} \setminus E \mid E \text{ endliche Teilmenge von } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$)

Definition 3.2. Eine kompakte Menge ist eine Teilmenge eines vom Kontext her klaren topologischen Raumes, die bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.

Beispiel 3.2. $[0, 1) (\subseteq \mathbb{R})$ ist nicht kompakt, denn: Die Überdeckung $\{(-1, 1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $[0, 1)$ enthält keine endliche Teilüberdeckung.

Bemerkung 3.1. • Satz von Heine-Borel: Teilmengen euklidischer, endlich dimensionaler Räume sind genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind.

- *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.*
- *Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt, d.h. ist X eine kompakte Menge, Y topologischer Raum, $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann ist $f(X)$ kompakt.*
- *Ist X kompakt, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt und f nimmt auf X Maximum und Minimum an.*
- *Lebesgue-Lemma: Ist $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung topologischer Räume und X metrisch und kompakt, so gilt:
Ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von Y , so existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $A \subseteq X$ mit $\text{diam } A < \delta$ ein $U' \in \mathcal{U}$ mit $f(A) \subseteq U'$ existiert.*

3.1.2 Wegzusammenhang

Definition 3.3. • Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $\gamma: I(=[0, 1]) \rightarrow X$ mit Anfangspunkt $\gamma(0)$ und Endpunkt $\gamma(1)$.

- *Man nennt X wegzusammenhängend, falls für alle $x, y \in X$ ein Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ in X existiert mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.*
- *Eine Wegzusammenhangskomponente von X ist eine wegzusammenhängende Teilmenge von X , die in keiner echt größeren solchen Teilmenge enthalten ist.*

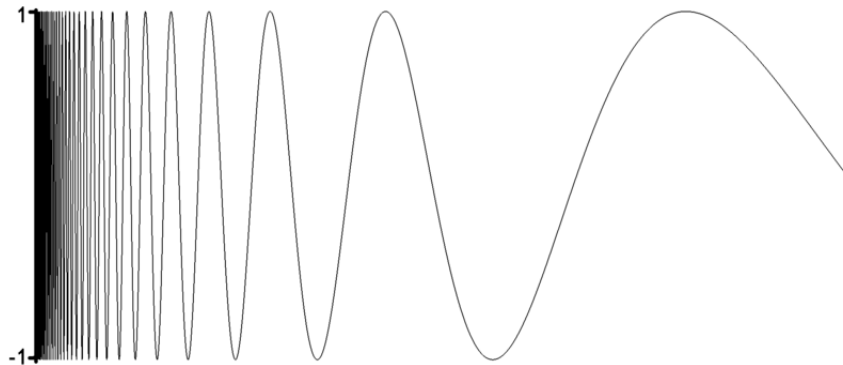
Bemerkung 3.2. • Jeder Punkt von X liegt in genau einer Wegzusammenhangskomponente von X , und zwei solche Komponenten sind entweder gleich oder disjunkt.

- *Stetige Bilder wegzusammenhängender Mengen sind wegzusammenhängend.*

Korollar 3.1. *Wegzusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, ebenso die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten.*

Wegzusammenhängende topologische Räume sind zusammenhängend (Übungsaufgabe), die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beispiel eines Raumes, der zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist Definiere $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\}$, $X := A \cup \{(0, 0)\}$.



Es gilt:

- Es ist A wegzusammenhängend, denn:
 $A \cong (0, +\infty) \cong \mathbb{R}$, und \mathbb{R} ist wegzusammenhängend.
- Es ist X zusammenhängend, denn:
 Es gilt: $\bar{A} = A \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$ ist als Abschluss einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend (siehe Bemerkung in der Vorlesung).
 Außerdem gilt: $A \subseteq X \subseteq \bar{A}$, und X ist als Teilmenge des Abschlusses eines zusammenhängenden Raumes wieder zusammenhängend. (Allgemein: Es sei A zusammenhängend, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Dann ist auch B zusammenhängend.)
- Es ist X nicht wegzusammenhängend, denn:
 Es lässt sich $(0, 0)$ nicht über einen Weg in X mit einem beliebigen anderen Punkt aus X verbinden¹.

Bemerkung 3.3. Der Abschluss wegzusammenhängender Räume ist im Allgemeinen nicht wegzusammenhängend!

Beispiel 3.3 (Beispiel von oben). Der Abschluss von A in X - nicht in \mathbb{R}^2 - ist X , und X ist (s.o.) nicht wegzusammenhängend.

Bemerkung 3.4. Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raumes X eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind alle Wegzusammenhangskomponenten offen in X , und X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn X zusammenhängend ist.

Beispiel 3.4. Offene Teilmengen von \mathbb{R}^n sind genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend sind, denn:
 Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt dann als offene Umgebung einen offenen Ball, und offene Bälle sind wegzusammenhängend.

¹Formale Begründung: Jeder in $(0, 0)$ startende Weg ist konstant.

Kapitel 4

14.11.2011

4.1 Beispiele für Beweise im Kontext von Hausdorffräumen

Satz 4.1. *Behauptung: Ist X ein Hausdorffraum, so besitzt jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Sei X ein Hausdorffraum.

Annahme: Es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x'$ und $x \neq x'$.

Da X Hausdorffsch ist, existieren offene Teilmengen $U, V \subseteq X$, mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U, x' \in V$. Dann existieren $n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U, x_m \in V$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, m \in \mathbb{N}_{\geq n'_0}$. Dann gilt also für alle $k \geq \max\{n_0, n'_0\}$: $x_k \in U \cap V = \emptyset$. \nmid □

Satz 4.2. *Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch.*

z.z.: $\forall x \neq y \in X \exists U_x, U_y \subseteq X: U_x \cap U_y = \emptyset$. Seien $x \neq y \in X$. Wähle $U_x := B_{\frac{d(x,y)}{3}}(x), U_y := B_{\frac{d(x,y)}{3}}(y)$.

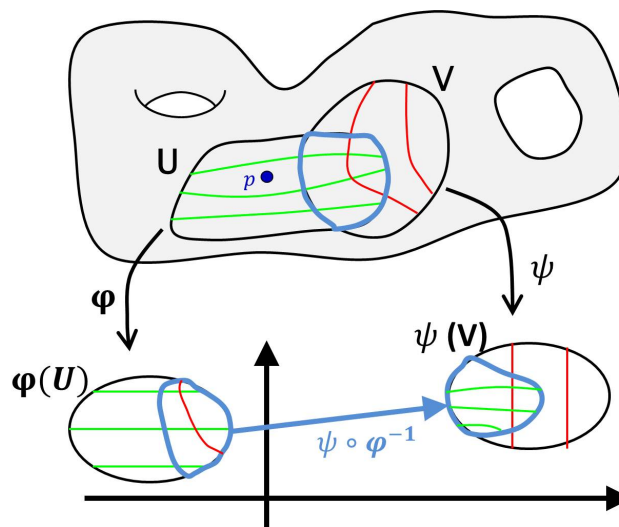
Dann gilt: $U_x \cap U_y = \emptyset$. □

4.2 Beispiele für Mannigfaltigkeiten

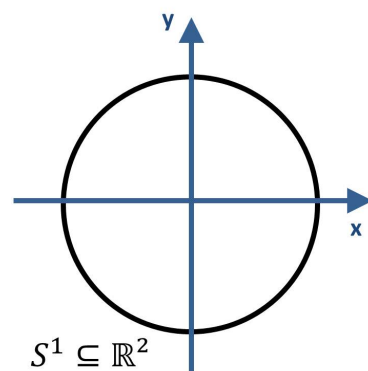
1. Was sind 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten?

- Abzählbare diskrete Mengen.

2. 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten



- Offene Intervalle in \mathbb{R} sind 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten, denn: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
 - (a, b) ist als metrischer Raum Hausdorffsch.
 - Es ist $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie.
 - (a, b) ist lokal homöomorph zu \mathbb{R} , denn: Es gilt: $id: (a, b) \mapsto (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus einer offenen Menge in eine offene Teilmenge von \mathbb{R} . Somit ist $((a, b), id_{(a,b)})$ eine (globale)¹ Karte.
 - Für den Kartenwechsel gilt: $id_{(a,b)} \circ id_{(a,b)}^{-1}: (a, b) \rightarrow (a, b), x \mapsto x$, ist eine glatte Abbildung.
- $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$



ist eine 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn:

- Es ist S^1 als Teilmenge des metrischen Raumes \mathbb{R}^2 Hausdorffsch.

¹Global, da für die ganze Mannigfaltigkeit gleich.

Ebenso besitzt S^1 eine abzählbare Basis der Topologie.

– Definiere

$$U_1 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\} = S^1 \setminus \{N\} \quad (N := (0, 1))$$

und

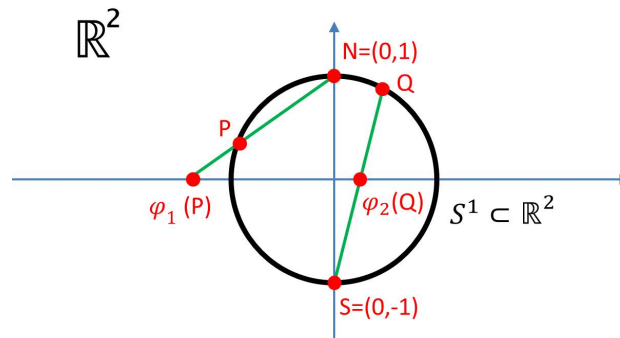
$$U_2 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\} = S^1 \setminus \{S\} \quad (S := (0, -1)).$$

Dann gilt:

- $U_1 \cup U_2 = S^1$,
- Es sind U_1 und U_2 offene Teilmengen von S^1 , denn sie sind jeweils Komplement einer einpunktigen und damit abgeschlossenen Menge.
- Definiere

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1-y},$$

$$\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1+y}.$$



Im Folgenden zeigen wir, dass (U_1, φ_1) eine Karte ist. Analoges gilt auch für (U_2, φ_2) mit analoger Rechnung.

– Definiere

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, u \mapsto \left(\frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right).$$

Dann gilt:

$$\varphi_1 \circ \psi = id_{\mathbb{R}},$$

$$\psi \circ \varphi_1 = id_{U_1}.$$

Damit ist φ_1 bijektiv.

Da φ_1 und ψ stetig sind, ist φ_1 damit ein Homöomorphismus.

- Die Kartenwechsel sind glatt, denn es gilt:

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Für alle $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(u) = (\varphi_2 \circ \psi)(u) = \frac{1}{u},$$

und dies ist tatsächlich ein C^∞ -Diffeomorphismus²
 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Es ist \mathbb{R}^n eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn:

- \mathbb{R}^n ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.
- $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ ist eine globale Karte.

Bemerkung 4.1. Jeder Atlas, der aus nur einer Karte besteht, ist glatt.

Beweis. Es sei $\mathcal{A} = \{(\varphi, U)\}$ dieser Atlas. Dann gilt:

Es gibt nur genau einen Kartenwechsel:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\varphi(U)}: \varphi(U) \rightarrow \varphi(U)$$

und dieser ist natürlich glatt. □

Satz 4.3. Offene Teilmengen von C^k -Mannigfaltigkeiten sind wieder C^k -Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Es sei M eine C^k -Mannigfaltigkeit der Dimension n , $N \subseteq_{\text{offen}} M$.

- Als Teilmenge von M ist N Hausdorffsch und auch die abzählbare Basis der Topologie überträgt sich.
- Es sei $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ (Λ Indexmenge) ein C^k -Atlas von M .
Für alle $\alpha \in \Lambda$ ist $U_\alpha \cap N$ offen in N und es gilt:

$$\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}: U_\alpha \cap N \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap N) \subseteq \mathbb{R}^n$$

und $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap N)$ ist als stetiges Bild der offenen Menge $U_\alpha \cap N$ wieder offen.

Somit ist $\{(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}, U_\alpha \cap N) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein Atlas für N .

Da die Kartenwechsel weiterhin C^k -Abbildungen sind, ist dieser Atlas ein C^k -Atlas für N . □

Beispiel 4.1. Es gilt: $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n^2}$

²d.h. bijektiv und unendlich oft differenzierbar und mit unendlich oft differenzierbarer Umkehrabbildung

Kapitel 5

21.11.11

5.1 Untermannigfaltigkeiten

Satz 5.1. C^∞ -Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^{n+l} sind C^∞ -Mannigfaltigkeiten
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ eine n -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+l} ,
versehen mit der Teilraumtopologie, und $\{\psi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$ eine
Menge lokaler Parametrisierungen (siehe Untermannigfaltigkeitskriterium,
(c)) mit $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

Dann ist $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^∞ -Atlas für M und M somit
eine C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Beweis. • Es gilt: M ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis
der Topologie (als Teilmenge von \mathbb{R}^{n+l}).

- Es ist \mathcal{A} ein Atlas (nach Definition der lokalen Parametrisierungen).
- [z.z.: Die Kartenwechsel sind glatt, d.h.:

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda: (U_\alpha \cap M) \cap (U_\beta \cap M) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha: \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$$

ist glatt.]

Seien $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $(U_\alpha \cap M) \cap (U_\beta \cap M) \neq \emptyset$.

(Vorsicht: Es ist ψ_β^{-1} nicht auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^{n+l} definiert, daher ist die Kettenregel nicht direkt anwendbar!)

Zeige: Es ist ψ_β^{-1} auf einer (offenen) Umgebung eines jeden Punktes
 $y \in U_\alpha \cap U_\beta \cap M$ eine glatte Abbildung.

Sei $x \in \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$. Nach dem Untermannigfaltigkeits-Kriterium
(b) existiert eine Umgebung $U \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ von $\psi_\alpha(x) \in M$ in \mathbb{R}^{n+l} und
ein C^∞ -Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ mit $\varphi(U \cap M) =$
 $\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

Definiere $\pi: \mathbb{R}^{n+l} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, die Projektion auf die ersten n

Komponenten und $\iota: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+l}, x \mapsto (x, 0)$, die Inklusion. Dann gilt auf $\varphi(U \cap M) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$: $\iota \circ \pi = id$. Daher gilt auf $\psi_\alpha^{-1}(U \cap M)$:

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha = \psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi_\alpha = (\psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \iota) \circ (\pi \circ \varphi \circ \psi_\alpha).$$

Es sind $(\psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \iota) = (\pi \circ \varphi \circ \psi_\beta)^{-1}$ und $\pi \circ \varphi \circ \psi_\alpha$ glatte Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n und somit auch die Komposition $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$.

□

5.2 Wichtige Spezialfälle (und Beispiele) von Untermannigfaltigkeiten

(a) Niveaumengen Es seien $V \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ offen, $f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l)$ und $c \in \mathbb{R}^l$. Gilt $\text{Rang } Df(x) = l$ in jedem Punkt x der Niveaumenge

$$f^{-1}(c) := f^{-1}(\{c\}) = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

so ist $f^{-1}(c)$ eine n -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+l} .

Beweis. Wende Untermannigfaltigkeits-Kriterium (a) auf die Abbildung

$$g = f - c: x \mapsto f(x) - c$$

an.

[z.z.: $\text{Rang } Df(x) = l$ auf einer Umgebung U von $f^{-1}(c)$, nicht nur auf der Niveaumenge selbst!]

Sei $x_0 \in f^{-1}(c)$. Da $\text{Rang } Df(x_0) = l$, existiert eine $(l \times l)$ -Unterdeterminante $A(x)$ von $\det Df(x)$, so dass $A(x_0) \neq 0$. Da f stetig ist, ist die Abbildung $x \mapsto A(x)$ stetig, und somit folgt: $A(x) \neq 0$ auf einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 . Dann ist $\text{Rang } Df(x) = l$ für alle $x \in U(x_0)$.

Setze $U := \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(c)} U(x_0)$, dann folgt die Behauptung. □

Beispiel 5.1. (TODO: Bild)

Der Zylinder $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist als Niveaumenge der Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \underbrace{x^2 + y^2} - 1$, eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .

(b)

Beispiel 5.2. Der Graph der Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, d.h. die Menge $\{(\cos(t), \sin(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, die Helix (TODO: Bild), ist eine 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .

(c) Global parametrisierte Untermannigfaltigkeiten Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$ glatt mit $\text{Rang } D\psi(w) = n$ für alle $w \in W$. Es sei ferner $\psi: W \rightarrow \psi(W)$ Homöomorphismus. Dann ist $\psi(W)$ eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+l} (nach Untermannigfaltigkeits-Kriterium (c) mit $U := \mathbb{R}^{n+l}$).

Für $n = 2$ und $l = 1$ heißt $\psi(W)$ eine parametrisierte Fläche von \mathbb{R}^3 .

Beispiel 5.3. 1. *Parametrisierung des Zylinders:*

Betrachte die glatte Abbildung $\psi: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, s) \mapsto (\cos(t), \sin(t), s)$. Das Bild dieser Abbildung ist der Zylinder im \mathbb{R}^3 (wie oben, ohne eine Gerade). Es gilt:

$$D\psi(t, s) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & 0 \\ \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, und damit: $\text{Rang } D\psi(t, s) = 2$ für alle $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, da \sin und \cos keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Damit ist ψ eine (globale) Parametrisierung des Zylinders.

2. (Rotationsflächen im \mathbb{R}^3)

Rotiere für Konstanten $0 < r < a$ die Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (a + r \cdot \cos(t), 0, r \cdot \sin(t))$. (TODO: Bild) in der x_1x_3 -Ebene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ 0 \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} (a + r \cdot \cos(t)) \cos(\Theta) \\ (a + r \cdot \cos(t)) \sin(\Theta) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}}_{(*)} \end{aligned}$$

Dann definiert $\Phi_\gamma: (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (\Theta, t) \mapsto (*)$ eine parametrisierte Fläche, den Rotationstorus.

• Der Rotationstorus $T \subseteq \mathbb{R}^3$ lässt sich als Niveaumenge definieren:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = r^2\}.$$

• Eine weitere (aus der Vorlesung bekannte) Darstellung des Torus ist

$$S^1 \times S^1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \wedge (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1\},$$

und dies ist nicht die letzte Möglichkeit der Darstellung des Torus (siehe nächste Vorlesung) ...