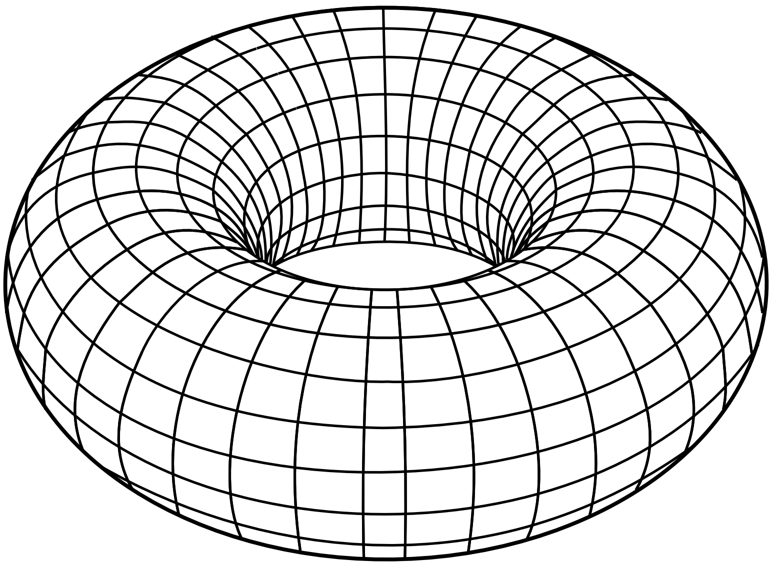
Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Übung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

3. November 2011



Inhaltsverzeichnis

1 24.10.2011 **2**
1.1 Induzierte Topologie 2
1.2 Offen und abgeschlossen 2
1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie 3
1.4 Teilraumtopologie 3
1.5 Homotopieäquivalenz 3

2 31.10.2011 **5**
2.1 Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie 5
2.2 Homöomorphismen 5
2.3 Die Peano-Kurve 6

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Frau Dipl.-Math. Sandra Lenz gehalten wird.

Kapitel 1

24.10.2011

1.1 Induzierte Topologie

Definition 1.1 (Induzierte Topologie)**.** *Sei X eine Menge. Sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Diese Metrik d definiert durch folgende Bedingung eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X:*
$O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{O}_d$), wenn für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

(B_ϵ nennt man offenen ϵ-Ball.)

1.2 Offen und abgeschlossen

Sei X eine Menge.

- Mengen können sowohl offen als auch abgeschlossen (zugleich) sein.

  Beispiel 1.1. *Betrachte $\emptyset$ und X in der trivialen Topologie $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$.*
  Es gilt: $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition, d.h. X und $\emptyset$ sind offen.
  Außerdem gilt: $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$, ebenso: $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$, d.h. die Komplemente von X und $\emptyset$ sind offen und somit X und $\emptyset$ abgeschlossen.

- Mengen können weder offen noch abgeschlossen sein.

  Beispiel 1.2. *Betrachte $\mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie. Es ist $[0,1[$ nicht offen in dieser Topologie, denn für den Punkt 0 finden wir kein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(0)$ in $[0,1[$ liegt. Die Menge $[0,1[$ ist aber auch nicht abgeschlossen, da ihr Komplement $\mathbb{R}\backslash[0,1[=]-\infty,0[\cup [\underline{1},\infty[$ nicht offen ist.*

- Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen müssen nicht notwendigerweise offen sein.

Beispiel 1.3. *Betrachte $\mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie.*
Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
Es gilt für die in $\mathbb{R}$ offene Menge $]-1,1[$:
$f(]-1,1[) = [0,1[$ *und* $[0,1[$ *ist nicht offen in* $\mathbb{R}$.

1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

1.4 Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.
Die Teilraumtopologie (oder Spurtopologie) ist definiert durch

$$\mathcal{O}\big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

Satz 1.1. *In der Tat definiert $\mathcal{O}\big|_A$ eine Topologie auf A.*

Beweis. •<u>z.z.</u>: Für jede Indexmenge I gilt: $\forall i \in I\colon O_i \in \mathcal{O}\big|_A \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}\big|_A$.
Sei I beliebige Indexmenge. Für alle $i \in I$ mit $O_i \in \mathcal{O}\big|_A$ gilt: Es existieren $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A$. Es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = (\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i) \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$$

(da $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$).
• <u>z.z.</u>: $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}\big|_A\colon O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\big|_A$.
Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{O}\big|_A$. Dann ex. $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A, i \in \{1,2\}$. Es gilt: $O_1 \cap O_2 = (\mathcal{U}_1 \cap A) \cap (\mathcal{U}_2 \cap A) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$.
• <u>z.z.</u>: $A, \emptyset \in \mathcal{O}\big|_A$.
Es gilt: $A = X \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $X \in \mathcal{O}$ nach Definition von $\mathcal{O}$.
Es gilt: $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $\emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition von $\mathcal{O}$. □

1.5 Homotopieäquivalenz

Definition 1.2. *Seien X, Y topologische Räume. X heißt <u>homotopieäquivalent zu Y</u>, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$.*

Satz 1.2. $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *ist homotopieäquivalent zur Sphäre* S^{n-1}.

Beweis. Sei $f\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, x \mapsto x$ (Inklusionsabbildung). Dann ist f stetig.
Sei weiter $g\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{||x||}$. Dann ist auch g stetig und es gilt: $g \circ f = id_{S^{n-1}}$, also insbesondere $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.
Für $f \circ g$ betrachte folgende Abbildung:

$$H\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, (x,t) \mapsto (1-t)\frac{x}{||x||} + t \cdot x$$

Dann ist H stetig und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash \{0\}$:
$H(x,1) = x = id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}(x)$
$H(x,0) = \frac{x}{||x||} = (f \circ g)(x)$
Dann ist H Homotopie von $f \circ g$ nach $id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$ (in Zeichen: $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$).
$\square$

Kapitel 2

31.10.2011

2.1 Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ versehen mit der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$. Weiter sei $\iota \colon A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung und sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum.

Satz 2.1. *Behauptung Eine Abbildung $\phi \colon Y \to A$ ist genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota \circ \phi \colon Y \to X$ stetig ist.*

Beweis. '$\Rightarrow$': Es sei $\phi \colon Y \to A$ stetig. [z.z.: $\iota \circ \phi$ ist stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}_X : (\iota \circ \phi)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$]
Sei $O \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt $(\iota \circ \phi)^{-1}(O) = \phi^{-1}\left(\iota^{-1}(O)\right)$ und es ist $\iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$, da ι stetig ist.
Es gilt somit $\phi^{-1}\left(\iota^{-1}(O)\right) \in \mathcal{O}_Y$, da ϕ stetig ist (nach Voraussetzung).
'$\Leftarrow$': Es sei $\phi \colon Y \to A$ eine Abbildung, so dass $\iota \circ \phi \colon Y \to X$ stetig ist. [z.z.: ϕ ist stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}_A \colon \phi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$.]
Sei also $O \in \mathcal{O}_A$. Dann existiert $O\prime \in \mathcal{O}_X$, so dass $O = O\prime \cap A$. Es gilt: $\iota^{-1}(O\prime) = O\prime \cap A = O$.
$\phi^{-1}(O) = \phi^{-q}(O\prime \cap A) = \phi^{-1}\left(\iota^{-1}(O\prime)\right) = (\iota \circ \phi)^{-1}(O\prime) \in \mathcal{O}_Y$, da $\iota \circ \phi$ stetig (nach Voraussetzung). $\square$

Bemerkung 2.1. *Bemerkung in der Vorlesung Die Teilraumtopologie ist die gröbste Topologie, bezüglich der die Inklusionsabbildung $\iota \colon A \hookrightarrow X$ stetig ist.*

Beweis. Stetigkeit der Inklusionsabbildung: [z.z.: $\forall O \in \mathcal{O}_X : \iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$]
Sei $O \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt $\iota^{-1}(O) = O \cap A \in \mathcal{O}_A$. $\square$

2.2 Homöomorphismen

Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das Intervall (a, b) homöomorph zum Intervall $(0, 1)$ ist, sowie dass $(0, 1)$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}$.

Definiere $f\colon (a,b) \to (0,1), x \mapsto \frac{a-x}{a-b}$, und $g\colon (0,1) \to (a,b), x \mapsto (1-x) \cdot a + x \cdot b$.
Es gilt für alle $x \in (a,b)$:
$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{a-x}{a-b}\right) = \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right) a + \frac{a-x}{a-b} b = \left(\frac{a-b-a+x}{a-b}\right) a + \frac{a-x}{a-b} b = \frac{x-b}{a-b} a + \frac{a-x}{a-b} b = \frac{ax-ab+ab-bx}{a-b} = x$.
Es gilt für alle $x \in (0,1)$: $(f \circ g)(x) = x$. Somit ist f bijektiv. Da f und $g \circ f^{-1}$ stetig sind, gilt damit: f ist ein Homöomorphismus, d.h. $(a,b) \equiv (0,1)$.
Definiere $h\colon (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left((x - \frac{1}{2})\pi\right)$.
(TODO:BILD)
$f\colon [0,1) \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ $(= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$ ist kein Homöomorphismus (da die Umkehrabbildung nicht stetig ist).

2.3 Die Peano-Kurve

(Guiseppe Peano, $\tilde{1}890$)

Satz 2.2. *Es gibt eine stetige, surjektive Abbildung $I = [0,1] \to I \times I$.*

Verallgemeinerung

- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $I \to I^n (n \in \mathbb{N}) = I \times I \times \ldots \times I$.
- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

(TODO:BILDER)

2.3.1 Zugang mit Hilfe der Cantor-Menge $\mathcal{C}$

Definiere $f\colon \mathcal{C} \to I, f\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{a_i}{2}}{2^i}$ für $a_i \in \{0,2\}$.
Dann ist f surjektiv und stetig.
Definiere $g\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}, g\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i}}{3^i}, \frac{a_{2i+1}}{3^i}\right) =: (g_1, g_2)$ für $a_i \in \{0,2\}$.
Dann ist g surjektiv und stetig.
Es ist auch $h\colon \mathcal{C} \to I \times I, x \mapsto (f(g_1(x)), f(g_2(x)))$ surjektiv und stetig.
Setze die Abbildung h durch lineare Fortsetzungen stetig auf I fort.