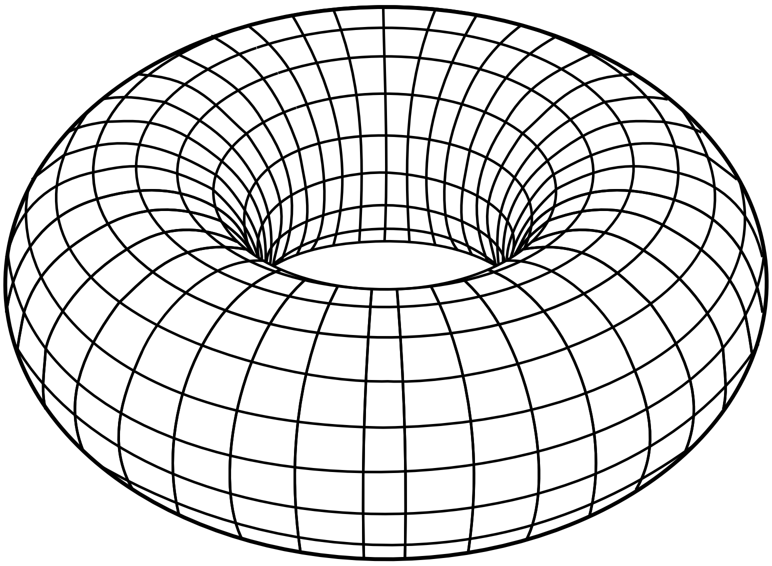
# Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

## Übung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

4. November 2011



# Inhaltsverzeichnis

**1 24.10.2011** **2**
1.1 Induzierte Topologie . . . 2
1.2 Offen und abgeschlossen . . . 2
1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie . . . 3
1.4 Teilraumtopologie . . . 3
1.5 Homotopieäquivalenz . . . 3

**2 31.10.2011** **5**
2.1 Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie . . . 5
2.2 Homöomorphismen . . . 6
2.3 Die Peano-Kurve . . . 7

## Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Frau Dipl.-Math. Sandra Lenz gehalten wird.

# Kapitel 1

# 24.10.2011

## 1.1 Induzierte Topologie

**Definition 1.1** (Induzierte Topologie)**.** *Sei $X$ eine Menge. Sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Diese Metrik $d$ definiert durch folgende Bedingung eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$:*
*$O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{O}_d$), wenn für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit*

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

*($B_\epsilon$ nennt man offenen $\epsilon$-Ball.)*

## 1.2 Offen und abgeschlossen

Sei $X$ eine Menge.

- Mengen können sowohl offen als auch abgeschlossen (zugleich) sein.

  **Beispiel 1.1.** *Betrachte $\emptyset$ und $X$ in der trivialen Topologie $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$.*
  *Es gilt: $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition, d.h. $X$ und $\emptyset$ sind offen.*
  *Außerdem gilt: $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$, ebenso: $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$, d.h. die Komplemente von $X$ und $\emptyset$ sind offen und somit $X$ und $\emptyset$ abgeschlossen.*

- Mengen können weder offen noch abgeschlossen sein.

  **Beispiel 1.2.** *Betrachte $\mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie. Es ist $[0,1[$ nicht offen in dieser Topologie, denn für den Punkt $0$ finden wir kein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(0)$ in $[0,1[$ liegt. Die Menge $[0,1[$ ist aber auch nicht abgeschlossen, da ihr Komplement $\mathbb{R}\backslash[0,1[ = ]-\infty, 0[ \cup [\underline{1}, \infty[$ nicht offen ist.*

- Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen müssen nicht notwendigerweise offen sein.

**Beispiel 1.3.** *Betrachte $\mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie.*
*Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.*
*Es gilt für die in $\mathbb{R}$ offene Menge $]-1,1[$:*
$f(]-1,1[) = [0,1[$ *und* $[0,1[$ *ist nicht offen in* $\mathbb{R}$.

## 1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

## 1.4 Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.
Die Teilraumtopologie (oder Spurtopologie) ist definiert durch

$$\mathcal{O}\big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

**Satz 1.1.** *In der Tat definiert $\mathcal{O}\big|_A$ eine Topologie auf $A$.*

*Beweis.* •z.z.: Für jede Indexmenge $I$ gilt: $\forall i \in I\colon O_i \in \mathcal{O}\big|_A \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}\big|_A$.
Sei $I$ beliebige Indexmenge. Für alle $i \in I$ mit $O_i \in \mathcal{O}\big|_A$ gilt: Es existieren $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A$. Es gilt:

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = (\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i) \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$$

(da $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$).
• z.z.: $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}\big|_A\colon O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\big|_A$.
Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{O}\big|_A$. Dann ex. $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A, i \in \{1,2\}$. Es gilt: $O_1 \cap O_2 = (\mathcal{U}_1 \cap A) \cap (\mathcal{U}_2 \cap A) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$.
• z.z.: $A, \emptyset \in \mathcal{O}\big|_A$.
Es gilt: $A = X \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $X \in \mathcal{O}$ nach Definition von $\mathcal{O}$.
Es gilt: $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $\emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition von $\mathcal{O}$. □

## 1.5 Homotopieäquivalenz

**Definition 1.2.** *Seien $X, Y$ topologische Räume. $X$ heißt homotopieäquivalent zu $Y$, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$.*

**Satz 1.2.** $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *ist homotopieäquivalent zur Sphäre* $S^{n-1}$.

*Beweis.* Sei $f\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, x \mapsto x$ (Inklusionsabbildung). Dann ist $f$ stetig.
Sei weiter $g\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{||x||}$. Dann ist auch $g$ stetig und es gilt: $g \circ f = id_{S^{n-1}}$, also insbesondere $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.
Für $f \circ g$ betrachte folgende Abbildung:

$$H\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, (x,t) \mapsto (1-t)\frac{x}{||x||} + t \cdot x$$

Dann ist $H$ stetig und es gilt für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$:
$H(x,1) = x = id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}(x)$
$H(x,0) = \frac{x}{||x||} = (f \circ g)(x)$
Dann ist $H$ Homotopie von $f \circ g$ nach $id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$ (in Zeichen: $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$).
□

# Kapitel 2

# 31.10.2011

## 2.1 Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ versehen mit der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$. Weiter sei $\iota\colon A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum.

**Satz 2.1.** *Behauptung Eine Abbildung $\phi\colon Y \to A$ ist genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota \circ \phi\colon Y \to X$ stetig ist.*

*Beweis.* '$\Rightarrow$': Es sei $\phi\colon Y \to A$ stetig. [z.z.: $\iota \circ \phi$ ist stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}_X : (\iota \circ \phi)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$]
Sei $O \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt $(\iota \circ \phi)^{-1}(O) = \phi^{-1}\left(\iota^{-1}(O)\right)$ und es ist $\iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$, da $\iota$ stetig ist.
Es gilt somit $\phi^{-1}\left(\iota^{-1}(O)\right) \in \mathcal{O}_Y$, da $\phi$ stetig ist (nach Voraussetzung).
'$\Leftarrow$': Es sei $\phi\colon Y \to A$ eine Abbildung, so dass $\iota \circ \phi\colon Y \to X$ stetig ist. [z.z.: $\phi$ ist stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}_A : \phi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$.]
Sei also $O \in \mathcal{O}_A$. Dann existiert $O' \in \mathcal{O}_X$, so dass $O = O' \cap A$. Es gilt: $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O$.
$\phi^{-1}(O) = \phi^{-1}(O' \cap A) = \phi^{-1}\left(\iota^{-1}(O')\right) = (\iota \circ \phi)^{-1}(O') \in \mathcal{O}_Y$, da $\iota \circ \phi$ stetig (nach Voraussetzung). □

**Bemerkung 2.1.** *(Bemerkung in der Vorlesung) Die Teilraumtopologie ist die gröbste Topologie, bezüglich der die Inklusionsabbildung $\iota\colon A \hookrightarrow X$ stetig ist.*

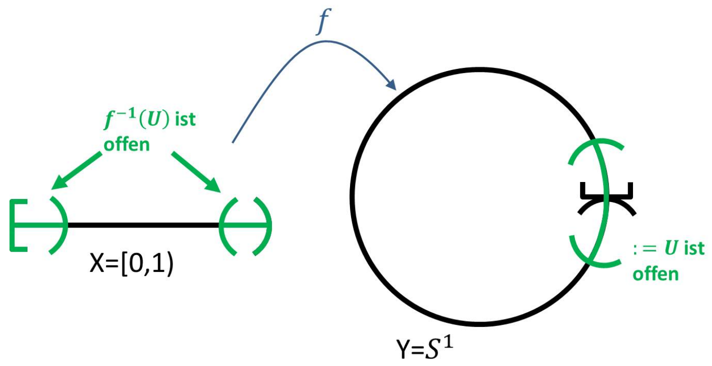
*Beweis.* Stetigkeit der Inklusionsabbildung: [z.z.: $\forall O \in \mathcal{O}_X : \iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$]
Sei $O \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt $\iota^{-1}(O) = O \cap A \in \mathcal{O}_A$. □

*Beweis.* Nichtstetigkeit in gröberen Topologien: [z.z.: $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O' \in \mathcal{O}_X : \iota^{-1}(O') \notin \tilde{\mathcal{O}}$]
Sei $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}_A : O \notin \tilde{\mathcal{O}}$. Dann $\exists O' \in \mathcal{O}_X : O = O' \cap A$. Damit ist aber $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O \notin \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \iota\colon (A, \tilde{\mathcal{O}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ist nicht stetig. □

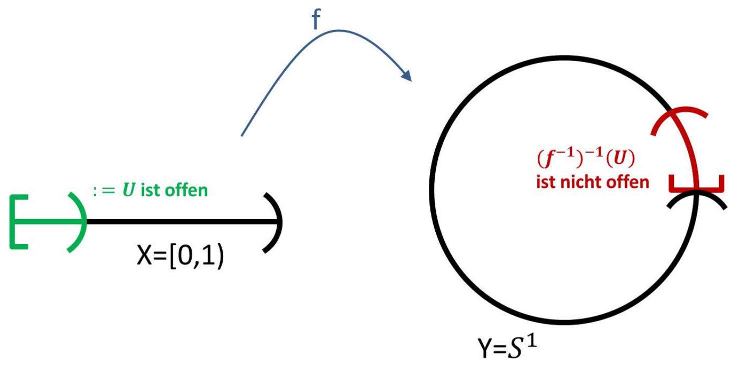
## 2.2 Homöomorphismen

Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das Intervall $(a, b)$ homöomorph zum Intervall $(0, 1)$ ist, sowie dass $(0, 1)$ homöomorph ist zu $\mathbb{R}$.
Definiere $f\colon (a, b) \to (0, 1), x \mapsto \frac{a-x}{a-b}$, und $g\colon (0, 1) \to (a, b), x \mapsto (1 - x) \cdot a + x \cdot b$.
Es gilt für alle $x \in (a, b)$:
$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{a-x}{a-b}\right) = \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right) a + \frac{a-x}{a-b} b = \left(\frac{a-b-a+x}{a-b}\right) a + \frac{a-x}{a-b} b = \frac{x-b}{a-b} a + \frac{a-x}{a-b} b = \frac{ax-ab+ab-bx}{a-b} = x$.
Es gilt für alle $x \in (0, 1)$:
$(f \circ g)(x) = f((1 - x) \cdot a + x \cdot b) = \frac{a-((1-x)a+bx)}{a-b} = \frac{a-a+ax-bx}{a-b} = x$. Somit ist $f$ bijektiv. Da $f$ und $g = f^{-1}$ stetig sind, gilt damit: $f$ ist ein Homöomorphismus, d.h. $(a, b) \equiv (0, 1)$.
Definiere $h\colon (0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left((x - \frac{1}{2})\pi\right)$.

$f\colon [0, 1) \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ $(= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$ ist kein Homöomorphismus (da die Umkehrabbildung nicht stetig ist).




(a) $f$ ist stetig ...

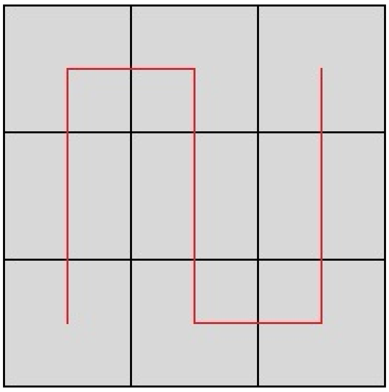



(b) ... $f^{-1}$ aber nicht.

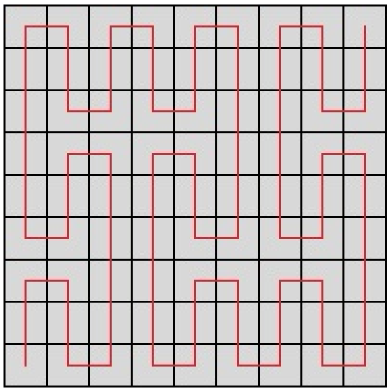
## 2.3 Die Peano-Kurve

(Guiseppe Peano, $\sim$ 1890)

**Satz 2.2.** *Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung* $I = [0,1] \to I \times I$.



(a) Iteration 1



(b) Iteration 2

Abbildung 2.1: Prinzip der Peano-Kurve

**Verallgemeinerung**

- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $I \to I^n = I \times I \times \ldots \times I (n \in \mathbb{N})$.
- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

### 2.3.1 Zugang mit Hilfe der Cantor-Menge $\mathcal{C}$

Definiere $f\colon \mathcal{C} \to I, f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{a_i}{2}}{2^i}$ für $a_i \in \{0,2\}$.
Dann ist $f$ surjektiv und stetig.
Definiere $g\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}, g\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i}}{3^i}, \frac{a_{2i+1}}{3^i}\right) =: (g_1, g_2)$ für $a_i \in \{0,2\}$.
Dann ist $g$ surjektiv und stetig.
Es ist auch $h\colon \mathcal{C} \to I \times I, x \mapsto (f(g_1(x)), f(g_2(x)))$ surjektiv und stetig.
Setze die Abbildung $h$ durch lineare Fortsetzungen stetig auf $I$ fort.