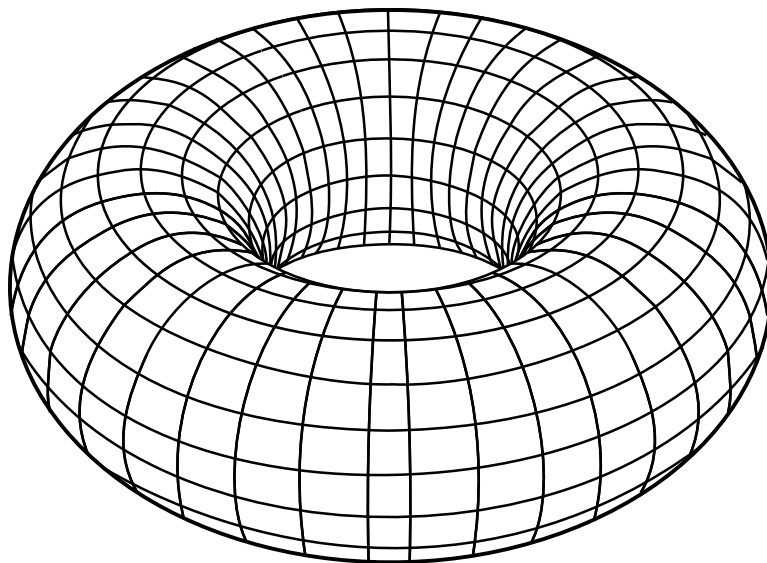


# Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Übung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

21. November 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>24.10.2011</b>	<b>2</b>
1.1	Induzierte Topologie . . . . .	2
1.2	Offen und abgeschlossen . . . . .	2
1.3	Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie . . . . .	3
1.4	Teilraumtopologie . . . . .	3
1.5	Homotopieäquivalenz . . . . .	3
<b>2</b>	<b>31.10.2011</b>	<b>5</b>
2.1	Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie . . . . .	5
2.2	Homöomorphismen . . . . .	6
2.3	Die Peano-Kurve . . . . .	6
<b>3</b>	<b>07.11.2011</b>	<b>8</b>
3.1	Nachträge und Wiederholungen zur Vorlesung . . . . .	8
<b>4</b>	<b>14.11.2011</b>	<b>11</b>
4.1	Beispiele für Beweise im Kontext von Hausdorffräumen . . . . .	11
4.2	Beispiele für Mannigfaltigkeiten . . . . .	11
<b>5</b>	<b>21.11.11</b>	<b>14</b>
5.1	Untermannigfaltigkeiten . . . . .	14
5.2	Wichtige Spezialfälle (und Beispiele) von Untermannigfaltig- keiten . . . . .	15

## Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Frau Dipl.-Math. Sandra Lenz gehalten wird.

# Kapitel 1

24.10.2011

## 1.1 Induzierte Topologie

**Definition 1.1** (Induzierte Topologie). Sei  $X$  eine Menge. Sei  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik. Diese Metrik  $d$  definiert durch folgende Bedingung eine Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ :

$O \subseteq X$  ist genau dann offen (d.h.  $O \in \mathcal{O}_d$ ), wenn für alle  $x \in O$  ein  $\epsilon > 0$  existiert mit

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

( $B_\epsilon$  nennt man offenen  $\epsilon$ -Ball.)

## 1.2 Offen und abgeschlossen

Sei  $X$  eine Menge.

- Mengen können sowohl offen als auch abgeschlossen (zugleich) sein.

**Beispiel 1.1.** Betrachte  $\emptyset$  und  $X$  in der trivialen Topologie  $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$ .

Es gilt:  $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$  nach Definition, d.h.  $X$  und  $\emptyset$  sind offen.

Außerdem gilt:  $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$ , ebenso:  $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$ , d.h. die Komplemente von  $X$  und  $\emptyset$  sind offen und somit  $X$  und  $\emptyset$  abgeschlossen.

- Mengen können weder offen noch abgeschlossen sein.

**Beispiel 1.2.** Betrachte  $\mathbb{R}$  mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie. Es ist  $[0, 1[$  nicht offen in dieser Topologie, denn für den Punkt 0 finden wir kein  $\epsilon > 0$ , so dass  $B_\epsilon(0)$  in  $[0, 1[$  liegt. Die Menge  $[0, 1[$  ist aber auch nicht abgeschlossen, da ihr Komplement  $\mathbb{R} \setminus [0, 1[ = ] - \infty, 0] \cup [1, \infty[$  nicht offen ist.

- Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen müssen nicht notwendigerweise offen sein.

**Beispiel 1.3.** Betrachte  $\mathbb{R}$  mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie.

Definiere  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

Es gilt für die in  $\mathbb{R}$  offene Menge  $] - 1, 1[$ :

$f(]-1, 1[) = [0, 1[$  und  $[0, 1[$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}$ .

### 1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

### 1.4 Teilraumtopologie

Es sei  $(X, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$ .

Die Teilraumtopologie (oder Spurtopologie) ist definiert durch

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

**Satz 1.1.** In der Tat definiert  $\mathcal{O}|_A$  eine Topologie auf  $A$ .

*Beweis.* • z.z.: Für jede Indexmenge  $I$  gilt:  $\forall i \in I: O_i \in \mathcal{O}|_A \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}|_A$ .

Sei  $I$  beliebige Indexmenge. Für alle  $i \in I$  mit  $O_i \in \mathcal{O}|_A$  gilt: Es existieren  $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$  mit  $O_i = \mathcal{U}_i \cap A$ . Es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = \left( \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) \cap A \in \mathcal{O}|_A$$

(da  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$ ).

• z.z.:  $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}|_A: O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}|_A$ .

Seien  $O_1, O_2 \in \mathcal{O}|_A$ . Dann ex.  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$  mit  $O_i = \mathcal{U}_i \cap A, i \in \{1, 2\}$ . Es gilt:  $O_1 \cap O_2 = (\mathcal{U}_1 \cap A) \cap (\mathcal{U}_2 \cap A) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap A \in \mathcal{O}|_A$ , da  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ .

• z.z.:  $A, \emptyset \in \mathcal{O}|_A$ .

Es gilt:  $A = X \cap A \in \mathcal{O}|_A$ , da  $X \in \mathcal{O}$  nach Definition von  $\mathcal{O}$ .

Es gilt:  $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}|_A$ , da  $\emptyset \in \mathcal{O}$  nach Definition von  $\mathcal{O}$ . □

### 1.5 Homotopieäquivalenz

**Definition 1.2.** Seien  $X, Y$  topologische Räume.  $X$  heißt homotopieäquivalent zu  $Y$ , falls es stetige Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $f \circ g \simeq id_Y$  und  $g \circ f \simeq id_X$ .

**Satz 1.2.**  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist homotopieäquivalent zur Sphäre  $S^{n-1}$ .

*Beweis.* Sei  $f: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \mapsto x$  (Inklusionsabbildung). Dann ist  $f$  stetig.

Sei weiter  $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ . Dann ist auch  $g$  stetig und es gilt:  $g \circ f = id_{S^{n-1}}$ , also insbesondere  $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$ .

Für  $f \circ g$  betrachte folgende Abbildung:

$$H: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (x, t) \mapsto (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + t \cdot x$$

Dann ist  $H$  stetig und es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ :

$$H(x, 1) = x = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x)$$

$$H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = (f \circ g)(x)$$

Dann ist  $H$  Homotopie von  $f \circ g$  nach  $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$  (in Zeichen:  $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ ).  $\square$

# Kapitel 2

31.10.2011

## 2.1 Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie

Es sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  versehen mit der Teilraumtopologie  $\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$ . Weiter sei  $\iota: A \hookrightarrow X$  die Inklusionsabbildung und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  ein weiterer topologischer Raum.

**Satz 2.1.** *Behauptung Eine Abbildung  $\phi: Y \rightarrow A$  ist genau dann stetig, wenn die Komposition  $\iota \circ \phi: Y \rightarrow X$  stetig ist.*

*Beweis.* ‘ $\Rightarrow$ ’: Es sei  $\phi: Y \rightarrow A$  stetig. [z.z.:  $\iota \circ \phi$  ist stetig, d.h.  $\forall O \in \mathcal{O}_X: (\iota \circ \phi)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$ ]

Sei  $O \in \mathcal{O}_X$ . Dann gilt  $(\iota \circ \phi)^{-1}(O) = \phi^{-1}(\iota^{-1}(O))$  und es ist  $\iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$ , da  $\iota$  stetig ist.

Es gilt somit  $\phi^{-1}(\iota^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_Y$ , da  $\phi$  stetig ist (nach Voraussetzung).

‘ $\Leftarrow$ ’: Es sei  $\phi: Y \rightarrow A$  eine Abbildung, so dass  $\iota \circ \phi: Y \rightarrow X$  stetig ist. [z.z.:  $\phi$  ist stetig, d.h.  $\forall O \in \mathcal{O}_A: \phi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$ .]

Sei also  $O \in \mathcal{O}_A$ . Dann existiert  $O' \in \mathcal{O}_X$ , so dass  $O = O' \cap A$ . Es gilt:  $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O$ .

$\phi^{-1}(O) = \phi^{-1}(O' \cap A) = \phi^{-1}(\iota^{-1}(O')) = (\iota \circ \phi)^{-1}(O') \in \mathcal{O}_Y$ , da  $\iota \circ \phi$  stetig (nach Voraussetzung).  $\square$

**Bemerkung 2.1.** (Bemerkung in der Vorlesung)

Die Teilraumtopologie ist die größte Topologie, bezüglich der die Inklusionsabbildung  $\iota: A \hookrightarrow X$  stetig ist.

*Beweis.* Stetigkeit der Inklusionsabbildung: [z.z.:  $\forall O \in \mathcal{O}_X: \iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$ ]

Sei  $O \in \mathcal{O}_X$ . Dann gilt  $\iota^{-1}(O) = O \cap A \in \mathcal{O}_A$ .  $\square$

*Beweis.* Nichtstetigkeit in größeren Topologien: [z.z.:  $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O' \in \mathcal{O}_X: \iota^{-1}(O') \notin \tilde{\mathcal{O}}$ ]

Sei  $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}_A: O \notin \tilde{\mathcal{O}}$ . Dann  $\exists O' \in \mathcal{O}_X: O = O' \cap A$ . Damit ist aber  $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O \notin \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \iota: (A, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  ist nicht stetig.  $\square$

## 2.2 Homöomorphismen

Zeigen Sie, dass für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  das Intervall  $(a, b)$  homöomorph zum Intervall  $(0, 1)$  ist, sowie dass  $(0, 1)$  homöomorph ist zu  $\mathbb{R}$ .

Definiere  $f: (a, b) \rightarrow (0, 1), x \mapsto \frac{a-x}{a-b}$ , und  $g: (0, 1) \rightarrow (a, b), x \mapsto (1-x) \cdot a + x \cdot b$ .

Es gilt für alle  $x \in (a, b)$ :

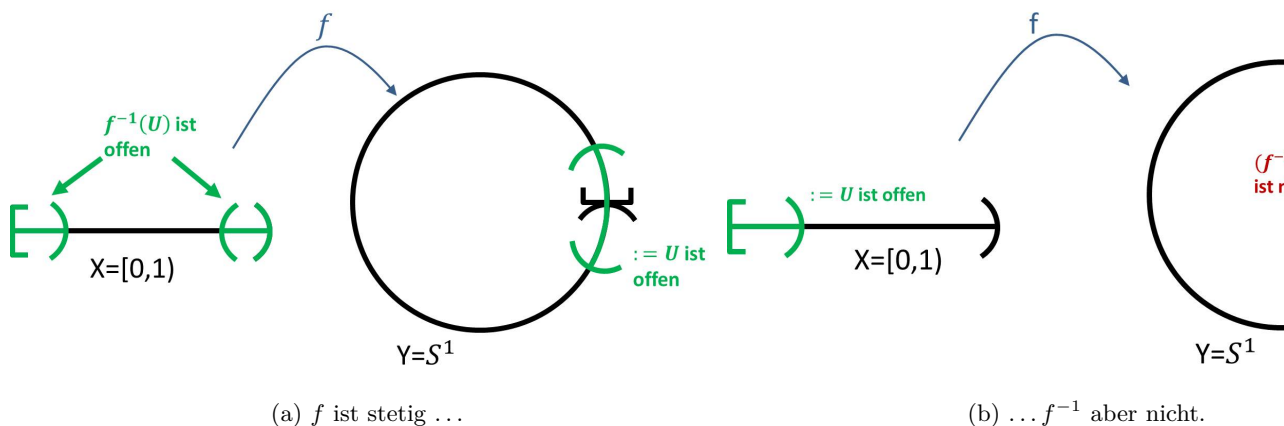
$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{a-x}{a-b}\right) = \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right)a + \frac{a-x}{a-b}b = \left(\frac{a-b-a+x}{a-b}\right)a + \frac{a-x}{a-b}b = \frac{x-b}{a-b}a + \frac{a-x}{a-b}b = \frac{ax-ab+ab-bx}{a-b} = x.$$

Es gilt für alle  $x \in (0, 1)$ :

$(f \circ g)(x) = f((1-x) \cdot a + x \cdot b) = \frac{a-((1-x)a+bx)}{a-b} = \frac{a-a+ax-bx}{a-b} = x$ . Somit ist  $f$  bijektiv. Da  $f$  und  $g = f^{-1}$  stetig sind, gilt damit:  $f$  ist ein Homöomorphismus, d.h.  $(a, b) \equiv (0, 1)$ .

Definiere  $h: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left((x - \frac{1}{2})\pi\right)$ .

$f: [0, 1] \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it} (= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$  ist kein Homöomorphismus (da die Umkehrabbildung nicht stetig ist).



## 2.3 Die Peano-Kurve

(Guiseppe Peano,  $\sim 1890$ )

**Satz 2.2.** Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung  $I = [0, 1] \rightarrow I \times I$ .

### Verallgemeinerung

- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung  $I \rightarrow I^n = I \times I \times \dots \times I$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

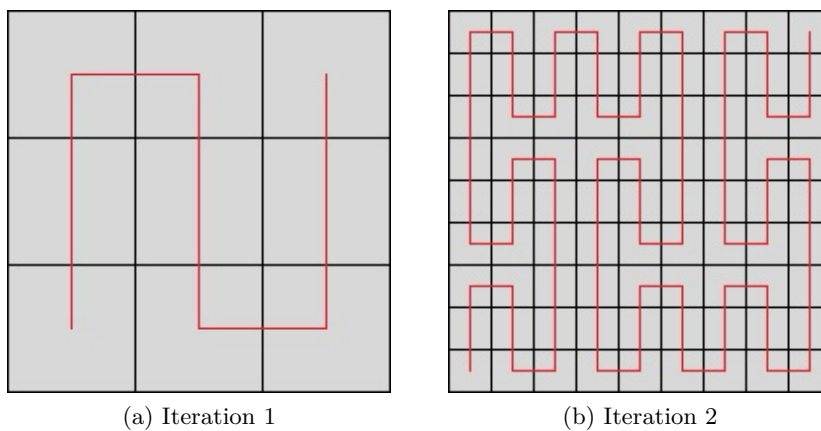


Abbildung 2.1: Prinzip der Peano-Kurve

### 2.3.1 Zugang mit Hilfe der Cantor-Menge $\mathcal{C}$

Definiere  $f: \mathcal{C} \rightarrow I, f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$  für  $a_i \in \{0, 2\}$ .

Dann ist  $f$  surjektiv und stetig.

Definiere  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}, g\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i}}{3^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i+1}}{3^i}\right) =: (g_1, g_2)$  für  $a_i \in \{0, 2\}$ .

Dann ist  $g$  surjektiv und stetig.

Es ist auch  $h: \mathcal{C} \rightarrow I \times I, x \mapsto (f(g_1(x)), f(g_2(x)))$  surjektiv und stetig.

Setze die Abbildung  $h$  durch lineare Fortsetzungen stetig auf  $I$  fort.



# Kapitel 3

07.11.2011

## 3.1 Nachträge und Wiederholungen zur Vorlesung

### 3.1.1 Überdeckung, Teilüberdeckung und Kompaktheit

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

**Definition 3.1.** • Eine Familie  $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$  von Teilmengen von  $X$  heißt Überdeckung von  $X$ , falls gilt:  $X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$ .

- Eine Überdeckung heißt offen (bzw. abgeschlossen), falls alle  $\mathcal{U}_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) offen (bzw. abgeschlossen) sind.
- Es heißt  $X$  kompakt, falls jede offene Überdeckung  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha, \alpha \in A\}$  eine endliche Teilüberdeckung  $\mathcal{U}'$  besitzt, d.h. es existiert  $A' \subset A$  endlich, so dass  $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A'\}$  eine offene Überdeckung von  $X$  ist.

**Beispiel 3.1.** • Endliche Räume und mit der trivialen Topologie versehene Räume sind kompakt.

- Diskrete Räume sind genau dann kompakt, wenn sie aus endlich vielen Elementen bestehen.
- $\mathbb{R}$  (versehen mit der Standardtopologie) ist nicht kompakt,  $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$  schon. ( $\mathcal{T}_1 = \{\mathbb{R} \setminus E \mid E \text{ endliche Teilmenge von } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ )

**Definition 3.2.** Eine kompakte Menge ist eine Teilmenge eines vom Kontext her klaren topologischen Raumes, die bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.

**Beispiel 3.2.**  $[0, 1) (\subseteq \mathbb{R})$  ist nicht kompakt, denn: Die Überdeckung  $\{(-1, 1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$  von  $[0, 1)$  enthält keine endliche Teilüberdeckung.

**Bemerkung 3.1.** • Satz von Heine-Borel: Teilmengen euklidischer, endlich dimensionaler Räume sind genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind.

- *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.*
- *Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt, d.h. ist  $X$  eine kompakte Menge,  $Y$  topologischer Raum,  $f: X \rightarrow Y$  stetig, dann ist  $f(X)$  kompakt.*
- *Ist  $X$  kompakt,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f(X)$  kompakt und  $f$  nimmt auf  $X$  Maximum und Minimum an.*
- *Lebesgue-Lemma: Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetige Abbildung topologischer Räume und  $X$  metrisch und kompakt, so gilt:  
Ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , so existiert  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass für alle  $A \subseteq X$  mit  $\text{diam } A < \delta$  ein  $U' \in \mathcal{U}$  mit  $f(A) \subseteq U'$  existiert.*

### 3.1.2 Wegzusammenhang

**Definition 3.3.** • Ein Weg in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: I(=[0, 1]) \rightarrow X$  mit Anfangspunkt  $\gamma(0)$  und Endpunkt  $\gamma(1)$ .

- *Man nennt  $X$  wegzusammenhängend, falls für alle  $x, y \in X$  ein Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  in  $X$  existiert mit  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ .*
- *Eine Wegzusammenhangskomponente von  $X$  ist eine wegzusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die in keiner echt größeren solchen Teilmenge enthalten ist.*

**Bemerkung 3.2.** • *Jeder Punkt von  $X$  liegt in genau einer Wegzusammenhangskomponente von  $X$ , und zwei solche Komponenten sind entweder gleich oder disjunkt.*

- *Stetige Bilder wegzusammenhängender Mengen sind wegzusammenhängend.*

**Korollar 3.1.** *Wegzusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, ebenso die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten.*

Wegzusammenhängende topologische Räume sind zusammenhängend (Übungsaufgabe), die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Beispiel eines Raumes, der zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist** (TODO: Bild)

Definiere  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\}$ ,  $X := A \cup \{(0, 0)\}$ .

Es gilt:

- Es ist  $A$  wegzusammenhängend, denn:  
 $A \cong (0, +\infty) \cong \mathbb{R}$ , und  $\mathbb{R}$  ist wegzusammenhängend.

- Es ist  $X$  zusammenhängend, denn:  
Es gilt:  $\bar{A} = A \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$  ist als Abschluss einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend (siehe Bemerkung in der Vorlesung).  
Außerdem gilt:  $A \subseteq X \subseteq \bar{A}$ , und  $X$  ist als Teilmenge des Abschlusses eines zusammenhängenden Raumes wieder zusammenhängend. (Allgemein: Es sei  $A$  zusammenhängend,  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ . Dann ist auch  $B$  zusammenhängend.)
- Es ist  $X$  nicht wegzusammenhängend, denn:  
Es lässt sich  $(0, 0)$  nicht über einen Weg in  $X$  mit einem beliebigen anderen Punkt aus  $X$  verbinden<sup>1</sup>.

**Bemerkung 3.3.** *Der Abschluss wegzusammenhängender Räume ist im Allgemeinen nicht wegzusammenhängend!*

**Beispiel 3.3** (Beispiel von oben). *Der Abschluss von  $A$  in  $X$  - nicht in  $\mathbb{R}^2$  - ist  $X$ , und  $X$  ist (s.o.) nicht wegzusammenhängend.*

**Bemerkung 3.4.** *Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raumes  $X$  eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind alle Wegzusammenhangskomponenten offen in  $X$ , und  $X$  ist genau dann wegzusammenhängend, wenn  $X$  zusammenhängend ist.*

**Beispiel 3.4.** *Offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend sind, denn: Jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  besitzt dann als offene Umgebung einen offenen Ball, und offene Bälle sind wegzusammenhängend.*

---

<sup>1</sup>Formale Begründung: Jeder in  $(0, 0)$  startende Weg ist konstant.

# Kapitel 4

14.11.2011

## 4.1 Beispiele für Beweise im Kontext von Hausdorffräumen

**Satz 4.1.** *Behauptung: Ist  $X$  ein Hausdorffraum, so besitzt jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  höchstens einen Grenzwert.*

*Beweis.* Sei  $X$  ein Hausdorffraum.

Annahme: Es existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  mit  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x'$  und  $x \neq x'$ .

Da  $X$  Hausdorffsch ist, existieren offene Teilmengen  $U, V \subseteq X$ , mit  $U \cap V = \emptyset$  und  $x \in U, x' \in V$ . Dann existieren  $n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in U, x_m \in V$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, m \in \mathbb{N}_{\geq n'_0}$ . Dann gilt also für alle  $k \geq \max\{n_0, n'_0\}$ :  $x_k \in U \cap V = \emptyset$ .  $\nmid$   $\square$

**Satz 4.2.** *Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch.*

z.z.:  $\forall x \neq y \in X \exists U_x, U_y \subseteq X: U_x \cap U_y = \emptyset$ . Seien  $x \neq y \in X$ . Wähle  $U_x := B_{\frac{d(x,y)}{3}}(x), U_y := B_{\frac{d(x,y)}{3}}(y)$ .

Dann gilt:  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .  $\square$

## 4.2 Beispiele für Mannigfaltigkeiten

1. Was sind 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten?

- Abzählbare diskrete Mengen.

2. 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten (TODO: Bild 1)

- Offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  sind 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten, denn: Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ .
  - $(a, b)$  ist als metrischer Raum Hausdorffsch.

- Es ist  $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbare Basis der Topologie.
- $(a, b)$  ist lokal homöomorph zu  $\mathbb{R}$ , denn: Es gilt:  $id: (a, b) \mapsto (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ist ein Homöomorphismus einer offenen Menge in eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Somit ist  $((a, b), id_{(a,b)})$  eine (globale)<sup>1</sup> Karte.
- Für den Kartenwechsel gilt:  $id_{(a,b)} \circ id_{(a,b)}^{-1}: (a, b) \rightarrow (a, b), x \mapsto x$ , ist eine glatte Abbildung.
- $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  ist eine 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit (TODO Bild 2), denn:
  - Es ist  $S^1$  als Teilmenge des metrischen Raumes  $\mathbb{R}^2$  Hausdorffsch.  
Ebenso besitzt  $S^1$  eine abzählbare Basis der Topologie.
  - Definiere

$$U_1 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\} = S^1 \setminus \{N\} \quad (N := (0, 1))$$

und

$$U_2 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\} = S^1 \setminus \{S\} \quad (S := (0, -1)).$$

Dann gilt:

- $U_1 \cup U_2 = S^1$ ,
- Es sind  $U_1$  und  $U_2$  offene Teilmengen von  $S^1$ , denn sie sind jeweils Komplement einer einpunktigen und damit abgeschlossenen Menge.
- Definiere

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1-y},$$

$$\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1+y}.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass  $(U_1, \varphi_1)$  eine Karte ist. Analoges gilt auch für  $(U_2, \varphi_2)$  mit analoger Rechnung.

- Definiere

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, u \mapsto \left( \frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right).$$

Dann gilt:

$$\varphi_1 \circ \psi = id_{\mathbb{R}},$$

$$\psi \circ \varphi_1 = id_{U_1}.$$

Damit ist  $\varphi_1$  bijektiv.

Da  $\varphi_1$  und  $\psi$  stetig sind, ist  $\varphi_1$  damit ein Homöomorphismus.

---

<sup>1</sup>Global, da für die ganze Mannigfaltigkeit gleich.

- Die Kartenwechsel sind glatt, denn es gilt:

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Für alle  $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(u) = (\varphi_2 \circ \psi)(u) = \frac{1}{u},$$

und dies ist tatsächlich ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus<sup>2</sup>  
 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

3. Es ist  $\mathbb{R}^n$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn:

- $\mathbb{R}^n$  ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.
- $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$  ist eine globale Karte.

**Bemerkung 4.1.** *Jeder Atlas, der aus nur einer Karte besteht, ist glatt.*

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{A} = \{(\varphi, U)\}$  dieser Atlas. Dann gilt:

Es gibt nur genau einen Kartenwechsel:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\varphi(U)}: \varphi(U) \rightarrow \varphi(U)$$

und dieser ist natürlich glatt. □

**Satz 4.3.** *Offene Teilmengen von  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten sind wieder  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten.*

*Beweis.* Es sei  $M$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ ,  $N \subseteq_{\text{offen}} M$ .

- Als Teilmenge von  $M$  ist  $N$  Hausdorffsch und auch die abzählbare Basis der Topologie überträgt sich.
- Es sei  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ( $\Lambda$  Indexmenge) ein  $C^k$ -Atlas von  $M$ . Für alle  $\alpha \in \Lambda$  ist  $U_\alpha \cap N$  offen in  $N$  und es gilt:

$$\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}: U_\alpha \cap N \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap N) \subseteq \mathbb{R}^n$$

und  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap N)$  ist als stetiges Bild der offenen Menge  $U_\alpha \cap N$  wieder offen.

Somit ist  $\{(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}, U_\alpha \cap N) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ein Atlas für  $N$ .

Da die Kartenwechsel weiterhin  $C^k$ -Abbildungen sind, ist dieser Atlas ein  $C^k$ -Atlas für  $N$ . □

**Beispiel 4.1.** *Es gilt:  $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n^2}$*

---

<sup>2</sup>d.h. bijektiv und unendlich oft differenzierbar und mit unendlich oft differenzierbarer Umkehrabbildung

# Kapitel 5

## 21.11.11

### 5.1 Untermannigfaltigkeiten

**Satz 5.1.**  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^{n+l}$  sind  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  
Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ , versehen mit der Teilraumtopologie, und  $\{\psi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$  eine Menge lokaler Parametrisierungen (siehe Untermannigfaltigkeitskriterium, (c)) mit  $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ .

Dann ist  $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas für  $M$  und somit eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* • Es gilt:  $M$  ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+l}$ .

- Es ist  $\mathcal{A}$  ein Atlas (nach Definition der lokalen Parametrisierungen).
- [z.z.: Die Kartenwechsel sind glatt, d.h.:

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda: (U_\alpha \cap M) \cap (U_\beta \cap M) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha: \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$$

ist glatt.] Seien  $\alpha, \beta \in \Lambda$  mit  $(U_\alpha \cap M) \cap (U_\beta \cap M) \neq \emptyset$ .

(Vorsicht: Es ist  $\psi_\beta^{-1}$  nicht auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+l}$  definiert, daher ist die Kettenregel nicht direkt anwendbar!)

Zeige: Es ist  $\psi_\beta^{-1}$  auf einer (offenen) Umgebung eines jeden Punktes  $y \in U_\alpha \cap U_\beta \cap M$  eine glatte Abbildung.

Sei  $x \in \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$ . Nach dem Untermannigfaltigkeits-Kriterium (b) existiert eine Umgebung  $U \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$  von  $\psi_\alpha(x) \in M$  in  $\mathbb{R}^{n+l}$  und ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$  mit  $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

Definiere  $\pi: \mathbb{R}^{n+l} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die Projektion auf die ersten  $n$

Komponenten und  $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}, x \mapsto (x, 0)$ , die Inklusion. Dann gilt auf  $\varphi(U \cap M) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$ :  $\iota \circ \pi = id$ . Daher gilt auf  $\psi_\alpha^{-1}(U \cap M)$ :

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha = \psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi_\alpha = (\psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \iota) \circ (\pi \circ \varphi \circ \psi_\alpha).$$

Es sind  $(\psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \iota) = (\pi \circ \varphi \circ \psi_\beta)^{-1}$  und  $\pi \circ \varphi \circ \psi_\alpha$  glatte Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  und somit auch die Komposition  $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ .

□

## 5.2 Wichtige Spezialfälle (und Beispiele) von Untermannigfaltigkeiten

**(a) Niveaumengen** Es seien  $V \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$  offen,  $f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l)$ ,  $c \in \mathbb{R}^l$ . Gilt  $\text{Rang } Df(x) = l$  in jedem Punkt  $x$  der Niveaumenge

$$f^{-1}(c) = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

so ist  $f^{-1}(c)$  eine  $n$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$ .

*Beweis.* Wende Untermannigfaltigkeits-Kriterium (a) auf die Abbildung

$$g = f - c: x \mapsto f(x) - c$$

an.

[z.z.:  $\text{Rang } Df(x) = l$  auf einer Umgebung  $U$  von  $f^{-1}(c)$ , nicht nur auf der Niveaumenge selbst!]

Sei  $x_0 \in f^{-1}(c)$ . Da  $\text{Rang } Df(x_0) = l$ , existiert eine  $(l \times l)$ -Unterdeterminante  $A(x)$  von  $\det Df(x)$ , so dass  $A(x_0) \neq 0$ . Da  $f$  stetig ist, ist die Abbildung  $x \mapsto A(x)$  stetig, und somit folgt:  $A(x) \neq 0$  auf einer Umgebung  $U(x_0)$  von  $x_0$ . Dann ist  $\text{Rang } Df(x) = l$  für alle  $x \in U(x_0)$ .

Setze  $U := \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(c)} U(x_0)$ , dann folgt die Behauptung. □

**Beispiel 5.1.** (TODO: Bild)

Der Zylinder  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist als Niveaumenge der Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \underbrace{x^2 + y^2} - 1$ , eine  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .

**(b)**

**Beispiel 5.2.** Der Graph der Abbildung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ , d.h. die Menge  $\{(\cos(t), \sin(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ , die Helix (TODO: Bild), ist eine 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$ .



**(c) Global parametrisierte Untermannigfaltigkeiten** Es sei  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$  glatt mit  $\text{Rang } D\psi(w) = n$  für alle  $w \in W$ . Es sei ferner  $\psi: W \rightarrow \psi(W)$  Homöomorphismus. Dann ist  $\psi(W)$  eine  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n+l}$  (nach Untermannigfaltigkeits-Kriterium (c) mit  $U := \mathbb{R}^{n+l}$ ).

Für  $n = 2$  und  $l = 1$  heißt  $\psi(W)$  eine parametrisierte Fläche von  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel 5.3.** 1. *Parametrisierung des Zylinders:*

Betrachte die glatte Abbildung  $\psi: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, s) \mapsto (\cos(t), \sin(t), s)$ . Das Bild dieser Abbildung ist der Zylinder im  $\mathbb{R}^3$  (wie oben, ohne eine Gerade). Es gilt:

$$D\psi(t, s) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & 0 \\ \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ , und damit:  $\text{Rang } D\psi(t, s) = 2$  für alle  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ , da  $\sin$  und  $\cos$  keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Damit ist  $\psi$  eine (globale) Parametrisierung des Zylinders.

2. (Rotationsflächen im  $\mathbb{R}^3$ )

Rotiere für Konstanten  $0 < r < a$  die Kurve  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (a + r \cdot \cos(t), 0, r \cdot \sin(t))$ . (TODO: Bild) in der  $x_1x_3$ -Ebene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ 0 \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} (a + r \cdot \cos(t)) \cos(\Theta) \\ (a + r \cdot \cos(t)) \sin(\Theta) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}}_{(*)} \end{aligned}$$

Dann definiert  $\Phi_\gamma: (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (\Theta, t) \mapsto (*)$  eine parametrisierte Fläche, den Rotationstorus.

• Der Rotationstorus  $T \subseteq \mathbb{R}^3$  lässt sich als Niveaumenge definieren:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = r^2\}.$$

• Eine weitere (aus der Vorlesung bekannte) Darstellung des Torus ist

$$S^1 \times S^1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \wedge (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1\},$$

und dies ist nicht die letzte Möglichkeit der Darstellung des Torus (siehe nächste Vorlesung) ...