

Einführung in die Geometrie und Topologie - Mitschrieb -

Übung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp, Simon Bischof

17. Januar 2012



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung “Einführung in die Geometrie und Topologie” vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Frau Dipl.-Math. Sandra Lenz gehalten wird.

Kapitel 1

24.10.2011

1.1 Induzierte Topologie

Definition 1.1 (Induzierte Topologie). Sei X eine Menge. Sei $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik. Diese Metrik d definiert durch folgende Bedingung eine Topologie \mathcal{O} auf X :

$O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{O}_d$), wenn für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

(B_ϵ nennt man offenen ϵ -Ball.)

1.2 Offen und abgeschlossen

Sei X eine Menge.

- Mengen können sowohl offen als auch abgeschlossen (zugleich) sein.

Beispiel 1.1. Betrachte \emptyset und X in der trivialen Topologie $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$.

Es gilt: $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition, d.h. X und \emptyset sind offen.

Außerdem gilt: $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$, ebenso: $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$, d.h. die Komplemente von X und \emptyset sind offen und somit X und \emptyset abgeschlossen.

- Mengen können weder offen noch abgeschlossen sein.

Beispiel 1.2. Betrachte \mathbb{R} mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie. Es ist $[0, 1[$ nicht offen in dieser Topologie, denn für den Punkt 0 finden wir kein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(0)$ in $[0, 1[$ liegt. Die Menge $[0, 1[$ ist aber auch nicht abgeschlossen, da ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus [0, 1[=]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$ nicht offen ist.

- Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen müssen nicht notwendigerweise offen sein.

Beispiel 1.3. Betrachte \mathbb{R} mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie.

Definiere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Es gilt für die in \mathbb{R} offene Menge $] - 1, 1[$:

$f(]-1, 1[) = [0, 1[$ und $[0, 1[$ ist nicht offen in \mathbb{R} .

1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem \mathbb{R}^n definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

1.4 Teilraumtopologie

Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.

Die Teilraumtopologie (oder Spurtopologie) ist definiert durch

$$\mathcal{O}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

Satz 1.1. In der Tat definiert $\mathcal{O}|_A$ eine Topologie auf A .

Beweis. • z.z.: Für jede Indexmenge I gilt: $\forall i \in I: O_i \in \mathcal{O}|_A \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}|_A$.

Sei I beliebige Indexmenge. Für alle $i \in I$ mit $O_i \in \mathcal{O}|_A$ gilt: Es existieren $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A$. Es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = (\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i) \cap A \in \mathcal{O}|_A$$

(da $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$).

• z.z.: $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}|_A: O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}|_A$.

Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{O}|_A$. Dann ex. $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A, i \in \{1, 2\}$. Es gilt: $O_1 \cap O_2 = (\mathcal{U}_1 \cap A) \cap (\mathcal{U}_2 \cap A) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap A \in \mathcal{O}|_A$, da $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$.

• z.z.: $A, \emptyset \in \mathcal{O}|_A$.

Es gilt: $A = X \cap A \in \mathcal{O}|_A$, da $X \in \mathcal{O}$ nach Definition von \mathcal{O} .

Es gilt: $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}|_A$, da $\emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition von \mathcal{O} . □

1.5 Homotopieäquivalenz

Definition 1.2. Seien X, Y topologische Räume. X heißt homotopieäquivalent zu Y , falls es stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$.

Satz 1.2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist homotopieäquivalent zur Sphäre S^{n-1} .

Beweis. Sei $f: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \mapsto x$ (Inklusionsabbildung). Dann ist f stetig.

Sei weiter $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Dann ist auch g stetig und es gilt: $g \circ f = id_{S^{n-1}}$, also insbesondere $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.

Für $f \circ g$ betrachte folgende Abbildung:

$$H: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (x, t) \mapsto (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + t \cdot x$$

Dann ist H stetig und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$H(x, 1) = x = id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x)$$

$$H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = (f \circ g)(x)$$

Dann ist H Homotopie von $f \circ g$ nach $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ (in Zeichen: $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$).

□

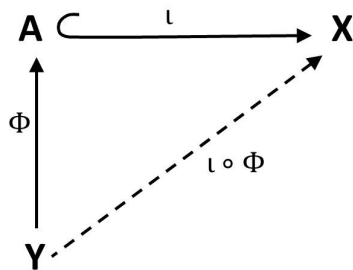
Kapitel 2

31.10.2011

2.1 Universelle Eigenschaft der Teilraumtopologie

Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ versehen mit der Teilraumtopologie $\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}_X\}$. Weiter sei $\iota: A \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung und (Y, \mathcal{O}_Y) ein weiterer topologischer Raum.

Satz 2.1. Behauptung Eine Abbildung $\phi: Y \rightarrow A$ ist genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota \circ \phi: Y \rightarrow X$ stetig ist.



Beweis. ' \Rightarrow ': Es sei $\phi: Y \rightarrow A$ stetig. [z.z.: $\iota \circ \phi$ ist stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}_X: (\iota \circ \phi)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$]

Sei $O \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt $(\iota \circ \phi)^{-1}(O) = \phi^{-1}(\iota^{-1}(O))$ und es ist $\iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$, da ι stetig ist.

Es gilt somit $\phi^{-1}(\iota^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_Y$, da ϕ stetig ist (nach Voraussetzung).

' \Leftarrow ': Es sei $\phi: Y \rightarrow A$ eine Abbildung, so dass $\iota \circ \phi: Y \rightarrow X$ stetig ist. [z.z.: ϕ ist stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}_A: \phi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Y$.]

Sei also $O \in \mathcal{O}_A$. Dann existiert $O' \in \mathcal{O}_X$, so dass $O = O' \cap A$. Es gilt: $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O$.

$\phi^{-1}(O) = \phi^{-1}(O' \cap A) = \phi^{-1}(\iota^{-1}(O')) = (\iota \circ \phi)^{-1}(O') \in \mathcal{O}_Y$, da $\iota \circ \phi$ stetig (nach Voraussetzung). \square

Bemerkung 2.1. (Bemerkung in der Vorlesung)

Die Teilraumtopologie ist die grösste Topologie, bezüglich der die Inklusionsabbildung $\iota: A \hookrightarrow X$ stetig ist.

Beweis. Stetigkeit der Inklusionsabbildung: [z.z.: $\forall O \in \mathcal{O}_X: \iota^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$]
Sei $O \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt $\iota^{-1}(O) = O \cap A \in \mathcal{O}_A$. \square

Beweis. Nichtstetigkeit in grösseren Topologien: [z.z.: $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O' \in \mathcal{O}_X: \iota^{-1}(O') \notin \tilde{\mathcal{O}}$]

Sei $\mathcal{O}_A \not\subseteq \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}_A: O \notin \tilde{\mathcal{O}}$. Dann $\exists O' \in \mathcal{O}_X: O = O' \cap A$. Damit ist aber $\iota^{-1}(O') = O' \cap A = O \notin \tilde{\mathcal{O}} \Rightarrow \iota: (A, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ist nicht stetig. \square

2.2 Homöomorphismen

Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das Intervall (a, b) homöomorph zum Intervall $(0, 1)$ ist, sowie dass $(0, 1)$ homöomorph ist zu \mathbb{R} .

Definiere $f: (a, b) \rightarrow (0, 1), x \mapsto \frac{a-x}{a-b}$, und $g: (0, 1) \rightarrow (a, b), x \mapsto (1-x) \cdot a + x \cdot b$.

Es gilt für alle $x \in (a, b)$:

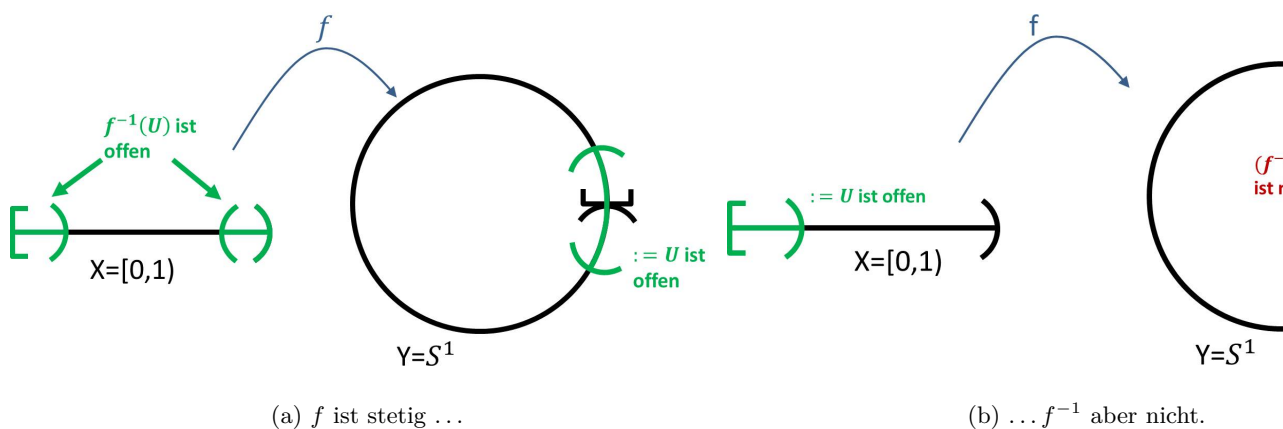
$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{a-x}{a-b}\right) = \left(1 - \frac{a-x}{a-b}\right)a + \frac{a-x}{a-b}b = \left(\frac{a-b-a+x}{a-b}\right)a + \frac{a-x}{a-b}b = \frac{x-b}{a-b}a + \frac{a-x}{a-b}b = \frac{ax-ab+ab-bx}{a-b} = x.$$

Es gilt für alle $x \in (0, 1)$:

$$(f \circ g)(x) = f((1-x) \cdot a + x \cdot b) = \frac{a - ((1-x)a + bx)}{a-b} = \frac{a-a+ax-bx}{a-b} = x. \text{ Somit ist } f \text{ bijektiv. Da } f \text{ und } g = f^{-1} \text{ stetig sind, gilt damit: } f \text{ ist ein Homöomorphismus, d.h. } (a, b) \equiv (0, 1).$$

Definiere $h: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left((x - \frac{1}{2})\pi\right)$.

$f: [0, 1) \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} (= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$ ist kein Homöomorphismus (da die Umkehrabbildung nicht stetig ist).



2.3 Die Peano-Kurve

(Guiseppe Peano, ~ 1890)

Satz 2.2. Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $I = [0, 1] \rightarrow I \times I$.

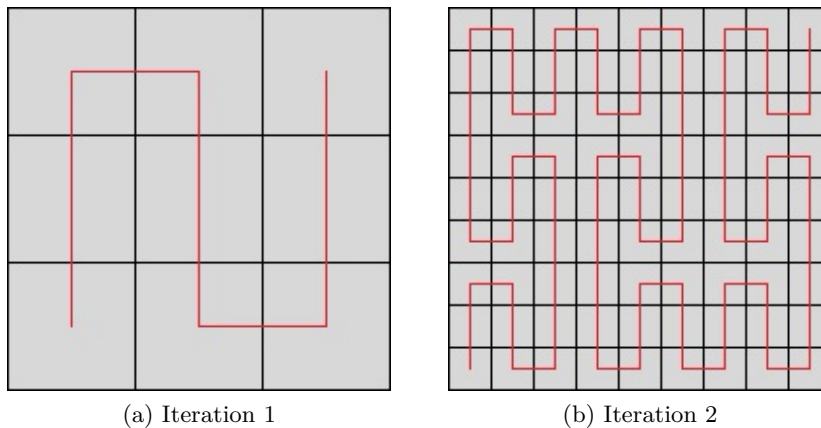


Abbildung 2.1: Prinzip der Peano-Kurve

Verallgemeinerung

- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $I \rightarrow I^n = I \times I \times \dots \times I (n \in \mathbb{N})$.
- Es gibt eine surjektive, stetige Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2.3.1 Zugang mit Hilfe der Cantor-Menge \mathcal{C}

Definiere $f: \mathcal{C} \rightarrow I, f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ für $a_i \in \{0, 2\}$.

Dann ist f surjektiv und stetig.

Definiere $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}, g\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i}}{3^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{2i+1}}{3^i}\right) =: (g_1, g_2)$ für $a_i \in \{0, 2\}$.

Dann ist g surjektiv und stetig.

Es ist auch $h: \mathcal{C} \rightarrow I \times I, x \mapsto (f(g_1(x)), f(g_2(x)))$ surjektiv und stetig.

Setze die Abbildung h durch lineare Fortsetzungen stetig auf I fort.

Kapitel 3

07.11.2011

3.1 Nachträge und Wiederholungen zur Vorlesung

3.1.1 Überdeckung, Teilüberdeckung und Kompaktheit

Sei X ein topologischer Raum.

Definition 3.1. • Eine Familie $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X , falls gilt: $X = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$.

- Eine Überdeckung heißt offen (bzw. abgeschlossen), falls alle \mathcal{U}_α ($\alpha \in A$) offen (bzw. abgeschlossen) sind.
- Es heißt X kompakt, falls jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha, \alpha \in A\}$ eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{U}' besitzt, d.h. es existiert $A' \subset A$ endlich, so dass $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ eine offene Überdeckung von X ist.

Beispiel 3.1. • Endliche Räume und mit der trivialen Topologie versehene Räume sind kompakt.

- Diskrete Räume sind genau dann kompakt, wenn sie aus endlich vielen Elementen bestehen.
- \mathbb{R} (versehen mit der Standardtopologie) ist nicht kompakt, $\mathbb{R}_{\mathcal{T}_1}$ schon. ($\mathcal{T}_1 = \{\mathbb{R} \setminus E \mid E \text{ endliche Teilmenge von } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$)

Definition 3.2. Eine kompakte Menge ist eine Teilmenge eines vom Kontext her klaren topologischen Raumes, die bezüglich der Teilraumtopologie kompakt ist.

Beispiel 3.2. $[0, 1) (\subseteq \mathbb{R})$ ist nicht kompakt, denn: Die Überdeckung $\{(-1, 1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $[0, 1)$ enthält keine endliche Teilüberdeckung.

Bemerkung 3.1. • Satz von Heine-Borel: Teilmengen euklidischer, endlich dimensionaler Räume sind genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind.

- Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.
- Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt, d.h. ist X eine kompakte Menge, Y topologischer Raum, $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann ist $f(X)$ kompakt.
- Ist X kompakt, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt und f nimmt auf X Maximum und Minimum an.
- Lebesgue-Lemma: Ist $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung topologischer Räume und X metrisch und kompakt, so gilt:
Ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von Y , so existiert $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $A \subseteq X$ mit $\text{diam } A < \delta$ ein $U' \in \mathcal{U}$ mit $f(A) \subseteq U'$ existiert.

3.1.2 Wegzusammenhang

Definition 3.3. • Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $\gamma: I(=[0, 1]) \rightarrow X$ mit Anfangspunkt $\gamma(0)$ und Endpunkt $\gamma(1)$.

- Man nennt X wegzusammenhängend, falls für alle $x, y \in X$ ein Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ in X existiert mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.
- Eine Wegzusammenhangskomponente von X ist eine wegzusammenhängende Teilmenge von X , die in keiner echt größeren solchen Teilmenge enthalten ist.

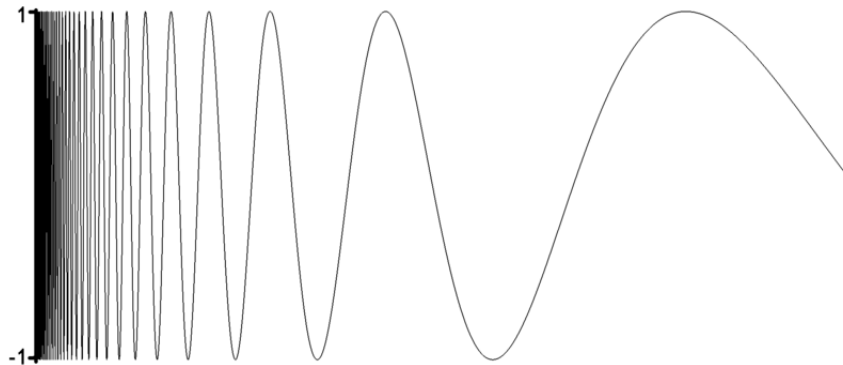
Bemerkung 3.2. • Jeder Punkt von X liegt in genau einer Wegzusammenhangskomponente von X , und zwei solche Komponenten sind entweder gleich oder disjunkt.

- Stetige Bilder wegzusammenhängender Mengen sind wegzusammenhängend.

Korollar 3.1. Wegzusammenhang bleibt unter Homöomorphismen erhalten, ebenso die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten.

Wegzusammenhängende topologische Räume sind zusammenhängend (Übungsaufgabe), die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beispiel eines Raumes, der zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist Definiere $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\}$, $X := A \cup \{(0, 0)\}$.



Es gilt:

- Es ist A wegzusammenhängend, denn:
 $A \cong (0, +\infty) \cong \mathbb{R}$, und \mathbb{R} ist wegzusammenhängend.
- Es ist X zusammenhängend, denn:
 Es gilt: $\bar{A} = A \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$ ist als Abschluss einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend (siehe Bemerkung in der Vorlesung).
 Außerdem gilt: $A \subseteq X \subseteq \bar{A}$, und X ist als Teilmenge des Abschlusses eines zusammenhängenden Raumes wieder zusammenhängend. (Allgemein: Es sei A zusammenhängend, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Dann ist auch B zusammenhängend.)
- Es ist X nicht wegzusammenhängend, denn:
 Es lässt sich $(0,0)$ nicht über einen Weg in X mit einem beliebigen anderen Punkt aus X verbinden¹.

Bemerkung 3.3. Der Abschluss wegzusammenhängender Räume ist im Allgemeinen nicht wegzusammenhängend!

Beispiel 3.3 (Beispiel von oben). Der Abschluss von A in X - nicht in \mathbb{R}^2 - ist X , und X ist (s.o.) nicht wegzusammenhängend.

Bemerkung 3.4. Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raumes X eine wegzusammenhängende Umgebung, so sind alle Wegzusammenhangskomponenten offen in X , und X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn X zusammenhängend ist.

Beispiel 3.4. Offene Teilmengen von \mathbb{R}^n sind genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend sind, denn:
 Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt dann als offene Umgebung einen offenen Ball, und offene Bälle sind wegzusammenhängend.

¹Formale Begründung: Jeder in $(0,0)$ startende Weg ist konstant.

Kapitel 4

14.11.2011

4.1 Beispiele für Beweise im Kontext von Hausdorffräumen

Satz 4.1. Behauptung: Ist X ein Hausdorffraum, so besitzt jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ höchstens einen Grenzwert.

Beweis. Sei X ein Hausdorffraum.

Annahme: Es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x'$ und $x \neq x'$.

Da X Hausdorffsch ist, existieren offene Teilmengen $U, V \subseteq X$, mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U, x' \in V$. Dann existieren $n_0, n'_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U, x_m \in V$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, m \in \mathbb{N}_{\geq n'_0}$. Dann gilt also für alle $k \geq \max\{n_0, n'_0\}$: $x_k \in U \cap V = \emptyset$. \nmid \square

Satz 4.2. Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch.

z.z.: $\forall x \neq y \in X \exists U_x, U_y \subseteq X: U_x \cap U_y = \emptyset$. Seien $x \neq y \in X$. Wähle $U_x := B_{\frac{d(x,y)}{3}}(x), U_y := B_{\frac{d(x,y)}{3}}(y)$.

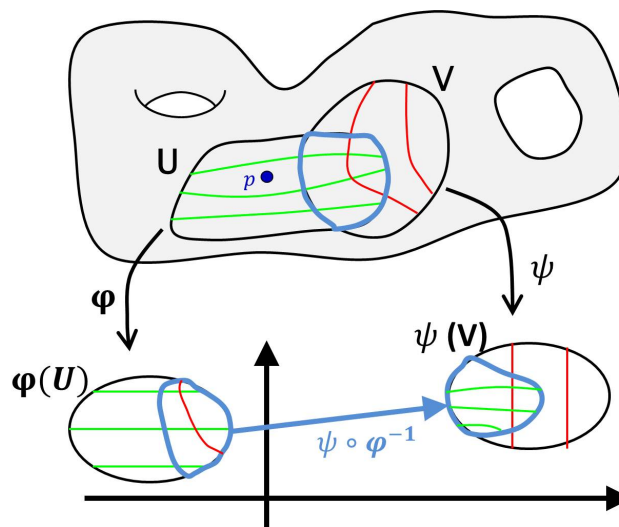
Dann gilt: $U_x \cap U_y = \emptyset$. \square

4.2 Beispiele für Mannigfaltigkeiten

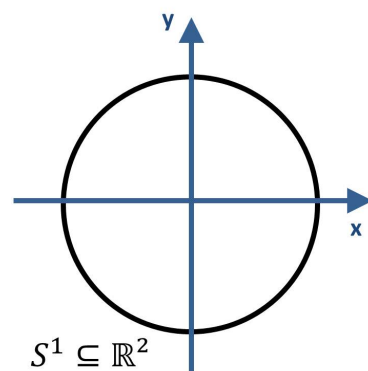
1. Was sind 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten?

- Abzählbare diskrete Mengen.

2. 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten



- Offene Intervalle in \mathbb{R} sind 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeiten, denn: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
 - (a, b) ist als metrischer Raum Hausdorffsch.
 - Es ist $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis der Topologie.
 - (a, b) ist lokal homöomorph zu \mathbb{R} , denn: Es gilt: $id: (a, b) \mapsto (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus einer offenen Menge in eine offene Teilmenge von \mathbb{R} . Somit ist $((a, b), id_{(a,b)})$ eine (globale)¹ Karte.
 - Für den Kartenwechsel gilt: $id_{(a,b)} \circ id_{(a,b)}^{-1}: (a, b) \rightarrow (a, b), x \mapsto x$, ist eine glatte Abbildung.
- $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$



ist eine 1-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn:

- Es ist S^1 als Teilmenge des metrischen Raumes \mathbb{R}^2 Hausdorffsch.

¹Global, da für die ganze Mannigfaltigkeit gleich.

Ebenso besitzt S^1 eine abzählbare Basis der Topologie.

– Definiere

$$U_1 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 1\} = S^1 \setminus \{N\} \quad (N := (0, 1))$$

und

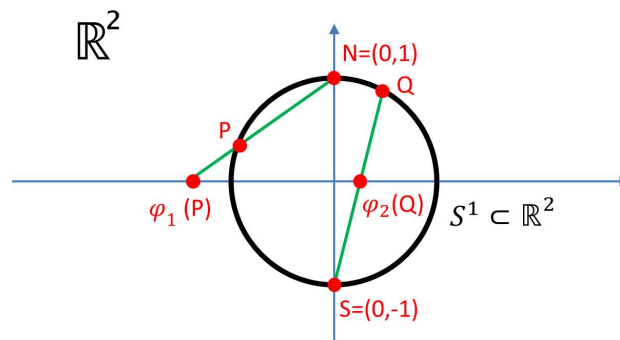
$$U_2 := \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq -1\} = S^1 \setminus \{S\} \quad (S := (0, -1)).$$

Dann gilt:

- $U_1 \cup U_2 = S^1$,
- Es sind U_1 und U_2 offene Teilmengen von S^1 , denn sie sind jeweils Komplement einer einpunktigen und damit abgeschlossenen Menge.
- Definiere

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1-y},$$

$$\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x}{1+y}.$$



Im Folgenden zeigen wir, dass (U_1, φ_1) eine Karte ist. Analoges gilt auch für (U_2, φ_2) mit analoger Rechnung.

– Definiere

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, u \mapsto \left(\frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right).$$

Dann gilt:

$$\varphi_1 \circ \psi = id_{\mathbb{R}},$$

$$\psi \circ \varphi_1 = id_{U_1}.$$

Damit ist φ_1 bijektiv.

Da φ_1 und ψ stetig sind, ist φ_1 damit ein Homöomorphismus.

- Die Kartenwechsel sind glatt, denn es gilt:

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Für alle $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(u) = (\varphi_2 \circ \psi)(u) = \frac{1}{u},$$

und dies ist tatsächlich ein C^∞ -Diffeomorphismus²
 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Es ist \mathbb{R}^n eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, denn:

- \mathbb{R}^n ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.
- $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ ist eine globale Karte.

Bemerkung 4.1. Jeder Atlas, der aus nur einer Karte besteht, ist glatt.

Beweis. Es sei $\mathcal{A} = \{(\varphi, U)\}$ dieser Atlas. Dann gilt:

Es gibt nur genau einen Kartenwechsel:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\varphi(U)}: \varphi(U) \rightarrow \varphi(U)$$

und dieser ist natürlich glatt. □

Satz 4.3. Offene Teilmengen von C^k -Mannigfaltigkeiten sind wieder C^k -Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Es sei M eine C^k -Mannigfaltigkeit der Dimension n , $N \subseteq_{\text{offen}} M$.

- Als Teilmenge von M ist N Hausdorffsch und auch die abzählbare Basis der Topologie überträgt sich.
- Es sei $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ (Λ Indexmenge) ein C^k -Atlas von M . Für alle $\alpha \in \Lambda$ ist $U_\alpha \cap N$ offen in N und es gilt:

$$\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}: U_\alpha \cap N \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap N) \subseteq \mathbb{R}^n$$

und $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap N)$ ist als stetiges Bild der offenen Menge $U_\alpha \cap N$ wieder offen.

Somit ist $\{(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N}, U_\alpha \cap N) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein Atlas für N .

Da die Kartenwechsel weiterhin C^k -Abbildungen sind, ist dieser Atlas ein C^k -Atlas für N . □

Beispiel 4.1. Es gilt: $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq_{\text{offen}} \mathbb{R}^{n^2}$

²d.h. bijektiv und unendlich oft differenzierbar und mit unendlich oft differenzierbarer Umkehrabbildung

Kapitel 5

21.11.11

5.1 Untermannigfaltigkeiten

Satz 5.1. C^∞ -Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^{n+l} sind C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ eine n -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+l} , versehen mit der Teilraumtopologie, und $\{\psi_\alpha: W_\alpha \rightarrow U_\alpha \cap M \mid \alpha \in \Lambda\}$ eine Menge lokaler Parametrisierungen (siehe Untermannigfaltigkeitskriterium, (c)) mit $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

Dann ist $\mathcal{A} = \{(\psi_\alpha^{-1}, U_\alpha \cap M) \mid \alpha \in \Lambda\}$ ein C^∞ -Atlas für M und M somit eine C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Beweis. • Es gilt: M ist Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie (als Teilmenge von \mathbb{R}^{n+l}).

- Es ist \mathcal{A} ein Atlas (nach Definition der lokalen Parametrisierungen).
- [z.z.: Die Kartenwechsel sind glatt, d.h.:

$$\forall \alpha, \beta \in \Lambda: (U_\alpha \cap M) \cap (U_\beta \cap M) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha: \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$$

ist glatt.]

Seien $\alpha, \beta \in \Lambda$ mit $(U_\alpha \cap M) \cap (U_\beta \cap M) \neq \emptyset$.

(Vorsicht: Es ist ψ_β^{-1} nicht auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^{n+l} definiert, daher ist die Kettenregel nicht direkt anwendbar!)

Zeige: Es ist ψ_β^{-1} auf einer (offenen) Umgebung eines jeden Punktes $y \in U_\alpha \cap U_\beta \cap M$ eine glatte Abbildung.

Sei $x \in \psi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$. Nach dem Untermannigfaltigkeits-Kriterium (b) existiert eine Umgebung $U \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ von $\psi_\alpha(x) \in M$ in \mathbb{R}^{n+l} und ein C^∞ -Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ mit $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

Definiere $\pi: \mathbb{R}^{n+l} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, die Projektion auf die ersten n

Komponenten und $\iota: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+l}, x \mapsto (x, 0)$, die Inklusion. Dann gilt auf $\varphi(U \cap M) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$: $\iota \circ \pi = id$. Daher gilt auf $\psi_\alpha^{-1}(U \cap M)$:

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha = \psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi_\alpha = (\psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \iota) \circ (\pi \circ \varphi \circ \psi_\alpha).$$

Es sind $(\psi_\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \iota) = (\pi \circ \varphi \circ \psi_\beta)^{-1}$ und $\pi \circ \varphi \circ \psi_\alpha$ glatte Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n und somit auch die Komposition $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$. □

5.2 Wichtige Spezialfälle (und Beispiele) von Untermannigfaltigkeiten

(a) Niveaumengen Es seien $V \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ offen, $f \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l)$ und $c \in \mathbb{R}^l$. Gilt $\text{Rang } Df(x) = l$ in jedem Punkt x der Niveaumenge

$$f^{-1}(c) := f^{-1}(\{c\}) = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

so ist $f^{-1}(c)$ eine n -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+l} .

Beweis. Wende Untermannigfaltigkeits-Kriterium (a) auf die Abbildung

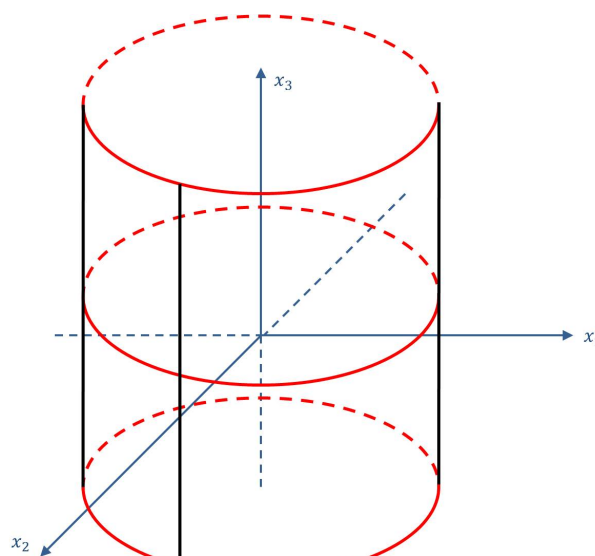
$$g = f - c: x \mapsto f(x) - c$$

an.

[z.z.: $\text{Rang } Df(x) = l$ auf einer Umgebung U von $f^{-1}(c)$, nicht nur auf der Niveaumenge selbst!]

Sei $x_0 \in f^{-1}(c)$. Da $\text{Rang } Df(x_0) = l$, existiert eine $(l \times l)$ -Unterdeterminante $A(x)$ von $\det Df(x)$, so dass $A(x_0) \neq 0$. Da f stetig ist, ist die Abbildung $x \mapsto A(x)$ stetig, und somit folgt: $A(x) \neq 0$ auf einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 . Dann ist $\text{Rang } Df(x) = l$ für alle $x \in U(x_0)$.

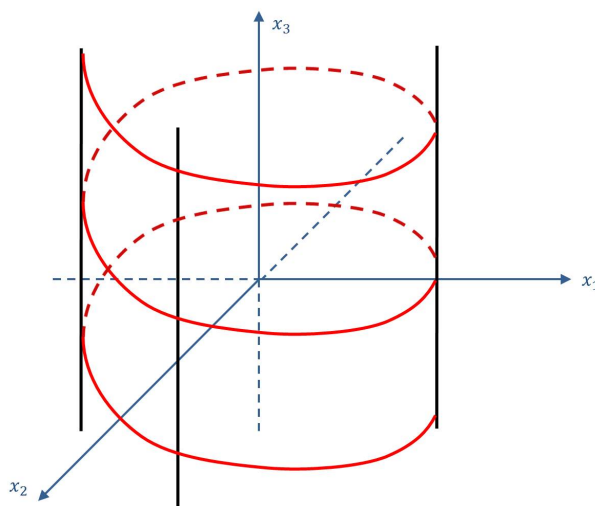
Setze $U := \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(c)} U(x_0)$, dann folgt die Behauptung. □

**Beispiel 5.1.**

Der Zylinder $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist als Niveaumenge der Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \underbrace{x^2 + y^2} - 1$, eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .

(b)

Beispiel 5.2. Der Graph der Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, d.h. die Menge $\{(\cos(t), \sin(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, die Helix, ist eine 1-dimensionale



glatte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .

(c) Global parametrisierte Untermannigfaltigkeiten Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$ glatt mit $\text{Rang } D\psi(w) = n$ für alle $w \in W$. Es

sei ferner $\psi: W \rightarrow \psi(W)$ Homöomorphismus. Dann ist $\psi(W)$ eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+l} (nach Untermannigfaltigkeits-Kriterium (c) mit $U := \mathbb{R}^{n+l}$).

Für $n = 2$ und $l = 1$ heißt $\psi(W)$ eine parametrisierte Fläche von \mathbb{R}^3 .

Beispiel 5.3. 1. Parametrisierung des Zylinders:

Betrachte die glatte Abbildung $\psi: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, s) \mapsto (\cos(t), \sin(t), s)$. Das Bild dieser Abbildung ist der Zylinder im \mathbb{R}^3 (wie oben, ohne eine Gerade). Es gilt:

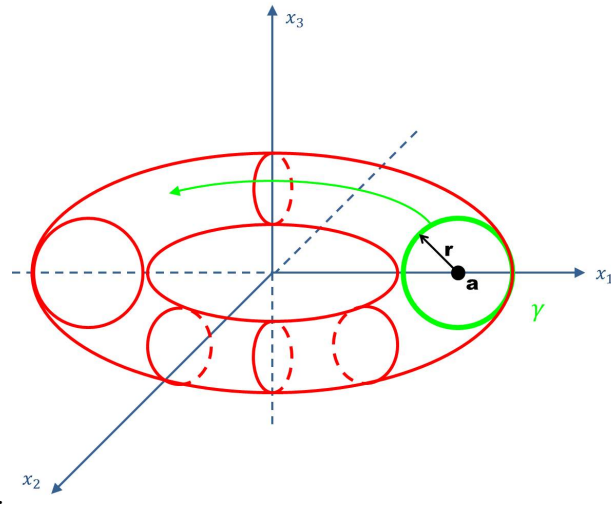
$$D\psi(t, s) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & 0 \\ \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, und damit: $\text{Rang } D\psi(t, s) = 2$ für alle $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, da \sin und \cos keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Damit ist ψ eine (globale) Parametrisierung des Zylinders.

2. (Rotationsflächen im \mathbb{R}^3)

Rotiere für Konstanten $0 < r < a$ die Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (a +$



$r \cdot \cos(t), 0, r \cdot \sin(t))$.

in der x_1x_3 -Ebene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ 0 \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} (a + r \cdot \cos(t)) \cos(\Theta) \\ (a + r \cdot \cos(t)) \sin(\Theta) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}}_{(*)}$$

Dann definiert $\Phi_\gamma: (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (\Theta, t) \mapsto (*)$ eine parametrisierte Fläche, den Rotationstorus.

- Der Rotationstorus $T \subseteq \mathbb{R}^3$ lässt sich als Niveaumenge definieren:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = r^2\}.$$

- Eine weitere (aus der Vorlesung bekannte) Darstellung des Torus ist

$$S^1 \times S^1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \wedge (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1\},$$

und dies ist nicht die letzte Möglichkeit der Darstellung des Torus (siehe nächste Vorlesung) ...

Kapitel 6

05.12.2011

6.1 Homotopieäquivalenzen

Definition Für zwei topologische Räume X, Y heißt eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ $\underbrace{f \in C(X, Y)}$

Homotopieäquivalenz, falls es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, sodass $g \circ f \simeq id_X$ und $f \circ g \simeq id_Y$ gilt.

Proposition 6.1. Es seien X, Y topologische Räume. Die Relation " \simeq " ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X, Y)$.

Beweis. • Reflexivität: Es sei $f \in C(X, Y)$. Definiere $H: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto f(x)$. Dann ist H eine Homotopie von f nach f , was die Reflexivität von " \simeq " zeigt.

- Symmetrie: Es seien $f, g \in C(X, Y)$ mit $f \simeq g$, d.h. es existiert eine Homotopie H von f nach g . Definiere $G: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$. Dann ist G Homotopie von g nach f und die Symmetrie von " \simeq " gezeigt.

- Transitivität: Es seien $f, g, h \in C(X, Y)$ mit $f \simeq g \simeq h$ durch die Homotopien H_1 und H_2 . Definiere

$$H: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann gilt für alle $x \in X$:

- $H(x, 0) = H_1(x, 0) = f(x)$,
- $H(x, 1) = H_2(x, 1) = h(x)$,

Für $t = \frac{1}{2}$ betrachte:

$$\lim_{t \nearrow \frac{1}{2}} H(x, t) = \lim_{t \nearrow \frac{1}{2}} H_1(x, 2t) = H_1(x, 1) = g(x),$$

$$\lim_{t \searrow \frac{1}{2}} H(x, t) = \lim_{t \searrow \frac{1}{2}} H_2(x, 2t - 1) = H_2(x, 0) = g(x).$$

Damit ist H Homotopie von f nach h und die Transitivität von " \simeq " gezeigt. □

6.2 Beispiele zu Homotopien

1. Beh.: Für einen topologischen Raum X sind je zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ homotop.

Beweis. Sei X ein topologischer Raum, $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$. Definiere $H: X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, t) \mapsto (1-t)f(x) + t \cdot g(x)$. Dann ist H Homotopie von f nach g , eine **lineare** Homotopie. □

2. Beh.: Jede stetige Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow Y, Y$ topologischer Raum, ist nullhomotop.

Beweis. Es sei Y topologischer Raum $f \in C(\mathbb{R}^n, Y)$. Definiere $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto f((1-t)x)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

- $H(x, 0) = f((1-0)x) = f(x),$
- $H(x, 1) = f((1-1)x) = f(0).$

Dann ist H Homotopie f nach $c_{f(0)} (= c \equiv f(0))$. □

Definition: Es seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$. Seien $f, g \in C(X, Y)$. Es heißt f relativ A homotop zu g (in Zeichen $f \simeq g \text{ rel } A$), falls eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$ von f nach g existiert, so dass $H(a, t) = H(a, 0)$ für alle $a \in A, t \in I$.

Bemerkung 6.1. Es seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$. Dann ist "Homotopie rel A " eine Äquivalenzrelation.

Proposition 6.2. Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation (auf der Klasse der topologischen Räume).

Bemerkung 6.2.

- Reflexivität: Es sei X topologischer Raum. Es gilt: $X \simeq X$ durch die Homotopieäquivalenz $\tilde{f}, \tilde{g} := id_X$.
- Symmetrie: Seien X, Y topologische Räume mit $X \simeq Y$, d.h. es existieren $\tilde{f} \in C(X, Y), \tilde{g} \in C(Y, X)$ mit $\tilde{g} \circ \tilde{f} \simeq id_X, \tilde{f} \circ \tilde{g} \simeq id_Y$. Definiere $f := \tilde{g}, g := \tilde{f}$. Dann gilt $f \circ g \simeq id_X, g \circ f \simeq id_Y$, d.h. $Y \simeq X$.

¹Statt \mathbb{R}^n reicht: kontrahierbarer Raum

- Transitivität: Seien X, Y, Z topologische Räume mit $X \simeq Y \simeq Z$, d.h. es existieren $f_1 \in C(X, Y), g_1 \in C(Y, X), f_2 \in C(Y, Z), g_2 \in C(Z, Y)$ mit

$$g_1 \circ f_1 \simeq id_X, f_1 \circ g_1 \simeq id_Y$$

$$g_2 \circ f_2 \simeq id_Y, f_2 \circ g_2 \simeq id_Z$$

Definiere $f := f_2 \circ f_1, g := g_1 \circ g_2$. Dann gilt:

$$g \circ f \simeq id_X, f \circ g \simeq id_Z,$$

d.h. $X \simeq Z$.

6.3 Kontrahierbarkeit

Es sei X ein topologischer Raum.

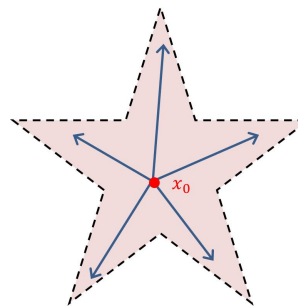
Definition Man nennt X **kontrahierbar**, falls gilt: $X \simeq \{pt\}$.

Bemerkung 6.3. Es gilt:

$$X \text{ kontrahierbar} \Leftrightarrow id_X \text{ ist nullhomotop.}$$

Beispiel 6.1.

- Es ist \mathbb{R}^n kontrahierbar, denn:
Definiere $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, t) \mapsto (1-t)x$. Dann ist H Homotopie von id_X nach c_0 , d.h. \mathbb{R}^n ist kontrahierbar nach obiger Bemerkung.



- Genauer ist jede **sternförmige**² $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kontrahierbar.

Teilmenge

Beispiel 6.2. D^n, B^n .

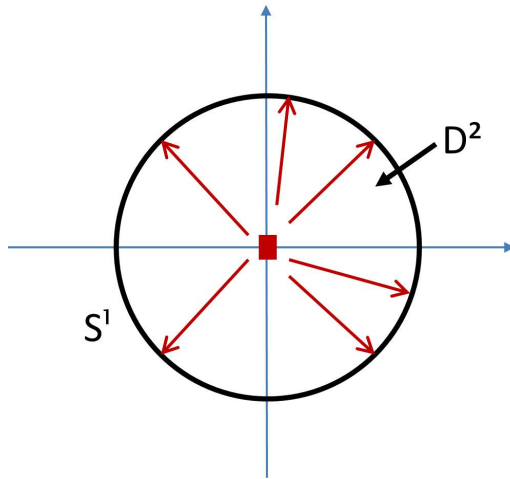
Bemerkung 6.4.

- Kontrahierbarkeit ist eine topologische Invariante.
- Kontrahierbare Räume sind einfach-zusammenhängend.

²Es existiert $x_0 \in M$, so dass für alle $x \in M$ gilt: $(1-t)x + t \cdot x_0 \in M$

6.4 Deformationsretrakte

Behauptung: S^{n-1} ist (starker) Deformationsretrakt von $D^k \setminus \{0\}$.



Beweis. Betrachte die Abbildung

$$H: D^n \setminus \{0\} \times I \rightarrow D^n \setminus \{0\}, (x, t) \mapsto (1-t)x + t \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

Definiere $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für alle $x \in D^n \setminus \{0\}$.

□

Kapitel 7

12.12.2011

7.1 Anwendungen zu Sätzen aus der Vorlesung

Satz 7.1 (Brouwerscher Fixpunktsatz). Jede stetige Abbildung $f: D^2 \rightarrow D^2$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es ex. $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.

Fundamentalsatz der Algebra

Satz 7.2 (Borsuk-Ulam). Ist $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, so existiert ein $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.

Korollar 7.1. Es lässt sich S^2 nicht in \mathbb{R}^2 einbetten.

Korollar 7.2. Auf der Erde existieren immer zwei verschiedene Punkte mit gleichem Luftdruck und gleicher Temperatur.

7.2 Homotopien und Fundamentalgruppe

7.2.1 Der komplex projektive Raum \mathbb{CP}^n

Der komplex projektive Raum $\mathbb{CP}^n = \{\text{komplexe Geraden durch } 0 \in \mathbb{C}^{n+1}\} = \{1\text{-dim. komplexe lineare Teilräume von } \mathbb{C}^{n+1}\}$ lässt sich auch wie folgt darstellen:

Führt man auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch

$$v \sim w :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda v = w$$

eine Äquivalenzrelation ein, so kann man \mathbb{CP}^n mit $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ identifizieren.

Betrachte $S^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|v\| = 1\}$ als Teilraum von \mathbb{C}^{n+1} . Dann induziert die Inklusion $S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ einen Homöomorphismus

$$S^{2n+1}/\sim \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim.$$

Seine Inverse ist die von der radialen Projektion

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^{2n+1}, v \mapsto \frac{1}{\|v\|} v,$$

induzierte stetige Abbildung $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \cong S^{2n+1}/\sim$.

Da S^{2n+1} kompakt ist und die Äquivalenzklassen in S^{2n+1} abgeschlossen sind, ist $\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/\sim$ kompakter Hausdorffraum.

- $n=0$: $\mathbb{CP}^0 = \{\text{komplexe Geraden durch } 0 \in \mathbb{C}\}$ ist ein einpunktiger Raum.
- $n=1$: \mathbb{CP}^1 ist homöomorph zu $S^3/\sim \cong S^2$, und damit gilt:
 $\pi_1(\mathbb{CP}^1) = \{0\}$, denn nach Vorlesung gilt $\pi_1(S^n) = \{0\}$ für alle $n \geq 2$
 und homöomorphe Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen.
 Der Homöomorphismus ist gegeben durch die folgende Abbildung

$$\varphi: \underbrace{S^3}_{\subseteq \mathbb{C}^2} \rightarrow S^2, \quad (z, w) \mapsto (2\bar{z}w, |w|^2 - |z|^2),$$

welche einen Homöomorphismus $S^3/\sim \cong S^2$ induziert.

Allgemein gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist \mathbb{CP}^n einfach zusammenhängend (da wegzusammenhängend: $\pi_1(\mathbb{CP}^n) = \{0\}$).

Bemerkung 7.1. Der reell projektive Raum \mathbb{RP}^n ist für kein $n \in \mathbb{N}$ einfach zusammenhängend, seine Fundamentalgruppe ist nicht trivial.

7.2.2 Die spezielle unitäre Gruppe $SU(n)$

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^* A = I_n, \det(A) = 1\}$$

(A^* bezeichnet die "Adjungierte": $A^* = \bar{A}^T$)

Es ist $SU(n)$ als Urbild abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen abgeschlossen in \mathbb{C}^{n^2} . Da die Spalten einer unitären Matrix orthonormal zueinander sind und somit Einheitsvektoren bilden, ist $SU(n)$ beschränkt. Nach dem Satz von Heine-Borel (welcher anwendbar ist, da $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$) ist $SU(n)$ damit kompakt.

- $n=1$: $SU(1) = \{z \in \mathbb{C}, \bar{z}z = 1, \det(z) = 1\} = \{1\}$ ist ein einpunktiger Raum.
- $n=2$: $SU(2)$ ist homöomorph zu S^3 und damit einfach zusammenhängend (mit gleicher Begründung wie für \mathbb{CP}^1).
 Zum Homöomorphismus:

Betrachte $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ als Teilraum von \mathbb{C}^2 .
Dann ist

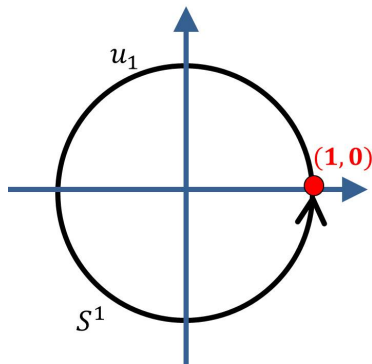
$$\varphi: S^3 \rightarrow SU(2), \quad (z, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

ein Homöomorphismus $S^3 \cong SU(2)$.

- Allgemein gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $SU(n)$ einfach zusammenhängend.

7.2.3 Die Kreislinie $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

Behauptung 7.1. S^1 ist nicht einfach zusammenhängend.



Was sind geschlossene Wege in S^1 ?

Für $k \in \mathbb{Z}$ definiere

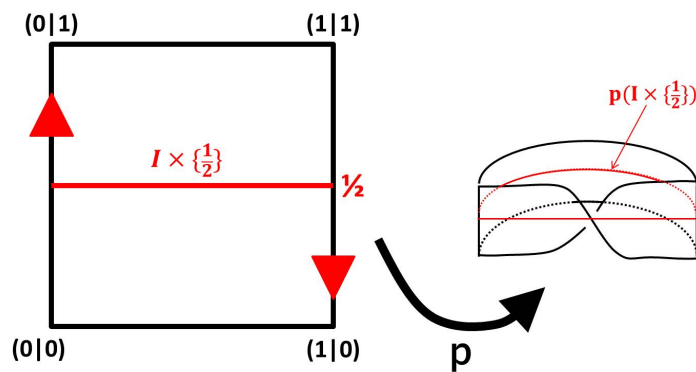
$$u_k: I \rightarrow S^1, \quad t \mapsto (\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt)$$

Solche Schleifen lassen sich für $k \neq 0$ nicht zusammenziehen.

7.2.4 Das Möbiusband

Das Möbiusband M entsteht durch Verklebung zweier gegenüberliegender Seiten im Einheitsquadrat I^2 in entgegengesetzter Richtung:

$$M = I^2 / [(0, t) \sim (1, 1-t)]$$



Es bezeichnet $p: I^2 \rightarrow M$ die Projektion und $S := p(I \times \{\frac{1}{2}\})$.

Man kann zeigen, dass S ein Deformationsretrakt von M ist. Somit sind S und M vom selben Homotopietyp und damit

$$\pi_1(M) \underset{\text{isomorph}}{\approx} \pi_1(S).$$

Andererseits gilt: S ist homöomorph zu S^1 und somit:

$$\pi_1(S^1) \approx \pi_1(S) \approx \pi_1(M).$$

Kapitel 8

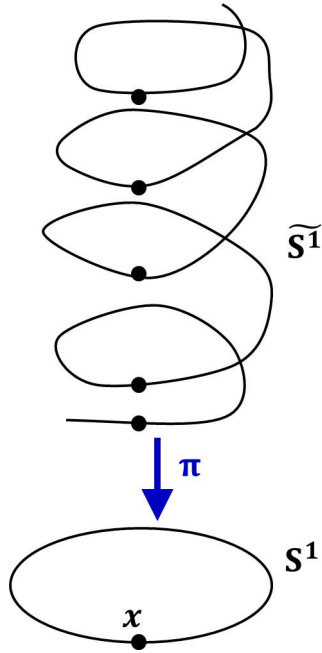
19.12.2011

8.1 Überlagerungen und Liftungen

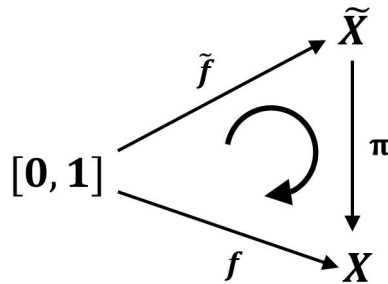
Definition 8.1. Eine Überlagerung eines topologischen Raumes X ist ein Raum \tilde{X} zusammen mit einer surjektiven stetigen Abbildung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, so dass für alle Punkte $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$ existiert mit

1. π^{-1} ist eine nichtleere Vereinigung paarweise disjunkter offener Mengen $\tilde{U}_j \subseteq \tilde{X}, j \in J$,
2. Für alle $j \in J$ ist $\pi|_{\tilde{U}_j}: \tilde{U}_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus.

[π Überlagerungsabbildung, $|J|$ Blätterzahl, \tilde{X} Totalraum, X Basisraum, $\pi^{-1}(x)$ Faser über x (für $x \in X$)]



Definition 8.2 (Lift). Ist $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, $f: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg, so heißt $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ Lift von f , falls $\pi \circ \tilde{f} = f$ gilt.



8.2 Folgerungen aus dem Satz über das Hochheben von Homotopien

Korollar 8.1. Es sei X ein topologischer Raum, $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Weiter sei $f: S^1 \rightarrow X$ eine Schleife in x_0 und \tilde{f} der Lift von f mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 . Dann gilt:

$$\tilde{f} \text{ ist Schleife} \Leftrightarrow [f] \in \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$

wobei $\pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ die induzierte Abbildung bezeichne.

Beweis. " \Rightarrow ": Es sei \tilde{f} eine Schleife (d.h. ein geschlossener Weg). Dann ist $[\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und somit:

$$[f] = [\pi \circ \tilde{f}] = \pi_*([\tilde{f}]) \in \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

" \Leftarrow ": Es sei $[f] \in \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Es sei \tilde{g} eine Schleife in \tilde{x}_0 mit

$$[f] = \pi_*([\tilde{g}]) = [\pi \circ \tilde{g}].$$

Dann sind f und $\pi \circ \tilde{g}$ homotop vermöge einer Homotopie $H: f \simeq \pi \circ \tilde{g}$. Es sei \tilde{H} der Lift von H mit $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$, $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$.

Nach dem Monodromie-Lemma haben alle Wege \tilde{H}_t den gleichen Endpunkt. Damit folgt:

$$\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{g}(1) = \tilde{H}_1(1) \stackrel{\text{Monodromie-Lemma}}{=} \tilde{H}_0(1) = \tilde{f}(1).$$

Also ist \tilde{f} eine Schleife (in \tilde{x}_0). □

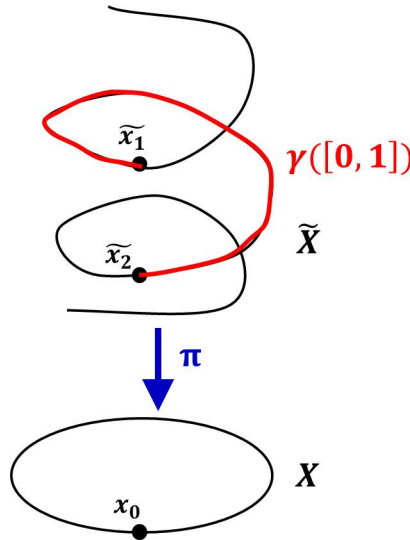
Korollar 8.2. Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, der eine wegzusammenhängende nichttriviale Überlagerung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ besitze (d.h. π ist mindestens zweiblättrig). Ist $x_0 \in X$, so gilt:

$$\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}.$$

Beweis. Sei $x_0 \in X$. Es seien $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x_0)$ mit $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$. Ferner sei

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$$

ein Weg von \tilde{x}_1 zu \tilde{x}_2 .



Dann ist $\pi \circ \gamma$ ein geschlossener Weg in X , der sich nicht in einen geschlossenen Weg liften lässt. es gilt also: $\pi \circ \gamma \in \pi_1(X, x_0)$. Nach obigem Korollar gilt aber: Der Lift von $\pi \circ \gamma$ ist nicht im Bild von $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Somit gibt es ein Element in $\pi_1(X, x_0)$, welches nicht im Bild der induzierten Abbildung

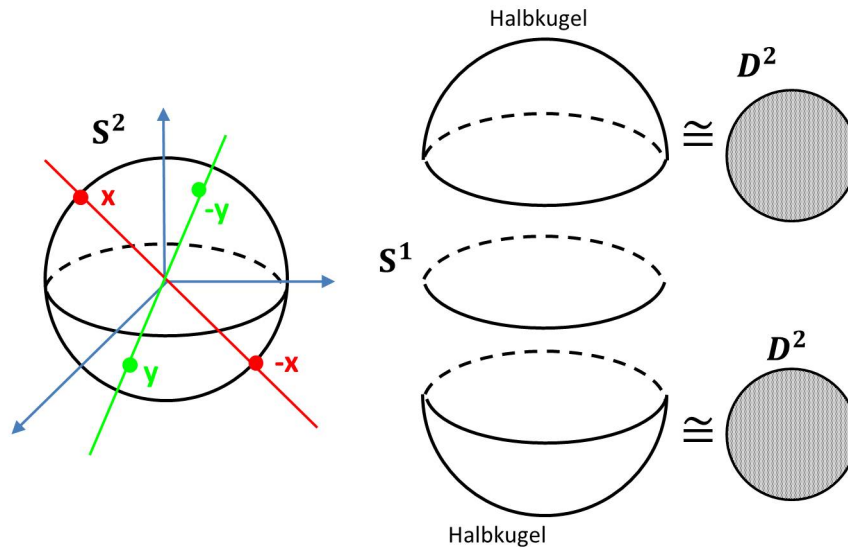
$$\pi_*: \pi_1(\tilde{X}, \underbrace{\tilde{x}_0}_{\in \pi^{-1}(x_0)}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

liegt.

Da π_* ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt sicher: $1 \in \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Also folgt: $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$. \square

Beispiel 8.1. Die kanonische Projektion $S^2 \rightarrow S^2/[x \sim (-x)] = \mathbb{RP}^2$ ist eine zweiblättrige Überlagerung.

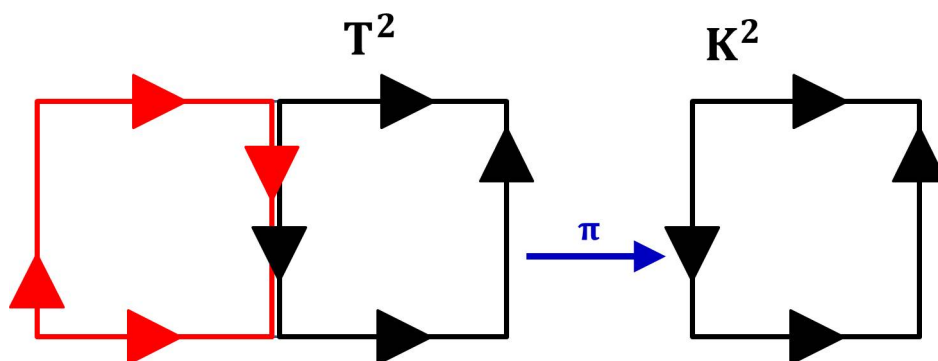


Es sind sowohl S^2 als auch \mathbb{RP}^2 wegzusammenhängend. Dann folgt mit dem Korollar:

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \neq \{1\} \text{ (zu jedem beliebigen Basispunkt).}$$

Nach Vorlesung ist S^2 einfach zusammenhängend (d.h. wegzusammenhängend und mit trivialer Fundamentalgruppe). Da homöomorphe Räume isomorphe Fundamentalgruppen haben, können also S^2 und \mathbb{RP}^2 nicht homöomorph sein.

Beispiel 8.2. Der Torus ist eine zweiblättrige Überlagerung der Kleinschen Flasche.



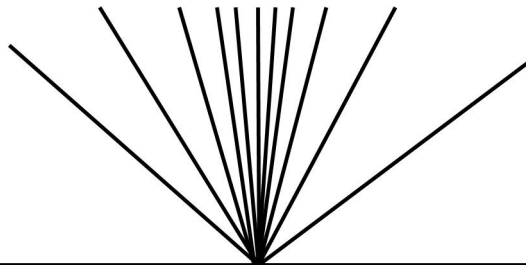
Kapitel 9


09.01.2012

9.1 Überlagerungen und Decktransformationen

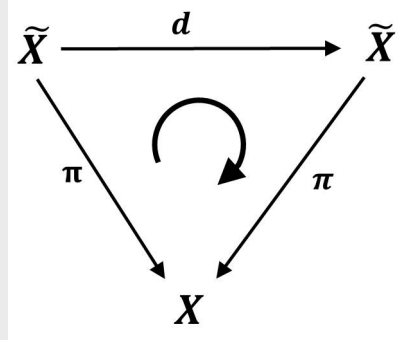
Definition 9.1 (lokal wegzusammenhängend). Ein topologischer Raum X heißt lokal wegzusammenhängend, falls jede offene Umgebung U eines Punktes $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung enthält, d.h. $\forall x \in X \quad \forall U = U(x) \quad \exists V \subseteq U: x \in V$ und V wegzusammenhängend.

Bemerkung 9.1. Ein lokal wegzusammenhängender Raum ist genau dann wegzusammenhängend, wenn er zusammenhängend ist.

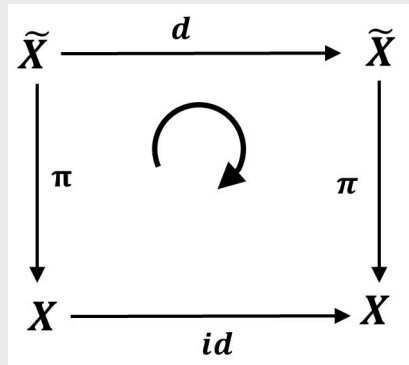


Beispiel 9.1.  Wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend.

Definition 9.2 (Decktransformation). Sei X ein topologischer Raum. Eine Decktransformation (oder -bewegung) einer Überlagerung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus $d: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $\pi = \pi \circ d$.



(Alternativ: Decktransformationen überlagern die Identität $X \rightarrow X$.



)

Beispiel 9.2. • Für $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$, sind die Deckbewegungen die ganzzahligen Translationen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + z$ mit $z \in \mathbb{Z}$; und für die Deckbewegungsgruppe erhält man $D \cong \mathbb{Z}$.

- Für $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1 \cong T^2$ sind die Deckbewegungen die Translationen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + m, y + n)$ für $m, n \in \mathbb{Z}$; und es gilt: $D \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- Für $\pi: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{N}$ sind die Deckbewegungen Drehungen um ein Vielfaches des Winkels $\frac{2\pi}{n}$; und es gilt: $D \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

9.2 Einschub Gruppenoperationen

Erinnerung Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe G , die zugleich ein topologischer Raum ist, so dass

$$G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh,$$

$$G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

Es seien G eine topologische Gruppe, X ein topologischer Raum.

Definition 9.3. • Eine Operation oder Wirkung von G auf X ist eine stetige Abbildung

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g.x$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in X: e.x = x$ für das neutrale Element $e \in G$;
 2. $\forall x \in X \quad \forall g_1, g_2 \in G: g_1.(g_2.x) = (g_1 g_2).x$
- Die Menge $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$ heißt Orbit oder Bahn von x unter G .
 - G operiert transitiv auf X , falls für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ existiert mit $g.x = y$.
 - G operiert eigentlich diskontinuierlich auf X , falls zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U(x) = U$ existiert mit $g.U \cap U = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$.
(Dann ist auch $g.U \cap g'.U = \emptyset$ für alle $g, g' \in G$ mit $g \neq g'$.)

Satz 9.1. Es sei X ein topologischer Raum, auf dem eine topologische Gruppe G eigentlich diskontinuierlich wirkt. Dann ist $\pi: X \rightarrow X/G$ auf den sogenannten Orbit- oder Bahnenraum X/G eine Überlagerung, deren Blätterzahl der Mächtigkeit von G entspricht.

Beweis. Für $x \in X$ sei U eine Umgebung von x mit $g.U \cap g'.U = \emptyset$ für alle $g, g' \in G$ mit $g \neq g'$.

Dann ist $V = \pi(U) \subseteq X/G$ eine

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \pi \\ X/G \end{array}$$

überlagerte Umgebung von $\pi(x)$ in X/G (da $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g.U$ (disjunkte Vereinigung).)

Die Blätter über V sind die offenen Mengen $g.U$ für $g \in G$. □

Beispiel 9.3. Die Gruppe \mathbb{Z}^n operiert auf \mathbb{R}^n durch $(a, x) \mapsto a + x$ eigentlich diskontinuierlich.

Daher ist $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong T^n$ eine unendlich-blättrige Überlagerung.

Es sei $f: \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ Faktoren}}$ der Homöomorphismus

$$\pi(x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$$

Dann ist $f \circ \pi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^1 \times \dots \times S^1$ ebenfalls eine Überlagerung.

Verschärfung des Satzes:

Satz 9.2. Wirkt eine topologische Gruppe G eigentlich diskontinuierlich auf einen wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden topologischen Raum X , so ist die Projektion $\pi: X \rightarrow X/G$ eine reguläre Überlagerung mit Deckbewegungsgruppe $D = G$.

Definition 9.4 (reguläre/normale Überlagerung). Eine Überlagerung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ heißt regulär (oder normal), falls die Deckbewegungsgruppe transitiv auf $\pi^{-1}(x)$ für $x \in X$ operiert.

Definition 9.5 (semilokal einfach zusammenhängend). Ein topologischer Raum heißt semilokal einfach zusammenhängend, falls für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$ existiert, so dass jeder in U liegende geschlossene Weg in X nullhomotop ist.

Satz 9.3 (Klassifikationssatz für Überlagerungen). Es sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender topologischer Raum, der eine einfach zusammenhängende (d.h. eine sogenannte universelle) Überlagerung besitze.

Die Äquivalenzklassen der Überlagerungen mit Basispunkten, die auf $x_0 \in X$ abgebildet werden, entsprechen bijektiv den Untergruppen von $\pi_1(X, x)$.

(Die Bijektion ist gegeben durch $\tilde{X} \leftrightarrow \pi_*(\pi_1(\tilde{X}))$ für eine Überlagerung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$.)

Beispiel 9.4. Die Untergruppen von $\pi_1(S^2) \cong \mathbb{Z}$ sind $n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die zugehörigen Überlagerungen sind

$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} \text{ für } n = 0,$$

$$\pi_n: S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n \text{ für } n \geq 1.$$

Definition 9.6 (universelle Überlagerung). Für einen wegzusammenhängenden Raum X heißt eine Überlagerung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ universell, falls \tilde{X} einfach zusammenhängend ist.

Warum "universell"? Eine einfach zusammenhängende Überlagerung überlagert selbst wieder jede andere Überlagerung und alle einfach zusammenhängenden Überlagerungen sind äquivalent.

Hauptresultat Jeder wegzusammenhängende, lokal wegzusammenhängende und semilokal einfach zusammenhängende topologische Raum besitzt eine universelle Überlagerung!