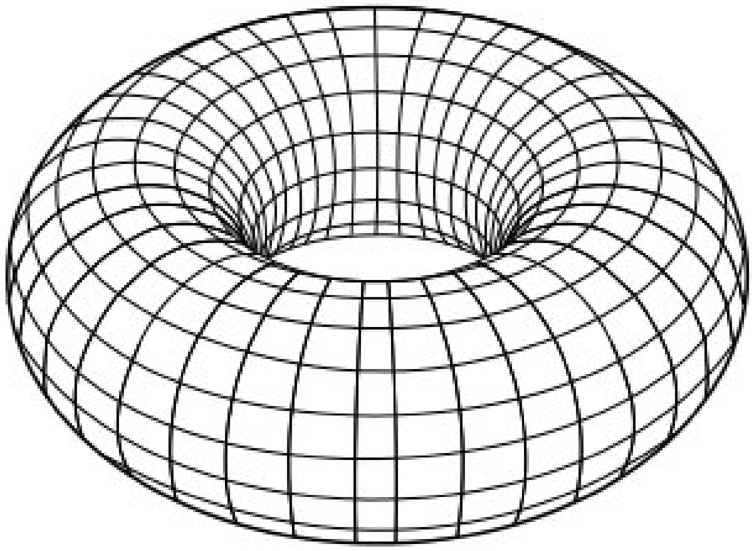
# Einführung in die Geometrie und Topologie
# - Mitschrieb -

## Übung im Wintersemester 2011/2012

Sarah Lutteropp

27. Oktober 2011



# Inhaltsverzeichnis



## Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Übung "Einführung in die Geometrie und Topologie" vom Wintersemester 2011/2012 am Karlsruher Institut für Technologie, die von Frau Dipl.-Math. Sandra Lenz gehalten wird.

# Kapitel 1

# 24.10.2011

## 1.1 Induzierte Topologie

**Definition 1.1** (Induzierte Topologie)**.** *Sei $X$ eine Menge. Sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Diese Metrik $d$ definiert durch folgende Bedingung eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$:*
*$O \subseteq X$ ist genau dann offen (d.h. $O \in \mathcal{O}_d$), wenn für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit*

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subseteq O.$$

*($B_\epsilon$ nennt man offenen $\epsilon$-Ball.)*

## 1.2 Offen und abgeschlossen

Sei $X$ eine Menge.

- Mengen können sowohl offen als auch abgeschlossen (zugleich) sein.

  **Beispiel 1.1.** *Betrachte $\emptyset$ und $X$ in der trivialen Topologie $\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$.*
  *Es gilt: $X \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition, d.h. $X$ und $\emptyset$ sind offen.*
  *Außerdem gilt: $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$, ebenso: $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$, d.h. die Komplemente von $X$ und $\emptyset$ sind offen und somit $X$ und $\emptyset$ abgeschlossen.*

- Mengen können weder offen noch abgeschlossen sein.

  **Beispiel 1.2.** *Betrachte $\mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie. Es ist $[0, 1[$ nicht offen in dieser Topologie, denn für den Punkt $0$ finden wir kein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(0)$ in $[0, 1[$ liegt. Die Menge $[0, 1[$ ist aber auch nicht abgeschlossen, da ihr Komplement $\mathbb{R} \backslash [0, 1[ = ] - \infty, 0[ \cup [\underline{1}, \infty[$ nicht offen ist.*

- Bilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen müssen nicht notwendigerweise offen sein.

**Beispiel 1.3.** *Betrachte $\mathbb{R}$ mit der von der Standardmetrik induzierten Topologie.*
*Definiere $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.*
*Es gilt für die in $\mathbb{R}$ offene Menge $]-1,1[$:*
*$f(]-1,1[) = [0,1[$ und $[0,1[$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$.*

## 1.3 Basis der von der Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definierten Topologie

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

Diese Basis ist abzählbar.

## 1.4 Teilraumtopologie

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$.
Die Teilraumtopologie (oder Spurtopologie) ist definiert durch

$$\mathcal{O}\big|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

**Satz 1.1.** *In der Tat definiert $\mathcal{O}\big|_A$ eine Topologie auf $A$.*

*Beweis.* •<u>z.z.</u>: Für jede Indexmenge $I$ gilt: $\forall i \in I\colon O_i \in \mathcal{O}\big|_A \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}\big|_A$.
Sei $I$ beliebige Indexmenge. Für alle $i \in I$ mit $O_i \in \mathcal{O}\big|_A$ gilt: Es existieren $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A$. Es gilt:

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I} (\mathcal{U}_i \cap A) = (\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i) \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$$

(da $\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{O}$).
• <u>z.z.</u>: $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}\big|_A\colon O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}\big|_A$.
Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{O}\big|_A$. Dann ex. $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_i = \mathcal{U}_i \cap A, i \in \{1,2\}$. Es gilt: $O_1 \cap O_2 = (\mathcal{U}_1 \cap A) \cap (\mathcal{U}_2 \cap A) = (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$.
• <u>z.z.</u>: $A, \emptyset \in \mathcal{O}\big|_A$.
Es gilt: $A = X \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $X \in \mathcal{O}$ nach Definition von $\mathcal{O}$.
Es gilt: $\emptyset = \emptyset \cap A \in \mathcal{O}\big|_A$, da $\emptyset \in \mathcal{O}$ nach Definition von $\mathcal{O}$. □

## 1.5 Homotopieäquivalenz

**Definition 1.2.** *Seien $X, Y$ topologische Räume. $X$ heißt <u>homotopieäquivalent zu $Y$</u>, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$.*

**Satz 1.2.** $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ *ist homotopieäquivalent zur Sphäre* $S^{n-1}$.

*Beweis.* Sei $f\colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, x \mapsto x$ (Inklusionsabbildung). Dann ist $f$ stetig.
Sei weiter $g\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{||x||}$. Dann ist auch $g$ stetig und es gilt: $g \circ f = id_{S^{n-1}}$, also insbesondere $g \circ f \simeq id_{S^{n-1}}$.
Für $f \circ g$ betrachte folgende Abbildung:

$$H\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, (x,t) \mapsto (1-t)\frac{x}{||x||} + t \cdot x$$

Dann ist $H$ stetig und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:
$H(x,1) = x = id_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}(x)$
$H(x,0) = \frac{x}{||x||} = (f \circ g)(x)$
Dann ist $H$ Homotopie von $f \circ g$ nach $id_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}$ (in Zeichen: $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}$).
□