Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen I
Tutorium 33

Woche 7 | 08. Juni 2018

Daniel Jungkind (daniel.jungkind@student.kit.edu)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Inhalt

Eimerweise Sortieralgorithmen

Binäre Heaps

Sorting Algorithms

Zu Blatt #6

Durchschnitt: etwa 81 % der Punkte

- Macht euch das Leben **leichter** und indiziert eure Arrays von $1 \dots n$ (sofern es nützt, so wie in der A)
- Nutzt die Methode swap(a, b) zum Tauschen anstatt irgendwas mit *temp* anzustellen.
- e_1.compareTo$(e_2) > 0$: **WTF?**
  $\Rightarrow$ Wieso nicht einfach $e_1 > e_2$?

$\Rightarrow$ Vor allem in der **Klausur**, sonst verschwendet ihr Zeit!

Schwarzes Brett

Am **Mi, 20.06.** zum Algorithmen-Termin: **Probeklausur!**

- Zählt nicht (auch keine Bonuspunkte)
- „Reale“ Klausurbedingungen

$\Rightarrow$ Hingehen lohnt sich!

EIMERWEISE SORTIERALGORITHMEN

Eimerweise Sortieralgorithmen

Erinnerung: Bucketsort

- n Elemente **beschränkter** Größe (also $\forall e: \; e \in \{a, ..., b\}$)
- Lege an buckets : **array**$[a..b]$ **of** List **of** Element ($k := |\text{buckets}|$)
- Schmeiße jedes Element e in seinen Eimer: buckets$[e]$.pushBack(e) (hinten anhängen)
- Am **Ende**: „Eimer“ zusammenhängen

$\Rightarrow$ Array sortiert.

- **Laufzeit**: $O(n + k)$
- **Aufpassen** bei großen/unbeschränkten k!

CountingSort

Zahlen zählen

- Sagen wir jetzt ganz konkret: n Zahlen $\in \{1, ..., k\}$.
- **Neue Idee: Zähle** (in einem Extra-Array), welche Zahl **wie oft vorkommt** (in $\Theta(n)$)
- Bestimme dann, welche Zahl **in welchen Bereich** des sortierten Arrays gehört (in $\Theta(k)$)
- Füge die Zahlen dann dort ein (in $\Theta(n)$)
- Gesamtlaufzeit von *CountingSort*: $O(n + k)$

CountingSort

Zahlen zählen

- Sagen wir jetzt ganz konkret: n Zahlen $\in \{1, ..., k\}$.
- **Neue Idee**: **Zähle** (in einem Extra-Array), welche Zahl **wie oft vorkommt** (in $\Theta(n)$)
- Bestimme dann, welche Zahl **in welchen Bereich** des sortierten Arrays gehört (in $\Theta(k)$)
- Füge die Zahlen dann dort ein (in $\Theta(n)$)
- Gesamtlaufzeit von *CountingSort*: $O(n + k)$

CountingSort

Zahlen zählen

- Sagen wir jetzt ganz konkret: n Zahlen $\in \{1, ..., k\}$.
- **Neue Idee**: **Zähle** (in einem Extra-Array), welche Zahl **wie oft vorkommt** (in $\Theta(n)$)
- Bestimme dann, welche Zahl **in welchen Bereich** des sortierten Arrays gehört (in $\Theta(k)$)
- Füge die Zahlen dann dort ein (in $\Theta(n)$)
- Gesamtlaufzeit von *CountingSort*: $O(n + k)$

CountingSort

Zahlen zählen

- Sagen wir jetzt ganz konkret: n Zahlen $\in \{1, ..., k\}$.
- **Neue Idee**: **Zähle** (in einem Extra-Array), welche Zahl **wie oft vorkommt** (in $\Theta(n)$)
- Bestimme dann, welche Zahl **in welchen Bereich** des sortierten Arrays gehört (in $\Theta(k)$)
- Füge die Zahlen dann dort ein (in $\Theta(n)$)
- Gesamtlaufzeit von *CountingSort*: $O(n + k)$

CountingSort

Zahlen zählen

- Sagen wir jetzt ganz konkret: n Zahlen $\in \{1, ..., k\}$.
- **Neue Idee**: **Zähle** (in einem Extra-Array), welche Zahl **wie oft vorkommt** (in $\Theta(n)$)
- Bestimme dann, welche Zahl **in welchen Bereich** des sortierten Arrays gehört (in $\Theta(k)$)
- Füge die Zahlen dann dort ein (in $\Theta(n)$)
- Gesamtlaufzeit von *CountingSort*: $O(n + k)$

CountingSort

CountingSort

```
function CountingSort(A : array[1...n] of ℕ)
    C := (0, ..., 0) : array[1...k] of ℕ     // das Zählerarray
    S : array[1...n] of ℕ     // das sortierte Array (in VL ein Parameter)
    for i := 1 to n do
        C[A[i]] ++
    C[0] := 1
    for i := 1 to k do
        C[i] += C[i − 1]
    // C[ℓ − 1] sagt jetzt, wo in S der Bereich für die Zahl ℓ ∈ A beginnt
    for i := 1 to n do
        S[C[A[i] − 1]] := A[i]     // A[i] in den zugehörigen Bereich einfügen
        C[A[i] − 1] ++ // verschiebe Start des Bereiches um eins nach rechts
    return S
```

CountingSort

Eigenschaften

$\Rightarrow$ **Spezialfall** von Bucketsort: Eimer $\hat{=}$ Zähler

CountingSort

Eigenschaften

$\Rightarrow$ **Spezialfall** von Bucketsort: Eimer $\hat{=}$ Zähler

Ist CountingSort stabil? **?**

CountingSort

Eigenschaften

$\Rightarrow$ **Spezialfall** von Bucketsort: Eimer $\hat{=}$ Zähler

Ist CountingSort stabil? **Ja.**

CountingSort

Eigenschaften

$\Rightarrow$ **Spezialfall** von Bucketsort: Eimer $\hat{=}$ Zähler

Ist CountingSort stabil? **Ja.**

Ist Countingsort in-place? **?**

CountingSort

Eigenschaften

$\Rightarrow$ **Spezialfall** von Bucketsort: Eimer $\hat{=}$ Zähler

Ist CountingSort stabil? **Ja.**

Ist Countingsort in-place? **Nein.**

Eimerweise Sortieralgorithmen

Aufgabe 1: Das zählt nicht

Gegeben sei $A \in \left(\bigcup_{i=1}^{k} \left\{ i,\ i + \frac{1}{2} \right\} \right)^n$. Gebt ein Verfahren an, mit dem A in $O(n + k)$ sortiert werden kann.

Eimerweise Sortieralgorithmen

Lösung zu Aufgabe 1
(A ist ein **Tupel** (da Element eines kartesischen Produktes).)
Sortiere $A' := 2 \cdot A$ durch *CountingSort* mit $k' := 2k + 1$ und teile jeden Wert im sortierten Array wieder durch 2.
Laufzeit: Da $|A'| = |A| = n$ in
$O(n + k')$ = $O(n + 2k + 1)$ = $O(n + k)$

Radixsort

Ein neuer Ansatz

- **Geg.**: n Zahlen $\in \mathbb{N}_0$ in Darstellung zur Basis K mit jeweils d Stellen pro Zahl
- **Idee:** $\forall$ Stelle von niedrigstwertig nach höchstwertig:
  Sortiere mit **Bucketsort** (Buckets von 0 bis $K-1$) nach **dieser** Stelle
- **Warum** geht das?
  $\Rightarrow$ **Stabilität** von Bucketsort
- **Laufzeit** von (LSD-)Radixsort: $O(d \cdot (n+K))$
  (LSD: **Lowest significant digit**)

Radixsort

Ein neuer Ansatz

- **Geg.**: n Zahlen $\in \mathbb{N}_0$ in Darstellung zur Basis K mit jeweils d Stellen pro Zahl
- **Idee**: $\forall$ Stelle von niedrigstwertig nach höchstwertig:
  Sortiere mit **Bucketsort** (Buckets von 0 bis $K-1$) nach **dieser** Stelle
- **Warum** geht das?
  $\Rightarrow$ **Stabilität** von Bucketsort
- **Laufzeit** von (LSD-)Radixsort: $O(d \cdot (n+K))$
  (LSD: **L**owest **s**ignificant **d**igit)

Radixsort

Ein neuer Ansatz

- **Geg.**: n Zahlen $\in \mathbb{N}_0$ in Darstellung zur Basis K mit jeweils d Stellen pro Zahl
- **Idee**: $\forall$ Stelle von niedrigstwertig nach höchstwertig:
  Sortiere mit **Bucketsort** (Buckets von 0 bis $K - 1$) nach **dieser** Stelle
- **Warum** geht das?
  $\Rightarrow$ **Stabilität** von Bucketsort
- **Laufzeit** von (LSD-)Radixsort: $O(d \cdot (n + K))$
  (LSD: Lowest significant digit)

Radixsort

Ein neuer Ansatz

- **Geg.**: n Zahlen $\in \mathbb{N}_0$ in Darstellung zur Basis K mit jeweils d Stellen pro Zahl
- **Idee**: $\forall$ Stelle von niedrigstwertig nach höchstwertig:
  Sortiere mit **Bucketsort** (Buckets von 0 bis $K - 1$) nach **dieser** Stelle
- **Warum** geht das?
  $\Rightarrow$ **Stabilität** von Bucketsort
- **Laufzeit** von (LSD-)Radixsort: $O(d \cdot (n + K))$
  (LSD: **L**owest **s**ignificant **d**igit)

Eimerweise Sortieralgorithmen

Aufgabe 2: Radixchensalat

Sortiert die folgende Liste mit *LSD-Radixsort*:

$\langle 36, 78, 50, 1, 92, 15, 43, 99, 64 \rangle$

Eimerweise Sortieralgorithmen

Lösung zu Aufgabe 2

Eingabe: $\langle 36, 78, 50, 01, 92, 15, 43, 99, 64 \rangle$

Nach der ersten Stelle (von rechts):
$\langle 5\mathbf{0}, 0\mathbf{1}, 9\mathbf{2}, 4\mathbf{3}, 6\mathbf{4}, 1\mathbf{5}, 3\mathbf{6}, 7\mathbf{8}, 9\mathbf{9} \rangle$

Nach der zweiten Stelle:
$\langle \mathbf{0}1, \mathbf{1}5, \mathbf{3}6, \mathbf{4}3, \mathbf{5}0, \mathbf{6}4, \mathbf{7}8, \mathbf{9}2, \mathbf{9}9 \rangle$

(LSD-)Radixsort

Eigenschaften

- **Laufzeit**: linear (für **konstante** d **und** K!)
  (für große d: Verfahren in $\Theta(n \log n)$ geeigneter)
- Ebenfalls **Spezialfall** von *BucketSort*
- ... und ebenfalls **stabil**, aber **nicht in-place**.
- *MSD-Radixsort* gibt's auch, wird hier nicht behandelt

(LSD-)Radixsort

Eigenschaften

- **Laufzeit**: linear (für **konstante** d **und** K!)
  (für große d: Verfahren in $\Theta(n \log n)$ geeigneter)
- Ebenfalls **Spezialfall** von *BucketSort*
- ... und ebenfalls **stabil**, aber **nicht in-place**.
- *MSD-Radixsort* gibt's auch, wird hier nicht behandelt

(LSD-)Radixsort

Eigenschaften

- **Laufzeit**: linear (für **konstante** d **und** K!)
  (für große d: Verfahren in $\Theta(n \log n)$ geeigneter)
- Ebenfalls **Spezialfall** von *BucketSort*
- ... und ebenfalls **stabil**, aber **nicht in-place**.
- *MSD-Radixsort* gibt's auch, wird hier nicht behandelt

(LSD-)Radixsort

Eigenschaften

- **Laufzeit**: linear (für **konstante** d **und** K!)
  (für große d: Verfahren in $\Theta(n \log n)$ geeigneter)
- Ebenfalls **Spezialfall** von *BucketSort*
- ... und ebenfalls **stabil**, aber **nicht in-place**.
- *MSD-Radixsort* gibt's auch, wird hier nicht behandelt

(LSD-)Radixsort

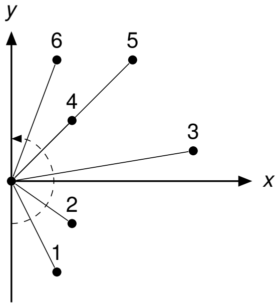
Eigenschaften

- **Laufzeit**: linear (für **konstante** d **und** K!)
  (für große d: Verfahren in $\Theta(n \log n)$ geeigneter)
- Ebenfalls **Spezialfall** von *BucketSort*
- ... und ebenfalls **stabil**, aber **nicht in-place**.
- *MSD-Radixsort* gibt's auch, wird hier nicht behandelt

Eimerweise Sortieralgorithmen

Aufgabe 3: Radar-Sort

Gegeben ist ein Array von Punkten P : **array**$[1..n]$ **of** $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, deren Koordinaten beschränkt sind. Ihr steht im Ursprung und wollt die Punkte **gegen** den Uhrzeigersinn abklappern, wobei von hintereinanderliegenden Punkten zuerst die betrachtet werden sollen, die näher am Ursprung liegen. (Es wird hier nur mit Festkommazahlen gerechnet.)



Findet zwei Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen.

Eimerweise Sortieralgorithmen

Lösung zu Aufgabe 3

- Es gibt $r > 0$, $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sodass $(x, y) = (r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi)$

$\Rightarrow$ Wandle Punkte in **Polarkoordinaten** um

1. Möglichkeit:
   - Sortiere aufsteigend nach Distanz r mit Radixsort
   - Sortiere aufsteigend nach Winkel ϕ mit Radixsort

   $\Rightarrow$ Funktioniert dank Stabilität
   - Laufzeit: $\Theta(n)$, da r und ϕ beschränkt
2. Möglichkeit:
   - Sortiere aufsteigend mithilfe eigener Ordnung: $(\phi_1, r_1) < (\phi_2, r_2) \;:\Longleftrightarrow\; \phi_1 < \phi_2 \vee (\phi_1 = \phi_2 \wedge r_1 < r_2)$
   - Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

- Das geht übrigens auch mit Sortieren nach Nachname und Vorname etc.

Eimerweise Sortieralgorithmen

Lösung zu Aufgabe 3

- Es gibt $r > 0,\ \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sodass $(x, y) = (r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi)$

$\Rightarrow$ Wandle Punkte in **Polarkoordinaten** um

1. Möglichkeit:
   - Sortiere aufsteigend nach Distanz r mit Radixsort
   - Sortiere aufsteigend nach Winkel ϕ mit Radixsort

   $\Rightarrow$ Funktioniert dank Stabilität
   - Laufzeit: $\Theta(n)$, da r und ϕ beschränkt
2. Möglichkeit:
   - Sortiere aufsteigend mithilfe eigener Ordnung:
     $(\phi_1, r_1) < (\phi_2, r_2) \ :\Longleftrightarrow\ \phi_1 < \phi_2 \lor (\phi_1 = \phi_2 \land r_1 < r_2)$
   - Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

- Das geht übrigens auch mit Sortieren nach Nachname und Vorname etc.

Eimerweise Sortieralgorithmen

Lösung zu Aufgabe 3

- Es gibt $r > 0$, $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sodass $(x, y) = (r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi)$

$\Rightarrow$ Wandle Punkte in **Polarkoordinaten** um

1. Möglichkeit:
   - Sortiere aufsteigend nach Distanz r mit Radixsort
   - Sortiere aufsteigend nach Winkel ϕ mit Radixsort

   $\Rightarrow$ Funktioniert dank Stabilität
   - Laufzeit: $\Theta(n)$, da r und ϕ beschränkt
2. Möglichkeit:
   - Sortiere aufsteigend mithilfe eigener Ordnung:
     $(\phi_1, r_1) < (\phi_2, r_2) \;:\Longleftrightarrow\; \phi_1 < \phi_2 \vee (\phi_1 = \phi_2 \wedge r_1 < r_2)$
   - Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

- Das geht übrigens auch mit Sortieren nach Nachname und Vorname etc.

Eimerweise Sortieralgorithmen

Aufgabe 4: Liste der bedrohten Sortierarten
Gegeben seien n Zahlen im Bereich von 0 bis $n^3 - 1$. Gebt ein Verfahren an, mit dem diese in $\Theta(n)$ sortiert werden können.

Eimerweise Sortieralgorithmen

Lösung zu Aufgabe 4

Betrachte die Zahlen in Darstellung zur Basis n, d.h. jede Zahl hat in dieser Darstellung 3 Stellen.

Wende *RadixSort* an $\Rightarrow$ die Zahlen werden in $\Theta(3 \cdot (n + n)) = \Theta(n)$ sortiert.

BINÄRE HEAPS

Haufen mit Ordnung

Binäre Heaps

- **Binärbaum**: Baum, wobei jeder Knoten **max. zwei Kinder** hat.
- Ein Baum T erfüllt die **Heap-Eigenschaft** $:\Leftrightarrow$
  $\forall v \in T: \quad \text{parent}(v) \leqslant v$
  (Wurzel = Minimum,
  je näher an Wurzel, desto kleiner die Werte)
  Achtung: Das heißt **nicht** ~~„T ist sortiert“~~!
- Ein **binärer Heap** ist ein Binärbaum, der die Heap-Eigenschaft erfüllt.
- **Wofür?** $\Rightarrow$ (un/beschränkte) *PriorityQueues* (brauchen wir später noch!)

Binäre Heaps

Karlsruher Institut für Technologie

- **Binärbaum**: Baum, wobei jeder Knoten **max. zwei Kinder** hat.
- Ein Baum T erfüllt die **Heap-Eigenschaft** $:\Leftrightarrow$
  $\forall v \in T: \quad \text{parent}(v) \leqslant v$
  (Wurzel $=$ Minimum,
  je näher an Wurzel, desto kleiner die Werte)
  Achtung: Das heißt **nicht** ~~„T ist sortiert“~~!
- Ein **binärer Heap** ist ein Binärbaum, der die Heap-Eigenschaft erfüllt.
- **Wofür?** $\Rightarrow$ (un/beschränkte) *PriorityQueues* (brauchen wir später noch!)

Binäre Heaps

- **Binärbaum**: Baum, wobei jeder Knoten **max. zwei Kinder** hat.
- Ein Baum T erfüllt die **Heap-Eigenschaft** $:\Leftrightarrow$
  $\forall v \in T : \quad \text{parent}(v) \leqslant v$
  (Wurzel $=$ Minimum,
  je näher an Wurzel, desto kleiner die Werte)
  Achtung: Das heißt **nicht** ~~„T ist sortiert“~~!
- Ein **binärer Heap** ist ein Binärbaum, der die Heap-Eigenschaft erfüllt.
- Wofür? $\Rightarrow$ (un/beschränkte) *PriorityQueues* (brauchen wir später noch!)

Binäre Heaps

- **Binärbaum**: Baum, wobei jeder Knoten **max. zwei Kinder** hat.
- Ein Baum T erfüllt die **Heap-Eigenschaft** $:\Leftrightarrow$
  $\forall v \in T : \quad \text{parent}(v) \leqslant v$
  (Wurzel $=$ Minimum,
  je näher an Wurzel, desto kleiner die Werte)

  Achtung: Das heißt **nicht** ~~„T ist sortiert“~~!
- Ein **binärer Heap** ist ein Binärbaum, der die Heap-Eigenschaft erfüllt.
- **Wofür**? $\Rightarrow$ (un/beschränkte) *PriorityQueues* (brauchen wir später noch!)

Binäre Heaps

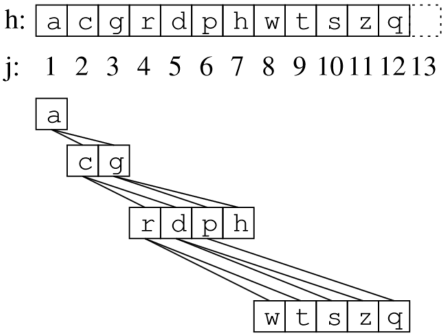
Implementierung

- Repräsentiere binären Baum als **array**$[1 \ldots n]$
- Die Ebenen des Baumes liegen von **oben** $\rightsquigarrow$ **unten** und von **links** $\rightsquigarrow$ **rechts** nacheinander im Array
- Von Knoten j kriegt man **Eltern** und **Kinder** wie folgt:

  $\text{parent}(j) = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$

  $\text{leftChild}(j) = 2j$

  $\text{rightChild}(j) = 2j + 1$



Binäre Heaps

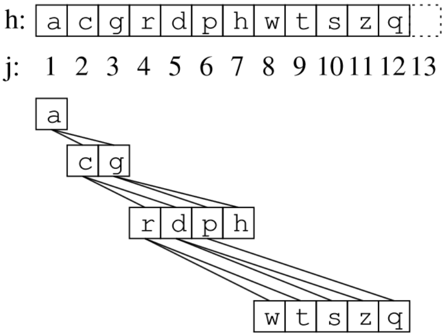
Implementierung

- Repräsentiere binären Baum als **array**$[1 \ldots n]$
- Die Ebenen des Baumes liegen von **oben** $\rightsquigarrow$ **unten** und von **links** $\rightsquigarrow$ **rechts** nacheinander im Array
- Von Knoten j kriegt man **Eltern** und **Kinder** wie folgt:

$$\text{parent}(j) = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$$

$$\text{leftChild}(j) = 2j$$

$$\text{rightChild}(j) = 2j + 1$$



Binäre Heaps – Operationen

Einfügen von Elementen (insert)

- Setze Element e in die **unterste** Ebene, auf den **ersten freien Platz** von links
- Heap-Eigenschaft **fixen**: mit *siftUp*
  Vertausche e solange mit seinem Parent, bis wieder erfüllt
- Laufzeit: $O(\log n)$

Binäre Heaps – Operationen

Einfügen von Elementen (insert)

- Setze Element e in die **unterste** Ebene, auf den **ersten freien Platz** von links
- Heap-Eigenschaft **fixen**: mit *siftUp*
  Vertausche e solange mit seinem Parent, bis wieder erfüllt
- Laufzeit: $O(\log n)$

Binäre Heaps – Operationen

Karlsruher Institut für Technologie

Einfügen von Elementen (insert)

- Setze Element e in die **unterste** Ebene, auf den **ersten freien Platz** von links
- Heap-Eigenschaft **fixen**: mit *siftUp*
  Vertausche e solange mit seinem Parent, bis wieder erfüllt
- Laufzeit: $O(\log n)$

Binäre Heaps – Operationen

Entfernen des Minimums (deleteMin)

- Einfach: Minimum $= A[1]$ „**oben wegnehmen**“
- **Lücke schließen**: Letztes Element u aus **unterster** Ebene nach oben holen ($A[1] := A[n] = u$).
- Heap-Eigenschaft **fixen**: mit *siftDown*
  Vertausche u solange mit dem jew. **kleinsten** Kind, bis wieder erfüllt
- Laufzeit: $O(\log n)$

Minimum abfragen (min)

- return $A[1]$
- Laufzeit: $O(1)$

Binäre Heaps – Operationen

Karlsruher Institut für Technologie

Entfernen des Minimums (deleteMin)

- Einfach: Minimum $= A[1]$ „**oben wegnehmen**“
- **Lücke schließen**: Letztes Element u aus **unterster** Ebene nach oben holen ($A[1] := A[n] = u$).
- Heap-Eigenschaft **fixen**: mit *siftDown*
  Vertausche u solange mit dem jew. **kleinsten** Kind, bis wieder erfüllt
- Laufzeit: $O(\log n)$

Minimum abfragen (min)

- return $A[1]$
- Laufzeit: $O(1)$

Binäre Heaps – Operationen

Karlsruher Institut für Technologie

Entfernen des Minimums (deleteMin)

- Einfach: Minimum $= A[1]$ „**oben wegnehmen**"
- **Lücke schließen**: Letztes Element u aus **unterster** Ebene nach oben holen ($A[1] := A[n] = u$).
- Heap-Eigenschaft **fixen**: mit *siftDown*
  Vertausche u solange mit dem jew. **kleinsten** Kind, bis wieder erfüllt
- Laufzeit: $O(\log n)$

Minimum abfragen (min)

- return $A[1]$
- Laufzeit: $O(1)$

Binäre Heaps – Operationen

Entfernen des Minimums (deleteMin)

- Einfach: Minimum $= A[1]$ „**oben wegnehmen**“
- **Lücke schließen**: Letztes Element u aus **unterster** Ebene nach oben holen ($A[1] := A[n] = u$).
- Heap-Eigenschaft **fixen**: mit *siftDown*
  Vertausche u solange mit dem jew. **kleinsten** Kind, bis wieder erfüllt
- Laufzeit: $O(\log n)$

Minimum abfragen (min)

- return $A[1]$
- Laufzeit: $O(1)$

Binäre Heaps – Operationen

Entfernen des Minimums (deleteMin)

- Einfach: Minimum $= A[1]$ „**oben wegnehmen**"
- **Lücke schließen**: Letztes Element u aus **unterster** Ebene nach oben holen ($A[1] := A[n] = u$).
- Heap-Eigenschaft **fixen**: mit *siftDown*
  Vertausche u solange mit dem jew. **kleinsten** Kind, bis wieder erfüllt
- Laufzeit: $O(\log n)$

Minimum abfragen (min)

- **return** $A[1]$
- Laufzeit: $O(1)$

Binäre Heaps – Operationen

Karlsruher Institut für Technologie

Aufbau aus einem chaotischen Array (buildHeap)

- Haben chaotisches Array A, wollen **Heapstruktur** auf A herstellen

$\Rightarrow$ Systematisch richtigrum tauschen:

foreach Ebene $\in$ Zweittiefste ... Oberste **do**
  for *elem* $\in$ Ebene **from** *right* **to** *left* **do**
    if elem too high **then** siftDown(*elem*)

- Klingt nach $O(n \log n)$, aber Vorlesung sagt:
  Laufzeit $O(n)$

Binäre Heaps – Operationen

Aufbau aus einem chaotischen Array (buildHeap)

- Haben chaotisches Array A, wollen **Heapstruktur** auf A herstellen

$\Rightarrow$ Systematisch richtigrum tauschen:

foreach Ebene $\in$ Zweittiefste ... Oberste **do**
  for *elem* $\in$ Ebene **from** *right* **to** *left* **do**
    if elem too high **then** siftDown(*elem*)

- Klingt nach $O(n \log n)$, aber Vorlesung sagt:
  Laufzeit $O(n)$

Haufenweise Sortieralgorithmen

Heapsort

- buildHeap(A) in $O(n)$
- n-mal: deleteMin() jeweils in $O(\log n)$

  Nach jedem deleteMin() wird ein **Platz hinten frei**: Schmeiß es **dorthin**! ($\Longrightarrow$ liefert **absteigende** Sortierung)

$\Rightarrow$ **Gesamt-Laufzeit**: $O(n \log n)$

— **nicht stabil** (wg. siftUp/Down)

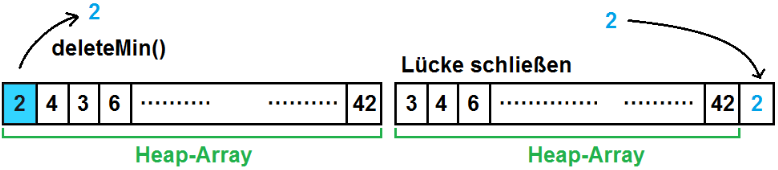
\+ in-place

\+ Cache-effizient

Haufenweise Sortieralgorithmen

Heapsort

- buildHeap(A) in $O(n)$
- n-mal: deleteMin() jeweils in $O(\log n)$
  Nach jedem deleteMin() wird ein **Platz hinten frei**: Schmeiß es **dorthin**! ($\Rightarrow$ liefert **absteigende** Sortierung)



$\Rightarrow$ **Gesamt-Laufzeit**: $O(n \log n)$

— **nicht stabil** (wg. siftUp/Down)

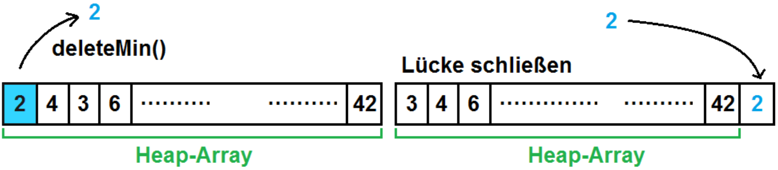
+ in-place

+ Cache-effizient

Haufenweise Sortieralgorithmen

Heapsort

- buildHeap(A) in $O(n)$
- n-mal: deleteMin() jeweils in $O(\log n)$
  Nach jedem deleteMin() wird ein **Platz hinten frei**: Schmeiß es **dorthin**! ($\Rightarrow$ liefert **absteigende** Sortierung)



$\Rightarrow$ **Gesamt-Laufzeit**: $O(n \log n)$

− **nicht** stabil (wg. siftUp/Down)

+ in-place

+ Cache-effizient

SORTING ALGORITHMS

– Literally –

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **Stabilität**.

InsertionSort SelectionSort Mergesort CountingSort Bucketsort Radixsort	**Ja**
Heapsort Quicksort	**Nein**

Sorting Algorithms

KIT Karlsruher Institut für Technologie

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **Stabilität**.

InsertionSort SelectionSort Mergesort CountingSort Bucketsort Radixsort	**Ja**
Heapsort Quicksort	**Nein**

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **Cache-Effizienz**.

InsertionSort SelectionSort Heapsort CountingSort Quicksort	Ja
Bucketsort Mergesort Radixsort	Nein

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **Cache-Effizienz**.

InsertionSort SelectionSort Heapsort CountingSort Quicksort	**Ja**
Bucketsort Mergesort Radixsort	**Nein**

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **Platzverbrauch**.

InsertionSort SelectionSort Mergesort (ohne Rekursionsoverhead) Quicksort (ohne Rekursionsoverhead)	$O(1)$
Heapsort	$O(n)$
CountingSort Bucketsort	$O(n+k)$
Radixsort	$O(n+K)$

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **Platzverbrauch**.

InsertionSort SelectionSort Mergesort (ohne Rekursionsoverhead) Quicksort (ohne Rekursionsoverhead)	$O(1)$
Heapsort	$O(n)$
CountingSort Bucketsort	$O(n+k)$
Radixsort	$O(n+K)$

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **Worst-Case-Laufzeit**.

Mergesort Heapsort	$O(n \log n)$
Quicksort InsertionSort SelectionSort	$O(n^2)$

Radixsort	$O(d \cdot (n + K))$ (K: Basis, d: Digits)
Bucketsort Countingsort	$O(n + k)$ (k: „maxValue“)

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **Worst-Case-Laufzeit**.

Mergesort Heapsort	$O(n \log n)$
Quicksort InsertionSort SelectionSort	$O(n^2)$

Radixsort	$O(d \cdot (n + K))$ (K: Basis, d: Digits)
Bucketsort Countingsort	$O(n + k)$ (k: „maxValue“)

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **„Standard-Laufzeit“**.

Mergesort Heapsort Quicksort (erwartet)	$O(n \log n)$
InsertionSort SelectionSort	$O(n^2)$

Radixsort	$O(d \cdot (n+K))$ (K: Basis, d: Digits)
Bucketsort Countingsort	$O(n+k)$ (k: „maxValue“)

Sorting Algorithms

Sortiere Mergesort, Radixsort, Heapsort, InsertionSort, SelectionSort, CountingSort, Quicksort (mit partition), (simples) Bucketsort nach **„Standard-Laufzeit“**.

Mergesort Heapsort Quicksort (erwartet)	$O(n \log n)$
InsertionSort SelectionSort	$O(n^2)$

Radixsort	$O(d \cdot (n + K))$ (K: Basis, d: Digits)
Bucketsort Countingsort	$O(n + k)$ (k: „maxValue“)

Stapelweise Sortieralgorithmen

Aufgabe 5: Pancake-Sort

Der ebenso geniale wie trinkfreudige Superbösewicht Doktor Meta ist in Feierlaune: Sein größter Widersacher Turing-Man (halb Mensch, halb Turingmaschine) hatte eine krachende Niederlage erlitten, nachdem Metas Schergen die Tintendüsen seines Schreiblesekopfes mit Sekundenkleber verstopft hatten. Für diesen überwältigenden Sieg schmeißen die großen Bösewichte dieser Welt natürlich eine grandiose Feier. Die Königsdisziplin dieses glorreichen Abends besteht darin, einen Stapel voller unterschiedlich großer Pfannkuchen der Größe nach zu sortieren – und das nur mit einem Pfannenwender und so schnell wie möglich. Dabei darf kein weiterer Platz benutzt werden, das heißt, der Stapel darf nur durch Wenden von Teilstapeln mit dem Pfannenwender in-place sortiert werden. Nach reichlichem Vollmilchgenuss ist Doktor Meta allerdings nicht mehr zurechnungsfähig und auf eure Anleitung angewiesen. Helft dem Superbösewicht, bevor er sich vor allen anderen blamiert.

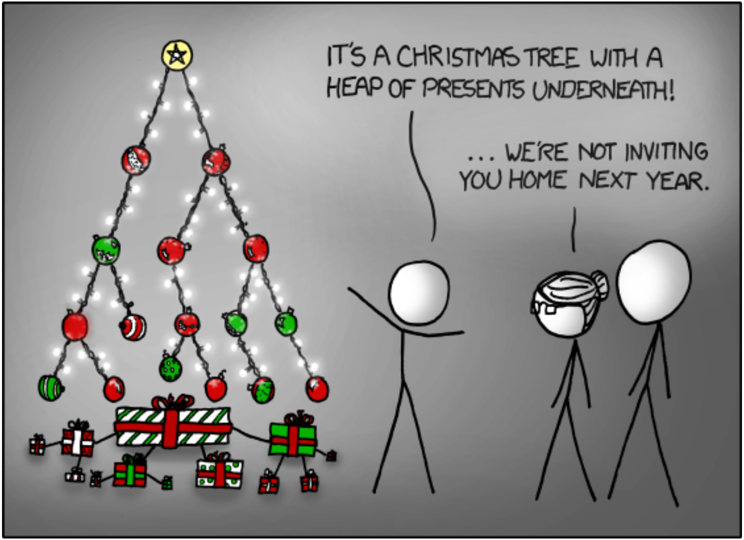
Stapelweise Sortieralgorithmen

Lösung zu Aufgabe 5

- Zu Beginn sieht der Stapel so aus: [bottom...biggest...top]
- Wende Teilstapel [biggest..top] *// Größter nach oben*
- Wende ganzen Stapel *// Größter ganz unten*
- Für alle Teilstapel über dem nun korrekt einsortierten: **Wiederhole**.

$\Rightarrow$ Pro Pfannkuchen höchstens 2-mal wenden $\Rightarrow O(n)$.

Danke für eure Aufmerksamkeit! ☺



http://xkcd.com/835