

Problemes d'Algorísmica

Jordi Vitrià, Mireia Ribera, Pablo Laiz i Pere Gilabert
Universitat de Barcelona

Setembre de 2020



Índex

1	Algorísmica Bàsica	5
1.1	Com sabem si un algorisme fa el que ha de fer?	6
1.1.1	Notació Gran O	7
1.1.2	Càlcul de la complexitat	9
Problema 1.1	Notació Gran O	11
2	Algorismes bàsics i Python	13
Problema 2.1	<i>Celsius a Fahrenheit</i>	13
Problema 2.2	<i>Inversió econòmica</i>	14
Problema 2.3	<i>Condicionals</i>	15
Problema 2.4	<i>Pendent d'una recta</i>	16
Problema 2.5	<i>Capicua</i>	18
Problema 2.6	<i>Palíndrom</i>	19
Problema 2.7	<i>Divisors</i>	20
Problema 2.8	<i>Factorial Menor</i>	20
Problema 2.9	<i>Mínim i màxim</i>	21
Problema 2.10	<i>Sumatori de parelles</i>	22
Problema 2.11	<i>Sumes i quadrats</i>	22
Problema 2.12	<i>Nombres amics</i>	23
Problema 2.13	<i>Nombres perfectes</i>	24
Problema 2.14	<i>Nombres apocalíptics</i>	25
Problema 2.15	<i>Nombre feliç</i>	26
Problema 2.16	<i>Nombres ambiciosos</i>	27
Problema 2.17	<i>Avet</i>	28
3	Algorismes Numèrics	29
Problema 3.1	<i>Divisió Entera</i>	29
Problema 3.2	<i>Màxim comú divisor</i>	29
Problema 3.3	<i>Numeració en diferents bases</i>	31
Problema 3.4	<i>Resta binària</i>	33
Problema 3.5	<i>Operacions amb nombres binaris</i>	34
Problema 3.6	<i>Aritmètica modular</i>	35
Problema 3.7	<i>Descomposició en funcions</i>	38
Problema 3.8	<i>Primeritat</i>	39
Problema 3.9	<i>Teorema de Fermat</i>	41
Problema 3.10	<i>Restriccions múltiples</i>	43
Problema 3.11	<i>Seqüència de Fibonacci</i>	46

4	Algorismes i Text	51
Problema 4.1	<i>Acrònims</i>	51
Problema 4.2	<i>Traducció a l'alfabet d'aviació</i>	52
Problema 4.3	<i>Cadenes isomorfes</i>	53
Problema 4.4	<i>Totes les subcadenes</i>	54
Problema 4.5	<i>Levenshtein</i>	55
Problema 4.6	<i>Run Length Encoding</i>	56
Problema 4.7	<i>Subcadena més llarga</i>	57
Problema 4.8	<i>Subseqüència en comú</i>	58
5	Dividir i Vèncer	61
Problema 5.1	<i>Suma d'una llista</i>	62
Problema 5.2	<i>Nombre no repetit</i>	63
Problema 5.3	<i>Seqüència capicua</i>	63
Problema 5.4	<i>El valor més petit que falta</i>	64
Problema 5.5	<i>Quantitat d'1s</i>	65
Problema 5.6	<i>Negatiu al davant</i>	66
Problema 5.7	<i>Zeros al final</i>	66
Problema 5.8	<i>Rotacions</i>	67
Problema 5.9	<i>Valor igual al seu índex</i>	68
Problema 5.10	<i>Comptador d'inversions</i>	68
Problema 5.11	<i>Elements pic</i>	69
Problema 5.12	<i>Divisió d'una llista en tres parts</i>	70
Problema 5.13	<i>Primera i darrera ocurrència d'un nombre</i>	71
Problema 5.14	<i>Parelles que sumen un valor</i>	72
Problema 5.15	<i>Menor i major relatiu</i>	72
Problema 5.16	<i>Multiplicació de polinomis</i>	73
Problema 5.17	<i>Patró binari</i>	73
Problema 5.18	<i>Implementació eficient de la potència</i>	74
Problema 5.19	<i>Karatsuba</i>	75
Problema 5.20	<i>Cerca binària</i>	76
Problema 5.21	<i>Nombres estrictament creixents</i>	77
Problema 5.22	<i>Ordenar llista aparellada</i>	78
Problema 5.23	<i>Sumatori parcial màxim</i>	79
Problema 5.24	<i>Xifres i lletres</i>	80
A	Solucions de problemes seleccionats	83

Capítol 1

Algorísmica Bàsica

Segons A. Levitin, un **algorisme** és una seqüència d'instruccions no ambigües per resoldre un problema, és a dir, per obtenir la sortida desitjada per a qualsevol entrada vàlida en un temps finit.

Amb l'ajuda dels llenguatges de programació, podem implementar algorismes computacionals que més tard podran ser interpretats per un ordinador. Com en qualsevol activitat humana, aquests algorismes computacionals poden estar ben o mal escrits, i poden ser més o menys eficients, en funció de com es dissenyin. Per tant, donat un algorisme computacional que vol resoldre un problema és interessant que ens formulem un seguit de preguntes sobre la natura de l'algorisme en relació al problema que vol resoldre: L'algorisme és **correcte**? L'algorisme és **eficient**? L'algorisme és **elegant**?

L'algorísmica, com a disciplina, ens dona eines per respondre aquestes preguntes de manera formal i defineix de forma precisa com les hem d'entendre:

- L'algorisme és **correcte** si resol el problema que ens hem plantejat resoldre.
- L'algorisme és **eficient** si usa la mínima quantitat de recursos computacionals (memòria, cicles de computació) per resoldre el problema.
- L'algorisme és **elegant** si és fàcil de llegir¹.

Definició: *L'algorísmica es pot definir de forma genèrica com aquell conjunt de coneixements formals que ens ajuden a contestar aquestes tres preguntes respecte a un algorisme aplicat a alguna classe de problema.*

Aquest llibre no pretén abordar els continguts teòrics d'aquesta matèria, sinó que és un recull de problemes que ha de servir com a suport d'un curs introductori a l'algorísmica. Així doncs, ens limitarem a l'escenari on:

- Els problemes que proposem es poden resoldre amb **variables** de diferents tipus i amb estructures de dades senzilles d'un llenguatge de programació, tals com les **l·listes**, els **diccionaris** i els **conjunts**.

¹Donald Knuth, un dels pares de l'algorísmica, assumeix que els algorismes són quelcom destinat a ser llegit per humans i només esporàdicament executat per ordinadors.

- L'eficiència dels algorismes es mesurarà des del punt de vista dels **cicles computacionals (o passos)** que necessiten per arribar a la solució. Només en alguns casos comentarem l'eficiència des del punt de vista de la memòria necessària per arribar a la solució. A fi i efecte d'especificar aquest aspecte farem servir la notació $O()$, anomenada **Gran O**.

En relació a l'**elegància**, és un concepte més esquiú i cal haver llegit i entès molts algorismes per arribar-hi. Aquí ens limitarem a donar un seguit de consells per ajudar a escriure algorismes més elegants. Direm que un algorisme és elegant si es segueixen les següents pautes:

- El codi està ben **estructurat** a nivell de blocs i de funcions.
- El codi és **minimal**: no hi sobra ni hi falta res.
- Els **noms** de les variables i funcions és informatiu i ajuda a entendre l'algorisme.
- El codi fa servir **el tipus de variables i les col·leccions més adients** al problema.
- És **fàcil comprovar la correcció** del codi.
- El codi **implementa solucions genèriques** i les adapta, i no funcions molt específiques que dificulten la seva comprensió.

Els algorismes es poden escriure en pseudocodi o directament amb un llenguatge de programació. En el segon cas, el gran avantatge és que els podem executar i provar; l'inconvenient és que hem d'aprendre el llenguatge. Aquest manual no assumeix pràcticament cap coneixement de programació. El codi que es proporciona està escrit en Python, un dels llenguatges que més a prop està del pseudocodi. Tots els programes d'exemple que s'inclouen estaran degudament comentats i explicats per entendre el seu funcionament i execució.

```
def hola():
    """
    Aquesta funció imprimeix la frase
    'Hola Món!' per pantalla.
    """
    print("Hola Món!")
```

1.1 Com sabem si un algorisme fa el que ha de fer?

La correcció només es pot **demostrar** completament usant procediments de raonament matemàtic, però de manera alternativa, tot i que no és una demostració, podem **verificar** el seu funcionament per alguns casos provant-lo amb entrades de resultat conegut per comprovar que la sortida és l'esperada.

Per verificar el programa farem servir **asserccions**, instruccions que declaren un fet en un programa. En Python, les asserccions es fan amb la instrucció **assert** acompanyada d'una expressió booleana (igualtat, desigualtat o comparació).

L'instrucció verifica si la condició és certa. Si és així, el programa segueix endavant. En canvi, si la condició és falsa, el programa s'atura i retorna un error.

Les assercions són molt útils perquè aturen el programa tan aviat com es produeix l'error i mostren en quin punt del programa s'ha produït, facilitant-nos així depurar el codi. Veiem-ne un exemple.

Si executem el programa

```
def prog(x):  
    return x + 1  
  
assert prog(3) == 4
```

com que hem indicat que el resultat esperat pel valor 3 és 4, i és correcte, la instrucció `assert` s'executarà i la condició es verificarà.

En canvi, si indiquem que el resultat esperat és 9, hauríem usat

```
assert prog(3) == 9
```

i en no complir-se la condició, la instrucció `assert` hauria generat un error, indicant que el programa no fa el que volem.

Com sabem si un algorisme és eficient?

Un algorisme és **eficient** si utilitza el nombre mínim de recursos (cicles de càlcul de l'ordinador i memòria de l'ordinador) possible. Fer servir algorismes eficients sempre és adient i moltes vegades és una necessitat degut a les dimensions del problema.

En aquest llibre ens centrem sobretot en els cicles de càlcul computacional dels algorismes, o dit d'una altra manera, en la seva **complexitat de càlcul**.

Cal tenir present que, a cada cicle de càlcul computacional, l'ordinador pot realitzar una operació simple entre dos valors (normalment de 64 bits): +, -, /, etc. Ara bé, si els nombres a operar són més grans de 64 bits i no poden ser operats directament amb el maquinari de l'ordinador, el nombre de cicle necessaris augmentarà i caldrà calcular quin és. Un dels objectius d'aquest llibre és aprendre a calcular aquest cost computacional.

1.1.1 Notació Gran O

Per definir la complexitat computacional d'un algorisme fem servir la notació Gran O , una convenció que ens permet comparar fàcilment dos algorismes entre ells.

La dada més rellevant en el càlcul de complexitat és el nombre aproximat de passos computacionals que fa l'algorisme **en funció de la mida de l'entrada**.

Quan el nombre de passos que ha de fer l'algorisme no depèn exclusivament de la mida de l'entrada, sinó que també hi influeixen altres factors lligats al problema, tindrem en compte el que s'anomena **el pitjor cas**, és a dir el nombre de passos que un algorisme pot arribar a fer quan es troba en les pitjors condicions del problema. En general, en la notació Gran O ens fixem en aquest cas.

Per simplificar l'expressió de la complexitat mitjançant la notació Gran O , farem esment només de la complexitat més gran, obviant els termes més petits. Per exemple, si un algorisme, donada una entrada de mida N fa $5N^3 + 4N + 3$ passos computacionals, en notació Gran O direm que té un ordre de complexitat

de $O(N^3)$ ja que és el terme més gran, i per tant més rellevant, de tots els anteriors.

Per arribar a aquesta simplificació només cal aplicar les següents regles:

- Ometre les constants multiplicatives: $14N^2$ passos és $O(N^2)$.
- N^a domina sobre N^b si $a > b$: $N^2 + N$ passos és $O(N^2)$.
- Qualsevol exponencial domina sobre un polinomi: $3^N + N^5$ passos és $O(3^N)$.
- Qualsevol polinomi domina sobre un logaritme: $N + \log(N)^3$ passos és $O(N)$ i $N^2 + N \log(N)$ és $O(N^2)$.
- Un terme $N!$ domina sobre qualsevol altre.

Donat l'ordre O d'un algorisme, el podem agrupar en famílies de complexitat. A la taula 1.1 veiem aquestes famílies, i a la figura 1.1 veiem el seu creixement en funció de la mida de l'entrada.

Constant	Logarítmic	Lineal	Super-lineal	Quadràtic	Cúbic	Exponencial	Factorial
$O(1)$	$O(\log(n))$	$O(n)$	$O(n \log(n))$	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(c^n)$ amb $c > 1$	$O(n!)$

Taula 1.1: Taula amb les grans famílies d'algorismes segons la seva complexitat

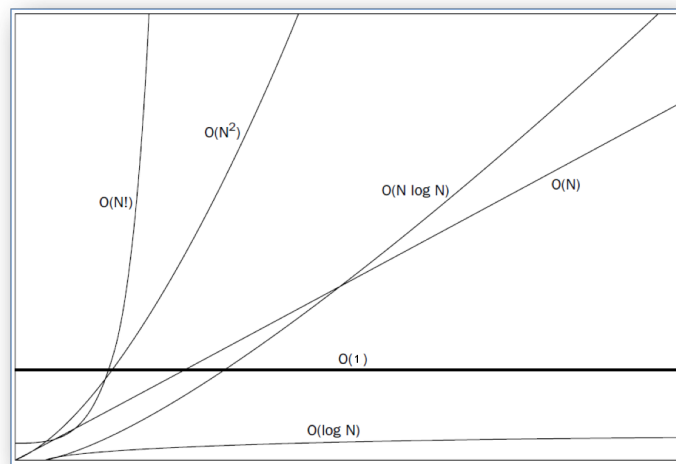


Figura 1.1: Gràfica amb el creixement del cost de les funcions segons el seu ordre de complexitat

Si expressem la Figura 1.1 amb valors concrets, el que tenim és això:

N	N^2	2^N	$N!$
5	25	32	120
6	36	64	720
7	49	128	5.040
8	64	256	40.320
9	81	512	362.880
10	100	1024	3.628.800

D'aquests nombres en podem treure algunes conclusions:

- Qualsevol algorisme factorial, $N!$, és inútil des d'un punt de vista pràctic a partir de $N = 20$.
- Els algorismes exponencials, a^N amb una a petita, són inútils a partir de $N = 40$.
- Els algorismes quadràtics, N^2 comencen a ser costosos a partir de $N = 10.000$ i a ser inútils a partir de $N = 1.000.000$.
- Els algorismes lineals, N , i els logarítmics, $N \log(N)$, poden arribar fins a $N = 1.000.000.000$.
- Els algorismes sublineals, $\log(N)$, són útils per qualsevol N .

1.1.2 Càlcul de la complexitat

A continuació exposem els conceptes necessaris per calcular la complexitat d'un algorisme simple escrit en Python.

Complexitat d'una operació simple

Les operacions simples en Python són:

- Operacions aritmètiques: $+$, $-$, $*$, $/$, $\%$, $**$.
- Operacions d'assignació: $=$, $+=$, $-=$, $*=$, $/=$, $\%=$, $//=$, $**=$.
- Operacions de comparació: $==$, $!=$, $>$, $<$, $<=$, $>=$.
- Operacions lògiques: **and**, **or**, **not**.
- Assignacions de variables: `variable = 2`

En general la complexitat d'aquest casos és d'ordre **constant**, $O(1)$, ja que no depèn de la mida de l'entrada.

Complexitat dels operadors de llistes

Quan treballem amb llistes, algunes operacions aparentment simples poden tenir una complexitat ben diferent. Per exemple:

```
llista.append('a')    # Complexitat  $O(1)$ 
llista.insert(2, 'a') # Complexitat  $O(n)$ 
```

Llistes

Les llistes en Python són *seqüències mutables d'objectes arbitraris*. Les llistes es manipulen amb diferents *mètodes* i s'accedeix als seus elements amb els operadors de *slicing*.

En el primer cas estem afegint un nou element a la última posició de la llista amb cost constant 1. En canvi, en el segon, insertem un element a la segona posició, que obliga a desplaçar la resta de posicions de la llista (n posicions).

A la documentació de Python, es poden trobar les complexitats de les operacions amb llistes i estructures de dades més habituals².

Complexitat d'un bloc condicional

Els blocs condicionals tenen un comportament diferent al de les operacions simples. Considerem el següent codi de Python:

```
if cond:
    op1
elif:
    op2
else:
    op3
```

En no saber, a priori, quina de les tres operacions **op1**, **op2**, **op3** s'executaran, hem de considerar el pitjor cas possible. Per exemple, si la complexitat d'**op1** és $O(n)$, la complexitat d'**op2** és $O(n^2)$ i la complexitat d'**op3** és $O(\log(n))$, la complexitat del bloc condicional serà $O(n^2)$, ja que és la màxima complexitat d'entre les tres possibles.

Complexitat d'un conjunt d'instruccions

Per a calcular la complexitat d'un conjunt seqüencial d'instruccions, hem de sumar totes les complexitats. Un cop sumades, ens hem de quedar amb els termes dominants seguint les normes de la notació Gran O , com ja hem vist a la Secció 1.1.1.

Considerem el següent codi amb indicació de la complexitat de les instruccions:

```
def funcio():
    op1      # Complexitat  $O(1)$ 
    op2      # Complexitat  $O(n)$ 
    op3      # Complexitat  $O(n)$ 
    op4      # Complexitat  $O(n^2)$ 
    op5      # Complexitat  $O(\log n)$ 
    if cond:
        op6  # Complexitat  $O(n)$ 
    else:
        op7  # Complexitat  $O(1)$ 
```

Així, la complexitat del programa fins que executa **op5** serà de $1+2n+n^2+\log(n)$ que sabem que és d'ordre $O(n^2)$, que és el terme dominant. Si ara hi afegim la complexitat del bloc condicional (en la que **op6** és $O(n)$ i **op7** és $O(1)$), la complexitat total és de $O(n^2)$, és a dir, es manté igual ja que sabem que n^2 domina sobre n en la notació Gran O .

²<https://wiki.python.org/moin/TimeComplexity>

Complexitat dels blocs iteratius (bucles)

En el cas dels bucles iteratius (*loops* en anglès), primer cal calcular la complexitat de les operacions dins el bucle, i després multiplicar aquest nombre pel nombre de vegades que iterem.

```
for i in range(0, n):
    op1
```

A l'exemple, si la complexitat d'op1 és $O(1)$, la complexitat del bloc és $O(n)$, ja que iterem n vegades sobre aquesta operació. En canvi, si la complexitat de op1 és $O(\log(n))$, la complexitat total del bloc iteratiu serà de $O(n \log(n))$.

Complexitat dels blocs iteratius imbricats

El cas dels bucles imbricats (*nested loops*, en anglès) és un cas específic de l'apartat anterior. Aquí afegim un nivell més d'iteració i per tant, hem de calcular el nombre de vegades que es repeteix cada bloc per arribar a la complexitat total.

Si, per exemple, tenim el codi següent,

```
for i in range(1, n):
    for j in range(1, n):
        op1
```

la complexitat total serà n^2 multiplicada per la complexitat de la instrucció op1. Suposant, per exemple, que aquesta instrucció té complexitat $O(n)$, la complexitat total d'aquest codi serà de $O(n^3)$.

1.1 Problema

Notació Gran O

1. Segons les indicacions donades anteriorment, calcula l'ordre de complexitat segons la notació gran O d'uns algorismes que fan el següent nombre d'operacions:

- $n + 2n$
- $3n^2 + \log n$
- $2^n + n^5$
- $n^3 + n^2 \log(n) + n + 5$

2. Té sentit un algorisme de complexitat $O(n!)$ per $n = 50$? Per què?

3. Calcula la complexitat total d'aquests codis d'exemple

```
def codi1():
    op1      # Complexitat O(1)
    op2      # Complexitat O(n)
    for i in range(0, n):
        op3  # Complexitat O(n)
    if cond:
```

```
        op4  # Complexitat  $O(n)$ 
    else:
        op5  # Complexitat  $O(n^2)$ 

def codi2():
    for i in range(0, 2*n):
        for j in range(0, n*n):
            op1      # Complexitat  $O(n)$ 
```

Capítol 2

Algorismes bàsics i Python

La millor manera de començar a treballar en algorísmica és familiaritzar-se amb la resolució de problemes simples i concrets. En aquest primer capítol s'introdueixen algorismes molt senzills per treballar la gramàtica i la sintaxi de Python i també per començar a practicar l'art de calcular la seva complexitat computacional.

2.1 Problema

Conversió de Celsius a Fahrenheit

Donada una temperatura en graus Celsius, x , podem convertir-la fàcilment a graus Fahrenheit, y , usant la fórmula:

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

1. Escriu una funció **convert_temp** que converteixi els graus Celsius en graus Fahrenheit.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def convert_temp(temp_Celsius):  
    # el teu codi  
    return temp_Fahrenheit
```

2. Utilitzant la funció anterior, escriu una nova funció **convert0a50** que calculi i imprimeixi una llista de temperatures Celsius i dels seus equivalents Fahrenheit cada 5 graus, de 0°C a 50°C.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def convert0a50():  
    # el teu codi  
    return list_temp_Fahrenheit  
  
print(convert0a50())
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- La funció `convert0a50()` pot cridar a la funció `convertTemp` cada cop que vulgui fer una conversió de temperatura.
- Quina tipus d'iteració pots usar per crear els diferents valors de Celsius? Per què?
- Quina col·lecció faràs servir per guardar els valors de les temperatures Fahrenheit? Com afegiràs nous valors quan els calculis?
- Com pots validar el resultat de la funció?

2.2 Problema

Inversió econòmica

Dins de les matemàtiques financeres l'interès compost és un concepte important fins i tot per les nostres finances personals.

Suposem que fem una determinada inversió amb l'objectiu que ens retorni uns interessos durant un període més o menys llarg de temps. El més normal és que aquest període es divideixi en una sèrie de subperíodes de longitud fixa (mesos o anys). En el cas de l'interès compost, els interessos que es produeixen en cada subperíode es van sumant al capital inicial al final de cada subperíode. D'aquesta manera es generen nous interessos. El capital va creixent al final de cada subperíode, així que els interessos es calculen cada vegada sobre un capital més gran.

1. La funció `futval` calcula els diners que tindrem en un compte del banc al cap de 10 anys en funció de la inversió inicial (en euros) i de l'interès que ens dona el banc (en %) suposant un subperíode anual :

```
def futval(inversio, interes):
    principal = inversio
    for i in range(10):
        principal = principal * (1 + interes)
    return principal

# Invertim 100 euros al 10%
futval(100, 0.1)
>>> 259.37424601000026
# Al cap de 10 anys disposem de 259 euros i escaig
```

Escriu, a partir d'aquesta funció, una segona funció amb alguns canvis. En aquest cas el banc cobrarà una comissió d'un percentatge de l'import final. El programa ha de rebre la inversió inicial, l'interès, el nombre d'anys i també la comissió del banc (per exemple, si la comissió és del 3%, haurem d'entrar un 0.03).

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def futval2(inicial, anys, interesPerCent,
    ↪ comissioPerCent):
    # El teu codi
```

```
return diners
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin càlcul hem d'aplicar? Prova-ho amb alguns valors bàsics manualment.
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `futval2(100,10,0.8,0.03)`

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Com en aquest cas la funció retorna un valor real, no usarem l'operador `==` sinó que farem el test per aproximació:

```
assert abs(futval2(100,10,0.8,0.3) - 24993.270) < 0.1
```

2.3 Problema

Condicionals

1. **Prou Cerveses** Quan uns estudiants organitzen una festa els agrada beure cerveses. Per a què una festa tingui èxit cal que hi hagi entre 50 i 100 cerveses, excepte durant el cap de setmana, en el que no hi ha un límit superior de cerveses.

Escriu una funció en la que donat un nombre de cerveses i un booleà indicant si és cap de setmana o no, retorni una cadena de caràcters que expliquin si la festa serà un èxit o no. Proposa uns valors donats a la funció que provoquin un èxit de festa entre setmana i un èxit de festa el cap de setmana.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def prouCerveses(num_cerveses, es_cap_de_setmana):  
    # El teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Detalla les condicions que fan que una festa sigui un èxit i les que fan que una festa sigui un fracàs.
- Explica els passos que fa l'algorisme per a `prou_cerveses(75, False)`
- Pensa en les diferents combinacions que es poden donar i comprova que el teu codi les contempli totes.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert prouCerveses(75, False) == 'Èxit'
assert prouCerveses(125, False) == 'Fracàs'
assert prouCerveses(125, True) == 'Èxit'
```

2. **Qualificacions** Escriu una funció que, donat un nombre amb la qualificació numèrica d'un examen, proporcioni la qualificació qualitativa corresponent al nombre donat:

- *Suspès*: nota menor que 5.
- *Aprovat*: nota igual o més gran que 5 i menor que 7.
- *Notable*: nota més gran o igual a 7 i menor que 9.
- *Excel·lent*: nota més gran o igual a 9 i menor que 10.
- *Matrícula d'honor*: nota igual a 10.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def nota(num):
    # El teu codi
    return qualificacio
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quines comparacions has de fer per saber si una nota és un suspès?
- Si ja saps que una nota no és un suspès, quines comparacions has de fer per saber si és un aprovat?
- Si ja saps que una nota no és un suspès ni un aprovat, quines comparacions has de fer per saber si és un notable?
- Explica els passos que fa l'algorisme per a `nota(9.3)`
- Si no ho has fet ja, se t'acudeix reformular l'algorisme usant una col·lecció? Quina? Pensa que potser has de fer alguna petita manipulació de la nota que et donen.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert nota(8.9) == 'Notable'
```

2.4 Problema

Pendent d'una recta

1. Considera dos punts en un pla segons les seves coordenades (x_1, y_1) i (x_2, y_2) . Escriu una funció que calculi la pendent de la recta per aquests dos punts.

Pots calcular la pendent fàcilment usant l'expressió:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def pendent(x1,y1,x2,y2):
    # El teu codi
    return m
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Hi ha alguna combinació dels valors dels paràmetres que podria provocar un error d'execució? Afegeix algun mecanisme de control per a que el programa no retorni un error en cap cas i decideix què retornar en els casos problemàtics.
- Explica els passos que fa l'algorisme quan executem la instrucció `pendent(1, 3, 1, 5)`

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert pendent(1,1,4,4) == 1
assert pendent(4,5,2,9) == -2
```

2. Estén el teu programa per a que calculi l'equació de la recta ($y = mx + n$) que passa pels punts amb coordenades (x_1, y_1) i (x_2, y_2) . Aprofita el càlcul de la pendent de l'exercici anterior. El programa no ha de retornar cap valor, sino que ha d'imprimir l'equació de la recta en format *string* de la següent manera: Si la recta té una pendent m i una ordenada en l'origen n , ha d'imprimir: $y = mx + n$.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def equacio(x1,y1, x2,y2):
    m = pendent(x1,y1, x2,y2)
    # El teu codi
    print(equacio)
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Observa que en aquest cas concret, aquesta funció no retorna cap valor. Només ha d'imprimir l'equació de la recta en el format $y = mx + n$ amb els valors adequats de m i n .
- El valor de m ja ve donat per la funcio `pendent`. Com calculem el valor n ?
- Has considerat el cas $m = 0$? I el cas $n = 0$? I els casos $m = 1$, $m = -1$?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
equacio(1,1,4,4)
>>> y = x + 3

equacio(4,5,2,9)
>>> y = -2x + 13

equacio(-1,-3,3,5)
>>> y = 2x - 1
```

2.5 Problema

Capicua (palíndrom)

Una paraula, frase o grup de paraules són capicua, o el que és el mateix, formen un palíndrom, si les lletres es repeteixen en el mateix ordre quan són llegides en direcció inversa, com per exemple a 'anna' o 'rajar'.

1. Escriu una funció que donada una cadena de caràcters determini si és capicua.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def es_capicua(paraula):
    # el teu codi
    return b_es-capicua
```

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert es_capicua("llull") == True
assert es_capicua("llullu") == False
```

2. Escriu una funció que, donada una cadena de caràcters, determini si al aplicar rotacions de lletres, és capicua. Per resoldre aquest problema has d'anar creant les paraules rotades progressivament i validant si són capicua amb l'algorisme anterior.

Una rotació consisteix en situar l'última lletra en la primera posició o viceversa. Per exemple, en la cadena 'ABCD' les rotacions serien: ['DABC', 'CDAB', 'BCDA', 'ABCD'].

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def es_capicua_rotacions(paraula):
    # el teu codi
    return b_es-capicua
```

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert es_capicua_rotacions("BAABCC") == True
```

2.6 Problema

Palíndrom

Resol els següents problemes a partir de la definició anterior de palíndrom.

1. Donada una cadena de caràcters, troba tots els palíndroms generables a partir de les seves lletres. En aquest exercici pots fer servir la llibreria de Python `itertools` per crear les possibles combinacions. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
import itertools

def generar_palindroms(cadena):
    # el teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Fixa't en alguns palíndroms i observa:
 - Quantes vegades apareix cada lletra?
 - Quantes lletres amb un nombre senar d'aparicions hi ha?
 - Si hi ha una lletra que apareix un sol cop on està?
 - Si divideixes el palíndrom en 2 com són les parts esquerra i dreta? Hi veus algun patró?
- Pots resoldre el problema pas a pas seguint aquestes indicacions:
 - Crea la funció que només funcioni amb paraules amb lletres que apareixin 2 cops cadascuna.
 - Millora la funció amb paraules que tinguin lletres repetides 2 vegades + 1 lletra que apareixi un sol cop
 - Millora la funció amb paraules que tinguin lletres repetides 2 vegades + 1 lletra que apareixi tres, cinc o un nombre senar de cops
 - Millora la funció descartant ràpidament algunes paraules per la freqüència de les lletres que contenen.
- Quina solució hauria de donar per als següents valors: 'ab' i 'aabb'?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `generar_palindroms('aabb')`.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució.

```
generar_palindroms('aann')
anna
naan
```

2.7 Problema

Divisors

Siguin m i n dos nombres enters. Es diu que $m|n$ (que es llegeix: m divideix n , o m és divisor de n) si i només si existeix un element k tal que $n = k \times m$.

1. Escriu una funció en la que, donat un nombre menor que 30, retorni tots els seus divisors.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def divisors(num):
    # El teu codi
    return divisors
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Com identifiquem els divisors d'un nombre?
- Quina divisors hauria de retornar la funció en els següents casos: 28, 12, 8, 3?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas que el nombre donat sigui 28.
- Si no ho has fet ja, reescriu el programa amb una *list comprehension*.

List Comprehension

Una *list comprehension* permet escriure llistes ràpidament. Per exemple, podem crear una llista amb els múltiples de 3 menors a 30 usant el codi: `[m for m in range(1,30,3)]` o bé `[3*m for m in range(1,30)]`

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert divisors(8) == [1,2,4,8]
assert divisors(5) == [1,5]
assert divisors(210) == [1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14,
↪ 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210]
```

2.8 Problema

Factorial menor que un nombre donat

El factorial d'un enter no negatiu n , denotat per $n!$, és el producte de tots els nombres enters positius inferiors o iguals a n .

1. Escriu una funció, `factorial_menor`, que retorni tots els valors menors que un nombre donat i que són factorials d'algun nombre natural. No es pot usar cap funció específica de Python per a calcular els factorials. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def factorial_menor(num):  
    # El teu codi  
    return factorials
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin és el factorial d'1? i de 2? i de 3? i de 4?... Quina és la fórmula general del factorial per a un nombre qualsevol?
- Per a calcular el factorial, hauràs d'utilitzar algun tipus d'iteració. Quina utilitzaràs?
- Explica els passos que fa l'algorisme per a `factorial_menor(25)`.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert factorial_menor(20) == [1, 2, 6]  
assert factorial_menor(50) == [1, 2, 6, 24]
```

2.9 Problema

Mínim i màxim

1. Donada una llista de nombres enters, troba el valor mínim i el valor màxim amb un algorisme de complexitat $O(n)$. No utilitzis cap funció específica de Python (com ara les funcions `min()`, `max()`) per resoldre el problema. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def minim_maxim(llista):  
    # El teu codi  
    return _min, _max
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Utilitza una iteració per recórrer la llista d'entrada. Passant només un cop de principi a fi, has de poder calcular el nombre mínim i el nombre màxim.
- Explica els passos que fa l'algorisme per a `minim_maxim([1, 7, 4, 6, 8, -2, 9, 5])`
- Com ho faries si saps que la llista està ordenada? Quin cost tindria?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert minim_maxim([3, 1, 5, 2, 7, 8]) == (1, 8)
assert minim_maxim([1, 7, 4, 6, 8, -2, 9, 5]) == (-2,
↪ 9)
```

2.10 Problema

Sumatori de parelles

1. Donada una llista d'enters i un valor de suma, troba, de la manera més eficient possible, totes les parelles de nombres a la llista que sumin aquest valor. L'algorisme pot tenir una complexitat d'ordre $O(n^2)$ però el cost exacte ha de ser menor que n^2 .

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def sumatori_parelles(llista, valorSuma):
    # El teu codi
    return parelles
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Si la llista té 3 elements, quantes comparacions hem de fer? Com podem evitar repeticions?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `sumatori_parelles([3, 1, 5, 2, 7, 8], 10)`
- Quins casos hem de tenir en compte?
- Calcula la complexitat de l'algorisme.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert sumatori_parelles([3, 1, 5, 2, 7, 8], 10) ==
↪ [(2, 8), (3, 7)]
```

2.11 Problema

Sumes i quadrats

La suma dels quadrats dels primers 10 nombres naturals és $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385$. El quadrat de la suma dels primer 10 nombres naturals és $(1 + 2 + \dots + 10)^2 = 55^2 = 3025$. Per tant, la diferència entre la suma d'aquests quadrats i el quadrat de la suma és $3025 - 385 = 2640$. Troba aquesta diferència per als 100 primers nombres naturals.

1. Resol el problema fent servir *list comprehensions*.
Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def suma_quadrats(n = 100):  
    # El teu codi  
    return diferencia
```

Comentari: amb l'expressió $n = 100$ com a paràmetre de la funció, el que estem fent és donar un valor per defecte a n .

Reflexions previes: Per resoldre el problema pots seguir les següents indicacions pas a pas:

- Escribeu la *list comprehension* per calcular una llista amb els quadrats dels 100 primers nombres naturals. Un cop feta la llista pots calcular-ne la suma amb l'operació *sum* de Python.
- Escribeu la *list comprehension* per calcular una llista amb els 100 primers nombres naturals. Un cop feta la llista, calcula'n la suma i calcula també el quadrat d'aquest nombre.
- Calcula la diferència entre els dos valors obtinguts.
- Quina és la complexitat de l'algorisme? Tingues en compte la complexitat de la funció *sum*, si l'has utilitzat.

Banc de proves: Comprova que has programat l'algorisme correctament utilitzant la instrucció següent

```
assert suma_quadrats() == 25164150
```

2. Si no fem servir *list comprehensions* és possible solucionar el problema amb una complexitat $O(n)$. Escribeu un programa que ho faci.
Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def suma_quadrats_lineal():  
    # el teu codi  
    return diferencia
```

Reflexions previes: Per resoldre el problema pots seguir les següents indicacions pas a pas:

- Utilitza una sola iteració, recorrent tots els nombres menors a 100. Quina informació t'has de guardar de cada un d'ells?

Banc de proves: Pots comprovar que el resultat és el mateix que el de l'exercici anterior executant la següent instrucció:

```
assert suma_quadrats() == suma_quadrats_lineal()
```

2.12 Problema

Nombres Amics

Diem que dos nombres són amics si els divisors d'un, sumats, són equivalents a l'altre nombre i viceversa. Per exemple:

- Els divisors de 220 són 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 i 110, que sumen 284.
- Els divisors de 284 són 1, 2, 4, 71 i 142, que sumen 220.

Per tant **220** i **284** són amics.

1. Escriu una funció que determini si una parella de nombres són amics. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def amics(num1, num2):  
    # El teu codi  
    return sonAmics
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Pensa que s'ha de fer una mateixa operació sobre els dos nombres. Pots fer una funció auxiliar que serveixi per als dos casos.
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `amics(220, 284)`
- Quins casos especials hem de tenir en compte?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert amics(220, 284) == True  
assert amics(200, 230) == False  
assert amics(9363584, 9437056) == True
```

2.13 Problema

Nombres Perfectes

Diem que un nombre enter positiu és **perfecte** si és la suma dels seus divisors positius i menors que ell mateix. Per exemple, el nombre 6 és un nombre perfecte ja que els seus divisors són 1, 2 i 3 i es compleix que $6 = 1 + 2 + 3$.

1. Escriu una funció que determini si un nombre és perfecte i retorni un valor booleà amb el resultat.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def perfecte(num):  
    # El teu codi  
    return es_perfecte
```


Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Repassa manualment i compta els passos que fa l'algorisme per a `perfecte(6)`.
- Quins casos especials hem de tenir en compte?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert perfecte(6) == True
assert perfecte(8) == False
assert perfecte(28) == True
```

2.14 Problema

Nombres Apocalíptics

Un nombre, x , es diu **apocalíptic** si la xifra que representa 2^x conté la seqüència 666.

1. Escriu una funció que determini si un nombre és apocalíptic. Un cop escrit el programa, contesta les següents preguntes:

- Quins dels següents nombres són apocalíptics? 157, 180, 192.
- Dóna una llista amb tots els nombres apocalíptics entre 100 i 300.
- Quants nombres apocalíptics hi ha menors que 5.000?

Fes servir aquestes plantilles per escriure el teu codi:

```
def apocaliptic(num):
    # El teu codi
    return es_apocaliptic

def llista_apocaliptics(minim, maxim):
    # El teu codi
    return llista
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Com podem saber si la seqüència 666 apareix al nombre? Amb el valor numèric de 2^x és difícil de saber, quin altre tipus de variable podem fer servir?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `apocaliptic(157)`

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert apocaliptic(157) == True
assert apocaliptic(180) == False
assert apocaliptic(192) == True

assert llista_apocaliptics(100,300) == [157, 192,
↪ 218, 220, 222, 224, 226, 243, 245, 247, 251, 278,
↪ 285, 286, 287]
assert len(llista_apocaliptics(0,5000)) == 2253
```

2.15 Problema

Nombre Felç

Un nombre es diu **felç** si al transformar-lo de forma iterativa en la suma dels quadrats dels seus dígit, fins que només quedi una xifra, acabem amb un 1.

Per exemple, si considerem el 203 i apliquem la definició:

- $203 : 2^2 + 0^2 + 3^2 = 13$
- $13 : 1^2 + 3^2 = 10$
- $10 : 1^2 + 0^2 = 1$

podem veure que 203 és un nombre felç (i que 13 i 10 també ho són!).

1. Escriu una funció que determini si un nombre és felç.

Un cop escrita la funció, respon a les preguntes següents:

- Quants nombres felços hi ha fins a 3000?
- Si el primer nombre felç és l'1, quin és el nombre felç número 1234?
- Quins són els primers 10 nombres **infelços** (nombres no felços)?

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def felc(num):
    # El teu codi
    return es_felc
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Calcula manualment si el nombre 4 és un nombre felç i quins passos fas. Pren mesures per evitar que la teva funció iteri infinitament.
- Quin tipus d'iteració faràs servir? Per què?
- Per agafar els dígit del nombre, tens dues opcions possibles, a partir del text o a partir de la divisió entera mòdul 10. Et recomanem que ho solucionis de les dues maneres.
- Com has de tractar el cas del nombre 4? i del nombre 16?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert felic(203) == True
assert felic(13) == True
assert felic(10) == True
assert felic(96) == False
assert felic(33) == False
```

2.16 Problema

Nombres ambiciosos

Diem que un nombre és **ambiciós** si la suma dels seus factors és, quan apliquem recursivament aquesta definició, un nombre perfecte. Per exemple, 95 és un nombre ambiciós ja que:

- Els seus divisors són 1, 5 i 19, que sumen 25. Com que 25 no és perfecte, tornem a aplicar-ho.
- Els divisors de 25 són 1 i 5 que sumen 6 que és un nombre perfecte. Per tant, ens aturem i diem que 95 és ambiciós.

1. Escriu una funció que determini si un nombre és **ambiciós**.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def ambicios(num):
    # El teu codi
    return es_ambicios
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Pensa aquest problema com a dos subproblemes concrets. El primer, trobar la suma dels divisors, el segon, comprovar si el nombre és perfecte.
- Quin algorisme hem d'aplicar? Com aturarem aquest algorisme?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `ambicios(25)`
- Hi ha casos extrems, com ara el nombre 276 que encara no se sap si és un nombre ambiciós. Afegeix un mecanisme de control que limiti el nombre de comprovacions, per exemple, a 1000.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert ambicios(25) == True
assert ambicios(30) == False
assert ambicios(95) == True
```

2.17 Problema

Avet

1. Donat un enter senar, escriu una funció que dibuixi un avet amb tants asteriscs en la seva part inferior com el nombre donat. Per exemple, `avet(7)` ha de produir:

```
  *
 ***
*****
*****
```

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def avet(num):
    # el teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Dibuixa diversos avets a mà començant per nombres petits.
- Quants asteriscs hi ha a la fila 1? i a la 2? i a la 3? ...
- Quants espais inicials hi ha a la fila 1? i a la 2? i a la 3? ...
- Quin és l'algorisme per calcular el nombre d'asteriscs de cada fila? i per calcular el nombre d'espais inicials?
- Observa que, en aquest cas, la funció no ha de retornar cap valor, només imprimir els caràcters '*' i ' ' en l'ordre apropiat.
- Pots imprimir diversos caràcters en una mateixa línia fent servir el paràmetre `end=' '` de la funció `print()`.
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `avet(7)`.
- Si no te'n surts, comença dibuixant l'avet cap per avall, és més senzill.

Capítol 3

Algorismes Numèrics

Implementar de forma eficient les operacions aritmètiques ha estat una necessitat des del principi de la informàtica per fer els ordinadors eficients. Algunes de les solucions algorísmiques per aquest problema són conegudes des de l'antiguetat, però l'ús massiu de tecnologies avançades com la criptografia aplicada a seguretat informàtica han fet encara més important aquesta necessitat.

En aquest capítol repassarem alguns problemes numèrics simples que ens faran adonar del guany que pot suposar un bon algorisme de càlcul numèric sobre estratègies de resolució més simples com pot ser la força bruta.

3.1 Problema

Divisió entera

1. Escriu una funció que faci la divisió entera entre dos nombres enters, positius i més grans que 1. No utilitzis els operadors `*`, `/`, `%` per a resoldre el problema.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def divisio_entera(dividend, divisor):  
    # El teu codi  
    return quocient
```

Reflexions previes: Quantes operacions fa l'algorisme quan calculem $10/2$?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert divisio_entera(10,2) == 5  
assert divisio_entera(9,2) == 4
```

3.2 Problema

El Màxim Comú Divisor i les seves aplicacions

La forma més obvia de trobar el **màxim comú divisor** (*mcd*, i en anglès *gcd*) de dos nombres és trobar els factors dels dos nombres i multiplicar els seus factors comuns.

Per exemple, el *mcd* de 1035 i 759 surt al comprobar que

$$1035 = 3^2 \times 5 \times 23$$

i que

$$759 = 3 \times 11 \times 23$$

Per tant, $mcd = 3 \times 23 = 69$.

El problema és que no es coneix cap algorisme eficient per **factoritzar** els nombres, és a dir, no existeix cap algorisme publicat que pugui factoritzar-lo en temps $O(n^k)$ independentment de quina sigui la constant k .

El millor algorisme que es coneix té aquesta complexitat:

$$O\left(\exp\left(\left(\frac{64}{9}n\right)^{\frac{1}{3}}(\log n)^{\frac{2}{3}}\right)\right)$$

Fa més de dos mil anys que **Euclides** va enunciar un algorisme alternatiu per trobar el màxim comú divisor de dos nombres a i b :

```
def gcd(a,b):
    while a:
        a,b = b%a, a
    return b
```

```
gcd(1071, 462)
> 21
```

Sabrieu dir quina complexitat té aquest algorisme per nombres grans? No és un cas simple d'anàlisi, però es pot deduir adonant-se dels següents punts:

- A cada iteració els arguments (a, b) es converteixen a $(b \bmod a, a)$: canviem l'ordre i el més gran queda reduït al mòdul del petit.
- Es pot demostrar que això vol dir que **en dues iteracions successives els dos arguments decreixen almenys a la meitat**, és a dir, perden un bit en la seva representació. Si inicialment eren enters de n bits, en $2n$ iteracions arribarem al final de l'algorisme.
- Com que cada iteració implica una divisió $(a \bmod b)$ d'ordre quadràtic $O(n^2)$, el temps total serà $O(n^3)$.

-
1. Fent servir l'algorisme anterior, escriu una funció que simplifiqui una fracció a la seva expressió irreductible. Recorda que una fracció irreductible és una fracció en la qual el numerador i el denominador no tenen cap divisor comú. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def reduir_fraccio(numerador, denominador):
    # El teu codi
    return numReduit, denReduit
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `reduir_fraccio(12, 8)`.
- Calcula el cost de l'algorisme per `reduir_fraccio(127, 63)`.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa la comprovació següent:

```
assert reduir_fraccio(12, 8) == (3, 2)
```

3.3 Problema

Numeració en diferents bases

En un sistema de numeració posicional, anomenem **base** al conjunt de símbols emprats per a representar qualsevol nombre. En base 2, anomenat sistema de numeració **binari**, utilitzem només dos símbols: 0 i 1. En base 10, el sistema de numeració **decimal**, utilitza els 10 símbols numèrics: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. En base **hexadecimal**, és a dir, base 16, s'usen els símbols numèrics 0 a 9 i també les lletres A, B, C, D, E i F.

Tot nombre es pot expressar en qualsevol base, només hem d'utilitzar els símbols corresponents. Veiem un exemple pel nombre 58_{10} (que s'ha de llegir com "el nombre 58 en base 10"). Observa el sub-índex del nombre per representar la base en la que està escrit:

$$58_{10} = 8 \times 10^0 + 5 \times 10^1$$

$$3A_{16} = A \times 16^0 + 3 \times 16^1$$

$$11101_2 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4$$

Com que el caràcter *A* en base 16 representa el nombre 10 decimal, fent les operacions de les igualtats observem que les tres representacions corresponen al mateix nombre.

$$58_{10} = 3A_{16} = 11101_2$$

1. Escriu una funció que donat un nombre en hexadecimal (base 16) el converteixi a nombre decimal (base 10). L'entrada de la funció serà de tipus *string* i la sortida serà de tipus enter.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def convert_hex(xifra):
    simbols = {'A': 10, 'B': 11, 'C': 12, 'D': 13,
               'E': 14, 'F': 15}
    # El teu codi
    return decimal
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Com pots convertir fàcilment de base 16 a base 10? Utilitza el diccionari `simbols` per convertir els caràcters a nombres.
- Quin exponent li correspon al primer dígit del nombre d'entrada?
- Calcula manualment alguns nombres, com ara, $3A_{16}$, $B6_{16}$, 123_{16} i aplica el mateix procediment a l'hora de programar.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert convert_hex('3A') == 58
assert convert_hex('B6') == 182
assert convert_hex('123') == 291
```

2. Escriu una funció que compti quants dígit té un nombre natural escrit en base 10 i representat per una variable `int` de Python.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def digits(xifra):
    # El teu codi
    return num_digits
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Es poden comptar els caràcters d'un nombre? i els d'una cadena de caràcters?
- Quina forma té un nombre decimal?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `digits(123456)`
- Quina és l'operació amb més cost d'aquest algoritme?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert digits(123456) == 6
```

3. Escriu una funció que donat un número N , retorni tots els nombres binaris entre 1 i N dins d'una llista, ambdós inclosos. Pots usar alguna funció específica de Python, com ara la funció `bin()`.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:


```
def binari(N):
    # El teu codi
    return llista
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin algorisme hem d'aplicar?
- Com sabem la llargada del nombre binari més gran?
- Quina solució generarà *binari(5)*?
- Explica els passos que farà l'algorisme per a *binari(10)*.
- Quins casos hem de tenir en compte?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert binari(10) == ['0b1', '0b10', '0b11',
    ↳ '0b100', '0b101', '0b110', '0b111', '0b1000',
    ↳ '0b1001', '0b1010']
```

4. Escriu una funció que compti la suma dels dígitos d'un número elevat a una potència. Per exemple, quina és la suma els dígitos de 5^{1000}

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def suma_digits(num, potencia):
    # El teu codi
    return suma
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Com es calculen les potències a Python?
- Quin algorisme hem d'aplicar? Revisa la funció *digits* si l'has resolt abans.
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas *sumaDigits(2,10)*

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert suma_digits(2,100)== 115
```

3.4 Problema

Resta Binària

El **complement a un** i el **complement a dos** són dues eines matemàtiques que faciliten molt les tasques aritmètiques en el sistema binari, sobretot la realització de restes i el treball amb nombres negatius.

El complement a un (C_1) d'un nombre binari és el nombre resultant d'invertir els uns i els zeros d'aquest nombre. Per exemple, el complement a un del nombre 1101 és el nombre 0010.

El complement a dos (C_2) d'un nombre binari és el nombre resultant de sumar 1 al seu complement a un. És a dir, $C_2 = C_1 + 1$. Generalment es diu que el C_2 és la manera de representar el negatiu d'un número binari.

Podem restar dos nombres binaris utilitzant l'operació de complement a dos. Siguin x , y els dos nombres binaris que volem restar, podem expressar aquesta operació com:

$$\text{Resta binària } x-y = x + C_2(y)$$

1. Escriu una funció que resti dos nombres binaris que estan emmagatzemats en dues llistes. Considera que els nombres es poden emmagatzemar en 4 bits i que si la operació que volem fer es $x - y$, el minuend, x , ha de ser més gran que el subtrahend, y .

Un cop programat, calcula la complexitat de l'algorisme.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def resta_binaria(op1, op2):
    # El teu codi
    return resta
```

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa la comprovació següent:

```
assert resta_binaria([0,1,0,1], [0,0,0,1]) == [0,1,0,0]
```

3.5 Problema

Operacions amb nombres binaris

Els operadors booleans `and` (`&`) i `or` (`|`) permeten realitzar operacions amb la representació binària, o màscara, dels nombres.

Per exemple, l'expressió `(n & 1)` retorna 1 si el nombre és senar i 0 si és parell ja que la màscara corresponent al nombre 1 està actuant sobre l'últim bit de la representació binària del nombre n .

Veiem l'aplicació d'aquesta màscara a $n = 20$ i $n = 21$:

```
20 & 1
> 0
```

```
21 & 1
> 1
```

En el primer cas, la representació binària del nombre 20 és 00010100. Fent l'operació `&` amb el nombre 1, en binari de 8 dígits 00000001, obtenim 00010100 `&` 00000001 = 00000000.

En el segon cas, tenim que 00000001 `&` 00000001 = 1.

1. Determinar si un nombre és potència de 2 fent ús de les operacions binàries tot i seguint les següents indicacions:

- Si ens fixem en la representació binària d'un nombre és fàcil veure que les potències de 2 només tenen un bit a 1.
- A nivell de bits, donada una potència de 2 (p.e. 010000), el nombre anterior té una forma complementària en els bits menys significatius (001111).

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def potencia2(num):
    # El teu codi
    return es_potencia
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Revisa les operacions amb booleans. Quin algorisme aplicarem?
- Explica els passos que fa `potencia2(8)`
- Quins casos especials hem de tenir en compte?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert potencia2(1024) == True
assert potencia2(2**2345) == True
assert potencia2(2**2345-1) == False
```

3.6 Problema

Aritmètica Modular

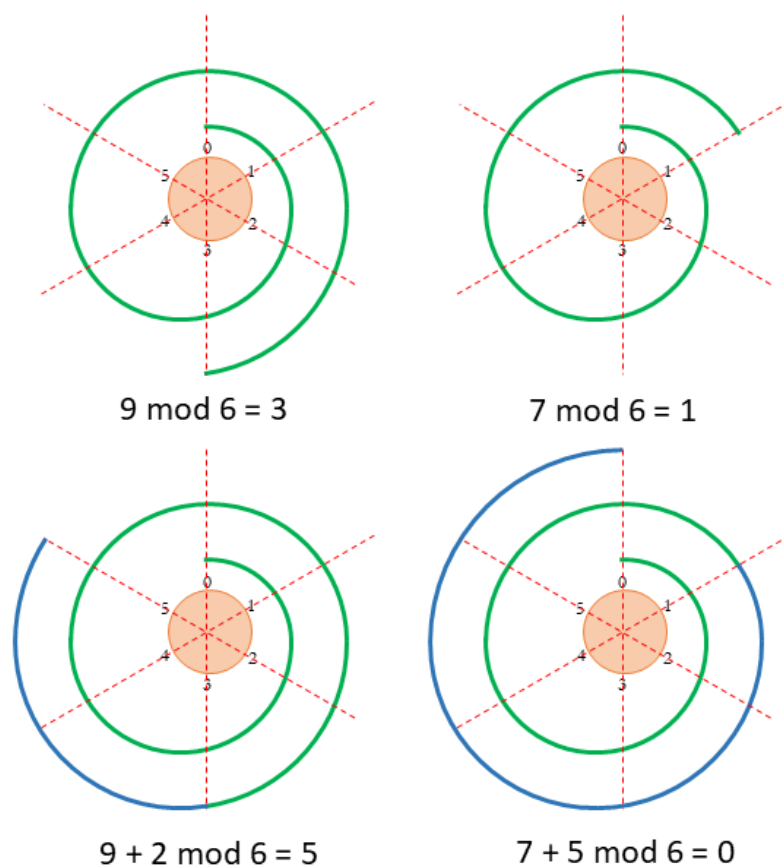
En certs aspectes de la informàtica (per exemple, la criptografia) és important una variació de l'aritmètica bàsica sobre els nombres enters: l'**aritmètica modular**.

Definim x **mòdul** N , o $x \% N$, com el residu de dividir x entre N . Concretament, siguin x i N dos nombres enters, siguin q i r tals que $x = qN + r$ amb $0 \leq r < N$. Aleshores, diem que x mòdul N és r .

Per exemple $12 \% 7 = 5$, i $100 \% 12 = 4$.

Això permet definir una equivalència (congruència) entre nombres enters. Direm que x és **congruent amb** y , **mòdul** N (*mod* N), si i només si N divideix a $x - y$.

Per exemple 16, 28, 40 i 100 són congruents entre sí mòdul 12.



Congruències entre nombres en aritmètica modular, inspirat en Khan Academy

1. **Lletra NIF** * L'última lletra del NIF es calcula a partir dels nombres del DNI. Per fer-ho, s'ha de dividir el nombre entre 23 i quedar-se amb la resta, que és un nombre entre 0 i 22. Llavors s'aplica la següent taula per transformar aquest nombre en una lletra:

Resta	Lletra	Resta	Lletra
0	T	12	N
1	R	13	J
2	W	14	Z
3	A	15	S
4	G	16	Q
5	M	17	V
6	Y	18	H
7	F	19	L
8	P	20	C
9	D	21	K
10	X	22	E
11	B		

Escriu una funció, `validar_NIF`, que validi si en un NIF, la lletra es correspon realment al nombre del DNI. Has de fer servir alguna col·lecció de Python que sigui adequada.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def validar_NIF(cadenaNIF):
    # El teu codi
    return es_correcte
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Com separaràs les dues parts del NIF?
- Quina col·lecció faràs servir? Per què?
- Explica els passos que fa l'algorisme a l'executar `validar_NIF('3333333T')`.
- Quins casos especials hem de tenir en compte?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert validar_NIF('56789123F') == True
assert validar_NIF('56789123H') == False
```

2. **Columnes Full de Càlcul** Escriu una funció per convertir un nombre en el nom de la columna del full de càlcul corresponent. Fixa't en els següents exemples:

A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	4	5	6	7
W	X	Y	Z	AA	AB	AC
23	24	25	26	27	28	29
OP	OQ	OR	OS	OT	OU	OV
406	407	408	409	410	411	412
ZZ	AAA	AAB	AAC	AAD	AAE	AAF
702	703	704	705	706	707	708

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def conversio_fulla_calcul(num):
    # El teu codi
    return columna
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quines lletres s'usen per a les columnes Excel?
- Cada quant s'afegeix una nova lletra al nom de la columna?
- Quins casos hem de tenir en compte?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert conversio_fulla_calcul(1000) == 'ALL'
assert conversio_fulla_calcul(107) == 'DC'
```

3.7 Problema

Descomposició en funcions *

Per tal de facilitar la reutilització del codi, i facilitar el seu manteniment i llegibilitat, sovint es recomana descomposar-lo en parts més petites però amb significat clar mitjançant la definició de múltiples funcions.

Quan t'enfrontes amb un problema, has de mirar d'identificar aquelles parts del codi que resolen un subproblema concret i separar-les del codi principal. Finalment, hi haurà una funció principal, que anirà cridant aquestes funcions més petites de forma ordenada, per resoldre el problema gran.

1. **Calculadora** Escriu una funció que permeti fer operacions de suma, resta i multiplicació amb nombres naturals a partir d'una entrada que sigui una cadena. L'usuari anirà entrant les operacions, i quan vulgui acabar pulsarà retorn i la cadena d'entrada serà buida.

Exemple de funcionament:

```
Entra operacio: 4+5
>9
Entra operacio: 7-2
>5
Entra operacio: 1*4
>4
Entra operacio:
```

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def calculadora():
    # El teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin tipus d'iteració cal per anar demanant dades a l'usuari?
- Com separaràs els valors de l'entrada? Quins casos cal tenir en compte?
- Pensa en la descomposició de funcions. Creus que la funció calculadora es pot descomposar en altres? En quines?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució.

2. **Divisible per tots *** El nombre 2520 és el nombre més petit que es pot dividir de manera exacta (sense decimals) per cada un dels nombres enters entre 1 i 10. Escriu un algorisme que calculi el nombre més petit divisible per tots els nombres menors a un nombre n donat. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def mes_petit_divisible_per(n):
    # El teu codi
    return number
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Escriu una funció a banda, `divisible`, per comprovar que un nombre pot ser dividit de manera exacta per tots els nombres des de 2 fins al nombre donat. Per exemple `divisible(6,3)` ha de retornar `True` perquè 6 és divisible per 3 i per 2. La funció principal cridarà aquesta funció auxiliar.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert divisible(6, 3) == True
assert divisible(10, 4) == False
assert mes_petit_divisible_per(2) == 2
assert mes_petit_divisible_per(9) == 2520
```

3.8 Problema

Primeritat *

Suposem que volem trobar un nombre primer qualsevol de n bits.

El **sedàs d'Eratòstenes** és un algorisme antic per cercar tots els nombres primers fins a un determinat enter. Va ser creat per Eratòstenes (276-194 aC), un matemàtic de l'Antiga Grècia, i té la següent forma:

1. Escriu una llista *llista1* amb els números del 2 fins a l'enter més gran N que vulguis calcular.
2. El primer nombre de la llista és un nombre primer. Anota'l en una llista de nombres primers, B .
3. Esborra de la llista *llista1* el primer nombre i els seus múltiples.
4. Si el primer nombre de la llista *llista1* és més petit que l'arrel quadrada de N , torna al punt 2.
5. Els nombres de la llista *llista2* i els que queden a la llista *llista1* són tots els nombres primers cercats.

Amb aquest algorisme podem trobar nombres primers petits, però no és gaire útil si estem interessants en trobar nombres primers molt grans a causa de la seva complexitat. En aquest cas, un altre resultat força antic, el teorema dels nombres primers de **Lagrange**, ens pots ajudar. Aquest teorema ens assegura que la probabilitat que un nombre de n bits sigui primer és aproximadament:

$$\frac{1}{\ln 2^n} \approx \frac{1.44}{n}$$

Aquest algorisme ens dona una via per tant per trobar nombres primers fent una cerca aleatòrica: si generem al voltant de 1000 nombres aleatoris de 1000 bits tenim una certa garantia de que algun d'ells sigui primer.

1. **Primer 10001** * Si llistem els primers 6 nombres primers: 2, 3, 5, 7, 11, i 13, podem veure que el 6è primer és el 13. Quin és el primer que ocupa la posició 10001?

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
from math import sqrt

def eratostenes(n) :
    # El teu codi
    return llista_primers

def primer(n):
    # El teu codi
    return ennessim_primer
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quants nombres necessitem per garantir que hi hagi 10001 primers?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `primer(6)`.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert primer(6) == 13
assert primer(10001) == 104743
```

2. **Factor primer més gran** Escriu una funció que calculi el factor primer més gran d'un nombre natural donat.
Per exemple: els factors primers de 13195 són 5, 7, 13 i 29. 29 és per tant el seu factor primer més gran (i el que la funció ha de retornar) és aquest.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def factor_primer_mes_gran(n):
    # El teu codi
    return factor
```


Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `factor_primer_mes_gran(13195)`
- Quins casos hem de tenir en compte?
- Quina complexitat té aquesta funció?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert factor_primer_mes_gran(600851475143) ==
↪ 6857
```

3.9 Problema

Teorema de Fermat

Suposem que volem verificar si un gran nombre és primer, evitant la via de la factorització. La base és un teorema de l'any 1640, el teorema petit de **Fermat**:

Teorema (Fermat): Si p és un nombre primer, llavors per a qualsevol enter a tal que $1 \leq a < p$, es compleix que $a^{(p-1)} \% p = 1$.

Per tant, podem afirmar que si 41651 és primer, llavors $12^{(41651-1)} \% 41651 = 1$.

Això ens suggereix un test de **necessitat**, però no de **suficiència**, per comprovar si un nombre és primer.

Considerem aquest algorisme:

```
from random import randint

def fermat(num, k):
    if num == 1:
        return False
    for x in range(k):
        # genera nombre aleatori
        val = randint(1, num-1)
        # la potència a Python es basa en l'algorisme
        # de l'exponenciació modular
        # l'expressió pow equival a val**(num-1) % num
        if pow(val, num-1, num) != 1:
            return False
    return True

fermat(41651, 10)
> True
```

Aquest algorisme genera uns quants nombres aleatoris menors que num (en concret, k nombres) i amb cadascun prova la igualtat del teorema petit de

Fermat. Si algun dels nombres no la compleix, vol dir que podem estar segurs que *num* no és primer.

Però cal tenir en compte que només ha provat uns quants valors: encara que no hagi trobat cap nombre que falli, no garanteix que no existeixi algun nombre pel qual falli. Si volguéssim estar-ne segurs del tot caldria fer la prova amb **TOTS** els nombres menors al nombre donat¹.

Per tant, la pregunta que ens podem fer és: tot i no provar tots els nombres, quina seguretat puc tenir si en provo un quants?

De nou, les matemàtiques ens poden ajudar. Es pot demostrar que si N és un nombre compost llavors com a mínim en la meitat dels casos en què $a < N$ el teorema petit de Fermat fallarà i per tant $a^{(N-1)}$ no serà congruent amb 1 mòdul N . L'expressió `pow(val, num-1, num) != 1` retornarà:

- *True* en tots els casos si N és primer.
- *True* per la meitat o menys dels casos si N no és primer.

Per tant, amb k nombres escollits aleatòriament, la probabilitat de que torni *True* per a un N no primer és menor que $1/(2^k)$.

Per exemple, Si $k = 100$, la probabilitat és menor que 2^{-100} . Amb un nombre moderat de tests podem determinar si un nombre és primer amb força seguretat!

Podem doncs generar nombres primers amb un algorisme força simple:

```
def generate_prime(n):
    found_prime = False
    while not found_prime:
        # genera un nombre aleatori de n bits
        p = randint(2**(n-1), 2**n)
        if fermat(p, 20):
            return p

generate_prime(1024)
> 1564164369635928290494089703852876271225993
134071925206793505472254225987111974690667213
585747512827438442725618076225588404393423504
458103345464197458150030735089191281761040215
875177815103416345918968223130669630077740071
769311967250454596814028432056944342969761621
76141492536156000121297532182395461766893
```

-
- Primer de Wieferich** Un primer de Wieferich és un nombre primer p tal que p^2 divideix $2^{p-1} - 1$. Quins primer de Wieferich hi ha menors que 5000?

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def primers_Wieferich(n = 5000):
    # El teu codi
    return wieferichs
```

¹Per simplificar s'obvia l'explicació dels nombres de Carmichael, que no compleixen l'algorisme petit de Fermat

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Hi ha algun algorisme dels que s'han vist a l'assignatura que et pugui resultar útil? Revisa altres problemes fets també. Descomposa la funció si és necessari.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert primers_Wieferich(n = 5000) == [1093,
    ↪ 3511]
```

2. **Test de primeritat** Escriu una funció *factorp* que comprovi si un determinat nombre n és primer mitjançant la tècnica de la factorització i que imprimeixi quant temps ha trigat a calcular-ho (pots usar aquest [mètode](#)). Escriu una segona funció, *fermatp*, que comprovi si un determinat nombre $n > 10$ és primer mitjançant la tècnica de Fermat fent la comprovació simplement amb els nombres $a = 2, 3, 5$ i que imprimeixi quant temps ha trigat a calcular-ho.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
import math

def factorp(N):
    # El teu codi
    return es_primer

def fermatp(N, a = [2, 3, 5]):
    # El teu codi
    return es_primer
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Raona el cost d'ambdues opcions

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert factorp(12) == False
assert fermatp(12) == False
```

3.10 Problema

Restriccions múltiples o operacions amb condicions *

Molts problemes requereixen trobar una solució que compleixi diverses restriccions. Per resoldre'ls podem abordar cadascuna de les restriccions per se-

parat i després buscar la manera ideal d'unir-les per tal de fer les mínimes operacions.

Altres vegades establim una única condició aplicada sobre un càlcul previ. En aquest cas caldrà mirar com optimitzem els càlculs a fer per evitar fer-ne de més.

1. Tres condicions * Fes una funció que trobi el nombre n més gran tal que compleixi les següents tres condicions:

1. $n < 10000$,
2. $n = m \times m$ per algun m ,
3. $n = k! + 1$ per algun k

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
import math
def numero_3_condicions():
    # El teu codi
    return buscat
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Planteja l'algorisme per a cadascuna de les condicions per separat de manera eficient. Revisa el significat de factorial si cal.
- Mira si pots ajuntar-les de manera eficient, per tal que una condició ajudi a reduir el cost d'alguna altra.

Banc de proves: Comprovar la teva solució amb el següent codi:

```
assert numero_3_condicions() == 5041
```

2. Setmanes i segons Fes una funció que trobi tots els nombres de setmanes n que tinguin un nombre de segons s tal que $s = k!$ per algun $k < 100$. Pots fer servir la funció `math.factorial(x)`, que calcula el factorial de x .

```
import math
math.factorial(4)
> 24
```

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
import math

def setmanes_segons():
    # El teu codi
    return llista_setmanes
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quants segons té una setmana?
- Com escriuries la solució amb *list comprehensions*.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Executa la comprovació següent:

```
assert setmanes_segons() == [6, 66, 792]
```

- 3. Quadrats sumen n** Donat un nombre n , troba dos nombres positius tals que la suma dels seus quadrats sigui n , o si no n'hi ha que retorni $(-1, -1)$. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
import math
def quadrats(n):
    # El teu codi
    return(num1, num2)
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin valor màxim tindran els nombres positius trobats?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `quadrats(125)`

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert quadrats(125) == (2,11)
assert quadrats(106) == (5,9)
assert quadrats(81) == (-1,-1)
```

- 4. Suma múltiples de 3 i 5** Els nombres naturals menors que 10 que són múltiples de 3 o 5 són 3, 5, 6, i 9. La suma d'aquests múltiples és 23. Calcula la suma de tots els naturals que són múltiples de 3 o 5 i que són menors que 1000.

Pots usar l'operació `sum(llista)` que suma tots els elements d'una llista; per exemple: `sum([3,7,1])` donarà 11.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def multiples():
    # El teu codi
    return resultat
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Com pots crear els múltiples de 3 o 5 i evitar repeticions?
- Hi ha alguna estructura que usem a les iteracions que et sigui útil en aquest problema?
- Quina complexitat té aquesta funció?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert multiples() == 233168
```

3.11 Problema

La seqüència de Fibonacci *

Leonardo Fibonacci (1175 – c. 1250) és avui conegut sobretot per la seva seqüència o sèrie:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...



Segell amb el bust de Leonardo Fibonacci

Definició (Sèrie de Fibonacci): *Siguin $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Llavors el terme enèsim de la seqüència de Fibonacci es defineix com $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.*

Això encara **no és un algorisme**, és només una definició, atès que hi ha moltes maneres, o algorismes, per implementar aquesta sèrie. Cal observar que la seqüència creix molt ràpid: es pot demostrar (matemàticament) que el terme enèsim de la seqüència és aproximadament:

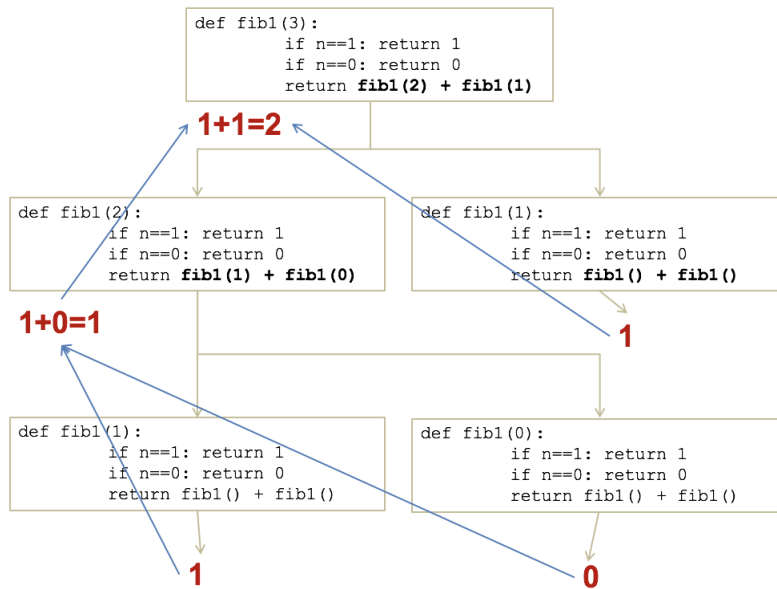
$$F_n \approx 2^{0.694n}$$

Però per calcular **exactament** un terme concret necessitem una fórmula o un algorisme. Una primera possibilitat és mitjançant un *algorisme recursiu*:

```
def fib1(n):
    if n==0:
        return n
    if n==1:
        return n
    else:
        return fib1(n-1) + fib1(n-2)

fib1(10)
> 55
```

Un algorisme recursiu és un algorisme que es crida a si mateix. Els algorismes recursius, per executar-se, creen automàticament còpies d'ells mateixos (amb paràmetres possiblement diferents) creant un arbre. Quan la recursivitat s'acaba, reconstrueixen la solució movent-se cap enrera per l'arbre.



Fibonacci

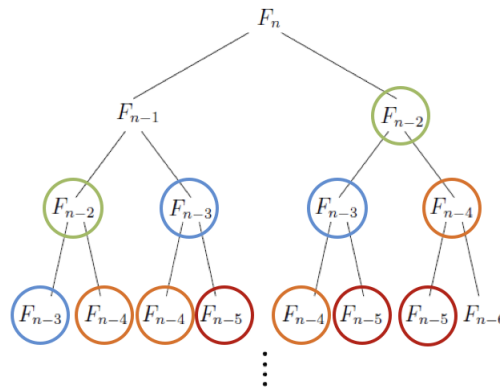
De la mateixa manera que fariem amb qualsevol algorisme, podem fer tres preguntes (**les tres preguntes bàsiques de l'algorísmica**) sobre l'algorisme que hem escrit:

1. És correcte?
2. Quant trigarà? En aquest cas, té sentit preguntar-ho en funció de n , la mida del nombre que passem com a paràmetre.
3. Hi ha alguna manera millor de fer-ho?

I les respostes són:

1. **És correcte?** En aquest cas és evident que sí, atès que segueix exactament la definició!
2. **Quant trigarà?** Es pot demostrar que el nombre de passos computacionals que fa és de l'ordre de F_n . Per calcular el terme 200 hauria de fer de l'ordre de 2^{138} passos. A l'ordinador més ràpid del món, que pot executar al voltant de 4×10^{13} passos per segon, necessitaríem més temps que el necessari pel col·lapse del Sol. A la velocitat que els ordinadors augmenten la seva capacitat de càlcul, cada any que passa podríem calcular un nombre de Fibonacci mes que l'any anterior!
3. **Hi ha alguna manera millor de fer-ho?** Sí...

Per trobar una manera millor, només cal adonar-se de per què és tan lent:



Hi ha molts càlculs (en aquest cas, crides recursives) que es repeteixen! Una possible solució és guardar el resultat de cada crida el primer cop que ho calculem i no tornar a calcular-ho. Anem a fer-ne una versió **iterativa**, basada en **l·listes**:

```
def fib2(n):
    if n==0:
        return 0
    ls = [0,1]
    for i in range(2,n+1):
        ls.append(ls[i-1]+ls[i-2])
    return ls[n]
```

Aquest algorisme és correcte perquè implementa directament la definició i executarà $(n - 1)$ vegades l'iteració. Ara podem calcular fins i tot `fib(100.000.000)`.

Recorda:

Amb l'eina [Code Skulptor](#) podem visualitzar fàcilment el funcionament de qualsevol algorisme.

L'algorisme `fib2(n)` és **lineal** (o polinòmic) respecte n . Però l'algorisme encara es pot millorar...

```
def fib3(n):
    a,b = 0,1
    for i in range(1,n+1):
        a,b = b, a+b
    return a
```

```
fib3(10)
> 55
```

- Suma termes parells Fibonacci** Calcula la suma dels termes parells menors de quatre milions (Fibonacci de 2, Fibonacci de 4, Fibonacci de 6...) de la funció de Fibonacci.

Quant temps triga?

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def fibonacci_termes_parells(n = 4000000):
    # El teu codi
    return suma
```



```
# Al principi d'una nova cel·la executar comanda per saber el
↪ temps que triga
%timeit fibonacci_termes_parells(4000000)
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Revisa l'algorisme de Fibonacci de teoria i implementa la versió més eficient.
- Compara el temps en el teu ordinador amb el d'una companya o company.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució.

```
assert fibonacci_termes_parells(4000000) == 4613732
```

- 2. Suma Fibonacci múltiples de 3 *** Fes una funció que sumi els n primers termes de Fibonacci que siguin múltiples de 3. És a dir, d'aquells termes de Fibonacci que es poden dividir per 3 de manera exacta.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def fibonacci_multiples_3(n):
    # El teu codi
    return suma
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Com sabem si un número és divisible per un altre?
- Revisa l'algorisme de Fibonacci vist anteriorment i implementa la versió més eficient.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert fibonacci_multiples_3(10) == 119814915
```

- 3. Els termes de Fibonacci i la multiplicació de matrius** El terme enèsim de la sèrie de Fibonacci, F_n es pot obtenir aplicant càlculs matricials. És fàcil veure que:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Fes una funció que retorni els n primers termes de la sèrie de Fibonacci calculats d'aquesta manera, amb la menor complexitat possible. Codifica en una funció a part la multiplicació de dues matrius sense fer servir cap funció avançada de Python.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def fibonacci_matricial(N):  
    # El teu codi  
    return sequencia
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin és el mínim nombre d'operacions per multiplicar dues matrius de n elements?
- Donada una matriu A , es pot calcular A^n com $A \times A \times A \times \dots \times A$. Creus que és la manera més eficient? Hi ha alguna alternativa més eficient?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert fibonacci_matricial(10) == [0, 1, 1, 2, 3,  
    ↪ 5, 8, 13, 21, 34]
```

Capítol 4

Algorismes i Text

De la mateixa manera que les operacions aritmètiques havien d'estar implementades de manera molt eficient en els primers ordinadors, les operacions amb cadenes de caràcters han d'estar implementades amb bons algorismes si es volen aplicar a grans volums de dades.

A Python, i a la majoria de llenguatges, les cadenes de caràcters són **immutables** i no es poden modificar amb cap tipus d'operador. Per tant, els algorismes de text, per a ser eficients, han de minimitzar les còpies de cadenes de caràcters.

4.1 Problema

Acrònims *

Un **acrònim** és una paraula formada per les primeres lletres, en majúscules, de totes les paraules d'una expressió o frase (per exemple, l'acrònim **RAM** correspon a l'expressió **random access memory**).

1. Escriu una funció, **acro**, que a partir d'una frase sense punts, comes, accents, número ni cap signe de puntuació, imprimeixi l'acrònim corresponent.

Fes servir el patró següent:

```
def acronim(frase):  
    # El teu codi  
    return acro
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Recorda que els acrònims, independentment de com l'usuari hagi entrat l'expressió, sempre són en majúscules.
- Revisa les funcions de les cadenes i mira si n'hi ha alguna que et pugui ser útil. Com ho podem fer per separar les paraules? I per transformar una cadena en majúscules?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `acro("Hola que tal")`

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa la comprovació següent:

```
assert acronim("Hola que tal") == 'HQT'
```

4.2 Problema

Traducció a l'alfabet d'aviació

En el món de l'aviació, els pilots i controladors de trànsit aeri utilitzen una convenció per comunicar-se entre ells. Així, usen l'**Alfabet d'Aviació**, que utilitza 26 lletres. Cada lletra té una paraula associada i amb ella es comuniquen evitant confusions.

L'Alfabet d'Aviació és el següent:

A	B	C	D	E
Alpha	Bravo	Charlie	Delta	Echo
F	G	H	I	J
Foxtrot	Golf	Hotel	India	Juliet
K	L	M	N	O
Kilo	Lima	Mike	November	Oscar
P	Q	R	S	T
Papa	Quebec	Romeo	Sierra	Tango
U	V	W	X	Y
Uniform	Victor	Whiskey	Xray	Yankee
Z				
Zulu				

Un controlador de trànsit aeri lletrejaria la paraula PYTHON així: Papa Yankee Tango Hotel Oscar November.

1. Escriu una funció, `aviacio` que, usant un diccionari, converteixi una cadena de lletres a l'Alfabet d'Aviació, generant una llista de sortida.

Fes servir el patró següent:

```
def aviacio(cadena):
    # El teu codi
    return traduccio
```

Reflexions previes: Fes-te aquestes preguntes abans de començar a programar:

- Has tingut en compte que la paraula d'entrada pot estar en minúscules, majúscules o amb una lletra de cada?
- Quin cost tindrà l'algorisme?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert aviaccio("Arc") == ['Alpha', 'Romeo',
                             ↪ 'Charlie']
```

4.3 Problema

Cadenes Isomorfes

Diem que dues cadenes de caràcters a i b són **isomorfes** si les ocurrencies de cada caràcter de la cadena a es poden reemplaçar per un caràcter de manera que la convertim en la cadena b i viceversa.

Per exemple, les dues cadenes:

```
a = "TAULADES"
b = "PISCINES"
```

són isomorfes perquè podem establir aquestes correspondències:

$$T \leftrightarrow P, A \leftrightarrow I, U \leftrightarrow S, L \leftrightarrow C, D \leftrightarrow N$$

Cal tenir en compte que un caràcter pot tenir una correspondència amb si mateix, però dos caràcters diferents no poden correspondre a un mateix caràcter.

1. Escriu una funció anomenada **isomorf** tal que, donades dues cadenes de caràcters d'entrada, retorni **True** si són isomorfes i **False** en cas contrari.

Per resoldre aquest problema us pot ser útil la funció **zip** de Python. Aquesta funció permet agafar un element de cada objecte d'entrada (llistes, cadenes de caràcters). D'aquesta manera podem fer-ne parelles molt ràpidament. Per exemple, aquest programa:

```
for i, j in zip('hola', 'adeu'):
    print(i, j)
```

imprimeix les parelles formades per les parelles de lletres de les paraules d'entrada

```
h a
o d
l e
a u
```

Fes servir el patró següent:

```
def isomorf(cadX, cadY):
    # El teu codi
    return es_isomorf
```

Reflexions previes: Abans de programar pensa en exemples simples que posin a prova l'algorisme. Pensa també en els punts següents:

- Quins passos fa l'algorisme en els casos que has pensat?
- Quines col·leccions usaries? Per què?
- Quins casos extrems hem de tenir en compte? Per exemple, què passa si les dues paraules tenen longituds diferents? I si una de les cadenes de caràcters és buida, ""?
- Quantes operacions fa el programa `isomorf("abc", "def")`?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert isomorf('CBAABC', 'DEFFED') == True
assert isomorf('XXX', 'YYY') == True
assert isomorf('RAMBUNCTIOUSLY',
               'THERMODYNAMICS') == True
assert isomorf('XXY', 'XXY') == False
assert isomorf('ABAB', 'CD') == False
```

- Com a ampliació de l'exercici anterior, escriu una funció que rebi com a entrada una llista i una paraula. Aquesta funció ha de retornar totes les paraules de la llista que siguin isomorfes a la paraula d'entrada.

Fes servir el patró següent:

```
def tria_paraules_isomorfes(llista, paraula):
    # El teu codi
    return llistaIsomorfes
```

Reflexions previes: Abans de programar fes aquestes reflexions:

- No ho tornis a programar tot, pensa si té sentit cridar a `isomorf` dins la nova funció. Pots fer alguna comprovació prèvia que t'estalvi feina?
- Si el cost de cadenes isomorfes és X, quin és el cost de `tria_paraules_isomorfes`?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `tria_paraules_isomorfes(['mim', 'gat', 'gos'], 'rar')`.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert tria_paraules_isomorfes(['gag', 'sos', 'mim',
                                'gat', 'gos'], 'rar') == ['gag', 'sos', 'mim']
assert tria_paraules_isomorfes(['gag', 'sos', 'mim',
                                'gat', 'gos'], 'rap') == ['gat', 'gos']
```

4.4 Problema

Totes les subcadenaes

1. Escriu una funció que retorni una llista amb totes les subcadenaes d'una cadena donada. Fes servir *list comprehensions*.

Per exemple: `totes_subcadenaes("abcd")` hauria de retornar la llista `['a', 'ab', 'abc', 'abcd', 'b', 'bc', 'bcd', 'c', 'cd', 'd']`

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def totes_subcadenaes(cadena):
    # El teu codi
    return subcadenaes
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quines són totes les subcadenaes de la paraula *casa*?
- Observa la solució de l'exemple i fixa't en els índexs de cada subcadena. Pots identificar un patró? Quin recorregut/recorreguts haurem de fer per crear les subcadenaes?
- És més senzill si primer escrius la funció amb iteracions i després la converteixes a list comprehensions
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `totes_subcadenaes("abcd")` i calcula'n la complexitat.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució, i fes també la comprovació següent:

```
assert len(totes_subcadenaes('abcd')) ==
    ↳ int((len('abcd') * (len('abcd') + 1) / 2))
assert totes_subcadenaes('abcd') == ['a', 'ab', 'abc',
    ↳ 'abcd', 'b', 'bc', 'bcd', 'c', 'cd', 'd']
```

4.5 Problema

Levenshtein

Una seqüència genètica és una cadena de caràcters (*string*) formada per caràcters d'un alfabet de quatre lletres: **A**, **T**, **G**, **C**, anomenades **bases**, que corresponen a les macromolècules de l'**ADN**. Un **gen** és una seqüència ordenada de bases i el **genoma** és la concatenació de tots els gens.

Cada cèl·lula produïda pel cos rep una còpia del genoma però sovint aquesta còpia és alterada. Les possibles alteracions que es poden produir són, entre d'altres, la substitució d'una base per una altra o la pèrdua d'una base.

1. Fes una funció, anomenada **dna**, basada en l'algorisme de Levenshtein, que busqui dins d'una seqüència genètica una cadena genètica passada per paràmetre.

Aquesta funció ha de retornar la línia del fitxer on comença la cadena més semblant i la distància entre la cadena d'entrada i la cadena més semblant.

Algorisme de Levenshtein

El càlcul de la distància d'un patró al substring més semblant d'un text es pot fer amb l'algorisme de Levenshtein. L'única diferència és que s'ha d'inicialitzar la primera fila amb zeros i que la distància d'edició serà el valor mínim de l'última fila de la matriu de costos. També heu de tenir en compte els costos en la inicialització de la primera columna.

La [seqüència genètica](#) que farem servir és la del cromosoma 2 humà. Seleccionant el vincle, podeu accedir al fitxer.

Les primeres línies d'aquest fitxer tenen aquesta forma:

```
CCCATCTCTTTCTCATTCTTGGTTGAGAACACGAACTTCAGGACTTGCCTCACACTAGGGCCCATCTTT
TGTTTCCAGAAAGAAGAGGCTCTCCACACAGAGTCCCATGTACACCAGGCTGTCAACAAACATGAATTG
AATGAAGGAGTGATGGTTGGTGGAAGTGATTTAAGAAATCCTAACTGGGGAATTCAGTGAAACTTA
```

En programar aquesta funció, cal que tinguis en compte que, en aplicacions bioinformàtiques, els costos de les operacions d'edició són lleugerament diferents de les que hem vist fins ara:

- Per un salt o inserció (al patró o al text) el cost és 2.
- Per una substitució el cost és 1.
- Quan hi ha correspondència el cost és 0.

Adapta la teva funció anterior, `dna`, a aquests costos. La funció ha de rebre el patró que volem buscar i ha de retornar dos valors: la línia del fitxer on comença la cadena més semblant al patró i la distància mínima entre aquesta cadena i el patró.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def levensthein(patro, text, dlt = 2, insr = 2, subs = 1):
    # El teu codi
    return distancia_minima

def dna(patro, fitxer = 'HUMAN-DNA.txt'):
    # El teu codi
    return linia, distancia_final
```

Banc de proves: Per comprovar la teva funció, pots usar aquestes instruccions:

```
assert dna('AGATACATTAGACAATAGAGATGTGGTC') == (32,
    ↪ 11)
assert dna('GTCAGTCTGGCCTTGCCATTGGTGCCACCA') == (352,
    ↪ 11)
assert dna('TACCGAGAAGCTGGATTACAGCATGTACCATCAT') ==
    ↪ (233, 13)
```

4.6 Problema

Run Length Encoding

Run Length Encoding (RLE) és un algorisme de compressió de dades sense pèrdua que agrupa els valors repetits amb el nombre de vegades que es repeteixen per optimitzar la memòria.

Per exemple, suposem que tenim aquesta cadena:

```
BBBBBBBNNBBBBBBBBBBBBNNBBBBBBBBBBBBNNBBBBBBBB
```


Aquesta cadena es pot comprimir en la cadena B7N1B13N3B12N1B9 i s'interpreta de la manera següent: 7 caràcters blancs, 1 de negre, 13 de blancs, 3 de negres, 12 de blancs, 1 de negre i 9 de blancs. D'aquesta manera podem reconstruir la cadena original sense pèrdua d'informació.

1. Escriu una funció `rle` que donat un text de lletres ASCII (A-Z), el codifiqui usant l'algorisme RLE.

Fes servir el patró següent:

```
def rle(text):
    # El teu codi
    return text_codificat
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- En el millor dels casos, si tenim una cadena de n caràcters, quina és la mida de la cadena resultant?
- Quin seria el pitjor dels casos? En aquest cas, té sentit aquest tipus de compressió?
- Si tenim una cadena de n caràcters, quantes operacions bàsiques cal fer per comprimir-lo?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert rle('ABBBBNNNEEEEDDDZZAAAAA') ==
    ↳ 'A2B4N3E3D3Z2A5'
assert rle('BBBBBBBBBBBBBBBBBWWWWWWZAAA') ==
    ↳ 'B18W6Z1A3'
```

4.7 Problema

Subcadena més llarga sense cap caràcter repetit

1. Escriu una funció anomenada `subcadena_mes_llarga` que donada una cadena de caràcters, identifiqui la subcadena més llarga que no contingui cap caràcter repetit.

Per exemple, per a la cadena 'lacadenamesllarga', la subcadena més llarga sense cap caràcter repetit és 'namesl'.

Fes servir el patró següent:

```
def subcadena_mes_llarga(cadena):
    # El teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quines col·leccions et poden ser útils? Raona la resposta.
- Quina és la complexitat d'aquest algorisme? Mostra els càlculs fets. (Nota: idealment hauries d'aconseguir un algorisme de complexitat $O(n)$)
- Comprova manualment el resultat de la funció per a la paraula 'algorismica', el teu programa retorna el mateix?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert subcadena_mes_llarga('lacadenamesllarga') ==
↳ 'namesl'
assert subcadena_mes_llarga('mesllarga') == 'mesl'
assert subcadena_mes_llarga('aaa') == 'a'
```

4.8 Problema

Subseqüència en comú més llarga

1. Escriu una funció **basada en força bruta** tal que, donades dues cadenes de caràcters, identifiqui la longitud de la subseqüència compartida més llarga. En aquest problema definim una subseqüència com una seqüència de caràcters en el mateix ordre que a la cadena original però **no necessàriament consecutiva**. Per exemple de la paraula ACBA, podem treure'n les subseqüències AC, AB, AA, ACB, ACA, ABA, ACBA, CB, CA, CBA, BA, A, C, B, i de la paraula BRA, podem treure'n les subseqüències B, R, A, BR, BA, RA, BRA, i la subseqüència comú més llarga entre ambdues seria BA, amb 2 caràcters. Pots fer servir alguna funció del mòdul `itertools`. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
import itertools

def subseguencia_comu_v1(paraula1, paraula2):
    # El teu codi
    return num_caracters_comuns
```

Banc de proves:

```
assert subseguencia_comu_v1('STUTVST', 'TVUSTS') == 4
```

2. Si ens fixem en l'algorisme, veurem que sovint es repeteixen càlculs. El que podem fer és usar un diccionari que vagi guardant les solucions parcials ja calculades i cada cop que n'haguem de calcular una mirar el diccionari per veure si ja s'ha calculat.

Quan haguem de calcular una solució parcial. si ja hi és, mirem el resultat en comptes de calcular-la de nou, altrament, la calculem i l'emmagatzemem al diccionari.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def subsequencia_comu_v2(paraula1, paraula2):
    # el teu codi
    return num_caracters_comuns
```

Banc de proves:

```
assert subsequencia_comu_v2('STUTVST', 'TVUSTS') == 4
```

3. També podem construir la solució usant una taula que va guardant els valors de la subseqüència comú més llarga.

Per exemple, per a les paraules SUBCADENA i ABECEDARI la taula seria la següent:

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
		S	U	B	C	A	D	E	N	A
0	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	B	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2	E	0	0	0	1	1	1	2	2	2
3	C	0	0	0	1	2	2	2	2	2
4	E	0	0	0	1	2	2	3	3	3
5	D	0	0	0	1	2	2	3	3	3
6	A	0	0	0	1	2	3	3	3	4
7	R	0	0	0	1	2	3	3	3	4
8	I	0	0	0	1	2	3	3	3	4

La casella [i][j] guarda el valor de longitud de la subseqüència més llarga entre `cadena1[0:j]` i `cadena2[0:i]`.

Per exemple, la casella [2][6] guarda la longitud de la subseqüència més llarga entre `cadena1[0:6]` i `cadena2[0:2]`. Efectivament 2 és la longitud de la subseqüència més llarga entre SUBCADE i ABE, que es correspon a AE.

Fes servir el patró següent:

```
def subsequencia_comu_v3(cadena1, cadena2):
    # El teu codi
    return num_caracters_comuns
```

Banc de proves:

```
assert subsequencia_comu_v3('STUTVST', 'TVUSTS') == 4
```


Capítol 5

Dividir i Vèncer

Dividir i vèncer és una estratègia de resolució de problemes que consisteix en:

- Dividir un problema en subproblemes que són instàncies més petites (des del punt de vista de la mida de l'entrada) del mateix problema.
- Resoldre recursivament aquests subproblemes.
- Combinar adequadament les solucions dels subproblemes per trobar la solució del problema original.

Les **qüestions** que ens hem de plantejar abans de programar un algorisme seguint aquesta estratègia, són tres:

1. Com anem dividint el problema en subproblemes de manera recursiva?
2. Com aturem la recursió i donem una solució al darrer subproblema?
3. Com combinem les solucions recursives per assolir la solució del problema complet?

L'esquema general d'aquests algorismes és en molts casos el següent:

1. Inicialment, tenim un problema de mida n .
2. Reformulem el problema mitjançant la solució d' a problemes de mida n/b .
3. Combinem les respostes en un temps $O(n^d)$.

És fàcil deduir que en aquest cas, la complexitat d'aquest esquema té aquesta forma:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

Aquest tipus de recurrència té una **solució tancada**, que està enunciada al **Teorema Màster**. És a dir, podem saber la complexitat dels algorismes recursius coneixent el valor dels paràmetres a, b i d .

Teorema (Master): Donada l'expressió

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

amb constants $a > 0$, $b > 1$, i $d \geq 0$, la complexitat d'un algoritme recursiu amb aquest tipus de recurrència pot ser de tres tipus:

1. $T(n) = O(n^d)$, si $d > \log_b(a)$
2. $T(n) = O(n^d \log(n))$, si $d = \log_b(a)$
3. $T(n) = O(n^{\log_b(a)})$, si $d < \log_b(a)$

Observa que, en el cas que d sigui un valor elevat, aquest cost (el de recombinar les solucions) domina la resta d'operacions. En el cas tercer, en canvi, el cost dominant és $\log_b a$ que serà un valor gran quan tinguem molts subproblemes i no es redueixin gaire en cada divisió. En el segon cas, ambdues complexitats estan equilibrades.

Per exemple, suposem que tenim un problema amb les següents característiques:

- El problema es pot dividir en dos subproblemes ($a = 2$).
- Cadascun dels problemes processa la meitat de les dades originals, és a dir, el problema es divideix en dos problemes iguals ($b = 2$).
- Suposem que la reconstrucció es pot fer en temps quadràtic $O(n^2)$ ($d = 2$).

Com que ens trobem en el cas 1, ja que $2 > \log_2(2)$, segons el teorema Master la complexitat d'aquest algorisme és $O(n^2)$.

5.1 Problema

Suma d'una llista

1. Escriu una funció recursiva que sumi tots els elements d'una llista. Digues quin és el cas base de l'algorisme i calcula'n la seva complexitat.

Fes servir el patró següent:

```
def suma_llista(llista):
    # El teu codi
    return suma
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Tot i que es pot enfocar el problema de diferents maneres, pensa com si ho estiguéssis fent amb un bucle `for`, és a dir, agafant un element cada cop.
- Amb quins paràmetres hem de tornar a cridar la funció? Recorda que el problema ha de fer-se cada cop més senzill fins a arribar al cas base.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert suma_llista([1,2,3,4]) == 10
assert suma_llista([-1,-2,0,1,2]) == 0
```

5.2 Problema

Nombre no repetit

1. Donada una llista de nombres en la que cada nombre apareix dues vegades consecutives (una darrera l'altra) i només hi ha un element que surt una sola vegada, escriu una funció que trobi aquest valor desaparellat. Pensa en una solució que resolgui el problema amb una complexitat menor a $O(n)$. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def busca_unic (llista):
    # El teu codi
    return num
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Et recorda algun algorisme d'ordenar i cerca? Com s'ha d'adaptar?
- Pensa exemples senzills i observa els índexs de cada element. Mira si identifies algun patró que et pugui ajudar a resoldre el problema.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert busca_unic([ 1, 1, 2, 4, 4, 5, 5, 6, 6 ]) == 2
```

5.3 Problema

Seqüència capicua més llarga

1. Escriu una funció que donada una cadena trobi la llargada de la subseqüència capicua més llarga de manera òptima. Abans, però, observa la següent solució, que usa un algorisme per força bruta:

```
def subs_capicua(cadena):
    # print(cadena)
    i = 0
    j = len(cadena) - 1
    if j == 0:
        return 1
```

```

    if cadena[i] == cadena[j]:
        return subs_capicua(cadena[1:-1]) + 2
    else:
        return max(subs_capicua(cadena[1:]),
                    subs_capicua(cadena[: -1]))

subs_capicua("APXPRABARXP")
>>> 9

```

Descomenta la funció `print()` de la primera línia de la funció i observa quines cadenes avalua la funció. Com pots veure, la solució de força bruta repeteix molt dels càlculs. Implementa un diccionari per guardar les solucions calculades i no les tornis a calcular.

Fes servir el patró següent:

```

def subs_capicua_opt(cadena, solucions = {}):
    # El teu codi
    return subsequencia

```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Observa que es tracta d'un algorisme recursiu. Mostra quin és el cas base i com s'avança en la recursió.
- Quina complexitat té l'algorisme que hem presentat? I quina complexitat tindrà l'algorisme millorat?
- Quina informació hem de guardar al diccionari per evitar repetir execucions?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert subs_capicua_opt('APXPRABARXP') == 9
```

5.4 Problema

El valor més petit que falta

1. Donada una llista ordenada d'enters no-negatius (inclòs el 0), troba el valor més petit que hi falta. En cas que no falti cap valor, la teva funció ha de retornar -1.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```

def el_mes_petit(llista):
    # El teu codi
    return valor

```


Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quins índexs ocupen els següents enters a la llista [0, 1, 2, 3, 4, 7, 12]? Quin és l'índex del valor 0? I del 4? I del 7? Quin seria el valor que hauria de retornar la funció en aquest cas? Identifiques algun patró que et pugui ajudar a resoldre el problema?
- Pots relacionar aquest problema amb un algorisme de dividir i vèncer? Quina complexitat té? Compara aquesta complexitat amb la solució per força bruta.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert el_mes_petit([0, 1, 2, 3, 4, 7, 12]) == 5
assert el_mes_petit([1, 2, 3, 4, 7, 12]) == 0
assert el_mes_petit([0, 1, 2, 3, 4]) == -1
```

5.5 Problema

Quantitat d'1s a una llista ordenada de nombres binaris

1. Donada una llista formada només pels nombres 0 i 1 i ordenada, escriu una funció que calculi el nombre d'uns (nombre 1) que conté la llista.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def quants_1(llistaBinaria):
    # El teu codi
    return quantitat
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Podem aplicar algun dels algorismes de dividir i vèncer? Com s'ha d'adaptar?
- Hi ha algun cas de solució directa?
- Escriu una versió en la qual llegeixis les llistes d'un fitxer *input.txt*. Aquest fitxer ha de contenir les llistes de nombres, cada una en una fila diferent (utilitza les funcions `open()` i `readlines()` per llegir). El programa ha d'escriure el resultat de cada execució en un fila diferent d'un fitxer diferent, *output.txt*.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert quants_1([0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]) == 5
assert quants_1([0, 0, 0, 0, 1, 1]) == 2
assert quants_1([0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]) == 0
assert quants_1([1, 1, 1]) == 3
```

5.6 Problema

Negatius al davant *

1. Escriu una funció no recursiva anomenada **negatius** tal que donada una llista de nombres enters modifiqui la llista per col·locar els nombres negatius al principi de la llista. Observa que aquesta funció no ha de retornar res, només modifica la llista d'entrada.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def negatius(llista):
    # El teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Et recorda algun dels algorismes de dividir i vèncer? Com s'ha d'adaptar en aquest cas?
- Quins canvis hauries de fer si no volguéssim modificar la llista inicial?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
llista = [1, -2, 3, -4, -3, 5, 6]
negatius(llista)
llista
>>> [-3, -2, -4, 3, 1, 5, 6]
# Aquest resultat és un d'entre molts possibles,
# la única condició és que els negatius
# estiguin al principi de la llista.
```

5.7 Problema

Zeros al final

1. Donada una llista d'enters, escriu una funció que desplaci tots els zeros de la llista al final. No alteris la resta d'elements de la llista. Aquesta funció no ha de retornar cap valor, ha de modificar la llista d'entrada.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def zeros_final(llista):
    # El teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin algorisme hem d'aplicar? Com l'hem d'adaptar per a que no ens canviï tots els valors?
- Modifica l'algorisme per moure tots els zeros al principi. Aquest nou algorisme té la mateixa complexitat que el primer?
- Què hauríem de fer si no volguéssim modificar la llista d'entrada?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa la comprovació següent:

```
llista = [3, 1, 0, 5, 0, 0, 2, 7, 8]
zeros_final(llista)
assert llista == [3, 1, 5, 2, 7, 8, 0, 0, 0]
```

5.8 Problema

Rotacions

1. Donada una llista ordenada de nombres enters, definim una **rotació** com a l'operació de moure elements del final de la llista al principi. Escriu una funció, que, donada una llista, calculi quantes rotacions s'han aplicat prèviament. Podem assumir que la llista no conté cap element duplicat. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def rotacions(llista):
    # El teu codi
    return num_rotacions
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Analitza l'exemple següent manualment: `rotacions([9, 10, 2, 5, 6, 8])`. Quin és el resultat esperat de la funció?
- Calcula la complexitat de l'algorisme.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert rotacions([9, 10, 2, 5, 6, 8]) == 2
assert rotacions([3, 5, 10, 12, 1, 2]) == 4
assert rotacions([20, 2, 3, 7, 15, 18]) == 1
```

5.9 Problema

Valor igual al seu índex

1. Donada una llista L de n nombres naturals ordenats de manera creixent, crea una funció, `existeix`, que, usant l'estratègia de dividir i vèncer comprovi si existeix algun element de la llista que compleixi el següent:

$$L[i] = i, \quad i \in \{0, \dots, n-1\}$$

L'algorisme proposat ha de tenir complexitat $O(\log(n))$.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def existeix(llista):
    # El teu codi
    return bool_existeix
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin algorisme hem d'aplicar? Quin cost té aquest algorisme? Com s'ha d'adaptar?
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `existeix([0, 1, 2, 7])`.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert existeix([1, 4, 5, 6, 7]) == False
assert existeix([0, 1, 2, 7]) == True
assert existeix([1, 1, 1, 3]) == True
```

5.10 Problema

Comptador d'inversions en una llista *

1. Volem ordenar una llista A de nombres enters en ordre creixent, és a dir, $A[i] < A[j]$ per a qualsevol $i < j$.

Definim **inversió**, com el procés d'intercanviar dos valors de la llista que no estiguin en el seu ordre natural, és a dir, que el de l'esquerra sigui major que el de la dreta. Concretament, diem que $(A[i], A[j])$ és una inversió, si $A[i] > A[j]$ i $i < j$. Escriu una funció que calculi el nombre d'inversions dins una llista i que digui quines són.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def comptador_inversions(llista):
    # El teu codi
    return numInversions
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Justifica la solució que han de retornar les expressions següents:

```
comptador_inversions([1, 8, 6, 4, 5])
comptador_inversions([4, 6, 1, 3, 9, 4])
comptador_inversions([1, 2])
```

Quines són les inversions dels exemples anteriors?

- Aquest problema et recorda algun dels algorismes que hem vist de dividir i vèncer? Quin? Com cal adaptar-lo?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert comptador_inversions([3, 1, 5, 2, 7, 8, 4]) == 6
```

Les inversions són: (3, 1), (3, 2), (5, 2), (5, 4), (7, 4) i (8, 4)

5.11 Problema

Elements pic

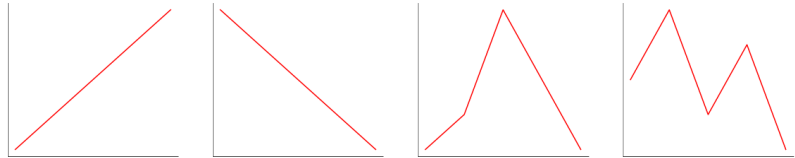
1. Donada una llista d'enters en la que mai trobem dos elements consecutius del mateix valor, fes un programa que trobi, si existeix, un dels seus **elements pic**. Diem que un enter de la llista és un element pic si els seus veïns immediats són menors que ell.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def elements_pic(llista):
    # El teu codi
    return pic
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Pensa en els diferents casos en que ens podem trobar i raona quin seria l'element pic en cada un d'ells. Per exemple, troba un element pic per a les funcions següents:



Exemples de seqüències de valors i elements pic.

- Raona si tots els casos possibles tenen, com a mínim, un element pic.
- Imagina't que mires l'element central de la llista, on està el pic? Com ho saps? Quin serà el següent pas?
 - Pensa si hi ha algun algorisme de dividir i vèncer aplicable en aquest cas.
 - Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `elements_pic([3, 1, 5, 2, 7, 8])`
 - Calcula la complexitat de l'algorisme amb el teorema del màster.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
# Observa que aquesta llista conté tres valors pics:
# el 3, el 5 i el 8. L'algorisme només n'ha de
# tornar un. És per això que comprovem que el
# valor retornat estigui dins la llista [3, 5, 8].
assert elements_pic([3, 1, 5, 2, 7, 8]) in [3, 5, 8]
assert elements_pic([9, 5, 2]) == 9
assert elements_pic([1, 2, 7, 8]) == 8
```

5.12 Problema

Divisió d'una llista en tres parts segons un valor donat, v

1. Escribe un algorisme que a partir d'una llista A i un valor v , modifiqui l'ordenació dels elements tal que al principi esitiguin tots els elements igual a v . A continuació tots els elements més petits que v i finalment tots els elements més grans que v . Qualsevol d'aquestes parts pot estar buida.

Atenció: No creis cap llista nova per resoldre el problema, modifica únicament la llista original.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def parts_llista(llista, valor):
    # El teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Hi ha algun dels algorismes de dividir i vèncer que s'assembli a aquest problema? En què canvia?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa la comprovació següent:

```
llista = [6, 2, 9, 8, 7, 4, 3, 7, 1, 9, 7, 1]
parts_llista(llista, 7)
assert(llista) == [7, 7, 7, 6, 2, 4, 3, 1, 1, 9, 8, 9]
```

5.13 Problema

Primera i darrera ocurrència d'un nombre donat en una llista ordenada

1. Donada una llista d'enters i un nombre, escriu un algorisme que retorni la posició de la primera i darrera ocurrència d'aquest nombre a la llista. Si el nombre no apareix, el programa ha de retornar -1,-1 com a índexos. Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def primera_darrera_ocurrencia(llista, nombre):
    # El teu codi
    return primera_ocurrencia, darrera_ocurrencia
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Tenint en compte que la llista està ordenada, podem usar algun algorisme de dividir i vèncer? com cal adaptar-lo?
- Si sapiguéssim que el nombre apareix menys de 5 vegades, o si, en canvi, sapiguéssim que el nombre apareix més de 30, com podria variar la solució?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert primera_darrera_ocurrencia([3, 5, 5, 5, 6, 6,
    ↪ 8, 8, 9, 9, 9], 3) == (0,0)
assert primera_darrera_ocurrencia([3, 5, 5, 5, 6, 6,
    ↪ 8, 8, 9, 9, 9], 9) == (8,10)
assert primera_darrera_ocurrencia([3, 5, 5, 5, 6, 6,
    ↪ 8, 8, 9, 9, 9], 4) == (-1,-1)
```

5.14 Problema

Parelles que sumen un valor

- Donada una llista ordenada d'enters sense cap repetició, L , de longitud n , i un valor s , troba totes les parelles de nombres a la llista que sumin aquest valor. És a dir, troba el següent conjunt:

$$\{(L[i], L[j]) \mid i < j, L[i] + L[j] = s, i, j \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

L'algorisme proposat ha de tenir complexitat $O(n)$.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def sumatori_parelles_ord(llista, valorSuma):
    # El teu codi
    return llista_tuples
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Què sabem si la suma del primer i l'últim element de la llista és inferior a s ? I si sumen més? Pensa en un recorregut que només faci $\frac{n}{2}$ passos.
- Explica els passos que fa l'algorisme en el cas `sumatori_parelles_ord([1, 2, 3, 5, 7, 8], 10)`
- Calcula la complexitat de l'algorisme, és $O(n)$?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert sumatori_parelles_ord([1, 2, 3, 5, 7, 8], 10)
↪ == [(2, 8), (3, 7)]
```

5.15 Problema

Menor i major relatiu

- Donada una llista de nombres enters positius i ordenats en ordre creixent, L , i un valor k , escriu una funció que trobi dins la llista L el valor immediatament més petit a k i el valor immediatament més gran a k . En qualsevol dels dos casos, retorna -1 si aquest valor no existeix.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def menor_major_relatiu(nums, k):
    # El teu codi
    return menor, major
```


Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Podem aplicar algun dels algorismes de dividir i vèncer? Quin cost té l'algorisme original? Com s'ha d'adaptar?
- Si no ho has fet ja, prova d'aplicar l'estratègia de dividir i vèncer. Quins son els subproblemes en que podem dividir el problema principal?
- Calcula la complexitat de l'algorisme.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert menor_major_relatiu([1, 4, 6, 8, 9], 3) == (1,4)
assert menor_major_relatiu([1, 4, 6, 8, 9], 4) == (4,4)
assert menor_major_relatiu([1, 4, 6, 8, 9], 5) == (4,6)
assert menor_major_relatiu([1, 4, 6, 8, 9], 10) ==
↳ (9,-1)
```

5.16 Problema

Multiplicació de polinomis *

1. Escriu una funció, `multiplicacio_polinomis`, que calculi la multiplicació de dos polinomis. Cada polinomi es descriurà com una tupla amb els coeficients corresponents ordenats de major a menor grau. Per exemple la tupla $(3, 1, 4)$ correspon al polinomi $3x^2 + x + 4$.

La funció que escriguis rebrà dues tuples com a entrada i retornarà una tupla corresponent al polinomi resultant després de fer la multiplicació.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def multiplicacio_polinomis(polinomi1, polinomi2):
    # El teu codi
    return mult_polinomis
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Posa un exemple senzill i realitza la operació manualment.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert multiplicacio_polinomis((1, 2, 3, 4), (4, 3,
↳ 2, 1)) == [4, 11, 20, 30, 20, 11, 4]
```

5.17 Problema

Patró binari

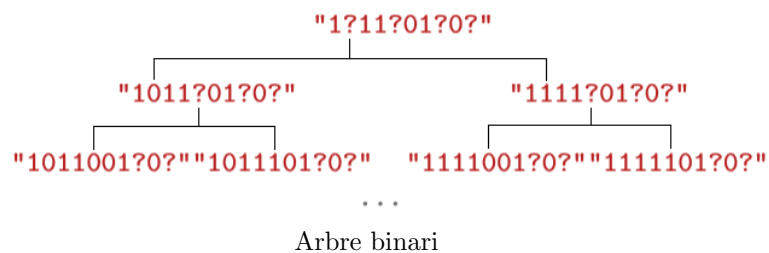
1. Donat un patró binari (format per zeros i uns) en el que alguns dígitos s'han substituït pel caràcter '?', troba totes les possibles combinacions de nombres binaris que es poden obtenir reemplaçant el caràcter '?' amb 0 o 1.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def patro_binari(patro):
    # El teu codi
    return nova_llista
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Si el patró és un string podrem manipular els caràcters? Quin altre tipus de dades podem usar per manipular el patró?
- Enfoca el problema com un algorisme recursiu. Identifica el cas base. Com podem recuperar totes les possibles combinacions quan la recursió ha acabat?
- Intenta resoldre manualment l'exemple següent, dibuixant la solució com un arbre. A cada nivell, només es modifica un dígit.



Banc de proves: Entre d'altres comprovacions, pots provar d'executar el codi següent. Fixa't que les combinacions no tenen perquè estar en el mateix ordre que les del teu programa, és per això que fem l'equivalència amb la funció `set()` que ens permet definir un conjunt sense cap ordre concret.

```
assert set(patro_binari('1?11?01?0?')) ==
↳ set(['1011001000', '1011001001', '1011001100',
↳ '1011001101', '1011101000', '1011101001',
↳ '1011101100', '1011101101', '1111001000',
↳ '1111001001', '1111001100', '1111001101',
↳ '1111101000', '1111101001', '1111101100',
↳ '1111101101'])
```

5.18 Problema

Implementació eficient de la potència

1. Donats dos nombres enters x i y , amb $y > 0$, escriu un algorisme recursiu que calculi x^y de manera eficient. No utilitzis cap funció específica de Python per fer aquesta operació.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def potencia_eficient(base, exponent):  
    # El teu codi  
    return potencia
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Utilitza les propietats dels exponents per afrontar el problema. Pots distingir els casos d'exponent parell i exponent senar.
- Tenint en compte que aquest problema es resol per recursivitat, indica quin és el cas base i com avancem en la recursió.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert potencia_eficient(2, 10) == 1024  
assert potencia_eficient(3, 4) == 81  
assert potencia_eficient(5, 0) == 1  
assert potencia_eficient(-2, 3) == -8
```

5.19 Problema

Karatsuba

1. Escriu una funció recursiva, `karatsuba`, que calculi la multiplicació pel [mètode de Karatsuba](#) en base 10 de dos nombres. Apunta la complexitat de les operacions involucrades i explica quantes vegades es crida a l'executar `karatsuba(1000, 1050)`.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def karatsuba(x,y):  
    # El teu codi  
    return prod
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- En què es basa aquest algorisme per dividir cada nombre en dos termes?
- Com separaries un nombre de quatre dígitos en base 10 en el valor de centenes i en el de desenes usant la divisió i/o el mòdul? Ex. 1050 es divideix en 10 centenes i 50 desenes

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa la comprovació següent:

```
assert karatsuba(1100,4050) == 4455000
```

5.20 Problema

Cerca binària

La **cerca binària** és el procediment de buscar un element K en una llista ordenada. Aquest algorisme té una complexitat $O(\log_2(n))$. Per una llista de 1.000.000 elements, només cal fer 20 comparacions!

Nota: Si tenim una llista desordenada de mida n i només hem de buscar uns quants elements, apliquem una cerca exhaustiva. Però si hem de fer moltes cerques (de l'ordre de n), serà més eficient ordenar-la primer i fer cerca binària dels elements després.

1. **Cerca binària:** Donada una llista d'enters ordenada i un valor K , escriu una funció recursiva de complexitat $O(\log_2(n))$ que retorni si el valor K pertany a la llista.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def cerca_binaria(llista, K):
    # El teu codi
    return existeix
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin és el cas base de l'algorisme? És a dir, quin és l'últim cas que s'executarà?
- Pensa que la llista ha d'estar ordenada i que, per tant, només cal comprovar el valor central i una de les dues bandes de la llista.
- Quins casos has de tenir en compte? Què passa si la llista és buida?
- Quantes operacions fa l'algorisme pel cas `cerca_binaria([2, 4, 8, 13, 21, 57], 21)`?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert cerca_binaria([2, 4, 8, 13, 21, 57], 10) == False
assert cerca_binaria([2, 4, 8, 13, 21, 57], 21) == True
```

2. **Cerca a llista quasi-ordenada:** Donada una llista d'enters quasi-ordenada, en la que un element pot estar posicionat un índex per sota o per sobre de la seva posició correcta, i un valor, troba la posició d'aquest valor.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def cerca_quasi_ord(x, nums, low, high):  
    # El teu codi  
    return posicio
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- En què es diferencia aquest algorisme del bàsic de cerca binària?
- Quantes comparacions es fan en el cas pitjor?
- Calcula la complexitat de l'algorisme.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert cerca_quasi_ord(x = 5,  
                        nums = [2, 1, 3, 5, 4, 7, 6, 8, 9],  
                        low = 0, high = 9) == 3
```

5.21 Problema

Nombres estrictament creixents *

1. Donat un nombre enter entre 1 i 9, N , escriu una funció que trobi tots els nombres amb N dígit, en els quals els dígit apareixen en ordre creixent. Per ex. 246 seria un nombre de 3 dígit que compliria aquesta condició, però 436 no.

Nota: *Podeu pensar en una solució recursiva que vagi generant els números de manera incremental, és a dir, començar per pocs números fins a arribar a N .*

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def estrictament_creixents(N):  
    # El teu codi  
    return llista
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quina solució retornarà el programa per a $N=9$? I per a $N=2$?
- Imaginem que volem construir un número de ($N=7$) dígits i que ja tenim escrit el nombre fins al dígit 5è (per exemple, 12345), quins passos hem de fer a continuació?
- Quantes combinacions hi ha per a cada valor de N diferent? Revisa si cal la teoria de combinatòria.

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert estrictament_creixents(8) == [12345678,
↳ 12345679, 12345689, 12346789, 12356789, 12456789,
↳ 13456789, 23456789]
```

5.22 Problema

Ordenar llista aparellada

1. Fes un programa que ordeni una llista on els números apareixen duplicats i un darrere l'altre. Per exemple, la llista [1, 1, 4, 4, 3, 3, 5, 5]. Prova els algorismes d'ordenació `quicksort` i `mergesort`. Calcula la complexitat d'aquests dos algorismes i mesura el temps d'execució del teu programa per cadascun.

Observa que en aquest cas, no es demana que el programa retorni res, només ha d'ordenar la llista d'entrada.

No utilitzis funcions d'ordenació específiques de Python.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def ordenar_parelles(llista):
    # el teu codi
```

Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Quin dels dos algorismes proposats és més eficient?
- Comenta els resultats del càlcul de temps i de costos amb llistes molt llargues.
- En el cas que no volguéssim modificar la llista original, com ho fariem per retornar una llista nova ordenada?

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa la comprovació següent:

```
llista = [3,3,1,1,5,5,0,0]
ordenar_parelles(llista)
assert llista == [0,0,1,1,3,3,5,5]
```

5.23 Problema

Sumatori parcial màxim

L'objectiu d'aquest problema és trobar la subseqüència de suma màxima dins una llista. Aquest problema es pot resoldre de maneres molt diverses. A continuació mostrem tres aproximacions amb complexitats $O(n^2)$, $O(n \log(n))$ i $O(n)$ respectivament.

1. Resol el problema del **sumatori parcial màxim** usant un algorisme de força bruta, és a dir, en aquest cas, de complexitat $O(n^2)$.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def sumatori_parcial_maxim_forca_bruta(llista):
    # El teu codi
    return max_sum
```

2. Resol el problema del **sumatori parcial màxim** usant un algorisme que implementi l'estratègia de dividir i vèncer. Demostra que la complexitat d'aquest algorisme és $O(n \log(n))$.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def sumatori_parcial_divider_vencer(llista):
    # El teu codi
    return max_sum
```

3. Resol el problema del **sumatori parcial màxim** usant l'algorisme que es detalla a continuació.

L'**Algorisme Kadane** consisteix a recórrer la llista una única vegada. Durant aquesta iteració necessitem emmagatzemar dos valors. Per una banda, la suma parcial de tots els elements anteriors (acum) i, per altra banda, la suma màxima que hem trobat fins al moment (màxim). Si en un moment determinat la suma parcial esdevé negativa, descartem la suma parcial i reiniciem el valor de la suma parcial.

Veiem-ne un exemple. Considerem la llista [1, 2, -6, 4, -1, 2, 1, -5].

- Inicialitzem les dues variables `acum=0`, `maxim=0`
- Posició 0: `acum=1`, `maxim=1`
- Posició 1: `acum=3`, `maxim=3`. Hem sumat el segon element, 2, i hem actualitzat el màxim.
- Posició 2: `acum=0`, `maxim=3`. Observa que $3-6 = -3 < 0$. L'Algorisme de Kadane ens indica que, en el moment que el valor acumulat és negatiu, es descarta la variable que acumula la suma parcial. Observa que tampoc actualitzem la variable del màxim.
- Posició 3: `acum=4`, `maxim=4`
- Posició 4: `acum=3`, `maxim=4` No actualitzem el màxim ja que el valor és inferior.
- Posició 5: `acum=5`, `maxim=5`
- Posició 6: `acum=6`, `maxim=6`
- Posició 7: `acum=1`, `maxim=6`

Observa que amb un sol recorregut de la llista, hem trobat la suma de la subsequència de suma màxima. Revisa la lògica de l'exemple i de l'algorisme a fons abans de començar a programar.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def sumatori_parcial_kadane(llista):
    # El teu codi
    return max_sum
```

Banc de proves: Defineix diversos exemples per comprovar la teva solució. Entre d'altres, executa les comprovacions següents:

```
assert sumatori_parcial_maxim_forca_bruta([1, 2, -6,
↪ 4, -1, 2, 1, -5]) == 6
assert sumatori_parcial_divider_vencer([-3, 1, -5, 2,
↪ 7, 8]) == 17
assert sumatori_parcial_kadane([1, 2, -5, 3, 6, -2,
↪ 4]) == 11
```

5.24 Problema

Xifres i lletres

Considera una llista de *strings* amb dos tipus de dades diferents: cadenes de lletres i cadenes de nombres, com ara la llista ['aa', '123', 'bc', '98']. L'objectiu d'aquest problema és ordenar aquesta llista de manera que les cadenes formades per nombres quedin al capdavant. Aquest algorisme no ha de retornar res, només ha de modificar la llista d'entrada.

1. Escriu una funció `xifres_lletres_ord_sel` que resolgui el problema usant el mètode d'**Ordenació per Selecció**. Demostra que la complexitat de l'algorisme que has escrit és $O(n^2)$.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def xifres_lletres_ord_sel(llista):
    # El teu codi
```

2. Escriu una funció `xifres_lletres_ord_QS` que resolgui el problema usant el mètode de **Quicksort**. Demostra que la complexitat de l'algorisme que has escrit és $O(n \log(n))$.

Fes servir aquesta plantilla per escriure el teu codi:

```
def xifres_lletres_ord_QS(llista):
    # El teu codi
```


Reflexions previes: Fes aquestes reflexions abans de començar a programar:

- Ens cal diferenciar entre els dos tipus de cadenes d'entrada? Executa la instrucció `"A" < "3"` en python. Quin sentit té que retorni aquest resultat?
- Quin dels dos algorismes és més eficient? Calcula'n el temps d'execució per a llistes molt grans.

Banc de proves: Pots provar el següent exemple. Recorda però, que l'únic requeriment és que les cadenes numèriques estiguin al capdavant de la llista, així que existeixen moltes combinacions correctes del resultat.

```
llista = ["456", "789", "abc", "123", "tzu", "870", "zzz"]
xifres_lletres_ord_QS(llista)
llista
>>> ['456', '789', '870', '123', 'tzu', 'abc', 'zzz']
```


Apèndix A

Solucions de problemes seleccionats

Solució del problema 2.2, pàgina 14

1. Solució futval2:

```
def futval2(inicial, anys, interesPerCent, comissioPerCent):  
    """  
        Aquest programa calcula el valor d'una inversió  
  
        Parameters  
        -----  
        inicial: float  
            Inversio inicial  
        anys: int  
            Nombre d'anys  
        interesPerCent: float  
            Interes anual en decimal  
        comissioPerCent: float  
            Comissio del banc  
  
        Returns  
        -----  
        diners: float  
    """  
  
    for i in range(anys):  
        inicial = inicial * (1 + interesPerCent)  
  
    return inicial - inicial * comissioPerCent
```

Banc de proves:

```
assert abs(futval2(200,10,0.8,0.3) - 49986.54) < 0.1
assert abs(futval2(100,20,0.8,0.3) - 8923765.35) <
↳ 0.1
assert abs(futval2(100,10,0.6,0.3) - 7696.58) < 0.1
assert abs(futval2(100,10,0.8,0.5) - 17852.33) < 0.1
```

Solució del problema 2.3, pàgina 15**1. Solució prou_cerveces:**

```
def prou_cerveces(numCerveces, esCapDeSetmana):
    """
    Aquest programa prediu com anirà la festa en funció de les
    ↳ cerveces.

    Parameters
    -----
    numCerveces: int
    esCapDeSetmana: bool

    Returns
    -----
    None
    """

    if numCerveces < 50:
        return 'Fracàs'
    elif esCapDeSetmana or numCerveces <= 100:
        return 'Éxit'
    else:
        return 'Fracàs'
```

Comentaris:

- La combinació d'if-elses minimitza les comparacions a fer.

Banc de proves:

```
assert prou_cerveces(75, False) == 'Éxit'
assert prou_cerveces(75, False) == 'Éxit'
assert prou_cerveces(125, False) == 'Fracàs'
assert prou_cerveces(125, True) == 'Éxit'
assert prou_cerveces(25, False) == 'Fracàs'
assert prou_cerveces(25, True) == 'Fracàs'
```

2. Solució nota:

```
def nota(num):
    """
```

Aquesta funció retorna la qualificació d'un alumne.

Parameters

num: float

Returns

qualificació: string

"""

if num < 5: qualificacio = 'Suspès'

elif num < 7: qualificacio = 'Aprovat'

elif num < 9: qualificacio = 'Notable'

elif num < 10: qualificacio = 'Excel·lent'

else: qualificacio = 'Matrícula d\'honor'

return qualificacio

Banc de proves:

```
assert nota(0.9) == 'Suspès'
assert nota(5.9) == 'Aprovat'
assert nota(7.9) == 'Notable'
assert nota(9.9) == 'Excel·lent'
assert nota(10) == 'Matrícula d\'honor'
```

Solució del problema 2.11, pàgina 22

1. Solució suma_quadrats:

```
def suma_quadrats(n = 100):
    """
```

*Aquesta funció calcula la diferència entre la suma dels
→ quadrats i els quadrat de la suma.*

Parameters

n: int

Returns

diff: int

"""

sumSquares = 0

for i in range(1, n + 1):

```
        sumSquares += i

sumSquares = sumSquares ** 2

squaresSum = 0
for i in range(1, n+1):
    squaresSum += i ** 2

return (sumSquares - squaresSum)
```

Solució suma_quadrats (List comprehension):

```
def suma_quadrats(n = 100):
    """
    Aquesta funció calcula la diferència entre la suma dels
    → quadrats i els quadrat de la suma.

    Parameters
    -----
    n: int

    Returns
    -----
    diff: int
    """

    sumSquares = sum([i for i in range(1, n+1)]) ** 2
    squaresSum = sum([i ** 2 for i in range(1, n+1)])
    return (sumSquares - squaresSum)
```

2. Solució suma_quadrats:

```
def sumQuadratsLineal(n = 100):
    """
    Aquesta funció calcula la diferència entre la suma dels
    → quadrats i els quadrat de la suma.

    Parameters
    -----
    n: int

    Returns
    -----
    diff: int
    """

    suma_quadrats = 0
    quadrats_suma = 0

    for i in range(1, n+1):
        suma_quadrats += i**2
        quadrats_suma += i
```

```
return quadrats_suma**2 - suma_quadrats
```

Solució del problema 2.13, pàgina 24

1. Solució perfecte:

```
def perfecte(num):
    """
    Aquesta funció comprova si un nombre es perfecte.

    Parameters
    -----
    num: int
        El número que es vol comprovar

    Returns
    -----
    b: bool
        Si el nombre d'entrada és un nombre perfecte

    """
    # Aquesta variablev 'suma' ens serveix per emmagatzemar la
    ↪ suma
    # de tots els divisors del nombre d'entrada 'num'
    suma = 0
    for div in range(1,num): # Recorrem els possibles
    ↪ candidats a ser divisors
        if num%div == 0:      # Comprovem si el nombre 'div'
        ↪ divideix el nombre 'num'
            suma = suma + div # En cas afirmatiu, l'afegim a
            ↪ la suma
    b = (suma == num)        # 'b' és una variable de tipus
    ↪ bolean (True/False)
    return b
```

Solució del problema 3.3, pàgina 31

1. Solució digits:

```
def digits(xifra):
    """
    Aquesta funció retorna el nombre de digits d'un natural.

    Parameters
    -----
    xifra: int
        Un nombre natural.

    Returns
    -----
    numDigits: int
        Quantitat de digits que té xifra
```

```
"""
numDigits = len(str(xifra))
return numDigits
```

2. Solució suma_digits:

```
def suma_digits(num, potencia):
    """
    Aquesta funció calcula la suma dels digits d'un número
    ↪ elevat a una potència.

    Parameters
    -----
    num: int
        Base
    potencia: int
        Exponent

    Returns
    -----
    suma: int
        Suma dels digits
    """

    valor = str(num ** potencia)

    digits = []
    for digit in valor:
        digits.append(int(digit))

    return sum(digits)
```

Solució suma_digits List comprehension:

```
def suma_digits(num, potencia):
    """
    Aquesta funció calcula la suma dels digits d'un número
    ↪ elevat a una potència.

    Parameters
    -----
    num: int
        Base
    potencia: int
        Exponent

    Returns
    -----
    suma: int
        Suma dels digits
    """
```



```

valor = str(num**potencia)

return sum([int(digit) for digit in valor])

```

Solució del problema 3.4, pàgina 33

1. Solució resta_binaria:

```

def resta_binaria(op1, op2):
    """
    Aquesta funció calcula la resta binaria donat dos nombres.

    parameters
    -----
    op1: llista d'enters
    op2: llista d'enters

    Returns
    -----
    resultat: llista d'enters
    """
    def sumaBinaria(num1, num2):
        result = []
        add = 0
        for n1, n2 in zip(num1[::-1], num2[::-1]):
            aux = n1 + n2 + add
            add, aux = aux//2, aux % 2
            result.insert(0, aux)
        if aux > 1:
            result.insert(0, add)
        return result

    def c1(nombreBinari):
        return [1 if num == 0 else 0 for num in nombreBinari]

    def c2(nombreBinari):
        return sumaBinaria(c1(nombreBinari), [0,0,0,1])

    return sumaBinaria(op1, c2(op2))

```

Solució del problema 3.8, pàgina 39

1. Solució eratostenes i primer:

```

from math import sqrt

def eratostenes(n) :
    """
    Aquesta funció implementa l'algorisme d'Eratòstenes per
    ⇨ cercar tots els nombres primers fins a n.

    Parameters

```

```
-----  
n: int  
  
Returns  
-----  
llista_primers: list  
"""  
sieve = [True for j in range(2,n+1)]  
for j in range(2,int(sqrt(n))+1) :  
    i = j-2  
    if sieve[i]:  
        for k in range(j*j,n+1,j) :  
            sieve[k-2] = False  
llista_primers = [j for j in range(2,n+1) if sieve[j-2]]  
return llista_primers  
  
def primer(n):  
    """  
    Aquesta funció retorna el l'ennesim primer.  
  
    Parameters  
    -----  
    n: int  
  
    Returns  
    -----  
    primer: int  
    """  
    x = n * 50  
    sol = eratostenes(x)  
    return(sol[n-1])
```

Comentaris:

- Hem usat descomposició de funcions
- En primer lloc creem la llista de primers amb l'algorisme d'Erastótenes
- Després agafem el membre 'n'

Solució del problema 3.11, pàgina 46

1. Solució fibonacci_matricial:

```
def fibonacci_matricial(N):  
    """  
    Aquesta funció retorna els n primers termes de la sèrie  
    de Fibonnaci calculats de manera matricial.  
  
    Parameters  
    -----  
    N: int  
  
    Returns
```

```

-----
serie: list
"""

def multiply(X, Y):
    result = [[0,0], [0,0]]
    # iterate through rows of X
    for i in range(len(X)):
        # iterate through columns of Y
        for j in range(len(Y[0])):
            # iterate through rows of Y
            for k in range(len(Y)):
                result[i][j] += X[i][k] * Y[k][j]
    return result

serie = [0, 1]
init = [[1, 1], [1, 0]]
result = [[1, 1], [1, 0]]
for _ in range(N-2):
    serie.append(result[0][0])
    result = multiply(result, init)
return serie

```

Solució del problema 4.2, pàgina 52

1. Solució aviacio:

```

def aviacio(cadena):
    """
    Aquesta funció converteix una cadena d'entrada a l'alfabet
    fonètic.

    Parameters
    -----
    cadena: string

    Returns
    -----
    traducció: string
    """
    argot = {
        'A': 'Alpha', 'B': 'Bravo', 'C': 'Charlie', 'D':
        ↪ 'Delta', 'E': 'Echo',
        'F': 'Foxtrot', 'G': 'Golf', 'H': 'Hotel', 'I':
        ↪ 'India', 'J': 'Juliet',
        'K': 'Kilo', 'L': 'Lima', 'M': 'Mike', 'N':
        ↪ 'November', 'O': 'Oscar',
        'P': 'Papa', 'Q': 'Quebec', 'R': 'Romeo', 'S':
        ↪ 'Sierra', 'T': 'Tango',
        'U': 'Uniform', 'V': 'Victor', 'W': 'Whiskey', 'X':
        ↪ 'Xray', 'Y': 'Yankee',

```

```
}  
  
return [ argot[caracter] for caracter in cadena.upper()]
```

Solució del problema 4.4, pàgina 55

1. Solució totes_subcadenaes:

```
def totes_subcadenaes(cadena):  
    """  
    Aquesta funció retorna totes les subcadenaes de la cadena  
    ↪ donada.  
  
    Parameters  
    -----  
    cadena: string  
  
    Returns  
    -----  
    subcadenaes: list  
    """  
    return [cadena[init : end+1] for init in  
    ↪ range(len(cadena)) for end in range(init,  
    ↪ len(cadena))]
```

Solució del problema 4.8, pàgina 58

1. Solució subcadena_mes_llarga:

```
def subcadena_mes_llarga(cadena):  
    """  
    Aquesta funció identifica la subcadena més llarga  
    sense cap caràcter repetit.  
  
    Parameters  
    -----  
    cadena: string  
        Cadena donada  
  
    Returns  
    -----  
    subcadena: string  
        Subcadena més llarga sense caràcters repetits  
    """  
    n = len(cadena)  
  
    # fem un diccionari amb els caràcters  
    diccCaracters = {caracter: False for caracter in cadena}  
  
    # la solució es basa en una finestra que es redefineix  
    ↪ cada cop  
    # que troba un caràcter repetit
```

```

iniciFinestra = 0

# inici i final de la finestra, el final és el darrer
↳ caràcter vist
# el principi és el primer caràcter no repetit des del
↳ final de la
# finestra
iniciSubcadena = 0
finalSubcadena = 0

# inici i final de la subcadena més llarga trobada fins al
↳ moment
for finalFinestra in range(0, n):

    if diccCaracters[cadena[finalFinestra]]:
        # si el caràcter ja hi era
        while (cadena[iniciFinestra] !=
↳ cadena[finalFinestra]):
            diccCaracters[cadena[iniciFinestra]] = False
            iniciFinestra += 1
            # desplacem la finestra a partir de la
            # primera aparició del caràcter, sense
            ↳ incloure'l.
        iniciFinestra += 1

    else:
        diccCaracters[cadena[finalFinestra]] = True
        # anotem el caràcter com a existent
        finalFinestra += 1
        # com que no hi ha repeticions augmentem la
        ↳ finestra
        if finalSubcadena - iniciSubcadena < finalFinestra
↳ - iniciFinestra:
            # revisem que la nova subcadena no sigui més
            ↳ llarga
            # que la que teniem guardada
            iniciSubcadena = iniciFinestra
            finalSubcadena = finalFinestra

return cadena[iniciSubcadena:finalSubcadena]

```

Solució del problema 5.2, pàgina 63

1. Solució busca_unic:

```

def busca_unic(llista):
    """
    Aquesta funció busca l'element que només surt una vegada.

    Parameters
    -----

```

```
llista: list

Returns
-----
num: int
"""

def busca_unic_rec (llista, inici, fi):
    if inici == fi: return llista [inici]

    mid = inici + (fi - inici) // 2

    # Posició parell
    if mid % 2 == 0:
        # En mid hauria d'estar el primer element de la
        ↪ parella
        if llista [mid] == llista [mid + 1]:
            # Fins aquí tot ha anat bé, buscar a la segona
            ↪ meitat
            return busca_unic_rec (llista, mid + 2, fi)
        else:
            # No estem on hauríem d'estar! Cerca a la
            ↪ primera meitat
            # Important no fer mid-1, podríem estar en el
            ↪ nombre que busquem
            return busca_unic_rec (llista, inici, mid)

    # Posició imparell
    else:
        # En mid hauria d'estar el segon element de la
        ↪ parella
        if llista [mid-1] == llista [mid]:
            # Fins aquí tot ha anat bé, buscar cap
            ↪ endavant
            return busca_unic_rec (llista, mid + 1, fi)
        else:
            # No estem on hauríem d'estar! Cerca a la
            ↪ primera meitat
            return busca_unic_rec (llista, inici, mid-1)

    assert len(llista) % 2 != 0, 'La longitud de la llista ha
    ↪ de ser senar'
    return busca_unic_rec (llista, 0, len (llista) -1)
```

Solució del problema 5.4, pàgina 64

1. Solució el_mes_petit:

```
def bin_falta(llista, low, high):

    mid = (low+high) // 2
```

```

if high-low < 1:
    return low if (llista[low] != low) else -1

#Observo que els indexes coincideixen amb el digit fins
↳ que arribo al que falta
elif llista[mid] == mid :
    return bin_falta(llista, mid + 1, high)

elif llista[mid-1] == mid-1:
    return mid

else:
    return bin_falta(llista, low, mid-1)

def el_mes_petit(llista):
    """
    Aquesta funció troba el valor més petit que falta.

    Parameters
    -----
    llista: list

    Returns
    -----
    valor: int
    """
    if llista == []:
        return ("Entrada no vàlida")
    else:
        return bin_falta(llista, 0, len(llista) - 1)

```

Solució del problema 5.5, pàgina 65

1. Solució quants1:

```

def quants1(llistaBinaria):
    """
    Aquesta funció troba de manera eficient el nombre d'1s que
    ↳ conté una llista.

    Parameters
    -----
    llistaBinaria: list
        la llista de nombres binaris ordenada

    Returns
    -----
    num1s: int
        el nombre d'1s que conté
    """

```

```
def rec_nombre_1_binsearch(llista, low, high):
    if low > high:
        return 0

    elif low == high:
        return llista[low]

    mid = (low + high) // 2

    items = llista[mid]

    if items == 1:
        return rec_nombre_1_binsearch(llista, low, mid-1)
        ↪ + high - mid + 1

    else:
        return rec_nombre_1_binsearch(llista, mid+1, high)

return rec_nombre_1_binsearch(llistaBinaria, 0,
    ↪ len(llistaBinaria) - 1)
```

Solució del problema 5.7, pàgina 66

1. Solució zeros_final:

```
def zeros_final(llista):
    """
    Aquesta funció mou tots els zeros de la llista donada al
    ↪ final
    la funció és una variació del quicksort en que fem swap
    ↪ dels elements
    de la llista usant com a pivot el 0

    Parameters
    -----
    llista: list

    Returns
    -----
    None
    """

    j = 0
    for i in range(0, len(llista)):
        if llista[i] != 0:
            llista[i], llista[j] = llista[j], llista[i]
            j += 1
```

Solució del problema 5.12, pàgina 70

1. Solució parts_lista:

```
def parts_lista(llista, valor):
    """
    Aquesta funció divideix la llista en 3 a partir del valor
    donat.

    Parameters
    -----
    llista: list
    valor: int

    Returns
    -----
    None
    """
    primer = 0
    ultim = len(llista) - 1
    i = 1
    j = ultim
    # nombre de valors iguals
    iguals_v = 0

    while i < j:
        while iguals_v < ultim and llista[iguals_v] == valor:
            iguals_v += 1

        i = iguals_v
        while i < ultim and llista[i] < valor:
            i += 1

        while j > primer and llista[j] > valor:
            j -= 1

        while i < ultim and llista[i] == valor:
            llista[iguals_v], llista[i] = llista[i],
            ↪ llista[iguals_v]
            i += 1
            iguals_v += 1

        #intercanviem, fem avançar i j
        llista[i], llista[j] = llista[j], llista[i]

    # el programa no retorna res,
    # però l'ordre de la llista ha estat modificat
```

Solució del problema 5.16, pàgina 73

1. Solució multiplicacio_polinomis:

```
def multiplicacio_polinomis(polinomi1, polinomi2):
```

```
"""
Aquesta funció multiplica dos polinomis.

Parameters
-----
polinomi1: tupla
polinomi2: tupla

Returns
-----
mult_polinomis: tupla
"""
grauPol1, grauPol2 = len(polinomi1) - 1, len(polinomi2) -
↳ 1

# El resultat serà un polinomi de grau suma
mult_polinomis = [0] * (grauPol1 + grauPol2 + 1)

# Dels graus dels polinomis producte,
# que en particular té grau + 1 coeficients
for i in range(grauPol1 + 1):
    for j in range(grauPol2 + 1):
        mult_polinomis[i+j] += polinomi1[i] * polinomi2[j]

return mult_polinomis

assert multiplicacio_polinomis((1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1))
↳ == [4, 11, 20, 30, 20, 11, 4]
```

Comentaris:

- El que fem és fer una multiplicació normal i corrent de polinomis amb l'algorisme habitual. L'única particularitat és que sabem que quan multipliquem dos elements de grau r i s respectivament ens donarà un element de grau $r + s$ per tant el que fem és sumar-ho a la suma de coeficients del mateix grau dins del bucle. Aquí com estan ordenats a la inversa l'assignem d'una forma més directa que amb els graus per evitar invertir la llista, però es podria fer assignant a l'index = element del grau del coeficient i després invertint.

Per tant la complexitat queda, essent n i m els graus dels polinomis corresponents $O(n \times m)$

Solució del problema 5.17, pàgina 74**1. Solució patro_binari:**

```
def patro_binari(patro):
    """
    Aquesta funció troba totes les possibles combinacions de
    ↳ nombre binaris a partir del patro.

    Parameters
```

```

-----
patro: string

Returns
-----
combinacions: list
"""
# conversió a llista
if type(patro) == str:
    patro = list(patro)

if len(patro) == 1:
    # cas base
    return ['0', '1'] if patro[0] == '?' else patro

else:
    #ja hem fet els canvis 1->
    combinacions = patro_binari(patro[1:])
    nova_llista = []
    for elem in combinacions:
        if patro[0] == '?':
            nova_llista.append('0' + elem)
            nova_llista.append('1' + elem)

        else:
            nova_llista.append(patro[0] + elem)

    return nova_llista

```

Solució del problema 5.20, pàgina 76

1. Solució cerca_binaria Recursiva:

```

def cerca_binaria(arr, low, high, x):
    # Check base case
    if high >= low:

        mid = (high + low) // 2
        # If element is present at the middle itself
        if arr[mid] == x:
            return True

        # If element is smaller than mid, then it can only
        # be present in left subarray
        elif arr[mid] > x:
            return cerca_binaria(arr, low, mid - 1, x)

        # Else the element can only be present in right
        # subarray
        else:
            return cerca_binaria(arr, mid + 1, high, x)

```

```
else:
    # Element is not present in the array
    return False
```

2. Solució cerca_binaria Iterativa:

```
def binary_search(arr, x):
    low = 0
    high = len(arr) - 1
    mid = 0

    while low <= high:
        mid = (high + low) // 2

        # Check if x is present at mid
        if arr[mid] < x:
            low = mid + 1

        # If x is greater, ignore left half
        elif arr[mid] > x:
            high = mid - 1

        # If x is smaller, ignore right half
        else:
            return True

    # If we reach here, then the element was not present
    return False
```

Solució del problema 5.20, pàgina 76

1. Solució cerca_quasi_ord:

```
def cerca_quasi_ord(x, nums, low, high):
    """
    Aquesta funció, donada una llista d'enters quasi-ordenada,
    en la que un element pot estar posicionat un índex per
    ↳ sota o per sobre
    ↳ de la seva posició correcta, i un valor, troba la posició
    ↳ d'aquest valor.

    Parameters
    -----
    x : int
        el nombre a trobar
    nums : int
        la llista de nums a trobar
    low : int
        l'índex més baix de la subllista on estem cercant ara
    high : int
        l'índex més alt de la subllista on estem cercant ara
```

```

Returns
-----
    posicio: int
    """

    if low > high:
        return -1

    mid = (low + high) // 2
    items = nums[mid]

    # comparem amb l'índex que tocaria
    if items == x:
        return mid
    # comparem amb l'índex inferior
    if mid - 1 >= low and nums[mid - 1] == x:
        return mid-1
    # comparem amb l'índex superior
    if mid + 1 <= high and nums[mid + 1] == x:
        return mid+1
    # movem dues posicions
    elif x < items:
        return cerca_quasi_ord(x, nums, low, mid-2)
    # movem dues posicions
    else:
        return cerca_quasi_ord(x, nums, mid+2, high)

```

Solució del problema 5.21, pàgina 77

1. Solució estrictament creixents:

```

def estrictament_creixents(N):
    """
    Aquesta funció troba tot els nombres de N dígitos on
    → aquests són estrictament creixents.

    Parameters
    -----
    N: int

    Returns
    -----
    llista: list
    """

    def estr_creix_rec(cadena, n, previ, llista):
        # ja no queden dígitos per calcular
        if n == 0: llista.append(int(cadena))

        # el modul 11 és per n=0
        for i in range(previ + 1, (10 - n + 1) % 11):

```

```
    # fem 10-previ crides, pels valors entre previ i 9
    ↪ del dígit enèssim
    estr_creix_rec('{}{}'.format(cadena, i), n - 1, i,
    ↪ llista)

llista = []
estr_creix_rec('', N, 0, llista)
return llista

assert estrictament_creixents(8) == [12345678, 12345679,
    ↪ 12345689, 12345789, 12346789, 12356789, 12456789,
    ↪ 13456789, 23456789]
```

Comentaris:

- Usem una funció auxiliar per encapsular tots els paràmetres necessaris en les crides recursives.
- Anem recorrent totes les possibilitats per cada dígit tenint en compte els límits imposats pel nombre de dígit.