Distribución de levy

Juan Camilo Arevalo Arboleda[1]

[1]Pontificia Universidad Javeriana Cali

7 de abril de 2017

Contenido

Distribución estable

Una distribución se denomina estable si es una combinación lineal de dos o más copias independientes de una muestra aleatoria que tiene la misma distribución de probabilidad, salvo por quizá algún parámetro de localización o factor de escala.

Distribución estable

Una distribución se denomina estable si es una combinación lineal de dos o más copias independientes de una muestra aleatoria que tiene la misma distribución de probabilidad, salvo por quizá algún parámetro de localización o factor de escala.

Definición

Dadas n-variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $X_1, X_2, ..., X_n$ y X, entonces se dice que X sigue una distribución estable-α si existe una constante positiva Cn y un número real Dn tal que siga la siguiente relación:

$$X1 + X2 + ... + Xn \stackrel{d}{=} CnX + Dn$$

Función característica de la distribución estable

$$\varphi(t;\alpha,\beta,c,\mu) = E[e^{itX}] = \begin{cases} e^{it\mu-|ct|^{\alpha}(1-i\beta sign(t)tan(\frac{\pi\alpha}{2})} & \alpha \neq 1 \\ e^{it\mu-c|t|(1+i\beta\frac{2}{\pi}sign(t)ln(|t|)} & \alpha = 1 \end{cases}$$

Donde

$$\text{sign(t)} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

- α: parámetro de estabilidad donde $\alpha \in (0,2]$
- β: parámetro de simetría donde $\beta \in [-1,1]$
- μ: parámetro de localización donde $\mu \in (-\infty,\infty)$
- c: parámetro de escalabilidad donde $c \in (0,\infty]$

Función característica de levy

Para la distribución de levy, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$, entonces

$$\varphi(x, c, \mu) = e^{it\mu - \sqrt{|et|}(1 - isgn(t))}$$

Función característica de levy

Para la distribución de levy, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$, entonces

$$\varphi(x, c, \mu) = e^{it\mu - \sqrt{|et|}(1 - isgn(t))}$$

La función de densidad dada por la transformada de Fourier para una función característica $\varphi(t)$ esta dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt$$

Distribución de levy

- Función de densidad: $f(x;\mu,c)=\sqrt{\frac{c}{2\pi}}\frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}}$ donde $x>\mu$
- Función acumulativa: $F(x;\mu,c)=erf(\sqrt{\frac{c}{2(x-\mu)}})$

  Donde $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{t^2}dx$
- Esperanza: ∞
- Mediana: $\frac{c}{2}(erf^{-1}(\frac{1}{2}))^2$ para $\mu=0$
- Moda: $\frac{c}{3}$ para $\mu=0$
- Varianza: ∞

Distribución de levy

- Función de densidad: $f(x;\mu,c)=\sqrt{\frac{c}{2\pi}}\frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}}$ donde $x>\mu$
- Función acumulativa: $F(x;\mu,c)=erf(\sqrt{\frac{c}{2(x-\mu)}})$

  Donde $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{t^2}dx$
- Esperanza: ∞
- Mediana: $\frac{c}{2}(erf^{-1}(\frac{1}{2}))^2$ para $\mu=0$
- Moda: $\frac{c}{3}$ para $\mu=0$
- Varianza: ∞

Propiedades:

- $X\sim levy(\mu,c)\rightarrow kX+b\sim levy(k\mu+b,kc)$
- $X\sim levy(0,c)\rightarrow X\sim gamma^{-1}(1/2,c/2)$
- $X\sim levy(\mu,c)\rightarrow X\sim stable(1/2,1,c,\mu)$

Gráficas distribución de Levy

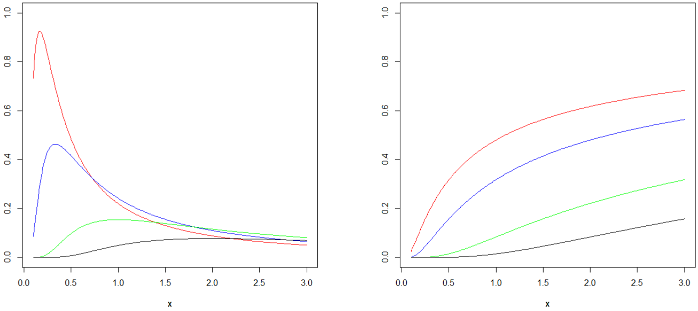
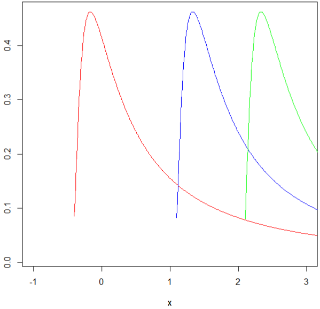


Figura: Función de densidad y acumulada con $c = 0{,}5, c = 1, c = 3, c = 6$ y $\mu = 0$

Gráficas distribución de Levy



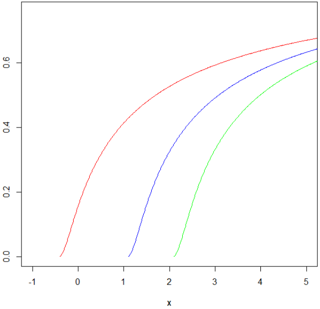


Figura: Función de densidad y acumulada con $\mu = -0{,}5, \mu = 1, \mu = 2$, y $c = 1$

Aplicaciones

- La frecuencia de las reversiones geométricas tienden seguir la distribución de levy.
- La longitud de la trayectoria seguida por un fotón en un medio turbio sigue la distribución de levy.
- Dado que los stocks(acciones) no son normales, las propiedades de la distribución de levy son importantes, ya que al estimar sus parámetros se pueden ayudar a minimizar riesgos.

Bibliografía I

Yiyang Yang.
Stable Distribution: Theory and Application.
November 2012.

Mirasol A. Cañedo and Edgardo D. Cruz, PhD .
THE PHILIPPINE STOCK RETURNS AND THE LEVY DISTRIBUTION.
12th National Convention on Statistics (NCS) EDSA Shangri-La Hotel, Mandaluyong City , October 1-2, 2013

Bibliografía II

Rafal Weron.
Levy-stable distributions revisited: tail index > 2 does not exclude the Levy-stable regime.
: International Journal of Modern Physics,C (2001) 12(2), 209-223

German Bassi.
Funcion Caracterıstica
: 21 de marzo de 2011

Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/L %C3 %A9vy$_d$*istribution*
visitado el: 09 de abril del 2017