التحكم الحديث 2 (التحكم الرقمي)

Modern Control 2 (Digital Control)

كلية الهندسة الكهربائية والالكترونية – جامعة حلب

المحاضرة 2 - التحكم الرقمي – الأنظمة المتقطعة

توصيف الأنظمة المستمرة والأنظمة المتقطعة زمنياً

- ما الغاية الأساسية من نمذجة أي نظام ما؟
  - ✔ معرفة طبيعة خرج النظام عند تطبيق إشارة دخل معينة

بينما يمكن توصيف الأنظمة المستمرة زمنيا من خلال المعادلات التفاضلية أو توابع الانتقال في المجال S، تحتوي الأنظمة الرقمية على نظم متقطعة زمنيا يمكن توصيفها من خلال نماذج متقطعة زمنيا Discrete-time models توفر العلاقات الرياضية بين متغيرات النظام في لحظات زمنية متقطعة.

من النماذج المتقطعة زمنياً لتمثيل الأنظمة المتقطعة يوجد المعادلات الفرقية وهي نظير المعادلات التفاضلية في الأنظمة المستمرة

نوع النظام المتقطع المدروس

- هل يوجد تصنيفات للأنظمة المتقطعة التي سنتعامل معها؟

سندرس الأنظمة المتقطعة الخطية غير المتغيرة زمنيا والسببية

Linear Time Invariant Causal Systems

LTI Causal Systems

النظم الخطية غير المتغيرة زمنياً

- ما هو LTI؟

Linear Time Invariant

النموذج الرياضي للنظام (المعادلة الفرقية) **خطي** بالنسبة ل **y**

أمثال المتحول **y** في النموذج الرياضي للنظام (المعادلة الفرقية) **غير متغيرة بالنسبة للزمن** (أي بالنسبة ل k)

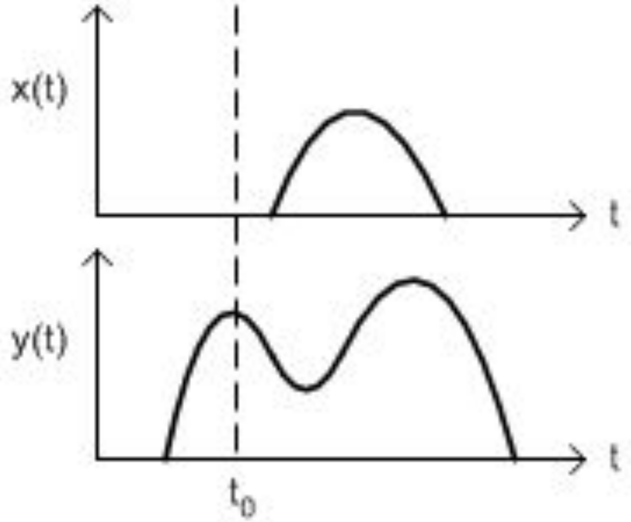
LTI	✓	$y(k+2)+0.7y(k+1)-0.07y(k)u(k)=0$	✓
	✓	$y(k+4)+\sin(1.2k)\,y(k+1)=120y(k)$	✗
	✓	$k^3y(k-2)-\cos(k)\,y(k-1)=y(k)$	✗
	✗	$13y(k-2)-y^3(k-1)=y(k)$	✓

النظم السببية

- ✔ النظام سببي causal لأنه لا يمتلك أي خرج في الزمن السالب أي: أن $u(k)=0$ و $y(k)=0$ من أجل $k<0$
- ✔ أي الخرج يتعلق فقط بقيم الدخل الحالية والماضية
- ✔ أي أن الدخل هو سبب لحصول الخرج
- ✔ عملياً جميع الأنظمة في العالم الحقيقي سببية

نسمي هذا النظام غير سببي non causal

لأن الخرج يستجيب قبل تطبيق الدخل



Difference Equations المعادلات الفرقية

إحدى طرق تمثيل الأنظمة المتقطعة وهي نظير المعادلات التفاضلية في الأنظمة المستمرة. ويعطى الشكل العام لهذه المعادلة بإحدى العلاقتين التاليتين:

بدلالة الزمن:

$$y(kT_S)+a_1 y(kT_S-T_S)+\ldots+a_n y(kT_S-nT_S)=$$
$$b_0 u(kT_S-dT_S)+b_1 u(kT_S-dT_S-T_S)+\ldots+b_m u(kT_S-dT_S-mT_S)$$

بدلالة رقم العينة:

$$y(k)+a_1 y(k-1)+\ldots+a_n y(k-n)=$$
$$b_0 u(k-d)+b_1 u(k-d-1)+\ldots+b_m u(k-d-m)$$

d **التأخير الزمني بين الدخل والخرج.**

المعادلة الفرقية هي معادلة متتالية يعتمد فيها حساب الخرج في كل لحظة على قيم الخرج والدخل في اللحظات السابقة

Difference Equations المعادلات الفرقية

الانتقال من المعادلات التفاضلية إلى المعادلات الفرقية

طريقة الفروق الأمامية: نقوم باستبدال المشتقات بالعلاقات التالية

$$t = nT_S$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Delta y(nT_S)}{T_S} = \frac{y[(n+1)T_S] - y[(nT_S)]}{T_S}$$

$$\frac{d_2 y}{dt^2} = \frac{\Delta_2 y(nT_S)}{T_S^2} = \frac{\Delta y[(n+1)T_s] - \Delta y[(nT_S)]}{T_S^2} = \frac{y[(n+2)T_S] - 2y[(n+1)T_S] + y[(n)T_S]}{T_S^2}$$

$$\frac{d_3 y}{dt^3} = \frac{\Delta_3 y(nT_S)}{T_S^3} = \text{.......... ....}$$

Difference Equations المعادلات الفرقية

الانتقال من المعادلات التفاضلية إلى المعادلات الفرقية

طريقة الفروق الخلفية: نقوم باستبدال المشتقات بالعلاقات التالية

$$t = nT_S$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\nabla y(nT_S)}{T_S} = \frac{y[(n)T_S] - y[(n-1)T_S]}{T_S}$$

$$\frac{d_2 y}{dt^2} = \frac{\nabla_2 y(nT_S)}{T_S^2} = \frac{\nabla y[(n)T_s] - \nabla y[(n-1)T_S]}{T_S^2} = \frac{y[(n)T_S] - 2y[(n-1)T_S] + y[(n-2)T_S]}{T_S^2}$$

$$\frac{d_3 y}{dt^3} = \frac{\nabla_3 y(nT_S)}{T_S^3} = \text{.......... ....}$$

Difference Equations المعادلات الفرقية

مثال نظام متقطع ممثل بالمعادلة الفرقية التالية:

$$y(k) = 2y(k-1) + u(k)$$

اذا طُبق عليه اشارة قفزة واحدية متقطعة وبفرض أن قيمة العينة الأولى $y(0) = 0$ فإن الخرج عند العينات الخمسة التالية هو

k	u(k)	y(k)
1	1	y(1)=2y(0)+1=1
2	1	y(2)=2y(1)+1=3
3	1	y(3)=2y(2)+1=7
4	1	y(4)=2y(3)+1=15
5	1	y(5)=2y(4)+1=31

Difference Equations المعادلات الفرقية

مثال نظام متقطع ممثل بالمعادلة الفرقية التالية:

$$2y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = u(k)$$

فإذا علمت أن u(k)=0 و y(k)=0 من أجل k<0.

طبقت على هذا النظام إشارة الدخل التالية:

$$u(k) = \{1,1,1,1,\ldots\}$$

المطلوب حساب قيم الخرج y(k) من أجل k < 20

Difference Equations حل المعادلات الفرقية

الطريقة الأولى: تعويض القيم بشكل مباشر!

$$2y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = u(k)$$

$$y(k) = 0.5u(k) + y(k-1) - 0.5y(k-2)$$

$$y(0) = 0.5u(0) + y(-1) - 0.5y(-2)$$

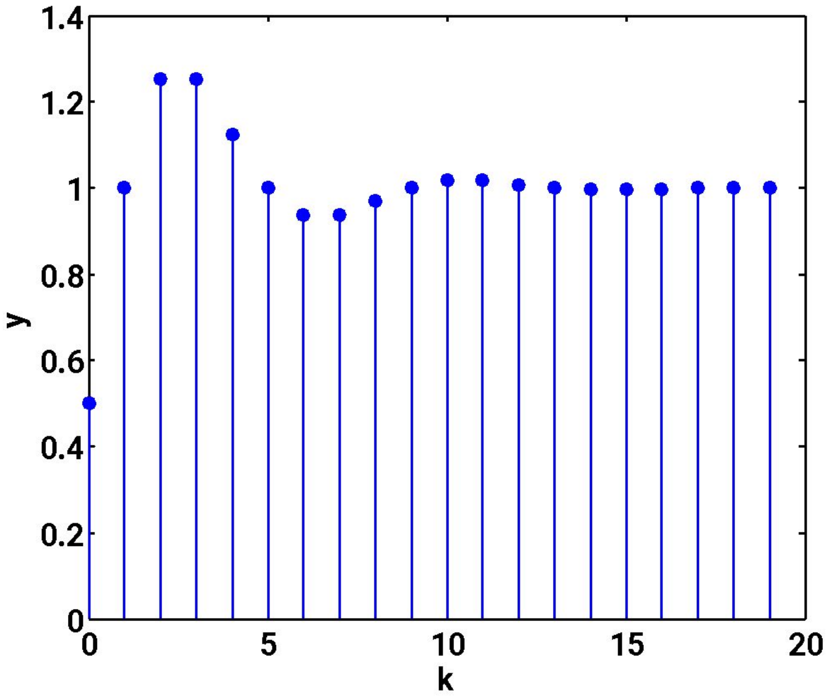
$$y(1) = 0.5u(1) + y(0) - 0.5y(-1)$$

$$y(2) = 0.5u(2) + y(1) - 0.5y(0)$$

$$\vdots$$

$$y(19) = 0.5u(19) + y(18) - 0.5y(17)$$

- إذاً نحصل على القيم المطلوبة بطريقة متتالية
- يمكن أن نكتب برنامج لحساب القيم



Difference Equations حل المعادلات الفرقية

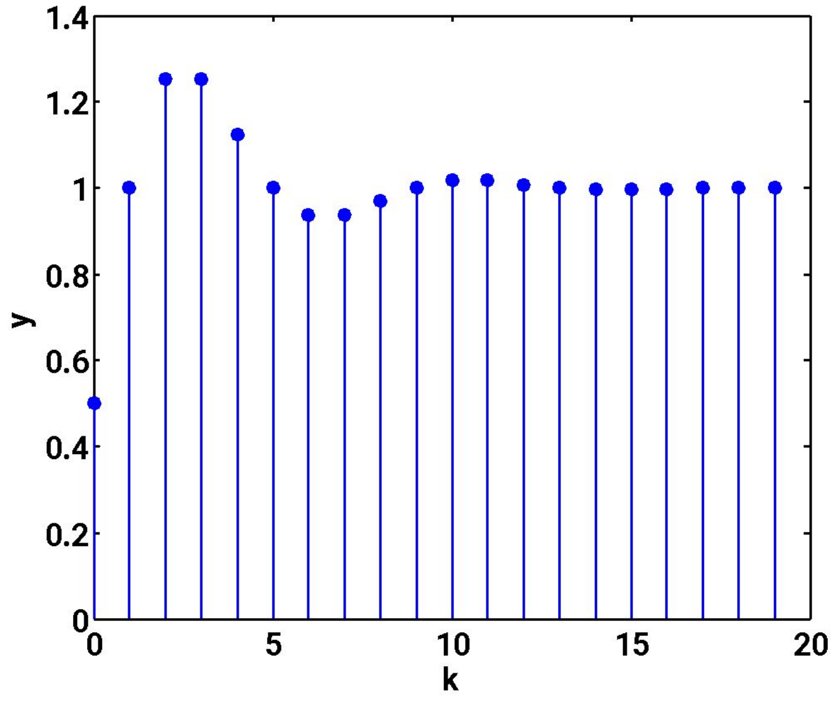
الطريقة الثانية: نريد الحصول على معادلة رياضية (صيغة مغلقة closed form)

- إذاً نحتاج لحل المعادلة الفرقية >> عملية صعبة ومعقدة

$$2y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = u(k)$$

$$\downarrow$$

$$y(k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \left[-0.5\cos k\frac{\pi}{4} + 0.5\sin k\frac{\pi}{4}\right] + 1$$



يمكن استخدام تحويل Z لحل المعادلات الفرقية بشكل جبري

تحويل Z

فضاء لابلاس
X(S)

فضاء Z
X(Z)

العالم الحقيقي
Time domain
$x(t), x^*(k)$

متقطع
مستمر

تحويل لابلاس

$$X(s)=\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- حل أبسط للمعادلات التفاضلية

تحويل Z

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N} x(k)z^{-k}$$

- حل أبسط للمعادلات الفرقية

تحويل Z

يعد تحويل z أداة مهمة في تحليل وتصميم أنظمة الزمن المتقطع. فهو يبسط حل نماذج الزمن المتقطع عن طريق تحويل المعادلات الفرقية للأنظمة الخطية غير المتغيرة زمنيا إلى معادلات جبرية. وبالتالي، فإنه يلعب دورًا مشابهًا للدور الذي تؤديه تحويلات لابلاس في نماذج الزمن المستمر.

استنتاج تحويل Z

تعريف:

إن السلسلة المتقطعة السببية التالية $\{u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots\}$ يعطى تحويل Z لها بالشكل:

$$U(z) = u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + u_3 z^{-3} + \ldots + u_k z^{-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}$$

حيث يمكن تفسير المعامل z^{-k} في العلاقة السابقة ك تأخير زمني

يمكن استنتاج تحويل Z السابق بالشكل التالي:

بفرض لدينا قطار من إشارة النبضة الواحدية في الزمن المتقطع

$$u^*(t) = u_0\delta(t) + u_1\delta(t-T) + u_2\delta(t-2T) + \ldots + u_k\delta(t-kT)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} u_k \delta(t-kT)$$

استنتاج تحويل Z

يعطى تحويل لابلاس للإشارة السابقة بالشكل:

$$U^*(s) = u_0 + u_1 e^{-sT} + u_2 e^{-2sT} + \dots + u_k e^{-ksT}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u_k (e^{-sT})^k$$

نعرف المعامل $z = e^{sT}$ بالتالي إن تحويل Z للإشارة يعطى بالشكل:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}$$

مثال: تحويل Z للسلسلة الزمنية المتقطعة $\{u_k\}_{k=0}^{\infty} = \{1, 3, 2, 0, 4, 0, 0, 0, \dots\}$

يعطى بالشكل: $U(z) = 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-4}$

تحويل Z

- لماذا نحتاج تحويل Z؟

  - نحول المعادلة الفرقية إلى معادلة جبرية بالنسبة ل Z (إذا كان النظام LTI) بالتالي تصبح سهلة الحل:

1. باستخدام تحويل Z نحول المعادلة الفرقية من المجال الزمني المتقطع ***k*** إلى مجال Z
2. نحل المعادلة الجبرية بالنسبة ل Z
3. باستخدام تحويل Z العكسي نحول النتيجة من المجال Z إلى المجال الزمني المتقطع ***k***

- مثال:

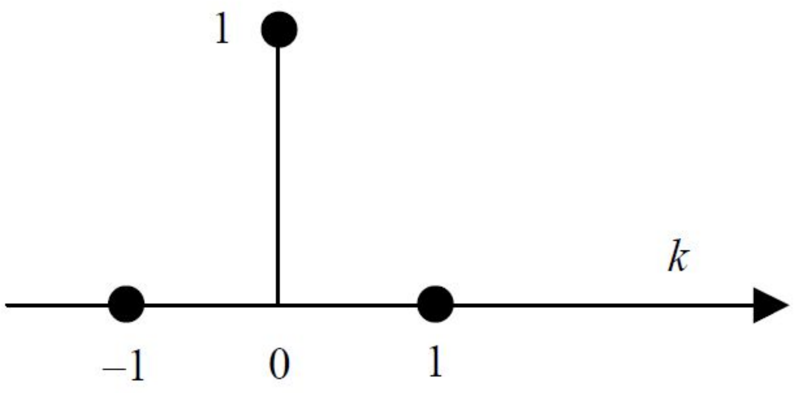
$$x(k+2)-\frac{3}{2}x(k+1)+\frac{1}{2}x(k)=1(k)$$

$$X(z)=\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-0.5}$$

$$x(k)=2k+0.5^k$$

تحويلات Z الشهيرة

- تحويلات Z لبعض التوابع الشهيرة
  - نبضة ديراك (النبضة الواحدية)

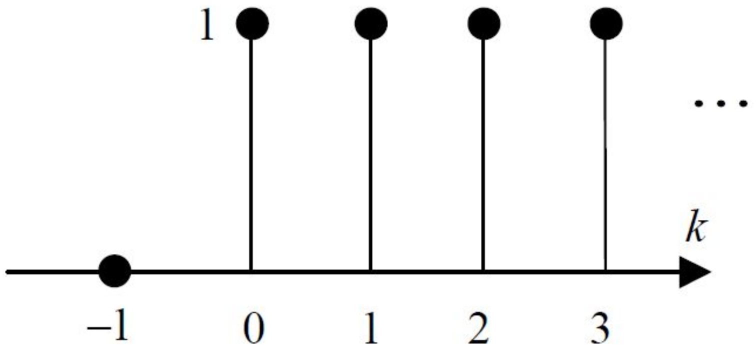


$$x[k] = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{X(z) = 1}$$

تحويلات Z الشهيرة

- تحويلات Z لبعض التوابع الشهيرة
  - التابع الواحدي (القفزة الواحدية)

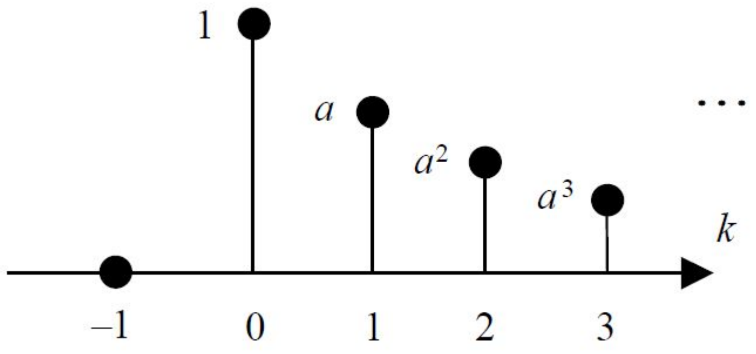


$$x[k] = 1(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \text{ for } |z| > 1}$$

تحويلات Z الشهيرة

- تحويلات Z لبعض التوابع الشهيرة
  - التابع الأسي



$$x[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ a^k, & k \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \text{ for } |z| > a}$$

<u>مرجع</u> مفيد لجداول وخواص تحويلي لابلاس وZ