التحكم الحديث 2 (التحكم الرقمي)

Modern Control 2 (Digital Control)

كلية الهندسة الكهربائية والالكترونية – جامعة حلب

المحاضرة 3 - التحكم الرقمي – الأنظمة المتقطعة

تحويل Z

- مثال تحويل Z لتابع النبضة الواحدية المتأخرة عن العينة k=0 وليكن عند العينة k=3

$$\delta_{n-3} = \begin{cases} 1 & n = 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

يعطى بالشكل

$$\begin{aligned} Z(\delta_{n-3}) &= 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + z^{-3} + 0z^{-4} + \dots \\ &= z^{-3} \end{aligned}$$

تحويل Z

- تمارين: أوجد تحويل Z للإشارات المتقطعة التالية

$$y_1(n) = 2^n \qquad y_2(n) = (-1)^n \qquad y_3(n) = e^{-n} \qquad y_4(n) = e^{-\alpha n}$$

النتائج:

$$\frac{z}{z-2} \qquad \frac{z}{z+1} \qquad \frac{z}{z-e^{-1}} \qquad \frac{z}{z-e^{-\alpha}}$$

خصائص تحويل Z

- الخطية Linearity

$$\boxed{Z[\alpha f_1(k) + \beta f_2(k)] = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)}$$

مثال: التابع المتقطع

$$f(k) = 2 \times 1(k) + 4\delta(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

له تحويل Z التالي

$$F(z) = \mathbf{Z}(2 \times 1(k) + 4\delta(k)) = 2\mathbf{Z}(1(k)) + 4\mathbf{Z}(\delta(k)) = \frac{2z}{z-1} + 4$$

خصائص تحويل Z

- التأخير الزمني **Time delay**

$$\boxed{Z[f(k-n)] = z^{-n}F(z)}$$

مثال: التابع التالي عبارة عن سلسلة متقطعة بدءا من العينة الثانية أي أنه يوجد تأخير زمني بمقدار عينتين

$$f(k) = \begin{cases} 4, & k = 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

باستخدام خاصية التأخير الزمني يعطى تحويل Z كـ: بالشكل

$$F(z) = \mathbf{Z}(4 \times 1(k-2)) = 4z^{-2}\mathbf{Z}(1(k)) = z^{-2}\frac{4z}{z-1} = \frac{4}{z(z-1)}$$

خصائص تحويل Z

- الازاحة الزمنية Time advance

$$\boxed{Z[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)}$$

$$\boxed{Z[f(k+n)] = z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1} f(1) - \cdots - zf(n-1)}$$

مثال: أوجد تحويل Z للسلسلة السببية التالية باستخدام خاصية الازاحة الزمنية:

$$f(k) = \{4, 8, 16, \ldots\}$$

الحل: نعيد كتابة السلسة بالشكل التالي:

$$f(k) = 2^{k+2} = g(k+2), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ونعرف التابع $g(k) = 2^k, k = 0,1,2, \ldots$

باستخدام خاصية الازاحة الزمنية $F(z) = z^2 G(z) - z^2 g(0) - zg(1)$

$$\boxed{F(z) = z^2 \frac{z}{z-2} - z^2 - 2z = \frac{4z}{z-2}}$$

خصائص تحويل Z

- الجداء مع عدد أسي **Multiplication by exponential**

$$\boxed{Z\left[a^{-k} f(k)\right] = F(az)}$$

- الاشتقاق المركب **Complex differentiation**

$$\boxed{Z[k^m f(k)] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m F(z)}$$

خصائص تحويل Z

$$\boxed{Z\left[a^{-k} f(k)\right] = F(az)}$$

مثال: أوجد تحويل Z للسلسلة الأسية التالية:

$$f(k) = e^{-\alpha kT}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

الحل: نعيد كتابة السلسة بالشكل التالي:

$$f(k) = \left(e^{\alpha T}\right)^{-k} \times 1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

بتطبيق تحويل Z واستخدام تحويل القفزة الواحدية $Z[1(k)] = \frac{1}{1-z^{-1}} = (1 - z^{-1})^{-1}$:

$$\boxed{F(z) = \left(1 - \left(e^{\alpha T} z\right)^{-1}\right)^{-1} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}}$$

خصائص تحويل Z

$$\boxed{Z[k^m f(k)] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m F(z)}$$

مثال: أوجد تحويل Z لتابع الرامب المتقطع:

$$f(k) = k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

الحل: نعيد كتابة السلسلة بالشكل التالي:

$$f(k) = k \times 1, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

بتطبيق تحويل Z واستخدام تحويل القفزة الواحدية $Z[1(k)] = \frac{z}{z-1}$:

$$\boxed{F(z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right) = (-z)\left(\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}}$$

تحويل Z العكسي

$$X(z) \rightarrow x(k)$$

- هناك طريقتان لتحويل Z العكسي:

1. طريقة التقسيم المباشر ← سهلة .. لا تحصل بالضرورة على صيغة مغلقة
2. طريقة التفريق إلى عناصر بسيطة ← أكثر تعقيداً .. تحصل على صيغة مغلقة
   a. حالة جذور بسيطة
   b. حالة جذور عقدية

تحويل Z العكسي

طريقة التقسيم المباشر:

- نقسم البسط على المقام فنحصل على سلسلة ذات قوى متناقصة وتكون أمثال هذه السلسلة هي قيم الإشارة المتقطعة.

مثال: أوجد تحويل Z العكسي للإشارات التالية باستخدام طريقة التقسيم المباشر وبين فيما إذا كانت الاشارات منتهية أو غير منتهية.

$$X_1(Z) = \frac{10Z + 5}{Z^2 - Z + 2} \xrightarrow{\text{غير منتهية}} \boxed{x_1(k) = \{0,10,15,-5,-35,\ldots\}}$$

$$X_2(Z) = \frac{Z^3 + 2Z^2 + 2Z + 1}{Z^3} \xrightarrow{\text{منتهية}} \boxed{x_2(k) = \{1,2,2,1,0,0,0,\ldots\}}$$

تحويل Z العكسي

طريقة التفريق إلى عناصر بسيطة:

- نفرق كثير الحدود ونميز عدة حالات لجذور المقام:

$$X(Z)=\frac{b_0Z^m+b_1Z^{m-1}+\ldots+b_m}{Z^n+a_1Z^{n-1}+\ldots+a_n}$$

1. حالة الجذور البسيطة

$$X(z)=c_0+c_1\frac{z}{z-p_1}+c_2\frac{z}{z-p_2}+\ldots+c_n\frac{z}{z-p_n}$$

حيث : $p_1 , p_2 , \ldots , p_n$ تسمى جذور المقام.

$$c_0=X(0)$$

عندها يكون:

$$\boxed{x(k)=c_0\delta(k)+c_1{p_1}^k+c_2{p_2}^k+\ldots+c_n{p_n}^k}$$

$$c_i=\lim_{Z\to p_i}\left[\frac{z-p_i}{z}X(z)\right]$$

تحويل Z العكسي

$c_0 = X(0)$

$c_i = \lim_{Z \to p_i} \left[\frac{Z - p_i}{Z} X(Z) \right]$

1. حالة الجذور البسيطة

$$x(k) = c_0 \delta(k) + c_1 {p_1}^k + c_2 {p_2}^k + \ldots + c_n {p_n}^k$$

مثال: أوجد تحويل Z العكسي للتابع:

$$X(z) = \frac{z+3}{z^2 - 3z + 2}$$

$$X(z) = \frac{z+3}{(z-2)(z-1)} \rightarrow p_1 = 2, p_2 = 1$$

$$c_0 = X(0) = \frac{3}{2}, \qquad c_1 = \lim_{Z \to 2} \left[\frac{z-2}{z} X(z) \right] = \lim_{Z \to 2} \left[\frac{z+3}{z(z-1)} \right] = \frac{5}{2}, \qquad c_2 = \lim_{Z \to 1} \left[\frac{z-1}{z} X(z) \right] = -4$$

$$\boxed{x(k) = \frac{3}{2} \delta(k) - 4 + \frac{5}{2} (2)^k}$$

تحويل Z العكسي

طريقة التفريق إلى عناصر بسيطة:

2. حالة الجذور العقدية

نكتب الجزء الخاص من التابع الذي يحوي الجذور العقدية على الشكل التالي:

$$X(z) = \ldots + c\frac{z}{z-p} + \bar{c}\frac{z}{z-\bar{p}} + \ldots$$

حيث : p , $\bar{p}$ جذور المقام.

$$c = \lim_{z\to p}\left[\frac{z-p}{z}X(z)\right] \qquad \bar{c} = \lim_{z\to \bar{p}}\left[\frac{z-\bar{p}}{z}X(z)\right]$$

عندها يكون:

$$x(k) = \ldots + cp^k + \bar{c}\bar{p}^k + \ldots$$

نفرض ما يلي:

$$c = x + jy \qquad p = re^{j\omega}$$

فنحصل على:

$$\boxed{x(k) = \ldots + r^k[2x\cos\omega k - 2y\sin\omega k] + \ldots}$$

تحويل Z العكسي

2. حالة الجذور العقدية

$$x(k) = \ldots + r^k[2x\cos\omega k - 2y\sin\omega k] + \ldots$$

مثال: أوجد تحويل Z العكسي للتابع:

$$X(z) = \frac{3z^2 + 0.5z}{z^2 - z + 0.5}$$

جذرين عقديين:

$$X(z) = \frac{3z^2 + 0.5z}{[z-(0.5-0.5j)][z-(0.5+0.5j)]}$$

يمكن كتابة الجذرين بشكل أسي:

$$p = 0.5 - 0.5j = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}j}, \qquad \bar{p} = 0.5 + 0.5j = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}j} = re^{j\omega}$$

إيجاد $c, \bar{c}$:

$$c = \lim_{Z\to p}\left[\frac{Z-p}{Z}X(z)\right] = \frac{3z+0.5}{z-(0.5-0.5j)}\bigg|_{z=0.5+0.5j} = \frac{3}{2} + \frac{2}{j} = \frac{3}{2} - 2j$$

$$\bar{c} = \lim_{Z\to \bar{p}}\left[\frac{Z-\bar{p}}{Z}X(z)\right] = \frac{3z+0.5}{z-(0.5+0.5j)}\bigg|_{z=0.5-0.5j} = \frac{3}{2} - \frac{2}{j} = \frac{3}{2} + 2j$$

تحويل Z العكسي

2. حالة الجذور العقدية

$$x(k) = \ldots + r^k[2x\cos\omega\, k - 2y\sin\omega\, k] + \ldots$$

مثال: أوجد تحويل Z العكسي للتابع:

$$X(z) = \frac{3z^2 + 0.5z}{z^2 - z + 0.5}$$

بالتالي:

$$\frac{3}{2} - 2j = x + yj$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} = re^{j\omega}$$

$$\boxed{x(k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \left[3\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right]}$$