التحكم الحديث 2 (التحكم الرقمي)

Modern Control 2 (Digital Control)

كلية الهندسة الكهربائية والالكترونية – جامعة حلب

المحاضرة 5 - التحكم الرقمي – الأنظمة المتقطعة

التحويل بين فضاء لابلاس وفضاء Z باستخدام طرق التكامل الرقمي

طريقة أويلر: فيها نفرض

$$z = e^{sT} \approx 1 + sT \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T}$$

طريقة الفروق الخلفية: فيها نفرض

$$z = e^{sT} \approx \frac{1}{1-sT} \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{zT}$$

طريقة Tustin: فيها نفرض

$$z = e^{sT} \approx \frac{1+s\frac{T}{2}}{1-s\frac{T}{2}} \Rightarrow s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

أقطاب النظام المستمر والمتقطع

إن أقطاب نظام موصوف بتابع النقل هي عبارة عن جذور المعادلة المميزة لتابع النقل

مثال: بفرض النظام الموصوف بتابع النقل

$$G(s) = \frac{10}{s^2+6s+5}$$

أوجد أقطاب النظام المستمر والمتقطع بزمن تقطيع T= 0.1sec

الحل: أقطاب النظام المستمر هي $s_1 = -1, s_2 = -5$

أقطاب النظام المتقطع تعطى بالشكل:

$$z_1 = e^{s_1 T} = e^{-1\times 0.1} = 0.9048$$
$$z_2 = e^{s_2 T} = e^{-5\times 0.1} = 0.6065$$

تحويل تابع انتقال مستمر إلى متقطع باستخدام طرق التكامل الرقمي

مثال: حول توابع النقل التالية إلى فضاء Z باستخدام طريقة Tustin من أجل زمن تقطيع T=0.002

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

الحل:

$$G(z) = \frac{0.001z^2+3.992\times10^{-6}z-0.000996}{z^2-1.996z+0.996}$$

تحويل تابع انتقال مستمر إلى متقطع باستخدام طرق التكامل الرقمي

مثال: حول تابع النقل التالي إلى فضاء Z باستخدام طرق التكامل الرقمي من أجل زمن تقطيع T=0.1 وبين أي الطرق أفضل

$$G(s) = \frac{10}{s^2+6s+8}$$

<u>الحل:</u> نحسب أقطاب النظام المستمر. نجد

$$s_1 = -2, s_2 = -4$$

أقطاب النظام المتقطع

$$z_1 = e^{s_1 T} = e^{-2\times 0.1} = 0.8187$$
$$z_2 = e^{s_2 T} = e^{-4\times 0.1} = 0.6703$$

تحويل تابع انتقال مستمر إلى متقطع باستخدام طرق التكامل الرقمي

مثال: حول تابع النقل التالي إلى فضاء Z باستخدام طرق التكامل الرقمي من أجل زمن تقطيع T=0.1 وبين أي الطرق أفضل

$$G(s) = \frac{10}{s^2+6s+8}$$

<u>باستخدام طريقة أويلر</u>

<u>نستبدل متحول لابلاس بالشكل</u>

$$s \approx \frac{z-1}{T}$$

نحصل على تابع النقل التالي للنظام المتقطع زمنياً

$$G(z) = \frac{5}{50z^2-70z+24}$$

أقطاب هذا النظام هي

$$z_1 = 0.8, z_2 = 0.6$$

تحويل تابع انتقال مستمر إلى متقطع باستخدام طرق التكامل الرقمي

مثال: حول تابع النقل التالي إلى فضاء Z باستخدام طرق التكامل الرقمي من أجل زمن تقطيع T=0.1 وبين أي الطرق أفضل

$$G(s) = \frac{10}{s^2+6s+8}$$

باستخدام طريقة الفروق الخلفية

نستبدل متحول لابلاس بالشكل

$$s \approx \frac{z-1}{zT}$$

نحصل على تابع النقل التالي للنظام المتقطع زمنياً

$$G(z) = \frac{5z^2}{84z^2-130z+50}$$

أقطاب هذا النظام هي

$$z_1 = 0.8333,\ z_2 = 0.7143$$

تحويل تابع انتقال مستمر إلى متقطع باستخدام طرق التكامل الرقمي

مثال: حول تابع النقل التالي إلى فضاء Z باستخدام طرق التكامل الرقمي من أجل زمن تقطيع T=0.1 وبين أي الطرق أفضل

$$G(s) = \frac{10}{s^2+6s+8}$$

باستخدام طريقة Tustin

نستبدل متحول لابلاس بالشكل

$$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

نحصل على تابع النقل التالي للنظام المتقطع زمنياً

$$G(z) = \frac{0.01894z^2+0.03788z+0.01894}{z^2-1.485z+0.5455}$$

أقطاب هذا النظام هي

$$z_1 = 0.8182,\ z_2 = 0.6667$$

تحويل تابع انتقال مستمر إلى متقطع باستخدام طرق التكامل الرقمي

مثال: حول تابع النقل التالي إلى فضاء Z باستخدام طرق التكامل الرقمي من أجل زمن تقطيع T=0.1 وبين أي الطرق أفضل

$$G(s) = \frac{10}{s^2+6s+8}$$

نلاحظ أن أقطاب تابع النقل المتقطع وفق طريقة Tustin هي أقرب إلى الأقطاب الحقيقية للنظام المتقطع بالتالي هي أفضل طريقة لتحويل النظام المستمر إلى متقطع زمنياً

State Space فراغ الحالة

- نستخدم عادة المعادلات الفرقية وتوابع الانتقال لتحديد سلوك واستجابة النظام، ولكن عندما يكون عدد مداخل ومخارج النظام كبيراً تصبح العملية معقدة!
- لذلك نلجأ لاستخدام متحولات داخلية تسمى متحولات الحالة.
- هذه المتحولات تساعد على تحويل معادلة فرقية من المرتبة n إلى n معادلة فرقية من المرتبة الأولى.

الشكل العام لمعادلات الحالة والخرج:

$$X(k+1) = A\,X(k) + B\,U(k)$$

$$Y(k) = C\,X(k) + D\,U(k)$$

- سنقوم بدراسة:

1. الانتقال من المعادلة الفرقية إلى فراغ الحالة بالطريقة المتداخلة.
2. الانتقال من فراغ الحالة إلى المعادلة الفرقية.

State Space فراغ الحالة

1. الانتقال من المعادلة الفرقية إلى فراغ الحالة بالطريقة المتداخلة

لنأخذ النظام الخطي المتقطع التالي:

$$y(k) + 3y(k-1) - 5y(k-2) = u(k) + u(k-1) - 2u(k-2)$$

المطلوب تمثيل هذا النظام باستخدام معادلات الحالة والخرج المتقطعة بالطريقة المتداخلة.

1. نقوم بعمل تحويل Z للمعادلة الفرقية

$$Y(Z) + 3Z^{-1}Y(Z) - 5Z^{-2}Y(Z) = U(Z) + Z^{-1}U(Z) - 2Z^{-2}U(Z)$$

2. ننقل الحدود إلى طرف واحد ونخرج معامل التأخير الزمني Z^{-1} بالشكل التالي

$$Y(Z) - U(Z) + Z^{-1}(3Y(Z) - U(Z)) + Z^{-2}(-5Y(Z) + 2U(Z)) = 0$$

$$Y(Z) = U(Z) + \underbrace{Z^{-1}\left(U(Z) - 3Y(Z) + \underbrace{Z^{-1}(-2U(Z) + 5Y(Z))}_{X_1(Z)}\right)}_{X_2(Z)}$$

State Space فراغ الحالة

1. الانتقال من المعادلة الفرقية إلى فراغ الحالة بالطريقة المتداخلة

$$X_1(Z) = Z^{-1}(-2U(Z) + 5Y(Z)) \Rightarrow \boxed{ZX_1(Z) = -2U(Z) + 5Y(Z)}$$

$$X_2(Z) = Z^{-1}(U(Z) - 3Y(Z) + X_1(Z)) \Rightarrow \boxed{ZX_2(Z) = U(Z) - 3Y(Z) + X_1(Z)}$$

$$Y(Z) = U(Z) + X_2(Z)$$

$$\boxed{ZX_1(Z) = -2U(Z) + 5Y(Z)}$$

نعوض علاقة Y

$$ZX_1(Z) = -2U(Z) + 5(U(Z) + X_2(Z)) = 5X_2(Z) + 3U(Z)$$

$$\boxed{ZX_2(Z) = U(Z) - 3Y(Z) + X_1(Z)}$$

نعوض علاقة Y

$$ZX_2(Z) = U(Z) - 3(U(Z) + X_2(Z)) + X_1(Z) = X_1(Z) - 3X_2(Z) - 2U(Z)$$

$$Y(Z) = U(Z) + X_2(Z)$$

State Space فراغ الحالة

1. الانتقال من المعادلة الفرقية إلى فراغ الحالة بالطريقة المتداخلة

ومنه نستنتج فراغ الحالة بالشكل

$$x_1(k+1) = 5x_2(k) + 3u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) - 3x_2(k) - 2u(k)$$

$$y(k) = x_2(k) + u(k)$$

فراغ الحالة بالشكل المصفوفي

$$\boxed{\begin{gathered}\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + [1]u(k)\end{gathered}}$$

State Space فراغ الحالة

2. الانتقال من فراغ الحالة إلى المعادلة الفرقية

نظام خطي متقطع ممثل بمعادلات الحالة والخرج التالية:

$$x_1(k+1) = 2x_2(k) - u(k)$$
$$x_2(k+1) = 3x_1(k) + 6x_2(k) + u(k)$$
$$y(k) = x_2(k) + u(k)$$

المطلوب إيجاد المعادلة الفرقية الممثلة لهذا النظام.

الحل: نوجد مصفوفات الحالة والخرج.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = [1]$$

State Space فراغ الحالة

2. الانتقال من فراغ الحالة إلى المعادلة الفرقية

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = [1]$$

باستخدام القاعدة:

$$\boxed{H(Z) = C(ZI - A)^{-1}B + D}$$

$$ZI - A = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & -2 \\ -3 & Z-6 \end{bmatrix} \rightarrow (ZI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} Z-6 & 2 \\ 3 & Z \end{bmatrix}}{Z^2 - 6Z - 6}$$

$$C(ZI - A)^{-1} = [0 \quad 1] \frac{\begin{bmatrix} Z-6 & 2 \\ 3 & Z \end{bmatrix}}{Z^2 - 6Z - 6} = \frac{[3 \quad Z]}{Z^2 - 6Z - 6}$$

$$C(ZI - A)^{-1}B + D = \frac{[3 \quad Z]}{Z^2 - 6Z - 6}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \frac{-3 + Z}{Z^2 - 6Z - 6} + 1$$

State Space فراغ الحالة

2. الانتقال من فراغ الحالة إلى المعادلة الفرقية

$$H(Z) = \frac{-3 + Z}{Z^2 - 6Z - 6} + \frac{Z^2 - 6Z - 6}{Z^2 - 6Z - 6}$$

$$H(Z) = \frac{Z^2 - 5Z - 9}{Z^2 - 6Z - 6}$$

نقسّم على أكبر قوة لمعامل التأخير z

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{1 - 5Z^{-1} - 9Z^{-2}}{1 - 6Z^{-1} - 6Z^{-2}}$$

المعادلة الفرقية

$$\boxed{y(k) - 6y(k-1) - 6y(k-2) = u(k) - 5u(k-1) - 9u(k-2)}$$

النظام المستمر والمتقطع في MATLAB

لتمثيل تابع النقل المستمر التالي في ماتلاب

$$G(s) = \frac{10}{s^2+6s+8}$$

نستخدم التعليمة tf

```
>> G = tf([10],[1,6,8])

G =

        10
  -------------
  s^2 + 6 s + 8

Continuous-time transfer function.
```

النظام المستمر والمتقطع في MATLAB

لتحويل تابع النقل المستمر التالي إلى متقطع بزمن تقطيع T وفق طريقة Tustin

$$G(s) = \frac{10}{s^2+6s+8}$$

أولا نقوم بتمثيله بالشكل المستمر ثم نستخدم التعليمة

```
>> Gz=c2d(G,T,'tustin')
```

من أجل T=0.01 يكون

```
>> Gz=c2d(G,0.01,'tustin')

Gz =

  0.0002427 z^2 + 0.0004853 z + 0.0002427
  ---------------------------------------
          z^2 - 1.941 z + 0.9418

Sample time: 0.01 seconds
Discrete-time transfer function.
```

تمثيل النظام المتقطع في Arduino

لنأخذ النظام الخطي المتقطع التالي:

$$y(k) + 3y(k-1) - 5y(k-2) = u(k) + u(k-1) - 2u(k-2)$$

أولا نقوم بعزل اشارة الخرج بالشكل

$$y(k) = -3y(k-1) + 5y(k-2) + u(k) + 5u(k-1) - 2u(k-2)$$

سوف نتعرف كيف يمكن تطبيق هذا النظام المتقطع في لوحة تطوير Arduino باستخدام بيئة Arduino IDE