The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics
Physics Without Frontiers

Assignment #6
PHYSICS LATAM
21 August 2024. Trieste, Italy

Relatividad General y Cosmología

Lecturers Esteban Chalbaud & Daniel Galviz
Teaching Assistant: Lina Castiblanco, Blanca Hergueta & Ruben Campos
PhysicsLatam.com

Fecha de entrega: 2 Septiembre 2024. 5:59 pm (GMT-4)

— Problemas —

6.1 Dinámica del campo escalar durante la inflación

El Lagrangiano para un campo escalar en un espacio-tiempo curvo es

$$L = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right] \tag{1}$$

donde $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ es el determinante del tensor métrico:

- Evalúe el Lagrangiano para un campo homogéneo $\phi = \phi(t)$ en un espacio-tiempo FLRW. A partir de la ecuación de Euler-Lagrange, determine la ecuación de movimiento para el campo escalar.

- Cerca del mínimo del potencial del inflatón, podemos escribir $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \cdots$. Haciendo el ansatz $\phi(t) = a^{-3/2}(t)\chi(t)$, demuestre que la ecuación de movimiento se convierte en

$$\ddot{\chi} + \left(m^2 - \frac{3}{2}\dot{H} - \frac{9}{4}H^2\right)\chi = 0 \tag{2}$$

  Suponiendo que $m^2 \gg H^2 \sim \dot{H}$, encuentre $\phi(t)$.

- Muestre que la densidad promedio de este campo escalar actúa como un fluido de materia (dust) sin presión. Hint: interprete la densidad como función del factor de escala a y compárela con la densidad de energía para el fluido de materia (dust).

6.2 Cantidad de inflación

Las ecuaciones de movimiento de la parte homogénea del inflatón son:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad 3M_{\rm pl}^2 H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \tag{3}$$

- Para el potencial $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, use la aproximación de rodamiento lento para obtener las soluciones inflacionarias

  $$\phi(t) = \phi_I - \sqrt{\frac{2}{3}} m M_{\rm pl} t, \quad a(t) = a_I \exp\left[\frac{\phi_I^2 - \phi^2(t)}{4M_{\rm pl}^2}\right] \tag{4}$$

  donde $\phi_I > 0$ es el valor del campo al inicio de la inflación ($t_I \equiv 0$).

- ¿Cuál es el valor de ϕ cuando termina la inflación? Encuentre una expresión para el número de e-folds. Si $V(\phi_I) \sim M_{\rm pl}^4$, estime el número total de e-folds de inflación.

- Repita para el potencial del bosón de Higgs:

  $$V(\phi) = \lambda\left(\phi^2 - v^2\right)^2, \tag{5}$$

  donde $v = 246$ GeV. Interprete el resultado.

6.3 Ondas Gravitacionales en el vacío

Para realizar una descripción perturbativa de la gravedad, considere un sistema de coordenadas (U, x) del espacio-tiempo M, en el cual la métrica g toma la forma $g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ con:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{6}$$

donde η denota la métrica plana de Minkowski [1]. Y limitemos nuestro interés en un sistema de coordenadas donde el régimen de gravedad débil se traduce en $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$.[2].

(a) Muestre que:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{7}$$

(b) Muestre a continuación que los símbolos de Christoffel se leen:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\left(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}\right). \tag{8}$$

(c) Muestre luego que, en el orden en el que estamos trabajando,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu}\right), \tag{9}$$

con $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = h^\mu{}_\mu$ y $\Box$ siendo el D'Alembertiano del espacio plano, $\Box = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

(d) Demuestre que esto se puede convertir en

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\nu} + \partial_\nu \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\mu} - \Box h_{\mu\nu}\right), \tag{10}$$

con $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}$, siendo la perturbación inversa de traza.

El siguiente paso es lidiar con la libertad de calibre correspondiente a las transformaciones de coordenadas. Suponga que hacemos una buena transformación de coordenadas, tal que $x^\mu \to y^\mu(x) = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ con $\|\epsilon^\mu\| \ll 1$ y $\|\partial_\sigma \epsilon^\mu\| \ll 1$:

(e) Comience con la transformación de la métrica g y demuestre que

$$g_{\mu\nu}(y) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y) - \partial_\mu \epsilon_\nu(y) - \partial_\nu \epsilon_\mu(y) \tag{11}$$

(f) Ahora podemos volver a la parte d) y notar que si:

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{12}$$

hay una notable simplificación en el tensor de Ricci. Fijar el calibre es equivalente a encontrar una transformación de coordenadas específica ϵ^μ. Muestre que para una perturbación dada de la métrica h, haciendo una transformación de coordenadas por ϵ con:

$$\Box \epsilon^\nu = \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}, \tag{13}$$

se reduce al el calibre de Lorenz.

(g) Una vez en el calibre de Lorenz, demuestre que la ecuación linealizada de Einstein se lee:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{14}$$

En este punto, podemos especializarnos en el caso de la solución de vacío; es decir, no nos preocupamos por cómo se ha originado una onda gravitacional, sino que nos gustaría saber cómo se propagaría una onda existente.

(h) Verifique que la onda plana

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu} \exp\left(i\left(k^\lambda x_\lambda + \phi\right)\right), \tag{15}$$

con k constante, a simétrica constante y fase constante ϕ, es de hecho una solución a la ecuación linealizada de Einstein al vacío, si k es similar a la luz.

6.4 Momento angular de las ondas gravitacionales

1. Comenzando por la acción Einstein-Hilbert obtenga para una perturbación de la métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ muestre que:

$$S_E = -\frac{c^3}{64\pi G}\int d^4x \Big[\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta} - \partial_\mu h \partial^\mu h \ +2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\rho h^\rho_\nu] \tag{16}$$

2. Extraiga la expresión siguiente usando los grados de libertad físicos:

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{64\pi G}\partial_\mu h^{\mathrm{TT}}_{ij}\partial^\mu h^{\mathrm{TT}}_{ij} \tag{17}$$

3. Obtenga la expresión para la tasa de emisión de momento angular emitido por la onda gravitacional:

$$\frac{dJ^i}{dt} = \frac{c^3}{32\pi G}\int r^2 d\Omega \left\langle -\epsilon^{ikl}\dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ab}x^k\partial^l h^{\mathrm{TT}}_{ab} + 2\epsilon^{ikl}\dot{h}^{\mathrm{TT}}_{al}h^{\mathrm{TT}}_{ak}\right\rangle \tag{18}$$

donde $\langle ... \rangle$ denota el promedio sobre varias longitudes de onda. Hint: derive la expresión para momento angular usando el teorema de Noether y considere que a un tiempo $t + \delta t$ el frente de onda ha barrido un volumen: $d^3x = r^2(cdt)d\Omega$.