Tarea #1 Relatividad General Physics Latam

Manuel Angel Garcia M.

June 25, 2024

1 Manifold Diferencial

a)

- **Espacio Topológico** Sea X un conjunto y sea T una colección de subconjuntos de X. Se llama espacio topológico a (X, T) si cumplen las siguientes propiedades:
  - $\emptyset$ y X están en T.
  - Para $\{u_i \in T \mid i \in I\}$, $\bigcup_i u_i \in T$
  - Si $u_1, u_2 \in T \rightarrow u_1 \cap u_2 \in T$

  T es llamado topología.

- **Manifold Diferenciables** Sea M un espacio de Haussdorff, M es un manifold diferenciables si tiene la siguiente estructura:
  - Sea $M = U_\alpha U_\alpha$ de un recubrimiento abierto
  - Hay un mapa continuo e invertible $\phi_\alpha : u_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(u_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$
  - Para todo α, β tenemos $\phi_\alpha(u_\alpha \cap u_\beta)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, y las funciones de transición:

    $$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(u_\alpha \cap u_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(u_\alpha \cap u_\beta)$$

    Son C^∞-funciones. (u_α, ϕ_α) es llamado un chart de coordenadas y $\{(u_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ es llamado Atlas.

- **Manifold Diferenciable con Frontera** Es un espacio topológico que es localmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$ o al *half-space* $H^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$ para $0 \leq i \leq n$.

b) La definición de S^n

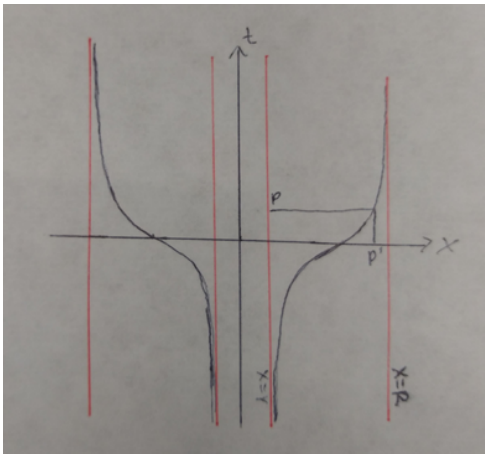
$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$$

- **Hausdorff** La esfera S^n es un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ el cual es un espacio de Hausdorff por lo que S^n también es Hausdorff.

- **Base Contable** La esfera S^n es un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ el cual tiene una base contable por lo tanto S^n también es contable.

2 Difeomorfismo

a) Tenemos:



$$t = \tan\left[\left(x - \frac{R+r}{2}\right)\frac{\pi}{R-r}\right] \qquad\qquad x = \frac{R+r}{2} + \frac{R-r}{\pi}\tan^{-1} t \tag{1}$$

El mapeo es:

$$\theta' = \theta \qquad\qquad t' = \frac{R+r}{2} + \frac{R-r}{\pi}\tan^{-1} t$$

$\theta' = \theta$ claramente es suave.
Para t':

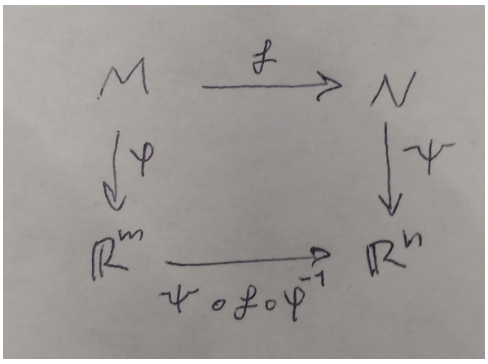
$$\frac{dt'}{dt} = \left(\frac{R-r}{\pi}\right)\frac{1}{1+t^2} \qquad \frac{d^2t'}{dt} = \left(\frac{R-r}{\pi}\right)\frac{2t}{(1+t^2)^2} \qquad \frac{d^3t'}{dt^3} = \left(\frac{R-r}{\pi}\right)\frac{6t^2-2}{(1+t^2)^3}$$

Cuando sigamos derivando solo se van a añadir potencias mayores en el numerador por lo que t' es suave.

b)

c) Sea M, N manifolds suaves con atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ con mapa $f : M \to N$

$$\psi_\beta \circ f \circ (\phi_\alpha)^{-1} : \ \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(v)) \to \psi_\beta(V_\beta) \qquad \text{Es suave}$$



Como el mapeo f va de un subespacio euclidiano a otro subespacio euclidiano entonces el mapeo f debe ser suave.

3 Coordenadas esferoidales

$$
\begin{aligned}
x &= r \sinh\chi \sin\theta \cos\varphi \\
y &= r \sinh\chi \sin\theta \sin\varphi \\
z &= r \cosh\chi \cos\theta
\end{aligned}
$$

a)

$$
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\chi,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} r\cosh\chi\sin\theta\cos\varphi & r\sinh\chi\cos\theta\cos\varphi & -r\sinh\chi\sin\theta\sin\varphi \\ r\cosh\chi\sin\theta\sin\varphi & r\sinh\chi\cos\theta\sin\varphi & r\sinh\chi\sin\theta\cos\varphi \\ r\sinh\chi\cos\theta & -r\cosh\chi\sin\theta & 0 \end{pmatrix}
$$

b) Tenemos que el elemento de linea es:

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

De la matriz de transformación obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
dx &= r\cosh\chi\sin\theta\cos\varphi\, d\chi + r\sinh\chi\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sinh\chi\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi \\
dy &= r\cosh\chi\sin\theta\sin\varphi\, d\chi + r\sinh\chi\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sinh\chi\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi \\
dz &= r\sinh\chi\cos\theta\, d\chi - r\cosh\chi\sin\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

Reemplazando en ds^2:

$$ds^2 = r^2(\sin^2\theta + \sinh^2\chi)\, d\chi^2 + r^2(\sin^2\theta + \sinh^2\chi)\, d\theta^2 + r^2\sinh^2\chi\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

c)

$$g_{\chi\chi} = h_\chi^2 = r^2(\sin^2\theta + \sinh^2\chi) \qquad g_{\theta\theta} = h_\theta^2 = r^2(\sin^2\theta + \sinh^2\chi) \qquad g_{\phi\phi} = h_\phi^2 = r^2\sinh^2\chi\sin^2\theta$$

4 Curvas en el ESpacio Euclidiano

$$
\begin{aligned}
x^i(\lambda) &= (\lambda, (\lambda-1)^2, -\lambda) \\
x^i(\mu) &= (\cos\mu, \sin\mu, \mu - 1) \\
x^i(\sigma) &= (\sigma^2, \sigma^3 + \sigma^2, \sigma)
\end{aligned}
$$

$$p: \ (x,y,z) = (1,0,-1)$$

a)

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dx^i}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= (1,0,-1) \\
\left.\frac{dx^i}{d\mu}\right|_{\mu=1} &= (-\sin\mu, \cos\mu, 1)_{\mu=0} = (0,1,1) \\
\left.\frac{dx^i}{d\sigma}\right|_{\sigma=1} &= (2\sigma, 3\sigma^3 + 2\sigma, 1)_{\sigma=-1} = (-2,1,1)
\end{aligned}
$$

b) para $f = x^2 + y^2 + z^2$
Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -y$$

- $$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\lambda}$$
  $$\frac{dx}{d\lambda} = 1 \qquad \frac{dy}{d\lambda} = 2(\lambda - 1) \qquad \frac{dz}{d\lambda} = -1$$
  Reemplazando y evaluando en el punto p
  $$\left.\frac{df}{d\lambda}\right|_p = 2\lambda = 2$$

- $$\frac{df}{d\mu} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\mu} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\mu}$$
  $$\frac{dx}{d\mu} = -\sin\mu \qquad \frac{dy}{d\mu} = \cos\mu \qquad \frac{dz}{d\mu} = 1$$
  Reemplazando y evaluando en el punto p
  $$\left.\frac{df}{d\mu}\right|_p = -2\cos\mu + \cos\mu = 1$$

- $$\frac{df}{d\sigma} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\sigma}$$
  $$\frac{dx}{d\sigma} = 2\sigma \qquad \frac{dy}{d\sigma} = 3\sigma^2 + 2\sigma \qquad \frac{dz}{d\sigma} = 1$$
  Reemplazando y evaluando en el punto p
  $$\left.\frac{df}{d\sigma}\right|_p = 6\sigma + 3\sigma^2 = -3$$

5 Vectores y Tensores

$$X^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad V^\mu = (-1, 2, 0, -2)$$

a)

$$X^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$X_{\mu}^{\ \nu} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

c)

$$X^{(\mu\nu)} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

d)

$$X_{[\mu\nu]} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e)

$$X^{\lambda}_{\lambda} = -4$$

f)

$$V^{\mu}V_{\mu} = 7$$

g)

$$V_{\mu}X^{\mu\nu} = [4, -2, 5, 7]$$

6 Derivada de Lie

a) Formula general: $(\mathcal{L}_x\omega)(Y) = X(\omega(y)) - \omega([X, Y])$

$$[X, Y] = X^{\nu}\partial_{\nu}Y^{\mu} - Y^{\nu}\partial_{\nu}X^{\mu} \qquad X(\omega(Y)) = X^{\mu}\partial_{\mu}(\omega_{\nu}Y^{\nu})$$

Reemplazando en la formula general:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X\omega)(Y) &= X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) \\ &= X^{\mu}\partial_{\mu}(\omega_{\nu}Y^{\nu}) - \omega_{\mu}(X^{\nu}\partial_{\nu}Y^{\mu} - Y^{\nu}\partial_{\nu}X^{\mu}) \\ &= (X^{\mu}\partial_{\mu}\omega_{\nu} + \omega_{\mu}\partial_{\nu}X^{\mu})Y^{\nu} \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a que:

$$(\mathcal{L}_X\omega)_{\nu} = X^{\mu}\partial_{\mu}\omega_{\nu} + \omega_{\mu}\partial_{\nu}X^{\mu}$$

b) para un tensor $(0, g)$ g.

De la formula general: $(\mathcal{L}_x g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(X, [Y, Z])$

Tomando en cuenta que $Y = \partial_{\mu}$ $Z = \partial_{\nu}$ $[X, \partial_{\mu}] = [X^{\mu}\partial_{\mu}, \partial_{\rho}] = -(\partial_{\rho}X^{\mu})\partial_{\mu}$

reemplazando lo anterior en la formula general:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} &= X(g(\partial_{\mu}, \partial_{\nu})) - g([X, \partial_{\mu}], \partial_{\nu}) - g(\partial_{\mu}, [X, \partial_{\nu}]) \\ &= X^{\rho}\partial_{\rho}g_{\mu\nu} + \partial_{\rho}X^{\mu}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}X^{\rho}g_{\mu\rho} \end{aligned}$$