

Tarea # 6 Relatividad General Physics Latam

Manuel Garcia.

September 1, 2024

1 Dinámica del campo escalar durante la inflación

El Lagrangiano para un campo escalar en un espacio-tiempo curvo es

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ es el determinante del tensor métrico.

a) Para un campo homogéneo $\phi = \phi(t)$ en un espacio FLRW, el determinante del tensor métrico es

$$g = -a^6(t)$$

Evaluando los términos de la ecuación de movimiento para $\phi(t)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = a^3 \dot{\phi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 3a^2 \dot{a} \dot{\phi} + a^3 \ddot{\phi}$$

Por lo tanto la ecuación de movimiento resulta

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble.

b)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\phi} &= m^2 \phi \\ \dot{\phi} &= -\frac{3\chi\dot{a} - 2a\dot{\chi}}{2a^{5/2}} \\ \ddot{\phi} &= \frac{15\chi\dot{a}^2 - 6a\chi\ddot{a} - 12a\dot{a}\dot{\chi} + 4a^2\ddot{\chi}}{4a^{7/2}} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento y usando que $H = \frac{\dot{a}}{a}$, $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$

$$\ddot{\chi} + \left(m^2 - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \chi = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow \ddot{\chi} + \left(m^2 - \frac{3}{2} \dot{H} - \frac{9}{4} H^2 \right) \chi = 0 \quad (2)$$

Para $m^2 \gg H^2 \approx \dot{H}$ La ecuación de movimiento se reduce a un oscilador armónico

$$\ddot{\phi} + m^2 \phi = 0 \quad (3)$$

Con solución

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-imt} \quad (4)$$

1.1 3. Solución para $\phi(t)$

Suponiendo que $m^2 \gg H^2 \sim \dot{H}$, la solución para $\phi(t)$ es:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-imt}$$

1.2 4. Densidad promedio como fluido de materia

La densidad de energía del campo escalar es:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

En el límite en que la presión es despreciable, la densidad de energía del campo se comporta como un fluido de materia sin presión, $\rho \propto a^{-3}$.