Relatividad General y Cosmología

Lecturers Esteban Chalbaud & Daniel Galviz
Teaching Assistant: Lina Castiblanco, Blanca Hergueta & Ruben Campos
PhysicsLatam.com

Fecha de entrega: 25 June 2024. 5:59 pm (GMT-4)

— Problemas —

1.1 Manifold Diferencial

(a) Defina un espacio topológico, una manifold topológica, una manifold diferencial, una manifold diferencial con frontera.[1]

(b) Demuestre que S^n es un una manifold diferencial y cumple todos los postulados anteriores; además, demuestre que S^n es una manifold diferencial compacta.

1.2 Difeomorfismo

Dadas dos manifolds diferenciables M y N, un mapa diferenciable $f\colon M \to N$ es un difeomorfismo si es una biyección y su inversa $f^{-1}\colon N \to M$ también es diferenciable. Si estas funciones son diferenciables de manera continua un número infinito de veces, se llama un C^∞-difeomorfismo. Dos manifolds M y N son difeomorfas (usualmente denotado $M \simeq N$) si existe un C^∞-difeomorfismo f de M a N.

(a) Solo porque una manifold (manifold diferencial) sea topológicamente no trivial, no significa necesariamente que no pueda ser cubierta con un solo chart. En contraste con el círculo S^1, demuestra que el cilindro infinito $\mathbf{R} \times S^1$ puede ser cubierto con solo un chart, construyendo explícitamente el mapa.

(b) Demuestra que el toro bidimensional T^2 es una manifold, construyendo explícitamente un atlas apropiado: (Obviamente no uno maximal).

(c) Sea M, N dos manifolds suaves y sean los atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ para M y N, respectivamente. Muestre que el mapa $f : M \to N$ es suave, si para cada para α y β, el mapa $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ es suave en su dominio de definición.

(d) Demuestre que el cilindro infinito $\mathbf{R} \times S^1$ no es difeomorfo al toro T^2 .

[1] En español, una manifold diferencial se denomina usualmente variedad diferencial, o simplemente variedad. Sin embargo, este término puede llevar a confusión con una variedad algebraica, que también se conoce comúnmente como variedad. Para evitar esta confusión, nos referiremos a una variedad diferencial como **manifold.**

1.3 Coordenadas Esferoidales

Las coordenadas esferoidales se pueden usar para simplificar el problema de Kepler en la mecánica celeste. Están relacionadas con las coordenadas cartesianas habituales (x, y, z) del espacio euclidiano tridimensional por

$$\begin{aligned} x &= r \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cosh \chi \cos \theta \end{aligned}$$

(a) ¿Cuál es la matriz de transformación de coordenadas $\partial x^{\mu} / \partial x^{\nu'}$ que relaciona (x, y, z) con (χ, θ, ϕ)?

(b) ¿Cómo se ve el elemento de línea ds^2 en coordenadas esferoidales?

(c) Encuentre las componentes del nuevo tensor métrico $g_{\mu\nu}(r, \chi, \theta, \phi)$.

1.4 Curvas en el Espacio Euclidiano

En el espacio euclidiano tridimensional, sea p el punto con coordenadas $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. Considera las siguientes curvas que pasan por p:

$$\begin{aligned} x^i(\lambda) &= \big(\lambda, (\lambda - 1)^2, -\lambda\big) \\ x^i(\mu) &= (\cos \mu, \sin \mu, \mu - 1) \\ x^i(\sigma) &= \big(\sigma^2, \sigma^3 + \sigma^2, \sigma\big) . \end{aligned}$$

(a) Calcula los componentes de los vectores tangentes a estas curvas en p en la base de coordenadas $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$.

(b) Sea $f = x^2 + y^2 - yz$. Calcula $df/d\lambda, df/d\mu$ y $df/d\sigma$.

1.5 Vectores y Tensores

Sea un tensor $X^{\mu\nu}$ y un vector V^{μ}, con componentes

$$X^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad V^{\mu} = (-1, 2, 0, -2).$$

Encuentra los componentes de:

(a) $X^{\mu}{}_{\nu}$

(b) $X_{\mu}{}^{\nu}$

(c) $X^{(\mu\nu)}$

(d) $X_{[\mu\nu]}$

(e) $X^{\lambda}{}_{\lambda}$

(f) $V^{\mu} V_{\mu}$

(g) $V_{\mu} X^{\mu\nu}$

1.6 Derivada de Lie

(a) Utiliza la regla de Leibniz para derivar la fórmula para la derivada de Lie de una 1-forma ω, válida en cualquier base de coordenadas:

$$(\mathcal{L}_X\omega)_\mu = X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu X^\nu. \tag{1}$$

Sugerencia: considera $(\mathcal{L}_X\omega)(Y)$ para un campo vectorial Y.

(b) Muestra que la derivada de Lie de un tensor $(0,2)$ g es

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = X^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\partial_\nu X^\rho + g_{\rho\nu}\partial_\mu X^\rho. \tag{2}$$