Relatividad General y Cosmología

Lecturers Esteban Chalbaud & Daniel Galviz
Teaching Assistant: Lina Castiblanco, Blanca Hergueta & Ruben Campos
PhysicsLatam.com

Fecha de entrega: 06 August 2024. 5:59 pm (GMT-4)

— Problemas —

4.1 Preámbulo: Agujeros Negros

Hacer un resumen detallado de cada capítulo del 4 al 9 del libro '*Black Holes: The Key to Understanding the Universe*' de Brian Cox y Jeff Forshaw. (Mínimo 900 palabras por capítulo, usar únicamente LaTeX para esto).

4.2 Agujero negro de Reissner-Nordström

La métrica del agujero negro de Reissner-Nordström viene dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)$$

(a) Encontrar el tensor de Ricci $R^{\mu\nu}$.

(b) Para los 3 casos $M > |Q|, M = |Q|, M < |Q|$, encontrar las ubicaciones de los horizontes de eventos.

(c) Convertir las coordenadas a $v = t + r^*$, donde

$$r^* = r + \frac{1}{2k_+} \ln \frac{|r - r_+|}{r_+} + \frac{1}{2k_-} \ln \frac{|r - r_-|}{r_-}$$

donde $k_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2}$. Encontrar la métrica en estas nuevas coordenadas (v, r, θ, ϕ). Encontrar la ubicación de la singularidad de la métrica.

(d) Probar que $\frac{\partial}{\partial v}$ es un vector de Killing.

(e) Encontrar la norma de $\frac{\partial}{\partial v}$. Determinar bajo qué condiciones es tipo tiempo, nulo y tipo espacio.

4.3 Energía en la métrica de Reissner-Nordström

En la presencia de un campo electromagnético, una partícula de carga e y masa m obedece la versión relativista de la 2da ley de Newton, $f^\mu = ma^\mu$, o explícitamente,

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{m}F^\mu{}_\nu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{1}$$

donde $F_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de Maxwell, que se pueden escribir en términos del 4-potencial como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Imagine que dicha partícula se mueve a través de un espaciotiempo de Reissner-Nordström, descrito por la métrica

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = -\left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\big[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2\big], \tag{2}$$

donde $r_S = 2GM$ y $r_Q^2 = Q^2G$. Considere unidades en donde $c = 4\pi\epsilon_0 = 1$.

(a) Muestre que la energía de la partícula está dada por

$$E = m\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{eQ}{r}. \tag{3}$$

Luego, determine si es o no una cantidad conservada.

(b) ¿Podrá un proceso tipo-Penrose realizar trabajo para un agujero negro cargado?, ¿Cuál es el cambio en la masa del agujero negro, δM, para el máximo proceso físico?

4.4 Métrica de Eguchi-Hanson:

La métrica de Eguchi-Hanson es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein que describe un espacio-tiempo vacío. Esta métrica es una de las soluciones más simples que representa un tipo de espacio-tiempo conocido como un instantón, el cual tiene aplicaciones en la teoría cuántica de campos y en la teoría de cuerdas. La métrica de Eguchi-Hanson es un ejemplo de un instantón gravitacional.

Sea $R^a_b = \frac{1}{2} R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}\, e^a_\mu e^\nu_b \, dx^\rho \wedge dx^\sigma$ la forma de curvatura.

(a) Probar que $\mathrm{tr}(R^n) = 0, \quad \forall n \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1$. Pista: $\mathrm{tr}(R^2) = R^a_b \wedge R^b_a$.

(b) La primera clase de Pontryagin [1] es una de las clases características (invariantes topológicos asociadas a fibrados vectoriales) utilizadas en topología diferencial y geometría. En el caso del fibrado tangente de una manifold M, la primera clase de Pontryagin puede ser descrita en términos de la curvatura de una conexión sobre el fibrado. Si R es la forma de curvatura de una conexión sobre el fibrado E, la primera clase de Pontryagin se puede expresar de la siguiente manera:

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}(R^2). \tag{4}$$

Mostrar que p_1 es cerrada, es decir, $dp_1 = 0$.

(c) Métrica de Eguchi-Hanson:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r^4}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{4}\left(1 - \frac{a}{r^4}\right)\sigma_3^2 + \frac{r^2}{4}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right),$$

donde

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \cos\psi\, d\theta + \sin\theta \sin\psi\, d\phi,\\
\sigma_2 &= \sin\psi\, d\theta - \sin\theta\cos\psi\, d\phi,\\
\sigma_3 &= d\psi + \cos\theta\, d\phi,
\end{aligned}$$

y θ, ϕ, ψ son los ángulos de Euler en S^3:

$$\theta \in [0,\pi), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \psi \in [0, 4\pi), \quad r \in \left[\frac{a}{2}, \infty\right).$$

Encontrar la forma de conexión y mostrar que $R^a{}_b$ es autodual, es decir, $R^a{}_b = *R^a{}_b$.

(d) Encontrar explícitamente $P_1 = \int p_1$ sobre el dominio dado arriba.

[1] La primera clase de Pontryagin tiene aplicaciones fundamentales en física, particularmente en teorías gauge, teoría de cuerdas y gravedad cuántica. Estas aplicaciones se basan en la capacidad de las clases de Pontryagin para capturar características topológicas de los fibrados y campos gauge, proporcionando información crucial sobre la estructura y consistencia de las teorías físicas.