The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics
Physics Without Frontiers

Assignment #3
PHYSICS LATAM
10 July 2024. Trieste, Italy

Relatividad General y Cosmología

Lecturers Esteban Chalbaud & Daniel Galviz
Teaching Assistant: Lina Castiblanco, Blanca Hergueta & Ruben Campos
PhysicsLatam.com

Fecha de entrega: 23 July 2024. 5:59 pm (GMT-4)

— Problemas —

3.1 Derivada Covariante

(a) Sea $T = T^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_r}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}$. Entonces, ∇T puede ser escrito localmente por

$$\nabla T = W^{j_1\cdots j_s}_{ii_1\cdots i_r} dx^i\otimes dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_r}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}. \tag{1}$$

Demostrar que

$$W^{j_1\cdots j_s}_{ii_1\cdots i_r} = \frac{\partial T^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^i} + \sum_{m=1}^{s}\Gamma^{j_m}_{iq} T^{j_1\cdots j_{m-1}qj_m\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r} - \sum_{\ell=1}^{r}\Gamma^{p}_{ii_\ell} T^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_{\ell-}} \tag{2}$$

(b) Si escribimos $g = g_{ij}dx^i\otimes dx^j$, la métrica inducida sobre T^*M es denotada por $g^{-1} = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}$ donde $\left(g^{ij}\right)$ es la matriz inversa de (g_{ij}). Entonces, existe una métrica inducida sobre $T^*M\otimes T^*M$ y la denotamos por g. Es decir, si $S = S_{ij}dx^i\otimes dx^j$ y $T = T_{k\ell}dx^k\otimes dx^\ell$, Entones su producto interno es definido como

$$\langle S, T\rangle_g = g(S,T) = S_{ij}T_{k\ell}\,g\left(dx^i\otimes dx^j, dx^k\otimes dx^\ell\right) = g^{ik}g^{j\ell}S_{ij}T_{k\ell}. \tag{3}$$

Para cualquier tensor $T\in\Gamma\left(M, T^*M\otimes T^*M\right)$, el operador *traza* es definido como

$$\operatorname{tr}_g T := g^{ij}T_{ij} \tag{4}$$

Para cualquier $S, T\in\Gamma\left(M, T^*M\otimes T^*M\right)$ y $X\in\Gamma(M, TM)$, demostrar que

$$X(g(S,T)) = g\left(\nabla_X S, T\right) + g\left(S, \nabla_X T\right). \tag{5}$$

En particular, si $S = g$, demostrar que

$$X\left(\operatorname{tr}_g T\right) = \langle g, \nabla_X T\rangle_g \,. \tag{6}$$

Localmente es

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\operatorname{tr}_g T\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(g^{k\ell}T_{k\ell}\right) = g^{k\ell}\left(\nabla_i T_{k\ell}\right). \tag{7}$$

(c) Sea $d\mathrm{vol} = \sqrt{\det\left(g_{mn}\right)}dx^1\cdots dx^n$ la forma de volumen. Demuestre que:

$$\frac{\partial\sqrt{\det\left(g_{mn}\right)}}{\partial x^j} = \frac{\sqrt{\det\left(g_{mn}\right)}}{2}g^{pq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial\log\det\left(g_{mn}\right)}{\partial x^j} = g^{pq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^j}, \tag{8}$$

es decir el elemento de volumen $d\mathrm{vol}$ satisface:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}d\mathrm{vol} = \frac{1}{2}\frac{\partial\log\det\left(g_{mn}\right)}{\partial x^j}d\mathrm{vol} = \frac{1}{2}g^{pq}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^j}d\mathrm{vol} \tag{9}$$

3.2 Tensor de Riemann

(a) Demostrar la expresión del tensor de Riemannn en términos del los símbolos de Christofel usando los **dos** métodos dados en clase.

(b) Demostrar las 5 propiedades de simetría del tensor de curvatura de Riemann.

(c) Demostrar que

$$R_{ijk\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{i\ell}}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^\ell} - \frac{\partial^2 g_{j\ell}}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^\ell}\right) + g_{pq}\left(\Gamma^p_{ik}\Gamma^q_{j\ell} - \Gamma^p_{i\ell}\Gamma^q_{jk}\right) \tag{10}$$

(d) Demostrar que se cumple la siguiente identidad de Ricci para

$$T = T^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_r}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}, \tag{11}$$

$$\nabla_k\nabla_\ell T^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r} - \nabla_\ell\nabla_k T^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r} = \sum_{m=1}^{s} R^{j_m}_{k\ell p}T^{j_1\cdots j_{m-1}pj_{m+1}\cdots j_s}_{i_1\cdots i_r} - \sum_{t=1}^{r} R^q_{k\ell i_t}T^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_{t-1}qi_{t+1}\cdots i_r}. \tag{12}$$

3.3 Ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda_{g_{\mu\nu}} = 0\ . \tag{13}$$

(a) Demostrar que $R_{\mu\nu} = 3kg_{\mu\nu}$. Encontrar k.

(b) Supongamos que

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{1}{f(r)}\,dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right) \tag{14}$$

Calcular $\Gamma_{\mu\nu}$ de las siguiente dos maneras:

(i) Calcular $\Gamma_{\mu\nu}$ usando

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right) . \tag{15}$$

(ii) Calcular $\Gamma_{\mu\nu}$ usando la ecuación de Euler-Lagrange para el Lagragiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \ . \tag{16}$$

Las ecuaciones de movimiento para cada variable deben compararse con la expresión de la geodésica para poder extraer los símbolos de Christoffel.

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \, . \tag{17}$$

(c) Calcular todas las componentes de $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, $R_{\mu\nu}$ y R con la métrica del problema (b) de las siguiente dos maneras:.

(i) Usando las expresiones deducidas en clase:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{18}$$

$$R_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} \tag{19}$$

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \tag{20}$$

(ii) Existe una forma más sencilla de realizar estos cálculos usando la forma de conexión y la forma de curvatura. Siga los pasos descritos por David Tong en sus notas de la sección *3.4.3 An Example: the Schwarzschild Metric* para calcular $R_{\mu\nu\lambda\rho}, R_{\mu\nu}$ y R.

(d) Supongamos que la ecuación de Einstein tiene una solución como en el Problema (b). Encontrar $f(r)$.

(e) Calcular todos los vectores de Killing para el caso $\Lambda > 0$ y $\Lambda < 0$.

3.4 Espacio de Sitter

El espacio de Sitter de 5 dimensiones viene dado por

$$ds^2 = -dx_0^2 + \sum_{i=1}^{4} dx_i^2$$

(a) Coordenadas estáticas (t, r, φ, θ). Encontrar la métrica inducida.

(b) Encontrar la forma de curvatura $R_{\mu\nu\rho\sigma}$.

(c) $R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho})$. Encontrar la constante de proporcionalidad.

(d) Coordenadas globales $(t, \theta_i)\,, i = 1, \ldots, 4$. Encontrar la métrica inducida.