Relatividad General y Cosmología

Lecturers Esteban Chalbaud & Daniel Galviz
Teaching Assistant: Lina Castiblanco, Blanca Hergueta & Ruben Campos
PhysicsLatam.com

Fecha de entrega: 20 August 2024. 5:59 pm (GMT-4)

— Problemas —

5.1 Agujeros negros en otras dimensiones

Se da una métrica de agujero negro asintóticamente Lifshitz en $2+1$ dimensiones por:

$$d\tau^2 = \frac{r^{2z}}{l^{2z}}\left(1-\frac{ml^2}{r^2}\right)dt^2 - \frac{l^2}{r^2}\left(1-\frac{ml^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\phi^2. \tag{1}$$

Demuestra que $z=1$ produce el agujero negro BTZ. En general (para una métrica diagonal con $g_{00} \neq g_{11}^{-1}$) la expresión para la gravedad superficial se convierte en:

$$\kappa = \frac{1}{2}\left[\sqrt{-g^{00}g^{11}}\left|\frac{dg_{00}}{dr}\right|\right]_{r=r_+}. \tag{2}$$

Para z general, encuentra la temperatura de Hawking a partir de la gravedad superficial. La masa del agujero negro en el caso $z=3$ es dada por (Myung, 2012)

$$M = \frac{r_+^4}{4G_3 l^4} \tag{3}$$

y la entropía es $S = A/G_3$ donde A es el área (es decir, el perímetro) del agujero. Demuestre que:

$$dM = T_{bh}dS_{bh}. \tag{4}$$

5.2 Identidades utiles

Demuestre las siguientes identidades:

$$|M|^{-1}\delta|M| = M^{ik}\delta M_{ik} \tag{5}$$

y

$$\operatorname{tr}\left(M - \frac{1}{D}(\operatorname{tr} M)\right)^2 = \operatorname{tr}\left(M^2\right) - \frac{1}{D}(\operatorname{tr} M)^2 \tag{6}$$

considere que M es una matriz invertible. Muestre que usando esta última identidad para el shear, que aparece en la ecuación de Raychaudhuri, definido como:

$$\sigma^i_j \equiv \frac{1}{2}\left(g^{ik}\dot{g}_{jk} - \frac{1}{D-1}\delta^i_j g^{kl}\dot{g}_{kl}\right) \tag{7}$$

se puede escribir como:

$$\operatorname{tr}\sigma^2 = \frac{1}{4}\left(g^{ik}\dot{g}_{jk}g^{jl}\dot{g}_{il}\right) - \frac{1}{D-1}\theta^2. \tag{8}$$

con θ:

$$\theta \equiv \frac{1}{2}g^{ik}\dot{g}_{ik} \tag{9}$$

5.3 Edad del Universo

Suponga que el universo actual es plano, con materia y una constante cosmológica, siendo esta última con una densidad de energía que permanece constante en el tiempo. Integre la ecuación:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho(t) + \frac{\rho_{\rm cr} - \rho_0}{a^2(t)}\right] \tag{10}$$

para encontrar la edad actual del universo reescribiéndola como:

$$dt = H_0^{-1}\frac{da}{a}\left[\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right]^{-1/2} \tag{11}$$

donde Ω_Λ es la razón entre la densidad de energía en la constante cosmológica y la densidad crítica. Integre desde $a = 0$ (cuando $t = 0$) hasta el día de hoy en $a = 1$ para obtener la edad del universo actual. En ambos casos, la integral se puede resolver analíticamente.

(a) Primero, realice la integral en el caso en qué $\Omega_\Lambda = 0$.

(b) Ahora realice la integral en el caso en qué $\Omega_\Lambda = 0.7$. Para un H_0 fijo, ¿cuál de los dos universos es más antiguo?

(c) Repita el cálculo en ambas situaciones usando la constante de Hubble reducida con los siguientes valores $h = 0.67$ (CMB) $h = 0.73$ (Supernovas) $h = 0.69$ (Ondas gravitacionales). Discuta el resultado.

5.4 Integrando las ecuaciones de Boltzmann

Considere partículas masivas y antipartículas con masa m y densidades numéricas $n(m,t)$ y $\bar{n}(m,t)$. Si interactúan con una sección eficaz σ a una velocidad v determine

(a) Explique por qué la evolución de $n(m,t)$ está descrita por

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -3\frac{\dot{a}}{a}n - n\bar{n}\langle\sigma v\rangle + P(t), \tag{12}$$

e identifica el significado físico de cada uno de los términos que aparecen en esta ecuación.

(b) Considerando la evolución de las antipartículas, muestra que

$$(n - \bar{n})a^3 = \text{const.} \tag{13}$$

(c) Suponiendo simetría inicial entre partículas y antipartículas, muestra que

$$\frac{1}{a^3}\frac{d\left(na^3\right)}{dt} = -\langle\sigma v\rangle\left[n^2 - n_{\text{eq}}^2\right], \tag{14}$$

donde n_{eq} denota la densidad numérica de equilibrio.

(d) Defina $Y \equiv n/T^3$ y $x \equiv m/T$, y muestra que podemos escribir la ecuación diferencial:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2}\left[Y^2 - Y_{\text{eq}}^2\right], \tag{15}$$

donde $\lambda \equiv m^3\langle\sigma v\rangle/H(T = m)$. Si λ es constante, muestra que en tiempos tardíos Y se acerca a un valor dado por:

$$Y_\infty = \frac{x_f}{\lambda}, \tag{16}$$

donde x_f es el tiempo de freeze-out.

(e) Resuelva numéricamente la ecuación diferencial para Y considerando los casos donde $\lambda = 10^{10}$ (materia oscura) y $\lambda = 10^{20}$ (materia bariónica) y realice un plot en escala log-log como función de X para cada caso y determine el valor numérico de Y_∞ integrando la ecuación diferencial para valores de X muy grandes. ¿Cuál es la densidad de energía reliquia en cada caso?..