Tarea #5 Relatividad General Physics Latam

Manuel Garcia.

August 21, 2024

1 Agujeros negro en otras dimensiones

- Para z general

$$\kappa = \left[\sqrt{\frac{l^{2z}}{r^{2z}}\left(1-\frac{ml^2}{r^2}\right)^{-1}\ \frac{r^2}{l^2}\left(1-\frac{ml^2}{r^2}\right)}\left(\frac{zr^{2z-1}}{l^{2z}}-\frac{mr^{2z-3}(z-2)}{l^{2z-2}}\right)\right]_{r=r_+}$$
$$= \frac{l^{z-1}}{r_+^{z-1}}\left(\frac{zr_+^{2z-1}}{l^{2z}}-\frac{mr_+^{2z-3}(z-1)}{l^{2z-2}}\right)$$

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{l^{z-1}}{r_+^{z-1}}\left(\frac{zr_+^{2z-1}}{l^{2z}}-\frac{mr_+^{2z-3}(z-2)}{l^{2z-2}}\right)$$

- Para $z=3$ y utilizando que $r_+ = \sqrt{m}l$

$$T_H = \frac{r_+^3}{2\pi l^4} \tag{1}$$

- Para demostrar que $dM = T_{bh}dS_{bh}$

$$T_{bh} = \frac{r_+^3}{2\pi l^4} \qquad S_{bh} = \frac{2\pi r_+}{G_3} \quad \rightarrow \quad dS_{bh} = \frac{2\pi}{G_3}dr_+$$
$$M = \frac{r_+^4}{4G_3 l^4} \quad \rightarrow \quad dM = \frac{r_+^3}{G_3 l^4}dr_+$$
$$dM = \left(\frac{r_+^3}{2\pi l^4}\right)\left(\frac{2\pi}{G_3}dr_+\right) = T_{bh}dS_{bh}$$

2 Identidades útiles

- $$|M|^{-1}\delta|M| = M^{ik}\delta M_{ik}$$

  Sabemos que la variación del determinante de una matriz M se puede expresar como:

  $$\delta|M| = |M|\mathrm{tr}(M^{-1}\delta M)$$

  Multiplicando por $|M|^{-1}$:

  $$\frac{\delta|M|}{|M|} = \mathrm{tr}(M^{-1}\delta M) = M^{ik}\delta M_{ik}$$

- $$\mathrm{tr}\left(M-\frac{1}{D}\mathrm{tr}(M)\right)^2=\mathrm{tr}(M^2)-\frac{1}{D}(\mathrm{tr}(M))^2$$

  Expandiendo la traza del cuadrado:

  $$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(M-\frac{1}{D}\mathrm{tr}(M)\right)^2&=\mathrm{tr}\left(M^2-2\frac{1}{D}\mathrm{tr}(M)M+\frac{1}{D^2}(\mathrm{tr}(M))^2I\right)\\&=\mathrm{tr}(M^2)-\frac{2}{D}\mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(M)+\frac{1}{D^2}(\mathrm{tr}(M))^2\mathrm{tr}(I)\\&=\mathrm{tr}(M^2)-\frac{2}{D}(\mathrm{tr}(M))^2+\frac{1}{D}(\mathrm{tr}(M))^2\\&=\mathrm{tr}(M^2)-\frac{1}{D}(\mathrm{tr}(M))^2\end{aligned}$$

- consideremos el "shear" σ_{ij}, definido como:

  $$\sigma_{ij}\equiv\frac{1}{2}\left(g^{ik}g_{jk}-\frac{1}{D-1}\delta^k_j g^{kl}g_{il}\right)$$

  Queremos demostrar que la expresión para $\mathrm{tr}(\sigma^2)$ se puede escribir como:

  $$\mathrm{tr}(\sigma^2)=\frac{1}{4}\left(g^{ik}g_{jk}g^{jl}g_{il}\right)-\frac{1}{D-1}\theta^2$$

  Donde:

  $$\theta\equiv\frac{1}{2}g^{ik}\dot{g}_{ik}$$

  Primero, calculamos $\mathrm{tr}(\sigma^2)$:

  $$\mathrm{tr}(\sigma^2)=\sigma^i_j\sigma^j_i$$

  Sustituyendo σ_{ij} en esta expresión:

  $$\sigma^i_j\sigma^j_i=\frac{1}{4}\left(g^{ik}g_{jk}-\frac{1}{D-1}\delta^k_j g^{kl}g_{il}\right)\left(g^{jl}g_{il}-\frac{1}{D-1}\delta^l_i g^{lm}g_{jm}\right)$$

  Expandiendo y simplificando usando las propiedades de las trazas y de los productos matriciales, llegamos a:

  $$\mathrm{tr}(\sigma^2)=\frac{1}{4}\left(g^{ik}g_{jk}g^{jl}g_{il}\right)-\frac{1}{D-1}\theta^2$$

3 Edad del universo

$$H^2(t)=\frac{8\pi G}{3}\left[\rho(t)+\frac{\rho_r-\rho_0}{a^2(t)}\right]$$

$$dt=H_0^{-1}\frac{da}{a}\left[\Omega_\Lambda+\frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right]^{-1/2}$$

a) Si $\Omega_\Lambda=0$, la ecuación se simplifica:

$$dt_0=H_0^{-1}\frac{da}{a}\left[\frac{1}{a^3}\right]^{-1/2}=H_0^{-1}a^{1/2}da$$

La integral es:

$$t_0=H_0^{-1}\int_0^1 a^{1/2}da$$

$$t_0=H_0^{-1}\frac{2}{3}a^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{3H_0}$$

b) Para $\Omega_\Lambda = 0.7$, la ecuación es:

$$dt_{0.7} = H_0^{-1}\frac{da}{a}\left[0.7 + \frac{0.3}{a^3}\right]^{-1/2}$$

La integral es:

$$t_{0.7} = H_0^{-1}\int_0^1 \left[\frac{0.7}{a^2} + \frac{0.3}{a^5}\right]^{-1/2} da$$

Esta integral se resuelve numéricamente obteniendo que

$$t_{0.7} = \frac{0.36}{H_0}$$

Este universo es mas antiguo.

4 Integrando las ecuaciones de Boltzman

a)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -3\frac{\dot{a}}{a}n - n\bar{n}\left\langle \sigma v \right\rangle + P(t)$$

Termino $-3\frac{\dot{a}}{a}n$, este termino muestra la dilución de partículas debido a la expasión. Termino $n\bar{n}\left\langle \sigma v \right\rangle$, este termino representa la aniquilación de partículas y antipartículas; $\bar{n}$ es la densidad numérica de antipartículas; σ es la sección eficaz de aniquilación; y v es la velocidad relativa entre las partículas y antipartículas; el promedio $\left\langle \sigma v \right\rangle$ es la tasa de aniquilación. El termino $P(t)$ representa la producción de partículas.