Relatividad General y Cosmología

Lecturers Esteban Chalbaud & Daniel Galviz
Teaching Assistant: Lina Castiblanco, Blanca Hergueta & Ruben Campos
PhysicsLatam.com

Fecha de entrega: 09 July 2024 5:59 pm (GMT-4)

— Problemas —

2.1 Formas

(a) Sea ω una p-forma y η una q-forma. Demuestra que la derivada exterior satisface las propiedades

- $d(d\omega) = 0$
- $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$
- $d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega)$ donde $\varphi : M \to N$ para manifolds M y N.
- $\mathcal{L}_V \omega = V \lrcorner (d\omega) + d(V \lrcorner \omega)$. (la fórmula mágica de Cartan)[1].
- $\mathcal{L}_V(d\omega) = d\mathcal{L}_V(\omega)$.

(b) Sea un campo vectorial χ y una 2-formas ω

$$\chi = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1}$$

$$\omega = x^2 z dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dz. \tag{2}$$

Calcular

- $d\omega$.
- $\mathcal{L}_\chi \omega$.
- $\chi \lrcorner \omega$.
- $\Phi^* d\omega$, donde $\Phi(u, v, s, t) = (uv, vs, 3t)$.

[1] $V\lrcorner$ es el producto interno, otra notación es i_V.

2.2 Lie Bracket

Considera dos campos vectoriales X e Y, y el conmutador de los vectores, $[X,Y]$, que actúa sobre las funciones f como

$$[X,Y] \equiv X(Y(f)) - Y(X(f)) \tag{3}$$

- Demuestra que el producto de los dos campos vectoriales, XY, no es un nuevo campo vectorial porque no satisface la regla de Leibniz, y que el conmutador $[X,Y]$ es un nuevo vector dado que sí satisface la regla.
- Demuestra que los componentes del Lie Bracket en una base de coordenadas están dados por

$$[X,Y]^\mu = X^\lambda \partial_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \partial_\lambda X^\mu, \tag{4}$$

  y que se cumple que $[Y,X]^\mu = -[X,Y]^\mu$.

- Demuestra explícitamente que $[X,Y]^\mu$ transforma como un vector bajo transformaciones de coordenadas.
- Confirma que el corchete de Lie obedece la identidad de Jacobi

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0. \tag{5}$$

2.3 Diagramas de Espacio-Tiempo

Considera un espacio-tiempo bidimensional (temporal+espacial) con $c = 1$, la velocidad de la luz.

(a) Dibuje un diagrama de espacio-tiempo (x,t), presente y de una breve explicación de los siguientes objetos

- Un evento.
- Un rayo de luz.
- La línea de mundo de un objeto que viaja con velocidad $v < 1$.
- La línea de mundo de un objeto que viaja con velocidad $v > 1$.
- La línea de tiempo de un objeto acelerado.

(b) Dibuje un diagrama de espacio-tiempo. (x,t) de un observador $\mathcal{O}$ en reposo. En este diagrama de espacio-tiempo, dibuje la línea de mundo de un observador $\mathcal{O}'$ que viaja con velocidad v medida en el sistema de referencia en reposo de $\mathcal{O}$. ¿Cuáles son los ejes de coordenadas del diagrama de espacio-tiempo de $\mathcal{O}'$?
Sugerencia: ¿Cuál es su eje de tiempo? ¿Cómo se construye entonces el eje espacial?

La paradoja de los gemelos es un problema clásico en la teoría de la relatividad especial que ilustra cómo el tiempo se dilata para un observador en movimiento respecto a otro en reposo. Imagina dos gemelos, Alice y Bob. Alice se embarca en un viaje espacial, mientras que Bob se queda en la Tierra. El viaje de Alice la lleva a una estrella a 4 años luz de distancia de la Tierra a una velocidad constante de $0.8c$, donde c es la velocidad de la luz. Después de llegar a la estrella, Alice regresa inmediatamente a la Tierra a la misma velocidad.

(c) Dibuja un diagrama espacio-tiempo para ilustrar el viaje de Alice y Bob en el marco de referencia de Bob (la Tierra) y un diagrama para ilustrar el viaje de Alice y Bob en el marco de referencia de Alice (la nave espacial) . Marca los eventos clave en el diagrama, como la partida y llegada de Alice, y los puntos de inflexión en la línea de universo de Alice. Explica cómo el diagrama de Alice ayuda a resolver la aparente paradoja.

(d) Utiliza la transformación de Lorentz para calcular el tiempo que experimenta Alice durante su viaje de ida y vuelta a la estrella, y calcula el tiempo que experimenta Bob durante el viaje completo de Alice, desde su partida hasta su regreso.

2.4 Observadores de Rindler

Considera un observador en un espacio-tiempo plano de Minkowski sometido a una aceleración propia uniforme a. Este observador se conoce como observador de Rindler. Por simplicidad, la wordline de este observador se describe mediante el movimiento hiperbólico en el plano x-t.

(a) Demuestre que la línea de universo del observador de Rindler está dada por:

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a^2}. \tag{6}$$

(b) Derive la transformación de coordenadas entre las coordenadas de Minkowski (t, x) y las coordenadas de Rindler (τ, ξ):

$$t = \frac{1}{a}\sinh(a\tau) \tag{7}$$

$$x = \frac{1}{a}\cosh(a\tau) + \xi. \tag{8}$$

Aquí, τ es el tiempo propio del observador de Rindler, y ξ es la coordenada espacial de Rindler.

(c) Para un observador de Rindler estacionario ($\xi = 0$), calcula la aceleración propia a en función del tiempo propio τ.

2.5 El Grupo de Lorentz

Considera el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ de cuatro dimensiones $\mathbb{R}^4$ equipado con la métrica de Minkowski η. Esta es una forma bilineal simétrica, no degenerada $\eta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\eta\left(e_\mu, e_\nu\right) \equiv \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \text{para } \mu = \nu = 0 \\ +1 & \text{para } \mu = \nu = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{9}$$

para la base ortonormal estándar $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ en $\mathbb{R}^4$. Linealidad implica que

$$\eta(x, y) = x^T \cdot \eta \cdot y \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R}^{1,3} \tag{10}$$

donde η es una matriz con entradas $\eta_{\mu\nu}$. Para $x, y \in \mathbb{R}^{1,3}$ escribimos $x \cdot y = \eta(x, y)$ y $x^2 = x \cdot x$. En relatividad especial, las transformaciones de Lorentz, Λ, que relacionan dos marcos inerciales, preservan la distancia en el espacio-tiempo:

$$(x - y)^2 = (\Lambda(x - y))^2 \text{ para todos } \quad x, y \in \mathbb{R}^{1,3}. \tag{11}$$

Esto lleva a la definición del grupo de Lorentz

$$\mathrm{O}(1, 3) = \left\{\Lambda \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\right\} \tag{12}$$

(a) Muestre que $\Lambda \in O(1, 3)$ efectivamente cumple la ec. (11).

(b) Muestre que $\mathrm{O}(1, 3)$ efectivamente es un grupo.

(c) Muestre que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ escrita en componentes se lee $\eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu}$.

(d) Muestre que $\left|\Lambda^0_0\right| \geq 1$ y que $|\det \Lambda| = 1$. Con esto argumente que el grupo de Lorentz consta de cuatro ramas (que no están conectadas de forma continua entre sí). Sugerencia: Usa $\det(1 + \epsilon\lambda) = 1 + \epsilon \operatorname{tr} \lambda + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$.

(e) Muestre que el subconjunto $\mathrm{SO}^+(1, 3) = \left\{\Lambda \in O(1, 3) \mid \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1\right\}$ forma un subgrupo de $\mathrm{O}(1, 3)$, llamado el grupo de Lorentz ortocrono propio.

2.6 Base inducida por coordenadas

Sea $\{e_\mu\}$ una base de campos vectoriales, con

$$[e_\mu, e_\nu] = \gamma^\rho{}_{\mu\nu} e_\rho. \tag{13}$$

Las funciones $\gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ se conocen como componentes del conmutador. Para una elección de coordenadas $\{x^\mu\}$, a menudo trabajamos con la base inducida por coordenadas $e_\mu = \{\partial_\mu\}$. Demuestre que, en este caso, $[e_\mu, e_\nu] = 0$.

El propósito de esta pregunta es mostrar el converso: que $[e_\mu, e_\nu] = 0$ solo para una base inducida por coordenadas. Considere una base general $\{e_\mu\}$ y la base dual $\{f^\mu\}$ de uno-formas. En general, estas pueden expandirse como

$$e_\mu = e_\mu{}^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} \quad \text{y} \quad f^\mu = f^\mu{}_\rho dx^\rho \tag{14}$$

donde $e_\mu{}^\rho f^\nu{}_\rho = \delta_\mu{}^\nu$. Demuestre que

$$e_\mu{}^\sigma \frac{\partial e_\nu{}^\lambda}{\partial x^\sigma} - e_\nu{}^\sigma \frac{\partial e_\mu{}^\lambda}{\partial x^\sigma} = \gamma^\rho{}_{\mu\nu} e_\rho{}^\lambda \tag{15}$$

Deduzca por lo tanto que

$$e_\mu{}^\sigma e_\nu{}^\lambda \frac{\partial f^\rho{}_\lambda}{\partial x^\sigma} - e_\nu{}^\sigma e_\mu{}^\lambda \frac{\partial f^\rho{}_\lambda}{\partial x^\sigma} = -\gamma^\rho{}_{\mu\nu}, \tag{16}$$

y finalmente que

$$\frac{\partial f^\rho{}_\sigma}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial f^\rho{}_\lambda}{\partial x^\sigma} = -\gamma^\rho{}_{\mu\nu} f^\mu{}_\lambda f^\nu{}_\sigma \tag{17}$$

Utilice este resultado, junto con el lema de Poincaré, para mostrar que si $[e_\mu, e_\nu] = 0 \ \forall \mu, \nu$ entonces la base está inducida por coordenadas.