Tarea #5 Relatividad General Physics Latam

Manuel Garcia.

August 20, 2024

1 Agujeros negro en otras dimensiones

$$g^{00} = \frac{r^6}{l^6}\left(1 - \frac{ml^2}{r^2}\right) \qquad g^{11} = -\frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{ml^2}{r^2}\right)^{-1} \tag{1}$$

$$\frac{dg_{00}}{dr} = \frac{6r^5}{l^6} - \frac{4mr^3}{l^4} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{-g^{00}g^{11}}\left|\frac{dg_{00}}{dr}\right|\right]_{r=r^+} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{r^6}{l^6} - \frac{mr^4}{l^4}\right)\left(\frac{r^2}{l^2} - m\right)^{-1}}\left(\frac{6r^5}{l^6} - \frac{4mr^3}{l^4}\right)\right] \\
&= \frac{r^5}{l^6}\left[\frac{3r^2}{l^2} - 2m\right]\Bigg|_{r=r^+} \\
&= \frac{r_+^5}{l^6}
\end{aligned}$$

Reemplazando en la temperatura de Hawking $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$

$$T_H = \frac{r^5}{2\pi l^6}$$

2 Identidades útiles

- $$|M|^{-1}\delta|M| = M^{ik}\delta M_{ik}$$

  Sabemos que la variación del determinante de una matriz M se puede expresar como:

  $$\delta|M| = |M|\mathrm{tr}(M^{-1}\delta M)$$

  Multiplicando por $|M|^{-1}$:

  $$\frac{\delta|M|}{|M|} = \mathrm{tr}(M^{-1}\delta M) = M^{ik}\delta M_{ik}$$

- $$\mathrm{tr}\left(M - \frac{1}{D}\mathrm{tr}(M)\right)^2 = \mathrm{tr}(M^2) - \frac{1}{D}(\mathrm{tr}(M))^2$$

  Expandiendo la traza del cuadrado:

  $$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(M - \frac{1}{D}\mathrm{tr}(M)\right)^2 &= \mathrm{tr}\left(M^2 - 2\frac{1}{D}\mathrm{tr}(M)M + \frac{1}{D^2}(\mathrm{tr}(M))^2 I\right)\\ &= \mathrm{tr}(M^2) - \frac{2}{D}\mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(M) + \frac{1}{D^2}(\mathrm{tr}(M))^2\mathrm{tr}(I)\\ &= \mathrm{tr}(M^2) - \frac{2}{D}(\mathrm{tr}(M))^2 + \frac{1}{D}(\mathrm{tr}(M))^2\\ &= \mathrm{tr}(M^2) - \frac{1}{D}(\mathrm{tr}(M))^2\end{aligned}$$

- consideremos el "shear" σ_{ij}, definido como:

  $$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(g^{ik}g_{jk} - \frac{1}{D-1}\delta^k_j g^{kl} g_{il}\right)$$

  Queremos demostrar que la expresión para $\mathrm{tr}(\sigma^2)$ se puede escribir como:

  $$\mathrm{tr}(\sigma^2) = \frac{1}{4}\left(g^{ik}g_{jk}g^{jl}g_{il}\right) - \frac{1}{D-1}\theta^2$$

  Donde:

  $$\theta \equiv \frac{1}{2}g^{ik}\dot{g}_{ik}$$

  Primero, calculamos $\mathrm{tr}(\sigma^2)$:

  $$\mathrm{tr}(\sigma^2) = \sigma^i_j \sigma^j_i$$

  Sustituyendo σ_{ij} en esta expresión:

  $$\sigma^i_j\sigma^j_i = \frac{1}{4}\left(g^{ik}g_{jk} - \frac{1}{D-1}\delta^k_j g^{kl}g_{il}\right)\left(g^{jl}g_{il} - \frac{1}{D-1}\delta^l_i g^{lm}g_{jm}\right)$$

  Expandiendo y simplificando usando las propiedades de las trazas y de los productos matriciales, llegamos a:

  $$\mathrm{tr}(\sigma^2) = \frac{1}{4}\left(g^{ik}g_{jk}g^{jl}g_{il}\right) - \frac{1}{D-1}\theta^2$$

3 Edad del universo

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho(t) + \frac{\rho_r - \rho_0}{a^2(t)}\right]$$

$$dt = H_0^{-1}\frac{da}{a}\left[\Omega_\Lambda + \frac{1-\Omega_\Lambda}{a^3}\right]^{-1/2}$$

a) Si $\Omega_\Lambda = 0$, la ecuación se simplifica:

$$dt_0 = H_0^{-1}\frac{da}{a}\left[\frac{1}{a^3}\right]^{-1/2} = H_0^{-1}a^{1/2}da$$

La integral es:

$$t_0 = H_0^{-1}\int_0^1 a^{1/2}da$$

$$t_0 = H_0^{-1}\frac{2}{3}a^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3H_0}$$

b) Para $\Omega_\Lambda = 0.7$, la ecuación es:

$$dt_{0.7} = H_0^{-1} \frac{da}{a} \left[0.7 + \frac{0.3}{a^3} \right]^{-1/2}$$

La integral es:

$$t_{0.7} = H_0^{-1} \int_0^1 \left[\frac{0.7}{a^2} + \frac{0.3}{a^5} \right]^{-1/2} da$$

Esta integral se resuelve numéricamente obteniendo que

$$t_{0.7} = \frac{0.36}{H_0}$$

(b) Integral para $\Omega_\Lambda = 0.7$

Para $\Omega_\Lambda = 0.7$, la ecuación es:

$$dt_{0.7} = H_0^{-1} \frac{da}{a} \left[0.7 + \frac{0.3}{a^3} \right]^{-1/2}$$

La integral es:

$$t_{0.7} = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{da}{a \left[0.7 + \frac{0.3}{a^3} \right]^{1/2}}$$

Esta integral se resuelve numéricamente.

(c) Repetición del cálculo para diferentes valores de h

Repetimos el cálculo para $h = 0.67$, $h = 0.73$ y $h = 0.69$.

Para $\Omega_\Lambda = 0$:

$$t_0 = \frac{2}{H_0} = \frac{2}{100h \text{ km/s/Mpc}} = \frac{2}{100 \cdot 3.24 \times 10^{-18} h \text{ s}^{-1}}$$

Para $\Omega_\Lambda = 0.7$, t_0 se calculará numéricamente, pero estará afectado por el valor de H_0 (que depende de h).