Problema 1.1: Disco compacto (CD)

(a) Rapidez angular del disco

La rapidez tangencial es constante y vale:

$$v = 1.3\,\mathrm{m/s}$$

Para encontrar la rapidez angular usamos:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Para $r = 23\,\mathrm{mm} = 0.023\,\mathrm{m}$:

$$\omega_{\text{interna}} = \frac{1.3}{0.023} \approx 56.52\,\mathrm{rad/s}$$

Para $r = 58\,\mathrm{mm} = 0.058\,\mathrm{m}$:

$$\omega_{\text{externa}} = \frac{1.3}{0.058} \approx 22.41\,\mathrm{rad/s}$$

Convirtiendo a revoluciones por minuto (rpm):

$$\mathrm{rpm} = \frac{\omega \cdot 60}{2\pi}$$

$$\omega_{\text{interna}} \approx \frac{56.52 \cdot 60}{2\pi} \approx 539.5\,\mathrm{rpm}$$
$$\omega_{\text{externa}} \approx \frac{22.41 \cdot 60}{2\pi} \approx 213.9\,\mathrm{rpm}$$

(b) Número de revoluciones

Tiempo total:

$$t = 74 \times 60 + 33 = 4473\,\mathrm{s}$$

Suponiendo una variación lineal de la velocidad angular, el número de vueltas se calcula con:

$$N = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f) \cdot \frac{t}{2\pi}$$

$$N = \frac{1}{2}(56.52 + 22.41) \cdot \frac{4473}{2\pi} \approx 22.87 \cdot \frac{4473}{2\pi} \approx 16269\,\text{revoluciones}$$

(c) Aceleración angular

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{22.41 - 56.52}{4473} \approx -0.00763\,\mathrm{rad/s^2}$$

Problema 1.2: Molécula de oxígeno (O_2)

1. **Momento de inercia alrededor del eje z.**
   Dos átomos de masa $m = 2.66\times10^{-26}$ kg separados por $d = 1.21\times10^{-10}$ m giran en torno a su centro a distancia $r = d/2$ cada uno.

$$I \;=\; 2\,m\,r^2 \;=\; 2\,m\big(\tfrac{d}{2}\big)^2 \;=\; m\,\frac{d^2}{2} \;=\; (2.66\times10^{-26})\,\frac{(1.21\times10^{-10})^2}{2} \;\approx\; 1.95\times10^{-46}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

2. **Energía cinética rotacional.**
   Para velocidad angular $\omega = 4.60\times10^{12}$ rad/s,

$$K = \tfrac{1}{2}\,I\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}\,(1.95\times10^{-46})\,(4.60\times10^{12})^2 \approx 2.06\times10^{-21}\,\mathrm{J}.$$

Problema 1.3: Formación de una estrella de neutrones

Una estrella de radio inicial $R_i = 1.0\times10^4\,\mathrm{km} = 1.0\times10^7\,\mathrm{m}$ gira con periodo $T_i = 30\,\mathrm{d} = 30\cdot86400\,\mathrm{s} = 2.592\times10^6\,\mathrm{s}$. Tras la supernova colapsa a radio $R_f = 3.0\,\mathrm{km} = 3.0\times10^3\,\mathrm{m}$.

Asumiendo que se conserva el momento angular y que la estrella es aproximadamente una esfera homogénea ($I\propto R^2$),

$$T_f = T_i\big(\tfrac{R_f}{R_i}\big)^2 = (2.592\times10^6)\,\big(\tfrac{3.0\times10^3}{1.0\times10^7}\big)^2 \approx 0.23\,\mathrm{s}.$$

Problema 1.4: Estado de tensión

El tensor de tensiones se denota genéricamente por $T = T_{ij}(x,y,z)$. Aplicamos las ecuaciones de equilibrio estático (ecuaciones de Cauchy):

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i = 1,2,3,$$

con $b = (b_x, b_y, b_z)$ constante.

1. Escribimos para cada componente:

$$\frac{\partial T_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial y} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial z} + b_i = 0, \quad i = x,y,z.$$

   De estas tres ecuaciones se extraen relaciones entre A, B, C, D y b_x, b_y, b_z.

2. Resolviendo esas relaciones, se obtienen explícitamente las componentes

$$b_x = \ldots, \quad b_y = \ldots, \quad b_z = \ldots$$

   (dependerán linealmente de A, B, C, D).

3. Se verifica sustituyendo de nuevo en las ecuaciones de equilibrio que $\nabla\cdot T + b = 0$ se cumple identicamente.

Problema 1.5: Deformaciones combinadas en un cilindro

- Datos: $L_0 = 1.0\,\mathrm{m}$, $r_0 = 0.1\,\mathrm{m}$, $F = 2000\,\mathrm{kN}$, $P = 50\,\mathrm{MPa}$, $E = 200\,\mathrm{GPa}$, $K = 166.67\,\mathrm{GPa}$.

1. **Deformación axial ϵ_z y ΔL.**

$$\epsilon_z = -\frac{F}{A\,E}, \quad A = \pi r_0^2, \quad \Delta L = \epsilon_z L_0.$$

2. **Deformación volumétrica por presión externa.**
Para material isótropo:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{P}{K}.$$

3. **Contracción radial total Δr.**
Usando coeficiente de Poisson $\nu = \frac{3K-2E}{2(3K+E)}$, la contracción debida a la carga axial y a la presión externa se suma:

$$\Delta r = -\nu\,\epsilon_z\,r_0 - \frac{P\,r_0}{E}(1-\nu).$$

Problema 1.6: La fosa de las Marianas

Profundidad $h = 11\,\mathrm{km}$, presión $P = 1.13 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}$, densidad superficial $\rho_0 = 1.03 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

1. ΔV de $1\,\mathrm{m}^3$:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{P}{K_{\mathrm{agua}}}, \quad K_{\mathrm{agua}} \approx 2.2 \times 10^9\,\mathrm{Pa}, \quad \Delta V = V_0\,\frac{\Delta V}{V_0}.$$

2. Nueva densidad:

$$\rho = \frac{\rho_0 V_0}{V_0 + \Delta V}.$$

3. Comentario sobre (in)compresibilidad: el agua es casi incompresible si las variaciones volumétricas son muy pequeñas ($\Delta V/V_0 \ll 1$), válido en profundidades típicas del océano.

Problema 1.7: Tensión y trabajo en un alambre

Longitud L, módulo Y, área A, alargamiento ΔL.

1. La constante estructural k surge de

$$F = Y\frac{A}{L}\,x \;\Rightarrow\; k = \frac{Y A}{L}.$$

2. Trabajo al estirar ΔL:

$$W = \int_0^{\Delta L} k\, x\, dx = \tfrac{1}{2}\, k\, (\Delta L)^2.$$

Problema 1.8: Huesos de buzos

Módulo volumétrico $K = 15\,\mathrm{GPa}$.

1. Para $\Delta V/V = -0.001$,

$$\Delta P = K\,\frac{\Delta V}{V} = -15 \times 10^9 \cdot (-10^{-3}) = 1.5 \times 10^7\,\mathrm{Pa} \approx 148\,\mathrm{atm}.$$

2. A $1.0 \times 10^4\,\mathrm{Pa/m}$,

$$h = \frac{\Delta P}{1 \times 10^4} = \frac{1.5 \times 10^7}{10^4} = 1.5 \times 10^3\,\mathrm{m}.$$

No es un problema serio, pues rara vez se alcanzan presiones tan altas in situ.

Problema 1.9: Deformación de una varilla vertical

Profundidad $L = 180\,\mathrm{m}$, carga $p = 1200\,\mathrm{kgf} \approx 1.2 \times 10^4\,\mathrm{N}$, tensión máxima $\sigma_{\max} = 1000\,\mathrm{kgf/cm^2} = 9.8 \times 10^7\,\mathrm{Pa}$, $\rho = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$.

1. Sección mínima:

$$A = \frac{pg}{\sigma_{\max}}.$$

2. Alargamiento total considerando peso propio:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\rho g A\, x}{Y A}\, dx = \frac{\rho g}{Y}\,\frac{L^2}{2}.$$

Problema 1.10: El tendón de Aquiles

Masa $m = 75\,\mathrm{kg}$, longitud del tendón $L = 0.25\,\mathrm{m}$, área $A = 78 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2}$, $Y = 1470\,\mathrm{MPa}$.

1. Diagrama de cuerpo libre: peso mg hacia abajo, fuerza de reacción del pie, tensión T del tendón hacia arriba.

2. Equilibrio vertical:

$$T = mg \approx 75 \cdot 9.8 = 735\,\mathrm{N} \quad (\,=1\,mg).$$

3. Estiramiento:

$$\Delta L = \frac{T}{YA}L = \frac{735}{1.47 \times 10^9 \cdot 78 \times 10^{-6}} \cdot 0.25 \approx 0.00016\,\mathrm{m} = 0.16\,\mathrm{mm}.$$