Taller #1 Relatividad General

Manuel Garcia.

April 28, 2025

1

Sean dos eventos P_1 y P_2 con coordenadas espacio-temporales en un sistema inercial Σ dadas por

$$P_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3), \quad P_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3),$$

y definamos el intervalo espacio-temporal como:

$$\Delta S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2.$$

Estudiaremos tres casos distintos según el signo de ΔS_{12}^2.

a) Intervalo tipo tiempo: $\Delta S_{12}^2 > 0$

En este caso, el intervalo es tipo tiempo, lo que significa que los dos eventos pueden estar conectados causalmente y existe un sistema de referencia Σ_P en el cual los dos eventos ocurren en el mismo lugar del espacio. Es decir, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ en dicho sistema, por lo que:

$$\Delta S_{12}^2 = c^2 \Delta\tau^2,$$

donde $\Delta\tau$ es el **intervalo de tiempo propio** medido en el sistema Σ_P.

Dado que $t_2 > t_1$ en el sistema Σ, entonces:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(v)\Delta\tau > 0 \Rightarrow \Delta\tau > 0,$$

lo que implica que todos los observadores inerciales relacionados por transformaciones de Lorentz (TL) también observarán que $t_2' > t_1'$. Por tanto, **el orden temporal de los eventos es invariante relativista**.

Este caso también está asociado con el fenómeno de dilatación temporal:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v)\Delta\tau.$$

b) Intervalo tipo luz: $\Delta S_{12}^2 = 0$

Aquí, el intervalo es nulo, y los eventos están conectados por una señal luminosa o por una partícula que viaja a la velocidad de la luz. Entonces:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 \Rightarrow \Delta S^2 = 0.$$

En este caso, el intervalo es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Si en el sistema Σ se cumple que $t_2 > t_1$, entonces para cualquier otro sistema inercial Σ' también se tendrá $t_2' > t_1'$. Por tanto, **el orden temporal de los eventos también es invariante**.

c) Intervalo tipo espacio: $\Delta S_{12}^2 < 0$

Este tipo de intervalo indica que los eventos están separados más en espacio que en tiempo, es decir, no hay una conexión causal entre ellos. En este caso:

$$\Delta S_{12}^2 < 0 \Rightarrow c^2(t_2 - t_1)^2 < (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2.$$

Esto implica que **existe un sistema de referencia** Σ' en el cual ambos eventos son simultáneos ($t'_2 = t'_1$). Además, también existen sistemas donde el orden temporal se invierte ($t'_2 < t'_1$). Esto ocurre porque la simultaneidad no es absoluta en relatividad especial. Por tanto, **el orden temporal de eventos con intervalo tipo espacio no es un invariante relativista**.

Este hecho refleja la imposibilidad de que eventos separados por un intervalo tipo espacio tengan una relación causal, ya que requeriría una velocidad de propagación mayor a c.

2

Sea $x(\lambda)$ la línea de universo de una partícula y λ un parámetro.

a) Cuando $\lambda = \tau$, la cuadrivelocidad está definida como:

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

La cuadria-aceleración es:

$$A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Bajo la métrica de Minkowski $(+,-,-,-)$, el producto interno se define como:

$$U \cdot A = \eta_{\mu\nu} U^\mu A^\nu = U^0 A^0 - \mathbf{U} \cdot \mathbf{A},$$

donde $\mathbf{U}$ y $\mathbf{A}$ son las partes espaciales de los vectores.

Primero, notamos que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

Calculando explícitamente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = 2U_\mu \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 2U_\mu A^\mu = 2(U \cdot A).$$

Por tanto:

$$U \cdot A = 0.$$

- La cuadrivelocidad U^μ se define como:

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Componentes:

$$U^\mu = \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau} \right).$$

El cuadrado de la cuadrivelocidad bajo la métrica de Minkowski $(+,-,-,-)$ es:

$$U^2 = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2.$$

Ahora, por definición del tiempo propio:

$$c^2\, \mathrm{d}\tau^2 = c^2\, \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\,,$$

lo cual implica:

$$\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = c^2,$$

es decir,

$$U^2 = c^2.$$

- La cuadriaceleración A^μ se define como:

$$A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Componentes:

$$A^\mu = \left(\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}\tau^2}, \frac{\mathrm{d}^2x^1}{\mathrm{d}\tau^2}, \frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}\tau^2}, \frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}\tau^2}\right).$$

Ahora calculemos explícitamente el producto $U \cdot A$:

$$U \cdot A = \eta_{\mu\nu} U^\mu A^\nu = U^0 A^0 - U^1 A^1 - U^2 A^2 - U^3 A^3.$$

El cuadrado de la cuadriaceleración es:

$$A^2 = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

A^μ es ortogonal a U^μ y A^μ es de tipo espacio, por lo tanto:

$$A^2 < 0.$$

3

a) En Σ el fotón incidente tiene cuatro-vector

$$k^\mu \;=\; \left(\tfrac{\omega}{c},\, k_x,\, k_y,\, 0\right),$$

donde

$$k_x = \frac{\omega}{c}\cos\theta_i, \qquad k_y = \frac{\omega}{c}\sin\theta_i,$$

y $\omega = |\vec{k}|\, c$. El espejo se mueve a $-v\,\hat{x}$, así que para ir a su reposo hacemos un *boost* con velocidad $+v\,\hat{x}$. Llamamos $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. La transformación de Lorentz en la dirección x es

$$\begin{cases} k'^0 = \gamma\,(k^0 - \beta\, k_x), \\ k'_x = \gamma\,(k_x - \beta\, k^0), \\ k'_y = k_y\,, \end{cases}$$

con $k^0 = \omega/c$. Por tanto:

$$\omega' \equiv c\,k'^0 = c\,\gamma\Big(\tfrac{\omega}{c} - \beta\,\tfrac{\omega}{c}\cos\theta_i\Big) = \omega\,\gamma\,(1 - \beta\cos\theta_i),$$

y el coseno del ángulo en Σ' es

$$\cos\theta'_i = \frac{k'_x}{|\vec{k}'\,|} = \frac{\gamma\big(\tfrac{\omega}{c}\cos\theta_i - \beta\tfrac{\omega}{c}\big)}{\gamma\tfrac{\omega}{c}(1-\beta\cos\theta_i)} = \frac{\cos\theta_i - \beta}{1-\beta\cos\theta_i}.$$

En el marco del espejo, la reflexión especular clásica da

$$\theta'_r = \theta'_i, \qquad \omega' \text{ (frecuencia) invariante.}$$

Por tanto, el vector reflejado es

$$k'^{\,\mu}_r = \Big(\tfrac{\omega'}{c},\, -k'_x,\, k'_y,\, 0\Big).$$

Ahora aplicamos la transformación inversa (boost de $-v\hat{x}$):

$$\begin{cases} k^0_r = \gamma\,(k'^0 + \beta\, k'_x), \\ k_{rx} = \gamma\,(k'_x + \beta\, k'^0), \\ k_{ry} = k'_y. \end{cases}$$

Calculamos

$$k_{rx} = \gamma\Big(-k'_x + \beta\, k'^0\Big) = \gamma\Big[-\gamma\big(k_x - \beta k^0\big) + \beta\,\gamma\big(k^0 - \beta k_x\big)\Big]$$

y de forma análoga para la magnitud $|\vec{k}_r|$. Tras factorizar se llega a

$$\boxed{\cos\theta_r \;=\; \frac{2\,\beta \;+\; (1+\beta^2)\,\cos\theta_i}{1 \;+\; 2\,\beta\,\cos\theta_i \;+\; \beta^2}} \quad (\beta = v/c),$$

b) Si $\vec{v}$ es paralelo al plano yz, entonces en la TL β aparece sólo en las componentes y, z y $\hat{x}$ queda sin "mezclarse". Se sigue que $\cos\theta'_i = \cos\theta_i$ y por simetría de la reflexión $\cos\theta'_r = \cos\theta'_i$. Al regresar a Σ quedará $\cos\theta_r = \cos\theta_i$, luego

$$\theta_r = \theta_i.$$

4

$$f^\mu \;=\; \frac{dp^\mu}{d\tau} \;=\; \gamma(\mathbf{u})\,\frac{dp^\mu}{dt},$$

donde

$$p^\mu = m_0\,U^\mu = m_0\,\gamma(\mathbf{u})\,(c,\mathbf{u}), \quad \gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

a) Escribimos

$$p^\mu = \big(p^0, \mathbf{p}\big) = \big(m_0\gamma c,\ m_0\gamma\,\mathbf{u}\big).$$

Entonces

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{d}{dt}\big(m_0\gamma c\big) = c\,\frac{d}{dt}\big(m_0\gamma\big) = c\,\frac{dm}{dt},$$

y

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Por tanto,

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \big(c\,\tfrac{dm}{dt},\ \mathbf{F}\big),$$

y

$$f^\mu = \gamma(\mathbf{u})\,\frac{dp^\mu}{dt} = \gamma(\mathbf{u})\,\Big(c\,\frac{dm}{dt},\ \mathbf{F}\Big).$$

b) Usamos el hecho de que la cuadrivelocidad y la cuadriaceleración satisfacen

$$U^\mu A_\mu = 0, \quad U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \quad A^\mu = \frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Y tambien que

$$E = p^0 c = mc^2,$$

de modo que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(mc^2).$$

Por otro lado, el trabajo por unidad de tiempo es $\dot{W} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$, y en relatividad $\dot{W} = dE/dt$. Así,

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}.$$

c) Si usamos la relación

$$\frac{dE}{dt} \;=\; \mathbf{F}\cdot\mathbf{u} \implies \frac{1}{c}\,\frac{dE}{dt} \;=\; \frac{1}{c}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{u},$$

y recordamos que $E = c\,p^0$, podemos escribir

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c}\,\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}.$$

Entonces

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \Big(\tfrac{1}{c}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{u},\ \mathbf{F}\Big),$$

y, como antes,

$$f^\mu = \gamma(\mathbf{u})\,\frac{dp^\mu}{dt} = \gamma(\mathbf{u})\,\Big(\tfrac{1}{c}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{u},\ \mathbf{F}\Big).$$

5

a) Escribimos

$$\gamma\, u = \frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \Phi(t),$$

y la ecuación es $\dot{\Phi} = g$. Integrando con $\Phi(0) = 0$:

$$\Phi(t) = g\, t,$$

es decir

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = g\, t.$$

Elevamos al cuadrado:

$$\frac{u^2}{1-u^2/c^2} = g^2 t^2 \implies u^2 \;=\; \frac{g^2 t^2}{1+\frac{g^2 t^2}{c^2}} \;=\; \frac{(gt)^2}{1+(gt/c)^2}\, c^2.$$

Por tanto

$$u(t) \;=\; \frac{g\, t}{\sqrt{1+\left(\frac{g\, t}{c}\right)^2}}.$$

Usamos $\dot{x} = u(t)$. Entonces

$$x(t) = \int_0^t \frac{g\, t'}{\sqrt{1+(gt'/c)^2}}\, dt'.$$

Cambiamos variable $y = (gt')/c$:

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\int_0^{gt/c} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, dy = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+y^2}-1\right]_0^{gt/c} = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+(gt/c)^2}-1\right).$$

Así,

$$\boxed{x(t) = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\left(\frac{g\, t}{c}\right)^2}-1\right).}$$

b) Para aceleración propia constante g es más sencillo usar τ. Sabemos que

$$t(\tau) = \frac{c}{g}\sinh\!\left(\frac{g\,\tau}{c}\right), \qquad x(\tau) = \frac{c^2}{g}\left[\cosh\!\left(\frac{g\,\tau}{c}\right)-1\right].$$

Estas expresiones satisfacen las condiciones iniciales $t(0) = 0$, $x(0) = 0$ y $\dot{x}\big|_{\tau=0} = 0$.

La cuadrivelocidad es

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(c\cosh\tfrac{g\tau}{c},\; c\sinh\tfrac{g\tau}{c},\; 0,\; 0\right).$$

6

Consideremos una partícula de masa propia m_0 cuya posición respecto a un sistema inercial Σ es $\mathbf{r}(t)$, con velocidad $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}$. Sobre ella actúa una fuerza central atractiva

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{k}{r^3}\,\mathbf{r}, \qquad r = \|\mathbf{r}\|.$$

La fuerza cuatrivectorial es

$$f^\mu \;=\; \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} \;=\; \gamma(u)\,\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t},$$

donde

$$p^\mu = m_0\,\gamma(u)\,(c,\ \mathbf{u}), \qquad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Denotamos la energía total como

$$E \;=\; \gamma(u)\, m_0\, c^2 \;-\; \frac{k}{r}.$$

a) Queremos mostrar que $\dfrac{dE}{dt} = 0$.

1. Transformada temporal de la fuerza:

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\big(\gamma m_0 c^2\big) = \frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\big(E_{\text{kin}}\big),$$

pero también de la parte espacial obtenemos la fuerza usual, $\dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$.

2. Relación trabajo–energía:

$$\frac{d}{dt}\big(\gamma m_0 c^2\big) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u},$$

puesto que $\dot{W} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$ y $\dot{W} = dE_{\text{kin}}/dt$.

3. Cálculo de $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}$:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = -\frac{k}{r^3}\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^3}\,\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}r^2\Big) = -\frac{k}{r^2}\,\frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt}\Big(\frac{k}{r}\Big).$$

4. Combinando,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\gamma m_0 c^2\Big) \;-\; \frac{d}{dt}\Big(\frac{k}{r}\Big) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u} \;-\; \mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = 0.$$

b) Definimos el momento angular orbital

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m_0\,\gamma(u)\,\big(\mathbf{r}\times\mathbf{u}\big).$$

Su derivada temporal es

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p} \;+\; \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{u}\times\big(m_0\gamma\,\mathbf{u}\big) \;+\; \mathbf{r}\times\mathbf{F}.$$

Pero $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\,\mathbf{r}\times\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Así,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0},$$

9

a) Demostraciones:

1. Antisimetría:

$$\begin{aligned} [A,B] &= AB - BA\,, \\ [B,A] &= BA - AB\,, \\ \Rightarrow [A,B] &= -[B,A]\,. \end{aligned}$$

2. Linealidad:

$$\begin{aligned} [A,B+C] &= A(B+C) - (B+C)A \\ &= AB + AC - BA - CA \\ &= (AB - BA) + (AC - CA) \\ &= [A,B] + [A,C]\,. \end{aligned}$$

3. Regla del producto:

$$\begin{aligned} [A,BC] &= A(BC) - (BC)A \\ &= (AB)C - B(CA) \\ &= (AB)C - B(AC) \\ &= (AB - BA)C + B(AC - CA) \\ &= [A,B]C + B[A,C]\,. \end{aligned}$$

4. Comportamiento bajo transposición:

$$\begin{aligned}[A,B]^T &= (AB - BA)^T \\ &= (AB)^T - (BA)^T \\ &= B^T A^T - A^T B^T \\ &= [B^T, A^T]\,.\end{aligned}$$

5. Identidad de Jacobi: Expandimos cada término:

$$\begin{aligned}[A,[B,C]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A = ABC - ACB - BCA + CBA\,, \\ [C,[A,B]] &= C(AB - BA) - (AB - BA)C = CAB - CBA - ABC + BAC\,, \\ [B,[C,A]] &= B(CA - AC) - (CA - AC)B = BCA - BAC - CAB + ACB\,.\end{aligned}$$

Sumando los tres resultados:

$$\begin{aligned}[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] &= (ABC - ACB - BCA + CBA) \\ &\quad + (CAB - CBA - ABC + BAC) \\ &\quad + (BCA - BAC - CAB + ACB) \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

ya que todos los términos se cancelan par a par.