

Sobre la teoría general de la relatividad

Juan Manuel Tejeiro Sarmiento

Enero 2021

Índice general

1. Introducción	3
2. Espacios vectoriales	6
2.1. Introducción	6
2.2. Espacios topológicos	6
2.3. Espacios métricos	8
2.4. Espacios vectoriales	10
2.5. Componentes covariantes y contravariantes	18
2.6. El espacio de Minkowski	25
3. Variedades	31
3.1. Espacio tangente	36
3.2. Tensores	45
3.3. Transformaciones entre variedades	50
4. Cálculo en variedades	54
4.1. Derivada exterior	54
4.2. Derivada de Lie	56
4.3. Conexión y derivada covariante	58
4.4. Transporte paralelo	61
4.5. Tensor de Riemann	64
4.6. Tensor métrico	66
4.6.1. Relación entre conexión y métrica	69
4.7. Campos de Killing	70
5. Principios de relatividad general	74
5.1. La mecánica newtoniana	74
5.1.1. La ley de gravitación universal	76
5.1.2. Sistemas de referencia no inerciales	77
5.1.3. Relatividad especial y la ley de gravitación universal	85
5.2. Postulados de la TGR	87
5.3. Tensor métrico y postulado de causalidad	88
5.4. Ecuaciones de campo de Einstein	94

6. La solución de Schwarzschild	97
6.1. Métrica para simetría esférica	97
6.2. Teorema de Birkhoff	104
6.3. Propiedades de la métrica	105
7. Pruebas de la relatividad general	108
7.1. Corrimiento del perihelio de Mercurio	108
7.2. Desviación de la luz por el sol	114
8. Colapso gravitacional	119
8.1. El tensor momentum-energía	119
8.2. Movimiento geodésico	123
8.3. Métrica interior de una masa esférica	125
9. Agujeros negros	137
9.1. Agujero negro de Schwarzschild	137
9.2. Coordenadas de Kruskal	140
10. Cosmología	147
10.1. Métrica de Robertson-Walker	147
10.1.1. Geometría espacial de la métrica de R-W	154
10.2. Propiedades de la métrica de R-W	158
10.2.1. Horizonte de eventos	158
10.2.2. Movimiento propio de partículas en R-W	159
10.2.3. Corrimiento al rojo	161
10.2.4. El problema de distancias en cosmología	162
10.2.4.1. Distancia de luminosidad	163
10.2.4.2. Distancia diametral angular	164
10.3. Ley de Hubble	166
11. Modelos cosmológicos	172
11.1. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître	173
11.2. Historia térmica del universo	176

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la relatividad (especial y general) es considerada como uno de los logros más grandes de la mente humana y forma parte de lo que se puede llamar la cultura del hombre del siglo XX.

Entre noviembre de 1915 y febrero de 1917 Einstein publica 6 artículos los cuales conforman el cuerpo fundamental de la Teoría General de la Relatividad. La teoría general corresponde a la formulación relativista de la ley de gravitación universal de Newton. Este trabajo, a diferencia de sus primeras publicaciones sobre la teoría especial de la relatividad, requirió una estructura matemática muy compleja: la geometría diferencial y el cálculo tensorial. Dos predicciones fundamentales surgieron de esos planteamientos: el corrimiento del perihelio de Mercurio, efecto que ya había sido observado mas no explicado por los astrónomos, y la desviación de la luz por el sol, cuya corroboración se da en 1919, aprovechando un eclipse total de sol que tuvo lugar el 29 de mayo.

En su primer artículo «Zur allgemeinen Relativitätstheorie» (Sobre la teoría general de la relatividad) del 4 de noviembre, con un complemento publicado el 11 de noviembre, formula los principios generales de la teoría general de la relatividad y los fundamentos matemáticos necesarios para su formulación. El 18 de noviembre publica un segundo artículo «Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie» (Explicación del corrimiento del perihelio de Mercurio a partir de la teoría general de la relatividad) en donde aplica su teoría general al movimiento planetario, explicando, a partir de primeros principios, el giro secular de la órbita de Mercurio descubierta por Leverrier. En su tercer artículo del 25 de noviembre «Die Feldgleichungen der Gravitation» (Las ecuaciones de campo de la gravitación) escribe las ecuaciones generales de la teoría, en forma covariante, pues en los dos artículos anteriores había trabajado los principios generales de su teoría, pero aplicados al caso de un campo gravitacional débil, lo que se conoce en la literatura especializada como la aproximación de campo débil. Las ecuaciones de campo de Einstein corresponden a un sistema de 10 ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden y no lineales, con un sistema de 4 restricciones, lo cual hace que este sistema de ecuaciones sea de una extraordinaria complejidad, lo cual explica la razón por

la cual Einstein no consideró la posibilidad de buscar soluciones exactas a su ecuaciones. El 22 de junio de 1916 publica un método aproximado para integrar las ecuaciones del campo gravitacional en forma aproximada («Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation»), en donde, entre otros resultados, encuentra la ecuación de ondas gravitacionales, detectadas recientemente y por las cuales los físicos Reiner Weiss, Barry Rarish y Kip Thorne en el 2017 recibieron el Nobel de física. Cuatro meses después, el 26 de octubre de 1916 Einstein publica un importante artículo sobre el principio de Hamilton y la relatividad general («Hamiltonschen Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie»), en el cual muestra que son pocas y muy generales las suposiciones que se hacen sobre la materia, para formular su teoría de la gravedad. El último, de esta serie inicial de artículos de Einstein, sobre su teoría general lo publica el 8 de febrero de 1917 en donde trata el problema de la cosmología «Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie».

Como se comentó, Einstein, en sus primeros artículos, no intentó encontrar soluciones exactas a sus ecuaciones de campo, debido, en parte a su compleja estructura, pero principalmente en su interés por encontrar efectos relativistas que pudieran ser medibles y demostrar su validez. Sin embargo el 22 de diciembre de 1915 Einstein recibió una carta del físico alemán Karl Schwarzschild, quien se encontraba prestando servicio militar en el frente ruso, en donde le presentaba una solución exacta de sus ecuaciones de campo para el caso de una distribución de masa con simetría esférica.

Más significativo aún, para el desarrollo de la teoría general de la relatividad, fue el descubrimiento de Hubble de la expansión del universo en 1929. Si bien Einstein no había predicho este efecto, sí estaba contenido en sus ecuaciones de la relatividad general. En efecto, en 1916 Einstein soluciona sus ecuaciones de campo buscando describir un universo estático, el cual se consideraba que describía el universo observado. El problema de describir un universo estático era fundamental, pues se sabía que la ley de gravitación universal de Newton no podía dar cuenta de un universo estacionario, dado que esta ley (inverso al cuadrado de la distancia) no permite tener una distribución estática de masas.

La primera solución de las ecuaciones de campo obtenida por Einstein, para describir una distribución homogénea e isotrópica de materia (principio cosmológico), lo condujo a una solución dinámica y por esta razón se vio forzado a introducir un término adicional en sus ecuaciones, la constante cosmológica, la cual le permitía obtener una solución estática. Aun cuando Robertson y Walker mostraron que esta solución estática de Einstein no era matemáticamente satisfactoria, pues correspondía a una solución inestable, no fue sino con el descubrimiento de Hubble de la recesión de galaxias y los trabajos de Lemaitre, que permitieron explicar estos resultados de Hubble como un universo en expansión, que Einstein reconoció su «error» de haber modificado sus ecuaciones, al introducir una constante cosmológica sin justificación ni significado físico. Este punto de la historia marcó el comienzo de la cosmología actual, la cual es una de las áreas de investigación más activas que se tiene hoy.

Por otra parte, la teoría general de la relatividad recibió un gran impulso en los años sesenta, década en la cual se acuñó el término agujero negro,

cuando la relatividad general comenzó a tener gran interés, no sólo por el acelerado desarrollo de la astronomía observacional, con los descubrimientos de la radiación cósmica de fondo, reliquia del universo temprano, y los objetos más lejanos observados, los cuasares, sino también con el desarrollo de la teoría cuántica de campos, que describe las interacciones fundamentales fuerte, débil y electromagnética, que rigen la física de partículas elementales. Sin embargo, para un cabal entendimiento del mundo físico, a todas las escalas, se requiere la cuantización de la fuerza de la gravedad, un problema que después de más de 90 años sigue abierto. En 1930 Schrödinger intentó aplicar los principios de la mecánica cuántica a la fuerza de la gravedad newtoniana, encontrando serios problemas para interpretar su teoría. Einstein intentó un camino opuesto, al estilo de la relatividad general, geometrizando las interacciones fuerte, débil y electromagnética, sin llegar a resultado alguno. En el último medio siglo se han trabajado varias teorías para cuantizar la gravedad y unificar las cuatro interacciones fundamentales, como las teorías de Kaluza-Klein, supersimetrías, cuerdas, membranas, entre otras, pero el problema central sobre la gravedad cuántica sigue sin respuesta.

Hoy el estudio de los agujeros negros no sólo es de interés en el contexto teórico de los problemas asociados a la teoría cuántica de la gravedad, sino también de interés observacional, pues varios fenómenos astronómicos como los AGN (núcleos activos de galaxias), requieren la presencia de agujeros negros para dar cuenta de los fenómenos observados. Roger Penrose, por sus aportes a la teoría de agujeros negros recibió el Nobel de física en el año 2020, el cual compartió con Andrea Ghez y Reinhard Genzel por el descubrimiento de un objeto compacto supermasivo (agujero negro) en el centro de nuestra galaxia.

En este libro se presentará los fundamentos de la teoría general de la relatividad y sus principales aplicaciones en agujeros negros y en cosmología. El texto inicia con tres capítulos dedicados a los fundamentos matemáticos necesarios para formular la teoría general de la relatividad. La segunda parte contiene tres capítulos dedicados a los principios básicos de la relatividad general, la solución de Schwarzschild y las pruebas clásicas de la teoría. La tercera parte se refiere a aplicaciones astrofísicas, con un capítulo sobre el colapso gravitacional y otro sobre agujeros negros, y la última parte del texto aborda los principios de la cosmología, con un capítulo dedicado al estudio de la métrica de Robertson-Walker y un capítulo final sobre modelos cosmológicos.

Capítulo 2

Espacios vectoriales

2.1. Introducción

En este capítulo se presentarán los elementos fundamentales del álgebra lineal. No pretende dar un desarrollo exhaustivo del tema, sino tan sólo de las principales definiciones y los resultados más importantes necesarios para introducir el concepto de variedad en el siguiente capítulo.

2.2. Espacios topológicos

A continuación se exponen algunas definiciones fundamentales sobre espacios topológicos y espacios métricos.

Definición 2-1 *Un espacio topológico \mathcal{T} es una pareja (T, \mathcal{A}) , con T un conjunto y \mathcal{A} una familia de subconjuntos de T , llamados los abiertos, tales que:*

T-1: $\phi, T \in \mathcal{A}$, es decir, el vacío ϕ y todo el conjunto T son abiertos.

T-2: Dada cualquier colección de abiertos $\mathfrak{a}_\alpha \in \mathcal{A}$, con $\alpha \in I$, siendo I un conjunto de índices, entonces

$$\cup_{\alpha \in I} \mathfrak{a}_\alpha \in \mathcal{A}$$

es decir, unión arbitraria de abiertos es un abierto.

T-3: Para toda colección finita de abiertos $\mathfrak{a}_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \in \mathcal{A}$$

es decir, intersección finita de abiertos es abierto.

La familia de abiertos \mathcal{A} se llama topología de T . A todo conjunto se le puede asociar una topología, pues basta con definir como los abiertos de T a cualquier subconjunto de T . Esta topología es conocida en la literatura como topología discreta. Otra posibilidad para definir una topología sobre cualquier conjunto es la llamada topología trivial, cuyos abiertos se reducen al conjunto vacío y

a todo el espacio. Estos dos casos extremos de espacios topológicos no son de utilidad práctica, pero sirven para ilustrar situaciones y conceptos especiales que surgen en el estudio de los espacios topológicos. Un ejemplo no trivial de una topología lo constituyen los números reales \mathbb{R} con la llamada topología usual, donde los abiertos están conformados por todos los intervalos abiertos de la forma $(a, b) \subset \mathbb{R}$, con la identificación $(a, a) = \emptyset$ y $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Definición 2-2 Sean T y R espacios topológicos. Una función

$$f : T \longrightarrow R \quad (2.1)$$

se dice continua si para cualquier abierto b de R , la imagen inversa $f^{-1}(b)$ es un abierto de T .

Más adelante se verá la relación entre esta definición de continuidad, con la definición usual utilizada en espacios métricos, cuando se relacione la estructura topológica de un espacio con su estructura métrica.

Definición 2-3 Sean T y R espacios topológicos. Una función

$$\varphi : T \longrightarrow R \quad (2.2)$$

se llama un homeomorfismo si la función φ es continua con inversa

$$\varphi^{-1} : R \longrightarrow T \quad (2.3)$$

continua.

Así, todo homeomorfismo φ entre espacios topológicos transforma abiertos de un espacio topológico en abiertos del otro espacio, y en este caso se dice que los dos espacios topológicos son homeomorfos. Los dos ejemplos siguientes ilustran por qué los espacios topológicos extremos, el discreto y el trivial, no son de interés práctico. Dada una función

$$\varphi : T \longrightarrow R \quad (2.4)$$

con R un espacio topológico cualquiera y T el espacio topológico discreto, entonces toda función φ es trivialmente continua, pues dado cualquier abierto de R su imagen inversa es un subconjunto de T , que por definición es un abierto, mientras que si T tiene la topología trivial, entonces ninguna función φ es continua, dado que los únicos abiertos de T son el vacío y todo el espacio.

Definición 2-4 Un espacio topológico T se llama de Hausdorff o separable, si para todo par de puntos $p, q \in T$, con $p \neq q$, existen abiertos U y V de T , con $p \in U$ y $q \in V$ tal que

$$U \cap V = \emptyset$$

El espacio topológico discreto es de Hausdorff, así como los números reales con la topología usual, mientras que un espacio topológico con la topología trivial no es un espacio topológico de Hausdorff.

Definición 2-5 Sea T un espacio topológico y $C \subset T$ un subconjunto cualquiera de T . Un recubrimiento abierto de C es una colección de abiertos a_α de T con $\alpha \in I$, siendo I un conjunto de índices, tal que

$$C \subset \bigcup_{\alpha \in I} a_\alpha$$

Definición 2-6 Un subconjunto $C \subset T$, de un espacio topológico T , se llama compacto si dado cualquier recubrimiento abierto de C , existe un subrecubrimiento finito $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ de C , esto es

$$C \subset \bigcup_{i=1}^n a_i$$

Definición 2-7 Un subconjunto $A \subset T$, de un espacio topológico T , se llama cerrado si su complemento, i.e., $T \setminus A$, es abierto.

Dependiendo de la estructura topológica del espacio, hay conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez; por ejemplo, cualquier subconjunto de un espacio topológico discreto. También existen subconjuntos que no son ni abiertos ni cerrados; por ejemplo, en los reales con la topología usual, cualquier intervalo semicerrado, es decir de la forma $[a, b)$ o $(a, b]$, no es abierto ni cerrado. Ahora, en todo espacio topológico el vacío y todo el espacio son subconjuntos abiertos y cerrados a la vez, pues ellos son mutuamente complementarios. Se puede mostrar que en un espacio topológico de Hausdorff los únicos conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente son el vacío y todo el espacio.

En el espacio de los números reales \mathbb{R} con la topología usual, cualquier intervalo cerrado de la forma $[a, b]$ es compacto, mientras que cualquier intervalo abierto no lo es. Más generalmente, en \mathbb{R} con la topología usual, todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.

En la siguiente sección se darán las definiciones fundamentales de espacios métricos y su relación con la estructura topológica.

2.3. Espacios métricos

Definición 2-8 Un espacio métrico M es un conjunto de puntos con una función, llamada métrica,

$$\begin{aligned} d : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

tal que:

M-1: $\forall x, y \in M$, se tiene que

$$d(x, y) \geq 0, \quad (2.6)$$

M-2: $\forall x, y \in M$, se tiene que

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

M-3: $\forall x, y \in M$, se tiene que

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (2.7)$$

M-4: $\forall x, y, z \in M$, se satisface la desigualdad triangular, i.e.,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (2.8)$$

La condición *M-2* es equivalente a decir que la métrica es no degenerada.

Uno de los ejemplos más importantes de espacio métrico lo constituye \mathbb{R}^n con la llamada métrica usual o euclidea, definida como:

$$d(x, y) := \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \cdots + (x^n - y^n)^2} \quad (2.9)$$

donde

$$x = (x^1, \dots, x^n) \quad (2.10)$$

$$y = (y^1, \dots, y^n). \quad (2.11)$$

Sobre \mathbb{R}^n también es posible definir otras métricas, de hecho infinitas métricas, pues la función

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^p \right)^{1/p} \quad (2.12)$$

para cada entero p satisface las propiedades *M-1* a *M-3*. El caso particular $p = 2$ corresponde a la métrica usual. Un caso especial de una métrica, definida como

$$d(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad x = y \quad (2.13)$$

$$d(x, y) = 1, \quad \forall x \neq y \quad (2.14)$$

muestra que todo conjunto es metrizable. Esta métrica es trivial y se utiliza solamente para construir contraejemplos.

Definición 2-9 Sea M un espacio métrico. Una bola abierta $B_x(r)$ de radio r y centro $x \in M$ es el conjunto de todos los puntos $y \in M$ tales que

$$d(x, y) < r \quad (2.15)$$

Un subconjunto $A \subset M$ se llama acotado si para todo par de puntos $x, y \in A$ existe un número real positivo r tal que $d(x, y) < r$. Para todo conjunto acotado de un espacio métrico se puede construir una bola centrada en cualquiera de los puntos que contenga el conjunto.

Definición 2-10 Sean M y N espacios métricos con métricas d_M y d_N respectivamente. Una función $f: M \rightarrow N$ se dice continua en un punto $x \in M$ si dado cualquier real positivo $\epsilon > 0$ siempre es posible encontrar un número real $\delta > 0$ tal que

$$d_M(y, x) < \delta \quad (2.16)$$

implica que

$$d_N(f(x), d(y)) < \epsilon \quad (2.17)$$

Una función entre espacios métricos, continua con inversa continua, se llama un homeomorfismo.

Para conectar la estructura de espacio métrico con la estructura de espacio topológico se introduce la siguiente:

Definición 2-11 Sea $A \subset M$, con M un espacio métrico. Entonces A es un subconjunto abierto de M si $\forall x \in A$ existe una bola abierta $B(x, r)$ contenida en A .

Es fácil probar, entonces, que los abiertos de un espacio métrico satisfacen las propiedades $T-1$, $T-2$ y $T-3$ de la **definición 2-1** y por lo tanto definen una topología sobre M , llamada la topología inducida. Así, toda métrica induce una topología, pero no toda topología proviene de alguna métrica. Por ejemplo, la métrica trivial

$$d(x, y) = 0 \quad \text{si } x = y, \quad (2.18)$$

$$d(x, y) = 1, \quad \forall x \neq y \quad (2.19)$$

induce la topología trivial, pero ninguna métrica induce la topología discreta. Además, la topología usual sobre \mathbb{R}^n es la inducida por la métrica usual. De esta forma, cuando se trabaja con espacios métricos siempre se asume la topología inducida por la correspondiente métrica.

2.4. Espacios vectoriales

Definición 2-12 Un grupo (G, \circ) es un conjunto de elementos G sobre el cual está definida una operación interna \circ , es decir, una función de la forma:

$$\begin{aligned} \circ : \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g = g_1 \circ g_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

tal que

G-1: Exista un elemento $e \in G$, llamado la identidad, con la propiedad que para todo elemento $g \in G$ se cumpla que

$$e \circ g = g \circ e = g \quad (2.21)$$

G-2: Para todo elemento $g \in G$ exista un elemento $g^{-1} \in G$, llamado elemento inverso, tal que:

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e \quad (2.22)$$

G-3: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ se cumple la propiedad asociativa:

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \quad (2.23)$$

En general se tiene que

$$g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1 \quad (2.24)$$

y cuando la igualdad se cumple para todos los elementos del grupo, éste se llama grupo conmutativo o Abelian. Ejemplos de grupos: los números reales \mathbb{R} con la suma, o los números enteros \mathbb{Z} con la suma.

Otro ejemplo, de mucha importancia en física, lo constituye el conjunto de transformaciones de simetría sobre un sistema, con la operación de grupo como la composición de transformaciones. Por una operación de simetría sobre un sistema se entiende una transformación que deja invariante al sistema. Por ejemplo, consideremos una molécula de amoníaco NH_3 , constituida por tres átomos de hidrógeno y uno de nitrógeno. La configuración espacial de esta molécula es una pirámide cuya base es un triángulo equilátero determinado por los tres hidrógenos y el vértice lo determina el átomo de nitrógeno. Si rotamos esta molécula en un ángulo de 120° o de 240° alrededor de un eje que pase por el átomo de nitrógeno y que sea perpendicular al plano determinado por los tres hidrógenos, entonces la configuración espacial de la molécula no cambia y se dice que la molécula posee el grupo de simetría conformado por los elementos:

$$\mathcal{G} = \{R(0^\circ), R(120^\circ), R(240^\circ)\} \quad (2.25)$$

donde $R(\theta^\circ)$ significa rotar la molécula θ° alrededor de su eje de simetría. El elemento identidad es $R(0^\circ)$ que significa no rotar, el producto de dos rotaciones es otra rotación,

$$R(\theta^\circ) \circ R(\varphi^\circ) = R(\theta^\circ + \varphi^\circ) \quad (2.26)$$

e identificando $R(0^\circ) \equiv R(360^\circ)$, los elementos del grupo $R(120^\circ)$ y $R(240^\circ)$ son mutuamente inversos. Este ejemplo lo podemos generalizar al caso de las simetrías de un polígono regular de n lados. En este caso el grupo de simetrías, rotaciones del polígono alrededor de un eje que pasa por su centro, tiene n elementos:

$$\mathcal{G} = \{R(0^\circ), R(\frac{360^\circ}{n}), R(2\frac{360^\circ}{n}) \cdots R((n-1)\frac{360^\circ}{n})\} \quad (2.27)$$

Consideremos ahora el caso límite de un polígono regular de infinitos lados, es decir, el círculo. En este caso el grupo de simetrías contiene un número infinito no numerable de elementos y cada uno de los elementos está representado por una función $R(\theta^\circ)$ que indica una rotación en un ángulo θ° , en donde θ° es un parámetro que toma valores en el intervalo $[0, 360]$ y de nuevo se ha hecho la identificación $R(0^\circ) \equiv R(360^\circ)$.

Estos ejemplos de grupos considerados hasta ahora ilustran los tipos de grupos más comunes que encontramos en diversas aplicaciones: grupos con un número finito de elementos, como las rotaciones de un polígono regular de n lados, o grupos con un número infinito de elementos, pero numerable, como los enteros con la suma, y grupos con un número infinito no numerable de elementos. Esta última clase de grupos, caracterizados por un parámetro continuo (o varios parámetros continuos, como el grupo de rotaciones tridimensional) constituye una clase particular llamada de Lie, la cual juega un papel muy importante en la matemática y en especial en la física. Volveremos sobre ella más adelante.

Definición 2-13 Un cuerpo o campo $(G, +, \times)$ es un conjunto de elementos G sobre el cual están definidas dos operaciones internas $+$, y \times , llamadas suma y multiplicación respectivamente, tal que $(G, +)$ forma un grupo abeliano, y la operación \times satisface las siguientes propiedades:

C-1: Exista un elemento $1 \in G$, llamado la identidad multiplicativa, con la propiedad que para todo elemento $g \in G$ se cumpla que $1 \times g = g \times 1 = g$.

C-2: Para cualesquier tres elementos $g_1, g_2, g_3 \in G$ se cumple que la multiplicación se distribuye sobre la suma, i.e.,

$$g_1 \times (g_2 + g_3) = g_1 \times g_2 + g_1 \times g_3 \quad (2.28)$$

C-3: La multiplicación es asociativa y conmutativa, es decir, para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$, se cumple que:

$$g_1 \times g_2 = g_2 \times g_1 \quad (2.29)$$

y

$$g_1 \times (g_2 \times g_3) = (g_1 \times g_2) \times g_3 = g_1 \times g_2 \times g_3 \quad (2.30)$$

El ejemplo más común e importante de un campo lo constituyen los números reales con la suma y la multiplicación usuales. El concepto de campo es útil para nosotros en el contexto de la siguiente definición:

Definición 2-14 Un espacio vectorial V , sobre un campo K , es un conjunto de elementos, llamados vectores, con una operación interna $+$ (suma de vectores) tal que:

V-1: La suma de vectores es conmutativa: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$, se tiene que

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

V-2: La suma de vectores es asociativa: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$, se tiene que

$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w}$$

V-3: Existe el vector nulo $\mathbf{0} \in V$, tal que $\forall \mathbf{v} \in V$ se cumple

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

V-4: $\forall \mathbf{v} \in V$, existe el vector $-\mathbf{v} \in V$, tal que

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) \equiv \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Esto significa que el conjunto V con la suma de vectores forma un grupo abeliano. Sobre V está definida una operación externa (multiplicación por un escalar) con el campo K , llamado los escalares, es decir una función de la forma

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, \mathbf{v}) &\longmapsto \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{v} \equiv \lambda \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.31)$$

tal que:

V-5: Para todo par de vectores $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ y todo escalar $\lambda \in K$

$$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$$

V-6: Para todo vector $\mathbf{v} \in V$ y todo par de escalares $\alpha, \beta \in K$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$$

V-6: Para todo vector $\mathbf{v} \in V$ y todo par de escalares $\alpha, \beta \in K$

$$\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$$

V-7: Para todo vector $\mathbf{v} \in V$

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}, 0\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ y } (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

donde 1 es la identidad multiplicativa de K , $0 \in K$ es la identidad aditiva y $-1 \in K$ es el inverso aditivo de 1.

El ejemplo más importante de espacio vectorial es \mathbb{R}^n sobre los reales.

Para construir otros ejemplos importantes por sus aplicaciones, consideremos V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales, y definamos una transformación lineal T como una función

$$\begin{aligned} T: V &\longrightarrow W \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

tal que:

$$T(\alpha + \beta\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{u}); \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.33)$$

Definamos sobre el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W , i.e.,

$$L(V, W) := \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ es } \mathbb{R} - \text{lineal}\} \quad (2.34)$$

una suma y el producto por un real como:

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{v}) := T_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{v}); \quad \forall T_1, T_2 \in L(V, W) \text{ y } \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.35)$$

$$(\alpha T)(\mathbf{v}) := \alpha T(\mathbf{v}); \quad \forall T \in L(V, W), \forall \mathbf{v} \in V \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.36)$$

entonces, $T_1 + T_2$ y αT también son transformaciones lineales, i.e.,

$$T_1 + T_2, \alpha T \in L(V, W) \quad (2.37)$$

y por lo tanto el conjunto $L(V, W)$ con estas operaciones es un espacio vectorial real. Un caso de particular importancia es el espacio vectorial $L(V, \mathbb{R})$, llamado el espacio vectorial dual de V , que se denota por V^* y sobre el cual volveremos más adelante.

Definición 2-15 Un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ de r vectores de V , con $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$, $\forall i = 1, 2, \dots, r$, se llama linealmente independiente si dada cualquier combinación lineal

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

implica que todos los $\alpha_i = 0$.

Definición 2-16 El número máximo de vectores linealmente independientes de V se llama *dimensión del espacio vectorial* y por lo tanto forma una base, i.e., cualquier vector del espacio se puede escribir como una combinación lineal de estos vectores.

Así, si $\{\mathbf{E}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ forman una base del espacio vectorial V , entonces todo $v \in V$ lo podemos escribir como

$$v = v^1 \mathbf{E}_1 + v^2 \mathbf{E}_2 + \dots + v^n \mathbf{E}_n \quad (2.39)$$

y los números v^i , $i = 1, 2, \dots, n$ se llaman las *componentes del vector \mathbf{v}* en la base $\{\mathbf{E}_i\}$.

Ahora, sobre cualquier espacio vectorial se puede definir una función de valor real, llamada la *norma*, la cual le asigna a cada vector del espacio un número real no negativo:

Definición 2-17 Sea V un espacio vectorial real. Definamos una *norma* sobre V como una función

$$\begin{array}{lll} \|\cdot\| & V & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} & \longmapsto \|\mathbf{v}\| \end{array} \quad (2.40)$$

tal que:

N-1: $\|\mathbf{v}\| > 0$, si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

N-2: $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$

N-3: $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

Toda norma sobre un espacio vectorial induce una métrica definida por:

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \quad (2.41)$$

La última estructura de gran importancia que se puede definir sobre un espacio vectorial es el producto punto, llamado también producto escalar o interno:

Definición 2-18 Sea V un espacio vectorial real. Definamos un *producto interno* sobre V como una función

$$\begin{array}{lll} \langle \cdot, \cdot \rangle & V \times V & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \mathbf{v}, \mathbf{w} & \longmapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{array} \quad (2.42)$$

tal que: \mathbf{v}

P-1: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

P-2: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$

P-3: $\langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

P-4: $\langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$

Las propiedades P-3 y P-4 implican que el producto punto es lineal en su primera componente, y por P-2 que también es lineal en la segunda componente.

Dado un producto punto sobre un espacio vectorial real, entonces sobre el espacio se induce una norma definida por:

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \quad (2.43)$$

De la ecuación (2.43) vemos que la estructura de producto punto o escalar, definida sobre un espacio vectorial, induce una norma, y por la ecuación (2.41) se induce también una métrica y por ende una topología. Es decir, dado el producto punto sobre un espacio vectorial, se entiende que la norma, la métrica y la topología sobre este espacio, son las inducidas por el producto punto:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \rightarrow \|\cdot\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \rightarrow d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \quad (2.44)$$

Además, si $\{\mathbf{E}_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n$ es una base del espacio vectorial V , el producto punto

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{E}_i, \sum_{j=1}^n w^j \mathbf{E}_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n v^i w^j \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n v^i w^j g_{ij} \quad (2.45)$$

queda determinado por el conjunto de n^2 números

$$g_{ij} = \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle \quad (2.46)$$

llamadas las componentes del tensor métrico, denominación que será justificada posteriormente.

De la desigualdad triangular, propiedad N-3 de la norma, de obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \quad (2.47)$$

la cual nos permite definir el concepto de ángulo θ entre dos vectores v y w a través de la relación:

$$\cos \theta := \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \quad (2.48)$$

Con estas definiciones podemos introducir el concepto de base ortonormal $\{e_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n$ de un espacio vectorial, donde los vectores de la base satisfacen la relación:

$$\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.49)$$

siendo δ_{ij} el delta de Kronecker, definido como 1 si $i = j$ y cero en los demás casos. lo que justifica el nombre de base ortonormal, es decir, vectores mutuamente ortogonales y de norma unitaria. En este caso las componentes del tensor métrico están dadas por

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.50)$$

Para finalizar esta introducción veamos el concepto de espacio vectorial dual. Con este fin, sea $L(V, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las transformaciones lineales del espacio vectorial sobre los reales, es decir:

$$L(V, \mathbb{R}) := \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\} \quad (2.51)$$

y definamos sobre este conjunto la suma de funciones y el producto de un número real por una función como:

$$(f + g)(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}) \quad (2.52)$$

$$(\lambda f)(\mathbf{v}) := \lambda f(\mathbf{v}) \quad (2.53)$$

$\forall f, g \in L(V, \mathbb{R}), \forall \mathbf{v} \in V$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, entonces estas dos operaciones definen una estructura de espacio vectorial real sobre el espacio de funciones $L(V, \mathbb{R})$. Este espacio vectorial, llamado el dual del espacio vectorial V y denotado por V^* no es vacío, pues para cada vector $\mathbf{v} \in V$

$$\langle \mathbf{v}, \cdot \rangle \in L(V, \mathbb{R}), \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.54)$$

donde $\langle \mathbf{v}, \cdot \rangle$ significa la función producto punto, manteniendo la primera componente fija. es decir la función

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{w} &\longrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \end{aligned} \quad (2.55)$$

la cual es lineal, por las propiedades del producto punto.

Inversamente:

Teorema 2-1. Para cada función $f \in L(V, \mathbb{R})$ existe un vector $\mathbf{w} \in V$, único tal que $f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.

Para probar este importante resultado, notemos en primer lugar que, para conocer una función f del espacio $L(V, \mathbb{R}) \equiv V^*$, es necesario conocer lo que la función f hace sobre cada vector $\mathbf{v} \in V$, pero, dado que el producto punto es lineal en cada componente, entonces, para determinar f es suficiente conocer la acción de la función f sobre cada uno de los vectores de una base $\{\mathbf{E}_i\}; i = 1, 2, \dots, n$, pues

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^n v^i \mathbf{E}_i\right) = \sum_{i=1}^n v^i f(\mathbf{E}_i) \quad (2.56)$$

y por lo tanto conocer $f(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in V$ es equivalente a conocer $f(\mathbf{E}_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Por otra parte, dada una base $\{\mathbf{E}_i; i = 1, \dots, n\}$ de V , podemos encontrar una base del espacio dual $\{\mathbf{E}^j; j = 1, \dots, n\}$, donde los vectores duales $\mathbf{E}^j \in V^*, j = 1, \dots, n$ están definidos por

$$\mathbf{E}^j(\mathbf{E}_i) = \delta_i^j \quad (2.57)$$

(con δ_i^j delta de Kroenecker). conforman una base para el espacio V^* , llamada la base dual. Así, dada un vector dual (función lineal) $f \in V^*$ podemos escribir

$$f = \sum_{j=1}^n f_j \mathbf{E}^j \quad (2.58)$$

donde los coeficientes $f_j; j = 1, \dots, n$ son las componentes del vector dual. Para probar que el conjunto de vectores duales $\{\mathbf{E}^j; j = 1, \dots, n\}$ conforman una base de V^* , basta con notar que de la ecuación (2.58) tenemos

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n f_j \mathbf{E}^j(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n f_j \mathbf{E}^j\left(\sum_{i=1}^n v^i \mathbf{E}_i\right) = \sum_{i,j=1}^n f_j v^i \mathbf{E}^j(\mathbf{E}_i) \quad (2.59)$$

lo cual, por la definición de base dual, ecuación (2.57), tenemos que

$$f(v) = \sum_{i,j=1}^n f_j v^i \delta_i^j = \sum_{i=1}^n f_i v^i \quad (2.60)$$

Este resultado implica que el espacio vectorial dual V^* tiene la misma dimensión que V .

Finalmente, para probar el **Teorema 2-1**, sea $f \in V^*$ y encontremos el vector $\mathbf{w} \in V$ tal que $f(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$. Sea $\{\mathbf{E}_i; i = 1, \dots, n\}$ una base de V y $\{\mathbf{E}^j; j = 1, \dots, n\}$ la correspondiente base dual de V^* . Para un vector $\mathbf{v} \in V$, $f(\mathbf{v})$ está dado por la ecuación (2.60) y el producto punto $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ por las ecuaciones (2.45) y (2.46)

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i,j=1}^n v^i w^j g_{ij} \quad (2.61)$$

con w^j las componentes del vector $\mathbf{w} \in V$ que estamos buscando. Así, igualando las ecuaciones (2.60) y (2.61) tenemos

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n f_i v^i = \sum_{i,j=1}^n v^i w^j g_{ij} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \quad (2.62)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i v^i - \sum_{i,j=1}^n v^i w^j g_{ij} &= \\ \sum_{i=1}^n v^i \left[f_i - \sum_{j=1}^n w^j g_{ij} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

lo que implica que

$$f_i = \sum_{j=1}^n w^j g_{ij}$$

Para despejar las componentes del vector w , basta con invertir la matriz (o tensor) métrico g_{ij} , lo cual siempre es posible pues $\det |g_{ij}| \neq 0$ como veremos en el siguiente numeral. Denotemos por g^{ij} los elementos de la matriz inversa, e.i.

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

entonces las componentes del vector w están dadas por

$$w^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} f_j \quad (2.64)$$

En resumen, dado cualquier espacio vectorial real V , existe el espacio vectorial dual V^* , el espacio de las transformaciones lineales de V sobre los reales,

con la misma dimensión, y dada cualquier base $\{\mathbf{E}_i\}_{i=1,\dots,n}$ de V existe una única base $\{\mathbf{E}^j\}_{j=1,\dots,n}$, de V^* , la base dual, definida por la relación:

$$\mathbf{E}^j(\mathbf{E}_i) = \delta_i^j \quad (2.65)$$

Además, por el **Teorema 2-1** el producto interno determina una relación 1-1 entre los dos espacios, V y V^* , pero se puede probar que el dual del dual \mathcal{V}^{**} de un espacio vectorial \mathcal{V} , es isomorfo al espacio vectorial original y por lo tanto se hace la identificación $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}^{**}$.

2.5. Componentes covariantes y contravariantes

En este numeral mostramos el origen de los nombres co-variante y contra-variante, comúnmente utilizados en aplicaciones del cálculo vectorial en física, para referirse a las componentes de un vector.

Consideremos ahora el caso de un cambio de base. Denotemos por $\{\mathbf{E}_i\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ al conjunto de vectores de una base del espacio vectorial V . Así, dado un vector $\mathbf{v} \in V$ entonces

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{E}_i \quad (2.66)$$

donde v^i son las componentes del vector \mathbf{v} en la base $\{\mathbf{E}_i\}$. Sea $\mathbf{w} \in V^*$ un vector del espacio dual y denotemos por $\{\mathbf{E}^j\}$ con $j = 1, 2, \dots, n$ el conjunto de vectores de la base dual de V^* , definida por la relación 2.65, esto es

$$\mathbf{E}^j(\mathbf{E}_i) \equiv \langle \mathbf{E}^j, \mathbf{E}_i \rangle = \delta_i^j \quad (2.67)$$

entonces

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^n w_j \mathbf{E}^j \quad (2.68)$$

Así w_j son las componentes de un vector dual $\mathbf{w} \in V^*$ con respecto a la base dual $\{\mathbf{E}^j\}$.

En este punto es importante hacer una precisión en la notación que estamos utilizando. $\mathbf{E}^j(\cdot)$, en el lado izquierdo de la ecuación (2.67) corresponde a una función lineal (o vector del dual V^*) actuando sobre los vectores de V (la función f del **Teorema 2-1**), mientras que el segundo término $\langle \mathbf{E}^j, \cdot \rangle$ corresponde al vector \mathbf{w} , de acuerdo con el **Teorema 2-1**. En lo sucesivo para los vectores duales f y sus correspondientes vectores \mathbf{w} utilizaremos las mismas letras, con las siguientes convenciones:

-Todos los vectores de V y V^* en negrilla.

-Para enumerar los vectores de una base de V con subíndices griegos o latinos, $\{\mathbf{E}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$, y los correspondientes vectores de la base dual con superíndices $\{\mathbf{E}^\beta\}_{\beta=1,\dots,n}$.

-Las componentes v^α de un vector \mathbf{v} del espacio V , en una base dada, con superíndices $\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha \mathbf{E}_\alpha$ y las componentes w_β de un vector dual $\mathbf{w} \in V^*$ con subíndices $\mathbf{w} = \sum_{\beta=1}^n w_\beta \mathbf{E}^\beta$.

El uso de índices griegos o latinos es irrelevante para la primera parte del texto y toman los valores de 1 hasta la dimensión del espacio n : Sin embargo en relatividad trabajamos en 4-dimensiones, con una componente de carácter temporal y tres de carácter espacial, y por esta razón para distinguir el carácter de las componentes de los vectores (cuadri-vectores), es de uso común utilizar los índices griegos $\alpha = 0, 1, 2, 3$ para denotar las componentes de los vectores. El valor 0 del índice se reserva para la primera componente de carácter temporal y para las componentes espaciales 1, 2, 3 se utiliza índices latinos, $i = 1, 2, 3$.

Consideremos ahora otra base $\{\mathbf{E}'_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, del espacio V y su correspondiente base dual $\{\mathbf{E}^\beta\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, definida por la relación

$$\langle \mathbf{E}^\beta, \mathbf{E}'_\alpha \rangle = \delta_\alpha^\beta \quad (2.69)$$

Debido a las propiedades de las bases de un espacio vectorial, un vector de la nueva base \mathbf{E}'_γ se puede escribir en términos de la base original:

$$\mathbf{E}'_\gamma = \sum_{\alpha=1}^n \phi_\gamma^\alpha \mathbf{E}_\alpha; \quad \gamma = 1, 2, \dots, n \quad (2.70)$$

Los coeficientes ϕ_γ^α de esta combinación lineal, constituyen los elementos de la matriz de transformación cambio de base. Ahora, el objetivo es encontrar cómo cambian las componentes de un vector $\mathbf{v} \in V$, cuando se cambia de base y cómo cambian las componentes de un vector dual $\mathbf{w} \in V^*$.

Consideremos en primer lugar que sucede con el cambio de base dual. Denotemos por ϕ_β^α los elementos de la matriz de transformación de las bases duales, esto es

$$\mathbf{E}^{\hat{\gamma}} = \sum_{\beta=1}^n \phi_\beta^\gamma \mathbf{E}^\beta; \quad \gamma = 1, 2, \dots, n \quad (2.71)$$

y busquemos la relación entre las matrices ϕ_γ^α y ϕ_β^α . Para este fin es suficiente tener en cuenta la ecuación 2.69, pues

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^\beta &= \langle \mathbf{E}^\beta, \mathbf{E}'_\alpha \rangle \\ &= \left\langle \sum_{\sigma=1}^n \phi_\sigma^\beta \mathbf{E}^\sigma, \sum_{\tau=1}^n \phi_\alpha^\tau \mathbf{E}_\tau \right\rangle \\ &= \sum_{\sigma=1}^n \phi_\sigma^\beta \sum_{\tau=1}^n \phi_\alpha^\tau \langle \mathbf{E}^\sigma, \mathbf{E}_\tau \rangle \\ &= \sum_{\sigma=1}^n \sum_{\tau=1}^n \phi_\sigma^\beta \phi_\alpha^\tau \delta_\tau^\sigma \\ &= \sum_{\sigma=1}^n \phi_\sigma^\beta \phi_\alpha^\sigma \end{aligned} \quad (2.72)$$

Esta ecuación implica que las matrices de cambio de base ϕ_γ^α y ϕ_β^α son mutuamente inversas, es decir

$$\phi_\gamma^\alpha = (\phi_\gamma^\alpha)^{-1} \quad (2.73)$$

Con este resultado podemos encontrar como se transforman las componentes de los vectores de V y V^* cuando se cambia de bases. Sea $\mathbf{v} \in V$, entonces, si denotamos por v'^β las componentes del vector en la nueva base, se tiene que

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha \mathbf{E}_\alpha = \sum_{\beta=1}^n v'^\beta \mathbf{E}'_\beta \\ &= \sum_{\beta=1}^n v'^\beta \sum_{\alpha=1}^n \phi_\beta^\alpha \mathbf{E}_\alpha \\ &= \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \phi_\beta^\alpha v'^\beta \mathbf{E}_\alpha \end{aligned} \quad (2.74)$$

Dado que los vectores de una base son linealmente independientes, se debe cumplir que

$$v^\alpha = \sum_{\beta=1}^n \phi_\beta^\alpha v'^\beta \quad (2.75)$$

De esta expresión se pueden despejar las componentes primadas v'^β , multiplicando ambos lados de la ecuación por la matriz inversa de cambio de base, así

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=1}^n \phi_\gamma^\alpha v^\alpha &= \sum_{\gamma=1}^n \phi_\gamma^\alpha \sum_{\beta=1}^n \phi_\beta^\alpha v'^\beta \\ &= \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\beta=1}^n \phi_\gamma^\alpha \phi_\beta^\alpha v'^\beta \\ &= \sum_{\beta=1}^n \left(\sum_{\gamma=1}^n \phi_\gamma^\alpha \phi_\beta^\alpha \right) v'^\beta \\ &= \sum_{\beta=1}^n \delta_\beta^\alpha v'^\beta = v'^\alpha \end{aligned} \quad (2.76)$$

Es decir, bajo un cambio de base, si ϕ_β^α representan las componentes de la matriz cambio de base, entonces las componentes de un vector de $v \in V$ se transforman con la matriz inversa ϕ_γ^α :

$$v'^\alpha = \sum_{\gamma=1}^n \phi_\gamma^\alpha v^\gamma \quad (2.77)$$

de la misma manera como se transforman los vectores de la base dual, por esto reciben el nombre de componentes contravariantes. Mientras que para el caso de

los vectores duales podemos encontrar, sin más cálculos, como se transforman las componentes bajo un cambio de base, pues se transforman con la matriz inversa de la matriz cambio de base dual, así si $\mathbf{w} \in V^*$ entonces, sus componentes cambian en la forma

$$\omega'_\gamma = \sum_{\alpha=1}^n \phi_\gamma^\alpha \omega_\alpha \quad (2.78)$$

de la misma forma como cambian los vectores de la base, por lo cual reciben el nombre de componentes covariantes.

Nota: Los espacios vectoriales V y su dual V^* son espacios vectoriales diferentes, pero el **Teorema 2-1** establece una correspondencia entre los vectores de los dos espacios, inducida por el producto interno definido sobre V : dados los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y una base del espacio $\{\mathbf{E}_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, n}$, el producto interno, dado por

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^n v^\alpha \mathbf{E}_\alpha, \sum_{\beta=1}^n w^\beta \mathbf{E}_\beta \right\rangle = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n v^\alpha w^\beta \langle \mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta \rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n v^\alpha w^\beta g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.79)$$

queda definido por los n^2 elementos de matriz del tensor métrico (ecuación (2.46))

$$g_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta \rangle; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (2.80)$$

entonces, para cada vector $\mathbf{v} \in V$, con componentes (contravariantes) v^α en la base $\{\mathbf{E}_\alpha\}$, se definen las componentes (covariantes) v_γ de un vector dual $\mathbf{v}^* \in V^*$, con respecto a la base dual $\{\mathbf{E}^\alpha\}$, por

$$v_\gamma = \sum_{\alpha=1}^n g_{\gamma\alpha} v^\alpha \quad (2.81)$$

Por las propiedades del producto interno esta correspondencia es 1-1 y sobre, pues si v_γ son las componentes (covariantes) del vector dual $\mathbf{v}^* \in V^*$ con respecto a la base dual $\{\mathbf{E}^\alpha\}$

$$\mathbf{v}^* = \sum_{\alpha=1}^n v_\alpha \mathbf{E}^\alpha \quad (2.82)$$

entonces

$$v^\gamma = \sum_{\alpha=1}^n g^{\gamma\alpha} v_\alpha \quad (2.83)$$

son las componentes (contravariantes) del vector $v \in V$, donde $g^{\alpha\beta}$ son los elementos de la matriz inversa del tensor métrico, es decir

$$\sum_{\sigma=1}^n g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta$$

Este resultado justifica referirse a v^α y v_α como las componentes covariantes y contravariantes del vector \mathbf{v} , habiendo hecho la identificación $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^*$, es decir, se utiliza la misma letra para referirse al vector $\mathbf{v} \in V$ y su correspondiente $\mathbf{v}^* \in V^*$, lenguaje de uso común en física relativista, pero la identificación entre componentes covariantes y contravariantes se hace a través de una forma cuadrática, no degenerada y no definida positiva, la cual representa la estructura causal del espacio-tiempo físico.

Para establecer esta relación entre vectores de V y del dual V^* se utilizó la estructura de producto punto definida sobre el espacio vectorial, la cual a su vez, ver ecuación (2.44), determina la norma, la estructura métrica y la topología del espacio. Sin embargo, esta correspondencia entre V y de V^* , se puede hacer a través de una forma cuadrática definida sobre el espacio vectorial V .

Para ver esto definamos primero una forma bi-lineal simétrica sobre un espacio vectorial:

Definición 2-19. Sea V un espacio vectorial, entonces una forma bi-lineal simétrica sobre V es una función

$$\begin{aligned} B: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

lineal en cada componente y simétrica, es decir

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (2.85)$$

Una función sobre un espacio vectorial se llama invariante, si no depende de la base utilizada. Por ejemplo, el producto punto es una forma bi-lineal simétrica y también es un invariante.

Por otra parte, dada una base $\{\mathbf{E}_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$ de V y la correspondiente base dual $\{\mathbf{E}^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$, la función bi-lineal $B(\cdot, \cdot)$ queda determinada por los n^2 elementos

$$B_{\alpha\beta} = B(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta)$$

pues, por linealidad

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = B\left(\sum_{\alpha=1}^n v^\alpha \mathbf{E}_\alpha, \sum_{\beta=1}^n w^\beta \mathbf{E}_\beta\right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^n v^\alpha w^\beta B(\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta) \quad (2.86)$$

y podemos construir una función de V en V^*

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^* \\ \mathbf{v} &\longmapsto B(\mathbf{v}, \cdot) \end{aligned} \quad (2.87)$$

donde las componentes del vector dual $B(\mathbf{v}, \cdot) \in V^*$, con respecto a la base dual, están dadas por

$$B(\mathbf{v}, \cdot)_\alpha = \sum_{\beta=1}^n B_{\alpha\beta} v^\beta \quad (2.88)$$

Ahora, si $\det|B_{\alpha\beta}| \neq 0$, entonces esta ecuación se puede resolver para las componentes v^α en términos de las $B(\mathbf{v}, \cdot)_\alpha$, lo cual justifica la notación $B(\mathbf{v}, \cdot)_\alpha \equiv v_\alpha$. La condición para que una forma bi-lineal simétrica defina una relación 1-1 y sobre entre V y V^* es que $\det|B_{\alpha\beta}| \neq 0$, la cual es equivalente a

Definición 2-20. Sea V un espacio vectorial, entonces una forma bi-lineal simétrica sobre V es no degenerada, si $\forall \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ existe un vector $\mathbf{w} \in V$ tal que $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$.

Ahora, toda forma bi-lineal simétrica B define una función cuadrática invariante Q sobre el espacio vectorial V , por la ecuación

$$Q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad (2.89)$$

Inversamente, es fácil ver que cualquier función cuadrática invariante Q define una forma bi-lineal simétrica

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} [Q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - Q(\mathbf{v}) - Q(\mathbf{w})] \quad (2.90)$$

Por esta relación entre una forma bi-lineal simétrica y la función cuadrática invariante, sus propiedades se comparten. Por ejemplo si $B(\cdot, \cdot)$ es no-degenerada, entonces la correspondiente función Q , ecuación (2.89), se llama no-degenerada.

En la teoría de la relatividad se define la estructura causal del espacio-tiempo, concepto fundamental en física, a través de un invariante, la distancia espacio-tiempo entre dos eventos físicos ΔS_{12}^2 , la cual es una función bi-lineal simétrica no degenerada y no-definida. Este último concepto surge de la siguiente definición:

Definición 2-21. Sea V un espacio vectorial y Q una función invariante no degenerada, entonces

1. Q es definida positiva si $Q(\mathbf{v}) > 0 \forall \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y definida negativa si $Q(\mathbf{v}) < 0 \forall \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
2. Q es semi-definida positiva si $Q(\mathbf{v}) \geq 0 \forall \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y semi-definida negativa si $Q(\mathbf{v}) \leq 0 \forall \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

Una función Q se llama definida o semi-definida, si es definida o semi-definida positiva o negativa, en caso contrario se llama no-definida. Para el caso de las funciones Q semi-definidas hay vectores $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $Q(\mathbf{v}) = 0$, a estos vectores se le llaman vectores Nulos. Por ejemplo el producto interno es una forma bi-lineal simétrica no degenerada y definida positiva.

Estas definiciones nos conducen a la siguiente proposición fundamental para la teoría de la relatividad:

Teorema 2-2. Sea V un espacio vectorial y $B(\cdot, \cdot)$ una función bi-lineal simétrica, no degenerada y no-definida, entonces existe por lo menos un vector Nulo.

Dado que la función $B(\cdot, \cdot)$ es no-definida, entonces existen vectores no nulos $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ tal que $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ y $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq 0$, y para $0 \leq \lambda \leq 1$ sea

$$\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{u} \quad (2.91)$$

para cada número λ el vector \mathbf{w} no es nulo, si los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ son linealmente independientes, entonces la función real

$$f(\lambda) = B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \lambda^2 B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (1 - \lambda)^2 B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\lambda(1 - \lambda) B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (2.92)$$

es continua y

$$f(0) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq 0 \quad y \quad f(1) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \quad (2.93)$$

entonces, por el teorema del valor intermedio para funciones reales continuas, existe por lo menos un λ tal que $f(\lambda) = 0$ y por lo tanto $B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ un vector Nulo \mathbf{w} , como se quería probar. Si los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ son linealmente dependientes, e.i., si $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{u}$ para algún $\alpha \neq 0$, entonces como, por hipótesis, $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ y $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq 0$ tenemos que

$$0 \leq \alpha^2 B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = B(\alpha \mathbf{v}, \alpha \mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq 0 \quad (2.94)$$

y por lo tanto $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ y el vector \mathbf{v} es nulo Q.E.D.

Este resultado muestra que para el caso de una función bi-lineal simétrica no degenerada y no-definida tenemos vectores diferentes de cero $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$, con $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$, con $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$ y Nulos, es decir con $B(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$.

Siempre es posible encontrar una base ortonormal de vectores del espacio V , tal que la matriz $[B_{\alpha\beta}]$ tenga en su diagonal $\pm 1, 0$, donde el número de veces n_+ que aparece $+1$, corresponde a la dimensión del sub-espacio vectorial de V definido positivo, n_- la dimensión del sub-espacio definido negativo y n_0 la dimensión del sub-espacio Nulo. Las dimensiones de los sub-espacios vectoriales inducidos por $B(\cdot, \cdot)$ es un invariante.

El número n_- se llama el índice de la función $B(\cdot, \cdot)$, y su signatura se define como $SigB = n_+ - n_-$.

En el contexto de las variedades, una métrica es una forma bi-lineal fundamental. Si $SigB = n$, con n la dimensión de la variedad, entonces la variedad se llama Riemanniana, y en caso contrario, es decir si $SigB < n$, se llama semi-riemanniana. Para el caso particular de una signatura igual a $n - 2$ (o $2 - n$), la variedad se llama Lorentziana. Para el caso de particular interés en física, variedades Lorentzianas en cuatro dimensiones, en la base canónica, los elementos de la diagonal de la matriz $[B_{\alpha\beta}]$ son

$$diagB = [-1, +1, +1, +1] \quad (2.95)$$

con índice $n_- = 1$ y la signatura es 2. Sin embargo también se puede elegir una $SigB = -2$, con índice $n_- = 3$, donde

$$diagB = [+1, -1, -1, -1]$$

La elección de una variedad Lorentziana con signatura $+2$ o -2 es arbitraria y equivalente, para todos los efectos de aplicaciones en física.

2.6. El espacio de Minkowski

Finalizamos este capítulo con una breve descripción de la estructura matemática que se utiliza para formular la teoría especial de la relatividad, la cual nos permite ilustrar algunas de los conceptos matemáticos expuestos en los numerals anteriores, y de paso hacer un breve repaso de los principios de la relatividad especial.

La teoría especial de la relatividad, que describe las interacciones fundamentales, electromagnética, fuerte o nuclear y débil, se basa en los siguientes postulados:

1. El espacio físico es tri-dimensional, isotrópico, homogéneo y satisface la geometría euclidiana, se modela por el espacio \mathbb{R}^3 con el producto interno usual.
2. El tiempo es homogéneo e isotrópico, y se modela por el espacio \mathbb{R} con la topología usual.
3. Principio de relatividad: Las leyes de la física son independientes del sistema de referencia inercial.
4. La velocidad de la luz en el vacío es independiente de la fuente y del observador.

La estructura matemática, que modela estos postulados y representa al espacio-tiempo de la física no gravitacional, se conoce como el espacio de Minkowski, definido como

$$\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3); Q(\mathbf{x}) = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu\} \quad (2.96)$$

con $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico de Minkowski dado por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & si & \mu = \nu = 0 \\ -1 & si & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & si & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.97)$$

donde la forma cuadrática Q induce la forma bi-lineal de signatura -2 (producto minkowskiano)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (2.98)$$

la cual es invariante bajo el grupo de transformaciones de Lorentz. También se puede escoger una signatura +2, en cuyo caso el tensor métrico de Minkowski es

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & si & \mu = \nu = 0 \\ +1 & si & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & si & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.99)$$

Las dos elecciones de signatura son equivalentes, teniendo en cuenta que para la interpretación física de las coordenadas, aquella que entra en la forma

cuadrática $Q(\mathbf{x})$ con signo contrario es la coordenada temporal, y las otras 3 componentes representan las coordenadas espaciales. Es usual distinguir la coordenada temporal por el índice 0 y las espaciales por 1,2,3. En este libro trabajamos con signatura -2 .

El grupo de transformaciones de Lorentz lo constituye el conjunto de transformaciones lineales

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.100)$$

tal que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \quad (2.101)$$

Una transformación de Lorentz, en general, depende de 6 parámetros, que elegidos adecuadamente corresponden a las tres componentes de la velocidad relativa entre dos sistemas de referencia inerciales, y los otros tres a la orientación relativa de los ejes coordenados espaciales.

Adicionalmente, la forma bi-lineal minkowskiana también es invariante bajo traslaciones espaciales y temporales, que corresponden a la homogeneidad del espacio y el tiempo, simetrías fundamentales de la física. El grupo de Lorentz, junto con las simetrías asociadas a la homogeneidad del espacio-tiempo, conforman el grupo de Poincaré de diez parámetros, el cual representa el grupo de simetrías fundamentales de la física, sin interacción gravitacional.

Un sistema de referencia inercial Σ , por definición, es aquel para el cual una partícula libre de fuerzas, se mueve a velocidad constante. En el espacio de Minkowski, un sistema de referencia inercial corresponde a elegir una base ortonormal, de tal manera que la forma bi-lineal se reduce al tensor métrico de Minkowski. En este caso las coordenadas canónicas de un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, dadas por (x^0, x^1, x^2, x^3) , tienen un significado físico directo: x^0 corresponde a la coordenada temporal de un evento físico, el cual sucede en un punto del espacio de coordenadas (x^1, x^2, x^3) , con respecto a un sistema de referencia inercial Σ .

La definición o construcción de un sistema de referencia inercial Σ significa, la elección (arbitraria) de un evento o punto del espacio-tiempo, al cual se le asignan las coordenadas $(0, 0, 0, 0)$, origen de las coordenadas temporal y espaciales y un sistema de reglas rígidas, ejes espaciales con una escala, y relojes sincronizados. Entonces la coordenada temporal $x^0 = ct$ de un evento físico, que sucede en un punto del espacio de coordenadas $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$, corresponde al tiempo que marca el reloj situado en ese punto del espacio, en reposo y sincronizado con un reloj idéntico situado en el origen de coordenadas. La sincronización de los relojes, definida por Einstein en su primer artículo de 1905 «Sobre la Electrodinámica de los cuerpos en movimiento», corresponde a la definición operacional de medida del tiempo en física, la cual cumple con las propiedades físicas de homogeneidad e isotropía asumidas.

La forma cuadrática minkowskiana Q define la estructura causal del espacio-tiempo.

La forma invariante Q permite caracterizar los vectores $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ en tres conjuntos disyuntos de acuerdo con la siguiente

Definición 2-21. Sea Q una forma cuadrática minkowskiana con $SigQ = -2$, entonces un vector (cuadri-vector) $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$; $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y componentes (x^0, x^1, x^2, x^3) si

- i- $Q(\mathbf{x}) > 0$ el vector se llama temporal y si $x^0 > 0$ se dice dirigido al futuro.
- ii. $Q(\mathbf{x}) < 0$ el vector se llama espacial
- iii. $Q(\mathbf{x}) = 0$ el vector se llama nulo o de luz y si $x^0 > 0$ se dice dirigido al futuro.

Del carácter invariante de la la forma cuadrática podemos encontrar algunos resultados importantes para la interpretación física de la estructura causal:

Teorema 2-3. Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$; $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ nulo o temporal y dirigido al futuro, para un observador inercial, entonces es nulo o temporal y dirigido al futuro para todos los observadores inerciales, e.i.

$$\text{si en } \Sigma; \mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \mid \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ y } x^0 > 0$$

entonces

$$\forall \Sigma'; \mathbf{Q}(\mathbf{x}') \geq 0 \text{ y } x'^0 > 0; \text{ con } \mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x}$$

Teorema 2-4. Si $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$; $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y si en Σ

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \mid \mathbf{Q}(\mathbf{x}) > 0 \text{ y } x^0 > 0$$

entonces

$$\exists \Sigma_p \mid \mathbf{x}_p = (x_p^0, 0, 0, 0); x_p^0 = \sqrt{\mathbf{Q}(\mathbf{x})}$$

Estos dos resultados permiten definir la estructura causal del espacio-tiempo, la cual queda determinada por la forma cuadrática minkowskiana Q . Con la notación usual

$$\begin{aligned} \Delta S^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2 \end{aligned} \quad (2.102)$$

recibe el nombre de intervalo o «distancia» espacio-tiempo entre los eventos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}$.

Definición 2-22. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ dos eventos físicos. Se dice que los dos eventos (puntos del espacio-tiempo) están conectados causalmente si

$$\Delta S^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq 0 \quad (2.103)$$

De acuerdo con el **Teorema 2-3** si, $ct_2 > ct_1$, es decir, si para algún observador inercial Σ el evento 2 sucede después del evento 1, entonces esta condición significa que, para todos los observadores, el evento 2 sucede después del evento 1. Además, por el **Teorema 2-4**, existe un sistema de referencia Σ_p , llamado propio, con respecto al cual los dos eventos suceden en el mismo punto del espacio. Esto implica que el intervalo de tiempo medido en Σ_p

$$\Delta \tau =_p t_2 -_p t_1 = \frac{1}{c} \sqrt{\Delta S^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} \quad (2.104)$$

corresponde al intervalo de tiempo entre dos eventos físicos medidos por un mismo reloj y para todos los demás observadores el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es siempre mayor al propio, en un factor $\gamma(v)$, es decir

$$\Delta t = \gamma(v) \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.105)$$

donde v es la velocidad del sistema de referencia Σ respecto al sistema de referencia propio Σ_p y $\gamma(v)$ el factor gama de Lorentz de la velocidad v . Este resultado es conocido como el efecto de dilatación temporal.

Para el caso cuando el intervalo espacio-tiempo entre dos eventos físicos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ sea menor que cero, e.i. si

$$\Delta S^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{r}^2 < 0 \quad (2.106)$$

entonces los eventos no están causalmente conectados. En este caso, para todos los observadores inerciales, los dos eventos suceden en puntos diferentes del espacio $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$. Además siempre existe un sistema de referencia inercial $\tilde{\Sigma}$ con respecto al cual los dos eventos son simultáneos, es decir $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2$, y por lo tanto

$$\Delta S^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\Delta \tilde{\mathbf{r}}^2 \quad (2.107)$$

corresponde a la distancia física entre los dos eventos.

El movimiento de una partícula física material de masa inercial m_0 se describe por una curva sobre \mathcal{M}

$$\begin{aligned} \lambda: I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \sigma &\longmapsto \lambda(\sigma) = (x^0(\sigma), x^1(\sigma), x^2(\sigma), x^3(\sigma)) = \mathbf{x}(\sigma) \end{aligned} \quad (2.108)$$

llamada la línea de universo de la partícula y σ el parámetro de la curva. Consideremos dos puntos cercanos (infinitesimal) de la curva \mathbf{x} y $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, entonces la distancia espacio-tiempo entre estos puntos es temporal

$$\Delta S^2(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}) = ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 > 0 \quad (2.109)$$

y por lo tanto de la ecuación (2.104) tenemos que, la longitud espacio-tiempo de la curva s , está relacionada con el tiempo propio τ de la partícula por

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \quad (2.110)$$

Entonces, para describir el movimiento de una partícula física, se puede utilizar como parámetro de la línea de universo $\mathbf{x}(s)$ la longitud espacio-tiempo s , o $\mathbf{x}(\tau)$ el tiempo propio τ , medido por un reloj que viaja con la partícula. Si se elige el parámetro de la curva s , entonces

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{U} \quad (2.111)$$

es un vector (cuadri-vector)

$$\mathbf{U} = (U^0, U^1, U^2, U^3) = \left(\frac{dx^0}{ds}, \frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds} \right) = \left(\frac{dx^0}{ds}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \quad (2.112)$$

unitario

$$\mathbf{Q}(\mathbf{U}) = (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 = 1 \quad (2.113)$$

, dirigido al futuro

$$U^0 > 0 \quad (2.114)$$

y tangente a línea de universo de la partícula, cuyas componentes, medidas en un sistema de referencia Σ , están dadas por

$$\mathbf{U} = \gamma(\mathbf{u}) \left(1, \frac{\mathbf{u}}{c} \right) \quad (2.115)$$

donde

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.116)$$

es la velocidad física de la partícula medida en Σ . Si se utiliza como parámetro para la curva el tiempo propio τ , entonces

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \gamma(\mathbf{u}) (c, \mathbf{u}) \quad (2.117)$$

y \mathbf{U} es tangente a la línea de universo, pero no es unitario

$$\mathbf{Q}(\mathbf{U}) = c^2 \quad (2.118)$$

Si m_0 es la masa inercial de una partícula, entonces

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{U} \quad (2.119)$$

es el cuadri-vector momentun, donde la forma cuadrática invariante \mathbf{Q} determina

$$\mathbf{Q}(\mathbf{p}) = m_0^2 c^2 \quad (2.120)$$

la masa propia de la partícula y sus componentes

$$\mathbf{p} = \left(\frac{E}{c}, p \right) \quad (2.121)$$

representan la energía total E de la partícula y su momentun físico p . Las ecuaciones (2.120) y (2.121) permiten postular las partículas de masa propia cero, pues

$$m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad (2.122)$$

y por lo tanto una partícula con $m_0 = 0$ está descrita por un cuadri-vector Nulo

$$\mathbf{p} = \left(\frac{E}{c}, p \right); \quad \mathbf{Q}(\mathbf{p}) = 0 \quad (2.123)$$

las cuales describen, por ejemplo, a los fotones.

La ecuación de movimiento en la dinámica relativista, (la correspondiente a la 2ª ley de Newton) se pueden formular en términos de cuadri-vectores

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \quad (2.124)$$

donde las componentes del cuadri-vector fuerza \mathbf{f} están dados por

$$\mathbf{f} = \gamma(\mathbf{u}) \left(\frac{1}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \frac{dp}{dt} \right) = \gamma(\mathbf{u}) \left(\frac{1}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{F} \right) \quad (2.125)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza que actúa sobre la partícula de masa propia m_0 y velocidad \mathbf{u} . Dado que la tercera ley de Newton no es válida, en general, se postula el principio de conservación de energía y momentum. Así, para un sistema aislado de partículas interactuantes el cuadri-vector momentum total del sistema, definido por

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \left(\frac{1}{c} \sum_i E_i, \sum_i p_i \right) \quad (2.126)$$

se conserva, con p_i el cuadri-vector momentum de la partícula i -ésima. En esta definición están incluidas las partículas de masa propia cero y además el hecho, que es consecuencia de la equivalencia masa-energía, que el número de partículas y sus masas propias pueden variar.

El último concepto importante que nos falta, para concluir este resumen sobre relatividad especial, es el cuadri-vector de onda

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{K} \right) \quad (2.127)$$

el cual describe una onda electromagnética de frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$ y vector de onda

$$\mathbf{K} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{n}} \quad (2.128)$$

donde λ es longitud de onda y se propaga en la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$. De la ecuación

$$\mathbf{Q}(\mathbf{k}) = 0 \quad (2.129)$$

se obtiene la relación de dispersión para las ondas electromagnéticas en el vacío:

$$\lambda\nu = c \quad (2.130)$$

En el caso de la relatividad general, donde la forma bi-lineal se denota por $\mathbf{g}(\cdot, \cdot)$, ésta corresponde al campo gravitacional generado por la materia. Así el campo gravitacional $\mathbf{g}(\cdot, \cdot)$ no solo determina la estructura causal del espacio-tiempo, pasado y futuro, también determina la medida del tiempo, la geometría del espacio, el movimiento de partículas en el campo gravitacional, la masa y energía propia de las partículas, entre otros.

Capítulo 3

Variedades

Denotemos por \mathbb{R}^n el espacio vectorial euclideo. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es una n -pla (x^1, x^2, \dots, x^n) donde los números reales x^i ; $i = 1, 2, \dots, n$ se llaman las coordenadas del punto.

Definición 3-1 Una función

$$\begin{aligned} \varphi: A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto x' = \varphi(x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

con A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , se llama de clase C^r si las coordenadas $x' = (x'^1, x'^2, \dots, x'^m)$ del punto imagen $\varphi(x)$ son funciones r -veces continuamente diferenciables. Si la función φ es de clase C^r para todo $r \geq 0$, entonces se dice que φ es suave o de clase C^∞ .

Definición 3-2 Sea M un espacio topológico. Definimos una carta coordenada $C_\alpha = (\varphi_\alpha, U_\alpha)$ sobre M como un homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha: U_\alpha \subseteq M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto x = \varphi_\alpha(p) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde U_α es un abierto de M . Las coordenadas del punto $x = \varphi_\alpha(p)$, i.e. $x = (x^1, \dots, x^n)$ se llaman coordenadas del punto p bajo el homeomorfismo φ_α , y n es la dimensión de la carta. Cuando interviene varias cartas coordenadas, es usual denotar las coordenadas $\varphi_\alpha(p) = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) \equiv x_\alpha^i$; $i = 1, \dots, n$ con el subíndice α que identifica la carta correspondiente. Si no hay ambigüedad no se utilizará un subíndice.

Definición 3-3 Sea M un espacio topológico. Un atlas A de clase C^r sobre M es una colección de cartas $\{C_\alpha = (\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ tal que:

A-i- Los abiertos U_α cubren M , i.e.:

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \quad (3.3)$$

A-ii- Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \\ x = \varphi_\alpha(p) &\longmapsto y = \varphi_\beta(p) \end{aligned} \quad (3.4)$$

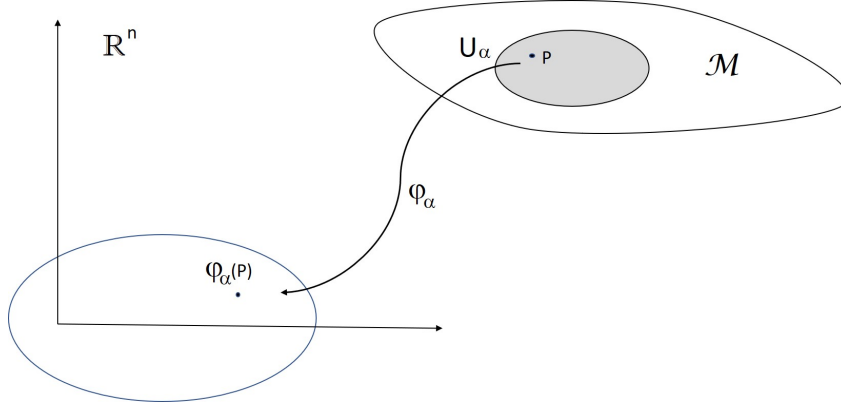


Figura 3-1: Carta coordenada

es un difeomorfismo de clase C^r .

Las funciones $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ y su inversa $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ nos dan las ecuaciones de transformación entre las diferentes coordenadas.

Dos atlas \mathcal{A} y \mathcal{B} de clase C^r sobre un espacio topológico \mathcal{M} se llaman compatibles si la unión de los atlas es de nuevo un atlas de clase C^r ; así la unión de todos los atlas compatibles sobre un espacio topológico forma una clase de equivalencia de atlas, o un atlas maximal.

Definición 3-4 Una C^r -variedad diferenciable \mathcal{M} es un espacio topológico de Hausdorff con un atlas maximal de clase C^r sobre \mathcal{M} .

NOTA 1: Cada U_α es una vecindad coordenada local, lo cual implica que para todo punto $p \in \mathcal{M}$, hay por lo menos una carta $C_\alpha = (\varphi_\alpha, U_\alpha)$ tal que $p \in U_\alpha \subset \mathcal{M}$. Entonces las coordenadas de p son las coordenadas del punto imagen $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$; así notaremos $\varphi_\alpha(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ con $x^i = x^i(p)$.

La condición A-ii exige que las vecindades coordenadas sean compatibles, es decir: si $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(p) &= (x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \phi_\beta(p) &= (x'^1, x'^2, \dots, x'^n) \end{aligned} \quad (3.5)$$

son dos coordenadas diferentes para el mismo punto, y por lo tanto las cartas (ϕ_α, U_α) y (ϕ_β, U_β) estén relacionadas por:

$$\begin{aligned} (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x'^1, x'^2, \dots, x'^n) &= (x^1, x^2, \dots, x^n) \\ (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(x^1, x^2, \dots, x^n) &= (x'^1, x'^2, \dots, x'^n) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Las coordenadas $x^i = x^i(x'^j)$ son funciones de clase C^r de las coordenadas x'^j y viceversa $x'^j = x'^j(x^i)$.

NOTA 2: Otro atlas Δ' sobre \mathcal{M} se dice C^r -compatible con Δ , C^r -atlas sobre \mathcal{M} , si $\Delta \cup \Delta'$ es de nuevo un C^r -atlas sobre \mathcal{M} . El atlas consistente de la unión de todos los atlas compatibles con un atlas dado se llama atlas maximal de \mathcal{M} . Así un atlas maximal sobre \mathcal{M} es el conjunto de todos los

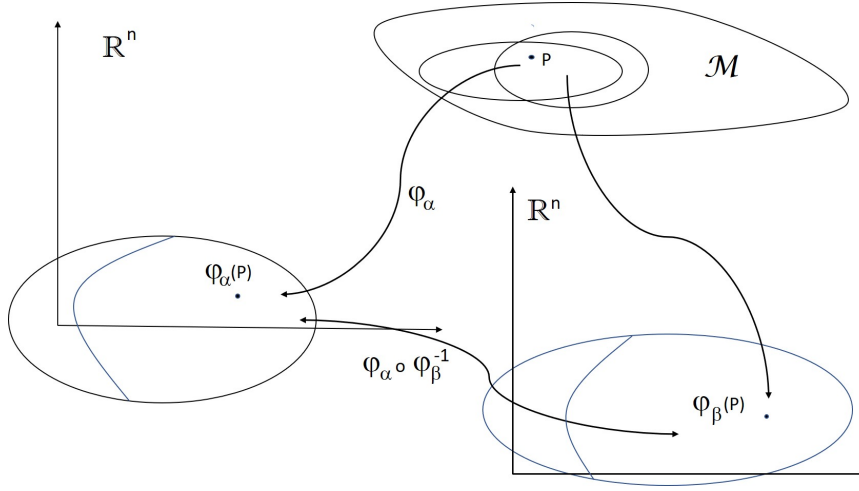


Figura 3-2: Cartas compatibles

posibles sistemas coordenados que cubren a \mathcal{M} . La compatibilidad de atlas es una relación de equivalencia. Una de estas clases de equivalencia es llamada una estructura diferenciable.

Dada una variedad \mathcal{M} es interesante preguntarse si ésta admite una única estructura diferencial. En 1956 Milnor demostró que S^7 posee 28 estructuras diferenciales diferentes. En 1984 se demostró que \mathbb{R}^n admite un número infinito de estructuras diferenciales.

NOTA 3: Una C^r -variedad con frontera se define de la misma manera cambiando \mathbb{R}^n por

$$\frac{1}{2}\mathbb{R}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\} \quad (3.7)$$

El contorno de \mathcal{M} , denotado por $\partial\mathcal{M}$, se define como el conjunto de todos los puntos de \mathcal{M} cuya imagen bajo ϕ_α está sobre el contorno de $\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$, y de esta forma $\partial\mathcal{M}$ es una C^r -variedad sin frontera de dimensión $n - 1$.

Para ver algunos ejemplos de variedades diferenciables, notemos que para definir una estructura diferenciable sobre un espacio topológico de Hausdorff M , o equivalentemente definir una variedad, es suficiente exhibir un atlas, es decir, un conjunto de cartas coordenadas C^r -compatibles que cubran M . En muchos casos de interés, un atlas puede consistir de una sola carta coordenada, pero también veremos ejemplos donde todos los atlas, requieren mínimo dos cartas coordenadas para cubrir la variedad. Pero se debe entender que la variedad la conforman **todos** los atlas compatibles. En general, es imposible e innecesario definir todos los atlas compatibles, para construir una variedad diferenciable, basta con definir un atlas.

La definición de variedad lo que significa es que las propiedades, de funciones y estructuras, que se definan sobre ésta, no dependan de las coordenadas utilizadas. Este concepto lo ilustra, en física, el principio de relatividad especial,

el cual establece que las leyes (ecuaciones) de la física son independientes del sistema de referencia inercial,

\mathbb{R}^n es una variedad n -dimensional, para todo $n \geq 1$. En particular \mathbb{R} la recta real, el plano cartesiano \mathbb{R}^2 y el espacio \mathbb{R}^3 son variedades, uni- bi- y tri-dimensionales respectivamente. En \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 las curvas y superficies son ejemplos de variedades, entre los cuales podemos encontrar muchos ejemplos de variedades con propiedades y características interesantes, como la cinta de Möbius. Para \mathbb{R}^n la carta coordenada

$$\varphi_\alpha \equiv id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.8)$$

es un atlas, y esta carta es suficiente para darle estructura de variedad.

Por ejemplo, para el caso particular del plano cartesiano, las coordenadas rectangulares $(x, y : -\infty < x, y < \infty)$ cubren todo \mathbb{R}^2 , mientras que las coordenadas polares (r, θ) cubren sólo la vecindad coordenada $(r > 0; 0 < \theta < 2\pi)$. Así, se necesitan por lo menos dos de tales cartas para cubrir \mathbb{R}^2 .

Varios ejemplos interesantes de variedades se pueden construir a partir de los siguientes resultados:

Lema 3-1 Sea \mathcal{M} una variedad y $N \subset M$ un subespacio topológico, entonces \mathcal{N} es una subvariedad abierta de \mathcal{M} con las cartas restringidas a N , es decir, si $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ es una carta de \mathcal{M} entonces $(\varphi_\alpha, U_\alpha \cap N)$ es una carta de \mathcal{N} .

Lema 3-2 Sea \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades de m - y n -dimensiones respectivamente, entonces $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ es una variedad de dimensión $m + n$, en donde las cartas de la variedad producto están dadas por

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \times \psi_\beta : \quad U_\alpha \times V_\beta \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ r = (p, q) &\longmapsto x = \chi_{\alpha\beta}(r) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

con $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ y (ψ_β, V_β) cartas de \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente.

El círculo o 1-esfera S^1 es una curva en \mathbb{R}^2 definida por

$$S^1 := \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\} \quad (3.10)$$

es una variedad uni-dimensional, mientras que la 2-esfera unidad

$$S^2 := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\} \quad (3.11)$$

es una variedad bi-dimensional. Para construir un atlas sobre el círculo y la esfera, y darles estructura de variedad, consideremos el caso general de la n -esfera definida por

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1\} \quad (3.12)$$

Para dotar a S^n con una estructura de variedad diferenciable, consideremos el hiperplano H de \mathbb{R}^{n+1} definido por $x^0 = 0$, en donde estamos utilizando la notación $x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces un atlas sobre S^n queda definido

por las dos cartas (φ_1, U_1) y (φ_2, U_2) , las dos proyecciones estereográficas de la n -esfera sobre este plano H , definidas por:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 = S^n \setminus \{e_0\} &\longrightarrow H \equiv \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \varphi_1(x) = \frac{x - x^0 e_0}{1 - x^0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 = S^n \setminus \{-e_0\} &\longrightarrow H \equiv \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \varphi_2(x) = \frac{x - x^0 e_0}{1 + x^0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $e_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ es el “polo norte” de la n -esfera y $-e_0$ el “polo sur”. Es decir, U_1 cubre la esfera menos el polo norte y U_2 cubre la esfera menos el polo sur. Estas proyecciones estereográficas se pueden visualizar fácilmente en el caso del círculo S^1 . Consideremos en el plano cartesiano el círculo unidad centrado en el origen de coordenadas, y una recta que parte del polo norte, punto $(1, 0)$ sobre el eje vertical, se prolonga cortando al círculo en un punto $x = (x^0, x^1)$ y continúa cortando el eje horizontal, plano $x^0 = 0$, en el punto $\varphi_1(x) = x^1 / (1 - x^0)$ el cual está bien definido pues el punto $x^0 = 1$ está excluido del abierto U_1 . De manera similar la proyección desde el polo sur, punto $(-1, 0)$.

Estas dos cartas son C^∞ compatibles, pues la transformación de coordenadas

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|} \quad ; \quad y \in \mathbb{R}^n \text{ y } y \neq 0 \quad (3.15)$$

es infinitamente diferenciable.

No es difícil probar que la variedad S^n , a diferencia de \mathbb{R}^n , requiere por lo menos dos cartas coordenadas para cubrir la variedad.

El cilindro bidimensional C^2 es una variedad obtenida a partir de \mathbb{R}^2 , identificando los puntos (x, y) con $(x + 2\pi, y)$. Entonces (x, y) son coordenadas en la vecindad $(0 < x < 2\pi, -\infty < y < \infty)$; así se necesitan por los menos dos de tales vecindades coordenadas para cubrir C^2 .

De manera similar la cinta de Möbius se obtiene identificando (x, y) con $(x + 2\pi, -y)$. El cilindro también se puede obtener como la variedad producto $\mathbb{R} \times S^1$ y el Toro $S^1 \times S^1$. Estas variedades se pueden generalizar a más dimensiones y productos cartesianos, dando lugar a nuevas variedades que surgen, por ejemplo, en el espacio de configuración de sistemas físicos como osciladores acoplados.

Las variedades uni-dimensionales conectadas son homeomorfas a \mathbb{R} o a S^1 , y en general las superficies en \mathbb{R}^3 , $f(x, y, z) = c$, habiendo eliminado los puntos singulares donde $df = 0$, son variedades bi-dimensionales, aún cuando hay superficies bi-dimensionales como la botella de Klein, que no pueden ser inmersas en \mathbb{R}^3 .

Definición 3-5 Una variedad \mathcal{M} se dice orientable si existe un atlas

$$\Delta = \{\phi_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$$

tal que en toda intersección no vacía $U_\alpha \cap U_\beta$ de abiertos, el determinante de la matriz $(\partial x^i / \partial x'^j)$ es positivo, donde (x^1, x^2, \dots, x^n) y $(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$ son coordenadas en U_α y U_β respectivamente.

Definición 3-6 Un atlas $\Delta = \{\phi_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ se dice localmente finito si todo punto p de la variedad \mathcal{M} tiene una vecindad abierta que intercepta sólo un número finito de vecindades U_β . Una variedad \mathcal{M} se llama paracompacta si para todo atlas $\Delta = \{\phi_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ existe un atlas localmente finito $\Gamma = \{\psi_\beta, V_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$ con cada V_β contenido en algún U_α .

Una función es suave o de clase C^∞ si es de clase C^r para todo $r > 0$. En lo sucesivo, por variedad entenderemos una C^∞ -variedad de Hausdorff paracompacta.

3.1. Espacio tangente

El concepto de variedad surgió como una generalización de la teoría de superficies en \mathbb{R}^3 . Así, por una parte se hace necesario generalizar el concepto de plano tangente a una superficie, y por otra parte la noción de vector tangente a una variedad nos permitirá generalizar también los conceptos de derivadas direccionales en \mathbb{R}^n . Existen varios caminos equivalentes para definir el concepto de vector tangente a una variedad. En estas notas seguiremos un camino que, si bien puede parecer abstracto en un comienzo, permitirá construir los conceptos necesarios para introducir la noción de derivada direccional sobre una variedad y de tensor, en una forma más directa.

Definición 3-7 Sea \mathcal{M} una variedad suave n -dimensional y

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto f(p) \end{aligned} \quad (3.16)$$

una función de valor real definida sobre la variedad. Entonces, la función f se dice de clase C^k en un punto $p \in \mathcal{M}$ si para toda vecindad coordinada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de p la función

$$\begin{aligned} f_\alpha := f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \varphi_\alpha(q) &\longmapsto f_\alpha(x) = f(q) \end{aligned} \quad (3.17)$$

es de clase C^k en el punto $p \in U_\alpha \subset \mathcal{M}$.

Llamemos

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) := \{f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}\} \quad (3.18)$$

al conjunto de todas las funciones de valor real definidas sobre la variedad. Sobre este conjunto podemos construir una estructura de espacio vectorial definiendo la suma de funciones y el producto de un número real por una función en la forma:

$$(f + g)(p) := f(p) + g(p), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \forall p \in \mathcal{M} \quad (3.19)$$

$$(\lambda f)(p) := \lambda f(p), \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \forall p \in \mathcal{M}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.20)$$

La noción de diferenciabilidad de una función sólo tiene sentido para funciones definidas sobre los reales (más generalmente sobre espacios de Banach) y por esta razón la definición dada de diferenciabilidad se hace a través de las cartas coordenadas. Por lo tanto, para que esta definición de diferenciabilidad tenga

sentido es necesario mostrar que no depende de la carta coordenada utilizada. Así, sea (U_β, φ_β) otra carta con $p \in U_\beta$, entonces

$$f_\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1} = f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = f_\alpha \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \quad (3.21)$$

dado que las cartas son compatibles, esta relación implica que si la función f es diferenciable con respecto a la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ entonces también lo es respecto a la carta (U_β, φ_β) , y viceversa. Esta demostración de la independencia de las cartas es el ingrediente fundamental para todas las definiciones y operaciones que se realicen sobre una variedad, en las cuales se involucren las cartas coordenadas.

Definición 3-8 Sea \mathcal{M} una variedad suave y $p \in \mathcal{M}$. Un vector v_p tangente a la variedad \mathcal{M} en el punto p , es una función

$$\begin{aligned} v_p : \quad \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto v_p(f) \end{aligned} \quad (3.22)$$

tal que:

T-1: v_p es \mathbb{R} -lineal, i.e.,

$$v_p(f + \lambda g) = v_p(f) + \lambda v_p(g), \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.23)$$

T-2: v_p es leibnitziana, i.e.,

$$v_p(fg) = f(p)v_p(g) + v_p(f)g(p) \quad (3.24)$$

Definamos por $T_p\mathcal{M}$ al conjunto de todos los vectores tangentes a un punto $p \in \mathcal{M}$ como el espacio tangente a la variedad en el punto p .

Lema 3-1 El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ es un espacio vectorial real.

Para ver esto basta con definir la suma de vectores y el producto de un escalar (real) por un vector, y mostrar que estas operaciones están bien definidas, es decir, satisfacen las propiedades T-1 y T-2. Sean $v_p, w_p \in T_p\mathcal{M}$, entonces definamos la suma y el producto por:

$$(v_p + w_p)(f) := v_p(f) + w_p(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \quad (3.25)$$

$$(\lambda v_p)(f) := \lambda v_p(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

La linealidad, propiedad T-1, es directa de probar pues

$$\begin{aligned} (v_p + \lambda w_p)(f + \mu g) &= v_p(f + \mu g) + \lambda w_p(f + \mu g) \\ &= v_p(f) + \mu v_p(g) + \lambda w_p(f) + \lambda \mu w_p(g) \\ &= (v_p + \lambda w_p)f + \mu(v_p + \lambda w_p)g \end{aligned} \quad (3.27)$$

por definición, luego $v_p + \lambda w_p \in T_p\mathcal{M}$.

Para demostrar T-2, apliquemos $v_p + \lambda w_p$ al producto fg ; entonces, por definición de suma de vectores, tenemos

$$(v_p + \lambda w_p)(fg) = v_p(fg) + \lambda w_p(fg) \quad (3.28)$$

puesto que v_p y w_p son vectores para los cuales vale T-2, y por lo tanto

$$\begin{aligned} (v_p + \lambda w_p)(fg) &= f(p)v_p(g) + v_p(f)g(p) + \lambda f(p)w_p(g) + \lambda w_p(f)g(p) \\ &= f(p)(v_p + \lambda w_p)(g) + (v_p + \lambda w_p)(f)g(p) \end{aligned} \quad (3.29)$$

como se quería probar.

Para mostrar que el espacio tangente tiene la misma dimensión que la variedad, veamos algunas definiciones y resultados importantes.

Definición 3-9 Sea \mathcal{M} una variedad suave y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una vecindad coordenada de $p \in \mathcal{M}$ y sea $(x^1, \dots, x^n) = \varphi_\alpha(p)$ las coordenadas del punto p . Sea $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ y definamos la "derivada parcial" de la función f con respecto a las coordenadas x^i ; $i = 1, \dots, n$ en el punto $p \in \mathcal{M}$ por

$$\partial_i f(p) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f_\alpha)}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) \quad (3.30)$$

Entonces

Lema 3-2 Las funciones

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.31)$$

son vectores tangentes de $T_p M$.

Para demostrar este lema veamos que las funciones $\partial_i|_p$ satisfacen T-1 y T-2. Para este fin basta con recordar que las derivadas parciales son lineales y satisfacen la regla del producto. Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces de la **definición 3-9** tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x^i}(p) &= \frac{\partial(f_\alpha + \lambda g_\alpha)}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) \\ &= \frac{\partial(f_\alpha)}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) + \lambda \frac{\partial(g_\alpha)}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \end{aligned} \quad (3.32)$$

lo cual prueba la linealidad; en el segundo paso se usó la linealidad de las derivadas parciales. Para la propiedad T-2

$$\begin{aligned} \frac{\partial(fg)}{\partial x^i}(p) &= \frac{\partial(f_\alpha g_\alpha)}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) \\ &= f_\alpha(\varphi_\alpha(p)) \left(\frac{\partial(g_\alpha)}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) + \frac{\partial(f_\alpha)}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) g_\alpha(\varphi_\alpha(p)) \right) \\ &= f(p) \frac{\partial(g)}{\partial x^i}(p) + \frac{\partial(f)}{\partial x^i}(p) g(p) \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde para el tercer paso se utilizó la regla de la derivada de un producto de funciones.

El siguiente resultado muestra que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ definidas anteriormente son objetos locales, es decir, sólo dependen del comportamiento de las funciones f en una vecindad del punto $p \in \mathcal{M}$.

Lema 3-3 *Sea $v_p \in T_p\mathcal{M}$ un vector tangente y $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, entonces:*

- i. Si $f = g$ en alguna vecindad del punto $p \in \mathcal{M}$, entonces $v_p(f) = v_p(g)$*
- ii. Si la función f es constante en una vecindad del punto p , entonces $v_p(f) = 0$.*

La prueba de este lema es sencilla pues toda función lineal transforma el cero en cero, y así

$$0 = v_p(0) = v_p(f - g) = v_p(f) - v_p(g) \quad (3.34)$$

además, si $f = c = \text{const}$, entonces, como

$$v_p(1) = v_p(1 \cdot 1) = 1 \cdot v_p(1) + v_p(1) \cdot 1 = 2v_p(1) \quad (3.35)$$

se tiene que $v_p(1) = 0$, y por lo tanto

$$v_p(f) = v_p(c) = cv_p(1) = 0 \quad (3.36)$$

El siguiente teorema constituye el resultado central de esta sección.

Teorema 3-4 *Sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una vecindad coordenada de un punto $p \in \mathcal{M}$, entonces los vectores coordenados $\partial_i|_p$ $i = 1, 2, \dots, n$ conforman una base para el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$.*

Así, $T_p\mathcal{M}$ es un espacio vectorial real de la misma dimensión que la variedad.

Para probar este resultado veamos primero el concepto de funciones coordenadas. Las funciones

$$\begin{array}{ccc} \pi^i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto x^i \end{array} \quad (3.37)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, que a un punto de \mathbb{R}^n le asocia su i -ésima coordenada, se llaman funciones proyección o funciones coordenadas, las cuales son suaves. Entonces, dada una carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de una variedad \mathcal{M} , definimos las funciones coordenadas por

$$\begin{array}{ccc} x^i : & \mathcal{M} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto x^i(p) \end{array} \quad (3.38)$$

las cuales asocian a cada punto p de la variedad la coordenada i -ésima, bajo la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Las funciones coordenadas pertenecen al espacio de las funciones reales definidas sobre la variedad, i.e., $x^i \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

Con esta definición podemos probar que los vectores tangente $\partial_i|_p$ $i = 1, 2, \dots, n$ son linealmente independientes, pues

$$\partial_i x^j|_p = \frac{\partial(x_\alpha^j)}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j \quad (3.39)$$

y por lo tanto cualquier combinación lineal nula de los vectores $\partial_i|_p$, es decir si

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i \partial_i|_p = 0 \quad (3.40)$$

al aplicarla a las funciones coordenadas implica que $\alpha^i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Falta entonces probar que cualquier vector $v_p \in T_p\mathcal{M}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores coordenados $\partial_i|_p$ $i = 1, 2, \dots, n$, esto es

$$v_p = \sum_{i=1}^n v_p^i(x^i) \partial_i|_p \equiv v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (3.41)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la convención de suma de Einstein, es decir, toda expresión con dos índices iguales, uno como superíndice y otro como subíndice, implica una suma sobre los valores que toma el índice. Las cantidades reales

$$v_p^i(x^i) \equiv v_p^i \quad (3.42)$$

son las componentes del vector tangente en la base coordenada. Para probar esto último haremos uso del siguiente resultado del cálculo. Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave en el punto a , entonces existen n funciones suaves H_k tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=1}^n (x^k - a^k) H_k(x) \quad (3.43)$$

con

$$H_k(a) = \frac{\partial F}{\partial x^k} \Big|_{x=a} \quad (3.44)$$

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$; entonces, aplicando este resultado a la función $f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha$ con $a = \varphi_\alpha(p)$, tenemos que para todo $q \in U_\alpha$

$$f(q) = f(p) + \sum_{k=1}^n (x^k \circ \varphi_\alpha(q) - x^k \circ \varphi_\alpha(p)) H_k(\varphi_\alpha(q)) \quad (3.45)$$

Sea $v_p \in T_p\mathcal{M}$; entonces, aplicando el vector tangente v_p a la función f -usando el último resultado-, la linealidad, la propiedad leibnitziana y la propiedad ii del Lema 5.3, obtenemos

$$\begin{aligned} v_p(f) &= v_p(f(p)) + \sum_{k=1}^n [\{(x^k \circ \varphi_\alpha(q) - x^k \circ \varphi_\alpha(p))\}|_{q=p} v_p(H_k \circ \varphi_\alpha) \\ &\quad + H_k \circ \varphi_\alpha|_p v_p(x^k \circ \varphi_\alpha(q) - x^k \circ \varphi_\alpha(p))] \\ &= \sum_{k=1}^n [H_k \circ \varphi_\alpha(p)] v_p(x^k \circ \varphi_\alpha) \end{aligned} \quad (3.46)$$

de la ecuación (3.44) $H_k \circ \varphi_\alpha$ es justamente $\partial_i f|_p$ y por lo tanto para toda función $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ tenemos que

$$v_p(f) = v_p^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \quad (3.47)$$

como se quería probar. Los coeficientes de la expansión v_p^i son los valores de la función v_p aplicada a las funciones coordenadas x^i .

Otra forma equivalente de introducir los vectores tangente es a través del concepto de derivada direccional. Para este fin definamos primero el concepto de curva sobre una variedad.

Definición 3-10 Sea \mathcal{M} una variedad suave. Una curva suave sobre la variedad es una función

$$\begin{aligned} \lambda : \quad I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ t &\longmapsto \lambda(t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde I es un intervalo de los reales que contiene al cero y $\lambda(0) = p$, y si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una vecindad coordinada del punto p , entonces la curva

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha : \quad I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \lambda_\alpha(t) = \varphi_\alpha \circ \lambda(t) \end{aligned} \quad (3.49)$$

sobre \mathbb{R}^n es suave.

Consideremos un vector tangente $v_p \in T_p\mathcal{M}$, con componentes $v_p^i = v_p(x^i)$ en la base coordinada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, i.e.,

$$v_p = v_p^i \partial_i \Big|_p \quad (3.50)$$

y definamos una curva λ como la curva en \mathbb{R}^n dada por

$$x^i(\lambda(t)) = x^i(p) + tv_p^i \quad (3.51)$$

entonces, esta curva pasa por el punto $p \in \mathcal{M}$ (i.e., pasa por el punto $x^i(p) = \varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$) para $t = 0$, y en este punto las componentes del vector tangente son

$$v_p^i = \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.52)$$

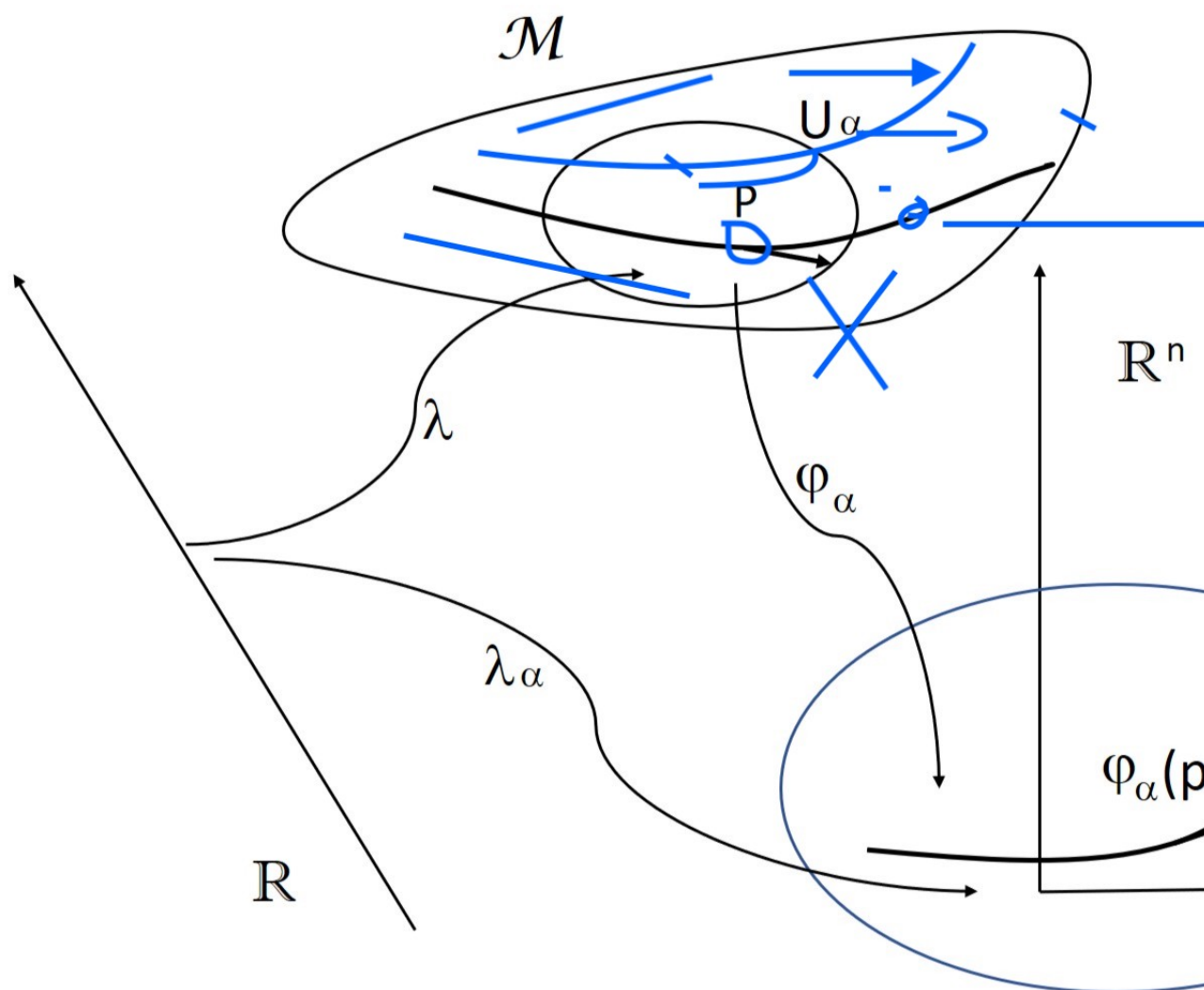
así, sobre la variedad \mathcal{M} la curva pasa por p y tiene vector tangente $v_p \in T_p\mathcal{M}$.

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ una función de valor real sobre la variedad, entonces

$$\begin{aligned} v_p(f) &= v_p^i \partial_i f \Big|_p = \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \\ &= \left. \frac{dx^i(\lambda(t))}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_\lambda \end{aligned} \quad (3.53)$$

es decir, $(\partial/\partial t)_\lambda \in T_p\mathcal{M}$ y representa la derivada direccional de la función f a lo largo de la curva λ .

De las ecuaciones diferenciales ordinarias se sigue que, dado un vector tangente $v_p \in T_p\mathcal{M}$, existe una única curva λ que pasa por el punto $p \in \mathcal{M}$ y cuyo vector tangente en el punto p es v_p . Así se puede visualizar un vector tangente $v_p \in T_p\mathcal{M}$ como una "flecha" en el punto p apuntando en la dirección de una curva $\lambda(t)$ con vector tangente v_p en el punto $p = \lambda(0)$. En particular, dada una

Figura 3-3: Vector tangente a una curva λ

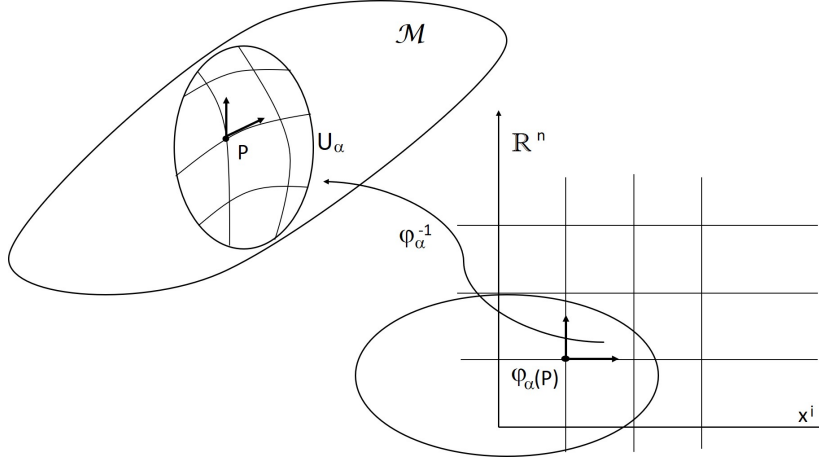


Figura 3-4: Curvas coordenadas

base coordenada para el espacio tangente $\partial_i|_p$, las correspondientes curvas son las curvas coordenadas (ver Figura 3-4).

Sea $\{\mathbf{E}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ una base para el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$, entonces cualquier vector $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ (en lo sucesivo escribiremos en negrilla los vectores) se puede escribir como

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{E}_i \quad (3.54)$$

donde v^i son las componentes del vector en la base $\{\mathbf{E}_i\}$. En particular, si escogemos los vectores base coordenados $\left\{\partial_i|_p\right\}_{i=1,2,\dots,n}$, entonces las componentes $v^i = \mathbf{v}(x^i)$ son las derivadas de las funciones coordenadas x^i en la dirección del vector \mathbf{v} .

Definamos, ahora, el espacio vectorial dual de $T_p\mathcal{M}$.

Definición 3-11 Sea \mathcal{M} una variedad suave y $T_p\mathcal{M}$ el espacio tangente en un punto p . Una 1-forma ω (vector covariante cuyo nombre se justificará más adelante) en el punto p es una función lineal de valor real sobre $T_p\mathcal{M}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \omega : T_p\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \omega(\mathbf{v}) \equiv \langle \omega, \mathbf{v} \rangle \end{aligned} \quad (3.55)$$

tal que:

- i. $\langle \omega, \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle = \langle \omega, \mathbf{v} \rangle + \langle \omega, \mathbf{u} \rangle$; $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in T_p\mathcal{M}$
- ii. $\langle \omega, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \omega, \mathbf{v} \rangle$; $\forall \mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Esto significa que las 1-formas sobre $T_p\mathcal{M}$ pertenecen al conjunto de $L(T_p\mathcal{M}, \mathbb{R})$, es decir al conjunto de las transformaciones lineales de $T_p\mathcal{M}$ sobre los reales, y por tanto las 1-formas ω pertenecen al espacio vectorial dual $T_p^*\mathcal{M}$ del espacio tangente.

Así, dada una base

$$\{\mathbf{E}_i\}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.56)$$

del espacio $T_p\mathcal{M}$, existe una única base (dual)

$$\{\mathbf{E}^j\}; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.57)$$

del espacio $T_p^*\mathcal{M}$, el cual llamaremos espacio cotangente, definida por:

$$\langle \mathbf{E}^j, \mathbf{E}_i \rangle = \delta_i^j \quad (3.58)$$

Así, si $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ es una 1-forma y $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ es un vector, entonces

$$\omega = \omega_j \mathbf{E}^j \quad (3.59)$$

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{E}_i \quad (3.60)$$

y por lo tanto, aplicando linealidad y la relación 3.58, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \omega, \mathbf{v} \rangle &= \langle \omega_j \mathbf{E}^j, v^i \mathbf{E}_i \rangle \\ &= \omega_j v^i \langle \mathbf{E}^j, \mathbf{E}_i \rangle \\ &= \omega_j v^i \delta_i^j \\ &= \omega_i v^i \end{aligned} \quad (3.61)$$

Definición 3-12 Cada función $f \in F(\mathcal{M})$ define una 1-forma $\mathbf{d}f \in T_p^*\mathcal{M}$ en p dada por:

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}f, \quad \forall \mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$$

La 1-forma $\mathbf{d}f$ la denominaremos diferencial de f en p .

Si $\phi_\alpha(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ son las coordenadas locales, entonces las diferenciales

$$\{\mathbf{d}x^1, \mathbf{d}x^2, \dots, \mathbf{d}x^n\}$$

en p forman la base de 1-formas dual a la base coordenada

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}$$

de $T_p\mathcal{M}$, pues se cumple que:

$$\langle \mathbf{d}x^i, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad (3.62)$$

En términos de esta base $\{\mathbf{d}x^i\}_{i=1,2,\dots,n}$ de $T_p^*\mathcal{M}$, la diferencial de una función $f \in F(\mathcal{M})$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{d}x^i \quad (3.63)$$

Nota: si $\mathbf{d}f \neq 0$, entonces las superficies $f = cte$ son variedades de dimensión $n-1$. El subespacio de $T_p\mathcal{M}$, consistente en todos los vectores \mathbf{X} tales que

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{X} \rangle = 0 \quad (3.64)$$

está formado por todos los vectores tangentes a las curvas que están en la superficie $f = cte$ en el punto p . Así $\mathbf{d}f$ se puede pensar como perpendicular o normal a la superficie $f = cte$ en p .

3.2. Tensores

Definición 3-13 Definimos el producto cartesiano Π_r^s de la siguiente forma:

$$\Pi_r^s := \underbrace{T_p^* \times T_p^* \times T_p^* \times \cdots \times T_p^*}_{r\text{-veces}} \times \underbrace{T_p \times T_p \times T_p \times \cdots \times T_p}_{s\text{-veces}} \quad (3.65)$$

Donde intervienen r factores T_p^* y s factores T_p , es decir:

$$\Pi_r^s = \{(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \mid \eta^i \in T_p^*, \mathbf{Y}_j \in T_p\} \quad (3.66)$$

Definición 3-14 Sea \mathcal{M} una variedad suave. Un tensor T del tipo (r, s) en un punto $p \in \mathcal{M}$ es una función multilinear sobre Π_r^s , es decir:

$$\mathbf{T} : \Pi_r^s \longrightarrow R$$

$$(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \longrightarrow \mathbf{T}(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s)$$

lineal en cada componente.

El espacio de todos los tensores se llama producto tensorial T_s^r :

$$T_s^r := T_p \otimes T_p \otimes \cdots \otimes T_p \otimes T_p^* \otimes T_p^* \otimes \cdots \otimes T_p^* \quad (3.67)$$

$$T_s^r = \{ : \Pi_r^s \rightarrow R \mid \mathbf{T} \text{ es lineal en todas sus componentes} \} \quad (3.68)$$

Donde intervienen r factores T_p^* y s factores T_p . Tenemos que en particular $T_0^1 = T_p$ y $T_1^0 = T_p^*$.

Definición 3-15 Sean T y $T' \in T_s^r(p)$ dos tensores del mismo tipo y definimos la suma por:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} + \mathbf{T}')(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) &= \mathbf{T}(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \\ &\quad + \mathbf{T}'(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \end{aligned} \quad (3.69)$$

y el producto por un escalar $\alpha \in R$ como:

$$(\alpha \mathbf{T})(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) := \alpha \mathbf{T}(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \quad (3.70)$$

Con estas reglas $T_s^r(p)$ forma un espacio vectorial real de dimensión $r + s$.

Sean

$$\mathbf{X}_i \in T_p; \quad i = 1, \dots, r \quad (3.71)$$

y

$$\omega^j \in T_p^* \quad j = 1, \dots, s \quad (3.72)$$

Denotemos por

$$\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{X}_r \otimes \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \cdots \otimes \omega^s \quad (3.73)$$

al elemento de $T_s^r(p)$, el cual transforma al elemento

$$(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \in \Pi_r^s \quad (3.74)$$

en el número

$$\begin{aligned} & (\mathbf{X}_1 \otimes \mathbf{X}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{X}_r \otimes \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \cdots \otimes \omega^s)(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \\ & : = \langle \eta^1, \mathbf{X}_1 \rangle \cdots \langle \eta^r, \mathbf{X}_r \rangle \langle \omega^1, \mathbf{Y}_1 \rangle \cdots \langle \omega^s, \mathbf{Y}_s \rangle \end{aligned} \quad (3.75)$$

De forma similar, si $\mathbf{R} \in T_s^r(p)$ y $\mathbf{S} \in T_q^p(p)$, entonces denotaremos por $\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}$ al elemento de $T_{s+q}^{r+p}(p)$, el cual transforma al elemento $(\eta^1, \dots, \eta^{s+q}, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{r+p})$ en el número real

$$\begin{aligned} & (\mathbf{R} \otimes \mathbf{S})(\eta^1, \dots, \eta^{r+p}, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{s+q}) \\ & : = \mathbf{R}(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_s) \mathbf{S}(\eta^{r+1}, \dots, \eta^{r+p}, \mathbf{Y}_{s+1}, \dots, \mathbf{Y}_{s+q}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Con este producto \otimes el espacio de los tensores en p forma un álgebra sobre R .

Lema 3-5 Sean $\{E_\alpha\}$ y $\{E^\beta\}$ bases duales de T_p y T_p^* respectivamente. Entonces

$$\{\mathbf{E}_{\alpha_1} \otimes \mathbf{E}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_{\alpha_r} \otimes \mathbf{E}^{\beta_1} \otimes \mathbf{E}^{\beta_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}^{\beta_s}\} \quad (3.77)$$

con $\alpha_i, \beta_i = 1, 2, \dots, n$ es una base de $T_s^r(p)$.

De esta forma, dado $T \in T_s^r(p)$ escribimos:

$$\mathbf{T} = T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \mathbf{E}_{\alpha_1} \otimes \mathbf{E}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}_{\alpha_r} \otimes \mathbf{E}^{\beta_1} \otimes \mathbf{E}^{\beta_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}^{\beta_s} \quad (3.78)$$

Donde $T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ son las componentes de T en esta base.

Usualmente \mathbf{T} se llama un tensor r veces contravariante y s veces covariante, y las componentes están dadas por:

$$T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \mathbf{T}(\mathbf{E}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{E}^{\alpha_r}, \mathbf{E}_{\beta_1}, \dots, \mathbf{E}_{\beta_s}) \quad (3.79)$$

El álgebra del espacio vectorial $T_s^r(p)$ se puede escribir en términos de las componentes de los tensores, en una base dada, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} + \mathbf{S})_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + S_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \\ (\alpha \mathbf{T})_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \alpha T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \end{aligned} \quad (3.80)$$

y el álgebra del producto \otimes como:

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S})_{\beta_1 \dots \beta_{s+q}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r+p}} = T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} S_{\beta_{s+1} \dots \beta_{s+q}}^{\alpha_{r+1} \dots \alpha_{r+p}} \quad (3.81)$$

Si $\{\mathbf{E}'_\alpha\}$ y $\{\mathbf{E}'^\alpha\}$ son otro par de bases duales de T_p y T_p^* , entonces, los vectores de las nuevas bases, se pueden expresar en términos de las bases $\{\mathbf{E}_\alpha\}$ y $\{\mathbf{E}^\alpha\}$ en la forma:

$$\mathbf{E}'_\beta = \phi_\beta^\alpha \mathbf{E}_\alpha \quad (3.82)$$

$$\mathbf{E}'^\beta = \phi^\beta_\alpha \mathbf{E}^\alpha \quad (3.83)$$

Donde $\phi_{\alpha'}^\alpha$ y $\phi^\alpha_{\alpha'}$ son matrices $n \times n$ no singulares. Las matrices de transformación cambio de base. Puesto que las bases $\{\mathbf{E}'_\alpha\}$ y $\{\mathbf{E}'^\alpha\}$ son duales, entonces:

$$\begin{aligned} \delta^{\beta'}_{\alpha'} &= \langle \mathbf{E}^{\beta'}, \mathbf{E}_{\alpha'} \rangle = \langle \phi^{\beta'}_\beta \mathbf{E}^\beta, \phi_{\alpha'}^\alpha \mathbf{E}_\alpha \rangle \\ &= \phi^{\beta'}_\beta \phi_{\alpha'}^\alpha \langle \mathbf{E}^\beta, \mathbf{E}_\alpha \rangle = \phi^{\beta'}_\beta \phi_{\alpha'}^\alpha \delta^\beta_\alpha \\ &= \phi^{\beta'}_\alpha \phi_{\alpha'}^\alpha \end{aligned} \quad (3.84)$$

Es decir $\phi_{\alpha'}^{\alpha}$ y $\phi_{\alpha}^{\alpha'}$ son matrices mutuamente inversas.

Las componentes de un tensor $\mathbf{T} \in T_s^r(p)$, con respecto a las bases $\{\mathbf{E}'_{\beta}\}$ y $\{\mathbf{E}'^{\alpha}\}$, están dadas por (ver ecuación (3.79)):

$$T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}_{\beta'_1 \dots \beta'_s} = \mathbf{T}(\mathbf{E}^{\alpha'_1}, \dots, \mathbf{E}^{\alpha'_r}, \mathbf{E}_{\beta'_1}, \dots, \mathbf{E}_{\beta'_s}) \quad (3.85)$$

y están relacionadas con las componentes del tensor T , en las bases duales $\{\mathbf{E}_{\beta}\}$ y $\{\mathbf{E}^{\alpha}\}$, por:

$$T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}_{\beta'_1 \dots \beta'_s} = \phi^{\alpha'_1}_{\alpha_1} \dots \phi^{\alpha'_r}_{\alpha_r} \phi^{\beta_1}_{\beta'_1} \dots \phi^{\beta_s}_{\beta'_s} T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \quad (3.86)$$

Definición 3-16 Sea un tensor T del tipo (r, s) , con componentes $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$ respecto a las bases duales $\{\mathbf{E}_{\alpha}\}$ y $\{\mathbf{E}^{\alpha}\}$. La contracción sobre el primer índice contravariante y el primer índice covariante es definida como el tensor $C_1^1(T)$, del tipo $(r-1, s-1)$, cuyas componentes, respecto a las bases dadas, son $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\alpha_1 \beta_2 \dots \beta_s}$, es decir:

$$\mathbf{C}_1^1(\mathbf{T}) := T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\alpha_1 \beta_2 \dots \beta_s} \mathbf{E}_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{\alpha_r} \otimes \mathbf{E}^{\beta_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{\beta_s} \quad (3.87)$$

Veamos que esta operación de contracción es independiente de las bases usadas. Sean $\{\mathbf{E}'_{\alpha}\}$ y $\{\mathbf{E}'^{\alpha}\}$ otras bases duales, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1^1(\mathbf{T}) &: = T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}_{\alpha'_1 \dots \beta'_s} \mathbf{E}_{\alpha'_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{\alpha'_r} \otimes \mathbf{E}^{\beta'_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{\beta'_s} \\ &= \phi^{\alpha'_2}_{\alpha_2} \dots \phi^{\alpha'_r}_{\alpha_r} \phi^{\beta_2}_{\beta'_2} \dots \phi^{\beta_s}_{\beta'_s} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\alpha'_1 \beta_2 \dots \beta_s} \times \\ &\quad \times \phi^{\gamma_2}_{\alpha_2} \dots \phi^{\gamma_r}_{\alpha_r} \phi^{\beta'_2}_{\eta_2} \dots \phi^{\beta'_s}_{\eta_s} \mathbf{E}_{\gamma_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{\gamma_r} \otimes \mathbf{E}^{\eta_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{\eta_s} \\ &= \phi^{\alpha'_2}_{\alpha_2} \phi^{\gamma_2}_{\alpha_2} \dots \phi^{\alpha'_r}_{\alpha_r} \phi^{\gamma_r}_{\alpha_r} \phi^{\beta_2}_{\beta'_2} \phi^{\beta'_2}_{\eta_2} \phi^{\beta_s}_{\beta'_s} \phi^{\beta'_s}_{\eta_s} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\alpha'_1 \beta_2 \dots \beta_s} \times \\ &\quad \times \mathbf{E}_{\gamma_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{\gamma_r} \otimes \mathbf{E}^{\eta_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{\eta_s} \\ &= \delta^{\gamma_2}_{\alpha_2} \dots \delta^{\gamma_r}_{\alpha_r} \delta^{\beta_2}_{\eta_2} \phi^{\beta_s}_{\eta_s} T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\alpha'_1 \beta_2 \dots \beta_s} \times \\ &\quad \times \mathbf{E}_{\gamma_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{\gamma_r} \otimes \mathbf{E}^{\eta_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{\eta_s} \\ &= T^{\alpha'_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}_{\alpha'_1 \beta_2 \dots \beta_s} \mathbf{E}_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{\alpha_r} \otimes \mathbf{E}^{\beta_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{\beta_s} = C_1^1(T) \end{aligned}$$

De modo similar, se define la contracción sobre cualquier par de índices n y m , es decir $\mathbf{C}_m^n(T)$.

Definición 3-17 Sea \mathbf{T} un del tipo $(2, 0)$. La parte simétrica del tensor \mathbf{T} es el tensor $S(T) \in T_0^2(p)$ definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{T})(\eta_1, \eta_2) &: = \\ \frac{1}{2!} \{ \mathbf{T}(\eta_1, \eta_2) + \mathbf{T}(\eta_2, \eta_1) \}; \forall \eta_1, \eta_2 &\in T_p^* \end{aligned} \quad (3.88)$$

Si $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor en unas bases dadas, y denotamos por $\mathcal{S}(\mathbf{T})^{\alpha\beta} \equiv T^{(\alpha\beta)}$ las componentes de la parte simétrica del tensor, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathbf{T})^{\alpha\beta} &\equiv T^{(\alpha\beta)} = \mathbf{S}(\mathbf{T})(\mathbf{E}^\alpha, \mathbf{E}^\beta) \\
&= \frac{1}{2!} \{ \mathbf{T}(\mathbf{E}^\alpha, \mathbf{E}^\beta) + \mathbf{T}(\mathbf{E}^\beta, \mathbf{E}^\alpha) \} \\
&= \frac{1}{2!} \{ T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha} \}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

En general, se pueden definir las componentes simétricas de un tensor $\mathbf{T} \in T_s^r(p)$ sobre cualquier número de índices covariantes o contravariantes, de la siguiente manera:

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{(\beta_1 \dots \beta_s)} := \frac{1}{s!} \sum_{(\beta_1 \dots \beta_s)} T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \tag{3.90}$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones de los índices $\beta_1 \dots \beta_s$, por ejemplo:

$$T^\alpha_{(\beta\gamma\eta)} = \frac{1}{3!} \{ T^\alpha_{\beta\gamma\eta} + T^\alpha_{\beta\eta\gamma} + T^\alpha_{\gamma\beta\eta} + T^\alpha_{\gamma\eta\beta} + T^\alpha_{\eta\beta\gamma} + T^\alpha_{\eta\gamma\beta} \} \tag{3.91}$$

Un tensor se llama simétrico con respecto a ciertos índices, si el tensor coincide con su correspondiente parte simétrica, por ejemplo:

$$T_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} \iff T_{\beta\alpha} = T_{\alpha\beta} \tag{3.92}$$

De manera similar se define la operación de antisimetrización de un tensor:

Definición 3-18 Sea $T \in T_0^2(p)$ un tensor, entonces definimos la parte antisimétrica $A(T)$ del tensor por:

$$\mathcal{A}(\mathbf{T})^{\alpha\beta} \equiv T^{[\alpha\beta]} := \frac{1}{2!} \{ T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} \} \tag{3.93}$$

y en general, esta definición se puede extender a cualquier conjunto de índices de cualquier tensor $T \in T_s^r(p)$ como, poerejemplo:

$$T^{[\alpha_1 \dots \alpha_r]}_{\beta_1 \dots \beta_s} := \frac{1}{r!} \sum_{(\alpha_1 \dots \alpha_r)} (-1)^p T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} \tag{3.94}$$

donde p es el orden de la permutación.

Las operaciones de simetrización o antisimetrización de tensores se puede hacer solo sobre el mismo tipo componentes, covariantes o contravariantes. Por ejemplo:

$$T^{[\beta\gamma\eta]} = \frac{1}{3!} \{ T^{\beta\gamma\eta} - T^{\beta\eta\gamma} + T^{\gamma\beta\eta} - T^{\gamma\eta\beta} + T^{\eta\beta\gamma} - T^{\eta\gamma\beta} \} \tag{3.95}$$

Un tensor se llama antisimétrico en ciertos índices, si éste es igual a su parte antisimétrica. Si $T^{\alpha\beta} = T^{[\alpha\beta]}$ es antisimétrico, entonces $T^{(\alpha\beta)} = 0$.

Además, dado $\mathbf{T} \in T_0^2(p)$, se cumple siempre que:

$$T^{\alpha\beta} = T^{(\alpha\beta)} + T^{[\alpha\beta]} \quad (3.96)$$

Un subconjunto particularmente importante de tensores son los del tipo $(0, q)$, los cuales son antisimétricos en todas sus q posiciones: $A_q(p) \subset T_q^0(p)$. Claramente $q \leq n$, con n la dimensión de la variedad, pues si $q > n$ entonces por lo menos dos índices serían iguales y la expresión se anula. El conjunto $A_q(p)$ se llama espacio de las q -formas sobre \mathcal{M} en p . Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son dos r - y q - formas respectivamente, podemos definir la $(r+q)$ -forma $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, donde \wedge es el producto tensorial antisimetrizado,

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} := \mathcal{A}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \quad (3.97)$$

es decir, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ es el tensor de tipo $(0, r+q)$ cuyas componentes están dadas por:

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_q} := A_{[\alpha_1 \dots \alpha_r} B_{\beta_1 \dots \beta_q]} \quad (3.98)$$

Por ejemplo, dados $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in A_1(p)$, entonces:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_{\alpha\beta} &= \mathbf{A}_{[\alpha} \mathbf{B}_{\beta]} \\ &= \frac{1}{2!} \{ \mathbf{A}_\alpha \mathbf{B}_\beta - \mathbf{A}_\beta \mathbf{B}_\alpha \} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A})_{\alpha\beta} &= \mathbf{B}_{[\alpha} \mathbf{A}_{\beta]} \\ &= \frac{1}{2!} \{ \mathbf{B}_\alpha \mathbf{A}_\beta - \mathbf{B}_\beta \mathbf{A}_\alpha \} \\ &= (-1)^{1 \cdot 1} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.100)$$

En general:

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (-1)^{r \cdot q} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) \quad (3.101)$$

donde \mathbf{A} es una r -forma y \mathbf{B} es una q -forma.

Si consideramos los escalares como 0-formas, el producto \wedge , llamado producto exterior, define un álgebra sobre el espacio de las formas,

$$\Lambda(p) = \bigcup_{q=0}^n A_q(p) \quad (3.102)$$

llamada álgebra de Grassmann de las formas. Además, si $\{\mathbf{E}^\alpha\}$ es una base de las 1-formas, entonces

$$\mathbf{E}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{E}^{\alpha_p} \quad (3.103)$$

es una base de las p -formas, es decir, si A es una p -forma, entonces podemos expresar A como

$$\mathbf{A} = A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \mathbf{E}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{E}^{\alpha_p} \quad (3.104)$$

donde $A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = A_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]}$

Definición 3-19 Un C^k -campo tensorial T del tipo (r, s) sobre un subconjunto $U \subset M$, es una función que asigna un elemento de $T_s^r(p)$ para cada $p \in U$, tal que las componentes de T , con respecto a alguna base coordenada definida sobre algún subconjunto abierto de U son funciones de clase C^k .

Denotaremos, como caso particular, por $\Xi(\mathcal{M})$ al campo vectorial del tipo $T_0^1(p)$.

3.3. Transformaciones entre variedades

Definición 3-20 Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades m y n dimensionales. Una función

$$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

se llama de clase C^k si dados sistemas de coordenadas (ψ_α, U_α) y (φ_β, V_β) en \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente, las coordenadas de $\phi(p)$ son funciones de clase C^k de las coordenadas de p :

$$\begin{aligned} \varphi_\beta \circ \phi \circ \psi_\alpha^{-1} : \quad \psi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \psi_\alpha(p) &\longmapsto \varphi_\beta(\phi(p)) \end{aligned} \quad (3.105)$$

Notemos que si $m > n$, entonces la función $\varphi_\beta \circ \phi \circ \psi_\alpha^{-1}$ no es uno a uno. Así, en general, esta función no tiene inversa, y en caso de que ésta existiera, no será de clase C^r . Por ejemplo, sean $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathbb{R}$ y sea $\phi(x) = x^3$, entonces $\phi(x) \in C^\infty$, y sin embargo $\phi^{-1}(x)$ no es diferenciable en $x = 0$.

Definición 3-21 Sea $f \in \mathcal{F}(\mathcal{N}, \mathbb{R})$ y $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$. Entonces la función ϕ induce una función $\tilde{\phi}$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : \mathcal{F}(\mathcal{N}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \tilde{\phi}f \end{aligned} \quad (3.106)$$

definida por: $\tilde{\phi}f(p) := f(\phi(p))$.

De esta manera, ϕ transforma puntos de \mathcal{M} en \mathcal{N} y $\tilde{\phi}$ convierte funciones de $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ en funciones de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ linealmente, pues:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\alpha f + g)(p) &= (\alpha f + g)(\phi(p)) \\ &= \alpha f(\phi(p)) + g(\phi(p)) \\ &= \alpha \tilde{\phi}f(p) + \tilde{\phi}g(p) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Si $\lambda(t)$ es una curva sobre \mathcal{M} que pasa por $p \in \mathcal{M}$, entonces la imagen $\phi(\lambda(t))$ sobre \mathcal{N} es una curva que pasa por $\phi(p)$.

Definición 3-22 Dada $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$, definamos la transformación

$$\begin{aligned} \phi_* : T_p \mathcal{M} &\longrightarrow T_{\phi(p)} \mathcal{N} \\ \mathbf{X} &\longrightarrow \phi_* \mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.108)$$

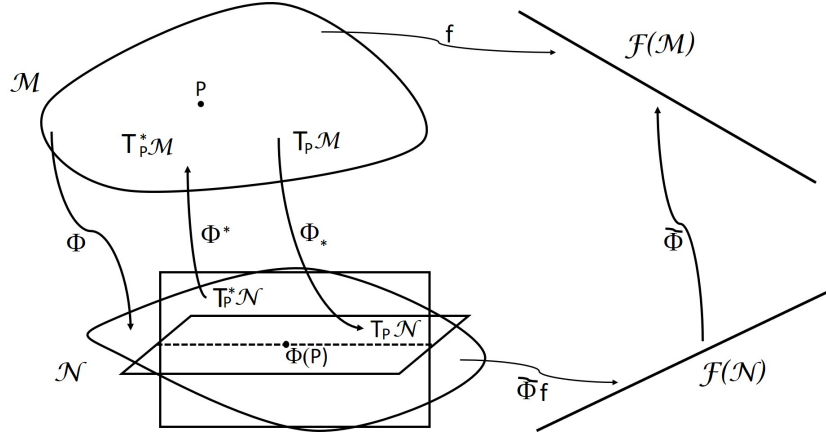


Figura 3-5: Transformación entre variedades

de la siguiente manera: para cada $f \in F(N)$ definida en el punto en $\phi(p)$ y cada $X \in T_p M$ definimos $\phi_* X \in T_{\phi(p)} N$ así:

$$\phi_* \mathbf{X}(f) |_{\phi(p)} := \mathbf{X}(\tilde{\phi}f) |_p = \mathbf{X}(f \circ \phi) |_p \quad (3.109)$$

Esta función ϕ_* es lineal, pues:

$$\begin{aligned} \phi_*(\alpha \mathbf{X} + \mathbf{Y})(f) |_{\phi(p)} &= (\alpha \mathbf{X} + \mathbf{Y})(\tilde{\phi}f) |_p \\ &= \alpha \mathbf{X}(\tilde{\phi}f) |_p + \mathbf{Y}(\tilde{\phi}f) |_p \\ &= \alpha \phi_* \mathbf{X}(f) |_{\phi(p)} + \phi_* \mathbf{Y}(f) |_{\phi(p)} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Así, si $(\frac{\partial}{\partial t})_\lambda |_p$ es el vector tangente a la curva λ en $p \in M$, entonces $\phi_* (\frac{\partial}{\partial t})_\lambda |_p$ es el vector tangente a la curva $\phi \circ \lambda$ en $\phi(p) \in N$. ϕ_* recibe el nombre de diferencial de ϕ en p y en algunos textos se nota como $d\phi$.

Definición 3-23 Dada $\phi : M \rightarrow N$ y usando la definición de ϕ_* , definimos la función ϕ^* :

$$\phi^* : T_{\phi(p)}^* N \longrightarrow T_p^* M \quad (3.111)$$

De tal manera que la contracción de un vector y una 1-forma sea preservada bajo transformaciones. Es decir, dado $Y \in T_{\phi(p)}^* N$, entonces definimos $\phi^* Y \in T_p^* M$ de manera que:

$$\langle \phi^* \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle |_p = \langle \mathbf{Y}, \phi_* \mathbf{X} \rangle |_{\phi(p)} \quad (3.112)$$

Ahora, si consideramos las funciones $\mathcal{F}(M)$ como cero formas, identificaremos $\tilde{\phi} \equiv \phi^*$.

Teorema 3-6 Una consecuencia de la definición de ϕ^* es que:

$$\phi^*(df) = d(\phi^* f) \quad (3.113)$$

Demostración:

Sean $\mathbf{X} \in T_p M$ y $f \in \mathcal{F}(N)$, entonces:

$$\begin{aligned}
& < \phi^*(df), \mathbf{X} >|_p = < df, \phi_*\mathbf{X} >|_{\phi(p)} \\
& = \phi_*\mathbf{X}f|_{\phi(p)} = \mathbf{X}(\tilde{\phi}f)|_p \\
& \equiv \mathbf{X}(\phi^*f)|_p = < d(\phi^*f), \mathbf{X} >|_p
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Como esto vale para todo $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ se sigue que:

$$\phi^*(df) = d(\phi^*f) \tag{3.115}$$

La transformación ϕ_* puede ser extendida naturalmente a tensores contravariantes de \mathcal{M} a \mathcal{N} por las reglas:

$$\begin{aligned}
\phi_* : T_0^r(p) &\longrightarrow T_0^r(\phi(p)) \\
\mathbf{T} &\longrightarrow \phi_*\mathbf{T}
\end{aligned} \tag{3.116}$$

definida por:

$$\phi_*\mathbf{T}(\eta^1 \dots \eta^r) := \mathbf{T}(\phi^*\eta^1 \dots \phi^*\eta^r)|_p; \forall \eta^i \in T_{\phi(p)}^*\mathcal{N} \tag{3.117}$$

De la misma manera ϕ^* se generaliza a tensores covariantes de \mathcal{N} a \mathcal{M} así:

$$\begin{aligned}
\phi^* : T_s^0(\phi(p)) &\longrightarrow T_s^0(p) \\
\mathbf{T} &\longrightarrow \phi^*\mathbf{T}
\end{aligned} \tag{3.118}$$

definida por:

$$\phi^*\mathbf{T}(\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_s)|_p = \mathbf{T}(\phi_*\mathbf{X}_1 \dots \phi_*\mathbf{X}_s)|_{\phi(p)} \tag{3.119}$$

Definición 3-24 La transformación $\phi : M \longrightarrow N$ se dice de rango s en p si la dimensión de $\phi_*(T_p M)$ es s . Así, si en p , $s = m$, entonces ϕ se llama inyectiva y en este caso se debe cumplir que $m \leq n$. Si en p , $s = n$, ϕ se llama sobreyectiva y se tiene que $m \geq n$.

Definición 3-25 Una C^r -transformación $\phi : M \longrightarrow N$ se llama inmersión si $\forall p \in M$, existe una vecindad U alrededor de p , tal que:

$$\phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \tag{3.120}$$

es de clase C^r .

Por lo tanto, si ϕ es una inmersión de \mathcal{M} en \mathcal{N} , entonces $m \leq n$. Además, por el teorema de la función implícita ϕ es una inmersión si y sólo si ϕ es inyectiva en todo punto $p \in M$; por lo tanto,

$$\phi_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow \phi_*(T_p\mathcal{M}) \subset T_{\phi(p)}\mathcal{N} \tag{3.121}$$

es un isomorfismo. La imagen $\phi(\mathcal{M})$ es una subvariedad inmersa en \mathcal{N} .

Por ejemplo, toda curva $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ es una inmersión si

$$\frac{dx^i(\lambda(t))}{dt} \neq 0 \quad (3.122)$$

Así una subvariedad inmersa en \mathcal{N} puede interceptarse a sí misma. Esto significa que $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ no necesariamente es una función 1-1 de \mathcal{M} sobre \mathcal{N} , aunque ϕ si es uno a uno cuando se restringe a una vecindad suficientemente pequeña de \mathcal{M} .

Definición 3-26 Una inmersión $\phi : M \rightarrow N$ se llama inclusión si $\phi : M \rightarrow \phi(M) \subset N$ es un homeomorfismo. De esta manera una inclusión es una inmersión que además es uno a uno. Pero no toda inmersión uno a uno es una inclusión.

Definición 3-27 Una transformación $\phi : M \rightarrow N$ se llama un C^r -difeomorfismo si ϕ es una C^r -transformación, uno a uno, y $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ es una C^r -transformación.

En este caso $m = n$ y ϕ es inyectiva y sobreyectiva.

Por el teorema de la función implícita se ve que si ϕ_* es biyectiva en p , entonces ϕ es un difeomorfismo en una vecindad \mathcal{U} de p .

Si $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un difeomorfismo, entonces

$$\phi_* : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)} \mathcal{N} \quad (3.123)$$

y

$$(\phi^{-1})^* : T_p^* \mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)}^* \mathcal{N} \quad (3.124)$$

son isomorfismos, y así podemos definir una transformación :

$$\phi_* : T_s^r(p) \rightarrow T_s^r(\phi(p)) \quad (3.125)$$

por:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\eta^1 \dots \eta^s, \mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_r) & \quad | \quad p =: \phi_* \mathbf{T}((\phi^{-1})^* \eta^1 \dots (\phi^{-1})^* \eta^s, \phi_* \mathbf{X}_1 \dots \phi_* \mathbf{X}_r) \\ \forall \eta^i & \in T_p^* \mathcal{M} \text{ y } \mathbf{X}_i \in T_p \mathcal{M} \end{aligned} \quad (3.126)$$

Esta transformación envía tensores del tipo (r, s) sobre \mathcal{M} a tensores del tipo (r, s) sobre \mathcal{N} y preserva las relaciones de simetría y el álgebra tensorial. Por ejemplo $c(\phi_* \mathbf{T}) = \phi_*(c\mathbf{T})$.

Capítulo 4

Cálculo en variedades

En este capítulo veremos tres operaciones de derivadas, las cuales juegan un papel fundamental para el cálculo diferencial sobre variedades.

4.1. Derivada exterior

Definición 4-1 *El operador derivada exterior d es un operador lineal*

$$\mathbf{d} : \Lambda_r \longrightarrow \Lambda_{r+1} \quad (4.1)$$

definido por la forma en que actúa sobre una 0-forma $f \in F(M)$

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{X} \rangle := \mathbf{X}f; \forall \mathbf{X} \in T_p\mathcal{M} \quad (4.2)$$

y actuando sobre un campo de r -formas $A = A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r}$ da el campo de $(r+1)$ -formas

$$\mathbf{d}A := \mathbf{d}A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r} \quad (4.3)$$

Veamos que esta definición de dA es independiente de la base escogida. Consideremos otra base coordenada $\{x'^{\alpha}\}$:

$$\mathbf{A} = A'_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \mathbf{d}x'^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_r} \quad (4.4)$$

donde las componentes $A'_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ están relacionadas, con sus componentes en la base coordenada $\{x^j\}$, por:

$$A'_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\alpha_r}} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (4.5)$$

Así, \mathbf{dA} , en la base coordenada primada, está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{dA} &= \mathbf{d}A'_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_r} \\
&= \mathbf{d}\left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\alpha_r}} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}\right) \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_r} \\
&= \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\alpha_r}} \mathbf{d}A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_r} \\
&\quad + \frac{\partial^2 x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\beta_1} \partial x'^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial x'^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\alpha_r}} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \mathbf{d}x'^{\beta_1} \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_r} \dots \\
&\quad + \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^2 x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\beta_1} \partial x'^{\alpha_r}} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \mathbf{d}x'^{\beta_1} \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_r} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Analicemos ahora un término que contenga segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\beta_1} \partial x'^{\alpha_1}} \mathbf{d}x'^{\beta_1} \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1} \quad (4.7)$$

Para funciones continuas con su primera derivada continua, se cumple que

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\beta_1} \partial x'^{\alpha_1}} = \frac{\partial^2 x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\alpha_1} \partial x'^{\beta_1}} \quad (4.8)$$

y por tanto este término es simétrico en β_1 y α_1 , mientras que $\mathbf{d}x'^{\beta_1} \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1}$ es antisimétrico, por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\beta_1} \partial x'^{\alpha_r}} \mathbf{d}x'^{\beta_1} \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1} = 0 \quad (4.9)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{dA} &= \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\alpha_r}} \mathbf{d}A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x'^{\alpha_r} \\
&= \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\alpha_r}} \mathbf{d}A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}} \mathbf{d}x^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{\sigma_r}} \mathbf{d}x^{\sigma_r} \\
&= \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x'^{\alpha_r}} \frac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{\sigma_r}} \mathbf{d}A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge \mathbf{d}x^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{\sigma_r} \\
&= \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots \delta_{\sigma_r}^{\alpha_r} \mathbf{d}A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge \mathbf{d}x^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{\sigma_r} \\
&= \mathbf{d}A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_r} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Notemos que esta definición no sería independiente de las coordenadas, si en vez de usar el producto exterior \wedge se hiciera para el producto tensorial.

De la definición se sigue que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{dA} \wedge \mathbf{B} + (-1)^r \mathbf{A} \wedge \mathbf{dB}; \forall \mathbf{A} \in \Lambda_r; \forall \mathbf{B} \in \Lambda_s \quad (4.11)$$

Dada una 0-forma f , tenemos que en una base coordenada:

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{d}x^i \quad (4.12)$$

entonces:

$$\mathbf{d}(\mathbf{d}f) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}}_{\text{simétrico}} \underbrace{\mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^i}_{\text{antisimétrico}} \quad (4.13)$$

Teorema 4-1 Para toda p -forma:

$$\mathbf{d}(\mathbf{d}A) = 0 \quad (4.14)$$

La demostración es directa.

4.2. Derivada de Lie

Lema 4-2 Dado un campo vectorial X sobre \mathcal{M} , existe una única curva maximal $\lambda(t)$ sobre \mathcal{M} que pasa a través de cada $p \in \mathcal{M}$ tal que $\lambda(0) = p$ y cuyo vector tangente en el punto $\lambda(t)$ es el vector $\mathbf{X}|_{\lambda(t)}$.

Demostración:

Sea $\{x^i\}$ una base coordenada local del punto $p \in \mathcal{M}$, entonces la curva $\lambda(t)$ tiene coordenadas $x^i(t)$, y el vector tangente \mathbf{X} tiene componentes X^i en esta base, por lo tanto la curva λ que buscamos, es solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1(t) \cdots x^n(t)) \quad (4.15)$$

cuya solución está garantizada por el teorema general de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 4-2 El flujo de un campo vectorial X sobre \mathcal{M} es una transformación:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (p, t) &\longrightarrow \phi(p, t) := \lambda_p(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $\lambda_p(t)$ es la curva integral maximal del campo X que en $t = 0$ pasa por $p \in \mathcal{M}$.

Si en $\phi(p, t)$, p es mantenido fijo, entonces $\phi(p, t)$ es justamente la curva integral $\lambda_p(t)$. Por otro lado, si mantenemos $t = cte$, $\phi(p, t)$ define un difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi_t : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ p &\longrightarrow \phi_t(p) \end{aligned} \quad (4.17)$$

el cual envía un punto p de la variedad al punto $\phi_t(p)$, que está localizado a una distancia paramétrica t sobre la curva integral $\lambda_p(t)$.

Lema 4-3 ϕ_t es un grupo local uniparamétrico de difeomorfismos, es decir ϕ_t satisface:

i. ϕ_0 es la identidad:

$$\phi_0 = id : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \quad (4.18)$$

ii. La ley de composición:

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad (4.19)$$

iii. Existe un inverso:

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t} \quad (4.20)$$

De la definición de un C^r -difeomorfismo se sigue que si ϕ_t es un difeomorfismo, entonces:

$$\begin{aligned} (\phi_t)_* : T_s^r(p) &\longrightarrow T_s^r(\phi_t(p)) \\ \mathbf{T} &\longrightarrow (\phi_t)_* \mathbf{T} |_p \end{aligned} \quad (4.21)$$

Esta última relación permite definir la derivada de Lie de un tensor a lo largo de un campo vectorial:

Definición 4-3 La derivada de Lie, $L_{\mathbf{X}}T$, de un campo tensorial T con respecto al campo vectorial X es definida por:

$$L_{\mathbf{X}}T|_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ T|_p - (\phi_t)_* T|_p \right\} \quad (4.22)$$

Lema 4-4 Dados $T_1, T_2 \in T_s^r(\mathcal{M})$, X, Y campos vectoriales sobre M y $f \in F(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, la derivada de Lie cumple las siguientes propiedades:

1. $L_{\mathbf{X}}$ es \mathbb{R} -lineal:

$$L_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}_1 + \lambda \mathbf{T}_2) = L_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_1 + \lambda L_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_2$$

2. $L_{\mathbf{X}}$ es una derivación, es decir, satisface la regla de Leibniz:

$$L_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2) = L_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}_1) \otimes \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \otimes (L_{\mathbf{X}}\mathbf{T}_2)$$

3. $L_{\mathbf{X}}(T_s^r(\mathcal{M})) \subseteq T_s^r(\mathcal{M})$

4. $L_{\mathbf{X}}$ conmuta con la operación de contracción.

5. $L_{\mathbf{X}}f = Xf = \langle df, X \rangle$

6. Definiendo el conmutador de dos campos vectoriales por

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) := \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f) \quad (4.23)$$

entonces el conmutador $[X, Y]$ satisface la identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], \mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}] = 0 \quad (4.24)$$

Esta operación de conmutación forma la llamada álgebra de Lie del espacio $\mathfrak{N}(\mathcal{M})$.

7. Es fácil comprobar esta álgebra si trabajamos en una base coordenada $\{x^i\}$, donde $X = X^i \partial_i$ y $Y = Y^i \partial_i$; entonces:

$$[X, Y]f = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j} \quad (4.25)$$

Así, el vector $[X, Y]$ tiene como componentes en la base coordenada $\{x^i\}$:

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (4.26)$$

entonces:

$$L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad (4.27)$$

8.

$$L_{\mathbf{X}+\lambda\mathbf{Y}}\mathbf{T} = L_{\mathbf{X}}\mathbf{T} + \lambda L_{\mathbf{Y}}\mathbf{T} \quad (4.28)$$

9.

$$L_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} = [L_{\mathbf{X}}, L_{\mathbf{Y}}] = L_{\mathbf{X}} \circ L_{\mathbf{Y}} - L_{\mathbf{Y}} \circ L_{\mathbf{X}} \quad (4.29)$$

10. Las siguientes tres proposiciones son equivalentes:

i. $[X, Y] = 0$

ii. $L_{\mathbf{X}} \circ L_{\mathbf{Y}} = L_{\mathbf{Y}} \circ L_{\mathbf{X}}$

iii. Si ϕ_s y ψ_t son los difeomorfismos generados por los campos X y Y respectivamente, entonces:

$$\phi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_s \quad (4.30)$$

11. Dado $T \in T_s^r(\mathcal{M})$ y una base coordenada $\{x^i\}$, entonces:

$$\begin{aligned} (L_{\mathbf{X}}\mathbf{T})_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \frac{\partial T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}}{\partial x^i} X^i - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{i\alpha_2 \dots \alpha_r} \frac{\partial X^{\alpha_1}}{\partial x^i} - \dots \\ &\quad \dots - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}i} \frac{\partial X^{\alpha_r}}{\partial x^i} + T_{i\beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial X^i}{\partial x^{\beta_1}} \\ &\quad + \dots T_{\beta_1 \dots \beta_{s-1}i}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial X^i}{\partial x^{\beta_s}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para una prueba de estas propiedades, véase por ejemplo el libro de *Foundations of Differential Geometry*, S. Kobayashi y K. Nomizu. Interscience Publishers. John Wiley & Sons, New York.

Veamos la interpretación geométrica de $L_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$.

De la propiedad 10 se sigue que si la derivada de Lie de dos campos vectoriales se anula o, equivalentemente, los campos conmutan, entonces si un vector $v \in T_p\mathcal{M}$ se desplaza una distancia paramétrica t a lo largo de la curva integral de \mathbf{X} y luego una distancia s a lo largo de la curva integral del campo \mathbf{Y} , se llega a un punto q , el cual también se obtiene si primero se desplaza s a lo largo de la curva integral de \mathbf{Y} y luego una distancia t a lo largo de \mathbf{X} .

La derivada de Lie de un campo tensorial $L_{\mathbf{X}}\mathbf{T}$ depende no solamente de la dirección del campo vectorial \mathbf{X} en p , sino también de la dirección de \mathbf{X} en puntos vecinos, y en este sentido es un objeto no local; por lo tanto, la generalización del concepto de derivada sobre \mathbb{R}^n no es adecuada para escribir las ecuaciones de campo para la física.

4.3. Conexión y derivada covariante

La generalización adecuada de derivada parcial sobre una variedad es la derivada covariante, la cual para definirse requiere una estructura adicional definida sobre la variedad llamada conexión.

Definición 4-4 Una conexión ∇ en un punto $p \in \mathcal{M}$ es una función que asigna a cada campo vectorial X en p un operador diferencial $\nabla_{\mathbf{X}}$ definido por

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} : \Xi(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Xi(\mathcal{M}) \\ \mathbf{Y} &\longmapsto \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (4.32)$$

tal que:

c-1. $\nabla_{\mathbf{X}} Y$ es un tensor en el argumento X , i.e.:

$$\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}} \mathbf{Z} = f\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} + g\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} \quad (4.33)$$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \Xi(\mathcal{M})$$

esto quiere decir que el operador $\nabla_{\mathbf{X}}$ (derivada) en p depende solamente de la dirección de X en el punto p .

c-2. $\nabla_{\mathbf{X}} Y$ es lineal en Y , es decir,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\alpha \mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \alpha \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} \quad (4.34)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \Xi(\mathcal{M})$$

c-3.

$$\nabla_{\mathbf{X}} f \mathbf{Y} = \mathbf{X}(f) \mathbf{Y} + f \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \quad (4.35)$$

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{M}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Xi(\mathcal{M})$$

Entonces decimos que $\nabla_{\mathbf{X}} Y$ es la derivada covariante del campo vectorial Y con respecto a la conexión ∇ en la dirección del vector X en el punto p .

De la propiedad c-1, $\nabla \mathbf{Y}$ es un campo tensorial del tipo $(1, 1)$, la derivada covariante de \mathbf{Y} , el cual cuando se contrae con el campo vectorial \mathbf{X} produce el vector $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$; así, la propiedad c-3 se puede escribir como

$$\nabla(f \mathbf{Y}) = df \otimes \mathbf{Y} + f \nabla \mathbf{Y} \quad (4.36)$$

Dadas las bases duales $\{\mathbf{E}_{\alpha}\}$ y $\{\mathbf{E}^{\alpha}\}$ en alguna vecindad $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, denotaremos a las componentes de $\nabla \mathbf{Y}$ en estas bases como $Y_{;\beta}^{\alpha}$, así:

$$\nabla \mathbf{Y} = Y_{;\beta}^{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha} \otimes \mathbf{E}^{\beta} \quad (4.37)$$

Si n es la dimensión de la variedad, la conexión está determinada por las n^3 funciones $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ sobre $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \langle \mathbf{E}^{\alpha}, \nabla_{\mathbf{E}_{\beta}} \mathbf{E}_{\gamma} \rangle \quad (4.38)$$

o equivalentemente

$$\nabla \mathbf{E}_{\gamma} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha} \otimes \mathbf{E}^{\beta} \quad (4.39)$$

Así, para un campo vectorial \mathbf{Y} su derivada covariante está dada por:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{Y} &= \nabla(Y^{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha}) \\ &= dY^{\alpha} \otimes \mathbf{E}_{\alpha} + Y^{\alpha} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta} \mathbf{E}^{\gamma} \otimes \mathbf{E}_{\beta} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Si tomamos una base dual coordenada $\{\partial_\alpha\}$ y $\{dx^\alpha\}$, las componentes de $\nabla \mathbf{Y}$ están dadas por:

$$Y_{;\beta}^\alpha = \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha Y^\gamma \quad (4.41)$$

Bajo un cambio de base $\{\mathbf{E}_\alpha\}, \{\mathbf{E}^\alpha\} \longrightarrow \{\mathbf{E}'_\alpha\}, \{\mathbf{E}'^\alpha\}$, la ley de transformación de las componentes de la conexión se pueden encontrar con la ayuda de las propiedades c-1, c-2 y c-3 en la definición de conexión:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^{\prime\alpha} &= \left\langle \mathbf{E}'^\alpha, \nabla_{\mathbf{E}'_\beta} \mathbf{E}'_\gamma \right\rangle \\ &= \left\langle \Phi_\sigma^\alpha \mathbf{E}^\sigma, \nabla_{\Phi_\beta^\rho \mathbf{E}_\rho} (\Phi_\gamma^\tau \mathbf{E}_\tau) \right\rangle \\ &= \left\langle \Phi_\sigma^\alpha \mathbf{E}^\sigma, \Phi_\beta^\rho \nabla_{\mathbf{E}_\rho} (\Phi_\gamma^\tau \mathbf{E}_\tau) \right\rangle \\ &= \left\langle \Phi_\sigma^\alpha \mathbf{E}^\sigma, \Phi_\beta^\rho (\mathbf{E}_\rho (\Phi_\gamma^\tau) \mathbf{E}_\tau + \Phi_\gamma^\tau \nabla_{\mathbf{E}_\rho} \mathbf{E}_\tau) \right\rangle \\ &= \Phi_\sigma^\alpha \Phi_\beta^\rho \left\{ \langle \mathbf{E}^\sigma, \mathbf{E}_\rho (\Phi_\gamma^\tau) \mathbf{E}_\tau \rangle + \Phi_\gamma^\tau \langle \mathbf{E}^\sigma, \nabla_{\mathbf{E}_\rho} \mathbf{E}_\tau \rangle \right\} \\ &= \Phi_\sigma^\alpha \Phi_\beta^\rho \mathbf{E}_\rho (\Phi_\gamma^\tau) \langle \mathbf{E}^\sigma, \mathbf{E}_\tau \rangle + \Phi_\sigma^\alpha \Phi_\beta^\rho \Phi_\gamma^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\sigma \\ &= \Phi_\sigma^\alpha \Phi_\beta^\rho \mathbf{E}_\rho (\Phi_\gamma^\tau) \delta_\tau^\sigma + \Phi_\sigma^\alpha \Phi_\beta^\rho \Phi_\gamma^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\sigma \\ &= \Phi_\sigma^\alpha \Phi_\beta^\rho \mathbf{E}_\rho (\Phi_\gamma^\sigma) + \Phi_\sigma^\alpha \Phi_\beta^\rho \Phi_\gamma^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\sigma \end{aligned} \quad (4.42)$$

Si se utilizan bases coordenadas, $\{\partial_\alpha\}, \{dx^\alpha\}$ y $\{\partial'_\alpha\}, \{dx'^\alpha\}$, entonces $\Phi_\sigma^\alpha = \partial x'^\alpha / \partial x^\sigma$ y $\Phi_\gamma^\tau = \partial x^\tau / \partial x'^\gamma$, y tenemos que la ley de transformación de las componentes de la conexión toma la forma:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\prime\alpha} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\rho \partial x'^\gamma} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\gamma} \Gamma_{\rho\tau}^\sigma \quad (4.43)$$

Debido al primer término en la anterior ecuación las componentes de la conexión no se transforman como las componentes de un tensor.

La derivada covariante puede ser extendida a tensores arbitrarios por las siguientes reglas:

- i. Si $\mathbf{T} \in T_r^q$, entonces $\nabla \mathbf{T} \in T_{r+1}^q$
- ii. ∇ es lineal y conmuta con las contracciones.
- iii. ∇ es leibniziana, es decir, $\nabla(\mathbf{T}, \mathbf{S})$ campos tensoriales cualesquiera, se cumple que:

$$\nabla(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}) = \nabla \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} + \mathbf{T} \otimes \nabla \mathbf{S} \quad (4.44)$$

- iv. $\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, entonces

$$\nabla f = df \quad (4.45)$$

Para encontrar las componentes de la derivada covariante de un tensor arbitrario, consideremos las bases duales $\{\mathbf{E}_\alpha\}$ y $\{\mathbf{E}^\beta\}$; entonces, teniendo en cuenta las propiedades ii y iii anteriores, se puede probar que

$$\nabla_{\mathbf{E}_\beta} \mathbf{E}^\gamma = -\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \mathbf{E}^\alpha \quad (4.46)$$

y de esta relación se obtienen las componentes en una base coordenada de la derivada covariante de un tensor:

$$\begin{aligned} T_{\beta_1 \dots \beta_s; \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \frac{\partial T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\gamma \sigma}^{\alpha_1} T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\sigma \alpha_2 \dots \alpha_r} + \dots + \\ &\Gamma_{\gamma \sigma}^{\alpha_r} T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \sigma} - \Gamma_{\gamma \beta_1}^{\sigma} T_{\sigma \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \\ &\dots - \Gamma_{\gamma \beta_s}^{\sigma} T_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.4. Transporte paralelo

Sea \mathbf{T} un campo vectorial y λ una curva sobre la variedad \mathcal{M} , entonces definimos

$$\frac{D\mathbf{T}}{dt} = \nabla_{\partial_t} \mathbf{T} \quad (4.48)$$

como la derivada covariante del campo \mathbf{T} a lo largo de la curva λ ; así, si \mathbf{X} es el vector tangente a la curva $\lambda(t)$, entonces

$$\frac{D\mathbf{T}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}}{dt} = \mathbf{T}_{\beta_1 \dots \beta_s; \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} X^\gamma \quad (4.49)$$

Consideremos el caso particular de un campo vectorial \mathbf{Y} y escojamos una base coordenada, donde la curva λ tiene coordenadas $x^\alpha(t)$ y $X^\alpha = dx^\alpha/dt$; entonces,

$$\frac{D\mathbf{Y}}{dt} = \frac{\partial Y^\alpha}{\partial t} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha Y^\gamma \frac{dx^\beta}{dt} \quad (4.50)$$

Definición 4-5 *Un tensor T se dice transportado paralelamente a lo largo de la curva λ si*

$$\frac{D\mathbf{T}}{dt} = 0 \quad (4.51)$$

Dada la curva $\lambda(t)$ con puntos extremos p y q , se sigue, de la teoría de las ecuaciones diferenciales, que si la conexión ∇ es por lo menos de clase C^1 , entonces se obtiene un único tensor en el punto q , transportando paralelamente el tensor dado en el punto p , a lo largo de la curva λ . Así, el transporte paralelo a lo largo de la curva λ , es una transformación lineal del espacio $T_s^r(p)$ a $T_s^r(q)$, la cual preserva el álgebra tensorial y la operación de contracción. En particular, si transportamos paralelamente una base de T_p al punto q , obtenemos un isomorfismo entre T_p y T_q . Si la curva es cerrada, los puntos p y q pueden coincidir. El caso particular de transportar paralelamente el vector tangente a la curva, a lo largo de ella misma, nos conduce a la siguiente definición:

Definición 4-6 *Sea X el vector tangente a la curva λ , entonces la curva es una geodésica si su vector tangente es transportado paralelamente a lo largo de la curva, i.e.*

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\lambda = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{X} = 0 \quad (4.52)$$

La condición que el vector tangente a la curva no cambie, cuando se transporta paralelamente, se puede remplazar por una condición más débil, pues lo

que se exige es que el vector tangente permanezca paralelo a sí mismo, cuando se transporta a lo largo de la curva, es decir,

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{X} = f \mathbf{X} \quad (4.53)$$

con f una función arbitraria sobre la curva. Sin embargo, no es difícil probar que, por una reparametrización de la curva, siempre se puede encontrar una función $f = 0$.

Consideremos una base coordenada $\{\partial/\partial x^\alpha\}$ y $\{dx^\alpha\}$, entonces la ecuación de las geodésicas, teniendo en cuenta las ecuaciones 4.50 y 4.52, toma la forma

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0 \quad (4.54)$$

Dados el punto y la velocidad inicial de la curva geodésica $\lambda(0)$ y $\dot{\lambda}(0)$, existe una única geodésica maximal $\lambda(t)$, como una consecuencia de los teoremas de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias; en otras palabras, dado el punto $p \in \mathcal{M}$ y $\mathbf{X}_p \in T_p \mathcal{M}$, existe una única curva maximal $\lambda(t)$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= 0 \\ (\partial/\partial t)_\lambda \big|_{t=0} &= \mathbf{X}_p \end{aligned} \quad (4.55)$$

y la cual depende continuamente de los valores iniciales. Este resultado nos permite definir una base coordenada especial, llamada coordenadas normales de Riemann, las cuales son de gran utilidad cuando se trabaja localmente, es decir, en una vecindad de un punto de la variedad. Para construir estas coordenadas es necesario definir la transformación exponencial:

Definición 4-7 Definimos la transformación exponencial

$$\begin{aligned} \exp : T_p \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \mathbf{X} &\longmapsto q = \exp(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

por la relación

$$\exp(\mathbf{X}) := \lambda(1) \quad (4.56)$$

donde $\lambda(t)$ es la única geodésica que pasa por el punto p y tiene vector tangente \mathbf{X} .

Como se puede demostrar, la transformación exponencial siempre existe y es uno a uno en alguna vecindad del punto p . Puesto que $T_p \mathcal{M}$ es un espacio vectorial real n -dimensional, éste es isomorfo a \mathbb{R}^n , y lo podemos identificar con él, y así usar la transformación exponencial para definir una carta coordenada en la vecindad del punto $p \in \mathcal{M}$, llamada coordenadas normales de Riemann. Asociándole el origen de \mathbb{R}^n al punto p , estas coordenadas tienen la propiedad, que las geodésicas a través del punto p son transformadas en líneas rectas, que pasan a través del origen de \mathbb{R}^n . De la ecuación de las geodésicas en coordenadas de Riemann (ver ecuación 4.54) se deduce que las componentes de la conexión se anulan, y es por esta razón que las coordenadas normales de Riemann tienen una

especial utilidad para efectos de cálculo; además, como veremos más adelante, también tienen un significado físico.

Definición 4-8 Dada una conexión ∇ sobre la variedad M , definimos la torsión como una transformación

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \Xi(\mathcal{M}) \times \Xi(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Xi(\mathcal{M}) \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\longmapsto \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

definida por

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad (4.57)$$

Dos primeras propiedades que se pueden deducir de la definición de la torsión son:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\mathbf{T}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \quad (4.58)$$

$$\mathbf{T}(f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}) = fg\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}); \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \quad (4.59)$$

Problema: demostrar estas propiedades.

Ayuda:

$$\nabla_{f\mathbf{X}} g\mathbf{Y} = f\nabla_{\mathbf{X}} g\mathbf{Y} = f\mathbf{X}(g)\mathbf{Y} + fg\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} [f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}] &= \mathbf{L}_{f\mathbf{X}} g\mathbf{Y} \\ &= f\mathbf{X}(g)\mathbf{Y} + g\mathbf{L}_{f\mathbf{X}} \mathbf{Y} \\ &= f\mathbf{X}(g)\mathbf{Y} - g\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} f\mathbf{X} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Definición 4-9 Definamos el tensor torsión $T \in T_2^1$ por:

$$\mathbf{T}(\omega, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \langle \omega, \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle \quad (4.62)$$

A partir de esta definición, y tomando una base coordenada, veamos que las componentes del tensor torsión están dadas por:

$$T_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (4.63)$$

Para demostrar esta relación consideremos las bases duales coordenadas $\{\partial/\partial x^{\alpha}\}$ y $\{dx^{\alpha}\}$. De la definición del tensor torsión tenemos

$$\langle \omega, \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle = \langle \omega, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle \quad (4.64)$$

entonces, de las expresiones para las derivadas covariante y de Lie de un tensor en componentes

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \left(\frac{\partial Y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} X^{\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} Y^{\beta} X^{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad (4.65)$$

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = \left(\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} Y^{\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} X^{\beta} Y^{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad (4.66)$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \left(\frac{\partial Y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} X^{\beta} - Y^{\beta} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad (4.67)$$

entonces

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = ((\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}) X^{\beta} Y^{\gamma}) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \quad (4.68)$$

a partir de la cual se llega a la ecuación 4.63. Si tomamos una base cualquiera $\{\mathbf{E}_{\alpha}\}$ y $\{\mathbf{E}^{\beta}\}$, el tensor torsión toma la forma

$$\mathbf{T} = (\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}) \mathbf{E}_{\alpha} \otimes \mathbf{E}^{\beta} \otimes \mathbf{E}^{\gamma} \quad (4.69)$$

Definición 4-10 Una conexión ∇ se llama libre de torsión si $T \equiv 0$, o equivalentemente las componentes son simétricas en sus índices inferiores, i.e. si

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (4.70)$$

En lo sucesivo trabajaremos con conexiones libres de torsión, y por lo tanto en este caso se tiene la siguiente relación entre la derivada de Lie y la derivada covariante:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} \quad (4.71)$$

que para el caso de un tensor cualquiera, en componentes coordenadas, toma la forma (problema):

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{T})_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= T_{\beta_1 \dots \beta_s; \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} X^{\sigma} - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\sigma \alpha_2 \dots \alpha_r} X_{;\sigma}^{\alpha_1} - \dots \\ &\quad - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_2 \dots \alpha_{r-1} \sigma} X_{;\sigma}^{\alpha_r} + T_{\sigma \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} X_{;\beta_1}^{\sigma} + \\ &\quad \dots + T_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} X_{;\beta_s}^{\sigma} \end{aligned} \quad (4.72)$$

También podemos encontrar la relación entre la derivada covariante y la exterior:

$$(d\mathbf{A})_{\alpha\beta \dots \gamma\delta} = (-1)^p A_{[\alpha\beta \dots \gamma; \delta]} \quad (4.73)$$

o equivalentemente

$$d\mathbf{A} = A_{\alpha\beta \dots \gamma; \delta} dx^{\delta} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge \dots \wedge dx^{\gamma} \quad (4.74)$$

donde \mathbf{A} es una p-forma.

Problema: Demostrar esta relación por inducción. A pesar de estas relaciones entre las derivadas exterior y de Lie con la derivada covariante, las primeras son independientes de la conexión definida sobre la variedad.

4.5. Tensor de Riemann

Volvamos al concepto de transporte paralelo a lo largo de una curva. Consideremos una curva cerrada λ y supongamos que partimos de un punto p y transportamos paralelamente al vector \mathbf{X}_p a lo largo de la curva regresando al punto inicial. Entonces obtendremos el vector \mathbf{X}'_p que en general será diferente al vector inicial. Si consideramos ahora otra curva $\delta(t)$ cerrada que pase también por el punto p y transportamos de nuevo al vector \mathbf{X}_p a lo largo de esta nueva curva, obtendremos un vector \mathbf{X}''_p , que, en general, será diferente a \mathbf{X}_p y

\mathbf{X}'_p . Esta no integrabilidad del transporte paralelo corresponde al hecho que, en general, las derivadas covariantes no conmutan. El tensor curvatura de Riemann nos da una “medida” de esta no conmutatividad.

Definición 4-11 Definamos la función curvatura por la relación:

$$\begin{aligned} R : \quad \Xi(\mathcal{M}) \times \Xi(\mathcal{M}) \times \Xi(\mathcal{M}) &\longrightarrow \Xi(\mathcal{M}) \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &\longmapsto R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

definida por

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) := \nabla_{\mathbf{X}} (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} \quad (4.75)$$

Problema: A partir de esta definición, mostrar que la función curvatura es lineal en las tres entradas \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} .

Definición 4-12 Definamos el tensor de Riemann $R \in T_3^1$ por la relación:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : \quad \Xi^*(\mathcal{M}) \times \Xi(\mathcal{M}) \times \Xi(\mathcal{M}) \times \Xi(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &\longmapsto \mathbf{R}(\omega, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

definido por

$$\mathbf{R}(\omega, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \langle \omega, R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \rangle \quad (4.76)$$

Problema: Eligiendo una base coordenada, mostrar que las componentes del tensor de Riemann están dadas por

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} \Gamma^\sigma_{\delta\beta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \Gamma^\sigma_{\gamma\beta} \quad (4.77)$$

Problema: A partir de la definición, mostrar que el tensor de Riemann tiene las siguientes propiedades de simetría:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma} \iff R^\alpha_{\beta(\gamma\delta)} = 0 \quad (4.78)$$

$$R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} = 0 \iff R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} = 0 \quad (4.79)$$

Además, la derivada covariante del tensor de Riemann satisface las identidades de Bianchi:

$$R^\alpha_{\beta[\gamma\delta;\eta]} = 0 \quad (4.80)$$

es decir

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta;\eta} + R^\alpha_{\beta\eta\gamma;\delta} + R^\alpha_{\beta\eta\delta;\gamma} = 0 \quad (4.81)$$

Una contracción del tensor de Riemann nos conduce a otro tensor, el cual juega un papel importante, no solo en la geometría, sino también en la física.

Definición 4-13 Definimos el tensor de Ricci por:

$$R_{\beta\delta} := R^\sigma_{\beta\sigma\delta} \quad (4.82)$$

Nota: Se puede probar que el transporte paralelo de un vector cualquiera a lo largo de toda curva cerrada sobre la variedad es localmente integrable, es decir, si $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}'_p$ para cada $p \in \mathcal{M}$, si y solamente si

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0, \quad \forall p \in \mathcal{M} \quad (4.83)$$

en este caso se dice que la conexión es plana.

4.6. Tensor métrico

Definición 4-14 *Un tensor métrico g en un punto $p \in M$ es un tensor simétrico del tipo $T_2^0(p)$.*

Así, una métrica sobre \mathcal{M} es un campo tensorial simétrico \mathbf{g} .

Ahora, dada una métrica podemos definir la función “norma” de un vector $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ como

$$\begin{aligned} |\cdot|_g : T_p\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{X} &\longmapsto |\mathbf{X}|_g := \sqrt{|\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X})|} \end{aligned} \quad (4.84)$$

A partir de esta definición podemos introducir el concepto de ángulo entre vectores por la relación (si no se presenta inconsistencia no escribiremos el subíndice g para referirse a la norma inducida por la métrica):

$$\cos \angle(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \frac{\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{[|\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X})| |\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})|]^{1/2}} \quad (4.85)$$

la cual es válida $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$, con $|\mathbf{X}| \neq 0$ y $|\mathbf{Y}| \neq 0$.

Teniendo en cuenta esta definición llamaremos vectores ortogonales a aquellos que cumplan la condición $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$.

Dadas las bases duales $\{\mathbf{E}_\alpha\}$ y $\{\mathbf{E}^\beta\}$, el tensor métrico \mathbf{g} en componentes toma la forma

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} \mathbf{E}^\alpha \otimes \mathbf{E}^\beta \quad (4.86)$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\mathbf{E}^\alpha, \mathbf{E}^\beta) \quad (4.87)$$

Las magnitudes definidas por la métrica en el espacio tangente están relacionadas con las magnitudes sobre la variedad por la siguiente definición:

Definición 4-15 *La longitud del camino entre los puntos de la variedad $p = \lambda(a)$ y $q = \lambda(b)$ situados sobre la curva $\lambda(t)$, con vector tangente $\partial/\partial t$, y tal que $g(\partial/\partial t, \partial/\partial t)$ tiene el mismo signo sobre todos los puntos a lo largo de la curva $\lambda(t)$, está definida por la integral*

$$L_{ab} = \int_a^b |\mathbf{g}(\partial/\partial t, \partial/\partial t)|^{1/2} dt \quad (4.88)$$

En una base coordenada la ecuación anterior toma la forma explícita

$$L_{ab} = \int_a^b \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right] dt \quad (4.89)$$

y por esta razón escribiremos, simbólicamente, la distancia a lo largo de una curva entre dos puntos infinitesimalmente cercanos en la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4.90)$$

Definición 4-16 *Una métrica g se llama no degenerada en un punto p de la variedad si no existe un vector no nulo $X \in T_pM$ tal que $g(X, Y) = 0$ para todo vector $Y \in T_pM$.*

En términos de componentes coordenadas de \mathbf{g} , la métrica es no degenerada si

$$\det |g_{\alpha\beta}| \neq 0 \quad (4.91)$$

En estas condiciones podemos definir un tensor del tipo T_0^2 tal que sus componentes $g^{\alpha\beta}$, en la base coordenada dada, están determinadas por la relación

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (4.92)$$

es decir, la matriz $(g^{\alpha\beta})$ formada con las componentes del tensor es la inversa de la matriz $(g_{\alpha\beta})$ formada con las componentes de \mathbf{g} . Las componentes $g^{\alpha\beta}$ se llaman componentes contravariantes del tensor métrico, y esta denominación queda justificada, pues la definición 4.92 implica que podemos establecer un isomorfismo entre las componentes covariantes y contravariantes de tensores de la siguiente forma:

Lema 4-5 *Sea g una métrica no degenerada en el punto $p \in T_p M$, entonces la transformación*

$$\begin{aligned} T_p \mathcal{M} &\longrightarrow T_p^* \mathcal{M} \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathbf{C}_1^1(\mathbf{g} \otimes \mathbf{X}) \end{aligned}$$

define un isomorfismo.

Si $g_{\alpha\beta}$ y X^α son las componentes del tensor métrico \mathbf{g} y del vector \mathbf{X} , entonces las componentes de la 1-forma $\mathbf{C}_1^1(\mathbf{g} \otimes \mathbf{X})$, que las denotaremos por X_α , están dadas por

$$X_\alpha = g_{\alpha\beta} X^\beta \quad (4.93)$$

y puesto que la métrica es no degenerada, utilizando la ecuación 4.92 podemos despejar las componentes del vector \mathbf{X} en términos de las componentes de $\mathbf{C}_1^1(\mathbf{g} \otimes \mathbf{X})$, pues

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha} X_\alpha &= g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} X^\beta \\ &= \delta_\beta^\mu X^\beta \\ &= X^\mu \end{aligned} \quad (4.94)$$

Esta transformación y su inversa se conocen en la literatura como “subir” y “bajar” índices. Así, dada una métrica no degenerada podemos hablar de las componentes covariantes X_α y contravariantes X^α de un “vector” \mathbf{X} , las cuales están relacionadas biunívocamente por las ecuaciones 4.93 y 4.94. Esta operación se puede extender para subir o bajar cualquier índice tensorial (o índices por aplicación sucesiva de la misma operación). Por ejemplo, consideremos un tensor de rango 3 del tipo T_1^2 , con componentes $T_{\alpha\gamma}^{\beta}$, entonces aplicando las ecuaciones 4.93 y 4.94 podemos obtener los siguientes tensores:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\gamma} &= g^{\sigma\gamma} T_{\sigma}^{\alpha\beta} \\ T_{\beta\gamma}^{\alpha} &= g_{\beta\sigma} T_{\gamma}^{\alpha\sigma} \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$T_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\sigma} g_{\beta\varepsilon} T_{\gamma}^{\sigma\varepsilon} \quad (4.96)$$

$$T_{\beta}^{\alpha \gamma} = g_{\beta \varepsilon} g^{\sigma \gamma} T_{\sigma}^{\alpha \varepsilon} \quad (4.97)$$

$$T_{\alpha \gamma}^{\beta} = g_{\alpha \sigma} T_{\gamma}^{\sigma \beta} \quad (4.98)$$

$$T_{\alpha \beta}^{\gamma} = g_{\alpha \sigma} g_{\beta \delta} g^{\gamma \eta} T_{\eta}^{\sigma \delta} \quad (4.99)$$

$$T_{\alpha}^{\beta \gamma} = g_{\alpha \sigma} g^{\gamma \eta} T_{\eta}^{\sigma \beta} \quad (4.100)$$

El isomorfismo inducido por el tensor métrico significa que podemos considerar a todos los tensores de tercer rango, cuyas componentes están relacionadas por las ecuaciones anteriores, como diferentes representaciones del mismo objeto abstracto \mathbf{T} . En lo sucesivo se asumirá esto para todos los tensores. Es de anotar que en este caso se hace necesario respetar el orden de los índices en las componentes de tensores tanto covariantes como contravariantes.

Un caso de particular importancia lo constituye el tensor métrico \mathbf{g} , donde las componentes covariantes $g_{\alpha\beta}$, contravariantes $g^{\alpha\beta}$ y mixtas δ_{β}^{α} , relacionadas por la ecuación 4.92, constituyen diferentes representaciones del mismo objeto geométrico, el tensor \mathbf{g} .

Definición 4-17 Definimos la *signatura del tensor métrico g* por:

$$\begin{aligned} sig.(\mathbf{g}) &= \# \text{ de valores propios positivos} \text{ menos} \\ &\quad \# \text{ de valores propios negativos} \end{aligned}$$

Si el campo tensorial \mathbf{g} es no degenerado y continuo, entonces la signatura del tensor métrico \mathbf{g} es constante sobre toda la variedad. Siempre es posible elegir una base adecuada $\{\mathbf{E}_{\alpha}\}$ para el espacio tangente $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$, de tal forma que las componentes covariantes del tensor métrico tomen los valores ± 1 , i.e.

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\mathbf{E}_{\alpha}, \mathbf{E}_{\beta}) = \eta_{\alpha\beta} \quad (4.101)$$

donde los elementos $\eta_{\alpha\beta}$ están definidos por

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag.}(\underbrace{+1, +1, \dots, +1}_{\frac{1}{2}(n+s)}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{\frac{1}{2}(n-s)})$$

donde

$$s = sig.(\mathbf{g})$$

y n la dimensión de la variedad. Para el caso particular de $sig.(\mathbf{g}) = n$ la métrica es definida positiva, y en este único caso el tensor métrico define una métrica en sentido estricto. Otro caso de importancia en física es la métrica con $sig.(\mathbf{g}) = 2 - n$, es decir

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.}(+1, -1, -1, \dots, -1) \quad (4.102)$$

la cual se conoce con el nombre de métrica lorentziana o minkowskiana. Para efectos de la física, esta métrica es equivalente a otra con signatura $n - 2$, pues

el único valor propio positivo, en el primer caso y negativo en el segundo, se interpreta como la coordenada temporal.

En las presentes notas asumiremos la métrica con signatura $2 - n$, y definiremos la estructura de conos de luz del espacio-tiempo de la siguiente forma:

Definición 4-18 Una métrica lorentziana g sobre la variedad M divide a los vectores no nulos de $T_p M$ en tres clases disjuntas:

- 1- $X \in T_p M$ se llama “de tiempo” si $g(X, X) > 0$
- 2- $X \in T_p M$ se llama “de espacio” si $g(X, X) < 0$
- 3- $X \in T_p M$ se llama “de luz o nulo” si $g(X, X) = 0$

Si la métrica es no degenerada y continua, los vectores nulos de $T_p M$ forman un doble cono (el cono de luz), el cual separa a los vectores de tiempo de los vectores de espacio.

4.6.1. Relación entre conexión y métrica

Hasta el momento la conexión y la métrica son dos objetos definidos sobre la variedad de manera independiente. Pero existe una relación entre ellos si consideramos la conexión que deje invariante el producto punto entre vectores, es decir, dada una métrica existe una única conexión libre de torsión, definida por la condición

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \iff g_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \quad (4.103)$$

y así, con esta condición el transporte paralelo de vectores preserva el producto escalar definido por \mathbf{g} . Para encontrar la forma explícita de la conexión consideremos la expresión explícita de la derivada covariante de un tensor (ecuación 4.47); entonces,

$$0 = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma g_{\alpha\sigma} \quad (4.104)$$

si definimos

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha} \quad (4.105)$$

y rotamos cíclicamente los índices $\beta\gamma\alpha$, y sumamos las dos primeras ecuaciones y sustraemos la tercera, y asumiendo que

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma = \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} &= \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha} + \\ &\quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\gamma\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} &= 2\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \\ &= 2g_{\alpha\sigma}\Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \end{aligned} \quad (4.107)$$

y despejando los elementos de la conexión, llamados símbolos de Christoffel de segunda clase, obtenemos

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right\} \quad (4.108)$$

Con esta conexión métrica el tensor de Riemann tiene las propiedades de simetría adicionales

$$R_{(\alpha\beta)\gamma\delta} = 0 \iff R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} \quad (4.109)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \quad (4.110)$$

Estas relaciones implican que el tensor de Ricci es simétrico:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} \quad (4.111)$$

Problema: Probar estas relaciones de simetría, y mostrar que el número de componentes independientes del tensor de Riemann es

$$n^2(n^2 - 1)/12 \quad (4.112)$$

con n la dimensión de la variedad, y por tanto

$$n(n+1)/2 \quad (4.113)$$

de estas componentes pueden estar dadas en términos de las componentes independientes del tensor de Ricci.

Para los siguientes casos particulares tenemos:

Si $n = 1$ entonces $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$

Si $n = 2$ entonces $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sólo tiene una componente independiente, la cual es proporcional al escalar curvatura R , definido por

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R^\beta{}_\beta \quad (4.114)$$

Si $n = 3$ el tensor de Riemann tiene 6 componentes independientes y por lo tanto las 6 componentes independientes del tensor de Ricci determinan completamente al tensor de Riemann.

Si $n = 4$ el tensor de Riemann tiene 20 componentes independientes y el tensor de Ricci tiene 10 componentes independientes.

Es de anotar que el tensor de Riemann contiene todas las propiedades geométricas de una variedad métrica.

4.7. Campos de Killing

Definición 4-19 Un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ se llama una isometría si éste deja la métrica invariante, i.e., si la métrica transformada $\phi_*g = g$ en todo punto de M .

Esto implica, entonces, que la transformación

$$\phi_* : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\phi(p)}\mathcal{M}$$

preserva el producto escalar:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) & \quad | \quad p = \phi_*g(\phi_*\mathbf{X}, \phi_*\mathbf{Y}) |_{\phi(p)} \\ & = g(\phi_*\mathbf{X}, \phi_*\mathbf{Y}) |_{\phi(p)} \end{aligned} \quad (4.115)$$

Ahora, si el grupo uniparamétrico de isomorfismos ϕ_t generado por un campo vectorial \mathbf{K} es un grupo de isometrías (es decir, si para cada t la transformación ϕ_t es una isometría), entonces el campo vectorial \mathbf{K} se denomina campo vectorial de Killing. Así, la derivada de Lie de la métrica con respecto al campo vectorial \mathbf{K} se anula:

$$L_{\mathbf{K}}\mathbf{g} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\mathbf{g} - \phi_{t*}\mathbf{g}) = 0 \quad (4.116)$$

pues

$$\mathbf{g} = \phi_{t*}\mathbf{g}$$

por definición de isometría. Ahora, de la definición de derivada de Lie

$$(L_{\mathbf{K}}\mathbf{g})_{\alpha\beta} = 2K_{(\alpha;\beta)} \quad (4.117)$$

Problema: Demostrar esta relación. Por lo tanto, un campo vectorial de Killing satisface la ecuación diferencial:

$$K_{\alpha;\beta} + K_{\beta;\alpha} = 0 \quad (4.118)$$

llamada ecuación diferencial de Killing.

Inversamente, si \mathbf{K} es un campo vectorial que satisface la ecuación diferencial de Killing, entonces

$$\phi_{t*}\mathbf{g}|_p = \mathbf{g}|_p + \int_0^t \frac{d}{dt'} (\phi_{t*}\mathbf{g})|_p dt'$$

por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$\phi_{t*}\mathbf{g}|_p = \mathbf{g}|_p + \int_0^t \frac{d}{ds} (\phi_{t'*} \circ \phi_{s*}\mathbf{g})_{s=0}|_p dt'$$

puesto que ϕ_t es un grupo uniparamétrico de isomorfismos y así

$$\phi_{t*} \circ \phi_{s*} = \phi_{s*} \circ \phi_{t*} = \phi_{t+s*} \quad (4.119)$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi_{t*}\mathbf{g}|_p &= \mathbf{g}|_p + \int_0^t \left(\phi_{t'*} \circ \frac{d}{ds} \phi_{s*}\mathbf{g} \right)_{s=0}|_p dt' \\ &= \mathbf{g}|_p - \int_0^t \phi_{t'*} (L_{\mathbf{K}}\mathbf{g})|_{\phi_{-t}}|_p dt' \\ &= \mathbf{g}|_p \end{aligned}$$

pues de la definición de derivada de Lie se obtiene que

$$(L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})^\alpha = -\frac{d}{dt} (\phi_{t*}\mathbf{Y})^\alpha \quad (4.120)$$

por lo tanto,

Teorema 4-6 *K es un campo vectorial de Killing si y sólo si satisface la ecuación diferencial de Killing.*

En general, una variedad no tiene simetrías y no admite campos vectoriales de Killing. Sin embargo, una variedad especial puede admitir r campos vectoriales de Killing linealmente independientes \mathbf{K}_i $i = 1, 2, \dots, r$. Además, se puede mostrar que el conmutador de dos campos de Killing es de nuevo un campo de Killing, i.e.,

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = c_{ij}^l \mathbf{K}_l \quad (4.121)$$

Esto significa que el conjunto de campos vectoriales de Killing sobre una variedad dada forman un álgebra cerrada bajo el producto definido por el conmutador, la cual recibe el nombre de álgebra de Lie asociada a las simetrías de la variedad. Las constantes c_{ij}^l se llaman constantes de estructura del correspondiente grupo de Lie. Además, si n es la dimensión de la variedad, entonces el número r de campos de Killing está acotado, i.e.,

$$0 \leq r \leq \frac{1}{2}n(n+1) \quad (4.122)$$

así, el grupo local de difeomorfismos generado por estos campos vectoriales de Killing es un grupo de Lie de r parámetros, llamado grupo de simetrías de la variedad. Una variedad puede poseer otras simetrías, tales como la inversión en un punto, o la reflexión en un plano, pero estas simetrías no están generadas por un campo vectorial de Killing. La conexión de estas simetrías con la física está en el teorema de Noether que establece que para cada simetría de la variedad, generada por un campo vectorial de Killing, existe una cantidad dinámica del sistema que se conserva.

Una variedad que admite

$$r = \frac{1}{2}n(n+1)$$

campos vectoriales de Killing se llama de simetría maximal.

Lema 4-7 *La variedad lorentziana n -dimensional plana es de simetría maximal. Por variedad plana se quiere decir una variedad para la cual las conexiones son nulas globalmente o equivalentemente el escalar de curvatura se anula en toda la variedad $R = 0$.*

Para demostrar este lema veamos en primer lugar que cada campo de Killing dado \mathbf{K} (si éste existe) está determinado unívocamente por los valores de $K_\alpha|_p$ y $K_{\alpha;\beta}|_p$ en cualquier punto $p \in \mathcal{M}$. Para este fin, notemos que el conmutador de las segundas derivadas covariantes del campo \mathbf{K} está dado por:

$$K_{\alpha;\beta;\gamma} - K_{\alpha;\gamma;\beta} = -R_{\alpha\beta\gamma}^\sigma K_\sigma \quad (4.123)$$

Ahora, de la relación

$$R_{[\beta\gamma\delta]}^\alpha = 0$$

para el tensor de Riemann se tiene que, como \mathbf{K} satisface la ecuación de Killing, entonces

$$K_{\alpha;\beta;\gamma} = -R_{\alpha\beta\gamma}^\sigma K_\sigma \quad (4.124)$$

Por lo tanto, dados K_α y $K_{\alpha;\beta}$ para algún punto $p \in \mathcal{M}$, entonces, por la teoría de las ecuaciones diferenciales, conocemos \mathbf{K} sobre la variedad. Para el caso de una variedad plana esta ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^2 K_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = 0 \quad (4.125)$$

cuya solución general es de la forma

$$K_\alpha(x) = a_\alpha + b_{\alpha\beta} x^\beta \quad (4.126)$$

donde a_α y $b_{\alpha\beta}$ son constantes de integración, con la condición $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$, lo cual se sigue de la ecuación de Killing.

Así, tenemos $\frac{1}{2}n(n-1)$ constantes independientes $b_{\alpha\beta}$ más n constantes a_α , que conduce a un total de $\frac{1}{2}n(n+1)$ campos vectoriales de Killing independientes, los cuales pueden ser escogidos de la siguiente manera: (μ índice de componentes de vectores y j índice que numera los diferentes vectores)

$$K_\mu^{(j)}(x) = \delta_\mu^j ; \mu, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.127)$$

$$K_\mu^{(ij)}(x) = \delta_\mu^i x^j - \delta_\mu^j x^i ; \mu, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.128)$$

Los n vectores $\mathbf{K}^{(i)}$ representan traslaciones y los $\frac{1}{2}n(n-1)$ vectores $\mathbf{K}^{(ij)}$ representan rotaciones, lo cual, dada la signatura lorentziana de la métrica, contiene tanto transformaciones de Lorentz puras como rotaciones espaciales de los ejes.

Capítulo 5

Principios de relatividad general

En este capítulo daremos los postulados fundamentales sobre los cuales se basa la teoría general de la relatividad. En la primera parte mostraremos cómo el principio de equivalencia conduce a una “geometrización” de la fuerza de gravedad, lo cual nos llevará a la formulación de los postulados.

5.1. La mecánica newtoniana

La estructura matemática fundamental del espacio y el tiempo de la teoría especial de la relatividad (TER) es mucho más simple que la correspondiente estructura matemática de la mecánica clásica. En la TER el espacio-tiempo se representa por el espacio de Minkowski

$$\mathcal{M} \doteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu\}$$

donde la variedad \mathbb{R}^4 tiene la topología usual, y sobre la cual se define un «producto punto» no definido positivo, el producto minkowskiano, el cual representa los postulados fundamentales de la TER. Por otra parte la estructura matemática del espacio y el tiempo de la mecánica clásica requiere de estructuras matemáticas mucho más complejas, como variedades simplécticas, las cuales están fuera de los objetivos de este libro (un excelente libro sobre este tema es el de V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*; Springer-Verlag 1991). Sin embargo vamos a utilizar algunos resultados de la mecánica newtoniana que nos permitirán explorar el alcance de un hecho empírico enunciado por Galileo y conocido como la ley de caída de los cuerpos. Las 3 leyes de la mecánica newtoniana están basada en conjunto de postulados o principios sobre el espacio y el tiempo, los cuales existen independientes de la materia:

- El tiempo es absoluto, homogéneo, isotrópico y continuo y se representa por una coordenada temporal real $t \in \mathbb{R}$ la cual es única (absoluta) salvo

una transformación lineal de la forma $t \rightarrow \alpha t + \delta$ donde α es un número real positivo que depende de la escala utilizada y las unidades, y β un número real arbitrario el cual representa la homogeneidad del espacio, es decir, las leyes de la mecánica son independientes de la escala y el origen del tiempo.

En física el tiempo lo medimos con relojes, i.e. instrumentos que permiten medir intervalos de tiempo que cumplen con las propiedades de homogeneidad y continuidad del tiempo. El intervalo de tiempo t medido por un reloj entre un instante dado, que se escoge como $t = 0$ y otro instante es lo que se llama la coordenada temporal.

- El espacio es absoluto, homogéneo e isotrópico, tridimensional y satisface los postulados de la geometría euclidiana, se representa por el espacio \mathbb{R}^3 y su carácter absoluto significa que una partícula libre de fuerzas debe moverse con velocidad constante (primera ley de Newton), es decir que las fuerzas inerciales que surgen para algunos observadores (acelerados) no provienen o son consecuencia de algún tipo de interacción (tercera ley de Newton), sino del sistema de referencia utilizado. En el famoso experimento del balde rotante de Newton la curvatura que adquiere la superficie del agua con el balde en rotación es debida al hecho que está rotando respecto al espacio absoluto, y no a que está actuando sobre él una fuerza (segunda ley de Newton). Esto implica que existe un sistema cartesiano de coordenadas inerciales $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ con respecto al cual una partícula libre de fuerzas se mueve a velocidad constante

Estos postulados o principios sobre el espacio y el tiempo están en la base de la mecánica newtoniana. Si bien el espacio es absoluto, la primera ley de Newton implica que existe un conjunto infinito de sistemas de referencia inerciales. Para ver esto consideremos un sistema de N partículas puntuales de masas m_i que interactúan entre si

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} f(|\mathbf{r}_{ij}|) ; \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$$

a través de fuerzas entre ellas que satisfacen la tercera ley de Newton:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

entonces, de la segunda ley de Newton el sistema de ecuaciones de movimiento está dado por

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}$$

en donde no aparecen fuerzas inerciales debido a que las coordenadas utilizadas son inerciales. La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado $\mathbf{r}_j(t)$ para $j = 1, \dots, N$ describe el movimiento del sistema de partículas medidas por el observador inercial, es decir las coordenadas de posición de cada partícula en función del tiempo. Entonces es sencillo mostrar que a partir de esta

solución podemos encontrar un conjunto infinito de soluciones \mathbf{r}'_j , relacionadas entre sí por una ecuación de la forma

$$\mathbf{r}'_j(\pm t + \beta) = \mathfrak{R}\mathbf{r}_j(t) + \mathbf{v}t + \mathbf{d}$$

donde β es un número real, \mathfrak{R} una matriz de rotación en \mathbb{R}^3 , \mathbf{v} y \mathbf{d} vectores. Esto implica que si (t, \mathbf{r}) son coordenadas inerciales (sistema de referencia inercial) entoces (t', \mathbf{r}') también es un sistema de referencia inercial, relacionados entre sí por una transformación de Galileo:

$$t' = t + \beta$$

$$\mathbf{r}'_j = \mathfrak{R}\mathbf{r}_j + \mathbf{v}t + \mathbf{d}$$

El conjunto de todas estas transformaciones, conforman un grupo continuo de transformaciones, el Grupo de Galileo, el cual representa las propiedades fundamentales del espacio y tiempo newtonianos. Así, una transformación de Galileo queda determinada por 10 parámetros: β que representa la homogeneidad del tiempo, 3 ángulos de rotación de \mathbf{R} que representa la isotropía del espacio, el vector \mathbf{v} es la velocidad relativa entre sistemas de referencia inerciales y el vector \mathbf{d} corresponde a la elección arbitraria del origen de coordenadas inerciales y representa la homogeneidad del espacio.

En este marco conceptual de la mecánica clásica Newton formuló la ley de gravitación universal.

5.1.1. La ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal establece que entre todo par de cuerpos en el universo existe una interacción (fuerza atractiva), que sólo depende de la posición relativa de los cuerpos y de una propiedad intrínseca, llamada carga o masa gravitacional, la cual satisface la tercera ley de Newton:

$$\mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} = -\frac{Gm_1^G m_2^G}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (5.1)$$

donde m_1^G y m_2^G son las masas gravitacionales, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 los vectores posición de los cuerpos, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, G una constante (la constante de gravitación universal $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$) y $\mathbf{F}_{1 \leftarrow 2}$ es la fuerza que el cuerpo 2 ejerce sobre el 1. A partir de esta expresión, es claro que no está en acuerdo con los principios de la teoría especial de la relatividad, pues la ley de fuerza es independiente del tiempo y por lo tanto describe una interacción instantánea. Esta situación motivó a Einstein a buscar la forma relativista de la ley de gravitación universal.

Esta ley de gravitación universal de Newton contiene dos postulados fundamentales, los cuales se constituirán en el punto de partida para la formulación de la teoría general de la relatividad:

En primer lugar, esta interacción gravitacional es universal, es decir, todos los objetos del universo tienen “carga gravitacional” Si comparamos con la carga eléctrica, la ley de Coulomb tiene la misma forma funcional

$$\mathbf{F}_{1 \leftarrow 2} = \frac{KQ_1Q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (5.2)$$

pero encontramos dos diferencias: La primera que la carga eléctrica Q puede ser positiva o negativa y la segunda que no todos los cuerpos o partículas poseen carga eléctrica.

En segundo lugar, si consideramos la fuerza que un cuerpo dado, e.g. la Tierra con masa gravitacional M_T^G , ejerce sobre otros, con masa gravitacional m^G , y aplicamos la segunda ley de Newton para estudiar el movimiento de estas masas en presencia de la primera, tenemos que

$$\frac{GM_T^G m^G}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = m^I \mathbf{a} \quad (5.3)$$

donde m^I denota la masa inercial del cuerpo con masa gravitacional m^G ; entonces, la aceleración del cuerpo debido a M_T^G está dada por

$$\mathbf{a} = \frac{GM_T^G}{r^2} \frac{m^G}{m^I} \hat{\mathbf{r}} \quad (5.4)$$

Si fijamos la masa de la Tierra, la aceleración de cualquier otro cuerpo depende solamente de la relación entre su masa gravitacional e inercial. Galileo fue el primero en mostrar que la aceleración de un cuerpo cualquiera, en un punto dado sobre la superficie terrestre, era independiente de su masa inercial; este hecho, conocido como ley de caída de los cuerpos de Galileo, muestra, por la ecuación anterior, que para todos los cuerpos la relación entre su masa gravitacional y su masa inercial es independiente de la naturaleza (composición, forma, etc.) del cuerpo. Este principio adoptado por Newton, lo que explica la introducción de la constante de gravitación universal, condujo a medir la masa gravitacional en las mismas unidades que la inercial, aún cuando los dos conceptos de masa son completamente independientes. Este principio, hoy conocido como Principio de Equivalencia Débil (PED) implica entonces, que el movimiento de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitacional, independiente de su masa, es el mismo dadas las mismas condiciones iniciales de posición y velocidad. Sin embargo, una situación semejante se preenta cuando consideramos sistemas de referencia no inerciales y como veremos a continuación, surge una relación más profunda entre campos gravitacionales y sistemas de referencia acelerados.

5.1.2. Sistemas de referencia no inerciales

Consideremos ahora sistemas de referencia no inerciales, es decir sistemas de referencia con respecto a los cuales una partícula libre de fuerzas no se mueve a velocidad constante. Como primer ejemplo estudiemos el caso de un sistema de referencia $\tilde{\Sigma}$ el cual está acelerado, pero sin rotación, respecto a un sistema de referencia inercial Σ . Sea $\mathbf{R}(t)$ el vector posición del origen \tilde{O} del sistema $\tilde{\Sigma}$ respecto al sistema inercial Σ , así, si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una partícula de masa inercial m respecto a Σ , entonces el vector posición de la partícula respecto al sistema $\tilde{\Sigma}$ está dado por

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) \quad (5.5)$$

Ahora si \mathbf{F} es la fuerza que actúa sobre la partícula, de la segunda ley de Newton, tenemos que en el sistema de referencia inercial Σ la ecuación de movimiento es

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (5.6)$$

y por lo tanto, de las dos ecuaciones anteriores, para el sistema de referencia $\tilde{\Sigma}$ la ecuación de movimiento toma la forma

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \quad (5.7)$$

Para el caso particular en el cual $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}t$ se reduce a una transformación de Galileo y el sistema $\tilde{\Sigma}$ es inercial, de lo contrario, cuando la función $\mathbf{R}(t)$ no es lineal en el tiempo una partícula sobre la cual no actúa una fuerza, $\mathbf{F} = 0$, experimenta una aceleración $-d^2 \mathbf{R}/dt^2$ medida por un observador en el sistema $\tilde{\Sigma}$ y esta aceleración es independiente de la masa inercial de la partícula. Un ejemplo interesante, de uso frecuente en la literatura, para ilustrar los efectos físicos en sistemas de referencia no inerciales y que fue magistralmente utilizado por Einstein para discutir las implicaciones del principio de la caída de cuerpos de Galileo y formular el principio de equivalencia, lo encontramos en el caso del ascensor. Consideremos un péndulo simple de longitud l suspendido del techo de un ascensor en el campo gravitacional de la Tierra. Entonces, para un observador fijo sobre la Tierra, si el ascensor se encuentra en reposo o sube o baja a velocidad constante, la ecuación de movimiento para el péndulo, en la aproximación de pequeñas oscilaciones y θ el ángulo de la cuerda respecto a la vertical, es

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (5.8)$$

entonces la frecuencia de oscilación del péndulo, está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5.9)$$

en donde se ha asumido positivo en la dirección de la aceleración de la gravedad g . Ahora si el ascensor se mueve con una aceleración a , donde a es positivo si está en la misma dirección de g , entonces la ecuación de movimiento del péndulo, para pequeñas oscilaciones, toma la forma

$$\ddot{\theta} + \frac{|g - a|}{l} \theta = 0 \quad (5.10)$$

y la frecuencia de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{|g - a|}{l}} \quad (5.11)$$

Si aceleramos el ascensor hacia abajo con $a < g$ el efecto es disminuir la frecuencia, y en el caso límite cuando $a = g$ la frecuencia es cero y en este caso el sistema

está en caída libre. Si $a > g$ entonces el péndulo se invierte, es decir la oscilación se da en torno al punto de equilibrio para $\theta = \pi$. Si la aceleración del ascensor es hacia arriba, $a < 0$, el efecto es que la frecuencia de oscilación aumenta, y en este caso si quitamos el campo gravitacional, $g = 0$, y aceleramos el ascensor con $a = -g$ entonces, un observador en el interior del ascensor, midiendo la frecuencia de oscilación no podría discernir si está en el campo gravitacional de la Tierra o si está en el espacio libre, pero acelerado por una fuerza tal que el ascensor y todo su contenido experimentan una aceleración $a = -g$, es decir, en el interior del ascensor todos los cuerpos «caerían con la misma aceleración». Con respecto a este último experimento imaginario, es importante resaltar dos hechos: en un sistema de referencia no inercial, como $\tilde{\Sigma}$, todas las partículas adquieren la misma aceleración $d^2\tilde{R}/dt^2$, independientemente de sus masas como si se encontraran en un campo gravitacional y de manera similar, en un campo gravitacional podemos elegir un sistema de referencia no inercial, de tal forma que la aceleración de las partículas sea cero, caída libre. Así, en este sentido un sistema de referencia no inercial es equivalente a un cierto campo gravitacional y de manera similar un campo gravitacional se puede «anular» si elegimos el sistema de referencia no inercial adecuado, i.e., en caída libre. Sin embargo, entre un campo gravitacional real y los «campos gravitacionales» generados por los sistemas de referencia no inerciales hay una diferencia fundamental: los campos gravitacionales reales se anulan en el infinito, lo cual no sucede con los «campos gravitacionales» no inerciales. Esto también se puede expresar en forma equivalente: no es posible encontrar una transformación a un sistema de referencia no inercial que anule el campo gravitacional en todo el espacio. Pero lo que si es siempre posible es encontrar un sistema de referencia acelerado que «anule» el campo gravitacional real en una región dada del espacio, la cual debe ser lo suficientemente pequeña para que el campo gravitacional pueda ser considerado uniforme. La analogía o equivalencia entre campos gravitacionales y sistemas de referencia no inerciales, abrió el camino que siguió Einstein para formular la teoría relativista de la gravedad.

En el ejemplo del ascensor vimos como en el sistema de referencia no inercial $\tilde{\Sigma}$ cuando $a = g$, caída libre, el campo gravitacional en su interior se anulaba y las partículas en su interior quedaban libres de fuerzas respecto al ascensor, de tal manera que si estas partícula se encuentra en reposo respecto al ascensor, o moviéndose con velocidad constante, en algún instante, entonces permanecerán en este estado, al igual que las partículas libres de fuerzas en un sistema de referencia inercial. En este sentido un sistema en caída libre en un campo gravitacional es equivalente a un sistema de referencia inercial, principio de equivalencia, y por lo tanto, en este sistema valen las leyes (las ecuaciones) de la física formuladas en sistemas de referencia inerciales.

Este resultado nos permitirá, como veremos más adelante, formular las ecuaciones de la física en forma covariante. De nuevo, el ejemplo del ascensor en caída libre nos permite ilustrar otra característica de los campos gravitacionales reales y su relación con los sistemas de referencia no inerciales, que comentamos en el párrafo anterior, con referencia a la «anulación» local de un campo gravitacional.

Consideremos dos partículas en el interior del ascensor en caída libre, que

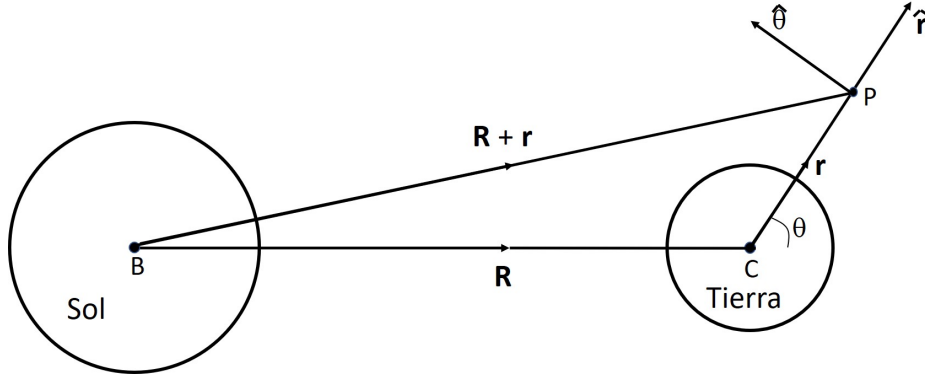


Figura 5-1: Fuerzas de marea

se encuentran en reposo y situadas a la misma altura del piso, pero separadas una cierta distancia, entonces si contáramos con instrumentos de medida lo suficientemente sensibles, podríamos darnos cuenta que la posición relativa de las dos partículas cambia, a diferencia de lo que sucedería si las dos partículas se encontraran en un ascensor acelerado en el espacio libre. Las mareas que conocemos tienen su origen en este hecho. Aun cuando los cálculos precisos de las mareas que suceden aquí en la Tierra son muy complejos, pues ellas dependen de los efectos combinados de la Luna y el Sol principalmente, así como también de otros factores más complejos de considerar como la profundidad de los océanos y la distribución de los continentes, veamos como surgen estas fuerzas de marea en un modelo sencillo. La Tierra está en caída libre en torno al Sol y en el centro de la Tierra se equilibran exactamente la aceleración de la gravedad debida al Sol y la aceleración centrípeta de la Tierra y por el principio de equivalencia, no es posible detectar ningún efecto debido al campo gravitacional del Sol. Sin embargo, al alejarnos del centro de la Tierra, debido a que el campo gravitacional del Sol no es uniforme este, equilibrio ya no se da y encontraremos fuerzas residuales que conducen a efectos observables, como las partículas que se acercan en el ascensor en caída libre o las mareas en la Tierra.

Asumimos que el Sol y la Tierra son esféricas y consideremos un punto P fijo, con vector posición \mathbf{r} respecto al centro de la Tierra C y si \mathbf{R} el vector posición del centro de la Tierra respecto al centro del Sol B , entonces para puntos cercanos a la Tierra se cumple $r/R \ll 1$. $\mathbf{R} + \mathbf{r}$ es el vector posición del punto P respecto al centro del Sol, como se muestra en la figura, el cual se está moviendo respecto al Sol. θ es el ángulo que forma \mathbf{r} respecto a la dirección Sol-Tierra, y $\hat{\theta}$ y \hat{r} los vectores unitarios polar y radial, respectivamente. Ahora, sobre cualquier elemento de masa m ligada a la Tierra actúa la fuerza tralacional de caída libre (de la Tierra sobre el Sol) $-mg_S$, donde g_S es la aceleración radial de la Tierra igual y contraria a la aceleración debida al Sol en el centro de la Tierra, mas la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre la masa m , debido a que el campo gravitacional del Sol no es homogéneo, entonces la fuerza neta \mathbf{F}_m

que experimenta el elemento masa m ligada a la Tierra es

$$\mathbf{F}_m = \frac{GM_S m}{R^3} \mathbf{R} - \frac{GM_S m}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^3} (\mathbf{R} + \mathbf{r})$$

Notemos que si el elemento de masa m está en el centro de la Tierra ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$) la fuerza neta se anula. Dado que $r/R \ll 1$ podemos expandir el denominador del segundo término en serie de potencias y reteniendo términos hasta primer orden, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^3} &= \frac{1}{R^3} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{R^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{R} \right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \frac{1}{R^3} \left(1 - 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right) \\ \mathbf{F}_m &\simeq -\frac{GM_S m}{R^3} \left[\mathbf{r} - 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{R^2} \mathbf{R} \right] \end{aligned}$$

Para interpretar los efectos de esta fuerza de marea, debida a la no uniformidad del campo del Sol en el entorno de la Tierra, descompongamos esta fuerza en las direcciones de $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\theta}$, donde $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{R} = R \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - R \sin \theta \hat{\theta}$, entonces

$$\mathbf{F}_m = \left[\frac{GM_S m}{R^3} r (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \hat{\mathbf{r}} - \frac{GM_S m}{R^3} 3r \cos \theta \sin \theta \hat{\theta}$$

Esta fuerzas, tanto del Sol como de la Luna, son las responsables para las mareas en la Tierra, de allí su nombre, y si tomamos la relación de las magnitudes de la fuerza debida a la Luna y al Sol tenemos que

$$\frac{F_L}{F_S} = \frac{M_L}{M_S} \left(\frac{R_S}{R_L} \right)^3 \sim 2,2$$

donde M_L es la masa lunar y R_L su distancia a la Tierra, así el efecto debido a la Luna es un poco más del doble que el del Sol. Podemos calcular la relación del orden de magnitud de la fuerza radial de marea Lunar sobre una masa m en la superficie terrestre $r = R_T$ y compararla con su peso mg , donde R_T y M_T son el radio y la masa terrestre, entonces

$$\frac{\frac{GM_L m}{R_L^3} R_T}{\frac{GM_T m}{R_T^2}} = \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_L} \right)^2 \sim 6 \times 10^{-8}$$

si bien la fuerza radial de marea es muy pequeña, la combinación de esta componente radial de la fuerza de marea con su componente en θ , tangente a la superficie terrestre, dan cuenta de las mareas en la Tierra. Notemos que la componente tangencial de la fuerza de marea en $\hat{\theta}$ se anula para $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y es máxima para $\theta = \pm\pi/4$ en dirección hacia el eje Tierra-Luna y para $\theta = \pm 3\pi/4$ en dirección al eje Tierra-Luna pero opuesta. Esta componente tangencial varía en el tiempo por la posición relativa Tierra-Luna, y da cuenta de un ciclo de 4 mareas diarias, dos altas y dos bajas (ver Butikov, E. I. «A dynamical

picture of the oceanic tides», American Journal of Physics, vol. 70, pp. 1001-1011, 2002).

Otro ejemplo de sistemas de referencia no inerciales, tal vez el de mayor relevancia en la literatura, tanto por su contenido conceptual como por sus aplicaciones, son los sistemas de referencia rotantes. En un disco rotante con velocidad angular ω , la velocidad tangencial de un punto situado a una distancia r del centro de giro $v = \omega r$, la cual puede ser tan grande como se quiera si nos alejamos del centro. En mecánica newtoniana este resultado no representa ningún problema, pero en relatividad especial sí, pues estaría en contradicción con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz, como lo discutió Einstein en un artículo publicado varios años antes de la formulación de la TGR, con otro hecho notable por la imposibilidad de calibrar relojes en sistemas rotantes. Por otra parte, en mecánica clásica los sistemas rotantes son importantes en varios contextos, por ejemplo en el estudio de los sólidos en rotación (giróscopos) y en los efectos debidos a la rotación de la Tierra.

Consideremos un sistema de referencia inercial Σ y un sistema de referencia no inercial Σ^R que rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y con sus orígenes coincidentes. Sea \mathbf{r} el vector posición de una partícula situada en un punto P del espacio. Sean $\mathbf{r} = (x', y', z') = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$ las componentes del vector respecto a una base $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ del sistema Σ^R , entonces la velocidad de la partícula respecto al sistema Σ^R está dada por:

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma^R} = \frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}'$$

Ahora, para calcular la velocidad de la partícula respecto al sistema inercial Σ hay que tener en cuenta que los vectores de la base primada cambian en el tiempo, entonces

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma} = \frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}' + x'\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\frac{d\hat{z}'}{dt}$$

Para evaluar las derivadas de los vectores de la base de Σ^R consideremos la figura siguiente, en donde \mathbf{n} es la dirección de giro del sistema, A el origen y \mathbf{r} vector posición del punto P que está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ respecto al sistema de referencia inercial Σ .

Entonces, de las siguientes relaciones

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{r}}_{\perp} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

obtenemos

$$d\mathbf{r} = r_{\perp}d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} = r_{\perp}d\theta\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{r}}_{\perp} = r_{\perp}\frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{r}}_{\perp}dt = r_{\perp}\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_{\perp}dt$$

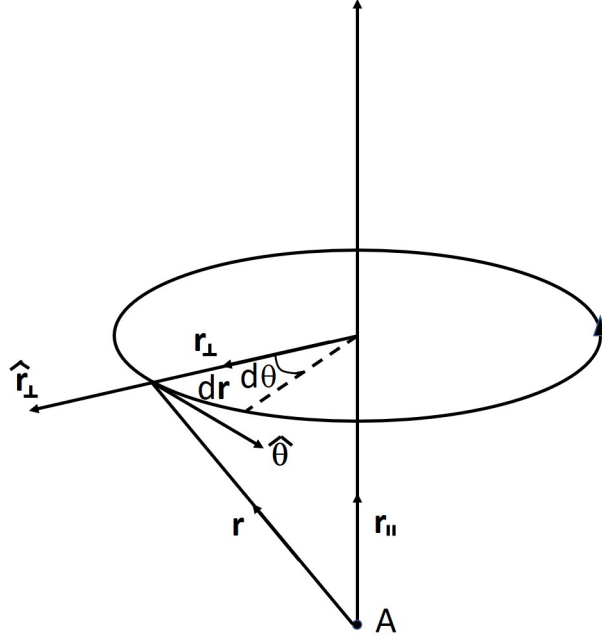


Figura 5-2: Sistema de referencia rotante

y por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

pues $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{0}$. Con este resultado podemos expresar la velocidad de la partícula medida en el sistema inercial Σ en términos de la velocidad medida en el sistema rotante, así

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma} &= \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma^R} + x \frac{d\hat{x}'}{dt} + y \frac{d\hat{y}'}{dt} + z \frac{d\hat{z}'}{dt} \\ &= \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma^R} + x \boldsymbol{\omega} \times \hat{x}' + y \boldsymbol{\omega} \times \hat{y}' + z \boldsymbol{\omega} \times \hat{z}' \\ &= \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma^R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

Para el caso general de la derivada de un vector tenemos

$$\left[\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right]_{\Sigma} = \left[\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right]_{\Sigma^R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \equiv \left(\left[\frac{d}{dt} \right]_{\Sigma^R} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \mathbf{V}$$

Esta relación la podemos aplicar para encontrar la ecuación de movimiento, en el sistema rotante Σ_R , de una partícula de masa m sobre la cual actúa una

fuerza \mathbf{F} . Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{m}\mathbf{F} &= \left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_{\Sigma} = \left(\left[\frac{d}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \left(\left[\frac{d}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \mathbf{r} \\
 &= \left(\left[\frac{d}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \left(\left[\frac{d}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times \right) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\
 &= \left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \left(\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \right) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\
 &= \left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_{\Sigma_R} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma_R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right]_{\Sigma_R} \times \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

pues $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Así con respecto al sistema de referencia Σ_R la ecuación de movimiento está dada por:

$$m \left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right]_{\Sigma_R} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]_{\Sigma_R} - m \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right]_{\Sigma_R} \times \mathbf{r}$$

Esta ecuación la podemos generalizar para el caso de un sistema de referencia no inercial $\tilde{\Sigma}$ el cual, con respecto al sistema inercial Σ , está acelerado y rotando. En este caso, teniendo en cuenta que $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)$ es el vector posición de la partícula en $\tilde{\Sigma}$ y $\mathbf{R}(t)$ el vector posición del origen de $\tilde{\Sigma}$ respecto a Σ , la ecuación de movimiento es (las derivadas se entienden que son calculadas en el sistema de referencia no inercial)

$$m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

La interpretación física de los diferentes términos de esta ecuación es directa: \mathbf{F} es la fuerza que actúa sobre la partícula, la cual es la única fuerza presente en el sistema de referencia inercial, los otros términos corresponden a las «fuerzas» ficticias o inerciales las cuales surgen como consecuencia del sistema de referencia no inercial. Los términos, segundo, tercero y cuarto surgen debido a la rotación del sistema de referencia no inercial y corresponden a las conocidas fuerzas centrípeta, de coriolis y azimutal respectivamente, esta última está presente si la frecuencia de rotación $\boldsymbol{\omega}$ es variable en el tiempo y el último término de la ecuación de movimiento ya se había tratado al comienzo de este párrafo. Por ejemplo, en primera aproximación y para efectos del movimiento de partículas cerca a la superficie terrestre, podemos considerar un sistema de referencia inercial con origen en el centro de la Tierra, entonces un observador fijo en algún punto sobre la superficie terrestre, corresponde a un observador no inercial rotante y los efectos de las fuerzas inerciales centrípeta y de coriolis deben ser tenidos en cuenta. Por ejemplo para el cálculo de trayectorias de proyectiles de largo alcance, la oscilación del plano de un péndulo simple (péndulo de Foucault), dinámica de los vientos, las variaciones de g y efectos sobre los giróscopos, entre otros.

Consideremos ahora el caso particular de una partícula de masa m sobre la cual solo actúa la fuerza debida a un campo gravitacional, entonces la ecuación de movimiento anterior para un sistema de referencia no inercial, de acuerdo con el principio de equivalencia, es

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{g}(\mathbf{r}', t) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$$

donde el campo gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{r}', t)$ es el valor de la aceleración de la gravedad en el punto \mathbf{r}' y en el instante t . Esta ecuación no depende de la masa de la partícula, es decir la trayectoria que sigue la partícula solo depende de las condiciones iniciales y no de la masa de la partícula. Además, siempre es posible encontrar un sistema de referencia no inercial que anule el campo gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{r}', t)$ localmente, es decir, en caída libre, como vimos en el ejemplo del péndulo suspendido en un ascensor acelerado.

5.1.3. Relatividad especial y la ley de gravitación universal

Por otra parte, de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, y en particular teniendo en cuenta la equivalencia entre masa y energía, Einstein generalizó el PED y postuló que ningún experimento realizado dentro de la caja podía determinar la diferencia entre un sistema uniformemente acelerado y un campo gravitacional uniforme. Este principio se conoce como el Principio de Equivalencia de Einstein (PEE). Por ejemplo, para el caso de un átomo de hidrógeno la relación entre su masa inercial y gravitacional sigue siendo una constante, aún cuando la masa propia del átomo es menor que la suma de las masas del electrón y del protón que lo constituyen, pues es un sistema ligado al cual hay que darle energía para separar las partículas que lo conforman. Así, de acuerdo con el PEE, el campo gravitacional se acopla de la misma manera con todas las formas de energía y materia.

El PEE tiene consecuencias profundas sobre la estructura del espacio-tiempo. En relatividad especial, al igual que en cualquier teoría física que no involucre el campo gravitacional, se parte de la definición de sistema de referencia inercial, considerando una partícula libre, la cual, por definición, se encuentra no acelerada. Entonces, con respecto a ella podemos definir el concepto de clase de sistemas de referencia inerciales, como aquellos para los cuales esta partícula se encuentra en reposo o movimiento uniforme. La descripción matemática de estos sistemas se hace a través de un sistema de reglas y relojes, calibrados adecuadamente, los cuales se extienden a todo el espacio y conducen a describir el espacio-tiempo como una variedad 4-dimensional plana, es decir, libre de conexión, y para la cual podemos elegir las coordenadas naturales, definidas por las curvas integrales de los campos de Killing $K_\mu^{(j)}(x) = \delta_\mu^j$; $\mu, j = 1, 2, \dots, n$.

El punto de partida básico para la anterior construcción está en la suposición de considerar la existencia de una partícula libre de fuerzas, con respecto a la cual podemos definir el movimiento acelerado. Dado el carácter universal de

la gravedad, todas las formas de materia interactúan gravitacionalmente; no es posible disponer de una partícula “gravitacionalmente neutra” con respecto a la cual podamos definir la aceleración debida a la gravedad. Así, la “aceleración de la gravedad” no es un concepto que pueda ser definido independiente de la materia y por lo tanto carece de significado experimental, y remplazaremos el concepto de movimiento libre (no acelerado) por el de sistema en “caída libre”.

Así, siguiendo los pasos para construir un sistema de referencia inercial en física no gravitacional, iniciamos con una partícula en caída libre, es decir, sobre la cual no actúan fuerzas (electromagnéticas, débil, etc.). Notemos en este punto de la discusión que estamos trabajando en el espíritu de Mach, en cuanto a que ya no hacemos referencia a una partícula libre de fuerzas (incluyendo la gravitacional). Si asociamos a esta partícula en caída libre un sistema de reglas rígidas y relojes calibrados de la manera usual, nos encontramos con el problema, debido a la inhomogeneidad del campo gravitacional, que otra partícula en caída libre no seguiría las líneas “rectas” definidas por el sistema de coordenadas canónicas asociadas al sistema de referencia de la primera partícula, es decir partículas en caída libre en otras regiones del espacio aparecerían como “aceleradas” con respecto a la primera.

El concepto de sistema de referencia inercial asociado a una partícula en caída libre sólo tiene sentido para una región lo suficientemente pequeña en la vecindad de la partícula. Notemos que este hecho corresponde, en el contexto de las variedades, a la existencia, en todo punto de la variedad, de un sistema de coordenadas normales de Riemann, con respecto a las cuales se anulan las componentes de la conexión en ese punto. Además, ya no es posible comparar velocidades, aceleraciones, etc., entre partículas localizadas en otras regiones, pues los sistemas de referencia inerciales asociados a las diferentes partículas son independientes. Este hecho de no poder comparar vectores en diferentes puntos de la variedad significa la dependencia del transporte paralelo de vectores, y por lo tanto la dependencia de la curvatura de la variedad.

Aun cuando los argumentos anteriores, sobre el comportamiento de la fuerza de la gravedad (PEE) y su relación intuitiva con las variedades, no son una demostración de la necesidad de describir la gravitación a través de la geometría del espacio-tiempo, estas consideraciones fueron suficientes para que Einstein postulara la idea que la gravitación es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, y que esta curvatura sería determinada por todas las formas de materia-energía.

El objeto central de la formulación de la TGR es el tensor métrico g con su estructura Lorentziana, el cual define y relaciona los conceptos más relevantes de las teorías físicas, tales como la medida del tiempo, de distancia, velocidad, aceleración, la estructura causal, y las trayectorias que siguen las partículas en campos gravitacionales, los cuales están descritos por g .

5.2. Postulados de la TGR

Habiendo motivado la geometrización de la fuerza de la gravedad, pasaremos a establecer los cuatro postulados fundamentales de la teoría general de la relatividad.

Postulado 4-1 *La variedad espacio-tiempo*

El espacio-tiempo lo constituyen todos los eventos físicos, el cual será descrito por el par (\mathcal{M}, g) , donde \mathcal{M} es una variedad suave (C^∞) 4-dimensional conectada de Hausdorff y g es una métrica lorentziana sobre \mathcal{M} .

Sobre la variedad \mathcal{M} están definidos todos los campos de materia que se consideren; por ejemplo, el campo electromagnético, el campo de neutrinos, etc., los cuales describen el contenido de materia en el espacio-tiempo.

Los campos de materia obedecen ecuaciones, que se expresan como relaciones entre tensores sobre \mathcal{M} , en las cuales las derivadas con respecto a las coordenadas son las derivadas covariantes, determinadas por la conexión simétrica definida por la métrica g .

Si denotamos los campos de materia por $\Psi_{(i) \gamma \dots \delta}^{\alpha \dots \beta}(x)$, donde el sibíndice i denota los diferentes campos de materia que se consideren, entonces, los siguientes dos postulados sobre la naturaleza de los campos $\Psi_{(i) \gamma \dots \delta}^{\alpha \dots \beta}$, son comunes a la teoría especial y a la teoría general de la relatividad:

Postulado 4-2 *Causalidad local*

Las ecuaciones que satisfacen los campos de materia deben ser tales que, si $U \subset \mathcal{M}$ es una vecindad convexa y $p, q \in U$, entonces una señal puede ser enviada en U entre p y q si y solamente si p y q pueden ser unidos por una c^1 – curva contenida en U , cuyo vector tangente en todas partes es diferente de cero y es como de tiempo o como de luz (esta curva se llama no como de espacio).

Otra forma equivalente de establecer este postulado, y físicamente más significativa, se puede dar en términos del problema de Cauchy para los campos de materia: Sea $p \in \mathcal{U}$ tal que toda curva no como de espacio a través de p , intercepta la superficie como de espacio $x^0 = \text{cte.}$ dentro de \mathcal{U} . Sea \mathcal{F} el conjunto de puntos en la hipersuperficie $x^0 = \text{cte.}$, los cuales pueden ser alcanzados por curvas no como de espacio en \mathcal{U} a través de p . Entonces, se exige que los valores de los campos de materia en p deben estar unívocamente determinados por los valores del campo y sus derivadas a un orden finito sobre \mathcal{F} . O sea, las ecuaciones de movimiento (ecuaciones diferenciales) que determinan los campos (leyes de la física) involucran derivadas hasta un orden n finito (usualmente hasta orden 2), tienen solución única, la cual está determinada por las condiciones de frontera, es decir, el valor de los campos y sus primeras $n - 1$ derivadas, dadas sobre la hipersuperficie interceptada por el cono de luz pasado del punto p .

Postulado 4-3 *Conservación local de la energía*

Existe un tensor simétrico $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\Psi_i, \nabla\Psi_i, \dots) = T_{\nu\mu}$ que es función de los campos de materia y sus derivadas, hasta un orden finito, tal que:

- i. $T_{\mu\nu} = 0$ sobre $U \subset \mathcal{M}$ abierto, si y sólo si $\Psi_i = 0$ para todo i sobre U .*
- ii. $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$*

La primera condición expresa que todos los campos de materia contribuyen a la energía. A partir de la segunda condición, si la variedad espacio-tiempo admite un campo vectorial de Killing \mathbf{K} , entonces obtenemos una ley de conservación, pues sea

$$p^\alpha = T^{\alpha\beta} K_\beta \quad (5.12)$$

las componentes del vector \mathbf{P} , obtenidas por contracción del tensor momentum-energía con el campo de Killing, entonces

$$p^\alpha_{;\alpha} = T^{\alpha\beta}_{;\alpha} K_\beta + T^{\alpha\beta} K_{\beta;\alpha} = 0 \quad (5.13)$$

pues $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ y \mathbf{K} satisface la ecuación de Killing, i.e., $K_{(\alpha;\beta)} = 0$. Así, si \mathcal{D} es una región compacta y orientable, por el teorema de Gauss se tiene que

$$\int_{\partial\mathcal{D}} p^\alpha d\sigma_\alpha = \int_{\mathcal{D}} p^\alpha_{;\alpha} dv = 0 \quad (5.14)$$

por lo tanto, este resultado se puede interpretar físicamente, pues el flujo de la componente del tensor momentum-energía en la dirección del campo de Killing sobre una superficie cerrada se anula, lo cual es la generalización del teorema de Noether, el cual establece que a toda simetría le corresponde una ley de conservación. En el caso particular de la variedad lorentziana plana, asociado a los diez vectores de Killing linealmente independientes, están las diez leyes de conservación usuales, para la energía, el momentum y el momentum angular total.

5.3. Tensor métrico y postulado de causalidad

Consideremos la ecuación de las geodésicas en alguna base coordenada

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (5.15)$$

donde s es un parámetro afín. El parámetro afín de una curva geodésica está determinado salvo un factor aditivo y uno multiplicativo constantes, es decir, salvo una transformación de la forma $s' = as + b$, con a, b constantes. La libertad de escoger b corresponde a la libertad para elegir el punto inicial de la curva $\lambda(0)$, y el parámetro a corresponde a la libertad de normalizar el vector tangente a la curva \mathbf{X} por un factor de escala constante, $\mathbf{X}' = \frac{1}{a}\mathbf{X}$.

Por otra parte, dada una c^r -conexión, los teoremas de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias aplicados a la ecuación geodésica, muestran que para cualquier punto $p \in \mathcal{M}$ y $\mathbf{X}_p \in T_p\mathcal{M}$, existe una geodésica maximal $\lambda_{\mathbf{X}}(s)$ en \mathcal{M} , con $p = \lambda(0)$ y $\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_\lambda|_{s=0} = \mathbf{X}_p$. Si $r \geq 1$ la geodésica es única y depende continuamente de los valores iniciales. Esta situación nos permite definir la transformación exponencial

$$\begin{aligned} \exp : T_p\mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \mathbf{X} &\longmapsto \exp(\mathbf{X}) := \lambda_{\mathbf{X}}(1) \end{aligned}$$

siendo $\lambda_{\mathbf{X}}(0) = p$. Es decir, a cada vector $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ se le asocia el punto $q \in \mathcal{M}$, que está a una distancia paramétrica unidad del punto inicial, a lo largo de la única geodésica que se inicia en p y cuyo vector tangente es \mathbf{X} . Esta transformación exponencial no necesariamente está definida para todos los vectores $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ pues la geodésica no necesariamente está definida para todo s . Entonces

Definición 4-1 Una geodésica $\lambda_{\mathbf{X}}(s)$ se llama completa si está definida para todo s .

Definición 4-2 Una variedad se llama geodésicamente completa si todas las geodésicas sobre \mathcal{M} son completas.

En este caso la transformación \exp está definida para todo $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$. Sean $\mathbf{X} \in T_p\mathcal{M}$ y $a \in \mathbb{R}$ fijos con $\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{\lambda}\big|_{s=0} = \mathbf{X}$, entonces

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{\mathbf{X}} : [b, c] \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ s & \longmapsto & \lambda_{\mathbf{X}}(as) \end{array}$$

tiene velocidad inicial

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\lambda}\bigg|_{t=0} = \left(\frac{d(as)}{ds} \frac{\partial}{\partial as}\right)_{\lambda}\bigg|_{s=0} = a\mathbf{X} \quad (5.16)$$

así, $\lambda_{\mathbf{X}}(as) = \lambda_{a\mathbf{X}}(s)$ y por lo tanto la transformación

$$\exp(a\mathbf{X}) = \lambda_{a\mathbf{X}}(1) = \lambda_{\mathbf{X}}(a) \quad (5.17)$$

es decir, la transformación \exp convierte rectas $a\mathbf{X}$ de $T_p\mathcal{M}$ en geodésicas sobre \mathcal{M} .

Si \mathcal{M} es geodésicamente completo o no, la transformación \exp es de rango n en p ($n = \dim \mathcal{M}$). Así, por el teorema de la función implícita existe una vecindad abierta \mathcal{V}_0 del origen de $T_p\mathcal{M}$ y una vecindad abierta \mathcal{V}_p del punto $p \in \mathcal{M}$ tal que

$$\exp : \mathcal{V}_0 \subset T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}_p \subset \mathcal{M}$$

es un C^r -difeomorfismo de \mathcal{V}_0 sobre \mathcal{V}_p . La vecindad \mathcal{V}_p se llama vecindad normal de p . Además, podemos escoger \mathcal{V}_p convexa, esto es, tal que todo punto $q \in \mathcal{V}_p$ puede ser unido a cualquier otro punto $r \in \mathcal{V}_p$ por una única geodésica que parte del punto q y que está totalmente contenida en \mathcal{V}_p . En el interior de una vecindad normal convexa \mathcal{V} es posible escoger coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) con origen en cualquier punto $p \in \mathcal{V}$, y tomando una base $\{\mathbf{E}_{\alpha}\}$ de $T_p\mathcal{M}$ definimos las coordenadas de un punto $r \in \mathcal{V}$ por la relación $r = \exp(x^{\alpha}\mathbf{E}_{\alpha})$, es decir, se asigna al punto r las coordenadas del punto $\exp^{-1}r$ con respecto a la base $\{\mathbf{E}_{\alpha}\}$ de $T_p\mathcal{M}$. Entonces, si $\mathbf{E}_{\alpha} = \partial/\partial x^{\alpha}|_p$ de la ecuación de las geodésicas se obtiene que $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\big|_p = 0$. Estas coordenadas se llaman coordenadas normales centradas en el punto p . Este comportamiento de las geodésicas en una vecindad normal no se da, en general, sobre toda la variedad, pues es posible que dados dos puntos cualesquiera de \mathcal{M} no se puedan unir por una geodésica y, por otra parte, algunas de las geodésicas a través de un punto $p \in \mathcal{M}$ pueden converger a

un “foco” en otro punto de \mathcal{M} , por ejemplo las geodésicas sobre una 2-esfera son círculos máximos que convergen siempre al punto antípoda del cual partieron.

Consideremos de nuevo el postulado de causalidad. Este postulado sitúa a la métrica \mathbf{g} aparte de los otros campos de materia sobre \mathcal{M} , dado su carácter geométrico especial. Si $\{x^\alpha\}$ son coordenadas normales en una vecindad del punto $p \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ y con origen en p , entonces los puntos en \mathcal{U} que pueden ser alcanzados a partir del punto p por curvas no como de espacio en \mathcal{U} , son aquellos cuyas coordenadas satisfacen

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \geq 0 \quad (5.18)$$

El contorno de la región determinada por estos puntos está formado por la imagen del cono de luz de p bajo la transformación exponencial, i.e., el conjunto de geodésicas nulas a través de p . Así, observando cuáles puntos de $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ pueden comunicarse con p , se puede determinar el cono nulo N_p en $T_p\mathcal{M}$. Conocido N_p , la métrica en p se puede determinar salvo un factor conforme, donde

Definición 4-3 *Dos métricas g y g' sobre M se llaman conformes si*

$$\mathbf{g}' = \Omega^2(x)\mathbf{g} \quad (5.19)$$

donde $\Omega^2(x)$ es una función suave y no nula, y por lo tanto

$$\frac{\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{W})} = \frac{\mathbf{g}'(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\mathbf{g}'(\mathbf{Z}, \mathbf{W})} \quad (5.20)$$

Para determinar la métrica a partir del cono nulo N_p , sean

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p\mathcal{M}$$

vectores como de tiempo y como de espacio, respectivamente. Entonces, la ecuación

$$\mathbf{g}(\mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y}, \mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + 2\lambda\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + \lambda^2\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = 0 \quad (5.21)$$

tiene dos raíces reales λ_1 y λ_2 , pues el discriminante es positivo,

$$(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}))^2 - 4\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X})\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) > 0 \quad (5.22)$$

pues $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$ y $\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) < 0$. Por lo tanto, si N_p es conocido, entonces λ_1 y λ_2 pueden ser determinados, y de estos valores podemos obtener la relación

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}{\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})} \quad (5.23)$$

i.e., la razón de las magnitudes de un vector como de tiempo y uno como de espacio puede ser determinada. Ahora, si \mathbf{W}, \mathbf{Z} son dos vectores no nulos en p , entonces

$$\mathbf{g}(\mathbf{W}, \mathbf{Z}) = \frac{1}{2} (\mathbf{g}(\mathbf{W} + \mathbf{Z}, \mathbf{W} + \mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\mathbf{W}, \mathbf{W}) - \mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})) \quad (5.24)$$

y por lo tanto cada una de las magnitudes del lado derecho de la ecuación anterior puede ser comparada con las magnitudes de \mathbf{X} o de \mathbf{Y} y así podemos determinar, por ejemplo, la razón $\mathbf{g}(\mathbf{W}, \mathbf{Z})/\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$. Esto significa que la causalidad local permite determinar la métrica, salvo un factor conforme. En la práctica estas medidas se realizan usando el hecho que las señales electromagnéticas viajan sobre geodésicas nulas, hecho que es consecuencia de las ecuaciones de Maxwell y no de la teoría de la relatividad.

Para determinar el factor conforme se hace uso del segundo postulado, dejando así todos los elementos de la teoría físicamente observables, pues podemos comparar los factores conformes en diferentes puntos de la variedad espacio-tiempo \mathcal{M} . Esto se obtiene por el hecho que las ecuaciones de conservación

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \quad (5.25)$$

pueden no cumplirse para una conexión derivada de otra métrica

$$\mathbf{g}' = \Omega^2 \mathbf{g} \quad (5.26)$$

Una forma práctica de determinar el factor conforme es observando pequeñas partículas de prueba libres y determinando sus geodésicas como de tiempo. Por ejemplo, consideremos un conjunto de sistemas idénticos (e.g. los estados electrónicos internos de los átomos) cuyos cambios internos definen el conjunto de eventos a lo largo de las líneas de universo de cada sistema. Si se aísla cada sistema de los campos externos, entonces ellos siguen geodésicas como de tiempo. Si $\gamma(t)$ es una de las geodésicas con vector tangente $(\partial/\partial t)_\gamma$, entonces podemos medir la longitud de arco entre eventos vecinos para cualquiera de estos sistemas y determinar

$$\mathbf{g}\left((\partial/\partial t)_\gamma, (\partial/\partial t)_\gamma\right) \quad (5.27)$$

en cada punto del espacio-tiempo y fijar así el factor conforme, salvo un factor multiplicativo constante, el cual lo define la escala.

Los postulados de causalidad y conservación no nos dicen cómo construir $T^{\alpha\beta}$ para un conjunto de campos de materia dados. Sin embargo, existe una manera única y bien definida de calcular el tensor momentum-energía, si las ecuaciones de movimiento para los campos se derivan de una lagrangiana, como es el caso para los campos de materia usuales y de interés físico.

Sea \mathcal{L} la densidad lagrangiana, la cual es función de los campos de materia Ψ_i , sus derivadas covariantes, hasta un orden finito y de la métrica. Entonces, las ecuaciones de movimiento de los campos se obtienen a partir de la acción

$$S = \int \mathcal{L} dv \quad (5.28)$$

exigiendo que S sea estacionaria bajo variación de los campos en el interior de una región compacta 4-dimensional \mathcal{D} , i.e.,

$$\delta S = 0 \quad (5.29)$$

Esta condición conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{(i)}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_{(i)})} \right) = 0 \quad (5.30)$$

El tensor momentum-energía se obtiene a partir de la densidad lagrangiana \mathcal{L} considerando las variaciones de la acción bajo cambios en la métrica:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{|g(x)|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \quad (5.31)$$

Por ejemplo, un campo escalar $\phi(x)$, el cual representa partículas de escalares de masa m , sin carga y espín cero, está descrito por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{|g(x)|} \{ g^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha} \phi_{;\beta} - m^2 \phi^2 \} \quad (5.32)$$

donde se han utilizado unidades de $\hbar = 1$ y $c = 1$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este sistema conducen a la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (5.33)$$

donde el d'alembertiano está dado por:

$$\square \phi = g^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha\beta} \quad (5.34)$$

y el tensor momentum-energía es:

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{;\alpha} \phi_{;\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (g^{\gamma\delta} \phi_{;\gamma} \phi_{;\delta} + m^2 \phi^2) \quad (5.35)$$

Otro ejemplo, de importancia en cosmología, es el de fluido perfecto. Un fluido describe un sistema físico de muchas partículas (10^{23} que en este límite se puede considerar como un sistema continuo) a través de las cantidades que determinan el sistema, tales como densidad, presión, temperatura, viscosidad, etc. Aun cuando no hay una definición única de fluido perfecto, éste se puede definir como un sistema en el cual no hay conducción térmica ni viscosidad, o como lo describe equivalentemente Weinberg: como un fluido tal que en su sistema en reposo es isotrópico. En estas condiciones un fluido perfecto es descrito por la función densidad de energía y la densidad de presión.

Consideremos, en primer lugar, un gas de partículas en reposo relativo (polvo), así este sistema es descrito como un gas ideal con presión cero. Para un observador inercial todas las partículas se mueven con la misma velocidad, y así con la misma cuadrivelocidad U^α . Definamos, entonces, el cuadrivector flujo

$$N^\alpha = n U^\alpha \quad (5.36)$$

donde n es la densidad propia de partículas, i.e., la densidad de partículas medida en el sistema en reposo. Ahora, si todas las partículas tienen la misma masa en reposo m , la densidad de energía propia está dada por:

$$\rho = n m c^2 \quad (5.37)$$

La densidad de energía caracteriza completamente al fluido, pero la anterior ecuación es solamente válida en el sistema en reposo del fluido; así, para encontrar la expresión covariante de la densidad de energía (válida para cualquier observador inercial), recordemos que mc^2 es la componente temporal del cuadri-vector momentum de una partícula en su sistema en reposo, $p^\alpha = (mc, 0, 0, 0)$ y para este sistema $N^\alpha = nU^\alpha = (nc, 0, 0, 0)$. Por lo tanto, la densidad de energía propia corresponde a la componente 00 del tensor $\mathbf{p} \otimes \mathbf{N}$ medida en su sistema en reposo; definimos el tensor momentum-energía para el gas de polvo como:

$$T^{\alpha\beta} = p^\alpha N^\beta = nmU^\alpha U^\beta = \frac{\rho}{c^2} U^\alpha U^\beta \quad (5.38)$$

donde ρ es definida como la densidad de energía en el sistema en reposo. Para el caso más general de un fluido perfecto con presión, asumiremos la definición de Weinberg: el que es isotrópico en su sistema en reposo. Esto significa que $T^{\alpha\beta}$ es diagonal, es decir, no hay flujo neto de momentum en la dirección ortogonal. Además, sus componentes espaciales deben ser todas iguales, por isotropía: $T^{11} = T^{22} = T^{33}$. Si llamamos $T^{00} = \rho$ la densidad de energía, $T^{ii} = p$ la densidad de presión, tenemos que las componentes del tensor momentum-energía en el sistema en reposo están dadas por:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

la cual, para un sistema de referencia inercial cualquiera, se puede escribir en la forma (con $c = 1$):

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta} \quad (5.40)$$

donde $\eta^{\alpha\beta}$ es el tensor métrico de Minkowski.

La generalización para una variedad con métrica \mathbf{g} es directa,

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho)U^\alpha U^\beta + pg^{\alpha\beta} \quad (5.41)$$

El tipo de materia específico que se considere está determinado por la ecuación de estado del sistema, es decir $f(p, \rho) = 0$, una función que relaciona la densidad de energía y materia; por ejemplo, para un gas de polvo la ecuación de estado es $p = 0$.

Este tensor momentum-energía se puede encontrar a partir de una densidad lagrangiana. Siguiendo la definición de Weinberg, sea \mathbf{U} el campo de cuadrivelocidades y definamos la quadricorriente por $\mathbf{J} = \mu\mathbf{U}$, con μ la densidad de partículas. La ecuación de continuidad exige que $J_{;\alpha}^\alpha = 0$, y la densidad lagrangiana está dada por:

$$\mathcal{L} = -2\mu(1 + \varepsilon) \quad (5.42)$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ es el potencial elástico. La acción S es estacionaria cuando las líneas de flujo se varían, ajustando J para mantener la corriente conservada. Entonces la ecuaciones de Euler-Lagrange conducen a las ecuaciones de

movimiento para el fluido:

$$\begin{aligned}\rho_{;\alpha}U^\alpha + (\rho + p)U^\alpha_{;\alpha} &= 0 \\ (\rho + p)\dot{U}^\alpha &= -p_{;\beta}(g^{\alpha\beta} + U^\beta U^\alpha)\end{aligned}\quad (5.43)$$

donde $\rho = \mu(1 + \varepsilon)$ es la densidad de energía, $p = \mu^2 d\varepsilon/d\mu$ la densidad de presión, y $\dot{U}^\alpha = U^\alpha_{;\beta}U^\beta$. Así, la aceleración de las líneas de flujo \dot{U}^α es proporcional al gradiente de presión ortogonal a las líneas de flujo. A partir de la densidad lagrangiana obtenemos el tensor momentum-energía.

5.4. Ecuaciones de campo de Einstein

Hasta el presente la métrica \mathbf{g} no ha sido explícitamente dada. En la teoría especial de la relatividad, la cual no incluye los efectos gravitacionales, la métrica es plana, i.e., $\mathbf{g} = \eta$. En la discusión al comienzo del capítulo se vió cómo la fuerza de la gravedad, por su carácter universal, debe ser excluida como un campo de fuerzas en un espacio plano, si queremos mantener la idea que una partícula libre sigue “líneas rectas” o que la velocidad de la luz en el vacío es constante. Para mantener el principio de relatividad, es decir, la física es la misma para todos los observadores o, equivalentemente, las leyes de la física deben ser independientes del sistema de coordenadas, las ecuaciones de campo para determinar la métrica deben ser relaciones tensoriales, que involucran la materia a través del tensor momentum-energía, si queremos mantener el principio de equivalencia; es decir, si dos campos de materia contribuyen con la misma densidad de energía a un sistema, entonces las ecuaciones de campo para la métrica deben conducir al mismo resultado. Por el lado de la geometría, como Hilbert se lo sugirió a Einstein, el único objeto geométrico, salvo identidades o múltiplos, el cual está determinado por el tensor métrico y primeras derivadas de sus componentes, es el tensor de Riemann, o tensores derivados de ellos, y por lo tanto la única posibilidad es una combinación lineal del tensor de Ricci, el escalar curvatura y una constante, proporcional al tensor momentum-energía, dadas las condiciones que sobre él se imponen, que sea simétrico y que satisfaga el principio de conservación local, así:

Postulado 4-4 *La métrica sobre la variedad espacio-tiempo (M, g) está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein*

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (5.44)$$

$G = \text{constante de gravitación universal}$

$\Lambda = \text{constante cosmológica}$

Este es un sistema de 10 ecuaciones diferenciales acopladas no lineales para la métrica y sus primeras derivadas. Sin embargo, dado que la divergencia covariante de cada lado de las ecuaciones se satisface independientemente

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta}\right)_{;\alpha} = 0 = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}_{;\alpha} \quad (5.45)$$

entonces el número de ecuaciones independientes se reduce a seis. Este es el número correcto de ecuaciones, porque de las diez componentes independientes del tensor métrico, cuatro de ellas se pueden elegir arbitrariamente. Esto proviene del hecho que las componentes del tensor métrico son únicas, salvo una transformación de coordenadas.

Así, las ecuaciones de campo de Einstein determinan el tensor métrico, salvo la clase de equivalencia de difeomorfismos

$$\Theta : (\mathcal{M}, \mathbf{g}_1) \longrightarrow (\mathcal{M}, \mathbf{g}_2)$$

donde dos métricas definen el mismo espacio-tiempo si entre las variedades $(\mathcal{M}, \mathbf{g}_1)$ y $(\mathcal{M}, \mathbf{g}_2)$ existe un difeomorfismo.

Para establecer la relación entre las ecuaciones de campo de Einstein y la teoría de la gravitación universal de Newton, consideremos una partícula de prueba que se mueve lentamente (comparada con la velocidad de la luz) en un campo gravitacional débil. Si el campo es débil, la métrica se puede escribir en la forma ($c = 1$)

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}; \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (5.46)$$

Si U^α son las componentes de la cuadrivelocidad de la partícula, entonces

$$\frac{dx^0}{d\tau} \approx 1; \quad \frac{dx^i}{d\tau} \ll 1 \quad (5.47)$$

y de la ecuación de las geodésicas tenemos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \approx -\Gamma_{00}^i \quad (5.48)$$

Ahora, el coeficiente de la conexión está dado por

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} h_{00,i} - h_{0i,0} \quad (5.49)$$

donde la coma significa la derivada usual. Si el campo gravitacional es estacionario $h_{0i,0} = 0$, y con la notación $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, se obtiene

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} \quad (5.50)$$

que al compararla con la ecuación de Newton

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi \quad (5.51)$$

tenemos que

$$h_{00} = 2\phi + cte. \quad (5.52)$$

Puesto que el potencial gravitacional ϕ y h_{00} se anulan para grandes distancias, y reintroduciendo la velocidad de la luz, obtenemos

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (5.53)$$

El término $2\phi/c^2$ determina cuándo una región del espacio-tiempo es fuertemente curvada, por ejemplo

$2\phi/c^2$	<i>Sobre la superficie</i>
10^{-9}	<i>tierra</i>
10^{-6}	<i>sol</i>
10^{-4}	<i>enana blanca</i>
10^{-1}	<i>estrella neutrónica</i>
10^{-39}	<i>protón</i>

Capítulo 6

La solución de Schwarzschild

Karl Schwarzschild, tan sólo dos meses después de haberse publicado las ecuaciones de campo, encontró la primera solución analítica de las ecuaciones de campo, para el exterior de una distribución de materia estática y esféricamente simétrica. A partir de esta solución calculó el corrimiento del perihelio de mercurio y la desviación de un rayo de luz que pasa cerca del sol, confirmando los resultados previos obtenidos por Einstein en la aproximación posnewtoniana (aproximación de campo débil).

6.1. Métrica para simetría esférica

Consideremos una distribución esférica de masa m y busquemos una solución de las ecuaciones de campo de Einstein que describa la métrica en el exterior de la distribución, es decir, busquemos las componentes del tensor métrico

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (6.1)$$

tal que \mathbf{g} satisfaga las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0 \quad (6.2)$$

donde los índices griegos recorren de 0 a 3, esto es,

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (6.3)$$

y

$$x^0 = ct \quad (6.4)$$

La solución de este problema debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. Estática
2. Esféricamente simétrica

3. Asintóticamente (lejos de la distribución) se debe reducir a la métrica minkowskiana

Dada la simetría esférica del problema es útil trabajar en coordenadas espaciales esféricas

$$(r, \theta, \varphi) = (x^1, x^2, x^3) \quad (6.5)$$

eligiendo el origen de las coordenadas en el centro de la distribución de masa. La primera condición, métrica estática, significa que si \mathbf{g} es independiente del tiempo, entonces las componentes del tensor métrico deben ser invariantes si hacemos la transformación

$$x^0 \rightarrow -x^0 \quad (6.6)$$

lo que implica que las componentes del tensor métrico de la forma g_{0i} con $i = 1, 2, 3$ no deben aparecer. Así, el tensor métrico que estamos buscando debe ser de la forma

$$\mathbf{g} = g_{00}dx^0 \otimes dx^0 + g_{ij}dx^i \otimes dx^j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (6.7)$$

Introduciendo en forma explícita las coordenadas esféricas y la coordenada temporal $x^0 = ct$, y debido a la simetría esférica del problema, en el tensor métrico no deben aparecer términos espaciales de la forma $dr \otimes d\theta$, $dr \otimes d\varphi$ y $d\theta \otimes d\varphi$, y por lo tanto el tensor métrico toma la forma

$$\mathbf{g} = g_{00}c^2dt \otimes dt + g_{rr}dr \otimes dr + g_{\theta\theta}r^2d\theta \otimes d\theta + g_{\varphi\varphi}r^2\sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi \quad (6.8)$$

donde los coeficientes métricos g_{00} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$ y $g_{\varphi\varphi}$ son funciones solamente de la coordenada radial r . Veamos que las componentes métricas $g_{\theta\theta}$ y $g_{\varphi\varphi}$ deben ser iguales. Para este fin supongamos que hacemos un desplazamiento infinitesimal $\delta\theta$ con $\epsilon = r\delta\theta$ a partir del polo norte ($\theta = 0$) con t, r y φ constantes; entonces

$$ds^2 = g_{\theta\theta}\epsilon^2 \quad (6.9)$$

Si realizamos ahora el mismo desplazamiento pero en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) con idéntico r , $\epsilon = rd\varphi$, entonces

$$ds^2 = g_{\varphi\varphi}\epsilon^2 \quad (6.10)$$

y por lo tanto, dada la simetría esférica de la distribución de materia, se debe tener que $g_{\theta\theta} = g_{\varphi\varphi}$. Sea

$$d\Omega^2 = d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi \quad (6.11)$$

entonces el tensor métrico toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= g_{00}c^2dt \otimes dt + g_{rr}dr \otimes dr + g_{\theta\theta}r^2d\Omega^2 \\ &= g_{00}c^2dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}r^2d\Omega^2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

lo cual significa que faltan por determinar solamente tres funciones de r : $g_{00}(r)$, $g_{rr}(r)$ y $g_{\theta\theta}(r)$. Esta expresión se puede simplificar aún más reduciendo el problema solamente a dos funciones desconocidas, pues si se realiza el cambio de variable

$$r \longrightarrow \tilde{r} = \sqrt{-g_{\theta\theta}(r)r} \quad (6.13)$$

entonces

$$\begin{aligned} -g_{\theta\theta}r^2 &= \tilde{r}^2 \implies \\ 2\tilde{r}d\tilde{r} &= -r^2 \frac{dg_{\theta\theta}}{dr} dr - 2g_{\theta\theta}r dr \implies \\ dr &= -\frac{\tilde{r}}{g_{\theta\theta}r} \left(1 + \frac{r}{2g_{\theta\theta}} \frac{dg_{\theta\theta}}{dr}\right)^{-1} d\tilde{r} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Así

$$\begin{aligned} g_{rr}dr^2 &= -\frac{g_{rr}}{g_{\theta\theta}} \left(1 + \frac{r}{2g_{\theta\theta}} \frac{dg_{\theta\theta}}{dr}\right)^{-2} d\tilde{r}^2 \\ &= \tilde{g}_{rr}(\tilde{r}) d\tilde{r}^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Remplazando las ecuaciones de transformación anteriores en el tensor métrico 6.12, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= g_{00}c^2 dt^2 - \tilde{g}_{rr}(\tilde{r}) d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 d\Omega^2 \\ &= g_{00}c^2 dt^2 - g_{rr}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde se ha redefinido

$$\tilde{r} \longrightarrow r \quad (6.17)$$

y

$$\tilde{g}_{rr} \rightarrow g_{rr} \quad (6.18)$$

en la última igualdad, para regresar a la notación usual de la variable radial. De esta forma el problema se ha reducido a sólo dos funciones, las cuales se determinan a partir de las ecuaciones de campo de Einstein y las condiciones de frontera adecuadas. Dada la signatura de la métrica, $g_{00} > 0$ y $g_{rr} > 0$, se puede reescribir el tensor métrico en la siguiente forma:

$$\mathbf{g} = e^{h(r)} c^2 dt^2 - e^{g(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (6.19)$$

Las nuevas funciones a determinar, $h(r)$ y $g(r)$, deben satisfacer la condición asintótica

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} h(r) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

para obtener el límite minkowskiano de la condición 3. Las componentes del tensor métrico deben satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

6.2. Antes de remplazar los coeficientes métricos en este sistema de ecuaciones, veamos un teorema que nos permite simplificar los cálculos:

Teorema 5-1 *Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío sin constante cosmológica son equivalentes a la anulación de las componentes del tensor de Ricci, i.e.*

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0 \iff R_{\alpha\beta} = 0 \quad (6.21)$$

Demostración: (\Leftarrow) Si $R_{\alpha\beta} = 0$, entonces $R = 0$

(\Rightarrow) Si

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0$$

subiendo el primer índice covariante y contrayendo tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= R^\alpha_\alpha - \frac{1}{2}g^\alpha_\alpha R \\ &= R - 2R \\ &= -R \end{aligned}$$

entonces $R = 0$ y por lo tanto $R_{\alpha\beta} = 0$.

A partir de las condiciones de simetría del problema se pudo determinar la forma general y más simple del tensor métrico, antes de entrar en el problema de resolver las ecuaciones de campo, lo cual constituye un método usual de trabajo en física. Sin embargo, aún con esta métrica simplificada es necesario calcular 40 símbolos de Christoffel que aparecen en las ecuaciones de campo. Un método ágil que permite calcular las componentes no nulas de los símbolos de Christoffel es el método variacional (ecuaciones de Euler-Lagrange) para la ecuación de las geodésicas:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0 \quad (6.22)$$

las cuales contienen todos los símbolos de Christoffel y pueden ser obtenidas a partir del principio variacional

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int F ds \\ &= \delta \int g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} ds \end{aligned} \quad (6.23)$$

con las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} ; \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (6.24)$$

Así, para la métrica de Schwarzschild el elemento de distancia espacio-tiempo está dado por

$$F = e^{h(r)} (\dot{x}^0)^2 - e^{g(r)} (\dot{x}^1)^2 - r^2 (\dot{x}^2)^2 - r^2 \sin^2 \theta (\dot{x}^3)^2 \quad (6.25)$$

donde $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ y $x^3 = \varphi$.

Consideremos en primer lugar la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada temporal x^0 , y denotemos las derivadas con respecto a la coordenada radial por primas, así:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(2e^{h(r)} \dot{x}^0 \right) &= 0 \implies \\ \ddot{x}^0 + h(r) \dot{x}^1 \dot{x}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

La ecuación de las geodésicas correspondiente se obtiene a partir de la ecuación 6.22 para $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^0}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^0 \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} \\ &= \ddot{x}^0 + \Gamma_{00}^0 \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \Gamma_{01}^0 \dot{x}^0 \dot{x}^1 + \dots + \Gamma_{33}^0 \dot{x}^3 \dot{x}^3 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Entonces, comparando las dos últimas ecuaciones, se tiene que los únicos símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} h'(r) \quad (6.28)$$

Para la coordenada r la ecuación de Euler-Lagrange está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(-2e^{g(r)} \dot{x}^1 \right) &= -2g'(r) e^{g(r)} (\dot{x}^1)^2 - 2e^{g(r)} \ddot{x}^1 \\ &= h(r) e^{h(r)} (\dot{x}^0)^2 - g'(r) e^{g(r)} (\dot{x}^1)^2 \\ &\quad - 2r (\dot{x}^2)^2 - 2r \sin^2 \theta (\dot{x}^3)^2 \end{aligned} \quad (6.29)$$

mientras que la ecuación geodésica para $\alpha = 1$ es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^1}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^1 \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} \\ &= \ddot{x}^1 + \Gamma_{00}^1 \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \Gamma_{01}^1 \dot{x}^0 \dot{x}^1 + \dots + \Gamma_{33}^1 \dot{x}^3 \dot{x}^3 \end{aligned} \quad (6.30)$$

y comparándolas, los símbolos de Christoffel no nulos están dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} h'(r) e^{h(r)-g(r)} \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2} g'(r) \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-g(r)} \\ \Gamma_{33}^1 &= -r e^{-g(r)} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (6.31)$$

Procediendo de forma similar para las coordenadas θ y φ los símbolos no

nulos que se obtienen son:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \varphi \\
 \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Remplazando los símbolos de Christoffel obtenidos en las ecuaciones de campo en el vacío:

$$\begin{aligned}
 0 &= R_{\beta\delta} = R_{\beta\sigma\delta}^{\sigma} \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{\delta\beta}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma_{\sigma\beta}^{\sigma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} \Gamma_{\delta\beta}^{\mu} - \Gamma_{\mu\delta}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu}
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

obtenemos

$$R_{\beta\delta} \equiv 0 \quad \text{si} \quad \beta \neq \delta \tag{6.34}$$

y de los términos diagonales

$$R_{\beta\beta} = 0$$

se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$h'' + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h'g' + \frac{2}{r}h' = 0 \tag{6.35}$$

$$h'' + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h'g' - \frac{2}{r}g' = 0 \tag{6.36}$$

$$(re^{-g})' - 2e^{-g} - 1 + re^{-g} \left(\frac{h' + g'}{2} + \frac{2}{r} \right) = 0 \tag{6.37}$$

$$\sin^2 \theta ((re^{-g})' - 1) = 0 \tag{6.38}$$

Restando las ecuaciones 6.35 y 6.36 se obtiene

$$h' + g' = 0 \tag{6.39}$$

entonces

$$h + g = cte. \tag{6.40}$$

y de la condición asintótica se tiene

$$h + g = 0 \tag{6.41}$$

Con esta condición la ecuación 6.36 toma la forma

$$g'' - g'^2 + \frac{2}{r}g' = 0 \tag{6.42}$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden se puede escribir como:

$$(re^{-g})'' = 0 \tag{6.43}$$

la cual admite una primera integral

$$(re^{-g})' = K_1 \quad (6.44)$$

Antes de integrar esta ecuación, veamos que las otras dos ecuaciones diferenciales 6.37 y 6.38 sean consistentes con lo encontrado hasta ahora. De la ecuación 6.37 se obtiene

$$\begin{aligned} (re^{-g})' - 2e^{-g} - 1 + re^{-g} \left(\frac{0}{2} + \frac{2}{r} \right) &= 0 \implies \\ (re^{-g})' - 2e^{-g} - 1 + 2e^{-g} &= 0 \implies \\ (re^{-g})' &= 1 \end{aligned} \quad (6.45)$$

lo que implica que la constante de integración $K_1 = 1$. La ecuación 6.38 no da información adicional pues se satisface idénticamente debido a la última relación encontrada (ecuación 6.45). Integrando la ecuación 6.45 se obtiene

$$e^{-g(r)} = e^{h(r)} = 1 - \frac{K_2}{r} \quad (6.46)$$

donde K_2 es una constante de integración. Así, la métrica de Schwarzschild toma la forma

$$g = \left(1 - \frac{K_2}{r} \right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{K_2}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (6.47)$$

Notemos que hasta el presente en la deducción de la métrica de Schwarzschild sólo se ha utilizado la simetría de la distribución de materia y el carácter asintótico, pero no la masa total de la distribución ni su radio. Es de esperar que la constante de integración K_2 involucre, de alguna manera, esta información que caracteriza la distribución de materia que produce el campo gravitacional en su exterior.

Para calcular esta constante se puede utilizar el siguiente razonamiento: la solución de Schwarzschild es válida para el exterior de cualquier distribución esférica de materia, y por lo tanto debe describir el campo gravitacional de cualquier cuerpo celeste usual conocido, tal como el Sol o la Tierra, y se espera que esta métrica represente los fenómenos que conocemos, y en particular se espera que en el límite de bajas velocidades y campos gravitacionales débiles los resultados obtenidos se aproximen a los encontrados por la ley de gravitación universal de Newton. Así se puede trabajar la aproximación posnewtoniana, vista en el capítulo anterior, y utilizar la ecuación 5.53 que relaciona el potencial gravitacional newtoniano con la componente g_{00} del tensor métrico. Por lo tanto, dado que el potencial gravitacional newtoniano en el exterior de una distribución esférica de masa m está dado por

$$\phi(r) = -\frac{Gm}{r} \quad (6.48)$$

y la componente para la métrica de Schwarzschild (ecuación 6.47) es

$$g_{00} = 1 - \frac{K_2}{r} \quad (6.49)$$

entonces

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + \frac{2\phi}{c^2} \implies \\ 1 - \frac{K_2}{r} &= 1 - \frac{2Gm}{rc^2} \implies \\ K_2 &= \frac{2Gm}{c^2} \end{aligned} \quad (6.50)$$

De esta manera la métrica de Schwarzschild está dada por

$$\mathbf{g} = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (6.51)$$

El método utilizado para calcular la constante de integración K_2 , aún cuando conduce al resultado correcto, deja la pregunta abierta de la interpretación física de la masa como fuente del campo, a través del tensor momentum-energía. Para este fin es necesario desarrollar el concepto de las leyes de conservación para el campo gravitacional. Este campo de trabajo está abierto a investigación y se dejará para un capítulo posterior su formulación.

6.2. Teorema de Birkhoff

En este punto es importante enfatizar en que el radio de la distribución no debe aparecer en forma explícita en la solución, debido a la simetría esférica del problema. Es decir, la solución de Schwarzschild obtenida es válida solo para $r > R$, donde R es el radio de la distribución, y de manera similar a la situación que se presenta en electrostática, el campo eléctrico en el exterior de una distribución esférica de carga, para puntos exteriores, se comporta como el campo de una carga puntual, es decir como si toda la carga estuviera concentrada en el centro, y la solución no involucra, en forma explícita, el radio de la distribución. Esta situación se puede ver mejor en el siguiente resultado debido a Birkhoff, el cual establece que la solución para el exterior de una distribución de masa esférica es la de Schwarzschild, independientemente de que esta distribución esté variando radialmente, es decir, si la distribución está colapsando o expandiéndose. Para ver esto, consideremos una situación en la cual la distribución esférica de masa total m está variando su radio en el tiempo, i.e., $R = R(t)$, y busquemos una solución de las ecuaciones de campo de Einstein para el exterior de esta distribución, es decir, en el vacío. Dado que los elementos de simetría utilizados para construir la forma general de la solución buscada (ecuación 6.19) no se ven afectados por el comportamiento del radio de la distribución, podemos asumir que la métrica buscada tiene la forma general

$$\mathbf{g} = e^{h(r,t)} c^2 dt^2 - e^{g(r,t)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (6.52)$$

pero ahora las funciones $h(r, t)$ y $g(r, t)$ deben depender del tiempo. Si se procede como antes, es decir, si se introduce esta métrica en las ecuaciones de campo,

se llega a una relación similar a la ecuación 6.39:

$$h' + g' = 0 \quad (6.53)$$

donde la prima significa derivada respecto a la coordenada r , entonces integrando

$$h + g = cte(t) = \lambda(t) \quad (6.54)$$

donde ahora la constante de integración puede depender del tiempo. Así, continuando con este procedimiento se obtiene finalmente

$$g = e^{\lambda(t)} \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (6.55)$$

Si se redefine la coordenada temporal como

$$\tilde{t} = \int e^{\frac{1}{2}\lambda(t)} dt \quad (6.56)$$

entonces la métrica toma la forma de Schwarzschild, es decir, la métrica en el exterior de la distribución sólo depende de la masa total, y no del radio de la distribución, así este radio sea o no una función del tiempo.

Este importante resultado significa que la solución de Schwarzschild obtenida es la única solución que representa la métrica en el vacío producida por cualquier distribución de materia con simetría esférica.

6.3. Propiedades de la métrica

La métrica de Schwarzschild representa la solución a las ecuaciones de campo de Einstein para el exterior de una distribución esférica de materia, y por esta razón es válida para $r > R$, donde R es el radio de la distribución. Sin embargo, en la expresión para la métrica (ecuación 6.51) aparece una singularidad coordenada, en el sentido que el coeficiente de $(dx^0)^2$ se anula y el coeficiente de dr^2 diverge a $+\infty$, cuando $r \rightarrow 2Gm/c^2$ por la derecha. Este valor de la coordenada radial, denotado por r_s , se conoce como radio de Schwarzschild de la distribución

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2} \quad (6.57)$$

el cual sólo depende de la masa total y por lo tanto es un parámetro que caracteriza la distribución, independientemente del radio R . Si se calcula el valor de este parámetro para un cuerpo como la Tierra, tenemos

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{2 \times 6.67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \times 5.9742 \times 10^{24} \text{kg}}{(2.99792458 \times 10^8 \text{ms}^{-1})^2} \\ &= 8.8708 \times 10^{-3} \text{m} \end{aligned} \quad (6.58)$$

es decir, del orden de 9 milímetros, que en comparación con el radio de la Tierra, $R_T = 6.5 \times 10^6 \text{m}$, es despreciable. Esto muestra por qué esta singularidad no

es relevante para los objetos celestes usuales. De hecho, Schwarzschild notó este problema que surgía en su solución y calculó de nuevo la métrica para una distribución de masa con una densidad de energía constante y obtuvo que el radio de la distribución debería ser mayor a $9r_s/8$, resultado que lo dejó satisfecho pues aun en este caso la singularidad no jugaba papel alguno.

En 1923 Birkhoff mostró que una solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo en el vacío era necesariamente estática para $r > r_s$ y por lo tanto la solución para cualquier distribución esférica de masa no estática era la de Schwarzschild si $r > r_s$; por esta razón, el argumento que utilizó Schwarzschild no es válido. Sin embargo, dado que r_s es muy pequeño no se esperaba encontrar una distribución de materia donde el radio de la distribución R fuera menor que r_s . Pues esto implicaba, por ejemplo, que un cuerpo como la Tierra tuviera una densidad del orden de

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{3 \times 5.9742 \times 10^{24} \text{kg}}{4\pi (8.8708 \times 10^{-3} \text{m})^3} \\ &= \frac{2.0 \times 10^{30}}{\text{m}^3} \text{kg}\end{aligned}\tag{6.59}$$

lo cual no se veía factible para la materia ordinaria que se conocía.

Un resultado conocido de la ley de gravitación universal de Newton, debido al comportamiento de la fuerza gravitacional con el inverso del cuadrado de la distancia, es el hecho de que la fuerza sobre una masa en el interior de un cascarón esférico de materia se anula. Para ver qué sucede en el caso de la relatividad general, consideremos una distribución esférica de materia de radio R , con un hueco interior concéntrico de radio $a < R$; entonces busquemos una solución de las ecuaciones de campo en el interior de esta cavidad. Es claro que por simetría se puede seguir el mismo procedimiento que se vió para encontrar la solución de Schwarzschild, y podemos proponer llevar los mismos argumentos hasta plantear la forma general de la solución como

$$\mathbf{g} = e^{h(r)} c^2 dt^2 - e^{g(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2\tag{6.60}$$

La primera diferencia que surge con respecto a la solución de Schwarzschild es en la condición asintótica, la cual ya no es más aplicable en el presente caso y por lo tanto en la ecuación 6.40,

$$h + g = \tilde{k} = \text{cte}.\tag{6.61}$$

la constante \tilde{k} ya no es cero. Así, continuando con el procedimiento se encuentra (ecuación 6.46)

$$e^{-g(r)} = e^{-\tilde{k}} e^{h(r)} = 1 - \frac{K_2}{r}\tag{6.62}$$

Para hallar la solución en el interior del cascarón esférico se puede comparar la solución encontrada en la aproximación posnewtoniana con el potencial clásico, teniendo en cuenta que el potencial gravitacional newtoniano en el interior

del cascarón es constante (i.e., la fuerza es cero sobre la partícula de prueba); entonces

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + \frac{2\phi}{c^2} = \text{cte.} \implies \\ g_{00} &= e^{\tilde{k}} \left(1 - \frac{K_2}{r} \right) \end{aligned} \quad (6.63)$$

lo que implica que $K_2 = 0$, y por lo tanto la métrica toma la forma

$$\mathbf{g} = e^{\tilde{k}} c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (6.64)$$

la cual, salvo un factor de escala temporal que depende del potencial constante en el interior del cascarón, se reduce a la métrica minkowskiana. Este resultado representa la versión relativista de la anulación de la fuerza gravitacional en el interior de un cascarón esférico de materia. Esta situación se puede entender como una consecuencia del comportamiento con el inverso al cuadrado de la distancia de la fuerza de gravitación universal. Este resultado justifica ciertas consideraciones newtonianas que se hacen en cosmología.

Capítulo 7

Pruebas de la relatividad general

En esta sección se analizará el movimiento de partículas materiales de prueba y de rayos de luz (fotones) en el campo de una distribución esférica de masa, y nos concentraremos en dos efectos particulares: el corrimiento del perihelio del planeta Mercurio y la desviación de un rayo de luz que pasa muy cerca de la superficie solar. Estos resultados constituyen los paradigmas históricos de las pruebas observacionales de la teoría general de la relatividad.

7.1. Corrimiento del perihelio de Mercurio

Consideremos en primer lugar el cálculo de las geodésicas como de tiempo para la métrica de Schwarzschild, las cuales describen las trayectorias seguidas por partículas materiales (i.e., de masa propia diferente de cero). Estas geodésicas se pueden deducir a partir del elemento de línea por el principio variacional 6.23:

$$F = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} (\dot{x}^1)^2 - r^2 (\dot{x}^2)^2 - r^2 \sin^2 \theta (\dot{x}^3)^2 \quad (7.1)$$

donde

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \varphi) \quad (7.2)$$

y

$$\dot{x}^\mu = dx^\mu/ds$$

Entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \quad (7.3)$$

Considérese primero la ecuación para la coordenada $x^2 = \theta$, entonces

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \quad (7.4)$$

y por lo tanto, si las condiciones iniciales del movimiento son tales que $\theta(0) = \pi/2$ y $\dot{\theta}(0) = 0$, entonces $\theta(t) = \pi/2$, es decir, si el cuerpo se está moviendo inicialmente en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ con $\dot{\theta}(0) = 0$, entonces el movimiento continúa siempre en este plano. Por esta razón, siempre se pueden elegir los ejes coordenados espaciales con el eje z normal al plano del movimiento. De esta forma se asumirá que $\theta = \pi/2$ y por lo tanto la funcional F se reduce a

$$F = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (7.5)$$

A partir de esta funcional, las ecuaciones de Euler-Lagrange para las coordenadas t y φ toman la forma

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{d}{ds} \left(c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \right) = 0 \quad (7.7)$$

Estas ecuaciones implican entonces que

$$r^2 \dot{\varphi} = \mathcal{L} = cte. \quad (7.8)$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = \mathcal{E} = cte. \quad (7.9)$$

Para encontrar la ecuación para la coordenada radial, dividamos (formalmente) el elemento de arco (distancia espacio-tiempo) por ds , entonces

$$1 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (7.10)$$

al remplazar las ecuaciones 7.8 y 7.9 en la ecuación anterior se obtiene

$$1 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} \quad (7.11)$$

o equivalentemente

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2}\right) = \mathcal{E}^2 \quad (7.12)$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$\dot{r}^2 + V(r) = \mathcal{E}^2 \quad (7.13)$$

donde el potencial efectivo $V(r)$ está dado por

$$V(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2}\right) \quad (7.14)$$

Las ecuaciones 7.8 y 7.9 representan leyes de conservación pues para la métrica de Schwarzschild $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial \varphi$ son campos vectoriales de Killing. Este resultado se puede ver del siguiente teorema:

Teorema 6-1 Sea $\gamma(s)$ una geodésica con vector tangente $u = (\partial/\partial s) |_\gamma$ y ζ un campo vectorial de Killing, entonces

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \zeta) = \text{cte.}$$

a lo largo de la geodésica $\gamma(s)$.

Demostración: Calculemos la derivada covariante del tensor métrico a lo largo de la curva $\gamma(s)$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{\partial s} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \zeta) \right) \Big|_\gamma &= \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \zeta) \\ &= (g_{\mu\nu} u^\mu \zeta^\nu)_{;\sigma} u^\sigma \\ &= g_{\mu\nu} u^\mu_{;\sigma} \zeta^\nu u^\sigma + g_{\mu\nu} u^\mu \zeta^\nu_{;\sigma} u^\sigma \\ &= \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}, \zeta) + \mathbf{g}(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \zeta) \end{aligned}$$

como la curva γ es una geodésica con vector tangente \mathbf{u} , por definición $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \mathbf{0}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \zeta) &= g_{\mu\nu} u^\mu \zeta^\nu_{;\sigma} u^\sigma \\ &= u^\mu u^\sigma \zeta_{\nu;\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (u^\mu u^\sigma \zeta_{\mu;\sigma} + u^\sigma u^\mu \zeta_{\sigma;\mu}) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho que los índices μ y σ son mudos. Dado que ζ es un campo vectorial de Killing satisface la ecuación

$$\zeta_{\mu;\sigma} + \zeta_{\sigma;\mu} = 0$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \zeta) &= \frac{1}{2} (u^\mu u^\sigma \zeta_{\mu;\sigma} + u^\mu u^\sigma \zeta_{\sigma;\mu}) \\ &= \frac{1}{2} u^\mu u^\sigma (\zeta_{\mu;\sigma} + \zeta_{\sigma;\mu}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual demuestra el teorema.

Así, para el caso de la métrica de Schwarzschild se tiene que los vectores de Killing $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial \varphi$ tienen componentes $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ respectivamente; por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \partial/\partial t) &= g_{00} u^0 \\ &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dx^0}{ds} \\ &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \\ &= \text{cte.} \end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{u}, \partial/\partial\varphi) &= g_{33}u^3 \\
&= -r^2 \frac{dx^3}{ds} \\
&= -r^2 \dot{\varphi} \\
&= cte.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Aquí se está interesado en la órbita de la partícula de prueba $r = r(\varphi)$, entonces

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \tag{7.17}$$

y de las ecuaciones 7.8 y 7.13 se obtiene

$$\frac{\mathcal{L}^2}{r^4} r' = \mathcal{E}^2 - V(r) \tag{7.18}$$

Para integrar esta ecuación se realiza el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{1}{r} \implies r' = -\frac{u'}{u^2} \tag{7.19}$$

entonces

$$u'^2 + u^2 = \frac{\mathcal{E}^2 - 1}{\mathcal{L}^2} + \frac{r_s}{\mathcal{L}^2} u + r_s u^3 \tag{7.20}$$

diferenciando con respecto a φ se tiene

$$\begin{aligned}
2u'u' + 2uu' - \frac{r_s}{\mathcal{L}^2} u' - 3r_s u^2 u' &= 0 \implies \\
2u' \left(u' + u - \frac{r_s}{2\mathcal{L}^2} - \frac{3}{2} r_s u^2 \right) &= 0
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Una solución de esta ecuación corresponde a movimiento circular, i.e., $u' = 0$ implica $r = cte.$, y las otras soluciones se obtienen a partir de la ecuación diferencial

$$u' + u - \frac{r_s}{2\mathcal{L}^2} - \frac{3}{2} r_s u^2 = 0 \tag{7.22}$$

Si se compara esta ecuación con la obtenida en mecánica newtoniana

$$u' + u - \frac{Gm}{L^2} = 0 \tag{7.23}$$

donde

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \tag{7.24}$$

y notando que $r^2\dot{\varphi} = \mathcal{L}$, la relación entre las dos ecuaciones es

$$\begin{aligned}
 \frac{r_s}{2\mathcal{L}^2} &= \frac{Gm}{c^2\mathcal{L}^2} \\
 &= \frac{Gm}{c^2(r^2\dot{\varphi})^2} \\
 &= \frac{Gm}{c^2\left(r^2\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} \\
 &= \frac{Gm}{c^2\left(r^2\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2} \\
 &= \frac{Gm}{\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \\
 &= \frac{Gm}{L^2}
 \end{aligned} \tag{7.25}$$

donde se ha utilizado la aproximación $ds \simeq cdt$ válida para velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Así, teniendo en cuenta la definición del radio de Schwarzschild $r_s = 2Gm/c^2$, se tiene que $c\mathcal{L} = L$. Se observa entonces que la ecuación relativista contiene el término adicional $3/2r_s u^2$, el cual, para el caso de la órbita de Mercurio, es pequeño comparado con el término $r_s/2\mathcal{L}^2$, pues tomando en cuenta que $ds \simeq cdt$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{3/2r_s u^2}{r_s/2\mathcal{L}^2} &= 3\mathcal{L}^2 u^2 \\
 &= 3\frac{1}{r^2}(r^2\dot{\varphi})^2 \\
 &\simeq \frac{3}{c^2}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\
 &\simeq 3\frac{v_\perp^2}{c^2} \\
 &\sim 7,7 \times 10^{-8}
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

donde v_\perp es la velocidad de Mercurio perpendicular al radio vector. Por esta razón, se puede resolver la ecuación de movimiento relativista para la órbita de Mercurio, tratando el término $3/2r_s u^2$ como una perturbación. La aproximación de orden cero (newtoniana) está dada por

$$u^{(0)} = \frac{r_s}{2\mathcal{L}^2} (1 + e \cos \varphi) \tag{7.27}$$

donde la excentricidad e está definida como

$$a(1 - e^2) = \frac{2\mathcal{L}^2}{r_s} \tag{7.28}$$

siendo a el semi-eje mayor de la órbita. Introduciendo esta solución de orden cero en la ecuación diferencial para la órbita (ecuación 7.22) se tiene

$$u' + u = \frac{r_s}{2\mathcal{L}^2} + \frac{3r_s^3}{8\mathcal{L}^4} (1 + e \cos \varphi)^2 \quad (7.29)$$

Para encontrar la solución a esta ecuación diferencial no homogénea, nótese que las siguientes tres ecuaciones diferenciales

$$u' + u = \begin{cases} K \\ K \cos \varphi \\ K \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (7.30)$$

poseen las soluciones particulares

$$\begin{aligned} & K \\ & \frac{1}{2}K\varphi \sin \varphi \\ & \frac{1}{2}K - \frac{1}{6}K \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Puesto que la solución perturbativa u que se está buscando es de la forma $u = u^{(0)} + u^{(1)}$, donde $u^{(1)}$ es la solución de la ecuación 7.29, entonces de las tres soluciones particulares la primera $K = cte$ no es de interés, pues solamente cambia los parámetros de la órbita no perturbada, y la tercera solución $\frac{1}{2}K - \frac{1}{6}K \cos(2\varphi)$ tampoco es interesante pues es periódica y por lo tanto no es observable. Así, la solución que presenta una perturbación interesante a la órbita no perturbada es la segunda, pues lleva a un cambio secular de la órbita. De esta forma la solución que se está interesado corresponde a la ecuación diferencial

$$u' + u = \frac{r_s}{2\mathcal{L}^2} + \frac{3r_s^3}{4\mathcal{L}^4} e \cos \varphi \quad (7.32)$$

la cual se obtiene a partir de la ecuación 7.29 manteniendo solamente el término en $\cos \varphi$. La solución a esta ecuación diferencial está dada por

$$u = \frac{r_s}{2\mathcal{L}^2} \left(1 + e \cos \varphi + \frac{3r_s^2}{4\mathcal{L}^2} e \varphi \sin \varphi \right) \quad (7.33)$$

Teniendo en cuenta que el término $3r_s^2/4\mathcal{L}^2$ es pequeño para órbitas planetarias, pues, e.g.,

$$\begin{aligned} \frac{3r_s^2}{4\mathcal{L}^2} &= \frac{3r_s^2}{4(r^2\dot{\varphi})^2} \\ &= \frac{3r_s^2}{4(r^2\dot{\varphi})^2} \\ &\simeq \frac{3r_s^2 c^2}{4r^2 \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2} \\ &\sim 7 \times 10^{-8} \end{aligned} \quad (7.34)$$

para Mercurio, entonces se puede reescribir la ecuación 7.33 en la forma

$$u = \frac{r_s}{2\mathcal{L}^2} \left(1 + e \cos \left(\varphi - \frac{3r_s^2}{4\mathcal{L}^2} \varphi \right) \right) \quad (7.35)$$

El término $3r_s^2\varphi/4\mathcal{L}^2$ introduce una aperiodicidad en la órbita del planeta, la cual tiene como consecuencia un corrimiento en el perihelio de la órbita. El perihelio de una órbita sucede cuando r es un mínimo, o equivalentemente u es un máximo. Así, u es máximo cuando

$$\varphi \left(1 - \frac{3r_s^2}{4\mathcal{L}^2} \right) = 2\pi n; \quad n \in \mathbb{N} \quad (7.36)$$

entonces

$$\varphi \simeq \left(1 + \frac{3r_s^2}{4\mathcal{L}^2} \right) 2\pi n \quad (7.37)$$

y por lo tanto perihelios sucesivos ocurren a intervalos de

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(1 + \frac{3r_s^2}{4\mathcal{L}^2} \right) \quad (7.38)$$

y así el corrimiento del perihelio por revolución para la órbita de Mercurio es

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= 2\pi \frac{3r_s^2}{4\mathcal{L}^2} \\ &= 42.89'/siglo \end{aligned} \quad (7.39)$$

El valor medido para Mercurio es de $42.6' \pm 1.0'/siglo$.

7.2. Desviación de la luz por el sol

Para describir las geodésicas nulas el parámetro s no es apropiado puesto que $ds = 0$. Sea q un parámetro cualquiera, entonces la ecuación de las geodésicas se puede obtener a partir del principio variacional

$$\delta \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\nu}{dq} dq = 0 \quad (7.40)$$

Así como se procedió en la sección anterior para obtener las trayectorias de partículas, se puede restringir, sin pérdida de generalidad, el movimiento de los rayos de luz al plano $\theta = \pi/2$. Entonces las ecuaciones para las coordenadas t y φ están dadas por

$$r^2 \dot{\varphi} = cte. = \tilde{h} \quad (7.41)$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \dot{t} = cte. = \tilde{L} \quad (7.42)$$

La ecuación para la coordenada r se obtiene a partir de la condición $ds = 0$ válida para geodésicas nulas, así:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} c^2 \tilde{L}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\tilde{h}^2}{r^2} = 0 \quad (7.43)$$

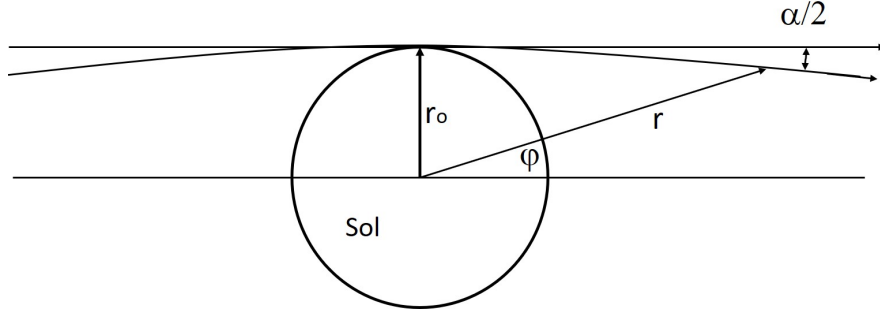


Figura 7-1: Desviación de la luz por el Sol

Eliminando el parámetro q , y haciendo el cambio $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$, la ecuación anterior se transforma en

$$c^2 \tilde{L}^2 - \tilde{h}^2 u^2 - \tilde{h}^2 u^2 (1 - r_s u) = 0 \quad (7.44)$$

y diferenciando esta ecuación con respecto a φ , se tiene

$$u' \left(u' + u - \frac{3r_s}{2} u^2 \right) = 0 \quad (7.45)$$

Descartando la solución $u = cte.$ se obtiene finalmente

$$u' + u = \frac{3r_s}{2} u^2 \quad (7.46)$$

Puesto que se está interesado en la trayectoria de rayos de luz en el campo del sol, y en particular para rayos de luz que pasan cerca de la superficie solar, el término $3r_s u/2$ es pequeño

$$\frac{3r_s}{2} u \simeq 10^{-6} \quad (7.47)$$

y por lo tanto se puede considerar el término $3r_s u^2/2$ como una perturbación; así, la solución a la ecuación no perturbada

$$u' + u = 0 \quad (7.48)$$

está dada por

$$u^{(0)} = A \cos(\varphi + \delta) \quad (7.49)$$

con A y δ constantes de integración. Esta solución representa una línea recta (no hay desviación) y si se escoge el origen de los ejes en el centro del sol, se considera un rayo proveniente de $y \rightarrow -\infty$, y se define como $x_{\min} = r_0$ el punto de máximo acercamiento (que coincide con el parámetro de impacto), entonces la solución no perturbada se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \frac{1}{r_0} \cos \varphi \quad \Longleftrightarrow \\ r \cos \varphi &= r_0 \end{aligned} \quad (7.50)$$

La solución a primer orden en teoría de perturbaciones de la ecuación 7.46 se puede escribir como

$$u = u^{(0)} + \frac{3r_s}{2}v \quad (7.51)$$

donde v satisface la ecuación

$$\begin{aligned} v' + v &= \left(u^{(0)}\right)^2 \iff \\ v' + v &= \frac{1}{2r_0} (1 + \cos 2\varphi) \end{aligned} \quad (7.52)$$

cuya solución es

$$v = \frac{2}{3r_0^2} - \frac{1}{3r_0^2} \cos^2 \varphi \quad (7.53)$$

y por lo tanto la solución hasta términos de orden r_s toma la forma

$$u = \frac{1}{r_0} \cos \varphi - \frac{r_s}{2r_0^2} \cos^2 \varphi + \frac{r_s}{r_0^2} \quad (7.54)$$

El efecto de la perturbación es producir una desviación global de la trayectoria. El punto de máximo acercamiento está dado para $\varphi = 0$, entonces

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{r_0}{1 + \frac{r_s}{2r_0}} \\ &\simeq r_0 - \frac{r_s}{2} \end{aligned} \quad (7.55)$$

Las asíntotas de la trayectoria corresponden a los valores de φ para los cuales $r \rightarrow \infty$ o $u \rightarrow 0$; así,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} \cos \varphi_\infty - \frac{r_s}{2r_0^2} \cos^2 \varphi_\infty + \frac{r_s}{r_0^2} &= 0 \implies \\ \cos^2 \varphi_\infty - \frac{2r_0}{r_s} - 2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.56)$$

entonces

$$\cos \varphi_\infty = \frac{r_0}{r_s} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2r_s^2}{r_0^2}} \right] \quad (7.57)$$

Para que el $\cos \varphi_\infty \leq 1$ se toma el signo negativo y se expande el radical hasta términos de primer orden; entonces

$$\begin{aligned} \cos \varphi_\infty &\simeq \frac{r_0}{r_s} \left(1 - 1 - \frac{r_s^2}{r_0^2} \right) \\ &= -\frac{r_s}{r_0} \end{aligned} \quad (7.58)$$

Por lo tanto el ángulo de deflexión total está dado por

$$\alpha = \frac{2r_s}{r_0} = \frac{4Gm}{c^2 r_0} \quad (7.59)$$

Para el caso de un rayo de luz que pasa muy cerca del sol, se obtiene para la desviación total (tomando r_0 el radio del sol)

$$\alpha = 1,75'' \quad (7.60)$$

La primera observación directa de este efecto la realizó Eddington en 1919 aprovechando el eclipse total de sol.

Para las primeras observaciones de este efecto se utilizaban placas fotográficas de estrellas cercanas, comparando dos imágenes tomadas con seis meses de diferencia. El error observacional debido a esta técnica era apreciable, con un rango de valores entre $1,5''$ y $3''$. En la actualidad, utilizando técnicas interferométricas (*long-base-line*) se alcanzan precisiones del orden de las milésimas de segundo de arco.

Es importante anotar que la predicción de la desviación de la luz por un cuerpo masivo como el sol ya se había planteado en el contexto de la gravedad newtoniana. En efecto, en el modelo newtoniano corpuscular de la luz se espera que, al igual que cualquier objeto masivo, sea afectado por un campo gravitacional. Dada la equivalencia entre masa inercial y gravitacional, todos los cuerpos, independientemente de su masa, son desviados de la misma forma por la gravedad. Mitchell en 1800 calculó que un rayo de luz que pase cerca de la superficie solar desviaba su trayectoria un ángulo dado por

$$\alpha = \frac{2Gm}{c^2 r_0} \quad (7.61)$$

Einstein en 1911 repitió este cálculo con gravedad euclidea, teniendo en cuenta la equivalencia masa-energía para las ondas electromagnéticas, y obtuvo el mismo resultado que Mitchell. Nótese que la predicción clásica (newtoniana) es la mitad de la predicción en relatividad general, lo cual es un hecho muy significativo, pues determina un efecto que no es tan sólo una pequeña corrección a los cálculos clásicos (como es el caso que se verá para órbitas planetarias) y manifiesta en forma explícita los efectos de curvatura del espacio.

La primera observación realizada por Eddington en 1919, debido al error observacional tan grande (rango entre $1,5''$ y $3''$), no se podría considerar una prueba contundente de la relatividad general de Einstein, en el sentido de probar la predicción de $1,75''$. Sin embargo, esta observación de 1919 es considerada una de las pruebas clásicas de la relatividad general. Esta situación se puede entender en el sentido que la expedición de 1919 liderada por Eddington tenía como objetivo primordial determinar si existía o no el fenómeno de desviación de la luz por un campo gravitacional, y teniendo en cuenta que la predicción newtoniana es la mitad que la propuesta por Einstein, el experimento sí podía decidir sobre estas dos posibilidades.

La desviación de la luz por un cuerpo masivo, y en particular el resultado obtenido por Einstein del ángulo de desviación de la luz por un cuerpo esféricamente simétrico

$$\alpha_E = \frac{4Gm}{c^2 r_0}$$

llamado ángulo de Einstein, es el punto de partida para estudiar lentes gravitacionales, un campo de aplicación de la relatividad general que ha cobrado recientemente una gran importancia para la astronomía observacional.

Capítulo 8

Colapso gravitacional

En el capítulo anterior, en la sección sobre características de la solución de Schwarzschild, se vió que la aparente singularidad que presenta la métrica para $r = r_s$ no se consideraba significativa, pues esto implicaba densidades de materia extremadamente altas que no se esperaba que se presentaran en el universo, como lo estableció Schwarzschild.

En este capítulo se presentarán algunos resultados sobre el comportamiento de la métrica en el interior de una distribución esférica de materia y se analizarán sus consecuencias. En particular, se verá que en relatividad general se predice que bajo ciertas condiciones (densidad crítica) el colapso es inevitable. Se estudiarán las propiedades más significativas de los agujeros negros y se expondrán los resultados más importantes sobre el comportamiento de una partícula de prueba en el campo de un agujero negro.

8.1. El tensor momentum-energía

Consideremos en primer lugar el modelo más simple de fluido (campo de materia) constituido por partículas no interactuantes y sobre las cuales no actúa fuerza externa y trabajemos inicialmente en el contexto de la teoría especial de la relatividad. Describir físicamente el fluido, significa conocer la trayectoria en función del tiempo de un elemento de masa de este fluido medida por algún observador inercial. En estas condiciones, para una descripción covariante del fluido, éste se puede describir por una función densidad de energía propia $\rho_0(x)$ y un campo vectorial de cuadrivelocidad $U^\mu(x)$. $\rho_0(x)$ significa la densidad que mide un observador inercial que se mueve con el fluido, es decir,

$$\rho_0(x) = c^2 dm_0 / dV_0 \quad (8.1)$$

donde dm_0 es la masa propia contenida en el elemento de volumen propio dV_0 situado en el punto de coordenadas (x^1, x^2, x^3) en el instante t , i.e.

$$x = (ct, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (8.2)$$

y

$$U^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{d\tau} = c \frac{dx^\mu}{ds} \quad (8.3)$$

$$U^\mu U_\mu = c^2$$

es la cuadrivelocidad de este elemento de masa, donde

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (8.4)$$

El tensor simétrico de momentum-energía que describe el fluido está dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \rho_0(x) U^\mu(x) U^\nu(x) \quad (8.5)$$

Para ver la interpretación física del tensor momentum-energía se considerará en primer lugar la componente

$$T^{00} = \frac{1}{c^2} \rho_0 U^0 U^0 = \rho_0 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} \quad (8.6)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 8.4,

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{ds} &= c \frac{dt}{ds} = c \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \\ &= c (c^2 - \vec{u}^2)^{-1/2} = \gamma(\vec{u}) \end{aligned} \quad (8.7)$$

entonces

$$T^{00} = \rho_0 \gamma^2(\vec{u}) \quad (8.8)$$

donde

$$\gamma(\vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}}} \quad (8.9)$$

es el factor gamma de Lorentz de la velocidad del fluido \vec{u} en el punto x . Esta cantidad se interpreta como la densidad de energía relativista del fluido en el punto x , pues $\rho_0 c^2$ es la densidad de energía propia y un factor γ surge por el aumento de la masa con la velocidad y el segundo factor γ por la contracción del volumen.

Para interpretar físicamente las otras componentes considérese primero los términos

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \frac{1}{c^2} \rho_0 U^0 U^i \\ &= \frac{1}{c^2} \rho_0 c^2 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^i}{ds} \\ &= \rho_0 \gamma(\vec{u}) \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= \rho_0 \gamma^2(\vec{u}) \frac{u^i}{c} \end{aligned} \quad (8.10)$$

donde u^i es la componente i –ésima de la velocidad del fluido. De manera similar las otras componentes del tensor están dadas por

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{c^2} \rho_0 U^i U^j \\ &= \rho_0 \gamma^2 \frac{u^i u^j}{c^2} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Por lo tanto, el tensor momentum-energía para el fluido no interactuante toma la forma

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & u_x/c & u_y/c & u_z/c \\ u_x/c & u_x^2/c^2 & u_x u_y/c^2 & u_x u_z/c^2 \\ u_y/c & u_y u_x/c^2 & u_y^2/c^2 & u_y u_z/c^2 \\ u_z/c & u_z u_x/c^2 & u_z u_y/c^2 & u_z^2/c^2 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

La interpretación física del tensor momentum-energía se basa en la ecuación de conservación

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \equiv T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (8.13)$$

Considérese primero la componente 0 de esta ecuación (denotemos por $\rho = \rho_0 c^2 \gamma^2$):

$$\begin{aligned} 0 &= T^{0\nu}{}_{,\nu} \\ &= \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{03}}{\partial x^3} \\ &= \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] \end{aligned} \quad (8.14)$$

entonces esta ecuación representa la conservación de la masa-energía y corresponde a la ecuación de continuidad de la hidrodinámica clásica.

Para ver el significado de las otras tres componentes de la ecuación 8.13 se escribe la componente i , $i = 1, 2, 3$ en forma explícita (con la notación $u^1 = u_x$ etc.):

$$\begin{aligned} T^{i\nu}{}_{,\nu} &= \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{i1}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{i3}}{\partial x^3} \\ &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial (\rho u^i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_x u^i)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y u^i)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z u^i)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{\rho}{c^2} \left[\frac{\partial (u^i)}{\partial t} + u_x \frac{\partial (u^i)}{\partial x} + u_y \frac{\partial (u^i)}{\partial y} + u_z \frac{\partial (u^i)}{\partial z} \right] + \\ &\quad \frac{u^i}{c^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (8.15)$$

el segundo término de la última igualdad es cero debido a la ecuación de continuidad, así esta ecuación se puede escribir en la forma

$$T^{i\nu}{}_{,\nu} = \frac{\rho}{c^2} \left[\frac{\partial (u^i)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u^i \right] \quad (8.16)$$

Esta ecuación también es usual en la hidrodinámica y representa el movimiento de un campo de materia libre de fuerzas, y por tanto corresponde a la conservación del momentum. El operador

$$\frac{D}{Dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \quad (8.17)$$

se llama derivada de Euler. Así la ecuación $T^{i\nu}{}_{,\nu} = 0$ se puede escribir como

$$\frac{Du^i}{Dt} = \frac{\partial (u^i)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} u^i = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.18)$$

Esta ecuación, llamada ecuación de Euler, es una consecuencia del principio de conservación del momentum. Por lo tanto, la ecuación 8.13 representa las leyes de conservación de energía y momentum.

Consideremos ahora la descripción de un fluido perfecto sobre el cual actúan fuerzas internas descritas por la presión. Un fluido perfecto se define como aquel para el cual un observador que se mueve con la velocidad v del fluido en un punto ve el fluido isotrópico. Esta definición supone que el camino libre medio entre colisiones de las partículas que componen el fluido es pequeño en comparación con la escala de longitud utilizada por el observador. Así un fluido perfecto queda descrito por la función densidad propia $\rho_0(x)$, el campo de cuadrivelocidades U^μ y el campo escalar de presión propia $p_0(x)$.

Para encontrar la forma general del tensor momentum-energía, considérese un observador con respecto al cual un elemento de volumen del fluido situado en un punto x del espacio-tiempo está en reposo. Entonces, por hipótesis de fluido perfecto (isotrópico) en el sistema de referencia propio, el tensor toma la forma

$$T_0^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

donde el subíndice cero se refiere al sistema de referencia propio.

Transformando el sistema de referencia del laboratorio con respecto al cual el fluido en el punto x se está moviendo con velocidad \vec{u} , tenemos

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha(\vec{u}) \Lambda^\nu{}_\beta(\vec{u}) T_0^{\alpha\beta} \quad (8.20)$$

donde los coeficientes de la transformación de Lorentz están dados por

$$\Lambda^\mu{}_\alpha = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1 + \frac{u_x^2(\gamma-1)}{u^2} & \frac{u_x u_y(\gamma-1)}{u^2} & \frac{u_x u_z(\gamma-1)}{u^2} \\ \gamma\beta_y & \frac{u_x u_y(\gamma-1)}{u^2} & 1 + \frac{u_y^2(\gamma-1)}{u^2} & \frac{u_y u_z(\gamma-1)}{u^2} \\ \gamma\beta_z & \frac{u_x u_z(\gamma-1)}{u^2} & \frac{u_y u_z(\gamma-1)}{u^2} & 1 + \frac{u_z^2(\gamma-1)}{u^2} \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

con $\gamma = \gamma(\vec{u})$ y $\beta_i = u_i/c$. Entonces las componentes del tensor momentum-energía son

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \rho_0 U^\mu U^\nu + p_0 \left(\frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu - \eta^{\mu\nu} \right) \quad (8.22)$$

donde U^μ es la cuadrivelocidad del fluido en el punto x , y satisface la ecuación de conservación

$$\frac{T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (8.23)$$

La generalización del tensor momentum-energía al espacio-tiempo curvo es inmediata:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu + p_0 \left(\frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu} \right) \quad (8.24)$$

con la ecuación de conservación local

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (8.25)$$

En el capítulo sobre cosmología se trabajará el fluido perfecto como un modelo para describir la materia del universo.

8.2. Movimiento geodésico

Como postulados básicos de la relatividad general están las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales determinan la métrica a partir del tensor momentum-energía de la materia, y el postulado del movimiento geodésico de una partícula de prueba libre de fuerzas, i.e., de una partícula en caída libre.

En esta sección se verá cómo las ecuaciones de campo de Einstein contienen el movimiento geodésico de las partículas de materia, las cuales determinan a su vez el tensor métrico. Esta situación era de esperarse teniendo en cuenta el carácter no lineal de las ecuaciones de campo. Es decir, si se considera una distribución de materia y se estudia el movimiento de una partícula de prueba (que forma parte de la distribución de materia), entonces la partícula de prueba debe seguir una geodésica de la variedad, la cual está determinada por el tensor métrico (el campo gravitacional); así se espera que las ecuaciones de campo determinen el movimiento de las partículas, que a su vez determinan el campo.

El carácter no lineal de las ecuaciones de campo significa que no es válido el principio de superposición, el cual está en la base de la gravedad newtoniana. Esto significa que si a un sistema dado, i.e. una distribución de materia, que produce un campo gravitacional, se le adiciona una partícula, entonces el nuevo campo gravitacional no es la superposición del campo gravitacional de la distribución más el campo producido por la partícula.

En este punto es importante anotar que cuando se resolvió el problema del campo producido por una distribución esférica de materia (métrica de Schwarzschild) y se estudió el movimiento de partículas de prueba, trayectorias de planetas y desviación de un rayo de luz, se asumió la aproximación que estas partículas (el planeta o el fotón) no afectaban apreciablemente el campo de la distribución esférica de materia.

Para simplificar, consideremos un gas de partículas puntuales no interactuantes (a parte de su propia interacción gravitacional) descrito por el tensor

momentum-energía 8.5:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \rho_0(x) U^\mu(x) U^\nu(x) \quad (8.26)$$

entonces las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (8.27)$$

garantizan que se cumpla la ecuación

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (8.28)$$

Para ver las consecuencias de esta ecuación sobre el movimiento de las partículas que conforman el fluido, se escribe de manera explícita la ecuación 8.28 para el tensor 8.26:

$$(\rho_0 U^\nu)_{;\nu} U^\mu + \rho_0 U^\nu U^\mu{}_{;\nu} = 0 \quad (8.29)$$

Teniendo en cuenta que la cuadrivelocidad satisface la relación

$$\begin{aligned} U^\alpha U_\alpha &= g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta \\ &= \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} g_{\alpha\beta} \\ &= c^2 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} g_{\alpha\beta} \\ &= c^2 \end{aligned} \quad (8.30)$$

entonces tomando la derivada covariante de esta ecuación y contrayendo con el cuadvivector U , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (U^\alpha U_\alpha)_{;\nu} U^\nu \\ &= (g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta)_{;\nu} U^\nu \\ &= (g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta{}_{;\nu} + g_{\alpha\beta} U^\alpha{}_{;\nu} U^\beta) U^\nu \\ &= 2U^\alpha{}_{;\nu} U^\nu U_\alpha \end{aligned} \quad (8.31)$$

multiplicando la ecuación 8.29 por U_μ tenemos

$$\begin{aligned} (\rho_0 U^\nu)_{;\nu} U^\mu U_\mu + \rho_0 U^\nu U^\mu{}_{;\nu} U_\mu &= \\ (\rho_0 U^\nu)_{;\nu} U^\mu U_\mu &= \\ (\rho_0 U^\nu)_{;\nu} c^2 &= 0 \end{aligned} \quad (8.32)$$

es decir, la cantidad $\rho_0 U^\nu$, la cual se interpreta como la conservación de la densidad de momentum, implica que en la ecuación 8.29 el segundo término debe ser nulo

$$U^\nu U^\mu{}_{;\nu} = 0 \quad (8.33)$$

Escribiendo esta ecuación en forma explícita tenemos que

$$U^\nu (U^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} U^\sigma) = 0 \quad (8.34)$$

Dado que el cuadvectores U representa la cuadvirvelocidad de una partícula del gas, entonces

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = c \frac{dx^\mu}{ds} \quad (8.35)$$

por tanto, la ecuación 8.34 se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) + \frac{dx^\nu}{ds} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{ds} &= \\ \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} &= 0 \end{aligned} \quad (8.36)$$

la cual corresponde a la ecuación geodésica para las partículas del fluido, como se quería mostrar.

8.3. Métrica interior de una masa esférica

Considérese ahora la solución de las ecuaciones de campo de Einstein para el interior de una distribución esférica de materia, donde se asume que la materia está descrita por el tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \rho U^\mu U^\nu + \frac{p}{c^2} (U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu}) \quad (8.37)$$

con

$$\rho = \rho(r) \quad y \quad p = p(r) \quad (8.38)$$

y la ecuación de estado

$$f(\rho, p) = 0 \quad (8.39)$$

Dada la simetría esférica del problema se puede mostrar (en forma similar al caso de la métrica de Schwarzschild) que las componentes del tensor métrico para el interior de la distribución deben tener la forma general

$$\mathbf{g} = g_{00} c^2 dt^2 - g_{rr} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (8.40)$$

en coordenadas espaciales esféricas, y ahora las funciones g_{00} y g_{rr} se determinan a partir de las ecuaciones de campo de Einstein.

Como se está asumiendo que la materia está descrita por un tensor momentum-energía para un fluido perfecto (ecuación 8.37) y la distribución es estática, entonces en las coordenadas elegidas las partículas del fluido están en reposo y por lo tanto las componentes del cuadvectores velocidad son

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0) \quad (8.41)$$

Así, sobre la línea de universo de cada partícula del fluido la relación entre el tiempo propio y la coordenada temporal está dada por

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 = g_{00} c^2 dt^2 \quad (8.42)$$

y como

$$c^2 = U^2 = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = g_{00} (U^0)^2 \quad (8.43)$$

entonces las componentes covariantes de la cuadrivelocidad toman la forma

$$\begin{aligned} U_\mu &= g_{\mu\nu} U^\nu \implies \\ U_0 &= g_{0\nu} U^\nu = g_{00} U^0 = c\sqrt{g_{00}} \\ U_i &= 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (8.44)$$

Con estas relaciones las componentes covariantes del tensor momentum-energía están dadas por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \rho U_\mu U_\nu + \frac{p}{c^2} (U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{c^2} \rho \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.45)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 8.40 para el tensor métrico, se tiene

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \rho g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{c^2} g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{c^2} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{c^2} r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (8.46)$$

el cual describe un fluido perfecto en reposo. Para obtener las funciones desconocidas g_{00} y g_{rr} se utilizan las ecuaciones de campo de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (8.47)$$

las cuales se pueden escribir en forma equivalente como (problema)

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (8.48)$$

donde

$$T = T^\sigma{}_\sigma$$

es la traza del tensor momentum-energía, la cual se obtiene fácilmente a partir de la ecuación 8.46:

$$\begin{aligned} T &= g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ &= \frac{\rho}{c^2} - \frac{3p}{c^2} \end{aligned} \quad (8.49)$$

Entonces los términos no nulos del lado derecho de las ecuaciones de campo 8.48 son ($\kappa = -8\pi G/c^4$)

$$\begin{aligned}\kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) &= \kappa \left[\rho g_{00} - \frac{1}{2} g_{00} \left(\rho - \frac{3p}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \kappa g_{00} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)\end{aligned}\quad (8.50)$$

$$\begin{aligned}\kappa \left(T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T \right) &= \kappa \left[\frac{p}{c^2} g_{rr} + \frac{1}{2} g_{rr} \left(\rho - \frac{3p}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \kappa g_{rr} \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right)\end{aligned}\quad (8.51)$$

$$\begin{aligned}\kappa \left(T_{22} - \frac{1}{2} g_{22} T \right) &= \kappa \left[\frac{p}{c^2} r^2 + \frac{1}{2} r^2 \left(\rho - \frac{3p}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \kappa r^2 \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right)\end{aligned}\quad (8.52)$$

$$\begin{aligned}\kappa \left(T_{33} - \frac{1}{2} g_{33} T \right) &= \kappa \left[\frac{p}{c^2} r^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \left(\rho - \frac{3p}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \kappa r^2 \sin^2 \theta \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right)\end{aligned}\quad (8.53)$$

Las componentes del tensor de Riemann no nulas ya fueron obtenidas cuando se trabajó la métrica de Schwarzschild

$$R_{00} = \frac{e^{h-g}}{2} \left(-h' - \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{2} h g' - \frac{2}{r} h' \right) \quad (8.54)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} h' + \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{4} h g' - \frac{1}{r} g' \quad (8.55)$$

$$R_{22} = e^{-g} \left(1 + \frac{r h'}{2} - \frac{r g'}{2} \right) - 1 \quad (8.56)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (8.57)$$

donde se utilizan las definiciones

$$g_{00} = e^{h(r)} \quad (8.58)$$

$$g_{rr} = e^{g(r)}. \quad (8.59)$$

Entonces las ecuaciones de campo de Einstein toman la forma

$$e^{-g} \left(-\frac{h'}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h g'}{4} - \frac{h}{r} \right) = \kappa \left(\frac{\rho}{2} + \frac{3p}{2c^2} \right) \quad (8.60)$$

$$e^{-g} \left(\frac{1}{2} h' + \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{4} h g' - \frac{g}{r} \right) = \kappa \left(\frac{\rho}{2} - \frac{p}{2c^2} \right) \quad (8.61)$$

$$e^{-g} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{h'}{2r} - \frac{g'}{2r} \right) - \frac{1}{r^2} = \kappa \left(\frac{\rho}{2} - \frac{p}{2c^2} \right) \quad (8.62)$$

donde la última ecuación para la componente R_{33} no contribuye pues es proporcional a la ecuación para R_{22} .

Para resolver este sistema de ecuaciones acopladas, se suma en primer lugar las ecuaciones 8.60 y 8.61 para obtener

$$e^{-g} \left(-\frac{h'}{r} - \frac{g'}{r} \right) = \kappa \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (8.63)$$

y sumando y restando esta ecuación con la ecuación 8.62, para despejar ρ y p respectivamente, se tiene

$$e^{-g} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{g'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \kappa \rho \quad (8.64)$$

$$\frac{1}{r^2} - e^{-g} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{h'}{r} \right) = \kappa \frac{p}{c^2} \quad (8.65)$$

La tercera ecuación diferencial se obtiene restando las ecuaciones 8.61 y 8.62,

$$e^{-g} \left(\frac{1}{2} h' + \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{4} h g' - \frac{g' + h'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (8.66)$$

la cual es independiente de la densidad y la presión.

Este sistema de tres ecuaciones acopladas más la ecuación de estado determinan la métrica en términos de las propiedades de la materia que se quiera modelar a través de la función $\rho(r)$ y constituyen de esta forma el punto de partida para estudiar diferentes modelos de estructura estelar.

Teniendo en cuenta que la métrica para el exterior de una distribución esférica de materia está dada por la métrica de Schwarzschild, por continuidad de la métrica definamos la función $m(r)$ por

$$e^{-g} = 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \quad (8.67)$$

Para interpretar el significado de esta función calculemos su derivada:

$$\begin{aligned} m(r) &= \frac{c^2}{2G} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-g})] \\ &= \frac{c^2}{2G} [(1 - e^{-g}) + r g' e^{-g}] \\ &= \frac{c^2}{2G} [-e^{-g}(1 - r g') + 1] \\ &= \frac{4\pi r^2}{\kappa} \left[e^{-g} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{g'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (8.68)$$

donde $\kappa = -8\pi G/c^2$. Comparando esta ecuación con 8.64 tenemos que

$$\frac{\kappa m(r)}{4\pi r^2} = \kappa \rho \quad (8.69)$$

entonces, integrando esta ecuación, con la condición $m(0) = 0$ para quitar la singularidad en $r = 0$, obtenemos

$$m(r) = \int_0^r dm = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (8.70)$$

Aun cuando esta expresión corresponde en gravedad newtoniana a la masa contenida en una esfera de radio r , esta cantidad, llamada masa geométrica, no corresponde a la masa propia contenida en el volumen esférico de radio r pues el elemento de volumen propio está dado por

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{|-^3\mathbf{g}|} d^3x \\ &= g_{rr}^{1/2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (8.71)$$

donde $|{-^3\mathbf{g}}|$ es el determinante del tensor métrico espacial, y por lo tanto la masa propia contenida en el radio r está dada por

$$\begin{aligned} m_p(r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r) dV \\ &= 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1/2} dr \end{aligned} \quad (8.72)$$

Notemos que la masa propia siempre es mayor que la masa geométrica, y su diferencia

$$E_L = m_p c^2 - m c^2 \quad (8.73)$$

se puede interpretar como la energía de ligadura gravitacional.

Si se integra hasta la superficie de la distribución de materia de radio R se puede identificar $m(R)$ con la masa total de cuerpo y se obtiene la solución de Schwarzschild. De esta forma se obtiene una solución continua en todo el espacio.

Como se vió, para encontrar una solución explícita para la métrica se requiere conocer la ecuación de estado de la materia; sin embargo, con la función de masa geométrica encontrada se puede obtener una ecuación para la derivada de la presión, en términos de ρ , p , m y r , la cual permitirá llegar a resultados generales muy importantes en estructura estelar.

Despejando h' de la ecuación 8.65 y tomando en cuenta 8.67 se llega a la

ecuación

$$\begin{aligned}
 h' &= re^g \left(\frac{1}{r^2} - \kappa \frac{p}{c^2} \right) - \frac{1}{r} \\
 &= \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{1}{r} + \frac{8\pi Gpr}{c^4} \right) - \frac{1}{r} \\
 &= \frac{\frac{8\pi Gpr}{c^4} + \frac{2Gm(r)}{c^2 r^2}}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}} \\
 &= \frac{\frac{2Gm(r)}{c^2} + \frac{8\pi Gpr^3}{c^4}}{r \left(r - \frac{2Gm(r)}{c^2} \right)} \quad (8.74)
 \end{aligned}$$

Para relacionar la derivada de la presión con h' , derivemos la ecuación 8.65 respecto a r :

$$\kappa \frac{p'}{c^2} = -\frac{2}{r^3} + e^{-g} \left(\frac{g'}{r^2} - \frac{h'g'}{r} + \frac{2}{r^3} + \frac{h'}{r^2} - \frac{h'}{r} \right) \quad (8.75)$$

utilizando la ecuación 8.66 para eliminar h' , tenemos

$$\begin{aligned}
 \kappa \frac{p'}{c^2} &= -\frac{2}{r^3} + e^{-g} \left(g' + \frac{2}{r^3} + \frac{h'}{r^2} \right) - e^{-g} \frac{h'}{r} \\
 &= \frac{1}{2r} e^{-g} h' (g' + h') \quad (8.76)
 \end{aligned}$$

Comparando esta ecuación con 8.63 se obtiene

$$-\frac{p'}{c^2} = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) h' \quad (8.77)$$

Si se despeja p' de esta ecuación y se reemplaza h' dado por la ecuación 8.74, se obtiene finalmente

$$p' = -\frac{\left(\frac{Gm(r)}{c^2} + \frac{4\pi Gpr^3}{c^4} \right) \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) c^2}{r \left(r - \frac{2Gm(r)}{c^2} \right)} \quad (8.78)$$

que es la ecuación de equilibrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

Para ver el significado físico de la ecuación de TOV, veamos que ésta corresponde a la generalización relativista de la ecuación de equilibrio hidrostático de Newton para una distribución uniforme de materia.

Considérese una distribución uniforme de materia en equilibrio en el contexto de la gravedad newtoniana. Sea dm la masa de un elemento de volumen $dV = dA dr$ (como se muestra en la figura) situado a una distancia r del centro. Las fuerzas que actúan sobre este elemento de masa son: su peso

$$d\vec{F} = -\frac{Gm(r)dm}{r^2} \hat{r} \quad (8.79)$$

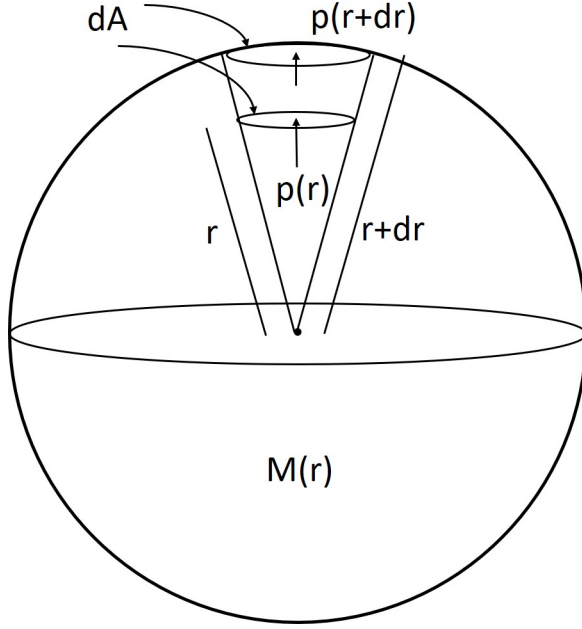


Figura 8-1: Condición de equilibrio para una estrella

donde $m(r)$ es la masa de la distribución contenida en un volumen de radio r , y las fuerzas de presión

$$-p(r+dr)dA\hat{r}$$

sobre la cara superior de área dA y

$$+p(r)dA\hat{r}$$

sobre la cara inferior. Entonces, la condición de equilibrio significa

$$-\frac{Gm(r)dm}{r^2}\hat{r} - p(r+dr)dA\hat{r} + p(r)dA\hat{r} = 0 \quad (8.80)$$

y teniendo en cuenta que

$$dm = \rho dV$$

se obtiene

$$p'(r) = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} \quad (8.81)$$

que representa la ecuación newtoniana de equilibrio hidrostático.

Si se considera el límite no relativista de la ecuación de TOV, es decir para $v \ll c$, entonces se obtiene la ecuación de equilibrio newtoniana.

En resumen, para encontrar la métrica en el interior de una distribución esféricamente simétrica de materia y su configuración de equilibrio, donde el valor para la densidad central ρ_c y presión central p_c se fijan arbitrariamente, se siguen estos pasos:

1. Se debe conocer la ecuación de estado

$$p = p(\rho) \quad (8.82)$$

2. A partir de esta función se integran las ecuaciones para la masa geométrica

$$m(r) = \int_0^r dm = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (8.83)$$

y para el gradiente de presión

$$p' = - \frac{\left(\frac{Gm(r)}{c^2} + \frac{4\pi Gpr^3}{c^4} \right) \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) c^2}{r \left(r - \frac{2Gm(r)}{c^2} \right)} \quad (8.84)$$

desde $r = 0$ hasta la superficie de la estrella donde $\rho(R) = p(R) = 0$.

3. Finalmente, se resuelve la ecuación para $h(r)$:

$$h' = \frac{\frac{2Gm(r)}{c^2} + \frac{8\pi Gpr^3}{c^4}}{r \left(r - \frac{2Gm(r)}{c^2} \right)} \quad (8.85)$$

sujeta a la condición de frontera que para $r = R$ la métrica interna se debe reducir a la métrica externa dada por Schwarzschild.

Aún cuando la configuración de equilibrio newtoniana es un caso límite de la relativista (ecuación de TOV), surge una diferencia fundamental, en el sentido que la ecuación newtoniana permite siempre una configuración de equilibrio para cualquier valor de la densidad y del radio de la distribución, mientras que la ecuación relativista impone un límite máximo, a partir del cual no es posible una configuración de equilibrio, i.e. para un radio dado existe una masa dada, a partir de la cual el colapso es inevitable.

Para ver cómo surge esta situación, considérese un ejemplo donde la densidad es uniforme:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (8.86)$$

y por lo tanto integrando 8.83 se obtiene

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \quad (8.87)$$

el cual es un resultado válido tanto para el caso relativista como para el newtoniano.

Con este resultado se integra primero la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana 8.81

$$\begin{aligned} \int_0^{p(r)} dp(r) &= - \int_R^r \frac{Gm(r)\rho}{r^2} dr \\ &= - \frac{4}{3} \pi G \rho_0^2 \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_R^r \\ &= \frac{2}{3} \pi G \rho_0^2 (R^2 - r^2) \end{aligned} \quad (8.88)$$

por lo tanto, la presión central en el caso newtoniano para una estrella de densidad uniforme está dada por

$$p_c = p(0) = \frac{2}{3} \pi G \rho_0^2 R^2 \quad (8.89)$$

Esta presión también se puede expresar en términos de la masa total M y la densidad, o la masa total y el radio de la estrella:

$$p_c = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} G M^{2/3} \rho_0^{4/3} \quad (8.90)$$

$$p_c = \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4} \quad (8.91)$$

Nótese que la presión central siempre es finita para todos los valores de densidad, masa y/o radio.

La ecuación relativista de equilibrio se puede integrar en forma exacta, obteniendo

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} R^2} - \sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r^2}}{\sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r^2} - 3\sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} R^2}} \quad (8.92)$$

Remplazando la densidad en términos de la masa total y el radio de la estrella, se tiene

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} - \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R^3} r^2}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R^3} r^2} - 3\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} \quad (8.93)$$

Por lo tanto, la presión en el centro de la distribución, requerida para el equilibrio, está dada por

$$p_c = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} R^2} - 1}{1 - 3\sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} R^2}} \quad (8.94)$$

en términos de la densidad, y por

$$p_c = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} - 1}{1 - 3\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} \quad (8.95)$$

en términos de la masa total. Nótese que la ecuación 8.94 se reduce, para bajas velocidades, a

$$\begin{aligned} p_c &\simeq \rho_0 c^2 \frac{-\frac{4\pi G \rho_0}{3c^2} R^2}{-2 + \frac{4\pi G \rho_0}{c^2} R^2} \\ &\simeq \frac{2\pi G}{3} \rho_0^2 R^2 \end{aligned}$$

lo cual corresponde al límite newtoniano. Sin embargo, la presión central relativista, a diferencia de la newtoniana, diverge para (ver ecuación 8.95)

$$3\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} = 1 \quad (8.96)$$

esto significa que si un objeto de masa dada colapsa hasta alcanzar un radio de

$$R = \frac{9GM}{4c^2} \quad (8.97)$$

entonces se requeriría una presión infinita para mantener el equilibrio, es decir el colapso sería inevitable, o equivalentemente un objeto de esta masa y radio no puede existir. Este resultado relativista de la existencia de una cota superior para la masa se debe al modelo simplificado de un objeto con densidad uniforme, que por cierto está lejos de ser un modelo realista de un objeto celeste típico. De hecho, para un objeto como una estrella, en cualquiera de sus etapas de evolución, se espera que la densidad aumente hacia su interior. En términos más generales: si se considera una distribución esférica de masa monotónicamente decreciente $d\rho/dr \leq 0$ entonces se debe tener que $\rho \geq 0$, pues al llegar a la superficie del cuerpo la solución debe coincidir con Schwarzschild para la cual $\rho = 0$. Inversamente, si se supone que se tiene un fluido con $\rho \geq 0$ descrito por una ecuación de estado $p = p(\rho)$ con $p \geq 0$ y $dp/d\rho \geq 0$, entonces la ecuación 8.84 implica $dp/dr \leq 0$ y por lo tanto $d\rho/dr \leq 0$. Se puede mostrar que bajo la suposición general de una distribución esférica de masa no negativa $\rho \geq 0$ y por tanto monótona decreciente de r , existen dos tipos de límites superiores para la masa de una estrella en relatividad general: el primero, para una estrella de radio R dado, la máxima masa posible es

$$M_{\text{máx}} = \frac{4Rc^2}{9G} \quad (8.98)$$

y el segundo, dada una ecuación de estado razonable para densidades por debajo de alguna densidad dada ρ_0 existe un límite superior de la masa cuando la densidad alcanza valores superiores a ρ_0 independiente de la ecuación de estado. Es importante anotar en este punto que, clásicamente, para cada ecuación de estado hay un límite superior de la masa para la cual la presión central no puede mantener el equilibrio y el colapso es inevitable, pero lo que establece la relatividad general es que aparece un límite superior de la masa independiente de la ecuación de estado, lo cual indica un colapso inevitable independientemente de las condiciones físicas de la materia, i.e. de la ecuación de estado asumida.

Para finalizar esta sección veamos algunos resultados cualitativos del colapso estelar. Para esto consideremos primero una distribución de materia fría, esto es, los efectos de la presión de radiación serán despreciados. Es conocido el comportamiento de la materia para densidades por debajo de la densidad de la materia nuclear ($\sim 10^{14} \text{gcm}^{-3}$). Para esta situación la contribución dominante a la presión proviene de la presión de degeneración electrónica. Para una densidad n_e de electrones baja

$$n_e \ll m_e^3 c^3 / \hbar^3 \sim 10^{31} \text{cm}^{-3} \quad (8.99)$$

la presión de degeneración está dada por

$$p = \frac{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3}}{5m_e} n_e^{5/3} \quad (8.100)$$

mientras que para densidades mayores a 10^{31}cm^{-3} la presión toma la forma

$$p = \frac{\hbar c (3\pi^2)^{1/3}}{4} n_e^{4/3} \quad (8.101)$$

Esta presión del gas de electrones es la que en últimas determina las configuraciones de equilibrio de las estrellas hasta un cierto límite de masa, calculado por primera vez por Chandrasekhar en 1939, y dado por la relación

$$M_c \simeq 1.4 \left(\frac{2}{\mu_N} \right)^2 M_{\odot} \quad (8.102)$$

donde μ_N es el número de nucleones por electrón y $M_{\odot} \sim 2 \times 10^{33} \text{gr}$ la masa solar.

En la figura 7.2 se muestra un gráfico cualitativo del comportamiento de las posibles configuraciones de una estrella, con la masa en unidades de la masa solar en función del radio de la estrella. La parte de la curva entre los puntos 1 y 2 representa las configuraciones de equilibrio soportadas por la presión del gas de electrones y corresponden a las estrellas conocidas como enanas blancas. A partir del punto 2, que representa el límite de Chandrasekhar para enanas blancas, si la densidad sigue aumentando se entra en una situación donde no se puede alcanzar una configuración de equilibrio, es decir, la presión del gas de electrones ya no es suficiente para mantener el equilibrio y la masa comienza a colapsar. En esta situación se inicia una reacción de conversión de electrones y protones en neutrones $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ donde ν_e son neutrinos. Cuando la densidad de la materia se acerca a la densidad nuclear, se alcanza el punto 3 de la curva, a partir del cual se entra en una región de configuraciones de equilibrio, donde ahora es la presión del gas degenerado de neutrones la que mantiene el equilibrio. Esta es la región de las estrellas neutrónicas. El punto 4 de la curva representa la máxima masa a partir de la cual el equilibrio se pierde y el colapso es inevitable. Este valor máximo tiene una mayor incertidumbre debido a que la ecuación de estado para la materia no se conoce. Sin embargo, se ha calculado un límite superior del orden de $5M_{\odot}$.

El análisis anterior se realizó para materia fría. En la realidad la componente fundamental para la presión proviene de la radiación debido a las reacciones nucleares que tienen lugar al interior de las estrellas y por tanto los límites superiores de masas son mayores. Pero debido a que esta radiación escapa de las estrellas, éstas se van enfriando y los cálculos anteriores para materia fría se aplican. Por ejemplo, si la masa de la estrella es inferior al límite de Chandrasekhar, la estrella se enfriaría lentamente hasta apagarse, llegando a una configuración final de enana blanca. Pero si la masa es superior a este límite, comenzaría un proceso muy lento de colapso, mientras la estrella radia, y luego entraría en la

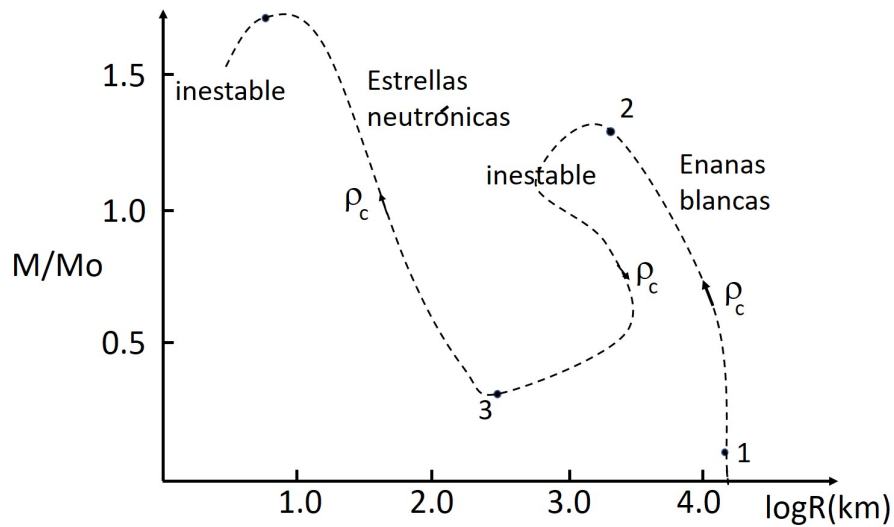


Figura 8-2: Colapso estelar

etapa de una estrella neutrónica. En este proceso, debido a la fusión nuclear del hidrógeno en helio y luego en núcleos más pesados, se forma una corteza de níquel y hierro, la cual es mantenida en equilibrio por la presión del gas de neutrones.

En esta fase del colapso, de la corteza de níquel y hierro, es probable que se produzca una onda de choque que se propaga desde el interior de la estrella, expulsando la materia exterior a la corteza y dando lugar a un evento de supernova.

Capítulo 9

Agujeros negros

Como vimos en el capítulo anterior, el colapso gravitacional de estrellas cuya masa supera el límite de Chandrasekhar es inevitable, pues, independientemente de la ecuación de estado que rige para la materia, no es posible alcanzar una configuración de equilibrio. En este punto surgen dos preguntas fundamentales: ¿cuál es el estado final de un objeto que colapsa? y ¿cómo se describe la métrica del campo gravitacional de este objeto?

Teniendo en cuenta el teorema de Birkhoff (visto en el capítulo 5), sabemos que la única solución para el exterior de una distribución esférica de materia está dada por la métrica de Schwarzschild. Esto significa que el campo gravitacional en el exterior de un objeto bajo colapso esféricamente simétrico está dado por la métrica de Schwarzschild, lo cual respondería a la segunda pregunta. Por tanto, dedicaremos la primera sección a complementar el estudio de las propiedades de esta métrica. Los resultados de esta sección nos darán, de paso, una respuesta a la primera pregunta: el resultado final de una estrella que colapsa es un estado de densidad infinita y radio cero, denominada una singularidad o agujero negro, que deja como único parámetro observable la masa total. Evidentemente esta respuesta, más que resolver la pregunta, plantea nuevos interrogantes, los cuales han dado lugar a nuevos campos de investigación, tanto en el ámbito matemático (estructura matemática del espacio-tiempo y teoría de singularidades) como en la construcción de una teoría cuántica de la gravedad y el papel fundamental de los agujeros negros en la astronomía y astrofísica observacional.

9.1. Agujero negro de Schwarzschild

En el capítulo 4 encontramos la solución de las ecuaciones de campo de Einstein para el exterior de una distribución esférica de materia, dada por la métrica de Schwarzschild:

$$g = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (9.1)$$

La métrica presenta dos comportamientos singulares: el primero para el radio

$$r \equiv r_s = \frac{2Gm}{c^2} \quad (9.2)$$

llamado el radio de Schwarzschild y el segundo para $r = 0$. Esto quiere decir que los coeficientes del tensor métrico divergen o se anulan. Además, cuando la coordenada radial r toma valores entre 0 y r_s , los signos de los coeficientes métricos g_{00} y g_{rr} cambian y por lo tanto la coordenada radial r pasa ahora a tomar el carácter de una coordenada temporal y la coordenada t toma el carácter de una coordenada espacial. Este comportamiento de la métrica y su significado debe ser cuidadosamente analizado, pues la interpretación física debe ser independiente de las coordenadas.

Un primer resultado importante que podemos obtener es el cálculo de las componentes del tensor de Riemann, evaluadas en el radio de Schwarzschild r_s . Por ejemplo, las componentes $R_{212}^1 = R_{313}^1$ están dadas por:

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= R_{313}^1 \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right) \frac{d}{dr} \left(\ln \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)^{-1} \right) \sim \frac{1}{r^3} \end{aligned} \quad (9.3)$$

las cuales son finitas para $r \rightarrow r_s = 2Gm/c^2$, pero divergen para $r \rightarrow 0$. Antes de continuar con el comportamiento de la métrica para coordenadas radiales menores que el radio de Schwarzschild, consideremos la trayectoria de una partícula que cae radialmente desde un punto con $r_0 > r_s$. Del intervalo espacio-tiempo para la métrica de Schwarzschild, una partícula en movimiento radial, $d\Omega^2 = 0$, y por lo tanto

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 \quad (9.4)$$

La ecuación para la geodésica radial está dada por la ecuación 7.12 con $\mathcal{L}^2 = 0$, entonces

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) = \mathcal{E}^2 \quad (9.5)$$

Consideremos una partícula de prueba que se deja caer libremente desde un punto $r = R$; entonces, de la ecuación anterior tenemos que la constante \mathcal{E} está dada por

$$\left(1 - \frac{r_s}{R} \right) = \mathcal{E}^2 \quad (9.6)$$

y por lo tanto la ecuación de movimiento radial toma la forma

$$\dot{r} = \left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{R} \right)^{1/2} \quad (9.7)$$

Teniendo en cuenta que

$$\dot{r} = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{cd\tau} \quad (9.8)$$

podemos integrar la ecuación 9.7 en forma paramétrica

$$r = \frac{R}{2} (1 + \cos \eta) \quad (9.9)$$

$$\tau = \frac{1}{c} \left(\frac{R^3}{4r_s} \right)^{1/2} (\eta + \sin \eta) \quad (9.10)$$

con la condición inicial $r(\eta = 0) = R$ y $\tau(\eta = 0) = 0$. Cuando la partícula alcanza el origen $r = 0$, entonces $\eta = \pi$ y el tiempo propio es finito

$$\tau = \frac{\pi}{2c} \left(\frac{R^3}{r_s} \right)^{1/2} \quad (9.11)$$

es decir, para un reloj que viaja con la partícula, ésta cae en un tiempo finito. Calculemos ahora el tiempo coordenado, el cual corresponde al tiempo medido por un observador situado en la región asintótica (i.e. lejos de la masa). Para este fin, consideremos la ecuación 7.9 para la coordenada radial:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \dot{t} = \mathcal{E} \quad (9.12)$$

entonces

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{\mathcal{E}}{\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)} \quad (9.13)$$

Para integrar esta ecuación es conveniente definir una nueva coordenada radial

$$r^* = r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad (9.14)$$

pues

$$\frac{dr^*}{dt} = \frac{dr}{dt} + \frac{r_s}{\frac{r}{r_s} - 1} \frac{1}{r_s} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \frac{dr}{dt} \quad (9.15)$$

entonces la ecuación 9.13 toma la forma

$$\dot{r} = \mathcal{E} \frac{dr^*}{dt} \quad (9.16)$$

Remplazando esta ecuación en 9.5 tenemos

$$\left(\mathcal{E} \frac{dr^*}{dt} \right)^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) = \mathcal{E}^2 \quad (9.17)$$

Aun cuando esta ecuación no se puede integrar en forma cerrada, podemos encontrar el comportamiento del radio en función de la coordenada temporal cuando $r \rightarrow r_s$. En este límite la ecuación anterior se aproxima a

$$\frac{dr^*}{dt} \simeq -1 \quad (9.18)$$

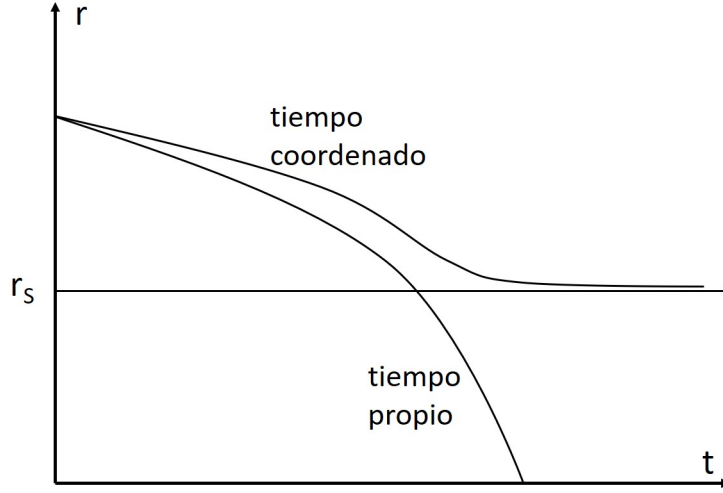


Figura 9-1: Tiempo coordenado y tiempo propio

Se ha tomado el signo menos dado que la partícula está en caída. Integrando esta ecuación, y reemplazando r^* por su definición, tenemos

$$r^* = r + r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) = -Kt \quad (9.19)$$

donde K es una constante de integración. Entonces en la aproximación que estamos considerando obtenemos

$$r \simeq r_s + \tilde{K} e^{-t/r_s} \quad (9.20)$$

lo cual implica que la partícula requiere un tiempo infinito para llegar a $r = r_s$ para un observador asintótico. En la figura ?? se muestra la comparación entre el tiempo de caída medido por un observador asintótico (tiempo coordenado) y el tiempo medido por un observador que cae con la partícula (tiempo propio).

9.2. Coordenadas de Kruskal

Como vimos en la sección anterior, a pesar del comportamiento singular de la métrica de Schwarzschild, en el punto $r = r_s$ el tensor de Riemann es finito, lo que implica que este comportamiento singular se debe a las coordenadas y no es una característica intrínseca de la métrica. Además, si escribimos la ecuación geodésica nula radial $ds = 0$, i.e., la ecuación que describe un rayo de luz que incide o sale radialmente, en coordenadas de Schwarzschild, tenemos que

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right) \quad (9.21)$$

lo cual implica que la velocidad coordenada radial del fotón, para el observador asintótico tiende a cero, cuando $r \rightarrow r_s$. Adicionalmente, para $0 < r < r_s$ la métrica es de nuevo regular, pero el signo de las coordenadas radial y temporal cambia, es decir, r se comporta ahora como una coordenada temporal y t como una coordenada espacial; la métrica pierde así su carácter estático. Para abolir este comportamiento anómalo de las coordenadas y para extender la solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con simetría esférica más allá de $r = r_s$, en 1960 Kruskal buscó una transformación de coordenadas de tal manera que la métrica exhibiera un comportamiento regular en el radio de Schwarzschild. Para este fin se propone encontrar una transformación de coordenadas $(t, r) \rightarrow (u, v)$, manteniendo las coordenadas angulares, de tal manera que la métrica tome la forma

$$ds^2 = f^2(u, v)(dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (9.22)$$

donde la función $f(u, v)$ no se anule para $r = r_s$. Notemos que en estas coordenadas la métrica es conforme a la métrica de Minkowski y la ecuación geodésica para fotones radiales (conos de luz radiales) toma la forma

$$\frac{du}{dv} = \pm 1 \quad (9.23)$$

Para encontrar la función f y las ecuaciones de transformación de las coordenadas, escribamos en forma explícita la ecuación de transformación para las componentes del tensor métrico:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\beta} \tilde{g}_{\gamma\sigma} \quad (9.24)$$

donde x^α son las coordenadas de Schwarzschild, \tilde{x}^γ las coordenadas de Kruskal que estamos buscando, $g_{\alpha\beta}$ las componentes del tensor métrico en coordenadas de Schwarzschild y $\tilde{g}_{\gamma\sigma}$ en coordenadas de Kruskal. Remplazando en la ecuación 9.24 las componentes del tensor métrico, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$1 - \frac{r_s}{r} = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} \right)^2 \right] \quad (9.25)$$

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (9.26)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x^0} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial r} \quad (9.27)$$

Definiendo una nueva coordenada radial, como en 9.14,

$$r^* = r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad (9.28)$$

y la función

$$F(r^*) = \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{f^2} \quad (9.29)$$

donde se ha asumido que la función f sólo depende de r . Entonces las ecuaciones 9.25, 9.26 y 9.27 toman la forma

$$F(r^*) = \left(\frac{\partial v}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} \right)^2 \quad (9.30)$$

$$-F(r^*) = \left(\frac{\partial v}{\partial r^*} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r^*} \right)^2 \quad (9.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} \frac{\partial u}{\partial r^*} = \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial r^*} \quad (9.32)$$

Sumando las dos primeras ecuaciones y sumando y restando dos veces la tercera obtenemos

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial v}{\partial r^*} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial r^*} \right)^2 \quad (9.33)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} - \frac{\partial v}{\partial r^*} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} - \frac{\partial u}{\partial r^*} \right)^2 \quad (9.34)$$

Tomando la raíz de la primera ecuación con signo relativo positivo y la raíz de la segunda ecuación con signo negativo (si se toma el mismo signo relativo en las raíces de las dos ecuaciones el jacobiano de transformación podría anularse) y sumando y restando las ecuaciones resultantes, tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial u}{\partial r^*} \quad (9.35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r^*} = \frac{\partial u}{\partial x^0} \quad (9.36)$$

y derivando llegamos al sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^{*2}} = 0 \quad (9.37)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^{*2}} = 0 \quad (9.38)$$

cuya solución general (D'Alembert) es de la forma

$$u = h(r^* + x^0) - g(r^* - x^0) \quad (9.39)$$

$$v = h(r^* + x^0) + g(r^* - x^0) \quad (9.40)$$

Remplazando estas soluciones en el sistema de ecuaciones 9.30, 9.31 y 9.32, la tercera ecuación se satisface idénticamente, mientras que las dos primeras ecuaciones conducen a la ecuación

$$-4h'(r^* + x^0)g'(r^* - x^0) = F(r^*) \quad (9.41)$$

Para resolver esta ecuación, diferenciemos con respecto a x^0 y r^* para obtener las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{F'(r^*)}{F(r^*)} = \frac{h'(r^* + x^0)}{h(r^* + x^0)} + \frac{g'(r^* - x^0)}{g(r^* - x^0)} \quad (9.42)$$

$$0 = \frac{h'(r^* + x^0)}{h(r^* + x^0)} - \frac{g'(r^* - x^0)}{g(r^* - x^0)} \quad (9.43)$$

donde la prima representa derivada con respecto al argumento de la función. Remplazando la ecuación 9.43 en 9.42 tenemos que

$$[\ln F(r^*)]' = 2 [\ln h(r^* + x^0)]' \quad (9.44)$$

si tratamos r^* y $r^* + x^0 = y$ como variables independientes, entonces la ecuación anterior implica que los dos lados de la ecuación son iguales a una constante:

$$[\ln F(r^*)]' = 2\eta \quad (9.45)$$

$$[\ln h(r^* + x^0)]' = \eta \quad (9.46)$$

integrando estas ecuaciones y eligiendo la constante de integración adecuada, la soluciones se pueden escribir en la forma

$$F(r^*) = \eta^2 e^{2\eta r^*} \quad (9.47)$$

$$h(r^* + x^0) = \frac{1}{2} e^{\eta(r^* + x^0)} \quad (9.48)$$

y remplazando esta última ecuación en 9.43 tenemos que

$$g(r^* - x^0) = -\frac{1}{2} e^{\eta(r^* - x^0)} \quad (9.49)$$

donde se ha tomado el signo de g y h diferente para mantener la función $F > 0$ (ver ecuación 9.41). Con estos resultados las coordenadas u y v toman la forma

$$\begin{aligned} u &= h(r^* + x^0) - g(r^* - x^0) \\ &= \frac{1}{2} e^{\eta(r^* + x^0)} + \frac{1}{2} e^{\eta(r^* - x^0)} \\ &= e^{\eta r^*} \cosh(\eta x^0) \\ &= e^{\eta r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|} \cosh(\eta x^0) \\ &= e^{\eta r} \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{r_s \eta} \cosh(\eta x^0) \end{aligned} \quad (9.50)$$

de forma similar

$$\begin{aligned} v &= h(r^* + x^0) + g(r^* - x^0) \\ &= e^{\eta r} \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{r_s \eta} \sinh(\eta x^0) \end{aligned} \quad (9.51)$$

y la función f está dada por

$$F(r^*) = \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{f^2} \quad (9.52)$$

entonces

$$\begin{aligned} f^2 &= \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{\eta^2 e^{2\eta r^*}} \\ &= \frac{r_s}{\eta^2 r} e^{-2\eta r} \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1-2r_s\eta} \end{aligned} \quad (9.53)$$

Finalmente se escoge la constante de integración η de tal manera que la función f^2 sea diferente de cero para $r = r_s$, así se requiere que

$$1 - 2r_s\eta = 0 \quad (9.54)$$

Con esta escogencia tenemos que la transformación de coordenadas está dada por

$$u = \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \quad (9.55)$$

$$v = \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \quad (9.56)$$

y la función f

$$f^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} \quad (9.57)$$

Por lo tanto, la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal (v, u) ,

$$ds^2 = f^2(u, v)(dv^2 - du^2) - r^2(u, v)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (9.58)$$

es finita para $r \rightarrow r_s$, donde r es una función implícita de u y v . Para entender el significado de estas nuevas coordenadas consideremos un gráfico espacio-tiempo en el plano (v, u) .

A partir de las ecuaciones 9.55 y 9.56 podemos despejar las coordenadas r y $x^0 = ct$:

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) e^{r/r_s} \quad (9.59)$$

$$\frac{v}{u} = \tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \quad (9.60)$$

En primer lugar, en las coordenadas de Schwarzschild se debe cumplir que $r > r_s$, lo cual equivale a la región I en la figura ??, es decir

$$u^2 - v^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u > |v| \quad (9.61)$$

y los puntos $r = \text{const.}$ corresponden a hipérbolas en esta región, mientras que la coordenada $t = \text{const.}$ corresponde a rectas que pasan por el origen. Esto

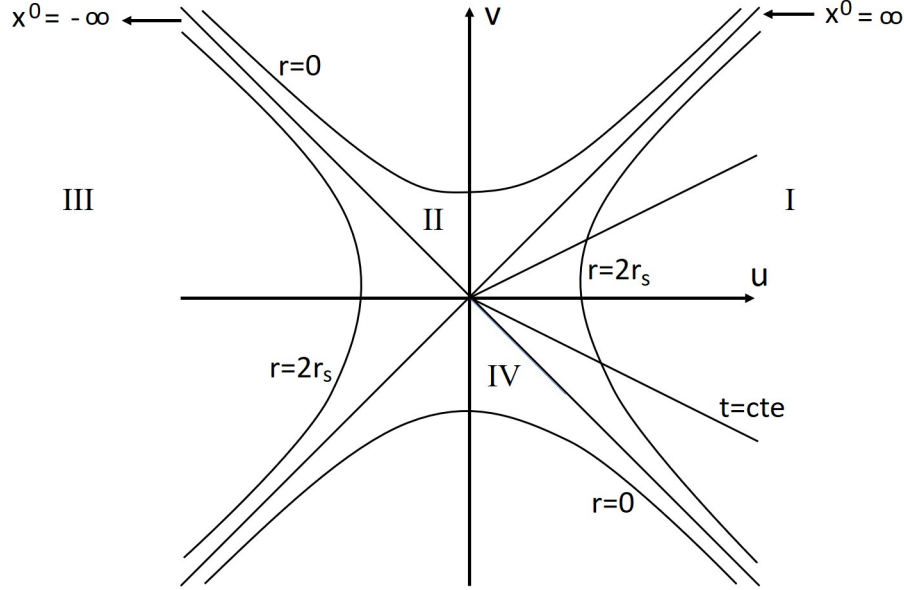


Figura 9-2: Coordenadas de Kruskal

significa que la región I, que está limitada por las rectas $u = \pm v$ con $u > 0$, corresponde a la región $r > r_s$ y $-\infty < t < \infty$ en coordenadas de Schwarzschild, pues la recta $u = -v$ representa $t = -\infty$ y la recta $u = v$ representa $t = +\infty$. Las hipérbolas en esta región tienen como asíntotas a las rectas $u = |v|$ y cuando $r \rightarrow r_s$ entonces la hipérbola degenera en el punto $u = v = 0$. Sin embargo, la región (en coordenadas de Kruskal) para la cual la métrica 9.58 es no singular corresponde a todos los valores de las coordenadas tales que la función f^2 sea finita y no nula, lo cual sucede para $r \neq 0$. Es decir, la región para la cual las coordenadas de Kruskal es regular está delimitada por la curva $r = 0$ o equivalentemente (ver ecuación 9.59)

$$v^2 - u^2 = 1 \quad (9.62)$$

Notemos además que la coordenada r está unívocamente definida como una función de (u, v) si $v^2 - u^2 < 1$, pues la función

$$\left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) e^{r/r_s} \quad (9.63)$$

es monótona para $r > 0$.

En la derivación de las coordenadas de Kruskal se escogió (arbitrariamente) el signo de h positivo y así g negativo. Si se escoge el signo al contrario obtenemos la transformación $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$. Es decir las regiones I y III en la figura son isométricas.

Un cálculo directo muestra que la solución de Schwarzschild para $0 < r < r_s$ también es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, pero ahora la

coordenada r se comporta como una coordenada temporal mientras que t se comporta como una coordenada espacial. Además, la solución para esta región se puede transformar isométricamente en la región II de la figura ???. Para ver esto consideremos de nuevo la deducción de la métrica de Kruskal. Dado que $0 < r < r_s$ entonces $F(r^*) < 0$ y por lo tanto los signos de h y g deben ser iguales. Si se escogen los signos positivos, obtenemos

$$u = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh\left(\frac{t}{2r_s}\right) \quad (9.64)$$

$$v = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh\left(\frac{t}{2r_s}\right) \quad (9.65)$$

con esta transformación la métrica de Kruskal y la función f son las mismas. Así bajo esta transformación la imagen de la región $0 < r < r_s$ es la región II en la figura. La transformación inversa está dada por

$$v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) e^{r/r_s} \quad (9.66)$$

$$\frac{u}{v} = \tanh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) \quad (9.67)$$

Si se escogen los signos de las funciones g y h negativos, entonces es equivalente a la transformación $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$, lo que implica que las regiones II y IV son isométricas. Sobre la hipérbola $v^2 - u^2 = 1$ la métrica es singular, pues allí el tensor de Riemann diverge. Las cuatro regiones de la figura, I, II, III y IV, constituyen la variedad de Schwarzschild-Kruskal. Finalizaremos esta sección enunciando (sin demostración) el teorema de Birkhoff generalizado:

Teorema 8-1 *Toda solución de clase C^2 de las ecuaciones de Einstein en el vacío la cual es esféricamente simétrica en un subconjunto abierto U es localmente isométrica a una porción de la variedad de Schwarzschild-Kruskal*

Capítulo 10

Cosmología

La hipótesis fundamental sobre la cual se basa el modelo estándar de la cosmología es el principio cosmológico, el cual establece que a gran escala el universo es homogéneo e isotrópico. Esto significa que el universo observado es el mismo para cualquier observador, sin importar el punto desde el cual se esté observando o la dirección, es decir, a gran escala la distribución de materia en el universo (la densidad de galaxias y su movimiento) es independiente de la dirección y el lugar desde el cual se observe. La hipótesis cosmológica se basa en la observación de la distribución de galaxias y la radiación cósmica de fondo.

Las ecuaciones de campo de Einstein permiten describir la geometría del espacio-tiempo, determinada por la distribución de materia en el universo. La forma más sencilla para describir la distribución de materia en el universo que satisface el principio cosmológico es el modelo del fluido perfecto, en el cual las galaxias son las partículas que conforman el fluido cósmico. Al igual que en la dinámica de fluidos, donde la materia está constituida por partículas, se asume que las escalas de observación son lo suficientemente grandes para que el elemento de volumen contenga un número suficiente de partículas y el fluido, visto como una distribución continua de materia, sea una buena aproximación para describir la dinámica de este sistema.

10.1. Métrica de Robertson-Walker

Antes de entrar a resolver las ecuaciones de Einstein para este modelo de universo, los argumentos de simetría establecidos por el principio cosmológico nos permiten avanzar en la forma general de la métrica, independientemente de la forma explícita del tensor momentum-energía que describa la materia en el universo.

Para encontrar la forma más general de la métrica que satisface el principio cosmológico, estableceremos las siguientes hipótesis, como punto de partida:

H-1. Postulado de Weil: Las líneas de universo de las galaxias forman un haz de geodésicas $\{\Gamma\}$ que no se interceptan y ortogonales a una familia de

hipersuperficies $\{\Sigma\}$ como de espacio.

H-2. A cada hipersuperficie Σ le corresponde una coordenada temporal x^0 .

H-3. Cada hipersuperficie Σ es localmente isotrópica.

H-4. Todos los puntos sobre cada hipersuperficie Σ son equivalentes.

Los postulados H-1 y H-2 corresponden a la escogencia de un sistema de coordenadas gaussiano: Sea Σ una hipersuperficie de la familia $\{\Sigma\}$ de H-1 y sea \mathbf{n} un vector unitario normal a Σ , entonces se debe satisfacer que

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu > 0 \quad (10.1)$$

Sea $\tilde{x}^i = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ las coordenadas de un punto $\tilde{p} \in \Sigma$ y Γ la geodésica que pasa por este punto $\tilde{p} \in \Sigma$ con vector tangente \mathbf{n} . Sobre la geodésica Γ definamos las coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) de un punto $p \in \Gamma$ por:

$$x^0 = \text{longitud de arco } \tilde{p}p \text{ sobre } \Gamma \quad (10.2)$$

$$x^i = \tilde{x}^i \quad (10.3)$$

así, las coordenadas espaciales (x^1, x^2, x^3) permanecen constantes a lo largo de cualquier geodésica Γ normal a Σ , y por lo tanto a lo largo de una de tales geodésicas se debe cumplir que

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 \quad (10.4)$$

Esto implica que siempre podemos reescalar la coordenada temporal $x^0 \rightarrow \sqrt{g_{00}} x^0$ de tal manera que

$$ds^2 = (dx^0)^2 \quad (10.5)$$

y por lo tanto la coordenada temporal x^0 corresponde al tiempo propio medido por un observador en reposo en una galaxia. Por esta razón, todos los observadores sobre la misma hipersuperficie Σ registran el mismo tiempo x^0 , lo cual justifica el nombre de "tiempo cósmico".

La ortogonalidad de la geodésica Γ a la hipersuperficie Σ significa que en estas coordenadas se debe tener que

$$g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0 \quad (10.6)$$

y por lo tanto el elemento de arco toma la forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (10.7)$$

Ésta es la razón por la cual las coordenadas elegidas se llaman "co-móviles", pues a lo largo de cada una de las líneas de universo de las galaxias, geodésicas Γ , las coordenadas espaciales x^i de las galaxias no cambian, es decir, las galaxias permanecen en reposo respecto a estas coordenadas.

El postulado H-3 (isotropía local) implica que siempre es posible escoger coordenadas de tal manera que reflejen la simetría esférica, es decir, el elemento de línea espacial debe ser de la forma

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (10.8)$$

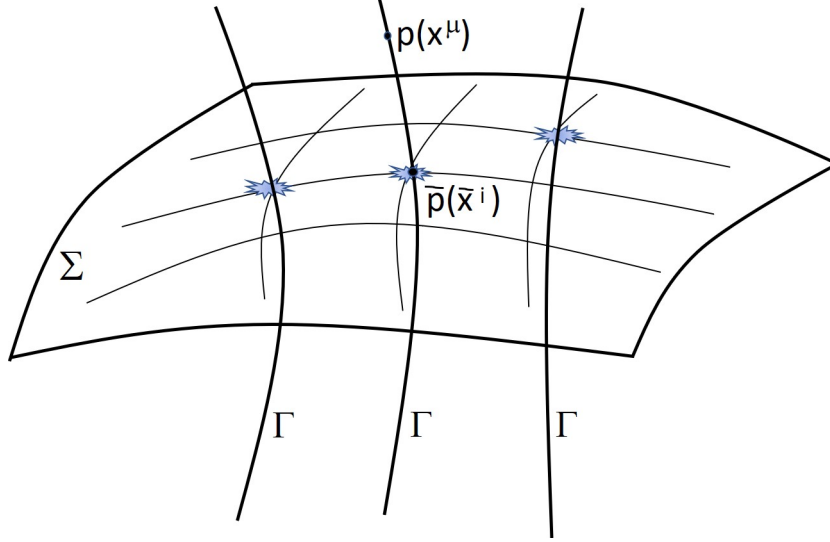


Figura 10-1: Coordenadas cosmológicas

Por lo tanto, el intervalo espacio-tiempo en estas coordenadas debe ser de la forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{G(x^0, r)} d\sigma^2 \quad (10.9)$$

donde la función G no depende de las coordenadas angulares θ y φ por la hipótesis de isotropía local y al escribir el elemento de arco de esta forma se está garantizando que la signatura de la métrica se mantiene invariable en toda la variedad.

El postulado H-4 exige que dos observadores cualesquiera en puntos diferentes sobre una hipersuperficie Σ observen una física similar, es decir, lo único que puede diferir para los dos observadores es la escala de medida. Esto significa que la razón de las distancias propias entre dos puntos del espacio, con coordenadas $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ y $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$, debe permanecer fija en el tiempo, esto es, debe ser independiente de x^0 , así:

$$\frac{e^{G(x^0, r_1)}}{e^{G(x^0, r_2)}} = F(r_1, r_2); \quad \text{independiente de } x^0 \quad (10.10)$$

lo cual implica que la función $G(x^0, r)$ debe ser de la forma

$$G(x^0, r) = g(x^0) + h(r) \quad (10.11)$$

con g y h funciones arbitrarias. Entonces la forma más general de la métrica que satisface los postulados H-1 al H-4, es decir el principio cosmológico, está dada por

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)} e^{h(r)} d\sigma^2 \quad (10.12)$$

Consideremos ahora las ecuaciones de campo de Einstein. Para este fin calculemos primero los símbolos de Christoffel a partir de la ecuación de las geodésicas

y las ecuaciones de Euler-Lagrange (se deja como ejercicio). Denotando por una prima las derivadas de una función respecto a su argumento, los símbolos de Christoffel no nulos son los siguientes:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g'e^{g+h}; \quad \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g'r^2e^{g+h}; \quad \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g'r^2e^{g+h}\sin^2\theta$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g'; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}h'$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r^2\left(\frac{1}{2}h' + \frac{1}{r}\right); \quad \Gamma_{33}^1 = -r^2\left(\frac{1}{2}h' + \frac{1}{r}\right)\sin^2\theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}h' + \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta; \quad \Gamma_{23}^3 = -\cot\theta$$

A partir de estos símbolos, las componentes no nulas del tensor de Ricci están dadas por (ejercicio):

$$R_{00} = \frac{3}{2}g' + \frac{3}{4}g^2 \quad (10.13)$$

$$R_{11} = h' + \frac{1}{r}h' - e^{g+h}\left(\frac{1}{2}g' + \frac{3}{4}g^2\right) \quad (10.14)$$

$$R_{22} = r^2\left[\frac{1}{2}h' + \frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{2r}h' - e^{g+h}\left(\frac{1}{2}g' + \frac{3}{4}g^2\right)\right] \quad (10.15)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22} \quad (10.16)$$

además, las componentes contravariantes del tensor métrico son

$$g^{\mu\nu} = \text{diagonal}\left(1, -e^{g+h}, -\frac{1}{r^2}e^{g+h}, -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}e^{g+h}\right) \quad (10.17)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, el escalar curvatura toma la forma

$$\mathcal{R} = 3(g' + g^2) - 2e^{g+h}\left(h' + \frac{1}{4}h^2 + \frac{2}{r}h'\right) \quad (10.18)$$

Por lo tanto las ecuaciones de campo de Einstein, en componentes mixtas, con constante cosmológica

$$R^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}Rg^\alpha{}_\beta + \Lambda g^\alpha{}_\beta = -\frac{8\pi G}{c^2}T^\alpha{}_\beta \quad (10.19)$$

conducen al siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$e^{-g-h}\left(h' + \frac{h^2}{4} + \frac{2h'}{r}\right) - \frac{3g^2}{4} + \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2}T^0{}_0 \quad (10.20)$$

$$e^{-g-h}\left(\frac{h^2}{4} + \frac{h'}{r}\right) - g' - \frac{3g^2}{4} + \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2}T^1{}_1 \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned}
e^{-g-h} \left(\frac{h'}{2} + \frac{h'}{2r} \right) - g' - \frac{3g^2}{4} + \Lambda &= -\frac{8\pi G}{c^2} T^2{}_2 \\
&= -\frac{8\pi G}{c^2} T^3{}_3
\end{aligned} \quad (10.22)$$

$$0 = -\frac{8\pi G}{c^2} T^\mu{}_\nu; \quad \mu \neq \nu \quad (10.23)$$

La forma del tensor momentum-energía también debe manifestar la simetría exigida por el principio cosmológico. Así, por isotropía local, las componentes espaciales del tensor momentum-energía $T^i{}_j$, bajo una transformación ortogonal de las coordenadas espaciales, no cambian y por lo tanto todos sus valores propios deben ser iguales. Esto significa que las componentes $T^i{}_j$ deben ser un múltiplo de la matriz unidad:

$$T^i{}_j = A \delta^i_j \quad (10.24)$$

donde A es un escalar que sólo depende de x^0 y r . Puesto que $\delta^i_j = g^i_j$, esta ecuación es tensorial y por lo tanto es válida en todos los sistemas de coordenadas; así, se debe cumplir la condición

$$T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3 \quad (10.25)$$

entonces, de las ecuaciones 10.21 y 10.22 la función h debe satisfacer la siguiente condición:

$$\begin{aligned}
\frac{h^2}{4} + \frac{h'}{r} &= \frac{h'}{2} + \frac{h'}{2r} \quad \Leftrightarrow \\
h' - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{r}h' &= 0
\end{aligned} \quad (10.26)$$

Esta ecuación admite una primera integral

$$h' = a r e^{h/2} \quad (10.27)$$

donde a es una constante de integración. Esta ecuación admite la solución general

$$e^h = \frac{b^2}{\left[1 - \frac{ab}{4}r^2\right]^2} \quad (10.28)$$

con b otra constante de integración. Si definimos

$$|ab| = \frac{1}{r_0^2} \quad (10.29)$$

entonces la ecuación 10.28 la podemos escribir en la forma

$$e^h = \frac{1/(a^2 r_0^2)}{\left[1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right]^2} \quad (10.30)$$

donde $k = 0, +1, -1$ dependiendo si $ab = 0$, $ab < 0$ o $ab > 0$ respectivamente. Además, dado que la constante b^2 se puede absorber en la función e^g , entonces la métrica se simplifica tomando la forma general

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \frac{e^{g(x^0)}}{\left[1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right]^2} d\sigma^2 \quad (10.31)$$

La constante k determina, como veremos, un espacio plano ($k = 0$), esférico ($k > 0$) o hiperbólico ($k < 0$).

Si utilizamos la expresión obtenida para la función $h(r)$ para calcular el paréntesis del lado izquierdo de las ecuaciones 10.21 y 10.22, obtenemos

$$e^{-h} \left(\frac{h^2}{4} + \frac{h}{r} \right) = \frac{a}{b} = \text{const.} \quad (10.32)$$

entonces, teniendo en cuenta la ecuación 10.25 el sistema de ecuaciones 10.21 y 10.22 se reducen

$$\frac{a}{b} e^{-g} - g' - \frac{3g^2}{4} + \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = -\frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} T_3^3 \quad (10.33)$$

Dado que el lado izquierdo de estas ecuaciones no depende explícitamente de r , esto demuestra la homogeneidad del triespacio.

Antes de continuar con las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales serán el tema central del próximo capítulo, reescribamos el elemento de línea, ecuación 10.31,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^g \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{\left[1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right]^2} \quad (10.34)$$

en la forma estándar utilizada comúnmente. Para este fin realizaremos las siguientes transformaciones de coordenadas; en primer lugar, con el fin de simplificar las expresiones escribamos el elemento de línea en la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^g (F(r) dr^2 + r^2 F(r) d\Omega^2) \quad (10.35)$$

donde

$$F(r) = \left[1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right]^{-2} = [1 - \alpha r^2]^{-2} \quad (10.36)$$

Definamos una nueva coordenada x por

$$x^2 = r^2 F(r) \quad (10.37)$$

diferenciando esta expresión tenemos

$$2x dx = (r^2 F' + 2r F) dr \quad (10.38)$$

despejando dr y reemplazando en la expresión $F(r)dr^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} F(r)dr^2 &= \frac{4x^2 F}{(r^2 F' + 2rF)^2} dx^2 \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{rF'}{2F}\right)^2} dx^2 \end{aligned} \quad (10.39)$$

De la definición 10.36 para la función F tenemos que

$$F' = \frac{4\alpha r}{(1 - \alpha r^2)^3} \quad (10.40)$$

entonces

$$\frac{F'}{F} = 4\alpha r F^{1/2} \quad (10.41)$$

reemplazando este resultado en la ecuación 10.39 se obtiene

$$F(r)dr^2 = \frac{1}{(1 + 2\alpha r^2 F^{1/2})^2} dx^2 \quad (10.42)$$

para simplificar esta ecuación consideremos primero el denominador y reemplacemos la función F , entonces:

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha r^2 F^{1/2} &= 1 + \frac{2\alpha r^2}{1 - \alpha r^2} \\ &= \frac{1 + \alpha r^2}{1 - \alpha r^2} \end{aligned} \quad (10.43)$$

despejando la coordenada r de la ecuación 10.37

$$r = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha x^2}}{2\alpha x} \quad (10.44)$$

donde se ha tomado el signo positivo de la ecuación cuadrática dado que $r \geq 0$. Reemplazando este resultado en la ecuación 10.43 tenemos

$$\frac{1 + \alpha r^2}{1 - \alpha r^2} = \frac{1 + 4\alpha x^2 - \sqrt{1 + 4\alpha x^2}}{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha x^2}} \quad (10.45)$$

y racionalizando esta expresión obtenemos

$$\frac{1 + \alpha r^2}{1 - \alpha r^2} = \sqrt{1 + 4\alpha x^2} \quad (10.46)$$

reemplazando esta expresión en la ecuación 10.42

$$F(r)dr^2 = \frac{1}{1 + 4\alpha x^2} dx^2 \quad (10.47)$$

así, el elemento de línea 10.35 toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - e^g \left(\frac{dx^2}{1 + 4\alpha x^2} + x^2 d\Omega^2 \right) \\ &= c^2 dt^2 - e^g \left(\frac{dx^2}{1 - k \frac{x^2}{r_0^2}} + x^2 d\Omega^2 \right) \end{aligned} \quad (10.48)$$

definamos finalmente la transformación

$$x \rightarrow r = \frac{x}{r_0} \quad (10.49)$$

donde la nueva coordenada r es adimensional y no corresponde a la coordenada radial inicialmente utilizada. Con esta última definición obtenemos la métrica de Robertson-Walker (R-W)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (10.50)$$

donde se ha absorbido una constante r_0 en la función e^g y se ha remplazado la función resultante por la función $R^2(t)$, llamado el factor de escala, por las razones que se verán más adelante.

10.1.1. Geometría espacial de la métrica de R-W

La parte espacial de la métrica de Robertson-Walker (ecuación 10.50) admite una interpretación geométrica sencilla. Veamos inicialmente el caso $k = 1$, y consideremos la longitud de la curva con $r = cte.$ (círculo) en el plano $\varphi = cte.$ Entonces

$$\mathcal{C} = 2 \int \sqrt{-g_{\theta\theta}} d\theta = 2 \int_0^\pi r R d\theta = 2\pi r R \quad (10.51)$$

y el área de la 2-esfera $r = cte.$ está dada por

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 R^2 \sin \theta = 4\pi r^2 R^2 \quad (10.52)$$

sin embargo, la distancia física radial (el radio físico del círculo y la 2-esfera) desde el origen de coordenadas a un punto de coordenada r es

$$\begin{aligned} r_f &= \int_{t, \theta, \varphi = cte.} ds = R(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} \\ &= R \arcsin r \neq rR \end{aligned} \quad (10.53)$$

Este resultado ilustra la interpretación física de la función R como un factor de escala. Para sustentar más claramente la interpretación geométrica de la métrica de Robertson-Walker, escribamos el elemento de arco ds en la forma

$$ds^2 = (dx^0)^2 - h_{ij} dx^i dx^j \quad (10.54)$$

donde h_{ij} son las componentes espaciales del tensor métrico. Las componentes del tensor de Riemann, de Ricci y el escalar curvatura para la parte espacial (3-variedad espacial), las cuales denotaremos por ${}^3\mathcal{R}_{ijkl}$, ${}^3\mathcal{R}_{ij}$ y ${}^3\mathcal{R}$ respectivamente, están dadas por:

$${}^3\mathcal{R}_{ijkl} = \frac{k}{R^2}(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{kj}) \quad (10.55)$$

$${}^3\mathcal{R}_{ij} = \frac{2k}{R^2}h_{ij} \quad (10.56)$$

$${}^3\mathcal{R} = \frac{6k}{R^2} \quad (10.57)$$

Notemos que para $k = 0$ se anulan y por lo tanto tenemos un 3-espacio euclideo (tensor de Riemann globalmente nulo). Por completez, escribamos las componentes del tensor de Ricci y del escalar curvatura para la métrica de Robertson-Walker (incluyendo los símbolos de Christoffel no nulos):

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}h^{il}\left(\frac{\partial h_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^l}\right) \quad (10.58)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R}h_{ij} \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{R}}{R}\delta_j^i \quad (10.59)$$

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R} \quad (10.60)$$

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right)g_{ij} \quad (10.61)$$

$$\mathcal{R} = -6\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right) \quad (10.62)$$

notemos que en este caso si $k = 0$ el tensor de Ricci y el escalar curvatura no se anulan, pues en general el factor de escala es una función de la coordenada temporal $R = R(t)$.

Consideremos ahora el caso simplificado de un espacio bidimensional homogéneo e isotrópico e ilustremos el caso de un espacio esférico S^2 ($k = 1$). Para el espacio plano \mathbb{R}^2 ($k = 0$) y un espacio hiperbólico H^2 ($k = -1$) se puede seguir un procedimiento similar.

Una 2-esfera de radio R se puede visualizar en \mathbb{R}^3 como una inmersión de la superficie curva bidimensional en el espacio euclideo de coordenadas (x^1, x^2, x^3) por la ecuación:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2 \quad (10.63)$$

con el elemento de línea euclideo dado por

$$d\vec{\ell}^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (10.64)$$

Si eliminamos la coordenada x^3 de la ecuación 10.63, el elemento de línea toma la forma

$$d\vec{\ell}^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \frac{(x^1 dx^1 + x^2 dx^2)^2}{R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2} \quad (10.65)$$

Definamos las nuevas coordenadas \tilde{r} y $\tilde{\theta}$ en términos de x^1 y x^2 por

$$x^1 = \tilde{r} \cos \tilde{\theta} \quad (10.66)$$

$$x^2 = \tilde{r} \sin \tilde{\theta} \quad (10.67)$$

Geométricamente \tilde{r} y $\tilde{\theta}$ corresponden a coordenadas polares en el plano $x^3 = \text{cte}$ ($(x^3)^2 = R^2 - \tilde{r}^2$), como se muestra en la figura ?? . En estas coordenadas el elemento de línea se puede escribir en la forma:

$$d\vec{\ell}^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\theta}^2 + \frac{\tilde{r}^2 d\tilde{r}^2}{R^2 - \tilde{r}^2} = \frac{R^2 d\tilde{r}^2}{R^2 - \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\tilde{\theta}^2 \quad (10.68)$$

Si definimos la coordenada adimensional

$$r = \frac{\tilde{r}}{R} \quad (10.69)$$

con $0 \leq r \leq 1$, el elemento de línea toma la forma final

$$d\vec{\ell}^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\tilde{\theta}^2 \right) \quad (10.70)$$

que es similar a la métrica de Robertson-Walker para $k = 1$.

Otra manera de enunciar el elemento de línea consiste en expresar las coordenadas de un punto sobre la 2-esfera en coordenadas esféricas θ y φ , para las cuales tenemos las siguientes relaciones:

$$x^1 = R \sin \theta \cos \varphi \quad (10.71)$$

$$x^2 = R \sin \theta \sin \varphi \quad (10.72)$$

$$x^3 = R \cos \theta \quad (10.73)$$

entonces

$$d\vec{\ell}^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (10.74)$$

la cual muestra de manera manifiesta que el 2-espacio es una esfera de radio R .

El volumen de esta 2-esfera (área de la esfera) se puede obtener a partir de la integral

$$V = \int \sqrt{|h|} d^2x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta R^2 \sin \theta = 4\pi R^2 \quad (10.75)$$

donde h es el determinante del tensor métrico h_{ij} , como era de esperarse. La esfera S^2 es homogénea e isotrópica y todos los puntos son equivalentes. No

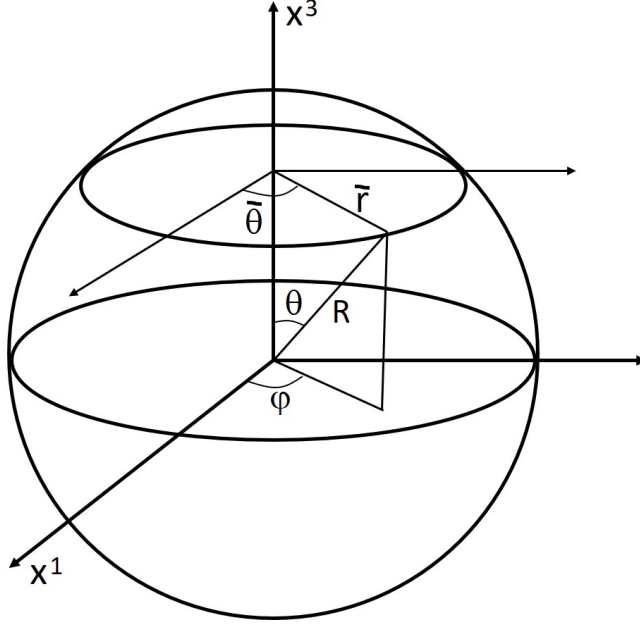


Figura 10-2: Dos-esfera en el espacio euclideo

hay fronteras y el espacio no es acotado, aun cuando su volumen es finito. Si el radio R de la esfera varía, se expande o se contrae, los puntos sobre la esfera no cambian sus coordenadas, lo cual justifica el nombre de coordenadas comóviles. Además, la distancia física entre dos puntos se escala con R y es por esta razón que R se llama factor de escala.

El espacio de curvatura global negativa ($k = -1$) no es posible representarlo por una inmersión en \mathbb{R}^3 , pero su representación bidimensional se puede obtener a partir de la anterior para la esfera haciendo el cambio de $R \rightarrow iR$, y el elemento de línea se puede escribir como

$$d\tilde{\ell}^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\tilde{\theta}^2 \right) \quad (10.76)$$

o en la forma

$$d\tilde{\ell}^2 = R^2 (d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2) \quad (10.77)$$

El espacio hiperbólico es homogéneo e isotrópico, no acotado y de volumen infinito. En el caso del espacio con curvatura espacial nula (el plano $k = 0$), el factor de escala no representa un radio, como en el caso de la 2-esfera, sino el factor en el cual se escalan las distancias físicas entre puntos comóviles.

Para finalizar esta sección, la métrica de Robertson-Walker se puede expresar en términos del tiempo conforme, definido como

$$d\eta = \frac{dt}{R(t)} \quad (10.78)$$

entonces

$$ds^2 = R^2(\eta) \left(d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (10.79)$$

lo cual muestra que la métrica de Robertson-Walker es conforme a la métrica minkowskiana.

Una condición necesaria y suficiente para que una métrica sea conforme a la métrica de Minkowski es que el tensor curvatura de Weyl se anule. El tensor de Weyl se define como la parte sin traza del tensor curvatura de Riemann, dado por

$$C^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} - 2\delta^{[\alpha}_{[\gamma} R^{\beta]}_{\delta]} + \frac{1}{3}\delta^{[\alpha}_{[\gamma} \delta^{\beta]}_{\delta]} \mathcal{R} \quad (10.80)$$

10.2. Propiedades de la métrica de R-W

La métrica de Robertson-Walker se obtuvo a partir de consideraciones de simetría (principio cosmológico) y está determinada salvo el factor de escala R y la constante k que determina la geometría espacial.

Las formas precisas del factor de escala y de la constante k se obtienen a partir de las ecuaciones de campo de Einstein, sobre la base de un modelo para la distribución de materia, i.e., el tensor energía-momentum, lo cual será el tema del siguiente capítulo. Sin embargo, independientemente del modelo adoptado para la materia, es posible obtener varias propiedades físicas a partir de la métrica de Robertson-Walker. Esta sección se dedica a estudiar algunas consecuencias de la métrica de Robertson-Walker.

10.2.1. Horizonte de eventos

Un primer resultado importante que presenta la métrica de Robertson-Walker lo constituye la pregunta sobre el contacto causal. Es decir, sabemos que nuestro universo está en expansión, lo cual se refleja en la métrica a través del factor de escala y por lo tanto se plantea la pregunta: para un observador como nosotros, ¿qué parte del universo está en contacto causal con nosotros?, o en otros términos: para un observador comóvil situado en las coordenadas $(t, r_0, \theta_0, \varphi_0)$, ¿para cuáles valores de (r, θ, φ) una señal de luz emitida en este punto en $t = 0$ alcanzaría al observador en o antes del instante t ?

Para responder a esta pregunta consideremos una señal de luz que sigue una trayectoria que satisface la ecuación $ds = 0$. Dada la homogeneidad del espacio, sin pérdida de generalidad y para simplificar los cálculos, tomemos $r_0 = 0$, entonces las geodésicas de luz que pasan por $r_0 = 0$ son curvas de θ y φ constante, y por lo tanto $d\theta = d\varphi = 0$, y además la isotropía del espacio hace que la escogencia de θ_0 y φ_0 sea irrelevante. Con estas consideraciones un rayo de luz que parte del punto $(r_H, \theta_0, \varphi_0)$ en el instante $t = 0$ sigue una geodésica tal que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0 \quad (10.81)$$

y alcanza el punto $r_0 = 0$ en el instante t dado por

$$\int_0^t \frac{cdt'}{R(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \begin{cases} \arcsin r_H & k = 1 \\ \operatorname{arcsinh} r_H & k = -1 \\ r_H & k = 0 \end{cases} \quad (10.82)$$

La coordenada r_H se llama radio del horizonte. La distancia propia del origen $r_0 = 0$ al radio del horizonte en el instante t está dada por:

$$d_H(t) = \int_0^{r_H} \sqrt{-g_{rr}} dr = R(t) \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (10.83)$$

la cual se puede escribir solamente en términos del factor de escala, utilizando la ecuación 10.82,

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{cdt'}{R(t')} \quad (10.84)$$

Si la distancia al horizonte d_H es finita, esto significa que nuestro cono de luz pasado está limitado por un horizonte de partícula, una superficie bi-dimensional como de espacio, la cual constituye la frontera entre el universo visible y la parte del universo (sea finito o infinito) de la cual la luz no ha llegado a nosotros. Si la distancia al horizonte d_H es infinita, significa que todo el universo es observable y todos los puntos están en contacto causal. El comportamiento del factor de escala $R(t)$ en las vecindades de $t = 0$ determina si la distancia al horizonte es finita o no. En el modelo estándar de la cosmología veremos que $d_H(t) \sim t$ y por lo tanto es finito.

10.2.2. Movimiento propio de partículas en R-W

Consideremos ahora el comportamiento de una partícula en caída libre en la métrica de Robertson-Walker. Sea U^μ las componentes de la cuadvirvelocidad de la partícula con respecto al sistema de coordenadas comóviles. Entonces, dado que la partícula está en caída libre su línea de universo sigue la ecuación geodésica

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (10.85)$$

donde

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (10.86)$$

Las componentes de la cuadvirvelocidad están relacionadas con la velocidad de la partícula $v^i = dx^i/dt$ a través de la relación

$$U^\mu = (U^0, U^i) = (c\gamma(\mathbf{v}), \gamma(\mathbf{v})v^i) \quad (10.87)$$

donde

$$\gamma(|\mathbf{v}|) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}} \quad (10.88)$$

$$|\mathbf{v}|^2 = h_{ij}v^i v^j \quad (10.89)$$

Consideremos la componente $\mu = 0$ de la ecuación de movimiento geodésico para la partícula

$$\frac{dU^0}{ds} + \frac{1}{c^2} \Gamma_{\alpha\beta}^0 U^\alpha U^\beta = 0 \quad (10.90)$$

y utilizando la ecuación 10.59 para las conexiones, la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{dU^0}{ds} + \frac{1}{c^2} \frac{\dot{R}}{R} h_{ij} U^i U^j = 0 \quad (10.91)$$

llamando $|\mathbf{U}|^2 = h_{ij} U^i U^j$, la ecuación anterior se puede escribir

$$\frac{dU^0}{ds} + \frac{1}{c^2} \frac{\dot{R}}{R} |\mathbf{U}|^2 = 0 \quad (10.92)$$

Puesto que

$$c^2 = g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = (U^0)^2 - h_{ij} U^i U^j = (U^0)^2 - |\mathbf{U}|^2 \quad (10.93)$$

implica que

$$U^0 dU^0 = |\mathbf{U}| d|\mathbf{U}| \quad (10.94)$$

y por lo tanto la componente 0 de la ecuación de movimiento geodésico se transforma en la ecuación

$$\frac{1}{U^0} \frac{d|\mathbf{U}|}{ds} + \frac{1}{c^2} \frac{\dot{R}}{R} |\mathbf{U}| = 0 \quad (10.95)$$

teniendo en cuenta que $ds = cd\tau$, entonces

$$U^0 = dx^0/d\tau = c^2 dt/ds \quad (10.96)$$

y esta ecuación se puede escribir finalmente en la forma

$$\frac{1}{|\mathbf{U}|} \frac{d}{dt} |\mathbf{U}| = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} R \quad (10.97)$$

lo cual implica (integrando y llamando C la constante de integración) que

$$\ln |\mathbf{U}| + \ln R = C \implies |\mathbf{U}| \propto R^{-1} \quad (10.98)$$

Si expresamos esta ecuación en términos de la velocidad de la partícula $|\mathbf{U}| = \gamma(\mathbf{v}) |\mathbf{v}|$, entonces

$$\gamma(\mathbf{v}) |\mathbf{v}| \propto R^{-1} \quad (10.99)$$

teniendo en cuenta que el cuadrimomentum físico de una partícula está dado por $p^\mu = m_0 U^\mu$, la relación anterior implica que la magnitud del momentum de la partícula disminuye (se corre hacia el rojo) si el factor de escala aumenta (expansión del universo):

$$|\mathbf{p}| \propto R^{-1} \quad (10.100)$$

Es decir, en un universo en expansión, si una partícula se está moviendo respecto a un observador comóvil (tiene una velocidad peculiar), entonces la partícula tiende al reposo a medida que el universo se expande.

10.2.3. Corrimiento al rojo

Consideremos ahora la luz emitida por un objeto que se propaga en el espacio-tiempo definido por la métrica de Robertson-Walker. Teniendo en cuenta la relación entre momentum y frecuencia (o longitud de onda) para un fotón

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (10.101)$$

con $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ el número de onda, y notando que los resultados encontrados en la sección anterior son independientes de la parametrización utilizada en la ecuación geodésica, entonces la ecuación 10.100 implica que considerando una partícula que en el instante t_1 tiene momentum \mathbf{p}_1 y en un tiempo posterior t_0 tendrá un momentum \mathbf{p}_0 , entonces los momentos están relacionados por la ecuación:

$$|\mathbf{p}_1| R(t_1) = |\mathbf{p}_0| R(t_0) \quad (10.102)$$

entonces de la ecuación 10.101 tenemos que se cumple la relación

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \quad (10.103)$$

La interpretación física de esta ecuación es inmediata: si en el instante t_1 se emite un rayo de luz de longitud de onda λ_1 , entonces un tiempo después t_0 la longitud de onda del rayo ha cambiado de acuerdo con la relación 10.103; si el universo se está expandiendo la longitud de onda aumenta proporcionalmente al factor de escala (corrimiento al rojo); si el universo se está contrayendo la longitud de onda disminuye (corrimiento al azul).

Este mismo resultado se puede obtener, y es ilustrativo de la metodología empleada, considerando la propagación de la luz como un fenómeno típicamente ondulatorio. Supongamos que en el instante t_1 se emite un frente de ondas desde el punto de coordenadas r_1 y de longitud de onda λ_1 , el cual es detectado en el origen $r_0 = 0$ en el instante t_0 . Dado que el frente de ondas sigue una geodésica nula ds^2 , entonces la coordenada radial y la temporal están relacionadas por

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt'}{R(t')} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1) \quad (10.104)$$

Consideremos un segundo frente de ondas emitido en r_1 en un instante posterior $t_1 + \delta t_1$ y detectado en $r = 0$ en el instante $t_0 + \delta t_0$, entonces este frente también sigue una geodésica nula y por lo tanto se debe cumplir que

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt'}{R(t')} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1) \quad (10.105)$$

dado que el lado derecho de las ecuaciones 10.104 y 10.105 es igual e independiente del tiempo, entonces tenemos que

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt'}{R(t')} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt'}{R(t')} \quad (10.106)$$

aplicando las propiedades de la integral definida, la expresión anterior toma la forma

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{cdt'}{R(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt'}{R(t)} \quad (10.107)$$

Si el intervalo de tiempo δt es suficientemente pequeño, entonces la ecuación anterior se puede integrar para obtener

$$\frac{\delta t_1}{R(t_1)} = \frac{\delta t_0}{R(t_0)} \quad (10.108)$$

Si δt es el tiempo entre dos crestas sucesivas, entonces $c\delta t = \lambda$ es la longitud de onda de la luz; así obtenemos de nuevo la relación 10.103.

En astronomía se define el factor de corrimiento z de un objeto en términos de la razón de la diferencia de las longitudes de onda recibida y emitida con respecto a la longitud de onda emitida

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (10.109)$$

o en forma equivalente, la cual es de uso más frecuente, como

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \quad (10.110)$$

Así, si el factor de escala está aumentando entonces $z > 0$ y se llama corrimiento al rojo, en caso contrario, $z < 0$ es el factor de corrimiento al azul.

Es importante aclarar que un objeto celeste, además del factor de corrimiento debido a la expansión del universo, puede tener también un cambio en la frecuencia detectada debido a su velocidad peculiar respecto al observador, conocido como efecto Doppler.

La expansión del universo fue sugerida por primera vez en 1929 por Hubble, quien encontró una relación entre el corrimiento al rojo que presentaban varias galaxias y la distancia a la Tierra. Esta relación, conocida como ley de Hubble, se puede obtener a partir de la métrica de Robertson-Walker, sin necesidad de resolver las ecuaciones de campo de Einstein para algún modelo concreto. Antes de entrar en la deducción de la ley de Hubble, definiremos el concepto fundamental de distancia el cual juega un papel muy importante en cosmología y su relación con la astronomía a gran escala.

10.2.4. El problema de distancias en cosmología

En la ecuación 10.83 definimos el concepto de distancia propia

$$d_p(t) = \int_0^r \sqrt{-g_{rr}} dr = R(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (10.111)$$

entre el origen de coordenadas y un punto de coordenada radial r . Esta definición corresponde al concepto de distancia propia definido en relatividad especial.

Aun cuando esta definición de distancia corresponde a la idea que tenemos de distancia, por ejemplo entre el Sol y la Tierra, para efectos de la astronomía a gran escala esta definición no es muy relevante.

Observacionalmente la distancia entre objetos celestes se puede medir a partir de diferentes técnicas y por esto se hace necesario definir diferentes conceptos de distancia dependiendo del método utilizado. Claramente estas distancias no son independientes y existe una relación entre ellas. Además, para objetos cercanos con coordenada radial $r \ll 1$ (o equivalentemente para objetos cuyas distancias propias estén por debajo de $10^9 \text{ años} - \text{luz}$) todas las distancias que definiremos prácticamente coinciden con la distancia propia definida en la ecuación 10.111.

Observacionalmente dos definiciones de distancia son relevantes en astronomía: la distancia de luminosidad d_L y la distancia diametral angular d_A . La primera se basa en la relación entre la luminosidad propia de un objeto y su luminosidad aparente, y la segunda en la relación entre el diámetro propio de un objeto y el diámetro angular observado. En el caso de un espacio euclideo estático, las tres distancias, d_p , d_L y d_A , son equivalentes, como veremos. Pero cuando el espacio no es euclideo y/o no es estático, la relación entre estas distancias depende, en general, de la métrica del espacio.

10.2.4.1. Distancia de luminosidad

Consideremos en primer lugar la distancia de luminosidad d_L . Para este fin definamos en primer lugar la luminosidad aparente de una fuente medida por un observador para el caso de un espacio euclideo estático. Para definir la luminosidad aparente consideremos un telescopio de espejo circular de área A , con el origen de coordenadas en el centro del espejo y la normal al espejo en su centro \hat{n} en la dirección del objeto observado. Si la distancia euclidea de la fuente al espejo la llamamos d_L , entonces el flujo \mathcal{F} que llega al espejo del telescopio (energía incidente por unidad de área y por unidad de tiempo) es igual a la energía por unidad de tiempo emitida por el objeto \mathcal{L} (su luminosidad propia o intrínseca) dividida entre el área total de la esfera de radio d_L , es decir

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{L}}{4\pi d_L^2} \quad (10.112)$$

Para el caso general de un espacio no euclideo, definimos la distancia de luminosidad como la relación entre la luminosidad propia del objeto \mathcal{L} y el flujo \mathcal{F} medido por el observador, como

$$d_L^2 = \frac{\mathcal{L}}{4\pi\mathcal{F}} \quad (10.113)$$

Notemos en primer lugar la diferencia entre las ecuaciones 10.112 y 10.113, aparentemente idénticas. En el caso euclideo (ecuación 10.112) d_L corresponde a la distancia euclidea entre la fuente y el observador, pero en el caso general (ecuación 10.113) d_L no corresponde ni a la distancia a la cual se encontraba la

fuelle del observador en el instante t_1 de emisión de la radiación, ni a la distancia entre fuente y observador en el instante t_0 de observación. La razón para esto es la siguiente: consideremos una fuente co-móvil situada en la coordenada r_1 que emite un frente de radiación en el instante t_1 , el cual es detectado por el observador situado en $r = 0$ en el instante t_0 ; entonces la conservación de la energía implica que

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{L}}{4\pi R^2(t_0)r_1^2(1+z)^2} \quad (10.114)$$

Para entender el origen de esta última ecuación notemos en primer lugar que en el instante t_0 de la llegada de la radiación al espejo del telescopio, el área de la 2-esfera que rodea la fuente (de radio coordenado r_1) es

$$4\pi R^2(t_0)r_1^2 \quad (10.115)$$

(ver ecuación 10.52), y por lo tanto la fracción del área cubierta por el espejo es

$$\frac{A}{4\pi R^2(t_0)r_1^2} \quad (10.116)$$

Por otra parte, debido a la expansión la energía por unidad de tiempo emitida por la fuente decrece en un factor $(1+z)^2$ cuando llega al espejo, pues de la relación 10.103 la energía hc/λ de un fotón emitido en r_1 en el instante t_1 cuando se detecta en el instante t_0 decrece en un factor

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} = 1+z \quad (10.117)$$

y el otro factor $(1+z)$ surge de la relación 10.108, pues si dos fotones son emitidos con una diferencia de tiempo δt en la fuente, ellos llegan al observador con una diferencia de tiempos de $\delta t(1+z)$. Así, de la definición de distancia de luminosidad (ecuación 10.113), la ecuación 10.114 implica que

$$d_L = R(t_0)r_1(1+z) \quad (10.118)$$

la cual también se puede escribir en la forma

$$d_L = R^2(t_0)\frac{r_1}{R(t_1)} \quad (10.119)$$

teniendo en cuenta la ecuación 10.110.

10.2.4.2. Distancia diametral angular

La distancia diametral angular se basa en la relación entre el diámetro propio del objeto emisor y el diámetro angular aparente. Sea D el diámetro propio de la fuente situada en el punto de coordenada radial r_1 y sea t_1 el instante de emisión de la señal. El observador situado en el origen de coordenadas detecta esta señal en el instante t_0 . Sin pérdida de generalidad podemos elegir las coordenadas angulares para que el centro de la fuente esté en $\theta = 0$. Como se muestra en la

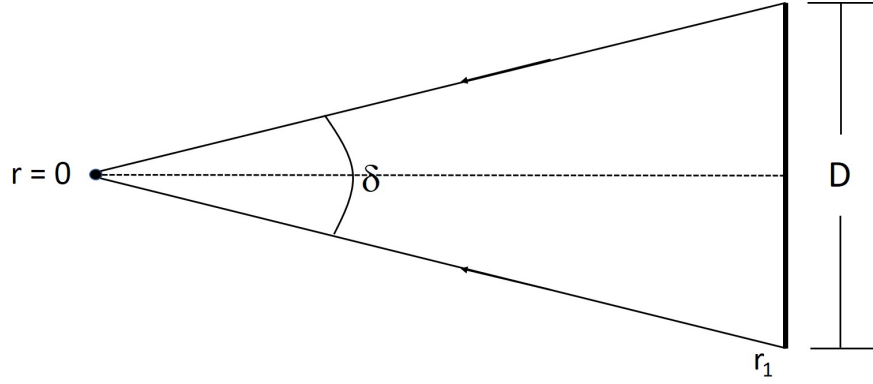


Figura 10-3: Distancia diametral angular

figura ??, los rayos de luz que salen de los bordes opuestos de la fuente, llegan al punto de observación forman un ángulo δ .

De la métrica de Robertson-Walker ($r = cte$, y $\varphi = cte$), el diámetro propio de la fuente, con $\Delta\theta = \delta$ (aproximación válida para $\delta \ll 1$), está dado por

$$D = R(t_1)r_1\delta \quad (10.120)$$

entonces el diámetro angular de la fuente es

$$\delta = \frac{D}{R(t_1)r_1} \quad (10.121)$$

En geometría euclídeana el diámetro angular de una fuente de diámetro D situado a una distancia d está dado por $\delta = D/d$; por lo tanto, definimos la distancia diametral angular d_A , en el caso general, de una fuente de diámetro propio D , como

$$d_A = \frac{D}{\delta} \quad (10.122)$$

y llegamos a la ecuación para la distancia diametral angular de un objeto celeste

$$d_A = R(t_1)r_1 \quad (10.123)$$

como una función de su coordenada radial y del factor de escala del universo en el instante de emisión de la luz. Finalmente, podemos obtener la relación entre la distancia de luminosidad y diametral angular, teniendo en cuenta las ecuaciones 10.110, 10.119 y 10.123:

$$\frac{d_A}{d_L} = \frac{R(t_1)r_1}{R^2(t_0)\frac{r_1}{R(t_1)}} = \frac{R^2(t_1)}{R^2(t_0)} = (1+z)^{-2} \quad (10.124)$$

Para objetos cercanos, es decir para $r_1 \ll 1$ o equivalentemente $z \ll 1$, las distancias propia, de luminosidad y diametral angular coinciden aproximadamente:

$$d_p \approx d_L \approx d_A \approx R(t_0)r_1 \quad (10.125)$$

Para finalizar esta sección mostraremos una relación de las unidades de distancia comúnmente utilizadas en astronomía:

1. La distancia promedio entre la Tierra y el Sol se define como la unidad astronómica (a.u.)

$$1a.u. = 1.49589 \times 10^8 km$$

2. Un parsec (pc) se define como la distancia propia a la cual una estrella presenta un paralaje trigonométrico de 1"; dado que en un radian hay 206.264,8 segundos de arco, entonces

$$1pc = 3.0856 \times 10^{13} km$$

3. Un año luz (a.l.) se define como la distancia recorrida por la luz en un año; entonces

$$1a.l. = 9.4607 \times 10^{12} km$$

4. Por lo tanto, la relación entre estas unidades

$$1pc = 206264.8a.u.$$

$$1pc = 3.2615a.l.$$

$$1a.l. = 63242a.u.$$

10.3. Ley de Hubble

En esta sección derivaremos la ley de Hubble como una consecuencia de la métrica de Robertson-Walker. Hubble reportó en 1929 el resultado observacional más importante de la astronomía en gran escala, pues con este resultado se demostró que el universo no era estático, como se creía hasta entonces, y se dio origen al modelo estándar de la cosmología actual. Las observaciones de los espectros de varias galaxias distantes mostraban que ellas se estaban alejando de nosotros, pues sus espectros presentaban un corrimiento al rojo, el cual dependía de la distancia.

Para este fin expresemos la distancia de luminosidad d_l en términos de z , para lo cual debemos eliminar la dependencia explícita de r_1 . Deberíamos disponer de una expresión explícita del factor de escala $R(t)$, lo cual requiere resolver las ecuaciones de campo de Einstein. Sin embargo, aun sin conocer $R(t)$ podemos expresar los resultados en términos del valor del factor de escala en la época actual, i.e. $R(t_0)$. En lo sucesivo, como es usual en cosmología, t_0 representa el tiempo presente. Para este fin expandiremos en serie de Taylor las expresiones alrededor del tiempo presente, esto es, en potencias de $(t - t_0)$.

Sea

$$f(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)} \quad (10.126)$$

entonces

$$f(t) = f(t_0) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dt^2} \right|_{t_0} (t - t_0)^2 + \dots \quad (10.127)$$

definiendo

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \quad (10.128)$$

llamada la constante de Hubble, y

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)} R(t_0) = -\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)H_0^2} \quad (10.129)$$

el parámetro de desaceleración, la ecuación 10.127 se puede escribir, hasta términos de segundo orden, en la forma

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \quad (10.130)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{R(t_0)}{R(t)} = 1 + z \quad (10.131)$$

la ecuación anterior la podemos escribir como

$$1 + z = \frac{1}{1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots} \quad (10.132)$$

Para valores pequeños de $H_0(t - t_0)$ esta ecuación se puede invertir (expandiendo el lado derecho) para obtener:

$$z = H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \dots \quad (10.133)$$

A partir de esta ecuación, resolviendo la ecuación cuadrática para $(t_0 - t)$ y expandiendo el radical del discriminante de la ecuación obtenemos

$$(t_0 - t) = H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right) z^2 + \dots \right] \quad (10.134)$$

De la ecuación 10.104, que relaciona las coordenadas radial y temporal para un frente de ondas emitido por la fuente ubicada en r en el instante t , integrando la parte real y expandiendo el resultado

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{R(t')} &= f(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \\ &= \begin{cases} \arcsin r & = r + \frac{r^3}{31} + \dots & k = 1 \\ r & = r & k = 0 \\ \operatorname{arcsinh} r & = r - \frac{r^3}{31} + \dots & k = -1 \end{cases} \quad (10.135) \end{aligned}$$

Para calcular la integral del lado izquierdo podemos utilizar la expansión 10.130, y reteniendo términos hasta orden 2 en las expansiones obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{R(t')} &= \frac{c}{R(t_0)} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{1 + H_0(t' - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t' - t_0)^2 + \dots} \\ &= \frac{c}{R(t_0)} \int_t^{t_0} \left[1 - H_0(t' - t_0) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) H_0^2(t' - t_0)^2 + \dots \right] dt' \end{aligned} \quad (10.136)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c}{R(t_0)} \left[(t_0 - t) + H_0 t_0 (t_0 - t) - \frac{1}{2} H_0 (t_0^2 - t^2) + \dots \right] \\ &= \frac{c}{R(t_0)} \left[(t_0 - t) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (10.137)$$

entonces, de la ecuación 10.135, la coordenada r en primera aproximación está dada por

$$r = \frac{c}{R(t_0)} \left[(t_0 - t) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t)^2 + \dots \right] \quad (10.138)$$

Si remplazamos la ecuación 10.134 para $(t_0 - t)$ en la ecuación anterior, obtenemos una relación para r en términos de z (reteniendo términos hasta z^2):

$$\begin{aligned} r &= \frac{c}{R(t_0)} \left[H_0^{-1} z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) z^2 + \frac{1}{2} H_0 H_0^{-2} (z - \dots)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{c}{R(t_0) H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (10.139)$$

Finalmente, la ecuación 10.118 para la distancia de luminosidad la podemos expresar en función del corrimiento al rojo z y de la constante de Hubble H_0 y del parámetro de desaceleración q_0 actual:

$$\begin{aligned} d_L &= R(t_0) r_1 (1 + z) \\ &= R(t_0) (1 + z) \frac{c}{R(t_0) H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right] \\ &= \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (10.140)$$

esta última ecuación la podemos escribir en la forma

$$H_0 d_L = cz + \frac{c}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \quad (10.141)$$

la cual constituye la ley de Hubble. Notemos que para $q_0 \neq 1$ la ley de Hubble no es lineal con z . La forma precisa de la ley de Hubble depende del modelo específico que se asuma para la distribución de masa. En el siguiente capítulo resolveremos las ecuaciones de campo de Einstein para diferentes modelos y por ejemplo veremos que para un modelo de universo dominado por materia

encontraremos la forma exacta para la coordenada r como función de z , lo cual nos conduce a la siguiente forma de la ley de Hubble:

$$H_0 d_L = \frac{c}{q_0^2} \left[z q_0 + (q_0 - 1) \left(\sqrt{2q_0 z + 1} - 1 \right) \right] \quad (10.142)$$

Si expandimos esta expresión para valores pequeños de z tenemos

$$\begin{aligned} H_0 d_L &= \frac{c}{q_0^2} \left[z q_0 + (q_0 - 1) \left(q_0 z - \frac{1}{2} q_0^2 z^2 + \dots \right) \right] \\ &= \frac{c}{q_0^2} \left[z q_0 + q_0^2 z - \frac{1}{2} q_0^3 z^2 - q_0 z + \frac{1}{2} q_0^2 z^2 + \dots \right] \\ &= cz + \frac{c}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \end{aligned} \quad (10.143)$$

la cual se reduce a la ecuación 10.141 como era de esperarse. La ley de expansión de Hubble es la relación entre los observables z y d_L y por lo tanto ella nos permitiría, en principio, determinar q_0 , es decir, el modelo cosmológico. La dificultad observacional está en la medida de la distancia de luminosidad d_L , pues esta distancia depende de la luminosidad propia o absoluta de objetos distantes, como galaxias o supernovas, que puedan ser utilizados como fuentes patrón, a diferencia de la medida del factor de corrimiento z cuya determinación es muy precisa por técnicas espectroscópicas.

Otra relación importante entre cantidades observables y los parámetros cosmológicos es la relación entre la distancia diametral angular d_A y z . Teniendo en cuenta la ecuación 10.124 que relaciona la distancia diametral angular con la distancia de luminosidad, podemos utilizar la relación 10.141 para encontrar una expansión, válida para pequeños corrimientos z :

$$\begin{aligned} d_A &= (1 + z)^{-2} d_L \\ &= (1 - 2z + \dots) \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] \\ &= \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 - 2z^2 + \dots \right] \\ &= \frac{c}{H_0} \left[z - \frac{1}{3} (3 + q_0) z^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (10.144)$$

La expresión exacta para el modelo de universo dominado por materia está dada por

$$d_A = \frac{c}{H_0} \frac{1}{q_0^2 (1 + z)^2} \left[z q_0 + (q_0 - 1) \left(\sqrt{2q_0 z + 1} - 1 \right) \right] \quad (10.145)$$

la cual se reduce a 10.144 para $z \ll 1$.

Esta relación entre el corrimiento al rojo z y la distancia diametral angular es de gran utilidad en el estudio de lentes gravitacionales, las cuales nos ofrecen otras técnicas observacionales para determinar los parámetros del modelo

cosmológico. En efecto, uno de los resultados más importantes derivados de la observación de lentes gravitacionales fue la determinación de una cota inferior para la constante cosmológica, utilizando estadística de lentes, es decir, el conteo del número de lentes gravitacionales por unidad de volumen y por unidad de ángulo sólido para corrimientos entre z y $z + dz$.

Finalizaremos este capítulo con la expresión para el conteo de galaxias como función del corrimiento al rojo, la cual constituye otra herramienta observacional para determinar el modelo cosmológico. Para este fin, sea

$$dV_c = \frac{r^2}{\sqrt{1 - kr^2}} dr d\Omega \quad (10.146)$$

el elemento de volumen comóvil en coordenadas de Robertson-Walker, entonces si llamamos $n_c(t)$ la densidad de galaxias comóvil (número de galaxias por unidad de volumen comóvil), el número de galaxias contenido en el elemento de volumen está dado por

$$dN_{gal} = n_c(t) dV_c = n_c(t) \frac{r^2}{\sqrt{1 - kr^2}} dr d\Omega \quad (10.147)$$

Utilizando la expansión para la coordenada r en términos de z (ecuación 10.139), tenemos

$$\begin{aligned} dN_{gal} &= n_c(t) \frac{\frac{c^2}{R^2(t_0)H_0^2} \left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \dots \right]^2}{\sqrt{1 - k \frac{c^2}{R^2(t_0)H_0^2} \left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \dots \right]^2}} \times \\ &\quad \frac{c}{R(t_0)H_0} [dz - (1 + q_0)zdz + \dots] \\ &= n_c(t) \frac{c^3}{R^3(t_0)H_0^3} [z^2 - (1 + q_0)z^3 + \dots] \times \\ &\quad \left[1 + \frac{1}{2}k \frac{c}{R(t_0)H_0} [z^2 - (1 + q_0)z^3 + \dots] \right] \times \\ &\quad [dz - (1 + q_0)zdz + \dots] \\ &= \frac{n_c(t)c^3}{R^3(t_0)H_0^3} [z^2 - 2(1 + q_0)z^3 + \dots] dz \end{aligned} \quad (10.148)$$

entonces, el número de galaxias por unidad de ángulo sólido y por unidad de intervalo de corrimiento toma la forma

$$\frac{1}{z^2} \frac{dN_{gal}}{dz d\Omega} = \frac{n_c(z)}{R^3(t_0)H_0^3} [1 - 2(1 + q_0)z + \dots] \quad (10.149)$$

A partir de esta relación es posible determinar el modelo cosmológico (i.e. medir q_0) contando el número de galaxias en un volumen dado con corrimientos al rojo entre z y $z + dz$. Al igual que en los casos anteriores, para un modelo de universo dominado por la materia la función conteo de galaxias está dada por

$$\frac{1}{z^2} \frac{dN_{gal}}{dz d\Omega} = \frac{n_c(z)}{R^3(t_0)H_0^3(1 + z)^3 q_0^4} \frac{[zq_0 + (q_0 - 1)(\sqrt{2q_0z + 1} - 1)]^2}{\sqrt{1 - 2q_0(1 + z)}} \quad (10.150)$$

expresión que de nuevo se reduce a la ecuación 10.149 para z pequeño.

Capítulo 11

Modelos cosmológicos

En el capítulo anterior encontramos la forma más general de la métrica, la cual satisface el principio cosmológico. La métrica encontrada (de Robertson-Walker) quedó determinada salvo la función $R(t)$, llamado factor de escala, la cual debe ser determinada a partir de las ecuaciones de campo de Einstein. Para este fin se hace necesario adoptar un modelo que describa el contenido de materia del universo, con la condición que este modelo satisfaga el principio cosmológico.

Como se dijo en la introducción al capítulo anterior, el modelo de materia más sencillo que se puede considerar es el de un fluido perfecto caracterizado por una densidad de energía $\rho(t)$ y una densidad de presión $p(t)$, en general funciones del tiempo. En la ecuación 8.24 encontramos la expresión general que describe un fluido perfecto:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \rho U^\mu U^\nu + p \left(\frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu} \right) \quad (11.1)$$

donde se suprimió el subíndice 0 en ρ y p . En nuestro modelo las partículas que constituyen el fluido son las galaxias, las cuales se encuentran en reposo respecto a las coordenadas de Robertson-Walker. Así, si escribimos el tensor momentum-energía en componentes mixtas tenemos

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu &= g_{\sigma\nu} T^{\mu\sigma} = \frac{1}{c^2} \rho g_{\sigma\nu} U^\mu U^\sigma + p \left(\frac{1}{c^2} g_{\sigma\nu} U^\mu U^\sigma - g_{\sigma\nu} g^{\mu\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \rho U^\mu U_\nu + p \left(\frac{1}{c^2} U^\mu U_\nu - \delta_\nu^\mu \right) \end{aligned} \quad (11.2)$$

teniendo en cuenta que las galaxias están en reposo, entonces $U^\alpha = (c, 0, 0, 0)$ y por lo tanto

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

11.1. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître

El objetivo central de esta sección es encontrar, a partir de la métrica de Robertson-Walker y dada la ecuación de estado $f(\rho, p) = 0$ para la materia, las ecuaciones que determinan el factor de escala $R(t)$. Para este fin consideremos las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica:

$$R^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}\mathcal{R}g^\alpha{}_\beta + \Lambda g^\alpha{}_\beta = -\frac{8\pi G}{c^4}T^\alpha{}_\beta \quad (11.4)$$

En el capítulo anterior calculamos las componentes del tensor de Ricci y del escalar curvatura para la métrica de Robertson-Walker:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R} \quad (11.5)$$

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right)g_{ij} \quad (11.6)$$

$$\mathcal{R} = -6\left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right) \quad (11.7)$$

Entonces, teniendo en cuenta que $R^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\sigma}R_{\sigma\beta}$, $T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3$, las ecuaciones de campo 11.4 conducen al siguiente sistema de dos ecuaciones acopladas:

$$\frac{4\pi G}{c^2}(\rho + \frac{3p}{c^2}) = \Lambda - \frac{3\ddot{R}}{c^2 R^2} \quad (11.8)$$

$$\frac{4\pi G}{c^2}(\rho + \frac{p}{c^2}) = \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2 - R\ddot{R}}{c^2 R^2} \quad (11.9)$$

A partir de la ecuación para la conservación local de la energía-momentum

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (11.10)$$

se obtiene la ecuación

$$\frac{d}{dt}(c^2 \varrho R^3) + p \frac{d}{dt}(R^3) = 0 \quad (11.11)$$

Sin embargo, las tres ecuaciones 11.8, 11.9 y 11.11 no son independientes, pues cualesquiera dos implican la tercera, como se puede probar fácilmente. Por ejemplo, derivando la ecuación 11.8 con respecto a t , reemplazando la ecuación 11.9 y reagrupando términos obtenemos 11.11. Este sistema de ecuaciones se puede escribir en muchas otras formas equivalentes encontradas en la literatura. Una forma usualmente utilizada es la siguiente:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3p}{c^2})R + \frac{c^2}{3}\Lambda R \quad (11.12)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \frac{c^2}{3}\Lambda R^2 - c^2 k \quad (11.13)$$

$$\frac{d}{dt}(c^2 \varrho R^3) + p \frac{d}{dt}(R^3) = 0 \quad (11.14)$$

Este sistema de ecuaciones se llama de Friedmann-Lemaître y junto con la ecuación de estado $f(\rho, p) = 0$ asumida para el modelo de materia determinan el modelo cosmológico, i.e. $R(t)$, $\rho(t)$ y k . Como se mencionó, de las tres ecuaciones anteriores dos son independientes y usualmente se toman las ecuaciones 11.13 y 11.14 como independientes.

La ecuación 11.14 admite una interpretación física directa, pues si consideramos $4\pi\varrho R^3/3 = M$ como la masa, entonces la ecuación 11.14 se puede escribir en la forma

$$dE + pdV = 0 \quad (11.15)$$

donde $E = Mc^2$ es la energía total y pdV el trabajo hecho contra las fuerzas de presión; esta ecuación corresponde a la segunda ley de la termodinámica.

En las ecuaciones de Friedmann-Lemaître ρ representa la densidad de materia y p la presión cuya ecuación de estado más simple se puede escribir como $p = w\rho$, donde w es una constante independiente del tiempo. La contribución de la materia a la densidad ρ proviene, en las diferentes épocas del universo, de las partículas materiales (partículas elementales, átomos, iones, moléculas, etc.) y de la radiación (fotones, y en general partículas de masa en reposo cero). La ecuación de estado para describir un gas de fotones (radiación) está dada por $w = 1/3$, es decir

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2; \quad \text{Radiación} \quad (11.16)$$

mientras que la ecuación de estado para describir un gas de partículas materiales no interactuantes (por ejemplo, átomos neutros) está dada por $w = 0$, esto es

$$p = 0; \quad \text{Materia} \quad (11.17)$$

Es evidente que en cualquier época de evolución del universo la contribución a ρ proviene tanto de la radiación como de la materia:

$$\rho = \rho_M + \rho_{rad} \quad (11.18)$$

e incluso de materia interactuante para la cual la ecuación de estado no corresponde a $w = 0$.

Para efectos de estudiar procesos dinámicos que tuvieron lugar en diferentes épocas del universo, como por ejemplo en la época de la nucleosíntesis, es necesario contar con la ecuación de estado completa que describa el contenido de materia del universo. Sin embargo, para describir la evolución del universo y compararla con la observación actual (constante de Hubble H_0 , parámetro de desaceleración q_0 , densidad de materia ρ_0 , edad del universo t_0 , etc.), tres épocas de evolución del universo son determinantes y admiten una descripción de la ecuación de estado sencilla.

Se estima que la densidad de materia actual en el universo es del orden de

$$\rho_{0M} \approx 10^{-29} \text{ gr/cm}^3 \quad (11.19)$$

constituida fundamentalmente por átomos neutros de hidrógeno (76 %) y helio (23 %), mientras que la densidad de radiación

$$\rho_{0rad} \approx 8 \times 10^{-34} \text{ gr/cm}^3 \quad (11.20)$$

constituida fundamentalmente por la radiación cósmica de fondo, es cuatro órdenes de magnitud inferior. Además, dado que la interacción de la radiación electromagnética con la materia neutra es prácticamente nula, ρ_M y ρ_{rad} se conservan separadamente de acuerdo con la ecuación 11.14. Esto nos indica que la estructura en gran escala del universo actual está determinada fundamentalmente por la materia neutra, cuya ecuación de estado está dada por la ecuación 11.17. La ecuación de conservación 11.14 nos permite estimar cómo ha sido la evolución de la densidad de materia como función del factor de escala, pues

$$\frac{d}{dt} (c^2 \varrho_M R^3) = 0 \implies \varrho_M \propto R^{-3} \quad (11.21)$$

mientras que para la densidad de radiación ρ_{rad} tenemos que

$$\frac{d}{dt} (c^2 \varrho_{rad} R^3) + \frac{c^2}{3} \varrho_{rad} \frac{d}{dt} (R^3) = 0 \quad (11.22)$$

entonces

$$\frac{4}{3} \varrho_{rad} d(R^3) + R^3 d\varrho_{rad} = 0 \implies \varrho_{rad} \propto R^{-4} \quad (11.23)$$

estas relaciones indican que en una época temprana del universo ϱ_M y ϱ_{rad} eran iguales ($t \sim 10^3 \text{ años}$) y en épocas anteriores dominaba la radiación sobre la materia, lo cual se puede entender si tenemos en cuenta que en épocas tempranas del universo la temperatura era tan alta que la energía cinética promedio de las partículas era mucho mayor que su energía en reposo, de tal manera que toda la materia del universo se podía tratar como un gas de radiación.

La tercera época de evolución del universo la constituye la era inflacionaria. En esta época ($\sim 10^{-35} \text{ s}$) el universo pasó por una fase de expansión exponencial, donde el factor de escala aumentó 10^{43} veces en una fracción de tiempo ($\sim 10^{-32} \text{ s}$). Para la descripción de la materia en esta época de evolución, hay que recurrir al concepto de vacío de la teoría cuántica de campos. En mecánica cuántica la energía del vacío está asociada al estado de mínima energía de un sistema cuántico. Por ejemplo, consideremos un oscilador de frecuencia propia ω ; entonces la ecuación de Schrödinger de valores propios implica que los niveles de energía del oscilador están dados por

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n \right) \hbar\omega; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.24)$$

Esta ecuación implica que la energía asociada al nivel base (mínima energía) es $1/2\hbar\omega$ diferente de cero, pero esta energía del estado base no es observable

directamente, pues sólo se pueden medir las transiciones entre diferentes niveles de energía $E_n - E_m$, por absorción o emisión de fotones de energía $\hbar\omega$.

Este ejemplo ilustra un resultado general de la mecánica cuántica: que como consecuencia del principio de incertidumbre, el nivel mínimo de energía de un sistema acotado no puede ser cero, pero su valor absoluto no es observable pues, por definición, un sistema que se encuentre en el estado base no puede decaer a un estado de energía cero.

La teoría cuántica de campos describe las interacciones fundamentales, electromagnética, fuerte y débil, que rigen el comportamiento de las partículas elementales. Su descripción se realiza a través de un campo de materia, el cual, se puede representar como una superposición de osciladores armónicos de frecuencia ω con $0 \leq \omega < \infty$ (transformada de Fourier), y por lo tanto la energía del estado base E_0 de un campo de materia (e.g., el campo electromagnético) está dada por la suma de las energías de los osciladores que conforman el campo, así

$$E_0 = \sum_{\omega} \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (11.25)$$

llamada la energía del vacío, es infinita. Sin embargo esta divergencia que surge en la teoría de campos se puede eliminar formalmente teniendo en cuenta, como lo mostramos en el caso del oscilador armónico, que sólo son observables las transiciones de un sistema, así la energía total (renormalizada) E_R de un campo de materia se define como

$$E_R = E - E_0 \quad (11.26)$$

dando como resultado cantidades finitas. En particular, la energía del estado base renormalizada es $E_{0R} = E_0 - E_0 = 0$. Este método, que corresponde formalmente a restar una cantidad infinita para obtener un resultado finito, es conocido como renormalización de la teoría y tiene un soporte formal. Sin embargo, a pesar de aparecer la energía del vacío como un concepto inobservable directamente, su existencia se manifiesta en diferentes procesos físicos, los cuales han sido observados. Por ejemplo en el corrimiento Lamb, el cual, como consecuencia de la interacción del átomo de hidrógeno con el campo de radiación del vacío, algunos de sus estados degenerados se desdoblan.

11.2. Historia térmica del universo

El fondo de radiación cósmica de microondas (CMBR), detectada por primera vez por Penzias y Wilson en 1965, fue interpretado en ese mismo año por Dicke, Peebles, Roll y Wilkinson como una reliquia del temprano universo que demostraba su origen térmico, con base en un trabajo pionero de Alfer R.A., Bethe H.A. y Gamow G. de 1948 (Phys. Rev **73** 803). El CMBR corresponde al espectro de radiación de cuerpo negro a una temperatura de $t = 2,75 \pm 0,015^\circ K$. La isotropía observada del CMBR

$$\Delta T/T \lesssim 10^{-4}$$

sobre escalas angulares que van desde 10° hasta 180° constituye una de las evidencias más fuertes del principio cosmológico.

El punto fundamental para entender la historia térmica del universo está en la hipótesis del equilibrio termodinámico (aproximado) en las diferentes etapas de evolución, donde el equilibrio termodinámico es alcanzado si la rata a la cual las partículas colisionan, en un tiempo dado, es mayor que la rata a la cual el universo se está expandiendo en ese momento. Sin embargo, el universo no es un sistema que desde su inicio ha estado en equilibrio termodinámico aproximado, pues ha pasado por algunas etapas fuera del equilibrio (transiciones de fase), las cuales han sido determinantes para su evolución.

Bibliografía

- [1] Adler R., Bazin M. and Schiffer M., *Introduction to general relativity*. McGraw-Hill, 1975.
- [2] Börner G., *The early universe. Facts and fiction*. Springer-Verlag, 1993.
- [3] Fock V., *The theory of space, time and gravitation*. Pergamon Press, 1959.
- [4] Heidmann J., *Relativistic Cosmology*. Springer-Verlag, 1980.
- [5] Heller M., *Theoretical foundations of cosmology*. World Scientific, 1992.
- [6] Kolb E. W. and Turner M. S., *The early universe*. Addison-Wesley, 1994.
- [7] Kopczynski W. and Trautman A., *Spacetime and gravitation*. John Wiley & Sons, 1992.
- [8] McVittie G. C., *General relativity and cosmology*. Chapman and Hall Ltd., 1965.
- [9] Misner C. W., Thorne K. S. and Wheeler J. A., *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., 1973.
- [10] Padmanabhan T., *Cosmology and astrophysics through problems*. Cambridge University Press, 1996.
- [11] Straumann N., *General relativity and relativistic astrophysics*. Springer-Verlag, 1984.
- [12] Tolman R. C., *Relativity, thermodynamics and cosmology*. Dover Publications, Inc., 1987.
- [13] Torretti R., *Relativity and geometry*. Dover Publications, Inc., 1996.
- [14] Wald R. M., *General relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [15] Weinberg S., *Gravitation and cosmology*. New York Wiley, 1972.
- [16] Will C. M., *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.