

Taller #1 Relatividad General

Manuel Garcia.

April 21, 2025

1

Sean dos eventos P_1 y P_2 con coordenadas espacio-temporales en un sistema inercial Σ dadas por

$$P_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3), \quad P_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3),$$

y definamos el intervalo espacio-temporal como:

$$\Delta S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2.$$

Estudiaremos tres casos distintos según el signo de ΔS_{12}^2 .

a) Intervalo tipo tiempo: $\Delta S_{12}^2 > 0$

En este caso, el intervalo es tipo tiempo, lo que significa que los dos eventos pueden estar conectados causalmente y existe un sistema de referencia Σ_P en el cual los dos eventos ocurren en el mismo lugar del espacio. Es decir, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ en dicho sistema, por lo que:

$$\Delta S_{12}^2 = c^2 \Delta \tau^2,$$

donde $\Delta \tau$ es el **intervalo de tiempo propio** medido en el sistema Σ_P .

Dado que $t_2 > t_1$ en el sistema Σ , entonces:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(v) \Delta \tau > 0 \Rightarrow \Delta \tau > 0,$$

lo que implica que todos los observadores inerciales relacionados por transformaciones de Lorentz (TL) también observarán que $t'_2 > t'_1$. Por tanto, **el orden temporal de los eventos es invariante relativista**.

Este caso también está asociado con el fenómeno de dilatación temporal:

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v) \Delta \tau.$$

b) Intervalo tipo luz: $\Delta S_{12}^2 = 0$

Aquí, el intervalo es nulo, y los eventos están conectados por una señal luminosa o por una partícula que viaja a la velocidad de la luz. Entonces:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 \Rightarrow \Delta S^2 = 0.$$

En este caso, el intervalo es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Si en el sistema Σ se cumple que $t_2 > t_1$, entonces para cualquier otro sistema inercial Σ' también se tendrá $t'_2 > t'_1$. Por tanto, **el orden temporal de los eventos también es invariante**.

c) Intervalo tipo espacio: $\Delta S_{12}^2 < 0$

Este tipo de intervalo indica que los eventos están separados más en espacio que en tiempo, es decir, no hay una conexión causal entre ellos. En este caso:

$$\Delta S_{12}^2 < 0 \Rightarrow c^2(t_2 - t_1)^2 < (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2.$$

Esto implica que **existe un sistema de referencia Σ'** en el cual ambos eventos son simultáneos ($t'_2 = t'_1$). Además, también existen sistemas donde el orden temporal se invierte ($t'_2 < t'_1$). Esto ocurre porque la simultaneidad no es absoluta en relatividad especial. Por tanto, **el orden temporal de eventos con intervalo tipo espacio no es un invariante relativista.**

Este hecho refleja la imposibilidad de que eventos separados por un intervalo tipo espacio tengan una relación causal, ya que requeriría una velocidad de propagación mayor a c .