Problemas de Relatividad General: Taller 1

Juan Manuel Tejeiro

8 de abril de 2025

1.- Sean P_1 y P_2 dos eventos medidos por un observador inercial Σ con coordenadas $\left(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3\right)$ y $\left(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3\right)$: el intervalo espacio-tiempo ΔS_{12}^2 es positivo:

a) Si $\Delta S_{12}^2 > 0$ demostrar si el evento P_2 es posterior al evento P_1, i.e., $t_2 > t_1$ para el observador Σ, entonces para cualquier otro observador inercial Σ', relacionado con Σ por una TL usual, se cumple que $t_2' > t_1'$. Además demostrar que existe un sistema de referencia inercial Σ_P tal que los dos eventos suceden en el mismo punto del espacio, (P identifica el sistema de referencia propio, i.e. los dos eventos son medidos por un mismo reloj). Si denotamos por $\triangle\tau$ el intervalo de tiempo medido en Σ_P, entonces $\Delta S_{12}^2 = c^2\Delta\tau^2$ y

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(v\right)\Delta\tau$$

donde $x_2^0 - x_1^0 = c\left(t_2 - t_1\right) = c\Delta t$, Esta ecuación representa el fenómeno de dilatación temporal.

b) Si $\Delta S_{12}^2 = 0$ y el evento P_2 es posterior al evento P_1, i.e., $t_2 > t_1$ para el observador Σ, demostrar que para todos los observadores inerciales, relacionado con Σ por una TL usual, se cumple que $t_2' > t_1'$.

c) Si $\Delta S_{12}^2 < 0$ y $t_2 > t_1$ para el observador Σ, demostrar que existe un sistema de referencia inercial con respecto al cual los eventos son simultáneos y por tanto el orden temporal de eventos no es un invariante relativista.

2.- Sea $x\left(\lambda\right)$ la línea de universo de una partícula física y λ un parámetro.

a) Para $\lambda = \tau$ el tiempo propio de la partícula, encontrar las componentes de la cuadri-velocidad

$$U = \frac{dx}{d\tau} = \left(U^0, U^1, U^2, U^3\right)$$

y cuadri-aceleración

$$A = \frac{dA}{d\tau} = \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right)$$

medidas por un observador inercial Σ. Demostrar que $U \cdot A = 0$, son c-v ortogonales respecto al producto punto minkowskiano y calcular U^2 y A^2. Interpretar físicamente los resultados.

b) Repetir la parte a) para el parámetro $\lambda = s$, longitud espacio-tiempo de la curva.

3.- De la óptica clásica se sabe que el ángulo de incidencia θ_i de un rayo de luz sobre un espejo plano en reposo es igual al ángulo de reflexión θ_r.

a) Considerar un espejo plano que se mueve con velocidad v normal a su plano y un rayo de luz de frecuencia ω_i que incide sobre el espejo formando un ángulo θ_i respecto a la normal, con respecto a un sistema de referencia inercial Σ. Asumir que el rayo de luz se mueve en el plano x, y y se dirige al encuentro del espejo cuyo plano está en el plano y, z y se mueve en la dirección del eje x negativo. Demostrar el ángulo de reflexión en el sistema Σ está dado por

$$cos\theta_r = \frac{2v/c + (1 + v^2/c^2)cos\theta_i}{1 + 2v/ccos\theta_i + v^2/c^2}$$

b) Muestre que si el espejo se está mueviendo en su plano entonces θ_i=θ_r.

4.- A partir de la ecuación de movimiento para una partícula de masa propia m_0

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma\left(\mathbf{u}\right)\frac{dp^\mu}{dt}$$

a) Muestre que las componentes de la c-fuerza se pueden escribir como

$$f^\mu = \gamma\left(\mathbf{u}\right)\left(c\frac{dm}{dt}, \mathbf{F}\right)$$

donde $m = m_0\gamma(\mathbf{u})$.

b) Para interpretar físicamente la componente temporal de la fuerza utilizar el resultado $U \cdot A = 0$ donde U y A son los c-v velocidad y aceleración de la partícula, entonces a partir de este resultado muestre que

$$\frac{d}{dt}\left(mc^2\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

con $\mathbf{u}$ la velocidad de la partícula y $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ el producto punto usual de vectores, interprete físicamente este resultado.

c) Si se aplica la definición del trabajo $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ hecho por una fuerza sobre una partícula, entonces muestre que las componentes de la c-fuerza se pueden escribir en la forma

$$f^\mu = \gamma(\mathbf{u})\left(\frac{1}{c}\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{F}\right)$$

5.- Un cohete que parte del reposo con aceleración propia constante g, en la dirección del eje x positivo, es equivalente al siguiente problema: Una partícula de masa propia m_0, que está en reposo en el origen del sistema de referencia inercial, en el instante $t = 0$ se le aplica una fuerza constante $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{x}}$

a) Encontrar la posición $x\left(t\right)$ y su velocidad $u\left(t\right)$ en función del tiempo, en términos de F, m_0 y c, con $g = F/m_0$. Aplicar la segunda ley de Newton (relativista) e integrar la ecuación una vez para obtener $u\left(t\right)$ y volver a integrar para calcular $x\left(t\right)$.

b) Determinar su línea de universo y su c-velocidad en función del propio.

6. Consideremos una partícula de masa propia m_0 y velocidad $\mathbf{u}$ con respecto a un sistema de referencia inercial Σ.

a) Si sobre la partícula actúa una fuerza atractiva central proporcional al inverso del cuadrado de la distancia:

$$\mathbf{F}=-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$$

donde k es una constante, entonces, a partir de la ecuación de movimiento para la c-fuerza

$$f^{\mu}=\frac{dp^{\mu}}{d\tau}=\gamma\left(\mathbf{u}\right)\left(\frac{1}{c}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u},\mathbf{F}\right)$$

demostrar, que la energía total de la partícula, dada por

$$E=\gamma\left(\mathbf{u}\right)m_0c^2-\frac{k}{r}$$

se conserva, para esto basta con demostrar que

$$\frac{dE}{dt}=0$$

b) Demostrar que el momentun angular orbital, definido por

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

se conserva.

7.- Grupo de Lorentz. Consideremos el producto minkowskiano en notación matricial

$$x\cdot y=x^{T}\eta y \tag{1}$$

donde $x,y\in\mathcal{M}$, el espacio-tiempo de Minkowski, y con la notación

$$x=\begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$x^T=\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

y la matriz de Minkowski dada por

$$\eta=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

a Encontrar las propiedades generales de una transformación de Lorentz

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & x & \longmapsto & x' = \mathbf{\Lambda} x \end{array} \tag{5}$$

que deja invariante el producto minkowskiano. Ayuda: de la invarianza bajo el producto minkowskiano encontrar la ecuación de restricción para la matriz Λ. A partir de esta ecuación, encontrar el determinante y el número máximo necesario de parámetros independientes, que caracterizan una transformación general de Lorentz y analizar el resultado.

b Sea $\mathbf{\Lambda}$ una matriz de transformación de Lorentz y sea $\mathbf{L}$ otra matriz 4×4 tal que

$$\mathbf{\Lambda} = e^{\mathbf{L}} \tag{6}$$

La exponencial de una matriz se debe entender en el siguiente sentido: dado que la expansión en serie de la función exponencial está dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \tag{7}$$

entonces

$$e^{\mathbf{L}} = \mathbf{1} + \mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{L}^2 + \cdots \tag{8}$$

A partir de esta representación de una transformación de Lorentz, a través de la exponencial de otra matriz $\mathbf{L}$, encontrar la forma general de una transformación de Lorentz. Ayuda: muestre en primer lugar que para una transformación propia de Lorentz tenemos

$$\det |\mathbf{\Lambda}| = e^{Tr\mathbf{L}} \tag{9}$$

donde $Tr\mathbf{L}$ es la traza de la matriz $\mathbf{L}$. Probar luego que la matriz $\eta\mathbf{L}$ es antisimétrica y de este resultado mostrar que la forma general de la matriz $\mathbf{L}$ se puede escribir como

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

c Demostrar que la matriz $\mathbf{L}$ se puede escribir como una combinación lineal de las siguientes matrices:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

es decir, mostrar que

$$\mathbf{L} = -\alpha^1\mathbf{R}_1 - \alpha^2\mathbf{R}_2 - \alpha^3\mathbf{R}_3 - \zeta^1\mathbf{B}_1 - \zeta^2\mathbf{B}_2 - \zeta^3\mathbf{B}_3 \tag{14}$$

El signo menos es arbitrario y se introduce solo por conveniencia para su interpretación física (ver parte d del presente problema). La ecuación anterior se puede escribir en forma compacta como

$$\mathbf{L} = -\vec{\alpha}\cdot\tilde{\mathbf{R}} - \vec{\zeta}\cdot\tilde{\mathbf{B}} \tag{15}$$

donde

$$\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \tag{16}$$

$$\vec{\zeta} = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \tag{17}$$

y con el producto punto usual en $\mathbb{R}^3$.

d Mostrar, por cálculo directo, que las matrices $\mathbf{R}_i$ y $\mathbf{B}_j$, $i, j = 1, 2, 3$, cumplen con las siguientes propiedades: Los cuadrados de las seis matrices $\mathbf{R}_i^2$ y $\mathbf{B}_j^2$ son matrices diagonales y además

$$(\vec{\alpha}\cdot\mathbf{R})^3 = -\vec{\alpha}\cdot\mathbf{R} \tag{18}$$

$$\left(\vec{\zeta}\cdot\tilde{\mathbf{B}}\right)^3 = \vec{\zeta}\cdot\tilde{\mathbf{B}} \tag{19}$$

para cualesquiera tri-vectores reales unitarios $\vec{\alpha}$ y $\vec{\zeta}$. Por lo tanto, cualquier potencia de las matrices $\mathbf{R}_i$ y $\mathbf{B}_j$, $i, j = 1, 2, 3$, puede ser expresada como un múltiplo de la matriz o de su cuadrado.

e Con el resultado del numeral anterior y teniendo en cuenta la expansión en serie de Taylor de la función exponencial, ecuación (8), válida para L un número, función, matriz o en general cualquier operador bien definido, considerar los casos particulares

$$\vec{\alpha} = (0, 0, 0) \qquad \vec{\zeta} = (\zeta, 0, 0) \tag{20}$$

y

$$\vec{\alpha} = (0, 0, \alpha) \qquad \vec{\zeta} = (0, 0, 0) \tag{21}$$

y calcular las correspondientes matrices de transformación de Lorentz $\mathbf{\Lambda}$ e interpretar físicamente el resultado.

7.- Transformación general de Lorentz. Sean Σ y Σ' dos sistemas de referencia inerciales tal que el sistema Σ' se mueve con velocidad $\vec{v}$ respecto a Σ. Si los dos observadores eligen los ejes coordenados paralelos y los orígenes coinciden en $t = t' = 0$, encontrar las transformaciones generales de Lorentz entre los dos observadores inerciales.

8.- Álgebra de Lie del grupo de Lorentz. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas. Se define el conmutador de dos matrices $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ como la matriz

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \tag{22}$$

con el producto y la suma usual de matrices.

a Demostrar las siguientes propiedades del conmutador:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}] \tag{23}$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}] \tag{24}$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,[\mathbf{A}, \mathbf{C}] \tag{25}$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^T = \left[\mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T\right] \tag{26}$$

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] = 0 \tag{27}$$

La última igualdad se conoce como la identidad de Jacobi.

b Mostrar que las matrices $\mathbf{R}_i$ y $\mathbf{B}_j$, $i, j = 1, 2, 3$, definidas en (11), (12) y (13), satisfacen las siguientes propiedades:

$$[\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{R}_k \tag{28}$$

$$[\mathbf{R}_i, \mathbf{B}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{B}_k \tag{29}$$

$$[\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j] = -\epsilon_{ijk}\mathbf{R}_k \tag{30}$$

donde el símbolo ϵ_{ijk} se define por:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ijk \;\; \textit{permutación par de } 123 \\ -1 & ijk \;\; \textit{permutación impar de } 123 \\ 0 & \quad\;\; \textit{en los demás casos} \end{cases} \tag{31}$$

Estas propiedades se conocen como el álgebra de Lie del grupo de Lorentz y son de gran importancia en teoría cuántica de campos. El primer conmutador corresponde a las relaciones de conmutación del momento angular, asociado con rotaciones. El segundo conmutador establece que el vector $\mathbf{B}$ se transforma como un trivector bajo rotaciones de los ejes espaciales y el tercer conmutador implica que, en general, dos transformaciones puras de Lorentz no conmutan, salvo si estas se realizan en la misma dirección, pues en este caso $i = j$ y por lo tanto

$$\epsilon_{iik} = 0 \tag{32}$$

y las matrices conmutan.