Clase 9

Manuel Garcia.

September 7, 2023

1 Relaciones de equivalencia y clases de equivalencia

Representación geométrica 1) Circulo S^1, sean $x\&y \in \mathbb{R}$. Los puntos $x\&y$ son equivalentes $x \approx y$ si existe un entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y + 2\pi n$. Clase de equivalencia: $[x] = \{x + 2\pi n \forall n \in \mathbb{Z}\}$. Notar que $0 \approx 2\pi$, $x \in [0, 2\pi)$ es un representante de $[x]$.

2) Toro T^2. Sean $(x_1, y_1)\&(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Los puntos $(x_1, y_1)\&(x_2, y_2)$

2 Espacios vectoriales

Definicion y propiedades

Un espacio lineal o espacio vectorial V sobre un campo K (por ejemplo $\mathbb{R}$) es un conjunto provisto de dos operaciones: la suma entre elementos de V y la multiplicación por los elementos de K. Los elementos de V se llaman vectores y los elementos de K se llaman escalares. estos elementos satisfacen las propiedades:

- $u + v = v + u \qquad \text{con } u, v \in V$
- $(u + v) + w = u + (v + w) \qquad u, v, w \in V$
- Existe el vector 0 tal que $0 + v = v + 0 = v \qquad \forall v \in V$
- $v \in V, \exists(-v)$ tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$
- $v(u + v) = cu + cv...$

Espacios lineales Sea $\{V_i\}$ un conjunto k de vectores en V, si la ecuacion: $x_1 v_1 + ... x_k v_k = 0$ tiene una solución no trivial $x_i \neq 0$ para algún i, el conjunto se llama **linealmente dependiente**. Si por el contrario la eq anterior solo tiene la solución trivial $x_i = 0$ para todo i, el conjunto se llama **linealmente independiente**. Un conjunto de vectores linealmente independientes $\{e_i\}$ Se llama **base** de V si todo $v \in V$ se puede escribir como una combinación lineal única de los vectores de la base $\{e_i\}$:

$v = v^1 e_1 + ... v^k e_k$. Los numeros $\{v^i\} \in K$ son las **Componentes** de v en la base $\{e_i\}$.

3 Mapeos lineales, imagen, kernel

Dados dos espacios lineales V, W, el mapeo $f : V \to W$ es llamado mapeo lineal si cumple: $a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)$ para todo $a_1, a_2 \in K$ y $v_1, v_2 \in V$ un mapeo lineal es un homeomorfismo entre $V\&W$ que preserva las operaciones de suma entre vectores y multiplicación por escalares.

La **Imagen** $im \quad f$ de f es $f(V) \subset W$.

El **kernel** , es el conjunto $ker \quad f = \{v \in V | f(v) = 1\}$.

Si $W = K$ entonces f es una función lineal.

Si f es un isomorfismo entonces V es isomorfi a W. Se denota $V \approx W$.

Teorema

Si $f : V \to W$ es un mapeo lineal, entonces:

$$dimV = dim(kerf) + dim(imf)$$

4 Espacio vectorial dual

Sea $f : V \to K$ una función lineal en $V(n, K)$. Sea $\{e_i\}$ una base en V. Para un vector arbitrario $v = v^1 e_1 + ... + v^n e_n$ se cumple $f(v) = v^1 f(e_1) + ... + v^n f(e_n)$. Si conocemos el resultado de $f(e_i)$ entonces sabemos el resultado de evaluar la funcion en cualquier vector.

En $f : V \to K$ el conjunto de todas las funciones lineales (linearmente independientes) definidas en V es un espacio vectorial.

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(v) = \alpha_1 f_1(v) + \alpha_2 f_2(v)$$
$$f(v^i e_i) = v^i f(e_i)$$

Sabemos que f lineal es un vector de un espacio vectorial y que V^* es el espacio dual. El espacio dual es el conjunto de todas las funciones lineales sobre V y tiene la misma dimension $dim(V^*) = dim(V)$.

Ahora vamos a generar una base de acá. a esta base de V^* la llamaremos $\{e^{*i}\} \to f = f_i e^{*i} = f_1 e^{*1} + ... + f_n e^{*n}$.

Las funviones $\{e^{i*}\}$ se especifican completamente sabiendo el valor $e^{i*}(e_j)$. Las bases cumplen:

$$e^{i*}(e_j) = \delta^i_j$$

Recordemos que aúnque trabajemos con superficies con curvas aún necesitamos esto ya que en el espacio tangente trabajamos en un plano.

Vector dual $f : V \to K$: $f = f_i e^{*i}$ la acción (o evaluación) de f en v se puede interpretar como un **producto interno** entre un vector fila y un vector columna

$$f(v) = f_i e^{i*}(v^j e_j) = f_i v^j e^{i*}(e_j) = f_i v^j \delta^i_j = f_i v^i$$

Producto interno

$$f(v) = f_i v^i$$

Producto escalar notacion: $\left\langle \underset{V^*}{f} \middle| \underset{V^*}{v} \right\rangle : V^* \times V \to K$

Pullback

$$f : V \to W, \qquad g : W \to k$$

El primero es un mapa y el segundo una funcion. Entonces tenemos que:

$$gof(\text{g compuesto f}) = h : V \to K$$
$$g[f(V)] = h$$
$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} K$$

$$V^* \leftarrow W^*$$
$$gof \xleftarrow{f^*} g$$

PRoducto interno y adjunto

Para $V(n,K)$ se puede establecer un isomorfismo usando el mapeo $g : V \to V^*$ de la forma $g : v^j \to g_{ij}v^j$. Se define el **producto interno** de la forma $g(v_1, v_2) \equiv \langle gv_1|v_2\rangle$. En componentes $g(v_1, v_2) \equiv g_{jk}v_1^i v_2^j$.

$$dx^2 = \langle r_u|r_u\rangle\, du^2 + 2\,\langle r_u|r_v\rangle\, dudv + \langle r_v|r_v\rangle\, du^2$$
$$A^2 = \langle r_u|r_u\rangle \qquad B^2 = \langle r_u|r_v\rangle \qquad \langle r_u|r_v\rangle = 0$$
$$\frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = M$$
$$e_1 = \frac{r_u}{|r_u|}, e_2 = \frac{r_v}{|r_v|}, e_3 = M = [e_1, e_2]$$
$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix}\langle r_u|e_1\rangle & 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_v = \begin{bmatrix}0 & B & 0\end{bmatrix} \to \left|\begin{bmatrix} i & j & k \\ A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0\end{bmatrix}\right|$$