Taller #1

Manuel Garcia.

October 12, 2023

1

Se introducen dos estados $|1\rangle, \quad |2\rangle$, ortonormales:

$$\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1, \qquad \langle 1|2\rangle = 0 \tag{1}$$

Y el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle \tag{2}$$

Considerar ahora el estado

$$|\phi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle \tag{3}$$

Con a real y positivo y b real.

Determinar a y b de manera que $|\phi\rangle$ sea ortogonal a $|\psi\rangle$, es decir

$$\langle\psi|\phi\rangle = 0 \tag{4}$$

y tmabien normalizado a 1, es decir

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1 \tag{5}$$

Solucion:

Tenemos que:

$$\langle\psi| = \langle 1|\frac{1}{\sqrt{3}} + \langle 2|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \frac{a}{\sqrt{3}}\langle 1|1\rangle + \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}}\langle 2|2\rangle = 0$$

Como $\langle 1|1\rangle = 1$ y $\langle 2|2\rangle = 1$:

$$\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{3}} = 0$$
$$a = -\sqrt{2}b$$

Podemos reescribir $|\phi\rangle = a|1\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}|2\rangle}$ y $\langle\phi| = \langle 1|a + \langle 2|\frac{a}{\sqrt{2}}$, entonces:

$$a^2 + \frac{a^2}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}a^2 = 1 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Por lo tanto obtenemos que:

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad b = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

2

Una particula se encuentra en movimiento unidimensional en el eje x y es representada en el estado $|\psi\rangle$, con función de onda

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$$

En el tramo s del eje x, definido como

$$a \leq x \leq b$$

Se aproxima la función de onda con la siguiente expresión:

$$\psi(x) = A \cdot (1 + \frac{x}{d})$$

Tenemos los siguientes valores numéricos:

$$a = 2\mathring{A}, \quad b = 3\mathring{A}, \quad d = 1\mathring{A}$$

Determinar la constante real y positiva A (valor numérico y unidades) de manera que la probabilidad de encontrar la partícula en el tramo s sea igual a $\frac{1}{3}$.

Solucion:

Necesitamos que $\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{3}$, introduciendo la identidad:

$$\int_a^b \langle\psi|x\rangle \langle x|\psi\rangle \, dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 \, dx = \frac{1}{3} = \int_a^b A^2 \left(1 + \frac{x}{d}\right)^2 dx = \frac{1}{3}$$

Resolviendo la integral:

$$A^2 d \left[\frac{\mu^3}{3}\right]\Bigg|_a^b = \frac{1}{3}$$

$$A^2 d \left[\left(1 + \frac{d}{b}\right)^3 - \left(1 + \frac{a}{d}\right)^3\right] = 1$$

Reemplazando a, b, d:

$$A^2 \, (37) = 1$$

Entonces:

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{37}} \mathring{A}^{\frac{1}{2}}}$$

3

Una particula se encuentra en movimiento en el espacio y es representada por el estado $|\psi\rangle$.

Su función de onda, que depende de r y no de lo ángulos, es:

$$\langle\vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r}) = A\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{2d}}$$

Determinar la constante A, real y positiva, de manera que el estado $|\psi\rangle$ sea normalizado a 1, es decir $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Solucion:

Para normalizar el estado $|\psi\rangle$, introducimos la identidad en $\langle\psi|\psi\rangle = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle\psi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi\rangle \, d^3x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{r^2} e^{-\frac{r}{d}} d^3x = \int d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{r^2} e^{-\frac{r}{d}} r^2 dr$$
$$= 4\pi A^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{r}{d}} dr = 4\pi A^2 \left[-de^{-\frac{r}{d}}\right]_0^{\infty} = 1$$
$$4\pi A^2 dA^2 = 1$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{\sqrt{4\pi d}}$$

4

Una partícula se encuentra en movimiento unidimensional, en un potencial de oscilador armónico.

El hamiltoniano tiene la forma estándar:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

considerar el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |2\rangle$$

Calcular, el estado $|\psi\rangle$, los valores esperados de los siguientes operadores: x, p, x^2, p^2, H.
Solucion:
Para **x**:
Podemos reescribir los operadores en funcion de a y $a^\dagger$:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$
$$\langle\psi| x |\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle\psi| a + a^\dagger |\psi\rangle$$
$$\langle\psi| x |\psi\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (\langle\psi| a |\psi\rangle + \langle\psi| a^\dagger |\psi\rangle)$$

como $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ y $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ entonces:

$$\langle n-1| a |n\rangle = \sqrt{n} \qquad\qquad \langle n+1| a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}$$

Entonces:

$$\langle\psi| a |\psi\rangle =$$