Clase 1

Manuel Garcia.

August 15, 2023

1 Coordenadas

Geometria euclideana $\rightarrow$ geom. analitica o de coordenadas $\rightarrow$ geom. diferencial.

2 espacio cartesiano

$p \rightarrow (x_p^i)$, $i = 1, ..., n$

2.1 transformacion de coordenadas.

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 & ... & x_0^n \end{bmatrix} \qquad \text{conjunto abierto D} \tag{1}$$

$$x_0^1 - x^i < \in \rightarrow \text{Abierto} \tag{2}$$

En una region D:

$$(x^i) = \begin{bmatrix} x^1 & ... & x^n \end{bmatrix} \text{Donde } i = 1, ..., n \tag{3}$$

En la misma region:

$$(z^i) = \begin{bmatrix} z^1 & ... & z^n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Transformacion suave:

$$x^i = x^i \begin{bmatrix} z^1 & ... & z^n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Def.

un punto $P_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 & ... & x_0^n \end{bmatrix}$ es ordinario o no singular de z si:

$$a_j^i = (\frac{\partial x^i}{\partial z_i})_{z^i = z_0^i} \tag{6}$$

es no singular.

2.2 transformada lineal:

$x^i = a_j^i z^i$ Notacion de einstein.

Teorema de la funcion inversa

las coordenadas z se pueden expresar en teminos de x si la matrix a^i_j es invertible. es decir si existe b^i_j tal que:

$$a^i_j b^j_k = \delta^i_k \tag{7}$$

ej: esfericas

$$z^1 = r \qquad z^2 = \theta \qquad z^3 = \phi \tag{8}$$

Transformada: $x^1 = r\sin\theta\cos\theta \qquad x^2 = r\sin\theta\cos\phi \qquad x^3 = r\cos\phi$

$$J = det(J^i_j) = r^2\sin\theta \neq 0 \qquad para \qquad r \neq 0, \theta \neq 0, \phi \neq \pi \tag{9}$$

3 Espacio euclideano

Si la distancia entre dos puntos está dada por:

$$d^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 + y^2)^2 + (x^3 + y^3)^2 \tag{10}$$

entonces es un espacio euclideano

Vectores y bases en $\mathbb{R}^3$

$$\{e_1\} = e_1, e_2, e_3 \rightarrow (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \tag{11}$$

$$v = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = x^i e_i \tag{12}$$

Producto escalar

Sea $v = (x^1, ..., x^n)$, $w = (y^1, ..., y^n)$

$$\langle v|\omega\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} x^i y^j \tag{13}$$

propiedades:

- conmutativo $\langle v|\omega\rangle = \langle \omega|v\rangle$
- distributivo $\langle v|a\omega + bu\rangle = a\langle v|\omega\rangle + b\langle v|u\rangle$
- $\langle v|v\rangle > 0 \qquad sii \qquad v \neq 0$

$$|v|^2 = \langle v|v\rangle \qquad\qquad \cos\alpha = \frac{\langle v|\omega\rangle}{\sqrt{\langle v|v\rangle\langle\omega|\omega\rangle}} \tag{14}$$

curvas

Una curva parametrica diferenciable en $\mathbb{R}$ es una funcion diferenciable en un intervalo $I = (a, b)$ en $\mathbb{R}^n, a(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$a(t) = \begin{bmatrix} f^1(t) & ... & f^n(t) \end{bmatrix} \tag{15}$$

Una curva es regular si $v(t) \neq 0$ para todo $t \in I$

longitud de arco

$$S = \int_a^b \sqrt{\langle v(t)|v(t)\rangle \, dt} \tag{16}$$