Clase 21

Manuel Garcia.

November 3, 2023

1

Tenemos la funcion $f(z) = \frac{1}{z}$, su integral de camino cerrado será:

$$\oint_P f(z)dz = 2\pi i$$

$$\oint_P f(z,z^*)dz = 2i\int_{S_P}\frac{\partial f}{\partial z^*}dxdy$$

Ya que $\displaystyle\oint \frac{1}{z}dz = 2i\int_{S_P}\frac{\partial}{\partial z^*}\frac{1}{z}dz$ lo cual es igual a 0 o a 2π

$$\oint_P f(z,z^*)dz = 2i\int_{S_P}\frac{\partial f}{\partial z^*}dxdy$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(x+iy)^2} + \frac{-i}{(x+iy)^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*}\frac{1}{z} = 0 \qquad z \neq 0$$

Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial z^*}\frac{1}{z} = \pi\delta(x)\delta(y)$$

Si $f(z) = z^*$

$$\oint_P z^* dz = 2i\underbrace{\int_{S_P} dxdy}_{=A}$$

$$A = \frac{1}{2i}\oint_P z^* dz$$

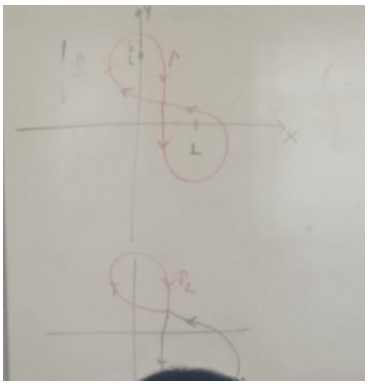
2 Caminos no simples y el número de winding

$$\oint_P \frac{dz}{z-z_0} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } z_0 \in S_P \\ 0 & \text{si } z_0 \notin S_P \end{cases}$$

Ejemplo

$$\oint_P \frac{z}{(z-i)(z-1)} dz$$

Podemos dividir este camino no simple en dos caminos simples:



$$\frac{z}{(z-i)(z-1)} = \frac{a}{z-i} \frac{b}{z-1} \frac{a(z-1)+b(z-i)}{(z-i)(z-1)}$$

$$a = \frac{1-i}{2} \qquad b = \frac{1+i}{2}$$

$$\frac{z}{(z-i)(z-1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1-i}{z-i} + \frac{1+i}{z-1}\right]$$

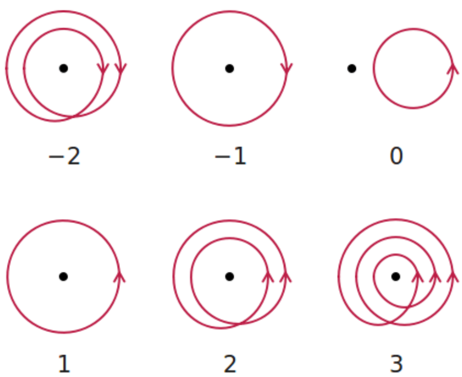
La integral nos queda:

$$\oint_P f(z)dz = \frac{1}{2}\left[\oint_{P_1} \frac{1-i}{z-i}dz + \oint_{P_1} \frac{1+i}{z-1}dz + \oint_{P_2} \frac{1-i}{z-i}dz + \oint_{P_2} \frac{1+i}{z-1}dz\right]$$

Calculando las integrales: $\oint_{P_1} \frac{1}{z-i}dz = -2\pi i \qquad \oint_{P_2} \frac{1}{z-1}dz = 2\pi i$, recordemos que se tuvo en cuenta la direccion del camino para los signos.

$$\oint_P f(z)dz = \frac{1}{2}(1-i)(-2\pi i) + \frac{1}{2}(1+i)(2\pi i) = -2\pi$$

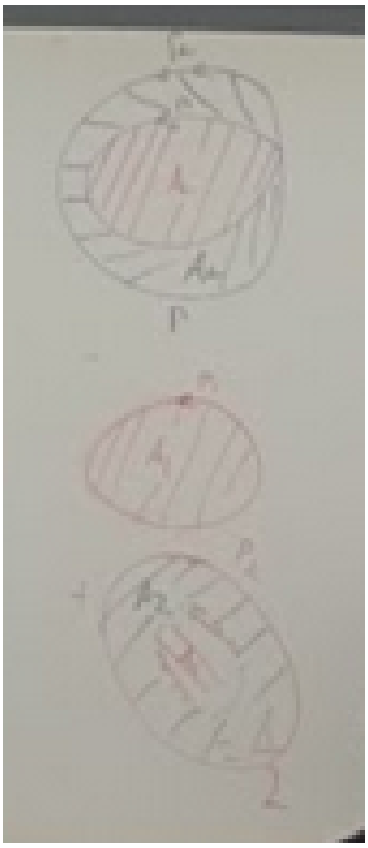
2.1 Numero de Winding



El número de Winding (zigzageante o sepenteante) γ asociado a un camino Γ cerrado y al rededor del punto z_0, que denotaremos $\gamma[P, z_0]$, es el número de rotaciones netas en sentido contrario a las manecillas del reloj que el camino P rodea el punto z_0.

$$\oint_P \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i \gamma[P, z_0] = 2\pi i 2 = 4\pi i$$

Ejemplo $\oint_P z^* dz$



$$\begin{aligned}\oint_P z^* dz &= \oint_{P_1} z^* dz + \oint_{P_2} z^* dz \\ &= 2iA_1 + 2i(A_1 + A_2) \\ &= 2i\,[2A_1 + A_2] \\ &= 2i\,[A_1\gamma(P, z_1) + A_2\gamma(P, z_2)]\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\oint_P z^* dz = \sum_j A_j \gamma[P, z_j], \qquad z_j \in A_j$$
$$= \sum_j \gamma_j A_j$$

A es el area geometrica.

Formula integral de Cauchy

Si $F(z)$ es analitica dentro del dominio Γ encerrado por β y en β, entonces:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\beta \frac{f(z)dz}{z-a}$$

Teorema de acotacion

$\beta, f(z)$ sobre P está acotada $|F(z)| \leq M, \quad z \in \beta$

$$\oint_\beta f(z)dz \leq \oint_\beta |f(z)|\, dz \qquad \oint_\beta f(z)dz \leq Ml(\beta)$$
$$\leq M \oint_\beta dz$$
$$= Ml(\beta)$$