Clase 5

Manuel Garcia.

August 24, 2023

1 Primera forma fundamental en una superficie

Tangente a la curva

$$\frac{dr}{dt} = r_u \dot{u} + r_v \dot{v} \quad r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u) \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v) \tag{1}$$

$\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$ son linealmente independientes de acuerdo a las condiciones de regularidad de la superficie.

Longitud de una curva en la superficie parametrizada por u y v

Recordemos que $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$dl^2 = \left|v^2\right| dt^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)dt^2 \tag{2}$$

$$\text{Usando } r(u,v) \qquad \dot{x} = x_u\dot{u} + x_v\dot{v}, \quad \dot{y} = y_u\dot{u} + y_v\dot{v}, \quad \dot{z} = z_u\dot{u} + z_v\dot{v} \tag{3}$$

$$dl^2 = \left|v^2\right| dt^2 = (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v})dt^2 \tag{4}$$

$$\rightarrow g_{ij}dx^i dx^j = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \qquad donde \quad x^1 = u, x^2 = v \tag{5}$$

Primera forma fundamental o métrica inducida en la superficie

$$g_{ij}(u,v) = \left\langle \frac{\partial r}{\partial x^i} \middle| \frac{\partial r}{\partial x^j} \right\rangle, \text{ Donde } (x^1, x^2) = (u,v) \tag{6}$$

$$g_{ij}(u,v) = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$g_{11} = E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \tag{8}$$

$$g_{22} = F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \tag{9}$$

$$g_{33} = G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \tag{10}$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)dt^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{11}$$

Ejemplo Si la superficie se representa por $z = f(x,y)$, entonces $x = u, \quad y = v$, entonces la escribiremos como $r(x,y) = (x, y, z(x,y))$:

$$r_x = (1, 0, f_x), \qquad r_y = (0, 1, f_y) \tag{12}$$

$$E = \langle r_x | r_x \rangle = 1 + f_x^2 \tag{13}$$

$$F = \langle r_x | r_y \rangle = f_x f_y \tag{14}$$

$$G = \langle r_y | r_y \rangle = 1 + f_y^2 \tag{15}$$

$$g_{ij} = \langle r_{x^i} | r_{x^j} \rangle = \begin{bmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad ds^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dxdy + (1 + f_y^2)dy^2 \tag{16}$$

Ejemplo Si la superficie se representa por $F(x,y,z)=0$, por el teorema de la función implicita, localmente, entorno a un punto regular, podemos encontrar $z=f(x,y)$ y calcular sus derivadas de acuerdo al teorema de la función implícita:

$$F(x,y,z)=0 \qquad \text{Podemos suponer que} \quad F(x,y,f(x,y))=0, \quad z=f(x,y) \tag{17}$$

$$\text{Teo. func. implicita } f_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad f_y=-\frac{F_y}{F_z} \tag{18}$$

$$g_{ij}=\begin{bmatrix} 1+\left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 & \frac{F_xF_y}{F_z^2} \\ \frac{F_xF_y}{F_z^2} & 1+\left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2 \end{bmatrix}=\left(\delta_{ij}+\frac{F_iF_j}{F_z^2}\right) \tag{19}$$

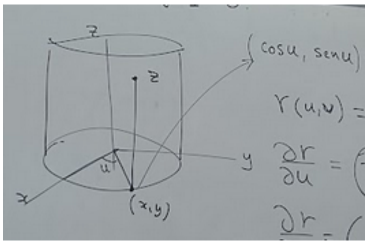
Cilindro $f(x,y)=0$, z arbitrario.

$$ds^2=dl^2+dz^2 \tag{20}$$

Notemos que se introdujeron unas nuevas corrdenadas (l,z) las cuales son euclideanas.

$$g(l,z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Ejemplo cilindro $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ esto lo podemos parametrizar utilizando $\sin u, \cos u$.



$$(\cos u, \sin u) \tag{22}$$

$$r(u,v)=\begin{bmatrix} \cos u & \sin u & v \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}=\begin{bmatrix} \sin u & \cos u & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$g_{11}=\langle r_u|r_u\rangle=1=E \tag{26}$$

$$g_{12}=\langle r_u|r_v\rangle=0=F \tag{27}$$

$$g_{22}=\langle r_v|r_v\rangle=1=G \tag{28}$$

$$\rightarrow \quad g_{ij}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

2 Area de una superficie

Si U es una región del plano xy:

$$\sigma(U)=\int\int_U dxdy \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

Si transformamos la región U en $r(U)=V$ através del mapa $x(u,v), y(u,v)$, el área será:

$$\sigma(U)=\int\int_v |J|\, dudv=\int\int_V |x_uy_v-x_vy_u|\, dudv \tag{32}$$

Definicion

El área d ela usperficie mapeada por $r(u,v)$ es:

$$\sigma(U) = \int\int_U \sqrt{g} dudv \tag{33}$$

Donde $g = det(g_{ij}) = det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = EG - F^2$

Ejemplo Imaginemos que tenemos un paralelogramo y sus lados están dados por los vectores ξ, η. Su area la podemos describir como un determinante $A = \begin{bmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{bmatrix} \to det(A) = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^2$. Esto lo podemos describir como:

$$\sigma(\xi, \eta) = |\xi \times \eta| = det(A) \tag{34}$$

$$\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 \qquad e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\eta = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 \tag{36}$$

Podemos definir:

$$g_{11} = \langle \xi | \xi \rangle = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \tag{37}$$

$$g_{12} = \langle \xi | \xi \rangle = \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2 \tag{38}$$

$$g_{22} = \langle \eta | \eta \rangle = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 \tag{39}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{bmatrix} = AA^T \tag{40}$$

$$det(g_{ij}) = det(A)det(A^T) = (detA)^2 \tag{41}$$

$$det(A) = \sqrt{det(g_{ij})} = \sqrt{g} \tag{42}$$

Ejemplo $z = f(x,y)$ su metrica (la calculamos anteriormente): $g_{ij} = \begin{bmatrix} 1+f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1+f_y^2 \end{bmatrix}$ y $g = ((1+f_x^2)(1+f_y^2) - f_x to 2 f_y^2) = [1 + f_x^2 + f_y^2]$.

$$\sigma(u) = \int\int_v \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy \tag{43}$$

Ejemplo $F(x,y,z) = 0$

$$g = \left[1 + \frac{F_x^2}{f_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}\right] = \frac{F_z^2 + F_x^2 + F_y^2}{F_z^2} = \frac{(\nabla F)^2}{F_z^2} \to \sqrt{g} = \frac{|\nabla F|}{|F_z|} \tag{44}$$

$$\sigma(u) = \int\int_v \frac{|\nabla F|}{|F_z|} dxdy \tag{45}$$

3 Segunda forma fundamental en una superficie

Entorno a un punto regular $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}$ se puede describir una superficie por medio de $z = f(x,y)$, de tal manera que el eje z sea perpendicular a la superficie en ese punto. De esta forma $\nabla f = 0|_{P_0}$, ya que la 1ra variación de la función es cero, a continuación se toma la segunda variación:

$$d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dxdy + f_{yy} dy^2 \tag{46}$$

Matrix Hessiana:

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \qquad H_{ij} = H_{ji} \tag{47}$$

$$\text{Hessiano} \quad \to \quad \text{Curvatura} \tag{48}$$

$$d^2 f = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \tag{49}$$