Clase 25

Manuel Garcia.

November 14, 2023

1 Haces tangentes

Un haz tangente a una variedad M es el conjunto de todos los espacios tangentes de esta variedad:

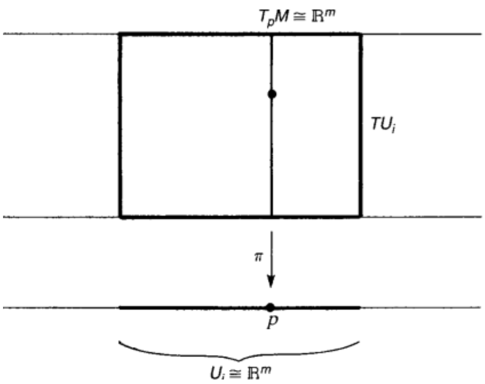
$$TM = \underset{p\in M}{\cup} T_pM \qquad M \text{ es el espacio base de } TM. \quad \forall p \in M$$

Podemos elegir $(x^i(p), \xi^i(p)) \in TM$. En el espacio tangente tenemos unos elementos $u^\alpha(p) = (x^i(p), \xi^i(p))$ con $\alpha = 1, ..., 2m$. **Localmente** lo podemos escribir como (esto lo podemos ver como un espacio de fase):

$$TM = u_i \times T_pM = u_i \times \mathbb{R}^m$$

EJEMPLOS
Proyección

$$\pi : TU_i \to U_i, \quad \forall u \in TU_i$$
$$\pi(u) = p \in U_i$$
$$\pi^{-1}(p) = T_pM \to \text{ Fibra en } p.$$



Cambios de coordenadas

$$(U_i, x^\mu), (U_j, y^\mu), \quad y^\mu = \psi(p)$$
$$V'^\mu(y) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x) = J^\mu_\nu V^\nu(x)$$
$$J^\mu_\nu \in GL(n, \mathbb{R}^n) \to \text{ Grupo de estructura de } TM.$$

El mapeo $s \ : \ M \to TM / \ \pi \circ s = id_M$ Es una sección.
El mapeo $x_i : U_i \to TU_i / \ \pi \circ s_i = is_M$ es una sección local.

Haciendo uso del espacio tangencial podemos definir unas fibras a lo largo del espacio.

2 Haces Fibrados

Un haz fibrado diferenciable (E, π, M, F, G) se compone de los siguientes elementos:

- Una variedad diferenciable $E \to$ espacio total.
- Una variedad diferenciable $M \to$ espacio base.
- Una variedad diferenciable $F \to$ fibra (o fibra típica).
- Una función surjectiva $\pi : E \to M \to$ proyección, $\pi^{-1}(p) = F_p \approx F$ fibra en p.
- Un grupo de Lie G con acción sobre F a la izquierda $\quad\to\quad$ grupo de estructura.
- Una cubertura de $M, \{U_i\}$ con un difeomorfismo.

$$\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)/\pi \circ \phi_i(p, f) = p \to \text{trivialización local.}$$
$$\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$$

- $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f), \quad \phi_{j,p} : F \to F$ sea un elemento de G. Las funciones ϕ_i, ϕ_j se relacionan por un mapeo suave $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G/ \quad \phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f)$. $t_{ij} \to$ funciones de transición.

2.1 Haces Vectoriales

Un haz vectorial tiene como fibra F un espacio vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$. La fibra F tiene dimensión k la cual se denomina dimensión de la fibra. Las funciones de transición en la fibra $\in GL(k, \mathbb{R})$.

2.2 Haces principales

Un haz principal tiene fibra F la cual es identica al gurpo de estructura G. $P \xrightarrow{\pi} M \circ P(M, G)$ también se llama un haz G sobre M.

2.3 Haces cotangentes

$$T^*M \equiv \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$