Clase 11

Manuel Garcia.

September 12, 2023

1 Espacios Lineales

1.1 Producto interno

Es una regla de asociacion que tenemos entre los vectores $g : V \to V^*$ y $g_{ij} \in GL(n, \mathbb{R})$ (GL es el grupo de tranformaciones lineales).

$$v^i \to g_{ij} v^j = v_i^* = v_i$$

Podemos introducir la notacion e Einstein.

$$g(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \langle g v_1 | v_2 \rangle = g_{ij} v_1^i v_2^j$$

Esta es la definicion de producto interno.

Toma dos vectores y los convierte en un numero.

$$g(v_1, v_2) : V.V \to \mathbb{R}$$

Si $g_{ij} = g_{ji}$ y ademas $g(v_1, v_2) \geq 0$ (esto es una estructura metrica).

1.1.1 Adjunto

$$W(n, \mathbb{R}), \quad \{f_a\}, \quad \underset{\text{Isomorfismo}}{G} : W \to V$$

$$f : V \to W \quad \text{adjunto del mapeo } f = \hat{f}$$

$$G(W, fV) = g(v, \hat{f}W)$$

$$G(W, fV) = W^\alpha G_{\alpha\beta} f_i^\beta v^i = g_{ij} v^j \hat{f}_\beta^i w^\beta$$

$$w^\alpha G_{\alpha\beta} f_i^\beta v^i = g_{ij} v^i \hat{f}_\alpha^j w^\alpha$$

$$G_{\alpha\beta} f_i^\beta = g_{ij} \hat{f}_\alpha^j$$

Ahora veremos que $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \qquad g_{ij} = \delta_{ij}$, entonces:

$$f_i^\alpha = \hat{f}_\alpha^i$$

$$\hat{f} = f^T$$

Condiciones: $\quad G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad g_{ij} = \delta_{ij}$

1.2 Tensores

$$f : V \to \mathbb{R} \qquad f \text{ es lineal.} \to f \in V^*$$
$$g : V \otimes V \to \mathbb{R} \qquad g \text{ es lineal.}$$
$$T : V \underbrace{\otimes ... \otimes}_{p-copias} V \otimes V^* \underbrace{\otimes ... \otimes}_{q-copias} V^* \to \mathbb{R}$$
$$\tau(\xi_1, ..., \xi_p, \eta_1, ..., \eta_q) = \# \in \mathbb{R}. \quad \text{Con } \xi_i \in V \text{ y } \eta_i \in V^*$$
$$\tau(\alpha\xi_1 + \beta\xi_1', [\xi], [\eta]) = \alpha\tau(\xi_1, [\xi], [\eta]) + \beta\tau(\xi_1', [\xi], [\eta])$$

1.2.1 Operaciones entre tensores

- Suma:

$$\tau \in \mathcal{T}_q^p$$
$$S \in \mathcal{T}_q^p$$
$$\tau + S \in \mathcal{T}_q^p$$
$$(\tau + S)(\xi_1, ..., \xi_p, \eta_1, ...\eta_q) = \tau(\xi_1, ..., \xi_p, \eta_1, ...\eta_q) + S(\xi_1, ..., \xi_p, \eta_1, ...\eta_q)$$

- Producto tensorial

$$\tau = M \otimes V, \quad M \in J_q^p, \quad V \in J_{q'}^{p'}$$
$$M(\omega_1, ..., \omega_p; u_1, ..., u_q), \quad V(\xi_1, ..., \xi_{p'}; v_1, ..., v_{q'})$$
$$\tau(\omega_1, ..., \omega_p, \xi_1, ..., \xi_{p'}; u_1, ..., u_q, v_1, ..., v_{q'}) \in \mathcal{T}_{q+q'}^{p+p'}$$

2 Espacios topológicos

Sea X y sea $\mathcal{T} = \{u_i | i \in I\}$ una colección de subconjuntos de X. Para llamarlo espacio topologico necesta cumplir 3 condiciones:

- $\{\emptyset, X\} \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}_J = \{u_j | j \in J\} \qquad u_j \in \mathcal{T}_I$ entonces tenemos que $\bigcup\limits_{j \in J} u_j \in \mathcal{T}_I$
- $J_k = \{u_k | k \in k\} \qquad \bigcap\limits_{k \in K} u_k \in \mathcal{T}_I$

$$(X, \mathcal{T}) \to \text{Espacio topológico}$$

2.1 Métrica

- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \geq 0$ Solamente $d(x, y) = 0$ si $x = y$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Cuando cumpla la desigualdad triangular (2 y 3) es un espacio **rimaniano**.

Utilizando 2 y 3 podemos obtener que para el caso **pseudo-rimaniano**:

- $d(x, v) = 0 \qquad \forall v \in X \to x = 0$

Espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff si la union de dos entornos es vacio. $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$