Talle #1 de metodos geometricos

Manuel Garcia, Carlos Andres Llanos

September 5, 2023

1 Ejercicio 1 de la seccion 1-3 del Do Carmo

Mostrar que las lineas tangentes a la curva regular parametrizada $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un angulo constante con $y = 0$ y $z = x$. **Sol.** Tenemos entonces que $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, $\beta(t) = (t, 0, t)$ y $\phi(t) = (t, t, 3t)$ asumiendo cada recta independiente calculando los vectores velocidad de cada curva tenemos:

$$\alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2), \qquad \beta'(t) = (1, 0, 1), \phi(t) = (1, 1, 3)$$

Donde sabemos que el ángulo entre dos curvas que se interceptan es:

$$\cos\theta = \frac{\langle\alpha'|\beta'\rangle}{\sqrt{\langle\alpha'|\alpha'\rangle\,\langle\beta'|\beta'\rangle}}$$

entonces:

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle = 3 + 6t^2, \qquad \langle\beta'|\beta'\rangle = 2, \qquad \langle\alpha'|\alpha'\rangle = 9 + 36t^2 + 36t^4$$

$$\cos\theta = \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolviendo la raiz del denominador:

$$\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}$$

Tomando $t^2 = u$ y simplificando:

$$1 + 4u + 4u^2 = 2u(1 + 2u) + (1 + 2u) = (2u + 1)(2u + 1) = (2u + 1)^2$$

Entonces tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{3 + 6t^2}{3(2t^2 + 1)}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces tenemos que $\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}k$ con $k \in \mathbb{Z}$, el angulo θ es constante ya que $\beta(t)$ es una funcion suave y $\alpha(t)$ con $t > 0$ son suaves ya que $\alpha'(t) \neq 0$ y $|\alpha'(t)| \neq 0$

2 Ejercicio 2 de la seccion 1-3 del Do Carmo

Un disco circular de radio 1 en el plano xy rueda sin deslizarce a lo largo del eje x. La figura descrita por un punto de la circunferencia del disco es llamada cicloide.

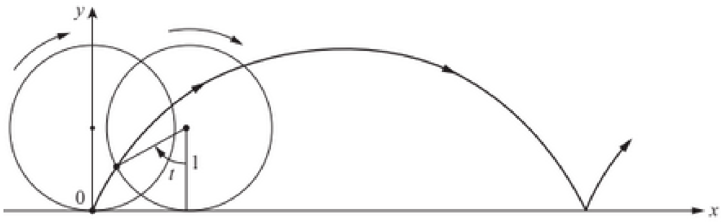

Figure 1: Cicloide

Tenemos la parametrizacion: $x^1 = L - \sin\alpha, \quad x^2 = 1 - \cos\alpha$. Si usamos la ligadura de rodadura tenemos que $L = r\alpha = \alpha$. Entonces:

$$P = (\alpha - \sin\alpha, \quad 1 - \cos\alpha) = (t - \sin t, \quad 1 - \cos t)$$

a) Los puntos singulares serán donde el determinante de $a_j = \left(\frac{\partial x'}{\partial z^j}\right)\Big|_{z'=z'_0}$ sea distinto de 0.

Derivando $x = x(x^1, x^2), \quad z = z(r, \alpha), \quad r = 1$.

$$a_1^1 = \frac{\partial \alpha - \sin\alpha}{\partial r} = 0, \qquad a_2^1 = \frac{\partial \alpha - \sin\alpha}{\partial \alpha} = 1 - \cos\alpha$$
$$a_1^2 = \frac{\partial r - \cos\alpha}{\partial r} = 1, \qquad a_2^2 = \frac{\partial 1 - \cos\alpha}{\partial \alpha} = \sin\alpha$$
$$\left|a_j^i\right| = \left|\begin{bmatrix} 0 & 1 - \cos\alpha \\ 1 & \sin\alpha \end{bmatrix}\right|$$

Entonces para conocer qué puntos se anulan $1 - \cos\alpha = 0 \to \alpha = \cos^{-1} 1$

Tenemos que si $\alpha = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \left|a_j^i\right| = 0$

b) Parametrizando con $u = t$ tenemos:

$$P = r(t - \sin t, \quad 1 - \cos t); \qquad \vec{v}(t) = r(1 - \cos t, \quad \sin t)$$
$$\langle v(t)|v(t)\rangle = r^2 - 2r\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t$$
$$= r^2 - 2r\cos t + 1, \quad \text{pero con } r = 1:$$
$$= 2 - 2\cos t$$
$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}dt = 8$$

3 Ejercicio 6 de la seccion 1-3 del Do Carmo

Sea $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t), \quad t \in \mathbb{R}$, a y b constantes, $a > 0$, $b < 0$, una curva parametrizada **a)** muestre que $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$ es una espiral que cuando $t \to +\infty$ se aproxima al origen **Sol.**

$$r(t) = ae^{bt}$$

donde r es el radio que depende de un angulo t. Como $b < 0$ y $a > 0$ podemos escribirlo como:

$$r(t) = |a|\, e^{-|b|t}$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} |a|\, e^{-|b|t} = 0$$

Por lo que se aproxima al origen.

b)

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)\\
\alpha'(t) &= (abe^{bt}\cos t - ae^{bt}\sin t, \quad abe^{bt}\sin t + ae^{bt}\cos t)\\
|\alpha'(t)| &= \sqrt{(abe^{bt}\cos t - ae^{bt}\sin t)^2 + (abe^{bt}\sin t + ae^{bt}\cos t)^2}\\
&= \sqrt{a^2c^2e^{2bt} + a^2e^{2bt}}\\
&= \sqrt{a^2e^{2bt}(1+b^2)}\\
&= ae^{bt}\sqrt{1+b^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l(t) &= \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} a\sqrt{1+b^2}e^{bt}dt\\
l &= \lim_{t\to\infty} \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}e^{bt}\\
l &= -\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}e^{bt_0}
\end{aligned}
$$

4 Ejercicio 1 de la parte 2

Calcule las componentes de la métrica en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas esféricas.

Sol.

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\phi\sin\theta\\
y &= r\sin\phi\sin\theta\\
z &= r\cos\theta\\
g_{ij} &= \delta_{ij}\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^l}{\partial z^i}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial x^k}{\partial z^i} = \begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \delta_{11}\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \delta_{11}\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} + \delta_{11}\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial r}\\
&= \sin^2\theta + \cos^2\theta\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{22} &= \delta_{22}\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \delta_{22}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \delta_{22}\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \theta}\\
&= r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\\
&= r^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{33} &= \delta_{33}\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \delta_{33}\frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial y}{\partial \phi} + \delta_{33}\frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial z}{\partial \phi}\\
&= r^2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}
$$

5 Ejercicio 2 de la parte 2

Calcule las componentes de la metrica en $\mathbb{R}^3_{(1,2)}$ en coordenadas pseudo-esfericas (ρ, χ, ϕ)

$$\begin{aligned} x^0 &= \rho \cosh \chi \\ x^1 &= \rho \sinh \chi \cos \phi \\ x^2 &= \rho \sinh \chi \sin \phi \end{aligned}$$

Sol.
Para calcularlo usamos:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

Donde $\eta_{\alpha\beta}$ es la metrica de minkowski en el espacio $\mathbb{R}^3_{(1,2)}$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh \chi & \rho \sinh \chi & 0 \\ \sinh \chi \cos \phi & \rho \cosh \chi \cos \phi & \rho \sinh \chi \sin \phi \\ \sinh \chi \sin \phi & \rho \cosh \chi \sin \phi & \rho \sinh \chi \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= \cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi \cos^2 \phi - \sinh \chi \sin \phi \\ &= \cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22} &= \rho^2 \sinh^2 \chi - \rho^2 \cosh^2 \chi \cos^2 \phi - \rho^2 \cosh^2 \chi \sin \phi \\ &= \rho^2 (\sinh^2 \chi - \cosh^2 \chi) \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{33} &= \rho^2 \sinh^2 \chi \sin^2 \phi - \rho^2 \sinh^2 \chi \cos^2 \phi \\ &= -\rho^2 \sinh^2 \chi \end{aligned}$$

$$g'_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 \sinh^2 \chi \end{bmatrix}$$