Clase 10

Manuel Garcia.

September 13, 2023

1 Series

La clase pasada se llegó a que

Trigonometricas

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tan z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \cos z_1 - z_2 = \cos z_1 \cos z_1 + \sin z_1 \sin z_1$$

$$\sin -z = -\sin z \qquad \tan 2z = \frac{2\tan z}{1 - \tan^2 z}$$

$$\cos z + 2\pi =? \qquad \sin -z =? \qquad \cos -z =?$$

Hacer las que faltan como ejercicio.

Hiperbolicas

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z \qquad \cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \qquad \tanh z = i \tan z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

Ahora calculemos $\sin x + iy$

$$\sin x + iy = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x$$

Y su modulo

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^y \cos^x} = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

Se tiene un dominio de un rectangulo con vertices en (0,0), (0,-3), (1,-3), (1,0). Mapee este dominio con la funcion $f(z) = \cosh z$.

Para (0,0) $u + iv = 1 \qquad u = 1 \quad v = 0$.

Para (1,0) $u + iv = \cosh 1, \qquad u = \cosh 1 \quad v = 0$

Para (1,-3) $u + iv = \cosh 1 - 3i = \frac{e^{1-3i} + e^{-1+3i}}{2} \qquad u = \cosh 1 \cos 3 \quad v = -\sinh 1 \sin 3$.

Para (0,-3) $\cosh -3i = \cos -3 = \cos 3 \qquad u = \cos 3 \quad v = 0$.

2 Logaritmo

$$f(z) = e^z \qquad \log f = z$$
$$\log re^{i(\theta+2\pi k)} = \log r + i(\theta + 2\pi k)$$

Hay que aclarar la rama, este es el k (k=0 rama principal). Cuando tenemos $\log_\alpha z$ tenemos que α es la rama y por lo tanto $\alpha < Arg(z) \leq \alpha + 2\pi$

$$\log i = \log e^{i(\pi/2+2\pi k)} = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

Valor principal

$$\log 1 = i\frac{\pi}{2}, \qquad k = 0$$

$$\log_0 i = \log_0 e^{\frac{\pi}{2}+2\pi k} = i\frac{\pi}{2}$$
$$\log_{\frac{\pi}{2}} i = \log_{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{5\pi}{2}} = i\frac{5\pi}{2}$$

Ejercicio

$$\log_{\frac{3\pi}{4}}(1-i) =?$$

Sol:

$$z = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)}$$
$$\alpha < Arg(z) \leq \alpha + 2\pi$$
$$\frac{2\pi}{4} < Arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$