Clase 14

Manuel Garcia.

September 29, 2023

1 Limites

Otra forma de demostrar un limite sin hacerlo lo ϵ y δ es mostrar que por cualquier camino por el que nos vayamos llegamos al mismo valor.

1.1 Propiedades de los límites en funciones complejas

Sea f y g funciones complejas definidas en S del plano complejo, y z_0 sea un punto de acumulacion de S. Si $\lim_{z\to z_0} f(z) \wedge \lim_{z\to z_0} g(z)$ existen y las constantes c_1, c_2 son complejas, entonces:

- $\lim_{z\to z_0} [c_1 f(z) + c_2 g(z)] = c_1 \lim_{z\to z_0} f(z) + c_2 \lim_{z\to z_0} g(z)$.
- $\lim_{z\to z_0} f(x)g(x) = \lim_{z\to z_0} f(x) \lim_{z\to z_0} g(z)$
- $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(x)}$ si $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$.

Limites iterados : Ejemplo: Encuentre que $\lim_{z\to 0} \dfrac{z}{|z|}$ no tiene limite.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= i
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

Ejemplo: Analizar la funcion $f(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ cuando $z \to 0$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^2 &= \frac{(x^2-y^2+2ixy)^2}{(x^2+y^2)^2+4x^2y^2} \\
&= \frac{(x^2-y^2)^2+4ixy(x^2-y^2)-4x^2y^2}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} \\
&= \frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + i\frac{4xy(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}
\end{aligned}$$

Desde x el limite nos da 1 y desde y nos da 1 pero esto no es suficiente para demostrar que el limite es 1. Ahora vamos a hacer $y = mx$ (porque nos acercamos al origen).

1.2 Limites que involucran el infinito

Para proceder al calculo se debe tener presente que $z \to \infty$ en el contexto de los numeros complejos es equivalente a $|z| \to \infty$ y tambien $f(z) \to \infty$ es $|f(z)| \to \infty$. De esta forma:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \leftrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \leftrightarrow \lim_{|z| \to \infty} |f(z) - L| = 0$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \leftrightarrow \lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0$$

Una propiedad importante similar al caso real:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = L \leftrightarrow \lim_{z \to 0} f(\frac{1}{z}) = L$$

Ejemplo 1:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}} = \lim_{z \to 0} z = 0$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \to \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \infty} \quad e^{-z} &= \lim_{z \to 0} \quad e^{-\frac{1}{x+iy}} \\ &= \lim_{z \to 0} \quad e^{-\frac{x+iy}{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{z \to 0} \quad e^{-\frac{x}{x^2+y^2}} e^{\frac{iy}{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Al hacer el limite obtenemo sun valor diferente que al hacerlo por la derecha por lo que el limite no existe.