Clase 22

Manuel Garcia.

November 9, 2023

1 Conexión de levi-civita

Compatible con g : $\quad \boldsymbol{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \qquad \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \to$ Simetrica .

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{bmatrix} + K^\alpha_{\mu\nu}$$
$$\Delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = t^\alpha_{\mu\nu} \quad \to \quad \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + t^\alpha_{\mu\nu}$$
$$t^\alpha_{\mu\nu} = -K^\alpha_{\mu\nu} \quad \to \quad \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{bmatrix}$$

2 Componentes independientes del tensor de Riemann

Podemos determinar la cantidad de componentes independientes del tensor de Riemann en una variedad M, $dim(M) = m$, teniendo en cuenta sus simetrías:

$$(1) \quad R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\nu\mu} \qquad (2) \quad R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\rho\mu\nu}$$
$$(3) \quad R_{\sigma\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma\rho} \qquad (4) \quad \underbrace{R_{\alpha\mu\nu\sigma} + R_{\alpha\nu\sigma\mu} + R_{\alpha\sigma\mu\nu} = 0}_{Identidad de Bianchi}$$

Solo vale para la conexion de levi-civita.

$$R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu} \quad \to \quad G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

2.1 Ecuaciones de campo relatividad general

$$\boldsymbol{\nabla}^\mu R_{\mu\nu} = \kappa \boldsymbol{\nabla}^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad \to$$
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad \to \quad \text{Ec. de campo Einstein}$$

$$\mathbb{L} = \sqrt{-g} R, \quad \to \quad S_{EH} = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad \to \quad \text{Accion de Einstein-Hilbert}$$

¿Por qué este lagrangiano? Hasta en la teoria mas basica tenemos $g_{\mu\nu}$, $\quad \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = g(\partial g)$. Podemos obtener $R^\alpha_{\mu\nu\sigma}$. Con los objetos $R_{\alpha\mu\nu\sigma}$, $\quad g_{\mu\nu}$ debemos construir un escalar. Escalar de ricci $R_{\nu\beta} g^{\nu\beta} = R$.