Clase 14

Manuel Garcia.

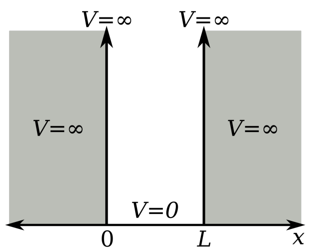
October 5, 2023

Revision taller

12 de octubre.

1 Particula libre con potencial

Tenemos una particula de masa m que se encuentra atrapada en un segmento de recta L, la particula se encuentra en un pozo de potencial.



Esto lo podemos describir aplicando condiciones de frontera:

$$\psi(L) = 0 \qquad\qquad \psi(0) = 0$$

Tenemos $H\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle$ con $H = \dfrac{p^2}{2m} + V$.

Las condiciones de frontera que dimos anteriormente nos reemplaza el potencial por lo que podemos utilizar la ecuacion de la particula libre.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{(ec. particula libre)}$$

Por ejemplo en el oscilador armonico aplicamos que x tiende a infinito por lo que despreciamos el termino $E\psi(x)$.

Para la ecuacion de la particula libre podemos encontrar la solucion:

$$\psi(x) = A\sin\left(\alpha x + \delta\right)$$

Al aplicar esta solucion con las condiciones de frontera:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 = E \quad \rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

y $\delta = 0$.

Aplicando la primera condicion:

$$\sin \alpha L = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha L = m\pi \quad \rightarrow \quad \alpha L = m\pi$$

Utilizando esto podemos dar el valor de la energia:

$$E_n = \frac{1}{2m}\frac{(n\pi\hbar)^2}{L^2}$$

Si tenemos $m = 0$ tendriamos una funcion de onda nula por lo cual no representa ningún estado fisico.

Si hacemos $n = n' + 1$ con $n' = 0, 1, 2, ...$ podemos escribir la ecuacion para la energia como:

$$E_n = \frac{1}{2m}\frac{((n'+1)\pi\hbar)^2}{L^2}$$

En la mayoria de los textos se toma la ecuacion para la energia de esta forma.

Por lo tanto la funcion de onda para la particula libre con estas condiciones de frontera es:

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = A\sin \alpha x$$

Calcular $\psi(p)$ no tiene sentido ya que como es la transformada de fourier tendiramos que integrar de $-\infty$ a ∞ con respecto a x pero nuestro problema solo está definido entre 0 y L por lo que calcular $\psi(p)$ no tiene sentido fisico.

Ejercicio

Encontrar que $\psi_n(x) = A\sin \dfrac{n\pi x}{L}$.

Sol:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m\frac{1}{2m}\frac{(n\pi\hbar)^2}{L^2}}}{\hbar} = \frac{n\pi}{L}$$

A es la constante de normalizacion

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n',n}$$

$$\int_0^L \langle n|x\rangle \langle x|n\rangle \, dx = \delta_{n',n}$$

Este problema lo podemos generalizar a un caso tridimensional donde la particula se encuentra encerrada en un cubo de lado L.