Clase 4

Manuel Garcia.

August 18, 2023

1 Propiedades magnitud numeros complejos

1.1 Propiedad 7

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{Propiedad 7} \tag{1}$$

$$|z_1 +_2 |^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \tag{2}$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \tag{3}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{\bar{z}}_2 \tag{4}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \tag{5}$$

$$\text{Entonces tenemos que: } z + \bar{z} = 2Re(z) \ , \ |Re(z)| \leq |z| \tag{6}$$

$$(z_1 + z_2)^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \tag{7}$$

$$= (|z_1| + |z_1|)^2 \tag{8}$$

$$\text{Entonces:} \tag{9}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{10}$$

2 Regiones en el plano complejo

Ejemplos

- Qué conjunto de puntos el plano cmplejo se terminan por la condición $Im(z^2) > 2$?

$$\begin{aligned} Im(z^2) &= Im((x+y)^2) && (11) \\ &= Im[x^2 - y^2 + 2ixy] > 2 && (12) \end{aligned}$$

  Tenemos que $2xy > 2 \rightarrow xy > 1$. Por lo tanto la region es $y > 1/x$

- $-\frac{\pi}{2} \leq arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

$$-pi/2 \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \tag{13}$$

- $|z| + Re(z) < 1$?

$$\begin{gathered} \sqrt{x^2+y^2} + x < 1 && (14) \\ \sqrt{x^2+y^2} < 1 - x && (15) \\ x^2 + y^2 < (1-x)^2 && (16) \\ x^2 + y^2 < 1 + x^2 - 2x && (17) \\ \text{Entonces tenemos que:} && (18) \\ y^2 < 1 - 2x && (19) \\ -y^2 > -1 + 2x && (20) \\ x < \frac{1-y^2}{2} && (21) \end{gathered}$$

Curvas en el plano complejo

Tenemos que $z = x + iy$

$$\begin{gathered} z - z_0 = a \text{ a tiene que ser real} && (22) \\ z_0 = x_0 + y_0 i && (23) \\ z = x + iy && (24) \\ \text{Con estas dos ultimas ecuaciones podemos ver que:} && (25) \\ |(x-x_0) + (y-y_0)i| = a && (26) \\ \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = a && (27) \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2 && (28) \end{gathered}$$

Esto nos forma un circulo en el plano complejo de radio a centrado en z_0.

Curvas en el plano complejo

Demostrar que la siguiente ecuacion es una elipse:

$$|z+c|+|z-c|=2a \text{ Tenemos que a y c es real y } a>0 \tag{29}$$

$$\text{Cuando } c=0 \rightarrow 2|z|=2a \rightarrow |z|=a \tag{30}$$

$$|x+iy+c|+|x-iy-c|=2a \tag{31}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \tag{32}$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-x)^2+y^2} \tag{33}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \tag{34}$$

$$\rightarrow 2xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc \tag{35}$$

$$\rightarrow a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{36}$$

$$\rightarrow (a^2-xc)^2=a^2[(x-c)^2+y^2] \tag{37}$$

$$\rightarrow a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^ax^2-2a^2cx+a^2c^2+y^2a^2 \tag{38}$$

$$a^4-a^2c^2=x^2(a^2-c^2)+2a^2xc-2a^2xc+y^2a^2 \tag{39}$$

$$a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)x^2 \tag{40}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{41}$$

Tenemos que $a \equiv$ semieje mayor, y que $b^2=a^2-c^2$ es el semieje manor.

Discos

- Disco con frontera $|z-z_0| \leq a$
- Disco abierto $|z-z_0|<a$

Ejecicio en clase

Cual figura es $Re(1/z)=1/4$:

$$Re(\frac{1}{x+iy}\frac{(x+iy)}{x-iy})=\frac{1}{4} \tag{42}$$

$$Re(\frac{x-iy}{x^2+y^2})=\frac{1}{4} \tag{43}$$

$$\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4} \tag{44}$$

$$4x=x^2+y^2 \tag{45}$$

$$-(x^2-4x)=y^2 \tag{46}$$

$$-(x-2)^2=y^2-4 \tag{47}$$

$$(x-2)^2+y^2=4 \tag{48}$$

Solucion de juan carlo:

$$Re(\frac{1}{z})=\frac{1}{2}(\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}})=\frac{1}{2}(\frac{1}{x+yi}+\frac{1}{x-yi})=\frac{1}{2}(\frac{x-iy+x+iy}{x^2+y^2}) \tag{49}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}\rightarrow\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4} \tag{50}$$

Ej

$$Im(x^3) = 2 \tag{51}$$
$$z^2\bar{z}^2 = 1 \tag{52}$$
$$Re(1+z) = |z| \tag{53}$$

Tarea

Escribir en forma compleja:

- $y = x$
- $x^2 - y^2 = a^2$

3 Funciones complejas

$$F(z) = F(x+yi) = Re(F) + iIm(F) = U(x,y) + iV(x,y) \equiv W \tag{54}$$
$$\tag{55}$$

Cuando nosotros tenemos una funcion compleja por ejemplo z^3tenemos una funcion que tiene representacion en 4 dimensiones, pero podemos hacer una representacion en 3 dimensiones para la parte real y otra representacion en 3 dimensiones para la parte imaginaria.

Las funciones complejas tienen un **dominio** en el plano real x, y, ya que $z = x + iy$, el cual va de este dominio al dominio en V, U ya que $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ el cual se denomina **imagen**. El proceso de pasar del dominio a la imagen se le llama **mapeo**.

Ejemplos

- Dominio $\mathbb{C} \to F(z) = z^3$
- Dominio $\mathbb{C}/[-3,3] \to g(z) = \frac{1}{z^2-9}$

Traslacion del dominio

$S = z : \quad |z| > 1$ con la funcion $x^2 + y^2 \leq 1$
Este dominio lo mapeamos a la funcion $F(z) = z + 2 + i$

$$F(z) = z + 2 + 1 = x + iy + 2 + i = x + 2 + i(1+i) \tag{56}$$
$$U = x + 2, \qquad V = 1 + y \tag{57}$$
$$\text{El nuevo dominio va a estar dado por:} \tag{58}$$
$$x^2y^2 = 1 \to \tag{59}$$
$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \to V = 1 \pm \sqrt{1-x^2} \tag{60}$$
$$x = u - 2 \to V = 1 \pm \sqrt{1-(u-2)^2} \tag{61}$$
$$\text{Entonces tenemos que:} \tag{62}$$
$$V - 1 = \pm\sqrt{1-(U-2)^2} \tag{63}$$
$$V - 1 = 1 - (u-2)^2 \tag{64}$$
$$(U-2)^2 + (V-1)^2 = 1 \tag{65}$$

Mapeamos el dominio original en los reales (x, y) a un nuevo dominio en los complejos (U, V). En resumen $(x, y) \to (U, V)$ y $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Traslacion

Nos dan un triangulo formado por los ejes y una recta que corta en $(0,4)$ y $(3,0)$. Y vamos a mapearlo con la funcion $F(z) = z + 3 - 1$.
la recta formada de 0 a 3 en x es: $0 \leq \frac{z+\bar{z}}{2} \leq 3$; $\frac{z-\bar{z}}{2i} = 0$
La recta formada de 0 a 4 en y es: $0 \leq y \leq 4 \to 0 \leq \frac{z-\bar{z}}{2i} \leq 4 \to x = 0 \to \frac{z+\bar{z}}{2} = 0$
La recta formada de $(0,4)$ a $(3,0)$ es $y = -\frac{4}{3}x + 4$
El nuevo dominio va a estar dado por:

- $F(0,0) = 3 - i$
- $F(0,4) = 3 + 3i$
- $F(3,0) = 6 - i$