# Clase 6

Manuel Garcia.

August 31, 2023

## 1 Momentum

Tenemos una particula con longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{|\vec{P}|}$ y momento $\vec{P}$. Como es oscilante podemos describir una ecuacion de onda:

$$\psi_{\vec{P}}(\vec{R}) = N' e^{i\frac{\vec{P}\vec{r}}{\hbar}} = \left\langle \vec{r} \middle| \vec{P} \right\rangle \tag{1}$$

$$\langle \vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r}) = \psi(x,y,z) \tag{2}$$

$$\langle \vec{r}| \vec{P}_{op} |\psi\rangle = -i\hbar \boldsymbol{\nabla}\psi(\vec{r}) \tag{3}$$

$$\text{En una dimension :} \tag{4}$$

$$\psi_P(x) = N e^{i\frac{px}{\hbar}} = \langle x|P\rangle = \psi(x) \tag{5}$$

$$\langle x| P_{op} |\psi\rangle = -i\hbar \frac{d\psi}{dx} \tag{6}$$

Esta es la autofuncion del autoestado $P$. Y tenemos que sus operadores conmutan como:

$$[P_{op}, x_{op}] = -i\hbar \qquad\qquad [x_{op}, P_{op}] = +i\hbar \tag{7}$$

$$\text{De forma mas general:} \tag{8}$$

$$[P^{\alpha}_{op}, r^{\beta}_{op}] = -i\hbar\delta^{\alpha\beta} \tag{9}$$

Si proyectamos la autofuncion sobre $P$ obtenemos la distribucion de probabilidad de encontrar la particula con momento $P$.

$$\langle P|\psi\rangle = \psi(P) = \int dx \langle P|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx N^* e^{-i\frac{Px}{\hbar}}\psi}_{\text{Transformada de fourier}} \tag{10}$$

$$\int dP \langle \psi|P\rangle \langle P|\psi\rangle = 1 \tag{11}$$

$$\int dP \psi^*(P)\psi(P) = 1 \tag{12}$$

Para que esto se cumpla necesitamos que $|N|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}$. Supongamos que $\psi$ es un autoestado del momento:

$$|\psi\rangle = |P'\rangle \tag{13}$$

$$\langle x|P'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{P'x}{\hbar}} = \psi_{P'}(x) \tag{14}$$

$$\langle P|P'\rangle = \psi_{P'}(P) = \delta(P'-P) \tag{15}$$

$$\psi(P) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{Px}{\hbar}}\psi(x) \tag{16}$$

$$\psi_{P'}(P) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\frac{Px}{\hbar}} \underbrace{e^{+i\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}}}_{=\psi_{P'}} = \frac{1}{2\pi\hbar} \underbrace{dx e^{i\frac{(P'-P)x}{\hbar}}}_{\text{Delta de dirac}} \tag{17}$$

Si tenemos $\langle\psi| P_{op} |\psi\rangle$ y metemos la identidad antes de $P_{op}$:

$$\langle\psi| P_{op} |\psi\rangle = -i\hbar \int dx \psi^*(x) \frac{d}{dx}\psi(x) \tag{18}$$

$$\text{De forma analoga} \tag{19}$$

$$\langle x| P_{op} |\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x) \tag{20}$$

recordemos que la identidad $\mathbb{I} = \int dx \, |x\rangle \langle x|$.

Ahora con $\langle x| P_{op}^2 |\psi\rangle$:

$$\text{Recordando que } \langle x| P_{op} |\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x) \text{ podemos decir que:} \tag{21}$$

$$\langle x| P_{op}^2 |\psi\rangle = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) \tag{22}$$

**Espacio de hilbert**

$P_{op}$ es el espacio de Hilbert.

$$\langle x| P_{op} |\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x) \tag{23}$$

No confundir con $P_c = -i\hbar \frac{d}{dx}$.

$\langle x| x_{op} |\psi\rangle = x \langle x|\psi\rangle = x\psi(x)$
$\langle P| P_{op} |\psi\rangle = P \langle P|\psi\rangle = P\psi(P)$
$\langle P| x_{op} |\psi\rangle = +i\hbar \frac{d\psi(P)}{dP}$

$f(\vec{r})$ depende de la direccion.
$f(r)$ no depende de la direccion.
**ej.** $\boldsymbol{\nabla} F(r) = \frac{dF}{dr}\vec{r}$ con $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|r|} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Si tenemos el operador $O$ y los estados $o^m$ entonces $O|o_i\rangle = o_i|o_i\rangle$ y $o^m|o_i\rangle = (o_i)^m|o_i\rangle$.
Si $O$ es una cantidad real continua.

$$F(O) = \sum_{m=0}^{\infty} \underset{\text{Coef. taylor}}{c_m} o^m \tag{24}$$

Pero $O$ es una operador.

$$F(O_{op}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (O_{op})^m \tag{25}$$

$$F(O_{op})|o_i\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (O_{op})^m |o_i\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (o_i)^m |o_i\rangle = \underset{\text{Autovalor}}{F(o_i)} \, |o_i\rangle \tag{26}$$