Clase 2

Manuel Garcia.

August 15, 2023

1 Espacio de bras y kets

Repaso

"kets" $c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle = |\delta\rangle$
"bras" $c_\alpha^* \langle\alpha| + c_\beta^* \langle\beta| = \langle\delta|$

$$X(|\alpha\rangle) = X|\alpha\rangle = |\beta\rangle \tag{1}$$
$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \qquad \langle\beta|\beta\rangle \neq 1 \tag{2}$$
$$X|\alpha\rangle \, dc \, \langle\alpha| X^\dagger \tag{3}$$

Operadores:

$$z = \langle\phi| X |\psi\rangle \tag{4}$$
$$Z^* = \langle\psi| X^\dagger |\phi\rangle \tag{5}$$

Si $X = X^\dagger$ entonces es hermitico
Si $Z = Z^*$ entonces z es real.

Repaso

$$X|\alpha\rangle = |\beta\rangle \tag{6}$$
$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \qquad \langle\beta|\beta\rangle \neq 1 \tag{7}$$

Operadores

$$\langle\beta|\beta\rangle = \langle\alpha| X^\dagger X |\alpha\rangle > 0 \qquad \text{positivo} \tag{8}$$

Si $X = X^\dagger \to \langle\alpha| XX |\alpha\rangle > 0 \to \langle\alpha| X^2 |\alpha\rangle > 0$

Si tenemos $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, ..., |N\rangle \quad |i\rangle \quad i = 1, ..., N$
Si $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ entonces son ortonormales.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} |i\rangle \langle i| = \mathbb{I}}_{\text{Producto exteior?}} \tag{9}$$

Operador identidad (Completez)

$$|\alpha\rangle = \mathbb{I}\,|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} |i\rangle\,\langle i|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} |i\rangle\,\alpha_i \tag{10}$$

Con $|\alpha\rangle = \mathbb{I}\,|\alpha\rangle$
Recordar producto punto de la clase anterior.

Titulo

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{En este caso es hermitica.} \tag{11}$$

En general al aplicar un operador a un vector obtenemos una direccion diferente a la original (no siempre pero en general sucede esto)

Autovalores y autovectores

$$X \underbrace{|\lambda\rangle}_{autovector} = \underbrace{\lambda}_{autovalor} |\lambda\rangle \tag{12}$$

X tiene varios autovectores y autovectores.

No importa la longitud

Reemplazamos $|\lambda\rangle \to c\,|\lambda\rangle = |\bar{\lambda}\rangle$ c es complejo, obtenemos una nueva "columba de numeros" cambiamos la longitud pero no la orientacion. Si metemos $|\bar{\lambda}\rangle$ en la eq. 12 sigue satisfaciendo la ec? Si porque c se cancela en ambos lados ya que $Xc = cX$

$$A = A^{\dagger} \qquad \text{Hermitica} \tag{13}$$
$$A\,|a\rangle = a\,|a\rangle \tag{14}$$
$$A\,|a'\rangle = a'\,|a'\rangle \tag{15}$$
$$\langle a'|\,A = (a')^{*}\,\langle a'| \tag{16}$$

Si multiplicamos eq. 14 por $\langle a'|$ y le restamos eq. 16 por $|a'\rangle$ obtenemos:

$$(a - (a')^{*})\,\langle a'|a\rangle = 0 \tag{17}$$

Si son hermiticos esto se cumple ya que $(a - a^{*}) = 0$ Si los autovectores son diferentes entonces necesitamos que $\langle a'|a\rangle = 0$ osea que sean ortogonales.

2 Como se combina matematicas y fisica?

2.1 Medicion

Cantidades fisicas (**Observables**)

Operador O y la cantidad o. Al obtener los autovalores $O\,|o_i\rangle = o_i\,|o_i\rangle$ tendremos que los autovalores o_i tienen dimension y se pueden medir. Para obtener cantidades fisicas el operador debe ser hermitico ya que si no lo fueran obtendriamos autovalores complejos. Esto es a lo que llamaremos **Observables**.

El estado $|\psi\rangle$ luego de realizarle una medicion ya deja de ser el mismo estado y se convierte en el auto estado con su respectivo autovalor. Osea al aplicar $O|\psi\rangle$ (analogo de medicion) obtenemos sus autovalores y autovectores $o_i |o_i\rangle$

Cuando se miden estados cuanticos debemos volver a preparar el mismo estado para medirlo.

Nota

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N} |\langle O_i|\psi\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{N}(\langle O_i|\psi\rangle)^* \langle O_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle O_i|\psi\rangle = \langle\psi| \mathbb{I} |\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \tag{18}$$

P_i Es la probabilidad de encontrar a ψ en cierto estado.

$$P_i = |\langle O_i|\psi\rangle|^2 \tag{19}$$