# Clase 11

Manuel Garcia.

September 14, 2023

## 1

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

Introducimos el operador $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + i\frac{P}{m\omega})$ y $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{P}{m\omega}\right)$. Recordemos que $[a, a^\dagger] = 1$. Y el operador $N_{op} = a^\dagger a$, $N_{op}^\dagger = N_{op}$.

Podemos escribir $H$ como:

$$H = (N_{op} + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

En la clase pasada habiamos visto que:

$$N_{op}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle \qquad n : \text{Reales}$$
$$\text{Discretos } \left\langle n'|n\right\rangle = \delta_{n',n}$$
$$[N_{op}, a] = -a$$
$$\text{Aplicamos un } \left|n\right\rangle \text{ cualquiera:}$$
$$N_{op}a\left|n\right\rangle = aN_{op}\left|n\right\rangle - a\left|n\right\rangle$$
$$N_{op}a\left|n\right\rangle = (n-1)a\left|n\right\rangle$$

Al aplicar el operador $N_{op}$ a $a\left|n\right\rangle$ obtenemos un autovalor $(n-1)$.

**nota**

$$a \underbrace{\left|n\right\rangle}_{\text{norm. 1}} = c\underbrace{\left|n-1\right\rangle}_{\text{norm. 1}} \qquad c : \text{ Complejo}$$

**Ejemplo** Hagamos el hermitico conjugado de lo anterior:

$$\left\langle n\right| a^\dagger = c^* \left\langle n-1\right|$$
$$\left\langle n\right| a^\dagger a \left|n\right\rangle = |c|^2 \underbrace{\left\langle n-1|n-1\right\rangle}_{\text{norm. 1}}$$
$$n\left\langle n|n\right\rangle = |c|^2 \left\langle n-1|n-1\right\rangle$$
$$\to |c|^2 = n \qquad n \text{ debe ser positivo}$$
$$\text{Podemos escribir c como: } c = e^{i\alpha}\sqrt{n}$$
$$a\left|n\right\rangle = e^{i\alpha}\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$$

De forma analoga:

$$a|n\rangle = e^{i\alpha}\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$
$$aa|n\rangle = e^{i2\alpha}\sqrt{n}\sqrt{n-1}\,|n-2\rangle$$
$$\text{Si tenemos que } n = 0 \rightarrow aa|0\rangle = 0$$

$a^\dagger$ nos "sube" un escalon:

$$a^\dagger|n\rangle = d\,|n+1\rangle \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$H|n\rangle = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega\,|n\rangle$$

**Operador de aniquilacion y creacion**

$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + i\frac{P}{m\omega})$ y $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{P}{m\omega}\right)$
$[a, a^\dagger] = 1$
Por ejemplo para llegar al estado 3 debemos aplicar 3 veces $a^\dagger$.

$$|n\rangle = \left[\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\right]|0\rangle$$

$$\langle x|0\rangle = \psi_0(x) \qquad \langle x|\, x\,|0\rangle = x\psi_0(x)$$
$$\langle x|\, a\,|0\rangle = 0$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[x\psi_0(x) + \frac{1}{m\omega}\langle x|\, P\,|0\rangle\right] = 0$$

Podemos hacer:

$$\langle x|\, P\,|0\rangle =$$
$$\langle x|\, P\,|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$$
$$\langle x|\, P\,|0\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi_0(x)$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[x\psi_0(x) + \frac{1}{m\omega}\langle x|\, P\,|0\rangle\right] = 0$$
$$\rightarrow x\psi_0(x) + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\psi_0(x) = 0$$

En las unidades tenemos que $\left[\frac{\hbar}{m\omega}\right] = Longitud^2$. A esto se le llama $\frac{\hbar}{m\omega} = (x_0)^2 = (\bar{x})^2$.

**Oscilador armonico**

$$x\psi_0(x) - \bar{x}^2 \frac{d}{dx}\psi_0(x) = 0$$

Donde $\frac{\hbar}{m\omega} = (x_0)^2 = (\bar{x})^2$

$$\psi_0(x) = (Const.)e^{-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{\bar{x}^2}}$$

La constante se halla utilizando la condicion de normalizacion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left|\psi_0(x)\right|^2 = 1$$

Las unidades de la constante es $\frac{1}{\sqrt{longitud}}$.

Si queremos conocer $\psi_2$ aplicamos $a^\dagger$:

$$|1\rangle = a^\dagger |0\rangle$$

$$\psi_1(x) = \langle x|1\rangle = \langle x| a^\dagger |0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \langle x| x - i\frac{P}{m\omega} |0\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left[x\psi_0(x) - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\psi_0(x)\right]$$

$$\psi_n(x) = c_m P_m(\frac{x}{\bar{x}})e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\bar{x}^2}}$$

Polinomios de hermit (buscar polinomios ortogonales).