Clase 4

Manuel Garcia.

August 23, 2023

1 Funciones complejas

$$F\left(z\right)=U\left(x,y\right)+iV\left(x,y\right)\equiv W \tag{1}$$

De la clase 3 podemos saber que esto es un mapeo del plano (x,y) al plano (U,V). Es decir $z=x+iy\rightarrow W=U+iV$.

En la clase pasada se realizó el ejemplo de una traslacion:

Traslacion

Nos dan un triangulo formado por los ejes y una recta que corta en $(0,4)$ y $(3,0)$. Y vamos a mapearlo con la funcion $F(z) = z + 3 - 1$.
la recta formada de 0 a 3 en x es: $0 \leq \frac{z+\bar{z}}{2} \leq 3$; $\frac{z-\bar{z}}{2i} = 0 \quad \rightarrow \quad 3 \leq U \leq 6; \quad U = -1$
La recta formada de 0 a 4 en y: $0 \leq y \leq 4 \rightarrow 0 \leq \frac{z-\bar{z}}{2i} \leq 4 \rightarrow x = 0 \rightarrow \frac{z+\bar{z}}{2} = 0 \rightarrow -1 \leq V \leq 3; \quad U = 3$
La recta formada de $(0,4)$ a $(3,0)$ es $y = -\frac{4}{3}x + 4$
El nuevo dominio va a estar dado por:

- $F(0,0) = 3 - i$
- $F(0,4) = 3 + 3i$
- $F(3,0) = 6 - i$

Continuacion del ejercicio
Transformamos la recta

$$z = x + iy \tag{2}$$
$$y = ax + b \qquad\qquad z = x + i(ax + b) \tag{3}$$
$$F(z) = z + z_0 = x + i(ax + b) + x_0 + iy_0 = x + x_0 + i(ax + b + y_0) \tag{4}$$
$$\rightarrow U = x + x_0 \qquad\qquad V = ax + b + y_0 \tag{5}$$
$$x = u - x_0 \rightarrow V = a[U - x_0] + b + y_0 \tag{6}$$
$$V = aU - ax_0 + b + y_0 \tag{7}$$

Entonces reemplazando el punto de corte con el eje V y la pendiente, recordemos que la pendiente sigue sindo la misma ya que solo hicimos una traslacion:

$$V = -\frac{4}{3}U + \frac{4}{3}3 + 4 - 1 \tag{8}$$
$$V = -\frac{4}{3}U + 7 = -\frac{4}{3}(u - 3) + 3 \tag{9}$$

Entonces obtenemos que:

$$B'C' : \{V = -\frac{4}{3}U + 7 \qquad 3 \leq U \leq 6\} \tag{10}$$

1.1 Dilataciones y contracciones

Definicio de dilatacion y contraccion

$$F(z) = az \qquad\qquad a \in \mathbb{R} \tag{11}$$
$$0 < a < 1 \quad \rightarrow \quad \text{Contraccion} \tag{12}$$
$$1 < a < \infty \qquad \rightarrow \qquad \text{Dilatación} \tag{13}$$

Ejemplo Si en (x, y) tenemos un rectangulo de -2 a 2 en x y de altura de 0 a 2 en y nombramos sus vertices A, B, C, D:

$$F\left(z\right) = \frac{z}{2} \tag{14}$$
$$\text{Obtenemos:} \tag{15}$$
$$\bar{AB} : 0 \leq y \leq 2, \qquad x = -2 \tag{16}$$
$$\bar{BC} : -2 \leq x \leq 2, \qquad y = 2 \tag{17}$$
$$\bar{CD} : 0 \leq y \leq 2, \qquad x = 2 \tag{18}$$
$$\bar{DA} : -2 \leq x \leq 2, \qquad y = 0 \tag{19}$$
$$\text{En el nuevo dominio:} \tag{20}$$
$$F\left(z\right) = \frac{x+iy}{2} \rightarrow U = \frac{x}{2} \qquad V = \frac{y}{2} \tag{21}$$

1.2 Rotación

Definicion rotación

$$F\left(z\right) = az \qquad a \in \mathbb{C} \tag{22}$$
$$z = x + iy = re^{i\theta} \qquad a = x_1 + iy_1 = re^{i\theta_1} \tag{23}$$
$$\rightarrow F\left(z\right) = re^{i\theta} r_1 e^{i\theta_1} = rr_1 e^{i(\theta+\theta_1)} \tag{24}$$

Multiplicar por un numero complejo es una rotacion.

Ejercicio

Tenemos $z = x + iy$ con $S : \{z; |z| \leq 1, 0 \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$ y lo vamos a mapear con la función $F(z) = ze^{i\frac{@p}{3}}$. Esto corresponde a una rotación de $\pi/3$.

$$F(S) : \{z, |z| \leq 1, \frac{\pi}{3} \leq arg(z) \leq \frac{7\pi}{6}\} \tag{25}$$

Ejemplo Tenemos un triangulo con los vertices $B = (-1, 1) \quad A = (0, 0) \quad C = (1, 0)$ y lo vamos a mapear con la funcion $F\left(z\right) = [-1 - i\sqrt{3}]z$

$$a = -1 - i\sqrt{3} \tag{26}$$
$$|a| = 2 \tag{27}$$
$$\tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \frac{\pi}{3} \rightarrow arg(a) = \frac{-2\pi}{3} \tag{28}$$

El argumento de la rotacion es $-\frac{2\pi}{3}$. La funcion queda como $F\left(z\right) = 2e^{-\frac{2\pi}{3}}$. Entonces los vertices del triangulo quedan como: $C' = (-1+i\sqrt{3})(1), \qquad B' = (-1-i\sqrt{3})(-1+i) = 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1), \qquad A' = 0.$

$$\text{Recta } AC : \quad z = x + 0i \tag{29}$$
$$F\left(z\right) = [-1 - i\sqrt{3}]x = -x - i\sqrt{3}x \tag{30}$$
$$U = -x, V = -\sqrt{3}x \tag{31}$$
$$\frac{V}{U} = \sqrt{3} \qquad\qquad V = \sqrt{3}U \tag{32}$$
$$\text{Recta } AB : \qquad z = x + iy \qquad y = -x \quad \rightarrow \quad z = x - ix = x(1 - i) \tag{33}$$
$$F\left(z\right) = (-1 - i\sqrt{3})(1 - i)x = (-1 - \sqrt{3} - i\sqrt{3} + i)x \tag{34}$$
$$U = (-1 - \sqrt{3})x \qquad V = (-\sqrt{3} + 1)x \tag{35}$$
$$\rightarrow \frac{V}{U} = \frac{-\sqrt{3}+1}{-1-\sqrt{3}} \rightarrow V = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}U \tag{36}$$
$$\tag{37}$$

Tarea

Encontrar la recta BC luego de la transformacion

$$\text{Recta } BC: \qquad y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad V = (-8 + 5\sqrt{3})4 + 4\sqrt{3} - 8$$

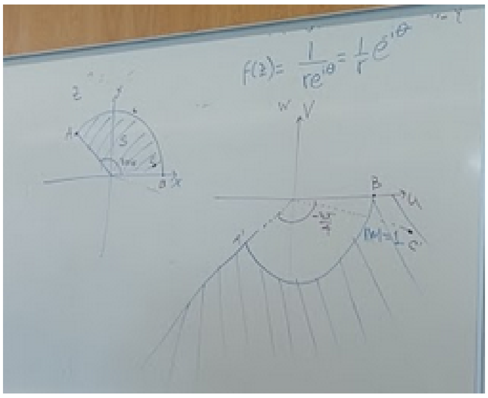
1.3 Transformacion de inversion

Inversion

$$F(z) = \frac{1}{z} \tag{38}$$

Cociente $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Tenemos el dominio $S: \{|z| \leq 1, \quad 0 \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}, \quad z \neq 0\}$, Es un segmento de circulo desde 0 hasta $\frac{3\pi}{4}$. Al realizar la inversion $F(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ el dominio se convierte en todos los puntos que estén mas allá del semicirculo de 0 hasta $\frac{-3\pi}{4}$.



$$\text{Recta } AB: \quad F(S): \{ \underset{r\in[1,\infty)}{|z|} \leq 1, \quad -\frac{3\pi}{4} \leq arg(z) \leq 0\} \tag{39}$$

Ejemplo tenemos $S: \{z, \quad 2 \leq x \leq 5\}$ ó $z, 2 \leq Re(z) \leq 5$. Al realizar la inversion:

$$F(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \tag{40}$$

$$U = \frac{x}{x^2+y^2}; \qquad V = \frac{-y}{x^2+y^2} \tag{41}$$

$$U = \frac{x_0}{x_0^2+y^2}; \qquad V = \frac{-y}{x_0^2+y^2} \tag{42}$$

Ahora hacemos $U^2 + V^2$

$$U^2 + V^2 = \frac{x_0^2+y^2}{(x_0^2+y^2)^2} = \frac{1}{x_0^2+y^2} \rightarrow U^2 + V^2 = \frac{U}{x_0} \tag{43}$$

Podemos observar que esto parece un circulo

$$U^2 - \frac{u}{x_0} + V^2 = 0 \tag{44}$$

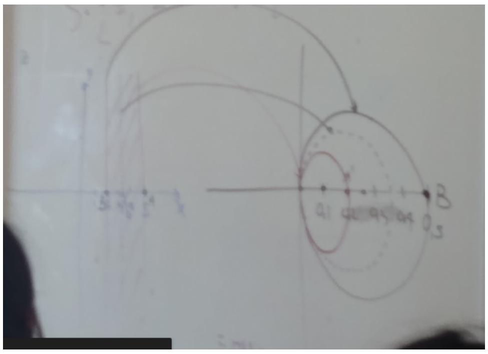
$$\to U^2 - \frac{U}{x_0} + \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2 \tag{45}$$

$$\to \left(U - \frac{1}{2x_0}\right)^2 + V^2 = \frac{1}{(2x_0)^2} \tag{46}$$

Mapeamos rectas en circulo

$$\text{Radio del circulo: } x_0 = 5 \to R = \frac{1}{10} = 0.1 \tag{47}$$

$$x_0 = 2 \to R = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{4} = 0.25 \tag{48}$$



Tarea

Ver como transforma una franja horizontal.