Clase 13

Manuel Garcia.

October 3, 2023

1 Vectores en variedades

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad\qquad X(f) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} f\bigg|$$

X^i son las componentes de X, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\} = \{e_i\} \quad \rightarrow$ Bases de T_pM.
$X \quad \rightarrow \quad$ operador en T_pM.

$$(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{4}) \qquad\qquad (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Nosotros podemos expresar unas coordenadas en terminos de las otras:

$$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \bar{V}^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \hat{V}^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \rightarrow \quad V^k = \hat{V}^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i}$$

2 Covectores, vectores duales o 1-formas y espacio cotangente T_p^*M

1-forma $\omega : T_pM \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$, vamos a definirlo ahora como un producto escalar:

$$\langle \omega | V \rangle : T_pM \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$$

El diferencial de una función actual linealmente en T_p^*. El diferencial d euna función f es una 1-forma definida en la variedad: $\langle df | V \rangle \equiv V[f] = V^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathbb{R}$.

Vamos a definir el diferencial en coordenadas x: $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = f_i dx^i$. Vamos a llamar f_i las componentes de df y a $\{dx^i\}$ las bases de T_p^*M.

Utilizando las definiciones anteriores obtenermos la siguiente identidad:

$$\left\langle dx^j \middle| \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta^j_i$$

ya que $V^j \frac{\partial f}{\partial x^i} \underbrace{\langle dx^i | \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle}_{=\delta^i_j} = V^k \frac{d}{dx^k} f$.

En resumen las 1-formas son objetos que tienen el indice abajo y que al operarse con los objetos de la variedad obtenemos un escalar.

1-forma arbitraria:

$$\omega = \omega_i dx^i$$

ω_i son las componentes de ω en la base dx^i. Producto interno:

$$\langle \omega | V \rangle = \omega_i V^j \left\langle dx^i \middle| \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \omega_i V^i : \quad T_p^* M \otimes T_p M \quad \to \quad \mathbb{R}$$

$$\begin{gathered} \langle \omega | V \rangle = \left\langle \omega_i dx^i \middle| V^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \\ = \omega_i V^k \left\langle dx^i \middle| \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \omega_i V^i \\ \langle \omega | V \rangle = \omega_i V^i \end{gathered}$$

Y tenemos que:

$$\begin{gathered} \langle \omega_1 + \omega_2 | V \rangle = \langle \omega_1 | V \rangle + \langle \omega_0 | V \rangle \\ \langle \omega | V_1 V_2 \rangle = \langle \omega | V_1 \rangle + \langle \omega | V_2 \rangle \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \omega = \omega_i dx^i = \hat{\omega}_i dy^i = \hat{\omega}_i \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k = \hat{\omega}_j \frac{\partial y^i}{\partial x^i} dx^i \\ \omega_i = \hat{\omega}_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad \to \quad \hat{\omega}_j = \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \end{gathered}$$

3 Tensores en los productos de los espacios tangente sy cotangentes

Tensor tipo (q, r)

$$T = T^{\mu_1, \mu_2 \dots \mu_q}_{v_1, v_2, \dots v_e} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r}$$

Funcion multilineal: $\otimes^q T_p M \otimes^r T_p^* M \quad \to \quad \mathbb{R}$. Accion de un tensor sobre los vectores V_a y las formas ω_b:

$$T(\omega_2, \cdots, \omega_r; V_1, \cdots, V_q) = T^{\mu_1, \dots \mu_r}_{\nu_1, \dots \nu_q} \omega_{1\mu_1} \cdots \omega_{r\mu_r} V_1^{\nu_1, \dots, \nu_q}{}_q \cdots V_p^{\nu_r}$$

3.0.1 Comportamiento de tensores ante mapeos

Sea f un mapa entre M y N. Vamos a comar los espacios tangentes y un punto en este espacio tangente en cada variedad y tenemos una funcion f que va de uno a otro. $T_p M \to T_{f(p)} N \underset{g}{\to} \mathbb{R}$.

$$f : M \to N \to f_* : T_p M \to T_{f(p)} N$$

f_* es el mapeo diferencial.

$V \in T_p M \to f_* V \in T_{f(p)} N$.

$$(f_* V)[g] \equiv V[g \circ f] \qquad\qquad g \circ f \in \mathcal{F}(M)$$