Clase 9

Manuel Garcia.

September 8, 2023

1 Series y convergencia

En la clase pasada demostramos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$: converge.

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$$
$$v_n = |a_0| + |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$
$$n > m \geq N$$
$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j \right| \geq \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j| = v_n - v_m$$

Como la cola converge demostramos que la serie tambien converge.

1.1 Algunos criterios de convergencia

- Criterio de la comparación:

  Supongamos que a_n son números complejos y b_n son numeros reales, si para todo $n \geq n_n$

  $$|a_n| \leq b_n \qquad y \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

  Es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente

Ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2e^{in}}{n^2+3} = \left| \frac{2e^{in}}{n^2+3} \right| = \frac{2}{n^2+3} < \frac{2}{n^2}$$

Por el criterio de comparacion el modulo de esta cantidad siempre va a estar acotado

$$\text{Como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \text{ converge } \rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2e^{in}}{n^2+3} : \text{ Converge}$$

- Prueba de la razon

$$p = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

Si $p < 1$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Converge absolutamente y diverge si $p > 1$

En el caso en que $p = 1$ no se puede afirmar algo

Ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0$$

Es convergente ya que $p<1$

Definicion

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\quad \sum_{n=0}^{\infty}b_n$ ambas series de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$$

1.2 Funciones elementales de la variable compleja

$$f(z)=e^z$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{|z|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!},\qquad e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Si $z=i\theta$

$$e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-n)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos\theta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!},\qquad \sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ejemplo Vamos a levar un dominio de un rectangulo entre $A=(-2,0)$, $B=(-2,2)$, $C=(2,2,)$, $D=(2,0)$ al plano comlejo con la funcion $f(z)=e^z=e^{x+iy}$.

Para A

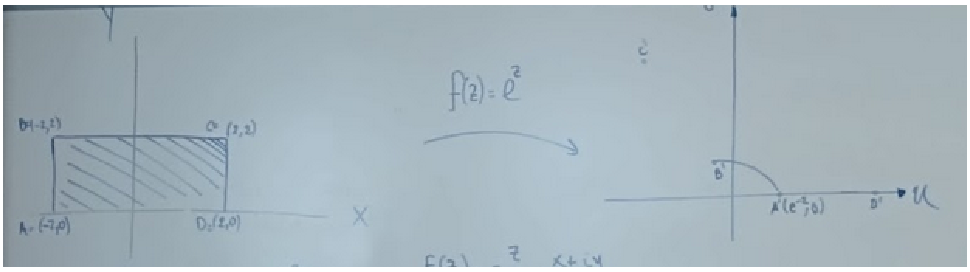
$$u=e^x\cos y,\qquad v=e^x\sin y$$

$$A(-2,0)\quad\to\quad A'(e^{-2},0)$$

$$B(-2,2)\quad\to\quad B'(e^{-2}\cos 2,e^{-2}\cos 2)$$

$$C(2,2)\quad\to\quad C'(e^{2}\cos 2,e^{2}\sin 2)$$

$$D(2,0)\quad\to\quad D'(e^{2},0)$$



Como transforman las lineas?

$$A - B$$
$$x = -2, \qquad 0 \leq y \leq 2$$
$$u^2 + v^2 = e^{2x} \quad \rightarrow \quad u^2 + v^2 = e^{-4}$$
$$\tan y = \frac{v}{u}$$
$$B - C$$
$$-2 \leq x \leq 2, \qquad y = 2$$
$$\tan 2 = \frac{v}{u} \quad \rightarrow \quad v = u \tan 2$$
$$C - D$$
$$x = 2 \qquad 0 \leq y \leq 2, \qquad v^2 + u^2 = e^4$$
$$D - A$$
$$-2 \leq x \leq 2, \qquad y = 0$$
$$\tan 0 = \frac{v}{y} = 0 \quad \rightarrow \quad v = 0$$

Seno y coseno

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} \qquad \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}$$

Queremos transformar la region dentro del cuadrado $(0,0),(2,0),(1,2),(0,1)$ con la funcion $f(z) = \sin z$.

$$\begin{aligned}
\sin x + iy = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{i(x+iy)}}{2i} &= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i} = \frac{(\cos x + i\sin x)e^{-y} - (\cos x - i \sin x)e^{y}}{2i} \\
&= -\frac{i}{2}\left[(\cos x + i\sin x)e^{-y} - (\cos x - i\sin x)e^{y}\right] \\
&= \frac{-ie^{-y}\cos x + e^{-y}\sin x + ie^{y}\cos x + e^{y}\sin x}{2} \\
&= u + iv
\end{aligned}$$

$$u = \frac{e^{-y}\sin x + e^{y}\sin x}{2} = \cosh y \sin x, \qquad v = \frac{-e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x}{2} = \sinh y \cos x$$

Entonces para claclular las lineas:

$$A - B : x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2$$
$$u = \cosh y \sin 0 = 0, \quad u = 0. \qquad v = \sinh y \cos 0 = \sinh y, \quad 0 \leq v \leq \sinh 2$$
$$B - C : 0 \leq x \leq 1, \quad y = 2$$
$$u = \cosh 2 \sin x \qquad v = \sinh 2 \cos x$$
$$\left(\frac{u}{\cosh 2}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh 2}\right)^2 = 1$$
$$C - D : x = 1, \quad 0 \leq y \leq 2$$
$$u =$$

Terminar ejercicio para la proxima clase