# Clase 6

Manuel Garcia.

September 1, 2023

## 1 Secuencias

**Secuencia:** Funcion que depende de numeros naturales

$$N = \{1, 2, 3, ...\}, \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad a_n = \frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right] \tag{2}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \tag{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right] \tag{5}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}[-1] = -\frac{1}{4} \tag{6}$$

$$a_5 = \frac{1}{5}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \tag{7}$$

$$a_6 = \frac{1}{6}[-1] = \frac{-1}{6} \tag{8}$$

$$a_7 = \frac{1}{7}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \tag{9}$$

$$a_8 = \frac{1}{8}[1] = \frac{1}{8} \tag{10}$$

$$a_9 = \frac{1}{9}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right] \tag{11}$$

$$a_{10} = \frac{1}{10}[i] = \frac{i}{10} \tag{12}$$

**Convergencia o divergencia**

Se dirá que una secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$converge a un número complejo $L$ (o tiene limite $L$) cuando $n$ tiende a infinito $\underset{n\to\infty}{lim} \quad a_n = L$. Si para cada $\epsilon > 0$, existe un entero $N > 0$ tal que:

$$|a_n - L| < \epsilon, \qquad n \geq N \tag{13}$$

$$a_n \to L(\text{Quiere decir que } n \to \infty) \tag{14}$$

$$\text{Si } |a_n - L| \text{ no es un menor que } \epsilon \text{ para } N \text{ arbitrario, entonces la secuencia diverge.} \tag{15}$$

**Propiedades**

- Si el limite existe, entonces ese limite es único

  $\underset{n\to\infty}{lim} a_n = L$ y $L = 0 \longleftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim} |a_n| = 0$

  **Demostracion**

$$\text{Si } a_n \to L \text{ y } a_n \to L' con L \neq L' \tag{16}$$
$$\text{Supongamos: } \epsilon = \frac{|L-L'|}{2} > 0 \tag{17}$$
$$\text{Por lo tanto debe ser válido} \tag{18}$$
$$|a_n - L| < \epsilon, \qquad\qquad |a_n - L'| < \epsilon \tag{19}$$
$$|a_n - L| + |L' - a_n| < 2\epsilon \tag{20}$$
$$\text{Por desigualdad triangular} \tag{21}$$
$$|(a_n - L) + (L' - a_n)| < |a_n - L| + |L' - a_n| \tag{22}$$
$$|L - L'| < |a_n - L| + |L' - a_n| < 2\epsilon \tag{23}$$
$$2\epsilon > |L - L'| \tag{24}$$
$$\epsilon > \frac{|L-L'|}{2}, \quad \to\leftarrow \quad L = L' \tag{25}$$

**Ej:** $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\}$

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad b_2 = i \tag{26}$$
$$b_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad b_4 = -1 \tag{27}$$
$$b_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad b_6 = -i \tag{28}$$
$$b_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad b_8 = 1 \tag{29}$$
$$b_9 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad b_{10} = i \tag{30}$$
$$|a_n| = \frac{|b_n|}{n} \tag{31}$$

**Teorema**

Supongase que $z_n$ lo puedo escribir como $z_n = x_n + iy_n, \quad z = x + iy$, entonces $\underset{n\to\infty}{lim} z_n = z$ si y solo si $\underset{n\to\infty}{lim} x_n = x$ y $\underset{n\to\infty}{lim} y_n = y$.

**Demostracion** en la primera direccion:

$$\underset{n\to\infty}{lim} x_n = n \quad \text{ y } \quad \underset{n\to\infty}{lim} y_n = y \quad \text{ entonces } \quad \underset{n\to\infty}{lim} z_n = z \tag{32}$$
$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } n > n_1 \tag{33}$$
$$|y_n - n| < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } n > n_2 \tag{34}$$

Vamos a tomar la condicion $n_0 = Max\{n_1, n_2\}$, entonces:

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \wedge \quad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}, \quad n \geq n_0 \tag{35}$$
$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \tag{36}$$
$$|x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon \tag{37}$$
$$\text{Por lo tanto } |z_n - z| < \epsilon, \quad \underset{n\to\infty}{lim} z_n = z \tag{38}$$

Ahora en la otra direccion

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ y } \lim_{n\to\infty} y_n = y \tag{39}$$
$$\text{Entonces:} \tag{40}$$
$$|x_n - x| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| \tag{41}$$
$$|y_n - y| \le |(x_n - x) + i(y_n - y)| \tag{42}$$
$$\text{A cada uno le podemos hacer lo siguiente:} \tag{43}$$
$$|x_n - x| \le |(x_n + iy_n) - (x - iy)| < \epsilon \tag{44}$$
$$|y_n - y| \le |(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \epsilon \tag{45}$$
$$\text{Entonces:} \tag{46}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \tag{47}$$

**Teorema**

Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son secuencias convergentes, entonces:

- suponiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y que $|b_n| \le |a_n|, \quad \forall n > n_0$ entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
- Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cotada, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$
- $\overline{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} \bar{a}_n$
- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|$

**Ejercicio**

Muestre que:

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0 & si \quad |z| < 1 \\ 1 & si \quad z = 1 \end{cases} \tag{48}$$

Y diverge si $|z| > 1, \quad |z| = 1 \wedge \neq 1$

¿Terema de moivre?

**Sol.** Recordemos:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & si \quad r < 1 \\ 1 & si \quad r = 1 \\ \infty & si \quad r > 1 \end{cases} \tag{49}$$

- Si $|z| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} z^n = 0$
- Es completamente equivalente al caso real si $z = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 1 \tag{50}$$

- $\lim_{n\to\infty} |z|^n$ con $|z| > 1$ es claramente divergente pues $|z| \in \mathbb{R}$.
- Analicemos la situacion $|z| = 1, \quad z \neq 1$, Vamos a probar que si la secuencia $z^n$ converge obligatoriamente $z = 1$.

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} |z|^n = L, \text{ entonces } |L| = |\lim_{n\to\infty} z^n| = \lim_{n\to\infty} z^n| = \lim_{n\to\infty} |z^n| = 1 \tag{51}$$

$$L \neq 0 \tag{52}$$

$$\text{Si } z^n \to L, z^{n+1} \to L \tag{53}$$

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} z^n z \tag{54}$$

$$L = Lz \longleftrightarrow z = 1 \tag{55}$$