Clase 17

Manuel Garcia.

October 13, 2023

1 Integración compleja

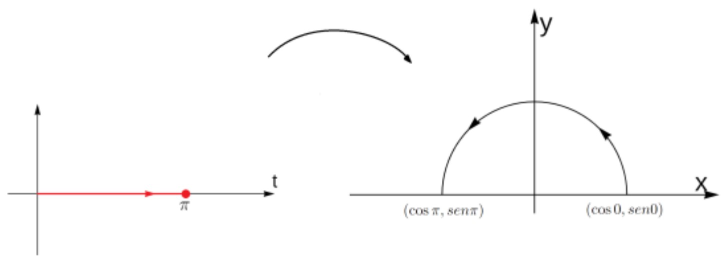
1.1 Trayecto o contorno

Llamaremos curva a una función $y = f(x)$, continua. esta curva puede ser expresada en forma paramétrica, de tal manera, que x e y son funciones de un nuevo parámetro t.

Por ejemplo consideremos una semicricunferencia unitaria descrita por $y = \sqrt{1-x^2}$, con $-1 \leq x \leq 1$. Su parametrizacion es:

$$x = x(t) = \cos t, \qquad y = y(t) = \sin t, \qquad t \in [0, \pi]$$

De esta manera, se debe poner atención en que si se recorre t de menor a mayor, x se recorreria de mayor a menor. Definiremos esta direccion de barrido , como direccion positiva.



Claramente, si se barriera r de maor a menor, x se barrería de menor a mayor (barrido en dirección negariva, sentido de las manecillas de reloj).

Ahora tendremos una curva cerrada, si el valor en sus extremos coincide. $\gamma(t), a \leq t \leq b$, será cerrada si $\gamma(a) = \alpha(b)$.

"Una curva puede tener multiples parametrizaciones", Ej: Parametricemos $[0, 1]$:

$$\gamma_1(t) = t, 0 \leq t \leq 1 \qquad \gamma_2(t) = t^2, 0 \leq t \leq 1$$

Entonces, como $z(t) = x(t) + iy(t) \rightarrow \gamma(t) = x(T) + iy(t)$

Algunas parametrizaciones útiles:

- Parametrización general de una circunferencia: $(R > 0)$

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= z_0 + Re^{it} \\ &= z_0 + R(\cos t + i \sin t) \\ &= x_0 + iy_0 + R\cos t + iR\sin t \\ x(t) &= x_0 + R\cos t, \quad y(t) = y_0 + R\sin t\end{aligned}$$

Ejemplo: Parametrizar, la circunferencia con $R = 3$ y centro en $z_0 = e^{3i}$

$$x(t) = \cos 3 + 3\cos t, \quad y(t) = \sin 3 + 3\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

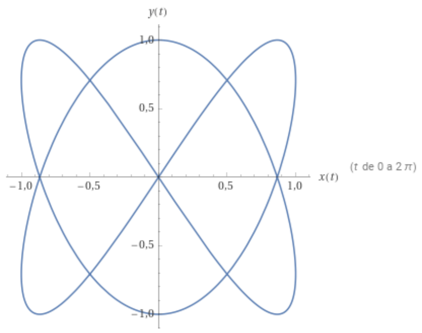
- Parametrización d eun segmento de reca:

  Sean los extremos del segmento en z_1 y z_2. Una parametrización posibles, es :

$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

- Parametrizacion de fitura de lsajous

$$x(t) = \sin 2t \quad \text{y} \quad y(t) = \sin 3t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$



De manera sistematica se puede cambiar la orientación de barrido, por ejemplo de positiva a negativa, si $t \in [a, b]$ entonces sustituyo el parametro por $a + b - t \in [b, a]$

Ejemplo Sea el trayecto $\gamma(t) = 2 - i + 3e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

$$\gamma_1(t) = 2 - i + 3e^{i(2\pi - t)}, \quad a = 0, \quad b = 2\pi$$

Resaltemos lo que implica una funcion compleja de una variable real. En este caso vamos a tener lo siguiente:

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \qquad f'(t) = Re\{f'\} + iIm\{f'\}$$

Propiedades:

- $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad f(t), g(t), \quad t \in (a, b)$
- $(f \cdot g)' = fg' + f'g$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}, g(t) \neq 0$
- $(f \circ h)' = f'(h(t)) \cdot h'(t)$ **EJ:** si: $f(t) = \sin 3zt \quad \rightarrow \quad f'(t) = 3z \cos 3zt$

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin 3z(t+h) - \sin 3zt}{h}$$