Clase 3

Manuel Garcia.

August 22, 2023

1 Observables

$$P_i = |\langle o_i|\psi\rangle|^2 \tag{1}$$

$$< O > |_{\text{datos exp.}} = \langle\psi| O |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} o_i \, |\langle o_i|\psi\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{N} o_i P_i \tag{2}$$

Medicion

$$< O >= \langle\psi| O |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} o_i P_i \tag{3}$$

El sakurai lo nombra ”expectation value”.

$$(\langle\psi| O |\psi\rangle)^* = \langle\psi| O^\dagger |\psi\rangle = \langle\psi| O |\psi\rangle \tag{4}$$

O es herminica

Analisis datos

La dispersion de los datos D^2 donde o_i representa el resultado de las mediciones singulares. Esto nos idce cuan alejados están los datos del valor esperado. Y tenemos que $\sum_{i=1}^{N} N_i = N_{\text{Total}}$

$$D^2 = \sum_{i=1}^{N} P_i(o_i - < O >)^2 \tag{5}$$

$$P_i \longleftrightarrow \frac{N_i}{N_{\text{Total}}} \tag{6}$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^{N} P_i(o_i - < O >)^2 = \sum P_i \left(o_i^2 + (< o >)^2 - 2o_i < o >\right) \tag{7}$$

$$= \sum P_i o_i^2 + (< O >)^2 - 2 < O >< O >= \left(\sum P_i o_i^2\right) - (< O >)^2 \tag{8}$$

Dispersion

$$D_{op}^2 = (O- < O >)^2 = O^2 + (< O >)^2 - 2O < O > \tag{9}$$

$< O >$ es O promedio.

$$\begin{aligned} < D^2 >= \langle\psi| D_{op}^2 |\psi\rangle &= \langle\psi| O^2 |\psi\rangle + (\langle\psi| O |\psi\rangle)^2 - 2(\langle\psi| O |\psi\rangle)^2 \qquad (10) \\ &= \langle\psi| O^2 |\psi\rangle - (\langle\psi| O |\psi\rangle)^2 \qquad (11) \end{aligned}$$

Este calculo requiere que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, osea que esté normalizado.
Aplicando la identidad en eq. 10:

$$\langle\psi| O^2 |\psi\rangle = \langle\psi| O^2\mathbb{I} |\psi\rangle = \langle\psi| O^2\mathbb{I} |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle\psi| O^2 |o_i\rangle \langle o_i|\psi\rangle = \sum o_i^2 P_i \tag{12}$$

En resumen tenemos que:

$$\langle\psi| D_{op}^2 |\psi\rangle = \left(\sum_{i=1}^{N} o_i^2 p_i\right) - (\langle\psi| O |\psi\rangle)^2 \tag{13}$$

De esta forma calculamos el valor esperado.

Tener una dispersion pequeña o 0 significa que tenemos una compresion complejida con una precision muy alta. (no entendí xd)

$$\sqrt{D^2} \approx \frac{1}{\text{presicion}} \tag{14}$$

Teniendo $|\psi\rangle = |o_3\rangle$ y pedimos la cantidad O en este estado obtenemos o_3, osea $O|o_3\rangle = o_3|o_3\rangle$. En este caso tenemos $< D^2 >= 0$ obtenemos dispersion cero porque siempre encontramos el mismo estado. $\langle\psi| O |\psi\rangle = o_3$. Haciendo el calculo de la dispersion y teniendo en cuenta que $\langle\psi| D_{op}^2 |\psi\rangle = 0$:

$$D_{op}^2 |\psi\rangle = (O - o_3)(O - o_3)|\psi\rangle = 0 \tag{15}$$

En este caso tenemos la presicion maxima, no tenemos ninguna incertidumbre porque cuando mido obtenemos que nuestro estado es o_3. La dispersion es 0. Recordemos que $O|\psi\rangle = o_3|\psi\rangle$.

$\langle a_j|a_i\rangle = \Delta_{i,j}$ es normal y completa

$$\begin{aligned} A|a_i\rangle &= a_i|a_i\rangle \qquad (16) \\ \langle a_i| A |a_i\rangle &= \delta a_i \qquad \text{Diagonal} \qquad (17) \end{aligned}$$

Introducimos el operados $B = c_0 + c_2A^2 + c_3A^3 + ...$

$$\begin{aligned} B|a_i\rangle &= (c_0 + c_1a_i^2 + c_3a_i^3)|a_i\rangle = b_i|a_i\rangle \qquad (18) \\ \langle a_j| B |a_i\rangle &= \Delta_{i,j}b_i \qquad (19) \end{aligned}$$

2 Conmutador

Hermitico $[A, B] = AB - BA = 0$

$$\langle a_j| AB - BA |a_i\rangle = (a_j - a_i)\langle a_j| B |a_i\rangle = 0 \qquad (a_j - a_i) \neq 0 \tag{20}$$

Si $a_j \neq a_i \to \langle a_j| B |a_i\rangle = 0$, entonces para $j \neq i$ tenemos que $\langle a_j| B |a_i\rangle = b_i\Delta_{i,j}$. Si una matriz de diagonal significa que los estados son autoestados por lo cual se prefiere escribir $|a_i\rangle \to |a_i, b_i\rangle$ para recordar que tambien son autoestados.

Estado y autoesado

Con qué presicion puedo medir $|a_i\rangle$? con precision infinita ya que son autoestados.
Con qué presicion puedo medir b_i? tambien con presicion infinita.
$|a_i, b_i\rangle$ se les llama autoestados comunes.
Esto solo ocurre si A y B conmutan.

En resumen: Podemos escribir $|a_i, b_i\rangle$ si A, B conmutan.

Operador antihermitico

si tenemos E y F hermiticos pero $[E, F] = G \neq 0$ (no conmuta) al sacar el hermitico conjugado $(EF - FE)^\dagger = FE - EF = -G$. En este caso se le llama operador antihermitico ya que $G^\dagger = -G$.

Anticonmutador

$$H = \{E, F\} = \underbrace{EF + FE}_{\text{Notar el cambio de signo}} \tag{21}$$

Si $H^\dagger = H$ es hermitico entonces $\langle\psi| H |\psi\rangle$ es real.

Titulo

$$EF = 1/2[E, F] + 1/2\{E, F\} \tag{22}$$