clase 15

Manuel Garcia.

October 10, 2023

1 Tensores totalmente antisimétricos

ω_r tensores de tipo $(0, r) \to \Omega_p^r(M)$

Vamos a definir las permutacion y la accion de una permutacion sobre un tensor de tipo $(0, r)$.

$$p\omega(v_1, ..., v_r) = \omega(v_{p(1)}, ..., v_{p(r)})$$
$$p \in S_r \to \text{Grupo simetrico de orden } r$$

Ejemplo:

$$\omega(v_1, v_2, v_3) \qquad S_3 = \{\underset{p1}{(1,2,3)}, \underset{p_2}{(1,3,2)}, \underset{p_3}{(2,1,3)}, \underset{p_4}{(2,3,1)}, \underset{p_5}{(3,1,2)}, \underset{p_6}{(3,2,1)}\}$$
$$p_4\omega(v_2, v_2, v_3) = \omega(v_2, v_2, v_1)$$

Con la forma: $\{e_\mu\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$

$$\begin{aligned} \omega_{\mu_1,...,\mu_r} &= \omega(e_{\mu_1}, ..., e_{\mu_r}) \\ p(\omega_{\mu_1,...,\mu_r}) &= \omega(e_{p(\mu_1)}, ..., e_{p(\mu_r)}) \\ &= \omega_{p(\mu_1)...p(\mu_r)} \end{aligned}$$

Vamos a trabajar con el siguiente simetrizador:

Simetrizador

$$S\omega = \frac{1}{r!}\sum_{p \in S_r} p\omega$$

Ejemplo

$$\omega \in J^0_{2,p}(M) \qquad S_2 = \{(1,2), (2,1)\}$$
$$S\omega = \frac{1}{2!}[\omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_1)]$$

El antisimetrizador:

Antisimetrizado

$$A\omega = \frac{1}{r!}\sum_{p \in S_r} sgn(p)p\omega \qquad sgn(p) = \begin{cases} +1 & \text{par} \\ -1 & \text{impar} \end{cases}$$

Ahora vamos a tomar una *r-forma* o tensor tipo $(0,r)$ completamente antisimétrica. $T_{\sigma(\mu_1,\ldots,\mu_r)} = sgn(\sigma)T_{\mu_1,\ldots,\mu_r)}$ **Ejemplo:** para T_{μ_1,μ_2,μ_3}

$$T_{\mu_3,\mu_2,\mu_1} = T_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} \qquad T_{\mu_1,\mu_3,\mu_2} = -T_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$$
$$r = 3 \qquad dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} = dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes dx^{\mu_3}$$

En general: $$dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma) e^{\sigma(\mu_1)} \otimes \cdots \otimes e^{\sigma(\mu_r)}$$

Qué sucede si se repite $\mu_1 = \mu_2 = \mu$

$$(dx^{\mu} \wedge dx^{\mu}) \wedge dx^{\mu_3}$$
Tenemos que $$dx^{\mu} \wedge dx^{\mu} = -dx^{\mu} \wedge dx^{\mu}$$
$$2dx^{\mu} \wedge dx^{\mu} = 0$$

propiedades producto $\wedge$

- $dx^{\mu} \wedge dx^{\mu} = 0$
- $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} = sgn(\sigma) dx^{\sigma(\mu_1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(\mu_r)}$
- $dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$ es lineal en cada dx^{μ_1}.

Vamos a escribir el simetrico con [] y el antisimetrico con ()

En el punto $p \in M$ denotados por $\Omega_p^r(M)$ al espacio de todas las r formas. Las bases de este espacio son los elementos

$$dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$
$$T = \frac{1}{r!} T_{\mu_1,\ldots,\mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_k}$$

Dimensión del espacio de tensores (0, r) antisimétricos en una variedad de dimensión m

r-forms	Basis	Dimension
$\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$	$\{1\}$	1
$\Omega^1(M) = T^*M$	$\{dx^{\mu}\}$	m
$\Omega^2(M)$	$\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}\}$	$m(m-1)/2$
$\Omega^3(M)$	$\{dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3}\}$	$m(m-1)(m-2)/6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Omega^m(M)$	$\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots dx^m\}$	1

Antisimetricos: numero de componentes independientes:

$$\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

Simetricas:

$$\binom{m+r-1}{r} = \frac{(m+r-1)!}{r!(m-1)!}$$

Ejemplo

$$T_{\mu v} = \frac{1}{2}(T_{\mu v} + T_{v\mu} + T_{\mu v} - T_{v\mu})$$
$$T_{\mu v} = \underset{simetrico}{T_{(\mu v)}} + \underset{antisimetrico}{T_{[\mu v]}}$$
$$m^2 = \frac{(m+1)!}{2!(m+1)!} + \frac{m!}{2!(m-2)!} = m^2$$

$$T_{\mu v\alpha} \stackrel{?}{=} T_{(\mu v\alpha)} + T_{[\mu v\alpha]}$$
$$m^3 \stackrel{?}{=} \frac{(m+2)!}{3!(m-1)!} + \frac{m!}{3!(m-3)!}$$
$$m^3 = \frac{m}{3}(m^2+2)$$

Propiedad: $dim(\Omega_p^r(M)) = dim(\Omega_p^{m-r}(M))$ son isomorfos.

$$\omega \wedge \xi(v_1, ...v_{q+r}) \in \Omega_p^{q+r}(M)$$
$$\equiv \frac{1}{r!q!} \sum_{r \in S_{q+r}} sgn(\sigma)\omega(V_{\sigma(1)} \dots V_{\sigma(q)}) \times \xi(V_{\sigma(q+1)}, \dots, V_{\sigma(q+r)})$$
$$\omega \wedge \xi = (-1)^{qr} \xi \wedge \omega$$
$$\xi \wedge \omega = \frac{1}{r!q!} \sum_{\sigma \in S_{q+r}} sgn(\sigma)\xi(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(r)})\omega(V_{\sigma(r+1)}, \dots, V_{\sigma(r+q)})$$

1.1 Derivada exterior

El producto exterior nos va a aumentar el grado de la forma en una dimension

Derivada exterior

$$d\omega = \frac{1}{r!} \partial_{[\alpha \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r]}} dx^\alpha \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

Ejemplo: Todas las posibles r-formas en 3 dimensiones:

$$\omega_0 = \omega_0(x, y, z)$$
$$\omega_1 = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz$$
$$\omega_2 = \omega_{xy} dx \wedge dy + \omega_{yz} dy \wedge dz + \omega_{zx} dz \wedge dx$$
$$\omega_3 = \omega_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz$$

Y sus derivadas exteriores:

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$
$$...$$