Clase 13

Manuel Garcia.

September 27, 2023

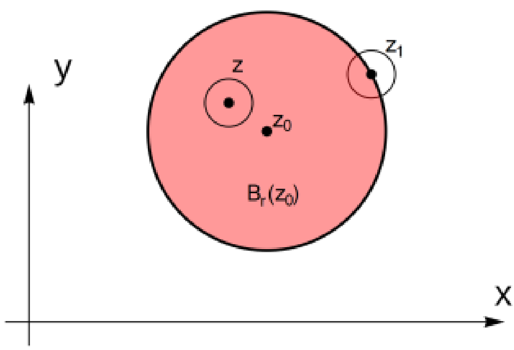
1 Funcion Analitica

En el calculo real las funciones usualmente se definen en intervalos, en el caso de la variable compleja los intervalos son reemplazados por subconjuntos del espacio complej. Dichos subconjuntos tienen las siguientes propiedades:

- **Definicion Vecindades:** sea $r > 0$ y z_0 un numero complejo en el plano. La vecindad r de z_0 es el conjunto de todos los numeros complejos que satisfacen $|z - z_0| < r$. Convencionalmente este conjunto lo denotamos como: $B_r(z_0)$. Demonos cuenta que los puntos que forman el perimetro no están incluidos.

  Vamos a definir, adicionalmente, una **Vecindad Puntuada** $B'_r(z_0)$ y cumple $B'_r(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$, es decir z_0 no pertenece al conjunto.

- **Definicion:** Sea S un subconjunto de $\mathbb{C}$. Un punto z_0 en S es llamado un **punto interior** de S si podemos encontrar una vecindad de z_0 que esté totalmente contenida en S. Un punto z se llamará **punto de frontera** de S si toda vecindad de z contiene al menos un punto interior y un punto en el exterior de S.

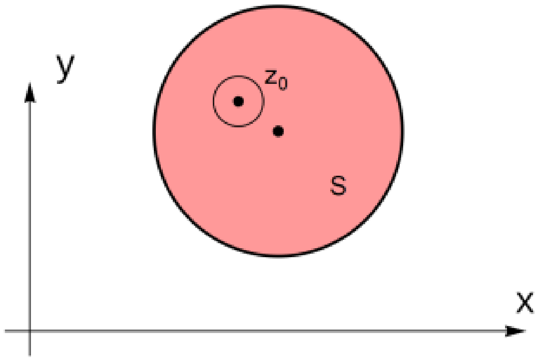


- **Definicion conjuntos abiertos:** Un conjunto S d enumeros complejos se llamará **abierto** , si todos los puntos que los conforman son interiores.
  - Vecindad, $B_r(z_0)$ es un conjunto abierto.
  - El ocnjunto $S = \{z : |z - z_0| > r\}$, es una vecindad al infinito y es un conjunto abierto.
  - El conjunto cerrado más "pequeño" que contiene a un conjunto A se llamará la cerradura de A.

    Por ejemplo: sea un disco abierto $B_r(z_0)$, entonces su cerradura es :

$$B_r\bar{(}z_0) = \{z : |z - z_0| \leq r\}$$

- **Definicion:** Un **punto de acumulacion** de un conjunto A, z_0, será aquel que cumpla $B'_r(z_0) \cap A \neq \emptyset$, para cualquier $r > 0$.



$$A \cup B = \{z : z \in A \vee z \in B\}$$
$$A \cap B = \{z : z \in A \wedge z \in B\}$$
$$A - B = \{z : z \in A \wedge z \notin B\}$$

1.1 Conjunto conexo

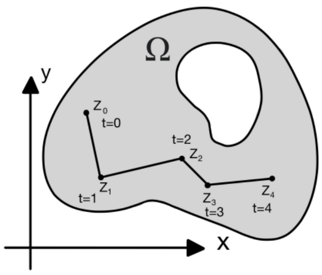
Un resultado de cálculo real es que la derivada de una función es un intervalo abierto que sea cero, implica que la función es constante. Tengamos presente que este resultado no es valido si el conjunto no es conexo.

Ej:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 5 \\ -1 & \text{si } 7 < t < 10 \end{cases}$$

$g'(t)$ en el intervalo $(0, 5) \cup (7, 10)$ es cero, sin embarlo la funcion no es constante.

- **Definicion:** Una **Linea poligonal** es una union finita de segmento de linea recta, cuyos extremos finales los denotamos como L_J, $\quad J = 1, 2, 3, ...$

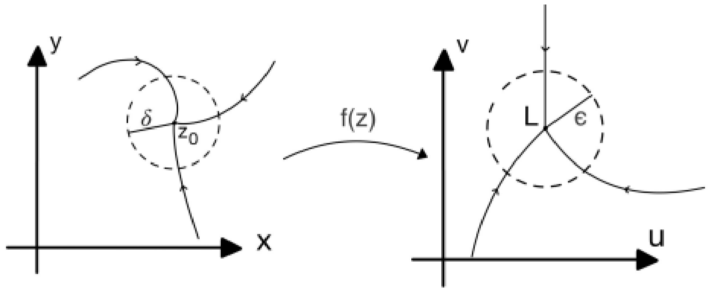


Esto nos permite definir un subconjunto poligonalmente conexo.

1.2 Limites y continuidad

- **Funciones univaluadas:** Definamos en este contexto el límite de una función $f(z)$ cuando z se acerca a z_0 como L, si:

$$z \in S \quad \wedge \quad 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \epsilon$$



Ejercicio: Demuestre a traves de ϵ y δ que: $\lim\limits_{z \to 2+3i} 5z + 3 = 13 + 15i$. **Sol:** tenemos que $0 < |z - (2 + 3i)| < \delta$, $|(5z + 3) - (13 + 15i)| < \epsilon \to |5z - 10 + 15i| < \epsilon \to |z - (2 + 3i)| < \epsilon/5$. Para dado ϵ tenemos que $\delta = \epsilon/5$

Ejercicio

Demostrar con ϵ y δ que:

$$\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$