clase 12

Manuel Garcia.

September 14, 2023

1 Espacios topológicos

De la clase pasada:

$$X, \mathcal{T}_I \qquad = u_i | i \in I$$
$$d(x,y) \quad \rightarrow \quad u_\epsilon(x) = x' \in X| \quad |x - x'| \subset \epsilon$$

Espacios de hausdorff Si podemos encontrar dos entornos que su interseccion sea vacia.

$$u_x \cap u_y = \emptyset \quad \rightarrow \quad \text{Haussdorff}$$

De aquí en adelante vamos a trabajar solo son espacios de Haussdorff.

Vamos a definir un conjunto cerrado. Si $A \subset X$ el complemento de $A : X - A$, A es cerrado si $X - A$ es abierto.

- **Cerradura** $(\bar{A})$ es el subconjunto abierto mas pequeño que incluye a A. $A \subseteq \bar{A}$.
- **Interior:** (A^0) es el subconjunto abierto mas grande que está incluido en A. $A^0 \subseteq A$.
- **Borde:** $b(A) = \bar{A} - A^0$
- **Cubierta (covering)**

  $$A_i \qquad A_i \subset X / \bigcup_{i \in I} A_i = X$$

  Si A_i son abiertos $\rightarrow A_i$ cubierta abierta.
- **Compacto:** Si para una cubierta A_i existe una subfamilia finita.

  $$u_k \text{ tal que } \bigcup_{k \in K} u_k = X$$

  Teorema: Si $X \subset \mathbb{R}^n$, X es compacto si está limitado, es decir, puede ser incluido en un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$.

  $$X \subset M \rightarrow \text{Finito}$$

  Ejemplo $(a,b) \rightarrow u_n : \{(a, b - \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}\}$.
- **Conexo:** Es un espacio que no se puede escribir de la forma $X = X_1 \cup X_2 \qquad X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Si no los podemos separar tenemos conjuntos compactos y si los podemos separar tenemos conjuntos conexos.
- **Homeomorfismo:** Si tenemos dos espacios topologicos con su respectiva esturctura metrica y tenemos una funcion que nos mapea del uno al otro, esta funcion se llama homeomorfismo si $f : X_1 \rightarrow X_2$ y $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ son continuas y diferenciables.

2 Variedad diferenciable

Vamos a tener x elementos que vamos a describir en coordenadas. Por ejemplo x^α o y^α. Lo que queremos es que la tranformacion entre estas dos coordenadas sean funciones continuas y suaves.

M de n dimensiones es una variedad diferenciables si:

- M es un espacio topológico
- $u_i \rightarrow$ abiertos. $\rightarrow$ le asociamos unas parejas (u_i, ϕ_i), donde $\phi_i : u_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, esta transformacion debe ser un homeomorfismo.
- $\{u_i\}$ son una cubierta: $\bigcup\limits_{i \in I} u_i = M$.
- Tomemos dos parejas u_i, u_j que tengan interseccion $u_i \cap u_j \neq \emptyset$. En la variedad M va a existir esta interseccion la cual está contenida en ambos conjuntos. La funcion que lleve esta interseccion de u_i a u_j debe ser diferenciable y suave. Basicamente la condicion 2 nos dice que podemos ir de la variedad diferenciable a ϕ_i y ϕ_j, mientras que esta condiciones nos dice que podemos ir de ϕ_i a ϕ_j.

Charts (cartas) (u_i, ϕ_i)
Atlas $\{(u_i, \phi_i)\}$