Clase 25

Manuel Garcia.

November 17, 2023

1 Singularidades y polos

1.1 Singularidad removible

z_0 es una singularidad removible de f si la función puede redefinirse en z_0 para que f sea analitica en z_0.

Ejemplo singularidad en $z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$\text{Tenemos que:} \qquad \lim_{z\to 0} f(z) = 1$$

Esta singularidad puede ser remobible ya que:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}\cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\cdots$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

Ejemplo z_0 es un polo de f si $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| \to \infty$

$$f(z) = \frac{z}{z-i}$$

$$z_0 = i \quad \text{es un polo} \quad \lim_{z\to i}\left|\frac{z}{z-i}\right| = \left|\frac{i}{i-i}\right| \to \infty$$

Ejemplo z_0 es una singularidad esencial de f si no es polo ni es una singularidad removible

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(z) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \to \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{|x|}} \to 0$$

2

Grado m del polo de una función $f(z)$

$$f(z) = \frac{b(z)}{g(z)} \qquad g(z) = (z-z_0)^m g_1(z)$$

$g_1(z)$ y $b(z)$ son analiticas Ω

$$f(z) = \frac{b(z)}{g_1(z)(z-z_0)^m} = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m} \qquad b(z_0), g_1(z_0), h(z_0) \neq 0$$

haciendo taylor:

$$\begin{aligned}
h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n (z-z_0)^n \\
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n (z-z_0)^{n-m} \qquad\qquad n-m \equiv k \\
&= \sum_{k=-m}^{\infty} h_k (z-z_0)^k \\
&= \sum_{k=-m}^{-1} c_k (z-z_0)^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k}_{f_a(z) \text{ parte principal o analitica}} \\
&= \frac{h-m}{(z-z_0)^m} + \frac{h-m+1}{(z-z_0)^{m-1}} + f_a(z)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\underset{z\to z_0}{lim} (z-z_0)^m f(z) = \alpha \neq 0$$

Ejemplo encontrar m en $z=0$ de $f(z) = \frac{2}{z \sin z}$

$$\underset{z\to 0}{lim}\ z^{m=2} \frac{2}{z \sin z} = 2$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\frac{e^{z^2}-1}{z^3} &= \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \cdots - 1\right) \\
&=
\end{aligned}$$

3 Teorema del residuo y aplicaciones

$f(z)$ tiene una expansion que vamos a separar en dos terminos:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + f_a(z)$$

Si cogemos un camino Γ que contenga el punto z_0:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma f_a(z)dz + \oint_\Gamma \frac{A_{-1}}{(z-z_0)}dz + \oint_\Gamma \frac{A_{-2}}{(z-z_0)cub}dz + \oint_\Gamma \frac{A_{-3}}{(z-z_0)^3}dz + \cdots$$

La primera integral nos da 0, la segunda $2\pi A_{-1}$, la tercera nos da 0, la cuarta 0. La funcion solo depende del primer coeficiente de la serie de Laurent.

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \underset{\text{Residuo en } z_0}{A_{-1}}$$

Si tenemos varios polos (varias singularidades) por ejemplo z_1, z_2, z_m y tenemos un camino Ω que los encierra a todos, al igual que siempre esta integral la podemos descomponer en 3 integrales que encierren a cada singularidad $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} Res(z_n) = 2\pi i \sum \text{residuos}}$$

Si la singularidad es un polo de orden m podemos encontrar una expresión para A_{-1}.

$$\begin{gathered}
z - z_0 \quad \to \quad f(z) = \frac{A_{-1}}{z-z_0} + f_a(z) \\
\lim_{z\to z_0} [(z-z_0)f(z) = A_{-1} + (z-z_0)f_a(z)] \\
A_{-1} \equiv Res(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)
\end{gathered}$$

Con $m = 2$.

$$\begin{gathered}
f(z) = \frac{A_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{A_{-1}}{z-z_0} + f_a(z) \\
\to (z-z_0)^2 f(z) = A_{-2} + (z-z_0)A_{-1} + (z-z_0)^2 f_a(z) \\
\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right] = A_{-1} + \frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f_a(z)\right] \\
\lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right] = A_{-1}
\end{gathered}$$

Con $m = 3$

$$\begin{gathered}
(z-z_0)^3 f(z) = A_{-3} + (z-z_0)A_{-2} + (z-z_0)^2 A_{-1} + (z-z_0)^3 f_a(z) \\
\text{Debemos derivar dos veces} \\
\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_0)^3 f(z)\right] = 2A_{-1} + \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_0)^3 f_a(z)\right] \\
A_{-1} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_0)^3 f(z)\right]
\end{gathered}$$

En general tenemos:

$$A_{-1} = Res(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

Esto es consistente con la formula integral de Cauchy.

- **Polo simple** Con singularidades en $z_0 = 1, z_1 = -i$

$$A_{-1} = Res(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)$$

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{dz}{(z-1)(z+i)} &= 2\pi i \sum \text{residuos} \\
&= 2\pi i[Res(1) + Res(-i)]
\end{aligned}$$

Calculamos los residuos:

$$\begin{aligned}
Res(1) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{(z-1)(z+i)} = \frac{1}{1+i} \\
Res(-i) &= \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-1)(z+i)} = \frac{1}{1+i}
\end{aligned}$$

Entocnes:

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{(z-1)(z+i)} = 2\pi i\left[\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1+i}\right] = 0$$

- Tenemos $\oint \frac{4dz}{z^3-1}$ por el camino $\Gamma : [z_1, z_2, z_3, z_1] = (-2, 0, 2i, -2+2i, -2)$

$$\oint \frac{4dz}{(z-1)(z-e^{\frac{2\pi i}{3}})(z-e^{\frac{4\pi i}{3}})} = 2\pi i \lim_{z\to e^{\frac{2i\pi}{3}}} \frac{z-e^{\frac{2i\pi}{3}}}{(z-1)(z-e^{\frac{2\pi i}{3}})(z-e^{\frac{4\pi i}{3}})} = -\frac{4\pi}{3}(\sqrt{3}+i)$$

- Polo de orden mayor que 1

$$Res(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

$$\oint_{C_2(1)} \frac{z^3}{(z-i)^2}dz = 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{z^3}{(z-i)^2}\right] = -6\pi i$$

- $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 y $p(z_0) \neq 0$.

$$q(z) \approx q(\underbrace{z_0}_{=0}) + q'(z_0)(z-z_0) = q'(z_0)(z-z_0)$$

$$Res(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q'(z_0)(z-z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Analogo a L'Hopital