Clase 8

Manuel Garcia.

September 6, 2023

1 Cauchy

Definición

una secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se llama cauchy si para cada $\epsilon > 0$, hay un entero N tal que:

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \text{Para todo } m, n \geq N$$

Teorema

Una secuencia d enúmeros complejos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge si y solo si es una secuencia de cauchy.

Demostracion Supongamos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a L. Dado $\epsilon > 0$, y N, tal que $m, n \geq N$. Esto implica que $|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|L - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$

$$|a_n - L + L - a_m| < |a_n - l| + |L - a_m| < \epsilon$$
$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

"Si la secuencia converge es una secuencia de Cauchy"

Y si es en la otra direccion? El reciproco lo demostramos partiendo de que la secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.

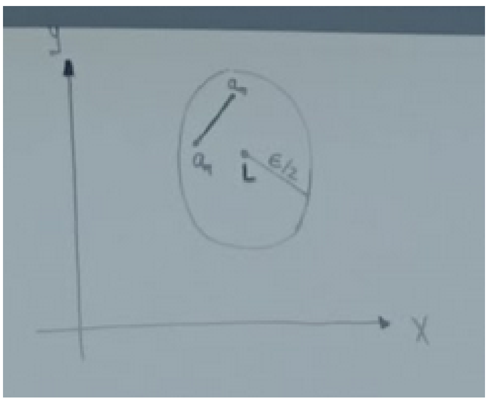
Si escribimos $a_n = x_n + iy_n$ y $a_m = x_m + iy_m$ con $x_n, x_m, y_n, y_m \in \mathbb{R}$. Recordemos que en todo complejo se satisface que: $|Re(z)| \leq |z|, \quad |Im(z)| \leq |z|$.

Entonces $|x_n - x_m| \leq |a_n - a_m|$, $|y_n - y_m| \leq |a_n - a_m|$

$$|x_n - x_m| < \epsilon, \qquad |y_n - y_m| < \epsilon$$

La secuencia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge

"Si es de Cauchy entonces la secuencia converge"



2 Series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

$$S_n = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

La serie converge si $\lim_{N\to\infty} S_n = S$ con $S \in \mathbb{C}$.

Ejemplo Muestre que si $|z| < 1$ entonces la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge a $\frac{1}{1-z}$ y por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ y diverge para cualquier otro caso.

$$S_N = 1 + z + z^2 + ... + z^N$$
$$zS_N = z + z^2 + z^3 + ... + z^{N+1}$$
$$1 + zS_N = 1 + z + z^2 + ... + z^{N+1}$$
$$1 + zS_N = S_n + z^{N+1}$$
$$S_N(1-z) = 1 - z^{N+1} \quad \to \quad S_N = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z}$$
$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - z^{N+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

Conclusion: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$.

Ejercicio

Discutir la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(6+8z)^n}$$

Solucion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(6+8z)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(6+8z)}\right]^n$$
$$\left|\frac{1}{6+8z}\right| < 1 \longleftrightarrow 1 < |6+8z|$$
$$\frac{1}{8} < |6+8z|$$
$$\frac{1}{64} < (3/4 + x)^2 + y^2$$
$$\frac{1}{64} < (x - (-3/4))^2 + y^2$$

Dentro de este circulo va a diverger y fuera va a converger.

$$\omega = \frac{1}{6+8z}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n = \frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6+8z}} = \frac{6+8z}{6+8z-1} = \frac{6+8z}{5+8z}$$

Propiedades

- $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$
- $\overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a_n}$
- $Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Re(a_n)$

  $Im\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Im(a_n)$

Titulo

Muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{5^n}$$

converge para todo θ y encuentre el valor de la suma.

Teorema

La prueba del n-ésimo término:
Si la $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces necesariamente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
O equivalentemente si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostracion: Sea $S_n = \sum_{m=0}^{n} a_m$, entonces $S_n \to S$, tambien $S_{n-1} \to S$ por lo tanto $S_n - S_{n-1} \to 0$. Pero $a_n = S_n - S_{n-1}$ por lo tanto $a_n \to 0$.

3 "Cola" de una serie

Para $m \geq 1$, la expresión $t_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ es llamada una "cola" de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definición

Una serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se llamará absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Teorema

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{Converge}$$

Demostracion: Sea $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ y $v_n = |a_0| + |a_1| + |a_2| + ... |a_n|$.
Si se logra demostrar que $S_{n_{n=0}^{\infty}}$ es una secuencia de cauchy entonces será convergente.

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| = \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j \right| &\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j| \qquad \text{Con } n > m \geq 0 \\ &= |v_n - v_m| \end{aligned}$$

ya que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge entonces podemos concluir que $\{v_n\}_{n=0}$ converge.

Dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar un N de manera que $v_n - v_m < \epsilon, \quad n > m \geq N$. Por lo tanto $|S_n - S_m| < \epsilon$ y de esta manera $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ será tambien una secuencia de Cauchy.