Clase 6

Manuel Garcia.

August 29, 2023

Parametrizacion cinta de moebius

Hacer ejercicio del taller 2 de la cinta de moebius.

1 ejercicio 17 taller 1 (Pregunta raisuke)

$$\frac{\langle \dot{r} | [\ddot{r}, \dddot{r}] \rangle}{|[\dot{r}, \dot{r}]|} = -\chi \tag{1}$$

Tenemos que:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dl}\frac{1}{v_t} = \frac{v}{|v_z|} \tag{2}$$

$$\ddot{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dl}\frac{1}{v_t}\right) = ...fv + \beta n \tag{3}$$

$$\dddot{r} = \alpha v + \beta n + \nu b \tag{4}$$

Parametrizado en terminos de la longitud de arco

Si la norma de la velocidad en terminos del tiempo es igual a 1 entonces está parametrizado en terminos de la longitud de arco $|v_t| = \frac{dl}{dt} = 1$

2 Segunda forma fundamental en una superficie

Entorno a un punto regular $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ se puede describir una superficie por medio de $z = f(x, y)$ de tal manera que el eje z sea perpendicular a la superficie en ese punto. De esta forma $\nabla f = 0|_{P_0}$, ya que la 1ra variación de la función es cero, a continuación se toma la segunda variación:

$$d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2 \tag{5}$$

Matrix Hessiana:

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}. \qquad H_{ij} = H_{ji} \tag{6}$$

En una situación más general que la descrita antes, podemos usar una representación paramétrica de la superficie $r(u, v)$ y calcular la curvatura de una curva en la superficie. Para eso necesitamos calcular la aceleración de la curva:

$$r(u, v) \rightarrow \qquad \ddot{r}(u, v) = r_{uu}\dot{u}^2 + 2 r_{vu}\dot{u}\dot{v} + r_{vv}\dot{v}^2 + r_u \ddot{u} + r_v \ddot{v} \tag{7}$$

A continuación proyectamos la aceleración sobre el vector normal unitario a la superficie $N = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}$

$$\langle \ddot{r}|N\rangle = \langle r_{uu}|N\rangle \dot{u}^2 + 2\langle r_{vu}|N\rangle \dot{u}\dot{v} + \langle r_{vv}|N\rangle \dot{v}^2 \tag{8}$$

$$\langle \ddot{r}|N\rangle dt^2 = \langle r_{uu}|N\rangle du^2 + 2\langle r_{vu}|N\rangle dudv + \langle r_{vv}|N\rangle dv^2 = b_{ij}dx^i dx^j \tag{9}$$

Segunda forma fundamental en la superficie

La proyección de la aceleración sobre la noral es una forma cuadrática para vectores angentes a la superficie. esta forma cuadrática es la segunda forma fundamental en la superficie.

$$\langle \ddot{r}|N\rangle dt^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + \bar{N}dv^2 = b_{ij}dx^i dx^j \tag{10}$$

Procedimiento
Tenemos que $\ddot{r}(u,v) \rightarrow \ddot{r} = \frac{d}{dt}[r_u\dot{u} + r_v\dot{v}]$, entonces:

$$\ddot{r} = (r_{uu}\dot{u} + r_{uv}\dot{v})\dot{u} + r_u\ddot{u} + (r_{vu}\dot{u} + r_{vv}\dot{v})\dot{v} + r_v\ddot{v} \tag{11}$$

$$= r_{uu}\dot{u}^2 + 2r_{uv}\dot{u}\dot{v} + r_{vv}\dot{v}^2 + (r_u\ddot{u} + r_v\ddot{v}) \tag{12}$$

Podemos hacer:

$$\langle \ddot{r}|N\rangle = \langle r_{uu}|N\rangle \dot{u}^2 + 2\langle r_{uv}|N\rangle \dot{u}\dot{v} + \langle r_{vv}|N\rangle \dot{v}^2 \tag{13}$$

$$N \equiv \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} \tag{14}$$

$$\langle \ddot{r}|N\rangle dt^2 = \langle r_{uu}|N\rangle du^2 + 2\langle r_{uv}|N\rangle dudv + \langle r_{vv}|N\rangle dv^2 \tag{15}$$

$$\langle \ddot{r}|N\rangle dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j = Ldu^2 + 2Mdudv + \bar{N}dv^2 \tag{16}$$

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & \bar{N} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Por lo tanto podemos hacer:

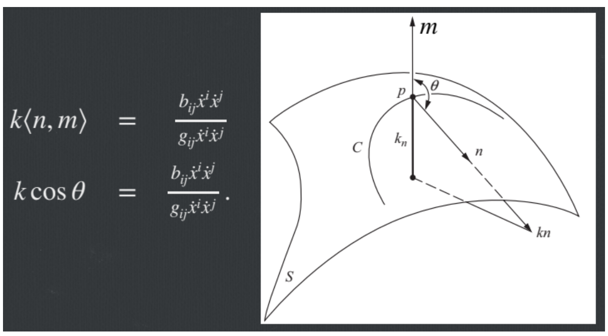
$$\langle \ddot{r}|N\rangle dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j \qquad t = s \tag{18}$$

$$\langle \ddot{r}|N\rangle ds^2 = \langle \dot{r}|N\rangle g_{ij}dx^i dx^j = b_{ij} = b_{ij}dx^i dx^j \tag{19}$$

$$\langle \ddot{r}|N\rangle = \frac{b_{ij}dx^i dx^j}{g_{ij}dx^i dx^j} = b_{ij}\frac{\dot{x}^i\dot{x}^j}{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} \tag{20}$$

Utilizando las formas de fernet serrat:

$$\langle \ddot{r}|N\rangle = \langle kn|N\rangle = k\langle n|N\rangle = k\cos\theta = k_n \quad \text{k normal} \tag{21}$$



3 Mapeo de gauss

Orientacion de una superficie :

$$N = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} \tag{22}$$

Mapeo de gauss

$$N : S \to S^2 \tag{23}$$
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \tag{24}$$

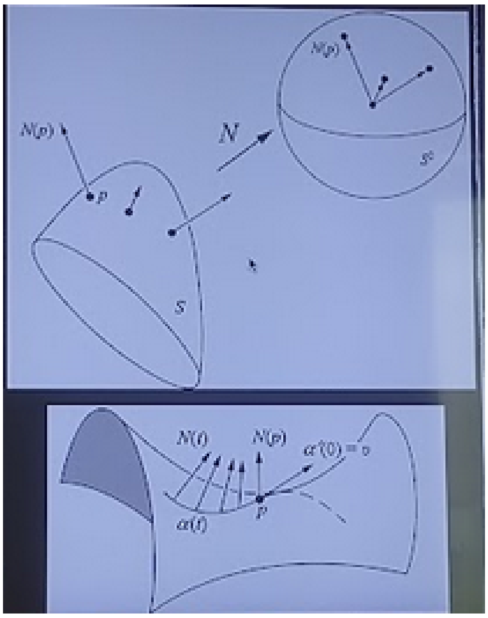
Diferencial del mapeo de Gauss

$$dN_p : T_p(S) \to T_p(S^2) \tag{25}$$
$$T_p = T_p(S^2) \tag{26}$$
$$\to dN_p : T_p(S) \to T_p(S) \tag{27}$$

dN_p está en $T_p(S)$. Notar que:

$$\langle N|N\rangle = 1 \to \langle dN|N\rangle = 0 \to dN_p \in T_p(S) \tag{28}$$

El mapeo de gauss es diferenciable y lineal.



Ejemplos
Plano

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad N = \frac{(a, b, c)}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \tag{29}$$
$$N(\alpha(t)) = N \qquad const. \to dN = 0 \tag{30}$$

A esto se llega de la siguiente forma:

$$\vec{N}.\Delta\vec{r} = 0 \tag{31}$$
$$a\Delta x + b\Delta y + x\Delta z = 0 \tag{32}$$
$$ax + by + cz + d = 0 \tag{33}$$

Esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \tag{34}$$

$$\alpha(t) = (x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t)), \quad \rightarrow \quad 2xx' + 2yy' + 2zz' = 0 \tag{35}$$

$$N(t) = -(x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t)), dN(t) = -(x'\,(t)\,, y'\,(t)\,, z'\,(t)) \tag{36}$$

$$dN_p(v) = -v \tag{37}$$

A se llega d ela siguiente forma:

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1 \quad \rightarrow \quad 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt} = 0 \tag{38}$$

$$\underbrace{(-\dot{x}, -\dot{y}, -\dot{z})}_{\dot{\alpha}(t)}.\underbrace{(-x, -y, -z)}_{N} = 0 \tag{39}$$

$$N = \frac{-(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \qquad \langle dN|N\rangle = 0 \tag{40}$$

$$dN = -(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})dt \tag{41}$$

3.1 Propiedad (autoadjunto)

El diferencial del mapeo de Gauss $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ cumple la propiedad:

$$\langle dN_p(w_1)|w_p\rangle = \langle w_1|dN_p(w_p)\rangle\,, \qquad \forall(w_1, w_2) \in T_p(S) \tag{42}$$

Donde w_1, w_2 son vectores tangentes a las curvas $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ respectivamente.

Prueba: Para la prueba recordemos que $\langle dN_p(w_1)|w_2\rangle = \langle w_1|dN_p(w_2)\rangle$.
primero escribamos de forma explicita el resutlado de evaluar un vector tangente $w = \alpha'(0)$ en el mapeo dN_p.

$$dN_p(\alpha'(0)) = \frac{\partial N}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial N}{\partial v}\dot{v}|_{t=0} = N_u\dot{u}(0) + N_v\dot{v}(0) \tag{43}$$

Aplicando esto en la primera eq que recordamos para la prueba: (44)

$$\langle N_u\dot{u}_1(0) + N_v\dot{v}_1(0)|r_u\dot{u}_2(0) + r_v\dot{v}_2(0)\rangle \tag{45}$$

$$= \langle N_u|r_u\rangle\,\dot{u}_1(0)\dot{u}_2(0) + \langle N_u|r_u\rangle\,\dot{u}_1(0)\dot{v}_2(0) + \langle N_v|r_u\rangle\,\dot{v}_1(0)\dot{u}_2(0) + \langle N_u|r_v\rangle\,\dot{v}_1(0)\dot{v}_2(0) \tag{46}$$

$$\tag{47}$$

Tambien tenemos que:

$$\langle r_u\dot{u}_1(0) + r_v\dot{v}_1(0)|N_u\dot{u}_2(0) + N_v\dot{v}_2(0)\rangle \tag{48}$$

$$= \langle r_u|N_u\rangle\,\dot{u}_1(0)\dot{u}_2(0) + \langle r_u|N_v\rangle\,\dot{u}_1(0)\dot{v}_2(0) + \langle r_v|N_u\rangle\,\dot{v}_1(0)\dot{u}_2(0) + \langle r_v|N_v\rangle\,\dot{v}_1(0)\dot{v}_2(0) \tag{49}$$

Por lo tanto:

$$\langle r_u|N_v\rangle = \langle N_u|r_v\rangle \tag{50}$$

$$\langle N|r_u\rangle = \langle N|r_v\rangle = 0 \tag{51}$$

$$\langle N_v|r_u\rangle + \langle N|r_{uv}\rangle \tag{52}$$

$$\langle N_v|r_u\rangle = -\langle N|r_uv\rangle \tag{53}$$

y

$$\langle N_u|r_v\rangle + \langle N|r_{vu}\rangle \tag{54}$$

$$\langle N_u|r_v\rangle = -\langle N|r_{vu}\rangle \tag{55}$$

Teorema de meusnier

Todas las curvas obtenidas de cortar S con un plano (por ejemplo Cy C_n), que comparten la misma tangente en un punto p, tienen la misma cudrvatura normal:

$$k_n = \pm \frac{b_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} \tag{56}$$

$$k_n = \pm \frac{b_{ij}v^iv^j}{g_{ij}v^iv^j} \tag{57}$$

No entendí bien qué se hizo a continuacion xd

$$\langle N|\alpha'(0)\rangle = 0 \to \frac{d}{ds} \to \left(\left\langle \frac{dN}{dS}\middle|\alpha'(S)\right\rangle + \langle N|\alpha''\rangle\right)|_{t=0} = 0 \tag{58}$$

$$\left\langle \frac{dN}{dS}\middle|v\right\rangle + \langle N|kn\rangle = \text{algo } + k\cos\theta \tag{59}$$

$$\left\langle \frac{dN}{dS}\middle|\alpha'(S)\right\rangle|_{t=0} = -\langle N|\alpha''(S)\rangle = -k\cos\theta \tag{60}$$

$$\langle dN_p(v)|v\rangle = -\Pi_p(v) = -k\cos\theta \tag{61}$$

$$\Pi_p(v) = k\cos\theta = k_n \tag{62}$$