# Clase 10

Manuel Garcia.

September 12, 2023

## 1 Evolucion temporal de los sistemas

**Evolucion temporal**

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\psi(t=0)\rangle \qquad \text{Si } H \text{ no depende de t}$$
$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

Qué sucede cuando tenemos que $H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{r})$?

$$\langle\vec{r}|\psi(t)\rangle = \psi(t,\vec{r})$$
Tenemos que
$$\langle\vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r})$$
$$\langle\vec{r}|\vec{P}|\psi\rangle = -i\hbar\vec{\boldsymbol{\nabla}}_r\psi(\vec{r})$$
$$\langle\vec{r}|\vec{P}^2|\psi\rangle = -\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2\psi(\vec{r})$$
$$\text{Donde } \boldsymbol{\nabla}^2 \text{ Es el laplaciano } \boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{\boldsymbol{\nabla}}$$
$$\text{Por lo tanto obtenemos que: } i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(t,\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(t,\vec{r})$$

**Ecuacion de schrodinger dependiente del tiempo**

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(t,\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(t,\vec{r})$$

Como es dependiente del tiempo podemos proyectar el Hamiltoniano sobre r:

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$
$$\langle\vec{r}|\frac{\vec{P}^2}{2m}|\psi_n\rangle + \langle\vec{r}|V(\vec{r})|\psi_n\rangle = E_n\langle\vec{r}|\psi_n\rangle$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi_n(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi_n(\vec{r}) = E_n\psi_n(\vec{r})$$

Ecuacion de Schrodinger **independiente** del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_n(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi_n(\vec{r}) = E_n\psi_n(\vec{r})$$

Para el caso independiente del tiempo la ecuacion se hace mucho mas facil de resolver y obtenemos que $\psi$ es:

$$\psi(t,\vec{r}) = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\psi_n(\vec{r})$$

Tener en cuenta que $\frac{\hbar}{2m}$ es un autovalor de la energia.

El profesor quedó en enviar unas notas sobre la proyeccion en $\vec{P}$ al moodle.

Si tenemos $V = 0 \quad \rightarrow \quad H = \frac{\vec{P}^2}{2m}$ y por lo tanto $[H, \vec{P}] = 0$. Un estado sin evolucion temporal es:

$$\left\langle \vec{r} \middle| E - \frac{P^2}{2m}, \vec{P} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\frac{\vec{P}\vec{r}}{\hbar}}$$

Con evolucion temporal:

$$\psi_{E,\vec{P}}(t,\vec{r}) = \left\langle \vec{r} \middle| E - \frac{P^2}{2m}, \vec{P}, t \right\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\frac{\vec{P}\vec{r}}{\hbar}} e^{-i\frac{t}{\hbar}\frac{P^2}{2m}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-iEt+i\frac{\vec{P}\vec{r}}{\hbar}}$$

Recordar que $E = \frac{\vec{P}^2}{2m}$.

Solucion eq. schrodinger dependiente del tiempo

$$\psi_{E,\vec{P}}(t,\vec{r}) = \left\langle \vec{r} \middle| E - \frac{P^2}{2m}, \vec{P}, t \right\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\frac{\vec{P}\vec{r}}{\hbar}} e^{-i\frac{t}{\hbar}\frac{P^2}{2m}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-iEt+i\frac{\vec{P}\vec{r}}{\hbar}}$$

Ejercicio

Verificar la solucion anterior. Ver si safisface la ec. diferencial de schrodinger dependiente del tiempo.

## 2 Campo electrico y magnetico

Onda electromagnetica plana

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{\epsilon} e^{i(-\omega t + \vec{k}.\vec{r})}$$

Donde $\vec{\epsilon}$ es el vector unitario de polarizacion $\vec{\epsilon}.\vec{\epsilon} = 1$. Ademas tenemos que $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$. Pero en la cuantica thenemos que $\vec{P} = \hbar\vec{k}$. Es decir una onda electormagnetica ya lleva esto y por lo tanto $\omega = \frac{E}{\hbar} \rightarrow E = \hbar\omega$. Tambien tenemos que $\omega = c\left|\vec{k}\right| \quad \rightarrow \quad \frac{E}{\hbar} = c\frac{|\vec{P}|}{\hbar}$. En relatividad la energia y el momento están conectados por $E = \sqrt{(c\vec{P})^2 + (mc^2)^2} \approx mc^2 + \frac{P^2}{2m} + ...$

La energia de una onda electromagnetica en electromagnetismo es $E = \int dr^3(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$. El foton no intercabia energia con esta ecuacion si no con $E = \hbar\omega$ y $\vec{P} = \hbar\vec{k}$.

# 3 Particula que oscila en una dimension (oscilador armonico)

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Frecuencia angular de oscilacion clasica: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \to k = \omega^2 m$.

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

No existe un sistema fisico como este en la naturaleza pero se toma como ejemplo ya que es de gran utilidad para ver el formalismo matematico.

Tenemos que $[P, \lambda] = -i\hbar$.

Vamos a construir el operador $a$.

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{P}{m\omega}\right) \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{P}{m\omega}\right)$$

No es hermitico.

$$[a, a^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar}\left(-\frac{i}{m\omega}i\hbar + \frac{i}{m\omega}(-i\hbar)\right) = 1$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

Y el operador $a^\dagger a$. Como $(a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a$ este operador es hermitico.

$$a^\dagger a = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

Por lo tanto podemos decir que:

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

Como $H$ y $a^\dagger a$ son funcion uno del otro esto nos dice que tienen autovalores comunes.

$$a^\dagger a = N \quad \text{(Operador)}$$

$$N|n\rangle = n|n\rangle \qquad n : \text{real}$$

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle$$

El conmutador

$$[N, a] = a^\dagger a a - a a^\dagger a = [a^\dagger, a] = -a$$

$$[N, a] = -a$$

$$[N, a] = Na - aN = -a$$

Le aplicamos $|n\rangle$

$$Na|n\rangle - aN|n\rangle = -a|n\rangle$$

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$