Clase 3

Manuel Garcia.

August 15, 2023

1 Curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Curvas en $\mathbb{R}^3$

$$r = r(t) \rightarrow x = x(t) \quad y = y(t) \quad \text{r es un vector} \tag{1}$$

Curvas parametrizadas en función de la longitud de arco

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_a^b |v_t| dt = \int_0^l dl', \quad dl = |v_t| dt \tag{2}$$

Tenemos una parametrizacion:

$$\frac{dl}{dt} = |v_t| \rightarrow \frac{dt}{dl} = \frac{1}{|v_t|} \leftarrow l = l(t) \rightarrow t = t(l) \tag{3}$$

$$dl^2 = \langle v_t | v_t \rangle dt^2 = (\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt^2}) dt^2 \tag{4}$$

$$\bar{v}_l = \frac{d\bar{r}}{dl} = \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dt}{dl} = \frac{\bar{v}_t}{|v_t|} \tag{5}$$

$$dl^2 = v_t^2 dt^2 \tag{6}$$

$$\langle v_l | v_l \rangle = 1 \tag{7}$$

Aceleracion

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \equiv w_t \tag{8}$$

Vamos a suponer que $\langle v|v \rangle = cte \rightarrow \frac{d}{dt} \langle v|v \rangle = 0$

$$\left\langle \frac{du}{dt} \middle| v \right\rangle + \left\langle v \middle| \frac{du}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle u \middle| \frac{du}{dt} \right\rangle = 0 \, \langle v|\psi \rangle \tag{9}$$

$$\langle v|w \rangle = 0 \leftarrow v \text{ortogonal a } w \tag{10}$$

Si $t = l$ entonces v_l ortogonal a w_l

$$\langle v_l|v_l\rangle = 1 \rightarrow \langle v_l|w_l\rangle = 0 \tag{11}$$

curvatura

$$k(l) \equiv |w_l| = |\frac{d^2r}{dl^2}| = |\frac{dv_l}{dl}| \tag{12}$$

$$R(l) \equiv \frac{1}{k(l)} \rightarrow \text{Radio de curvatura} \tag{13}$$

n es el vector normal y vamos definir la aceleracion la cual es la curvatura por el vector normal:

$$w_l \equiv k(l)n \qquad \text{n es el vector normal} \tag{14}$$

Esto es muy util en la mecanica de fluidos ideales que está compuesto por la longitud de arco a lo largo de una linea de flujo y la normal a la misma.

Radio de curvatura

$$R(t) \equiv \frac{1}{k(t)} \tag{15}$$

Ejemplo: Linea recta $x = a + bx, y = c + dl \rightarrow v_l = be_x + de_y \rightarrow w_l = 0, |w_l| = 0 \rightarrow k = 0, R = \infty$
Ejemplo: Circulo $x = x_0 + R\cos\frac{l}{R}, y = y_0 + R\sin\frac{l}{R}$

$$v_l = (-\cos\frac{l}{R}, \sin\frac{l}{R})w_i = -\frac{1}{R}\cos\frac{l}{R}e_x - \frac{1}{R}\sin\frac{l}{R}e_y \rightarrow |w_l| = k(l) = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{1}{k(l)} = R \tag{16}$$

1.1 Formulas de frenet-serret

Frenet-Serret

Para una curva plana parametrizada en fución de la longitud de arco, se cimple las siguientes expresiones.

$$\underbrace{w_l \equiv \frac{dv}{dl}}_{definicion} = kn, \qquad \frac{dn}{dl} = -kv \tag{17}$$

La primera eq nos indica como se comporta la velocidad conforme vamos avanzando en la curva, nos indica la direccion de la velocidad cuando vamos avanzando en la curva.

Para ver como se comporta la normal cuando vamos avanzado en la curva:

$$\langle v|n\rangle = 0 \rightarrow \frac{d}{dl}\langle v|n\rangle = \left\langle \frac{dv}{dl}\middle| n\right\rangle + \left\langle v\middle|\frac{dn}{dl}\right\rangle \tag{18}$$

$$\langle kn|n\rangle + \left\langle v\middle|\frac{dn}{dl}\right\rangle = k + \left\langle v\middle|\frac{dn}{dl}\right\rangle = 0 \rightarrow \left\langle v\middle|\frac{dn}{dl}\right\rangle = -k \tag{19}$$

Curvatura:

$$\frac{dn}{dl} = \alpha n + \beta v \rightarrow \left\langle \frac{dn}{dl}\middle| v\right\rangle = \langle \alpha n + \beta v|v\rangle = \beta \tag{20}$$

$\frac{dn}{dl}$ es proporcional a v entonces $\beta = -k$

$$\frac{dn}{dl} = -kv \tag{21}$$

como expansion en series:

$$v = v_0 + \Delta v = v_0 + \Delta l k n + O(\Delta l^2) \approx v_0 + \Delta\phi n = \cos\Delta\phi v_0 + \sin\Delta\phi n_0 \tag{22}$$

$$n = n_0 + \Delta n = n_0 - \Delta l k v + O(\Delta l^2) \approx n_0 - \Delta\phi v = -\sin\Delta\phi v_0 + \cos\Delta\phi n_0 \tag{23}$$

En este punto se utilizo la expansion en serie del seno y el coseno al primer orden.

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} v \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\phi & \sin\Delta\phi \\ -\sin\Delta\phi & \cos\Delta\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0 \\ v_0 \end{bmatrix} |_P \to k \equiv \frac{d\phi}{dl} \tag{24}$$

1.2 Curvatura en función del parámetro t

Curvatura en funcion de t

$$\frac{dv_l}{dl} = \frac{1}{|v_t|}\left[-\frac{\langle v_t|w_t\rangle}{|v_t|^3} v + \frac{1}{|v_t|}\frac{d^2 r}{dt^2}\right] \tag{25}$$

$$k = \frac{1}{|\dot{r}|^2}\left|\ddot{r} - \frac{\langle \dot{r}|\ddot{r}\rangle}{|\dot{r}|^2}\right| \tag{26}$$

Todo el procedimiento está en las diapositivas.

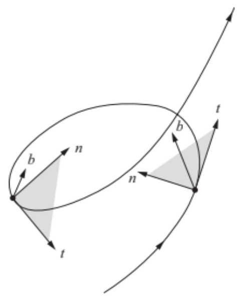
Ejercicio

Mostrar que en componentes x(t), y(t) la curvatura es:

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \tag{27}$$

2 Curvas en $\mathbb{R}$

El vector binormal es el producto cruz entre el vector normal n y el vector de torsion t.



Ver las propiedades en las diapositivas.

Notación. Usaremos $[\xi,\eta]$ ó $\xi\wedge\eta$, ó $\xi\times\eta$

$$[\xi,\eta]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix}e_1-\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_3\end{vmatrix}e_2+\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}e_3$$

Propiedades.

Anticonmutatividad. $[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$.

Linealidad. Para α,β escalares: $[\alpha\xi_1+\beta\xi_2,\eta]=\alpha[\xi_1,\eta]+\beta[\xi_2,\eta]$.

Si $\xi=\alpha\eta$ donde α es un escalar: $[\xi,\eta]=0$.

$[\xi,\eta]$ es normal a ξ y a η $\quad\langle[\xi,\eta],\xi\rangle=\langle[\xi,\eta],\eta\rangle=0$.

Magnitud de $[\xi,\eta]$. $\quad|[\xi,\eta]|=|\xi||\eta|\sin\theta$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Identidad de Jacobi: $[[\xi,\eta],\zeta]+[[\zeta,\xi],\eta]+[[\eta,\zeta],\xi]=0$.

Triple producto ("cab-cab"): $[[\xi,[\eta,\zeta]]=\langle\zeta,\xi\rangle\eta-\zeta\langle\xi,\eta\rangle$.

Regla del producto en derivadas $\quad\frac{d}{dt}[\xi,\eta]=[\frac{d\xi}{dt},\eta]+[\xi,\frac{d\eta}{dt}]$.