Clase 19

Manuel Garcia.

October 25, 2023

1

Propiedades:

- $\displaystyle\int_a^b (f(t) \pm g(t))dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)$
- $\displaystyle\int_a^b \beta f(t)dt = \beta \int_a^b f(t)dt$
- Si $c \in (a,b)$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$

Antiderivadas de funciones de valores En este caso podremos construir siempre una antiderivada continua, haciendo uso de traslaciones globales para cada tramo

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} (1+i)t, & 0 \leq t \leq 1 \\ it^2, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$\implies F(t) = \begin{cases} (1+i)\frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq 1 \\ i\frac{t^3}{3} + c, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

En este caso F no es continua, $t = 1 \to \frac{1+i}{2}$ y tambien $i/3$.

$$t = 1$$

$$\frac{1+i}{2} = \frac{i}{3} + c$$

$$c = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{i}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}i$$

$$\implies F(t) = \begin{cases} (1+i)\frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq 1 \\ i\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}i, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Teorema fundamental del calculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Integral de contorno Supongase que γ es un camino sobre el intervalo $[a,b]$. Y que f es una función de valores complejos, continua definida en γ.

La integral de contorno será:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Ejemplo: Mostrar la integral de contorno

$$\int_{C_R(z_0)} \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i, \quad \text{Si el contorno no contiene a } z_0\text{, esta integral valdrá } 0$$

Prueba: Tenemos que $C_R(z_0) = \gamma(t) = z_0 + Re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ y $\gamma'(t) = iRe^{it}$, reemplazando:

$$\int_{C_R(z_0)} \frac{1}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it}dt = 2\pi i, \quad \text{Para } R \neq 0$$

Ejemplo: Demostra que:

$$\int_{C_R(z_0)} \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = 0$$

Prueba:

$$\int_{C_R(z_0)} \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n e^{int}} iRe^{it}dt = \frac{1}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} ie^{it(1-n)}dt = \frac{1}{R^{n-1}} \frac{1}{i(1-n)} e^{it(1-n)}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Ejemplos:

- $\int_{C_1(0)} \frac{1}{z}dz = 2\pi i$
- $\int_{C_1(0)} zdz = 0$
- $\int_{C_1(0)} \bar{z}dz = 2\pi i$
- $\int_{C_1(0)} \frac{1}{\bar{z}}dz = 0$

2 Teorema de Stokes

$$\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_s (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

Ejemplo: $\vec{F} = (M, N, 0)$

$$\oint_r (Mdx + Ndy) = \int_s \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

Curva simple: Es aquella que no se corta a sí misma. Solo puede ocurrir que en sus extremos coincida y en este caso diremos que es una curva simple cerrada.

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)dz &= \oint_\gamma (u+iv)(dx+idy) \\
&= \oint_\gamma (udx-vdy)+i(udy+vdx) \\
&= \int_q (-\partial_x v-\partial_y u)dxdy + i\int_{s_\gamma} (\partial_x v-\partial_y u)dxdy \\
\text{Por Cauchy-Rieman} \\
&= 0
\end{aligned}$$