Clase 13

Manuel Garcia.

October 3, 2023

1 Oscilador armonico

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi=E\psi$$

Tenemos que sus autovalores están dadas por:

$$\psi_0(x),\quad E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega \qquad \psi_1(x),\quad E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega \qquad \psi_m(x),\quad E_m=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Si nosotros tenemos el estado $|\psi_A\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle+\frac{1}{2}|1\rangle$. Al realizar la medicion luego de preparar el estado vamos a encontrar que podemos obtener la siguientes energias:

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega \qquad E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega$$

Y la probabilidad de encontrar el estado E_0 o E_1 están dadas por el cuadrado de la amplitud de cada estado. Probabilidad estado $|0\rangle=\frac{3}{4}$, probabilidad estado $|1\rangle=\frac{1}{4}$.

Con la evolucion temporal:

$$t\neq 0 \qquad |\psi_A(t)\rangle=e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi_A\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|0\rangle+\frac{1}{2}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|1\rangle$$

Si tenemos un estado $|\psi_B\rangle=|3\rangle$ en $t=0$ su energia $E_B=\frac{7}{2}\hbar\omega$ con probabilidad 1. Al realizar la evolucion temporal:

$$t\neq 0 \qquad |\psi_B(t)\rangle=e^{-i\frac{7}{2}\omega t}|3\rangle$$

Nosotros podemos obtener el valor esperado:

$$\langle\psi_B(t)|\,O\,|\psi_B\rangle=e^{-i\frac{7}{2}\omega t}\langle 3|\,O\,|3\rangle\,e^{i\frac{7}{2}\omega t}=\langle 3|\,O\,|3\rangle$$

Ya no depende del tiempo.

Tenemos el autovalor $E=\frac{7}{2}\hbar\omega$:

$$H|\psi_{0A}\rangle=\frac{7}{2}\hbar\omega|\psi_{0A}\rangle$$
$$m=3 \qquad |\psi_{0A}\rangle=|3\rangle$$

Como será el estado $\psi_3(x)=\langle x|3\rangle$?

$$\psi_3(x)=\langle x|3\rangle=cP_{m=3}\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)e^{-\frac{x^2}{2\bar{x}^2}}$$

P_m es un polinomio de Hermit. Demonos cuenta que la funcion debe ser impar por lo tanto el polinomio de Hermit solo va a tener la potencia 1 y 3 ya que todas las potencias deben ser impares.

Problema tridimensional:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^2$$
$$\vec{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \qquad \vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Para este caso podemos usar la misma solucion de una dimension ya que:

$$H = H_x + H_y + H_z$$
$$H\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle$$
$$\left|\psi\right\rangle 0 \left|n_x\right\rangle \left|n_y\right\rangle \left|n_z\right\rangle = \left|n_x, n_y, n_z\right\rangle$$
$$E = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega + (n_y + \frac{1}{2})\hbar\omega + (n_z + \frac{1}{2})\hbar\omega = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

Ejemplo: si tenemos el estado 0,0,0:

$$\begin{aligned}\langle x, y, z|0,0,0\rangle &= \langle x|0\rangle \langle y|0\rangle \langle z|0\rangle \\ &= c_0 P_0\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\bar{x}^2}} c_0 P_0\left(\frac{y^2}{\bar{y}^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\bar{y}^2}} c_0 P_0\left(\frac{z^2}{\bar{z}^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{\bar{z}^2}}\end{aligned}$$

Como $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = d$:

$$= c_0^3 P_0\left(\frac{x}{d}\right) P_0\left(\frac{y}{d}\right) P_0\left(\frac{z}{d}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{\vec{r}^2}{d^2}}$$

Si tenemos 0,1,0:

$$\psi_{0,1,0}(\vec{r}) = c_0 c_1 c_0 P_0\left(\frac{x}{d}\right) P_1\left(\frac{y}{d}\right) P_0\left(\frac{z}{d}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{\vec{r}^2}{d^2}}$$

1.1 Particula libre

Si tenemos una particula libre unidimensional:

$$\psi = Ne^{i\frac{px}{\hbar}} = \langle x|p\rangle \qquad [\hbar] = \text{Energia } \cdot \text{tiempo}$$

$$\langle x| H |p\rangle = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) \rightarrow \frac{p^2}{2m}\psi(x) = \frac{p^2}{2m} Ne^{i\frac{px}{\hbar}} \qquad E = \frac{p^2}{2m}$$

Medimos E:

$$p = \pm\sqrt{2mE} \quad \rightarrow \quad \psi_{+p} = Ne^{+i\frac{\sqrt{2mE}x}{\hbar}}; \quad \psi_{-p} = Ne^{-i\frac{\sqrt{2mE}x}{\hbar}}$$

Tenemos dos estados diferentes para un valor de la energia.