Clase 18

Manuel Garcia.

October 18, 2023

1

Recordemos que: Se puede parametrizar un segmento de linea recta, con:

$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2, \quad t \in [0,1]$$

Con z_1 y z_2 extremos del segmento.

Ejemplo Parametricemos el segmento de línea recta entra $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 - i$

$$\gamma(t) = (1-t)(1+2i) + t(2-i) \qquad t = 0, t_1$$
$$x(t) + iy(t) = 1 + 2i - t - 2it + 3t - it$$
$$x(T) + iy(t) = (1 - t + 3t) + i(2 - 2t - t) = (1 + 2t) + i(2 - 3t)$$

Entonces:

$$x = 1 + 2t \qquad t = \frac{x-1}{2}$$
$$y = 2 - 3t \qquad t = \frac{2-y}{3}$$

Comprobemos la validez del teorema del valor medio diferencial. Este nos dice que: Si f es una funcion real, continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) es posible siempre escribir:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

¿Será esta valido en el cálculo coplejo?

Consideremos la función $f(x) = e^{ix}$ con $x \in [0, 2\pi]$, su derivada $f'(x) = ie^{ix}$ en $x \in (0, 2\pi)$

$$f(2\pi) - f(0) = 1 - 1 = 0$$
$$|f'(x)| = \left|ie^{ix}\right| = 1$$

NO SE CUMPLE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO DIFERENCIAL

2 Trayectos o contornos

La idea de curva que implica el concepto de continuidad. Ahora requeriremos la idea de analiticidad (diferenciabilidad). Un mapa continuo f que va $[a,b] \to \mathbb{C}$ se reconocerá como "continuamente diferenciable" si es diferenciable en $[a,b]$ y la derivada f' es a y b esta definida por los límites laterales:

$$f'(a) = \lim_{t \to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} \qquad \text{y} \qquad f'(b) = \lim_{t \to b^-} \frac{f(t) - f(b)}{t-b}$$

y f' es continua en $[a, b]$.

Definicion 1

Una función de evaluacion compleja, definida en el intervalo $[a, b]$, se llamará *diferenciable continuamente a tramos* si existen puntos denotados como $a_1 < a_2 < a_3 ... < a_{n-1}$ en (a, b) tales que f' es continua diferenciable en cada intervalo $[a_j, a_{j+1}]$ para $j = 0, 1, 2, ..., m + 1$, donde $a_0 = a$, $a_m = b$.

Si se cumple que:

1. $f'(t)$ existe para todo t en a_j, a_{j+1} y en los puntos a_j y a_{j+1} como un limite lineal.
2. $f'(t)$ es continua en cada intervalor $[a_{j-1}, a_j]$ para $j = 1, 2, ..., m$

Notese que si f' esta definida en $[a, b]$, eventualmente puede tener saltos discotinuos en algún a_j.

Definicion 2

Un trayecto o contorno en una curva γ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, continuamente diferenciable o continuamente diferenciable a tramos, tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definicion 3

Dados los puntos $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_m$ y los trayectos γ_j en $[a_{j-1}, a_j]$ con $j = 1, ..., m$ tales que:

$$\gamma_j(a_j) = \gamma_{j+1}(a_j) \qquad \text{Para todo } j = 1, ..., m - 1$$

El trayecto toal se forma con la combinacion:

$$\Gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...\gamma_m] \qquad \text{Que está definido en } [a_0, a_m]$$
$$\Gamma(t) = \gamma_j(t) \qquad \text{Para } t \in [a_{j-1}, a_j], \quad j = 1, ..., m$$

Ejemplo: Considere el trayecto: $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{si } -2 \leq t \leq -1 \\ e^{i\frac{\pi}{2}(1-t)} & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ t & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Ejemplo: Tenemos un triangulo formado por los vectices $(0), (-1 + i), (1 + i)$.
Primera parametrizacion:
Para construiir el contorno Γ parametrizado $0 \leq t \leq 1$, debemos reescalar el problema en forma global

$$\gamma_1(t') = (1 + i)\alpha t', \qquad 0 \leq t' \leq \frac{1}{\alpha}$$
$$\gamma_2 = (t'') = (1 + i) - 2\alpha[t'' - \frac{1}{\alpha}], \qquad \frac{1}{\alpha} \leq t'' \leq \frac{2}{\alpha}$$
$$\gamma_3(t''') = \left(1 - \alpha\left[t''' - \frac{2}{\alpha}\right]\right)(-1 + i), \qquad \frac{2}{\alpha} \leq t''' \leq \frac{3}{\alpha}$$
$$\frac{3}{\alpha} = 1, \qquad \alpha = 3$$

Entonces nos queda que:

$$\gamma_1(t) = 2(1+i)t$$
$$\gamma_2(t) = (1+i) - 2(3)\left[t - \frac{1}{3}\right]$$
$$\gamma_3(t) = \left(1 - 3\left[t - \frac{2}{3}\right]\right)(t+i)$$
$$\frac{2}{3} \leq t \leq 1$$
$$\Gamma = \{\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)\}, t \in [0,1]$$