# Clase 4

Manuel Garcia.

August 22, 2023

## 1 Ejercicio 1 del taller (pregunta del raisuke)

velocidad $\alpha'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 6t & 6t^2 \end{bmatrix} = v(t)$.

tenemos que $\overrightarrow{l} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & z \end{bmatrix}$

$$\frac{d\overrightarrow{l}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\arccos \frac{\left\langle v \middle| l \right\rangle}{\sqrt{\langle v|v\rangle \left\langle l \middle| l \right\rangle}} \theta = 3 + 6t^2 \tag{2}$$

$$\sqrt{l} = \sqrt{2}, \qquad \sqrt{\langle v|v\rangle} = \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} = \tag{3}$$

## 2 Formulas de Frenet

**Formulas de frenet**

$$\frac{dv}{dl} = kn, \qquad \frac{dn}{dl} = -kv - xb, \qquad \frac{db}{dl} = xn \tag{4}$$

Es un sistema de ecuaciones de primer orden. Necesitamos una solo condicion inicial. Son lineales.

**Recordemos que:**

$$n = [b, v] \tag{5}$$

Entonces:

$$b = [v, n] \rightarrow \frac{db}{dl} = [\frac{dv}{dl}, n] + [v, \frac{dn}{dl}] \tag{6}$$

$$\frac{db}{dl} = [v, \frac{dn}{dl}] \qquad \frac{dn}{dl} = \alpha v + \beta b \tag{7}$$

$$\frac{db}{dl} = [v, (\alpha v + \beta b)] = \beta[v, b] = -\beta n \tag{8}$$

$$\text{Tenemos que:} \tag{9}$$

$$\left|\frac{db}{dl}\right| = -\beta n \rightarrow \chi = -\beta \rightarrow \chi = \left|\frac{db}{dl}\right| \qquad \text{Torsion} \tag{10}$$

De forma analoga:

$$\frac{dn}{dl} = -kv - \chi b \tag{11}$$

$$\frac{dn}{dl} = [\frac{db}{dl}, v] + [b, \frac{dv}{dl}] = [\chi n, v] + [b, kn] \tag{12}$$

$$\frac{dn}{dl} = -\chi b - kv \tag{13}$$

**Representacion matricial**

$$\frac{de_i}{dl} = b_i^j e_j \quad \text{donde} \quad b_i^j = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\chi \\ 0 & \chi & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

En mas dimensiones:

$$\begin{bmatrix} 0 & k_1 & ... & 0 \\ -k_1 & 0 & -\chi_{i,j} & ... \\ -k_2 & ... & 0 & ... \\ 0 & .. & ... & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

## 3 Isometrias

una isometria es una transformacion de coordenadas que preserva la metrica. Por ejemplo si hacemos la transformacion $g'_{i,j}(z) = \frac{\partial x^l}{\partial z^i}\frac{\partial x^m}{\partial z^j} g_{l,m}(x) = g_{i,j}$.

$$N \rightarrow dim \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}N(N+1) \rightarrow \text{Isometricas} \tag{16}$$

Por ejemplo en $N = 2$ podemos hacer una traslacion $z^i = x^i + \xi^i$ es isometrica ya que $\frac{\partial z^i}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial z^i} = \delta^j_i$, la metrica no cambia.

Las rotaciones tambien nos mantienen la metrica igual.

$$z^i = R^i_k x^k \qquad RR^t = 1 \tag{17}$$

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = R^i_j \tag{18}$$

$$\text{Tenemos que } M = R^{-1} \tag{19}$$

$$g'_{i,j} = M^l_i M^m_j \delta_{lm} = M^m_i M^m_j = (MM^t)_{ij} = \delta_{ij} \tag{20}$$

en $N = 3$ Tendriamos 3 traslaciones y 3 rotaciones.

**Transformaciones isometricas en el espacio euclideano**

En el espacio euclideano tenemos el grupo de transformaciones isometricas de las traslaciones y las rotaciones.

---

en el caso miskowskiano tenemos rotaciones y boost.

**Teorema fundamental de la teoría local de curvas**

Dadas $k(l), \chi(l)$ diferenciables, existe una parametrización de la curva $\alpha(l) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $k(l), \chi(l)$ son la curvatura y la torsión de la curva. Una curva $\bar{\alpha}(l)$ con la misma curvatura y torsión solo difiere de la 1ra por una isometría.

---

En resumen solo necesitamos la curvatura y la torsion para definir una curva **en 3 dimesiones**. La demostracion se puede encontrar en el libro de do carmo.

Ejercicio

Muestre que la curva $r = r(l)$ que está sobre una esfera de radio $R$ si y solo si $\chi$ y $k$ satisface:

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(dk/dl)^2}{(\chi k)^2}\right) \tag{21}$$

La solucion se encuentra en las diapositivas (pag. 51).

Ejercicios relacionados

En las seccion 5.4 del taller hay mas ejercicios relacionados con la torsion.

# 4 Geometria de superficies

La geometria diferencial compara propiedades de un objeto utilizando ecuaciones diferenciales.

Tenemos $z = f\,(x, y)$

Muchas veces no podemos despejar $z$ como en $ln\left(\frac{\sin zy}{z}\right) + \frac{z^2}{y^2} = 0$, pero se puede lograr por el teorema de la funcion implicita de forma local. Esto se puede ver como una representacion parametrica $r(u,u) = \begin{bmatrix} x(u,v) & y\,(u,v) & z\,(u,v) \end{bmatrix}$ Esto es como tomar una region en $u, v$ y mapearla hacia $x, y, z$. Se puede ver como $r(x,y) = \begin{bmatrix} x & y & f\,(x,y) \end{bmatrix}$. Va del conjunto de los parametros hacia el conjunto de la superficie.

Diferencial del mapeo

$$d\overrightarrow{x}_q \quad \rightarrow \quad \text{Diferencial} \tag{22}$$

$$d\overrightarrow{x}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u} & \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial v} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Normalmente representamos las superficien en un "ambiente" de 3 dimensiones pero en realidad podemos deshacernos de esto ya que estamos llendo de 2 dimensiones a 2 dimensiones en el mapeo.

Definicion superficie

Un subconjunto $S \in \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$ existe un abierto en $\mathbb{R}^3$ y un mapeo $x : U \rightarrow V \cap S$ de un abierto $U \in \mathbb{R}^2$ en $V \cap S \in \mathbb{R}^3$ que cumple:

- $x = \begin{bmatrix} x\,(u,v) = & y\,(u,v) & z\,(u,v) \end{bmatrix}$ es diferenciable y tienen derivadas continuas de todos lo ordenes en $U$.
- $x$ es un homeomorfismo. tiene una inversa $x^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ continua.
- Para cada $q \in U$ el diferencial $d\overrightarrow{x}_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno.

## 5 Representación de superficies

**Definición puntos regulares**

Puntos regulares. en la superficie $F(x,y,z)=0$, un punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ es un punto regular si satisface $F(x_0,y_0,z_0)=0$ y su gradiente es diferente de cero:

$$\frac{\partial F}{\partial x}e_1+\frac{\partial F}{\partial y}e_2+\frac{\partial F}{\partial z}e_3|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0 \tag{24}$$

---

**Otra definicion** En la superficie $r(u,v)$, un punto $P=r(u_0,v_0)$ es un punto regular si la matriz

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{bmatrix}_{(u_0,v_0)} \qquad \text{Tiene rango 2} \tag{25}$$

**Teorema funcion implicita**

En un punto regular, si $\frac{\partial F}{\partial z}|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$ existe una función $z(x,y)$ que permite resolver la ecuación $F(x,y,z)=0$. Las derivadas de z se pueden obtener de:

$$F(x,y,z(x,y))=0\rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}=0=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+... \tag{26}$$

Es posible ver que las dos definiciones de puntos regulares son equivalentes, lo cual permite relacionar las 3 representaciones diferentes de una superficie vistas al inicio.

$$\left|\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}\neq 0, \qquad \left|\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}\neq 0 \tag{27}$$