Clase 13

Manuel Garcia.

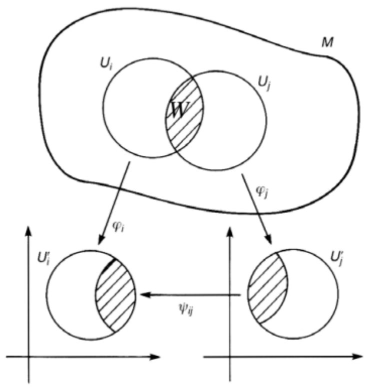
September 28, 2023

1 Variedades Diferenciables

Vamos a tener x elementos que vamos a describir en coordenadas. Por ejemplo x^α o y^α. Lo que queremos es que la tranformacion entre estas dos coordenadas sean funciones continuas y suaves.

M de n dimensiones es una variedad diferenciables si:

- M es un espacio topológico
- $u_i \to$ abiertos. $\to$ le asociamos unas parejas (u_i, ϕ_i), donde $\phi_i : u_i \to \mathbb{R}^n$, esta transformacion debe ser un homeomorfismo.
- $\{u_i\}$ son una cubierta: $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = M$.
- Tomemos dos parejas U_i, U_j que tengan interseccion $u_i \cap U_j \neq \emptyset$. En la variedad M va a existir esta interseccion la cual está contenida en ambos conjuntos. La funcion que lleve esta interseccion de U_i a U_j debe ser diferenciable y suave. Basicamente la condicion 2 nos dice que podemos ir de la variedad diferenciable a ϕ_i y ϕ_j, mientras que esta condiciones nos dice que podemos ir de ϕ_i a ϕ_j.

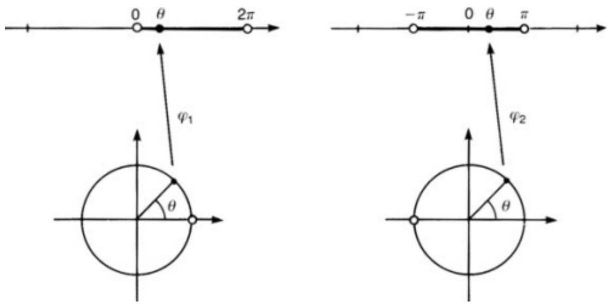


Charts (cartas) (u_i, ϕ_i)
Atlas $\{(u_i, \phi_i)\}$

Si la union de dos atlases $\{U_i, \phi_i\}$ y $\{V_i, \psi_i\}$

1.1 Ejemplos

1.1.1 Circulo S^1



$$\phi_1^{-1} : (0, 2\pi) \to S^1 \quad \phi_1^{-1} : \theta \to (\cos\theta, \sin\theta) \quad S^1 - (1, 0)$$
$$\phi_2^{-1} : (-\pi, \pi) \to S^1 \quad \phi_2^{-1} : \theta \to (\cos\theta, \sin\theta) \quad S^1 - (-1, 0)$$
$$\psi_{12}^{-} = \phi_1 \cdot \phi_2^{-1} \qquad \psi_{21} = \phi_2 \cdot \phi_1^{-1}$$

(Revisar notacion en diapositivas)

Si tomamos un circulo centrado en el origen nos damos cuenta que cada linea corta al circulo en dos puntos.

Tenemos $\mathbb{R}^{n+1}$:Rectas que pasan por el origen. Podemos decir que $\vec{y}$ es proporcional a $\vec{x}$ entonces $\vec{y} = a\vec{x}, \quad a \neq 0$. Esto lo podemos representar como que este espacion excepto por el 0 es proporcional a la proyeccion de $\mathbb{R}^n$.

$$\{\mathbb{R}^{n+1} - \{\vec{0}\}\}/\!\sim\, = P\mathbb{R}^n$$

Si $x^i \neq 0$:

$$\xi^k_{(i)} = \left(\frac{x^0}{x^i}, \frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \underbrace{\frac{x^i}{x^i}}_{=1}, ..., \frac{x^n}{x^i}\right)$$
$$\xi^k_{(i)} = \left(\frac{x^0}{x^i}, \frac{x^1}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^n}{x^i}\right)$$
$$u_i, \phi_i \qquad \phi_i : u_i \to \mathbb{R}^n \qquad u_i : (\vec{x})/x^i \neq 0$$
$$(x^0, ..., x^n) \to \xi^k_{(i)}$$
$$u_j, \phi_j \qquad \phi_j : (x^0, ..., x^n) \to \xi^k_{(j)} \qquad u_j : (\vec{x})/x^j \neq 0$$
$$\psi_{ij} = \phi_i \cdot \phi_j^{-1} : \quad \phi_j^{-1}[\xi^k_{(j)}] = x^j \xi^k_{(j)} = x^j \frac{x^k}{x^j} = x^k$$
$$\psi_{ij} = \phi_i[\phi_j^{-1}(\xi^k_{(j)})] = \phi_i(x^k) = \xi^k_{(i)} = \frac{x^k}{x^i} \quad \text{con } x^i \neq 0$$

La funcion $\phi_i(x^k)$ es bien comportada ya que $x^i \neq 0$.

> Ver video sobre este tema en el classroom donde se da una descripcion mas geometrica de este problema.

2 Mapas entre variedades

Vamos a tomar un mapa que va desde la variedad M hasta la variedad N. $M \to N$. La variedad de M será $\mathbb{R}^m$ y la de N será $\mathbb{R}^n$. Vamos a tomar un punto P de la variedad M y lo vamos a llevar hasta N utilizando $f(P)$. Para esto necesitamos una conexion entre ambas variedades. Osea para establecer un camino de $\phi(p)$ hacia $\psi(f(p))$ debemos definir un $f(p)$ el cual va de M hacia N.

Representación coordenada:

$$y = \psi \circ f \circ \phi^{-1}[x] : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$\phi(p) = \{x^\mu\}, \quad \psi(f(p)) = \{y^\alpha\}$$

2.1 Curva c en M

Vamos a hacer un mapa entre dos variedades pero una de las variedades va a ser un intervalo.

Vamos a tomar el intervalo (a, b) y vamos a tomar un punto c el cual vamos a llevar hacia la variedad M por medio de la funcion c. Muchas veces este mapeo no está sobre toda la variedad M si no sobre una parte de esta, a esta parte la llamaremos U. Para ir del intervalo hacia la variedad vamos a llamar la funcion $c(t) : \phi \circ c$: Representación en coordenadas de la curva.

$$c(t) = \phi \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

2.2 Funcion f en M

$$f : M \to \mathbb{R}$$
$$f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \to \text{Representación en coordenadas de } f.$$
$$f(x) = f(\phi^{-1}(x))$$

2.3 Vector tangente

Ahora vamos a juntar los dos casos anteriores y definir un vector.

Vector Para definirlo vamos a tomar la curva ya que esta tiene orientación.

Vamos a definir:

$$\left.\frac{df[c(t)]}{dt}\right|_{t=0} \quad \to \quad \text{Derivada de } f \text{ a lo largo de } c.$$

Notemos que f debe ser derivable.

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial f}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} f$$
$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv X[f] \quad \to \quad X^i : \text{Vector tangente}$$
$$X^i = \left.\frac{dx^i}{dt}(c(t))\right|_{t=0}$$

$$\boxed{X \equiv \overset{\text{Componentes}}{X^i} \underset{\text{Bases}}{\frac{\partial}{\partial x^i}}}$$

Podemos ver X^i como las componentes y $\frac{\partial}{\partial x^i}$ como las bases.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv e_i \to \text{Bases coordenadas.}$$

Si dos curvas pasan por el punto p y tienen la misma tangente se les llama equivalentes.