Clase 5

Manuel Garcia.

August 29, 2023

1 Momentum

Pongamos que vivimos en una dimension osea vivimos en el estado $|x'\rangle$ en el eje x. Tenemos $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ y $x_{op}|x'\rangle = x'|x'\rangle$. En las 3 dimensiones del espacio podemos escribir $|x'\rangle|y'\rangle|z'\rangle = |r'\rangle = |x', y', z'\rangle$ para poder escribirlo así los operadores deben conmutar osea $[x_{op}, y_{op}] = 0$, $[x_{op}, z_{op}] = 0$, $[y_{op}, z_{op}] = 0$.

Momentum

$$P_{op}|P'\rangle = P'|P'\rangle \tag{1}$$
$$\langle P|P'\rangle = \delta(P-P') \tag{2}$$

Tiene autovalores continuos.

Tenemos una particula libre de cualquier fuerza o potencial con momento P. De broglie nos dice que todos los experimentos que podemos hacer sobre una particula de momento P los podemos interpretar como que la particula $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{|P|}$ (esta es la longitud de onda de una particula). Esto se puede observar en el **experimento de Davissom y Germer**. Una onda se puede ver como una funcion oscilante en el espacio.

Longitud de onda de una particula (De Broglie)

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{|P|} \tag{3}$$

Se trabaja el caso **no relativista**.

El momentum en física es muy importante. En cuantica se estudia es el momentum. Sin fuerzas externas el momentum se conserva por ejemplo en las colisiones ($\vec{P}_{aI} + \vec{P}_{bI} = \vec{P}_{aF} + \vec{P}_{bF}$) y esto sucede tambien en la cuantica.

Para λ podemos construir la funcion de onda en el eje x: $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$ o $\sin\frac{2\pi}{\lambda}x$, en cuantica utilizamos $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x} = \cos\frac{2\pi}{\lambda}x + i\sin\frac{2\pi}{\lambda}x$ ya que es mas facil hacer su derivada, utilizando De Broglie obtenemos $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x} = e^{i\frac{P}{\hbar}x}$

Onda de una particula libre

1 Dimension

$$e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x} \tag{4}$$

3 Dimensiones

$$e^{i\frac{\vec{P}\vec{r}}{\hbar}} \tag{5}$$

$$\langle x|P\rangle = Ne^{i\frac{Px}{\hbar}} \tag{6}$$

Funcion de onda

Vamos a llamar una funcion que nos representa es situacion fisica.

$$\langle x|P\rangle = Ne^{i\frac{Px}{\hbar}} \tag{7}$$

$$|\psi\rangle = |P\rangle \tag{8}$$

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) \tag{9}$$

$$\int dx\,|\psi|^2 = Probabilidad \tag{10}$$

$$\left\langle \vec{r}\middle|\vec{P}\right\rangle = N'e^{i\frac{\vec{P}.\vec{r}}{\hbar}} \tag{11}$$

$$\langle x|\,P_{op}\,|P\rangle = P\,\langle x|P\rangle = PNe^{i\frac{Px}{\hbar}} = -i\hbar\frac{d}{dx}(\langle x|P\rangle) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi_P(x) \tag{12}$$

$|\psi\rangle$ cualquier $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$

$$\langle x|\,P_{op}\,|\psi\rangle = \langle x|\,P_{op}\int dP\,|P\rangle\,\langle P|\psi\rangle = \int dP(\langle x|P\rangle\,P)\,\langle P|\psi\rangle = \int dP(P\,\langle x|P\rangle)\,\langle P|\psi\rangle \tag{13}$$

Podemos escribir $(P\,\langle x|P\rangle)$ como $-i\hbar\frac{d}{dx}(\langle x|P\rangle)$.

$$= -i\hbar\frac{d}{dx}\int dP\,\langle x|P\rangle\,\langle P|\psi\rangle \tag{14}$$

Como $\int dP\,|P\rangle\,\langle P| = \mathbb{I}$

$$= -i\hbar\frac{d}{dx}\,\langle x|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) \tag{15}$$

$$\langle x|\,P_{op}\,|P\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) \tag{16}$$

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) \tag{17}$$

1.1 Conmutacion de momento y la posicion

$\langle x|\,[P_{op}, x_{op}]\,|\psi\rangle = \langle x|\,P_{op}x_{op} - x_{op}P_{op}\,|\psi\rangle$. Y tenemos que $x_{op}\,|\psi\rangle = \underset{momentum}{|\phi\rangle}$, $\langle x|\,x_{op}\,|\psi\rangle = \langle x|\phi\rangle$ y $x\psi(x) = \phi(x) = \langle x|\phi\rangle$. Entonces:

$$\langle x|\,P_{op}x_{op}\,|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\phi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}(x\psi(x)) = -i\hbar\psi(x) - i\hbar x\frac{d}{dx}\psi(x) \tag{18}$$

Entonces:

$$\langle x| [P_{op}, x_{op}] |\psi\rangle = -i\hbar\psi(x) = -i\hbar \langle x|\psi\rangle \tag{19}$$

Por lo tanto:

$$[P_{op}, x_{op}] = -i\hbar \tag{20}$$

Del principio de incertidumbre

$$[P_{op}, x_{op}] = -i\hbar \rightarrow \tag{21}$$

$$\rightarrow \langle\psi| D^2_{opp} |\psi\rangle \langle\psi| D^2_{opx} |\psi\rangle \geq \frac{1}{4}\hbar^2 \tag{22}$$

Además tenemos que $\Delta x = \sqrt{\langle\psi| D^2_{opx} |\psi\rangle}$ y $\Delta P = \sqrt{\langle\psi| D^2_{opp} |\psi\rangle}$ Por lo tanto:

$$\Delta P \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{23}$$

Representacion matricial con notacion tensorial:

$$[P^{\alpha}_{op}, r^{\beta}_{op}] = -i\hbar\delta^{\alpha\beta} \tag{24}$$

$$r^1 = x, \quad r^2 = y, \quad r^3 = z \tag{25}$$

Densidad de probabilidad Tenemos que:

$$\langle x|P\rangle = Ne^{i\frac{Px}{\hbar}} = \psi_P(x) \tag{26}$$

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) \tag{27}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{28}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1 \qquad\qquad \text{N no depende de } x \tag{29}$$

$$|\psi_P(x)|^2 = |N|^2 \rightarrow \text{"}\Delta x = \infty\text{"} \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi_P(x)|^2 = \underset{\text{No tiene sentido}}{\infty} \tag{31}$$