Geodésica Alrededor de una Partícula con la Métrica de Schwarzschild

Manuel Angel Garcia[1] Carlos Andres Llanos[1]

[1]Facultad de Física
Universidad Nacional de Colombia

Clase de Métodos Geométricos

Métrica de Schwarzschild

Partiendo de la métrica de Minkowski en esféricas:

$$ds^2_{\text{Minkowski}} = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Necesitamos una métrica que mantenga la forma del ángulo solido, así que podemos multiplicarlo por una función radial:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2$$

Aplicamos la siguiente transformación:

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r \qquad\qquad d\bar{r} = \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma} dr$$

La métrica nos queda:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r) - 2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2$$

Métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2$$

Haciendo $\bar{r} \to r$ obtenemos que: $\left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \to e^{2\beta}$

Por lo tanto podemos escribir la métrica como:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Calculamos los simbolos de Christoffel:

$$\Gamma^t_{tr} = \partial_r \alpha \qquad \Gamma^r_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r \alpha \qquad \Gamma^r_{rr} = \partial_r \beta$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2\beta} \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-2\beta}\sin^2\theta \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Metrica de Schwarzschild

Con los simbolos de Christoffel podemos obtener el tensor de Riemann:

$$
\begin{aligned}
R^t_{rtr} &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \\
R^t_{\theta t \theta} &= -re^{-2\beta} \partial_r \alpha \\
R^t_{\phi t \phi} &= -re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\
R^r_{\theta r \theta} &= re^{-2\beta} \partial_r \beta \\
R^r_{\phi r \phi} &= re^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\
R^\theta_{\phi \theta \phi} &= \left(1 - e^{-2\beta}\right) \sin^2 \theta
\end{aligned}
$$

Metrica de Schwarzschild

Tomando la contracción obtenemos el tensor de Ricci:

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right]$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}\left[r\left(\partial_r\beta - \partial_r\alpha\right) - 1\right] + 1$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta \quad R_{\theta\phi}$$

Reemplazamos el tensor de Ricci en la ecuacion de campo de Einstein en el vacío y contrayendo con la métrica contravariante para hallar α y β:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

Obteniendo:

$$e^{2(\beta-\alpha)}e^{2(\alpha-\beta)}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right] \\ - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta = 0$$

$$\implies \frac{2}{r}\partial_r\alpha + \frac{2}{r}\partial_r\beta = 0$$

Para que se cumpla esta ecuación necesitamos que $\alpha = -\beta + c$

Metrica de Schwarzschild

$$\alpha = -\beta$$

Reemplazando en $R_{\theta\theta} = 0$:

$$e^{2\alpha}(2r\partial_r \alpha + 1) = 1 \Longrightarrow \partial_r (re^{2\alpha}) = 1$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos:

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r}$$

De esta forma obtenemos que podemos escribir la métrica como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Radio de Schwarzschild

De la ecuación de la geodésica:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Como vamos a tratar el caso no relativista tenemos que $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$. Esto hace que solo sobreviva la componente Γ^μ_{tt} por lo que podemos escribir la ecuación de las geodésicas como:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Como el campo es estático $(\partial_0 g_{\mu\nu})$, Γ^μ_{tt} se simplifica como:

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{tt} &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_t g_{\lambda t} + \partial_t g_{t\lambda} - \partial_\lambda g_{tt})\\ &= -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{tt}\end{aligned}$$

$$\Gamma^{\mu}_{tt} = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} g_{tt}$$

Podemos aplicar una perturbación a la métrica:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad\qquad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Reemplazando en el símbolo de Christoffel, la métrica nos queda:

$$\Gamma^{\mu}_{tt} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} h_{tt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} h_{tt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

$$\hookrightarrow \frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{tt}$$

Recordemos que para un potencial gravitacional $\vec{a} = -\nabla \phi$

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{tt}$$

Recordemos que para un potencial gravitacional $\vec{a} = -\nabla\phi$, comparando con la ecuación anterior:

$$h_{tt} = -2\phi$$

Como $g_{tt} = \eta_{tt} + h_{tt}$ y del potencial Newtoniano para un cuerpo gravitando $\phi = -\frac{GM}{r}$ tenemos que:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \implies R_s = 2GM$$

Geodésicas de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Calculamos los símbolos de Christoffel

```
m = var('m')
M = Manifold(4, 'R^4', start_index=1)

c_spher.<t,r,th,ph> = M.chart(r't:(0,+oo) r:(0,+oo) th:(0,pi):\theta ph:(0,2*pi):\phi')

g = M.metric('g')

g[1,1], g[2,2], g[3,3], g[4,4] = (-1)*(1-2*m/r), (1-2*m/r)^(-1), r^2, r^2*sin(th)^2

print(g.christoffel_symbols_display(chart=c_spher))


BL.<t,r,th,ph> = M.chart(r"t r:(0,+oo) th:(0,pi):\theta ph:(0,2*pi):\phi")
M.default_frame() is BL.frame()
xi = BL.frame()[0]

xi_form = xi.down(g)
print(xi_form.display())
```

Geodésicas de Schwarzschild

Símbolo de Christoffel para la métrica:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{t}{}_{t\,r} &= -\frac{M}{2\,Mr - r^{2}} \\
\Gamma^{r}{}_{t\,t} &= -\frac{2\,M^{2} - Mr}{r^{3}} \\
\Gamma^{r}{}_{r\,r} &= \frac{M}{2\,Mr - r^{2}} \\
\Gamma^{r}{}_{\theta\,\theta} &= 2\,M - r \\
\Gamma^{r}{}_{\phi\,\phi} &= (2\,M - r)\sin(\theta)^{2} \\
\Gamma^{\theta}{}_{r\,\theta} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\theta}{}_{\phi\,\phi} &= -\cos(\theta)\sin(\theta) \\
\Gamma^{\phi}{}_{r\,\phi} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\,\phi} &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}
\end{aligned}
$$

Geodésicas de Schwarzschild

Reemplazando los símbolos de Christoffel en la ecuación de la geodésica:

$$\ddot{t} + \frac{2M}{r(r-2M)}\dot{r}\dot{t} = 0$$

$$\ddot{r} + \frac{M}{r^3}(r-2M)\dot{t}^2 - \frac{M\dot{r}}{r(r-2M)} - (r-2M)\dot{\phi}^2 = 0$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{r} = 0$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Intervalo Luminoide

Como estamos en un intervalo luminoide podemos hacer $ds^2 = 0$ por lo que la métrica nos queda:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = 0$$

Haciendo el reemplazo $u = \frac{1}{r}$ nos queda:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}$$

A b se le conoce como parámetro de impacto y nos determina la forma de la orbita. $b = \sqrt{27}M \rightarrow$ orbitas de circunferencia inestable. $b < \sqrt{27}M$ orbitas de caída en el centro.