Clase 12

Manuel Garcia.

September 26, 2023

1 Oscilador armonico

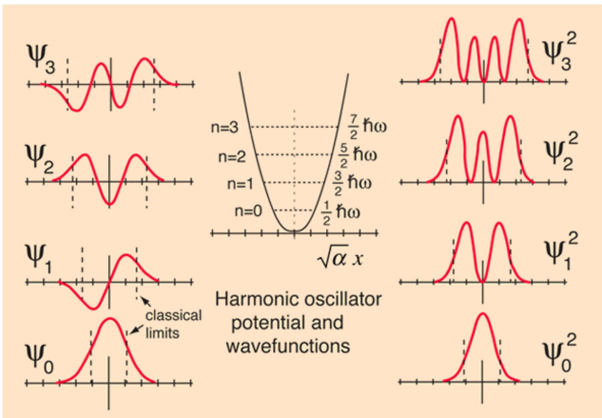
$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right) \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$$

$$N = a^\dagger a = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \qquad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$N\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \qquad a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$$

$$\left\langle o\right| x \left|o\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0^*(x) x \psi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \underset{par}{[\psi_0(x)]^2} \underset{impar}{x} = 0$$



$$\psi_0 = c_0 e^{-\frac{x^2}{2\bar{x}^2}} \qquad \psi_1 = c_1 x e^{-\frac{x^2}{2\bar{x}^2}}$$

En fisica se dice **PAR: paridad positiva** e **IMPAR: paridad negativa**.
Como ψ_1 es lo mismo que ψ_0 pero con un x multiplicandola tenemos que:

$$\left\langle 1\right| x \left|1\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) x \psi_1(x) = 0$$

Mas ejemplos:

$$\langle 3|\, x\, |1\rangle = 0$$
$$\langle 2|\, x\, |0\rangle = 0$$

Qué sucede con el valor esperado del momentum?

$$\langle 0|\, p\, |0\rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\psi_0^*(x)}_{par} \underbrace{\frac{d}{dx}}_{impar} \underbrace{\psi_0(x)}_{par} = 0$$
$$\langle n|\, p\, |n\rangle = 0$$

Hay casos donde no da cero, por ejemplo:

$$\langle 1|\, x\, |0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1^* x \psi_0(x)$$

despejando de a y $a^\dagger$ obtenemos que:

$$x = c_1 a + c_2 a^\dagger \qquad\qquad p = d_1 a + d_2 a^\dagger$$

tanto x como p están conformados por un coeficiente de bajada y un coeficiente de subida.

Aplicando esto al cambio de peldaño de 4 a 1 obtenemos:

$$\langle 4|\, x\, |1\rangle = 0$$

En resumen si tenemos un cambio de peldaño de 1 va a ser diferente de 0 pero si tenemos un cambio de peldaño de mas de 1 nos va a dar 0.

$$\langle n'|\, x\, |n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1})$$
$$\langle n'|\, p\, |n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (-\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1})$$

Qué sucede si queremos hallar $\langle n'|\, x\, |n\rangle$?

$$\langle n'|\, x\, |n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{n'}^*(x) x^2 \psi_n(x)$$

Según el libro:

$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{\dagger 2} + a^\dagger a + a a^\dagger)$ y tenemos que $aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \rightarrow aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$, por lo tanto:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^2 + a^{\dagger 2} + 2N + 1)$$

Tarea

Calcular la transformada de fourier de

$$\psi_p(x) = N e^{i\frac{px}{\hbar}} = N\left[\cos\frac{px}{\hbar} + i \sin\frac{px}{\hbar}\right]$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
$$H\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle \qquad\qquad \left\langle x|\psi\right\rangle = \psi(x)$$
$$\left\langle x\right| H \left|\psi\right\rangle = E\left\langle x|\psi\right\rangle$$
$$\left\langle x\right| p^2 \left|\psi\right\rangle = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\psi(x)$$

Ecuacion de schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x) = E\psi(x)$$

tenemos que $\bar{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ y $\xi = \frac{x}{\bar{x}}$:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) - \xi^2\psi(\xi) + \frac{2E}{\hbar\omega}\psi(\xi) = 0$$

Como el segundo termino tiene ξ^2 es un termino mucho mas grande que el tercero por lo tanto podemos despreciar el tercero.