Clase 8

Manuel Garcia.

March 4, 2024

1 Ejemplo 1

Para oscilador armonico clásico de m grados de libertas, determine el volumen en el espacio de fase y su trayectoria clásica.

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2; \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

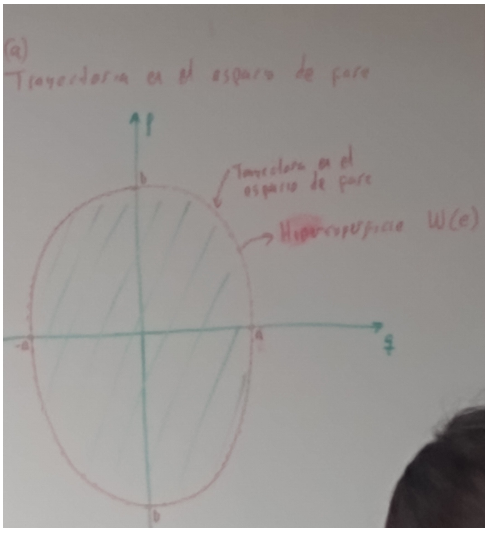
Para unas condiciones iniciales dadas por t_0; $\quad q = A$; $\quad p = 0$

Solucion
Dado que $H(p,q) = \epsilon$; energia mecánica total

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \epsilon \rightarrow \frac{p^2}{2m\epsilon} + \frac{q^2}{\frac{2\epsilon}{m\omega^2}} = 1$$

$$\rightarrow \frac{p_\omega^2}{b^2} + \frac{q_\omega^2}{a^2} = 1$$

Trayectoria en el espacio de fase:



El volumen $\Lambda(\epsilon)$ está envuelto por la hipersuperficie $\omega(\epsilon)$. El area de esta es el area de la elipse.

$$\Lambda(\epsilon) = \pi ab = \pi\sqrt{\frac{2\epsilon}{m\omega^2}}\sqrt{2m\epsilon}$$
$$\Lambda(\epsilon) = 2\pi\frac{\epsilon}{\omega}$$

De forma equivalente

$$p^2 = 2m\epsilon - \frac{1}{2}m^2\omega^2q^2 \quad \rightarrow \quad |p| = \sqrt{2m\epsilon - \frac{1}{2}m^2\omega^2q^2}$$
$$\Lambda(\epsilon) = \int_{H(p,q)\leq\epsilon} d\Lambda = \int_{-A}^{A} dq \int_{-|p|}^{|p|} = 4\int_0^A dq \int_0^{|p|} dp$$
$$\Lambda(\epsilon) = 4\int_0^A dq\sqrt{2m\epsilon - \frac{1}{2}m\omega^2q^2} = 4\sqrt{2m\epsilon}\int_0^A dq\sqrt{1-Dq^2} \qquad \text{con } D = \frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{\epsilon}$$
$$= \sqrt{2m\epsilon}\frac{1}{2}\left[A\sqrt{1-A^2D} + \frac{\arcsin A\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\right]$$
$$\text{Tenemos que } \frac{\arcsin A\sqrt{D}}{\sqrt{D}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2\epsilon}{m\omega}}, \qquad A = \frac{2\epsilon}{m\omega^2}$$
$$\Lambda(\epsilon) = 2\pi\frac{\epsilon}{\omega}$$

si $\epsilon \rightarrow \epsilon' = \epsilon + \Delta\epsilon$

$$\Lambda = 2\pi\frac{\epsilon'}{\omega} = 2\pi\frac{\epsilon}{\omega} + 2\pi\frac{\Delta\epsilon}{\omega}$$
$$\Delta\Lambda = \Lambda' - \Lambda$$
$$\Delta\Lambda = 2\pi\frac{\Delta\epsilon}{\omega}$$

2 Ejemplo 2

Asumamos que la probabilidad de encontrar al oscilador con un q entre q y $q + dq$ está dada por

$$\rho(q)dq = \frac{d\Lambda}{\Delta\Lambda}$$

Encuentre $\rho(q)$ como funcion de A (amplitud)

Así:

$$\rho(q)dq = \frac{2dpdq}{2\pi\frac{\Delta\epsilon}{\omega}} = \frac{\omega}{\pi}dp\frac{dq}{d\epsilon} = \frac{\omega}{\pi}\left(\frac{dp}{d\epsilon}\right)dq$$

y que $\epsilon = \epsilon(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$

$\frac{d\epsilon}{dp} = \frac{1}{2m}2\,|p| = \frac{|p|}{m} \rightarrow \frac{dp}{d\epsilon} = \frac{m}{|p|}$

Así $\rho(q) = \frac{\omega}{\pi}\frac{dp}{d\epsilon} = \frac{\omega}{\pi}\frac{m}{|p|} = \frac{\omega}{\pi}\frac{m}{\sqrt{2m\epsilon - \frac{1}{2}m^2\omega^2q^2}}$

tenemos que

$$q^2 = A^2\cos^2(\omega t + \phi)\dot{q}^2 = A^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

Luego

$$\tilde{p} = m^2\dot{q}^2 = A^2m^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

Así

$$\epsilon = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2}A^2 m\omega^2 \quad \rightarrow \quad A^2 = \frac{2\epsilon}{m\omega^2}$$

Entonces

$$m^2\omega^2 A^2 = 2m\epsilon$$

> **Ejercicio**
>
> Si $q(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, $0 < \phi < 2\pi$ asumiendo que $\omega(\phi)d\phi$ es la probabilidad de que ϕ se encuentre entre ϕ y $\phi + d\phi$ es:
>
> $$\omega(\phi)d\phi = \frac{1}{2\pi}d\phi$$
>
> Establecida la correspondencia con la probabilidad de que q se encuentre entre q y $q + dq$ dad por $p(q)dq$, encontrar
>
> $$\rho(q)$$

3 Ejemplo 3

(a) Encontrar el volumen en el espacio de fase para un pendulo simple con pequeñas oscilaciones de longitud l y masa m

(b) Determine el cambio en el volumen en el espacio de fase $\Delta\Lambda$ si la longitud del pendulo cambia de $l \rightarrow l' = 2l$

Solucion La energia

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + m\omega^2 l^2(1 - \cos\theta); \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

(a) Para pequeñas oscilaciones $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \cdots$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mA^2\omega^2 &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{m\omega^2 l^2\theta^2}{2} \\ \rightarrow \quad 1 &= \frac{p_\theta^2}{(ml\omega A)^2} + \frac{\theta^2}{(A/l)^2} = \frac{p_\theta^2}{b^2} + \frac{\theta^2}{a^2} \end{aligned}$$

Volumen Λ envuelto por $\omega(\epsilon)$

$$\Lambda = \pi ab = \pi m\omega A^2$$

4 Ejemplo 4

Considerando el oscilador armónico cuántico, determine el minimo elemento de volumen en el espacio de fase por un estado cuantico arbitrario (i-esimo) $\rightarrow |\phi_i\rangle \rightarrow \epsilon_i = \hbar\omega(i + 1/2)$.

El hamiltoniano del sistema

$$H^{(1)} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2; \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Solucion

$$\hat{H}^{(1)}|\phi_i\rangle = \epsilon_i|\phi_i\rangle; \qquad \epsilon_i = \hbar\omega(i + 1/2)$$

Dado que el hamiltoniano representa la energia mecanica total

$$\epsilon_i = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

El volumen en el espacio de fase

$$\Lambda_i = \int_{H(p,q)\leq\epsilon_i} d\Lambda_i = \int dq \int_{H(p,q)\leq\epsilon_i} dp$$

Los limites de la integral

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2; \qquad \text{para } q = 0$$

$$q^2 = \frac{2\epsilon_i}{m\omega^2} \quad \rightarrow \quad q = \pm\sqrt{\frac{2\epsilon_i}{m\omega^2}} = \pm A_i$$

$$p^2 = 2m\epsilon_i - m\omega^2 q^2 \quad \rightarrow \quad p = \pm\sqrt{2m\epsilon_i - m^2\omega^2 q^2} = \pm|p|$$

Entonces

$$\Lambda_i = 4\int_0^A dq \int_0^{|p|} dp = \frac{2\pi}{\omega}\epsilon_i$$

$$\Lambda_i = \frac{2\pi}{\omega}\hbar\omega(i+\frac{1}{2}) = h(i+\frac{1}{2})$$

Para el estado base $i = 0$

$$\Lambda_0 = \frac{h}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\Lambda_0}{2} = h$$

Por lo tanto

$$\frac{\Lambda_i}{(i+\frac{1}{2})} = h$$

5 Teorema de Virial

Gas ideal de particulas libres

$$H(p,q) = T(p) = \sum_{l=1}^{N}\frac{1}{2}mV_l^2$$

Se calcula el promedio estadistico $q_i\frac{\partial H}{\partial q_k}$ en el ensamble microcaconico

$$\rho(\vec{q},\vec{p}) = \frac{\delta(E-H)}{\omega(E)}$$

Se calcula

$$\left\langle q_l \middle| \frac{\partial H}{\partial q_k} \right\rangle = \int_{E-\Delta E<H<E+\Delta E} \frac{\delta(E-H)}{\omega(E)} q_l \frac{\partial H}{\partial q_k} d\vec{p}d\vec{q} = \delta_{lk}\frac{1}{\Omega h^{3\omega}}\int \cdots$$

$$\left\langle x_l \middle| \frac{\partial H}{\partial x_k} \right\rangle = \delta_{lk}\frac{1}{\Omega}\frac{\Lambda}{h^{3\omega}} = \delta_{lk}\frac{1}{\frac{\partial ln\Lambda}{\partial E}} = \delta_{lk}\frac{\kappa_B}{\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{p,v}} = \delta_{lk}\delta_B T$$

$$\left\langle p_l \middle| \frac{\partial H}{\partial p_k} \right\rangle = \delta_{lk}\kappa_B T$$

Usando el teorema de Euler

$$2T_x = \sum_l p_l\dot{x}_l \qquad \rightarrow \qquad \epsilon = \frac{1}{2}\kappa_b T$$

Entonces

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{3}{2}\kappa_B T$$

6 Ejemplo 6

Sea una cadena unidimensional que consiste de $n \quad (n >> 1)$ elementos.