Clase 8

Manuel Garcia.

March 6, 2024

1 Transformaciones de Bogoliubov (T.B)

Como es un isomorfismo y en $|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ tenemos $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ y $\hat{\tilde{a}}, \hat{\tilde{a}}^\dagger$ entonces en $|0(\beta)\rangle$ necesitamos tener $\hat{\tilde{a}}(\beta), \hat{\tilde{a}}^\dagger(\beta)$. Y teniamos que para el caso bosonico.

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \exp\left\{e^{-\beta\frac{\omega}{2}} \hat{a}^\dagger \hat{\tilde{a}}^\dagger\right\} |\bar{0}\rangle$$

Para hacer la TB debemos que tener en cuenta que es un isomorfismo por lo que $[,] \longleftrightarrow [,]$ y $\{,\} \longleftrightarrow \{,\}$.

Vamos a usar el modelo

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 \quad \rightarrow \quad \left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = 1$$

Por la TB tenemos que

$$\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger \qquad \hat{b}^\dagger = u^*\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a}$$

Usando las reglas de conmutacion

$$\left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = \left[u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger, u^*\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a}\right] = (u^2 - v^2)\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$$

u y v debe satisfacer $u^2 - v^2 = 1$

Teniamos las reglas de conmutacion

$$\left[\hat{a}, \hat{\tilde{a}}\right] = \left[\hat{a}^\dagger, \hat{\tilde{a}}^\dagger\right] = \left[\hat{a}^\dagger, \hat{\tilde{a}}^\dagger\right] = \left[\hat{a}^\dagger, \hat{\tilde{a}}^\dagger\right] = 0$$
$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \left[\hat{\tilde{a}}, \hat{\tilde{a}}^\dagger\right] = 1$$

Podemos tomar $\left[\hat{a}, \hat{\tilde{a}}^\dagger\right] \rightarrow \left[\hat{a}(\beta), \hat{\tilde{a}}^\dagger(\beta)\right]$

$$\hat{a} = u(\beta)\hat{a}(\beta) + v(\beta)\hat{\tilde{a}}^\dagger(\beta)$$

Pero aún nos falta alguna transformacion que involucre $\hat{\tilde{a}}$ y $\hat{a}^\dagger$. Para esto podemos hacer $\left[\hat{\tilde{a}}, \hat{a}^\dagger\right] \rightarrow \left[\hat{\tilde{a}}(\beta), \hat{a}^\dagger(\beta)\right]$

$$\hat{\tilde{a}} = u(\beta)\hat{\tilde{a}}(\beta) + v(\beta)\hat{a}^\dagger(\beta)$$

Podemos hacer

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}, \hat{\tilde{a}}\right] &= 0 \\ &= (u^2(\beta) - v^2(\beta))\left[\hat{a}(\beta), \hat{\tilde{a}}(\beta)\right]\end{aligned}$$

Si $u^2(\beta) - v^2(\beta) = 1 \rightarrow \left[\hat{a}, \hat{\tilde{a}}\right] = \left[\hat{a}(\beta), \hat{\tilde{a}}(\beta)\right] = 0$

2 Energia Total del Sistema Térmico

considere la siguiente identidad

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{\tilde{a}}^\dagger\hat{\tilde{a}} = \hat{a}^\dagger(\beta)\hat{a}(\beta) - \hat{\tilde{a}}^\dagger(\beta)\hat{\tilde{a}}(\beta)$$