Clase Agujeros Negros Cuánticos

Manuel Garcia.

August 26, 2024

1

$$\{\phi_\Omega^{(\epsilon)}\} \qquad \{\chi_\Omega^{(t)}\}$$
$$(\chi_\Omega^{(\epsilon)},\ \chi_{\Omega'}^{(\epsilon')}) = \epsilon\epsilon(\omega)\delta_{\Omega\Omega'}\delta_{\epsilon\epsilon'}$$

Los modos $\phi_\Omega^{(\epsilon)}$ y $\chi_\Omega^{(\epsilon)}$ están relacionados por una transformación de Bogoliubov.

$$\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x) = \phi_\Omega^{(\epsilon)}(x)\cosh\chi + \phi_\Omega^{(-\epsilon)}(x)\sinh\chi$$

donde χ está expresada con base en $\tanh\xi = e^{-\pi|\omega|/k_0}$. Donde k_0 es la gravedad superficial. $\chi_\Omega^{(\epsilon)}$ son los modos de Hatle-Hawking.

$$\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x) = \sum a_\Omega \phi_\Omega^{(\epsilon)}(x)$$

$$\chi_\Omega^{(\epsilon)} = \sqrt{\frac{\sinh\chi\cosh\chi}{2\,|\omega|}}\phi_\Omega(\vec{x})e^{-i\omega t_{\epsilon(\omega)\epsilon}}$$

Ejercicio 2

a) Hallar

$$t_\epsilon = \left(t + \frac{1}{2}\frac{i\pi}{k_0}\right)\Theta_\epsilon + \left(t - \frac{1}{2}\frac{i\pi}{k_0}\right)\Theta_{-\epsilon}$$

b)

$$t_{\epsilon\epsilon'} = \left(t + \frac{1}{2}\frac{i\pi}{k_0}\epsilon'\right)\Theta_\epsilon + \left(t - \frac{1}{2}\frac{i\pi}{k_0}\epsilon'\right)\Theta_{-\epsilon}$$

Ejercicio 3

$$e^{-i\omega t_\epsilon} = e^{-i\omega t}\left(e^{1/2\,\frac{\pi\omega}{k_0}}\Theta_\epsilon + e^{-1/2\,\frac{\pi\omega}{k_0}}\Theta_{-\epsilon}\right)$$

Ejercicio 4

$$e^{-i\omega t_{\epsilon\epsilon'}} = e^{-i\omega t}\left(e^{1/2\,\frac{\pi\omega}{k_0}\epsilon'}\Theta_\epsilon + e^{-1/2\,\frac{\pi\omega}{k_0}\epsilon'}\Theta_{-\epsilon}\right)$$

Ejercicio 5

Sea $\epsilon' = \epsilon(\omega)$, entonces

$$e^{-i\omega t\epsilon(\omega)\epsilon} = e^{-i\omega t}\left(e^{1/2\,\frac{\pi|\omega|}{k_0}}\Theta_\epsilon + e^{-1/2\,\frac{\pi|\omega|}{k_0}}\Theta_{-\epsilon}\right)$$

Ejercicio 6

Definiendo $\chi = \chi(\omega)$ por $\tanh\chi = e^{-\frac{\pi|\omega|}{k_0}}$, lo demostrado en el ejercicio 5 se puede escribir como

$$e^{-i\omega t\epsilon(\omega)\epsilon} = e^{-i\omega t}\left[\left(\frac{\cosh\chi}{\sinh\chi}\right)^{1/2}\Theta_\epsilon + \left(\frac{\sinh\chi}{\cosh\chi}\right)^{1/2}\Theta_{-\epsilon}\right]$$

Ejercicio 7

Demostrar la expresión

$$\chi_\Omega^{(\epsilon)}(x) = \phi_\Omega^{(\epsilon)}(x)\cosh\chi + \phi_\Omega^{(-\epsilon)}(x)\sinh\chi$$

Ejercicio 8

Deducir la ecuación

$$\chi_\Omega^{(\epsilon)} = \sqrt{\frac{\sinh\chi\cosh\chi}{2\,|\omega|}}\phi_\Omega(\vec{x})e^{-i\omega t_{\epsilon(\omega)\epsilon}}$$

Apéndice: Modos de frecuencia positiva

$$\ln_\epsilon x = \ln|x| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(x)\epsilon$$

Ayuda

$$u = t - r_*$$
$$v = t + r_*$$
$$r_* = t = r + 2M \ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|$$
$$|U| = e^{-\frac{u}{4M}} = e^{-k_0 u}$$
$$|V| = e^{\frac{v}{4M}} = e^{k_0 v}$$

Donde $k_0 = \frac{1}{4M}$
De la transformación de u, v podemos obtener que

$$t = \frac{u+v}{2}$$

De la transformación de U, V podemos obtener que

$$\ln|U| = -k_0 u \qquad \rightarrow \qquad u = -\frac{1}{k_0}\ln|U|$$
$$\ln|V| = -k_0 v \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{1}{k_0}\ln|V|$$

Juntando estas dos definiciones

$$t = \frac{1}{2k_0}(\ln|V| - \ln|U|)$$
$$2k_0 t = \ln\left|\frac{V}{U}\right|$$

Reescribiendo

$$t = \frac{\ln|V|}{2k_0} - \frac{\ln|U|}{2k_0}$$

Usando que $\ln_\epsilon x = \ln|x| + \frac{i\pi}{2}\epsilon(x)\epsilon$
Para $\epsilon = +$

$$\ln|V| = \ln_+ V - \frac{i\pi}{2}\epsilon(V) \qquad \ln|U| = \ln_+ U - \frac{i\pi}{2}\epsilon(U)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\ln|V|}{2k_0} - \frac{\ln|U|}{2k_0} &= \frac{1}{2k_0}\left[\ln_+ V - \ln_+ U + \frac{i\pi}{2}\left(\epsilon(U) - \epsilon(V)\right)\right]\\ &= \frac{1}{2k_0}\left[\ln|V| - \ln|U|\right] - \frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{2k_0}\right)\left(\epsilon(U) - \epsilon(V)\right)\\ &= \frac{1}{2k_0}\left[\ln_+ V - \ln_+ U\right]\\ &= t_+\end{aligned}$$

Haciendo el mismo procedimiento para $\epsilon = -$

$$t_+ := \frac{1}{2k_0}\left[\ln_+ V - \ln_+ U\right] \qquad t_- := \frac{1}{2k_0}\left[\ln_- V - \ln_- U\right]$$
$$t_\epsilon = \frac{1}{2k_0}\left[\ln_\epsilon V - \ln_\epsilon U\right]$$