

Geodésica Alrededor de una Partícula con la Métrica de Schwarzschild

Manuel Angel Garcia¹ Carlos Andres Llanos¹

¹Facultad de Física
Universidad Nacional de Colombia

Clase de Métodos Geométricos

1 Conceptos Preliminares

2 Metrica de Schwarzschild

- Metrica de Minkowski
- Simbolos de Christoffel y Tensor de Curvatura
- Ecuacion de Campo de Einstein

3 Radio de Schwarzschild

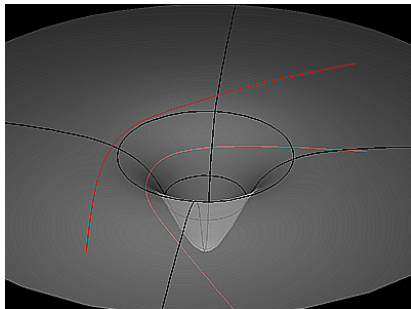
4 Ecuacion de la Geodésica

Conceptos Preliminares

Tensor

$$\epsilon_{ijk} =$$

Geodesica



Partiendo de la métrica de Minkowski en esféricas:

$$ds_{\text{Minkowski}}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Necesitamos una métrica que mantenga la forma del ángulo sólido, así que podemos multiplicarlo por una función radial:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2$$

Vamos a imponer que la métrica sea simétrica en sus componentes angulares por lo que la podemos reescribir como:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Calculamos los simbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{tr}^t = \partial_r \alpha$$

$$\Gamma_{tt}^r = e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha$$

$$\Gamma_{rr}^r = \partial_r \beta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-2\beta}$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -re^{-2\beta} \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Con los simbolos de Christoffel podemos obtener el tensor de Riemann:

$$R_{rtr}^t = \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2$$

$$R_{\theta t\theta}^t = -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha$$

$$R_{\phi t\phi}^t = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha$$

$$R_{\theta r\theta}^r = r e^{-2\beta} \partial_r \beta$$

$$R_{\phi r\phi}^r = r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta$$

$$R_{\phi\theta\phi}^\theta = \left(1 - e^{-2\beta}\right) \sin^2 \theta$$

Tomando la contracción obtenemos el tensor de Ricci:

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right]$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \quad R_{\theta\phi}$$

Métrica de Schwarzschild

Reemplazamos el tensor de Ricci en la ecuación de campo de Einstein en el vacío y contrayendo con la métrica contravariante para hallar α y β :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} e^{2(\beta-\alpha)} e^{2(\alpha-\beta)} & \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\ & - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta = 0 \\ \implies \frac{2}{r} \partial_r \alpha + \frac{2}{r} \partial_r \beta & = 0 \end{aligned}$$

Para que se cumpla esta ecuación necesitamos que $\alpha = -\beta + c$

$$\alpha = -\beta$$

Reemplazando en $R_{\theta\theta} = 0$:

$$e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha + 1) = 1 \implies \partial_r(re^{2\alpha}) = 1$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos:

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r}$$

De esta forma obtenemos que podemos escribir la métrica como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Radio de Schwarzschild

De la ecuación de la geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Como vamos a tratar el caso no relativista tenemos que $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$. Esto hace que solo sobreviva la componente Γ_{tt}^μ por lo que podemos escribir la ecuación de las geodésicas como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{tt}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Como el campo es estático ($\partial_0 g_{\mu\nu}$), Γ_{tt}^μ se simplifica como:

$$\begin{aligned}\Gamma_{tt}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_t g_{\lambda t} + \partial_t g_{t\lambda} - \partial_\lambda g_{tt}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{tt}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{tt}^{\mu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}g_{tt}$$

Podemos aplicar una perturbación a la métrica:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Reemplazando en el símbolo de Christoffel, la métrica nos queda:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{tt} &\implies \frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{tt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ &\hookrightarrow \frac{d^2x^{\mu}}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{tt} \end{aligned}$$

Recordemos que para un potencial gravitacional $\vec{a} = -\nabla\phi$

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{tt}$$

Recordemos que para un potencial gravitacional $\vec{a} = -\nabla\phi$, comparando con la ecuación anterior:

$$h_{tt} = -2\phi$$

Como $g_{tt} = \eta_{tt} + h_{tt}$ y del potencial Newtoniano para un cuerpo gravitando $\phi = -\frac{GM}{r}$ tenemos que:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \implies R_s = 2GM$$

Geodésicas de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Calculamos los símbolos de Christoffel

```
1 m = var('m')
2 M = Manifold(4, 'R^4', start_index=1)
3
4 c_spher.<t,r,th,ph> = M.chart(r't:(0,+oo) r:(0,+oo) th:(0,pi):\theta ph:(0,2*pi):\phi')
5
6 g = M.metric('g')
7
8 g[1,1], g[2,2], g[3,3], g[4,4] = (-1)*(1-2*m/r), (1-2*m/r)^(-1), r^2, r^2*sin(th)^2
9
10 print(g.christoffel_symbols_display(chart=c_spher))
11
12
13 BL.<t,r,th,ph> = M.chart(r"t r:(0,+oo) th:(0,pi):\theta ph:(0,2*pi):\phi")
14 M.default_frame() is BL.frame()
15 xi = BL.frame()[0]
16
17 xi_form = xi.down(g)
18 print(xi_form.display())
```

Símbolo de Christoffel para la métrica:

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{tr} &= -\frac{M}{2Mr-r^2} \\ \Gamma^r_{tt} &= -\frac{2M^2-Mr}{r^3} \\ \Gamma^r_{rr} &= \frac{M}{2Mr-r^2} \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= 2M-r \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= (2M-r)\sin^2(\theta) \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\end{aligned}$$

Reemplazando los símbolos de Christoffel en la ecuación de la geodésica:

$$\begin{aligned}\ddot{t} + \frac{2M}{r(r-2M)}\dot{r}\dot{t} &= 0 \\ \ddot{r} + \frac{M}{r^3}(r-2M)\dot{t}^2 - \frac{Mr\dot{r}}{r(r-2M)} - (r-2M)\dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{r} &= 0\end{aligned}$$

Intervalo Luminoide

Como estamos en un intervalo luminoide podemos hacer $ds^2 = 0$ por lo que la métrica nos queda:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = 0$$

Haciendo el reemplazo $u = \frac{1}{r}$ nos queda:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}$$

A b se le conoce como parámetro de impacto y nos determina la forma de la orbita. $b = \sqrt{27}M \rightarrow$ orbitas de circunferencia inestable. $b < \sqrt{27}M$ orbitas de caída en el centro.