Clase 1

Manuel Garcia.

February 6, 2024

1 Momento Angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L_k = \epsilon_{ijk}\hat{r}_i\hat{p}_j = +i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{r}_i\partial_j = -i\hbar\epsilon_{ijk}x_i\frac{\partial}{\partial x^j}$$
$$[L] = \hbar = d \times m \times v = m\frac{d^2}{t^2}t = Fdt = Et$$

1.1 Algebra de Lee

$$\{L_x, L_y, L_z\}$$

$$\begin{aligned} [,] : V \otimes V \quad &\rightarrow \quad V \\ (L_i, L_j) \quad &\rightarrow \quad [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \end{aligned}$$

Propiedades

- $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad \rightarrow \quad \Delta x\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$
- $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$
- $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= [i\hbar\epsilon_{ipq}x_pp_q, i\hbar\epsilon_{imn}x_mp_n] \\ &= -\hbar^2\epsilon_{ipq}\epsilon_{jmn}[\hat{x}_p\hat{p}_q, \hat{x}_m\hat{p}_n] \end{aligned}$$

Usando las propiedade spodemos escribir lo que está entre parentesis como:

$$x\{x_p[p_q, x_m]p_n + x_px_m\underbrace{[p_q, p_n]}_{=0} + \underbrace{[x_p, x_n]}_{=0}p_np_q + x_m\underbrace{[x_p, p_n]}_{=i\hbar\delta_{pn}}p_q\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \epsilon_{ipq}\epsilon_{jmn}\{-i\hbar x_pp_n\delta_{qm} + i\hbar x_mp_q\delta_{pn}\} \\ &= i\hbar\epsilon_{inq}\epsilon_{jmn}x_mp_q - i\hbar\epsilon_{ipm}\epsilon_{jmn}x_pp_n \\ &\text{Reescribiendo los indices mudos} \\ &= i\hbar\hat{x}_p\hat{p}_n \underbrace{\{\epsilon_{ipm}\epsilon_{jnm} - \epsilon_{jpm}\epsilon_{inm}\}}_{=\delta_{ij}\delta_{pn}-\delta_{in}\delta_{pj}-\delta_{ji}\delta_{pn}+\delta_{jn}\delta_{pi}} \\ &= i\hbar\{-\hat{x}_jp_i + x_ip_j\} \\ &= i\hbar(x_ip_j - x_jp_i) \\ &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \end{aligned}$$

- $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$
- $[L_x, L_z] = i\hbar L_y$
- $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$

$$\begin{aligned}[L^2, L_j] = [L_i L_i, L_j] &= L_i[L_i, L_j] + [L_i, L_j]L_i \\ &= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_i\hat{L}_k + i\hbar\epsilon_{ijk}L_k L_i \\ &= i\hbar\epsilon_{ijk}\{L_i L_k + L_k L_i\} = 0\end{aligned}$$

Podemos decir que L^2 conmuta con todas las bases del espacio vectorial.

Recordemos que $\{L_x, L_y, L_z\}$ son operadores hermiticos

Vamos a definir el operador $L_\pm = L_x \pm iL_y$ (este NO es hermitico)

$$\frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) = L_x^2 + L_y^2$$

Entonces podemos escribir L^2 como:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+)$$

- $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$
- $[L_z, L_+] = \hbar L_+$
- $[L_z, L_-] = -\hbar L_-$

Tenemos que L^2 conmuta con todos, entonces:

$$[L^2, L_\pm] = 0$$

Tenemos que $\{L^2, L_z\}$ conmutan entre sí

$$\{H, L^2, L_z\} \qquad \text{donde } H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{r}$$

El hamiltoniano es central, no depende de θ ni de ϕy como L^2 y L_z son derivadas de estas variables entonces:

$$[H, L^2] = [H, L_z] = 0$$

L^2, L_z **son constantes de movimiento.**

Como $\{H, L^2, L_z\}$ conmutan entre sí entonces tenemos una autofuncion Φ_{nlm}, como L^2, L_z son constantes de movimiento entonces l, m no van a cambiar, a estos se les conoce como numeros cuanticos.
Vamos a hacer $\{L^2, L_z\} \rightarrow |\alpha, \beta\rangle$

- $L^2 |\alpha, \beta\rangle = \hbar^2\alpha |\alpha, \beta\rangle$
- $L_z |\alpha, \beta\rangle = \hbar\beta |\alpha, \beta\rangle$

Recordemos que $[L^2, L_{@pm}] = 0$

$$L^2(L_\pm |\alpha, \beta\rangle) = L_\pm(L^2 |\alpha, \beta\rangle) = L_\pm(\hbar\alpha |\alpha, \beta\rangle) = \hbar\alpha(L_\pm |\alpha, \beta\rangle)$$

$$
\begin{aligned}
L_z(L_\pm |\alpha,\beta\rangle) &= (L_\pm L_z \pm \hbar L_\pm) |\alpha,\beta\rangle \\
&= (L_\pm \hbar\beta \pm \hbar L_\pm) |\alpha,\beta\rangle \\
&= \hbar(\beta \pm 1)(L_\pm |\alpha,\beta\rangle)
\end{aligned}
$$

Y tenemos que $L_+ |\alpha,\beta\rangle \rightarrow \hbar(\beta+1)$ y $L_- |\alpha,\beta\rangle \rightarrow \hbar(\beta-1)$
Vamos a realizar la siguiente aproximacion:

$$L_\pm |\alpha,\beta\rangle \approx C_{i,p} |\alpha,\beta \pm 1\rangle$$

Podemos hacer lo siguiente:

$$\langle\alpha,\beta| L_\mp L_\pm |\alpha,\beta\rangle = (L_\pm |\alpha,\beta\rangle)^+ (L_\pm |\alpha,\beta\rangle) = |L_\pm |\alpha,\beta\rangle|^2$$

$$\langle\alpha,\beta| L_\pm L_\pm |\alpha,\beta\rangle =$$