Clase 3

Manuel Garcia.

February 12, 2024

1

$$H^{(f)}(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{k=1}^{f} \frac{p_k^2}{2m} + V(\vec{q})$$

Su variacion:

$$dH^{(f)} = \sum_{k=1}^{f} (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k)$$

$$p\dot{q}_1 \Delta q_2 \cdots \Delta q_{3N} \Delta p_1 \Delta p_2 \cdots \Delta p_{3N} = p\dot{q}_1 \Delta\omega^{q_1}$$

Un flujo como el anterior pero con respecto a la hipersuperficie perpendicular a la coordenada $q_1 + \Delta q_1$ es

$$(p\dot{q}_q)_{q_1+\Delta q_1} \Delta\omega^{q_1} = \left(p\dot{q}_1 + \frac{\partial(p\dot{q}_1)}{\partial q_1}\Delta q_1 \right) \Delta\omega^{q_1}$$

el numeros de puntos representativos en el pequeño volumen disminuye por unidad de tiempo en la cantidad

$$-\frac{\partial(p\dot{q}_1)}{\partial q_1}\Delta q_1 \Delta\omega^{q_1} = -\frac{\partial(p\dot{q}_1)}{\partial q_1}\Delta\Lambda$$

Λ es el volumen.

Cuando se tiene en cuenta las usperficies perpendiculaes a las otras coordenadas (coordenadas generalizadas y momento canonicos conjugados),de tal manera que la tasa de cmabio en el tiempo de la densidad ρ es

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial(p\dot{q}_k)}{\partial q_k} + \frac{\partial(p\dot{p}_k)}{\partial p_k} \right)$$

Haciendo uso de las ecuaciones de hamilton obtenemos

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3N} \left(\dot{q}_k \frac{\partial\rho}{\partial q_k} + \dot{p}_k \frac{\partial\rho}{\partial p_k} \right) = 0$$

A partir de la ecuacion de un fluido incompresible

$$\rho(\vec{p}, \vec{q}; t) d\vec{p} d\vec{q}$$

Por lo tanto un elemento infitesimal de volumen $d\Lambda$ se escribe como

$$d\Lambda = d\vec{p} d\vec{q} = dp_1 dp_2 \cdots dp_{3N} dq_1 dq_2 \cdots dq_{3N}$$

$\rho(\vec{p}, \vec{q}; t)$ representa la función densidad de probabilidad de estados. En un tiempo dado, el primedio en el ahora ensable estadístico de una cantidad dinámica $A(\vec{p}, \vec{q})$ se define como

$$< A > (t) = \bar{A}(t) = \frac{\int A(\vec{p}, \vec{q}) \rho(\vec{p}, \vec{q}; t) d\vec{p} d\vec{q}}{\int \rho(\vec{p}, \vec{q}; t) d\vec{p} d\vec{q}}$$

Con condicion de normalizacion

$$\int \rho(\vec{p}, \vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} = 1$$

Teorema de Liouville:

$$\frac{\partial \rho(\vec{p}, \vec{q}; t)}{\partial t} = \{H^{(3N)}, \rho\} = \mathbf{L}\rho$$

Donde **L** es el operador de Lioville

Nos vamos a centrar en la mecanica en equilibrio, es decir cuando $\rho = \rho(\vec{p}, \vec{q})$. La ecuación de continuidad posee una primera integral que es denominada $\alpha(\vec{p}, \vec{q})$

$$\sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \alpha}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = 0$$