Clase 10

Manuel Garcia.

March 13, 2024

1 Campos Sobre Variedades Curvas

Apéndice A

Observador Acelerado de Rindler De los principios de la teoria de la relatividad especial

- Espacio de c-vectores $\mathcal{M}$

$$X \cdot X = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \qquad \text{para } X, Y \in \mathcal{M}$$

- Invariantes

$$\text{Con } \mathbb{u}, \mathbb{a} \in \mathcal{M} \quad \text{con } \mathbb{u} \text{ la c-velocidad y } \mathbb{a} \text{ es la c-aceleracion.}$$
$$\mathbb{u} \cdot \mathbb{u} = \mathbb{u}^2 = -c^2$$
$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{u} = 0$$

-

$$\mathbb{u} = \frac{dX(\tau)}{d\tau} \qquad \mathbb{u} = \gamma(\vec{u})(c, \vec{u})$$
$$\text{Con}$$
$$\gamma(\vec{u}) = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \vec{u} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$
$$\mathbb{u}^2 = \eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = (u^0, u^1, u^2, u^3) = (c\gamma, \gamma u_x, \gamma u_y, \gamma u_z)$$

Se llega a

$$\mathbb{a} = \frac{d\mathbb{u}}{d\tau} = \gamma(\vec{u})\left(\frac{d\gamma(\vec{u})}{dt}c, \quad \frac{d\gamma(\vec{u})}{dt}\vec{u} + \gamma(\vec{u})\vec{a}\right)$$

Modelo canónico de una partícula desplazándose con aceleración propia ocnstante $\vec{a} \equiv \vec{g}$ esta es la misma aceleracion propia $\mathbb{a} \cdot \mathbb{a} = \mathbb{a}^2 = (0, \vec{g}) \cdot (0, \vec{g}) = g^2$ (en el sistema inercial de la particula un instante $t = t_0$).

Podemos reescribir como

$$\begin{aligned}
\mathbb{a}^2 &= \eta_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta}; \qquad\qquad \mathbb{a} = (0, \vec{g}) \\
&= \eta_{00}(a^0)^2 + \eta_{11} a^1 a^1 \\
&= -(a^0)^2 + (a^1)^2 = |\vec{g}|^2
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{a} \cdot \mathbb{u} = -a^0 a^0 + a^1 a^1 = 0 \qquad\qquad & u^0 u^1 = u^1 u^0 \quad \to \quad u^1 u^0 - u^0 u^1 = 0 \\
-a^0 u^0 + a^1 u^1 = 0 \qquad\qquad & - g u^1 u^0 + g u^0 u^1 = 0
\end{aligned}$$

Entonces podemos plantear

$$\begin{aligned}
g u^1 = a^0 \quad &\to \quad a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = g u^1 \\
g u^0 = a^1 \quad &\to \quad a^1 = \frac{du^1}{d\tau} = g u^0
\end{aligned}$$

Reescribiendo estos terminos

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} - g\frac{dx}{d\tau} = 0 \qquad\qquad \frac{d^2 x}{d\tau^2} - g\frac{dt}{d\tau} = 0$$

Sean sus soluciones particulares

$$\begin{aligned}
t &= g^{-1} \sinh g\tau \\
x &= g^{-1} \cosh g\tau
\end{aligned}$$

Esto es una hiperbola.

$$x^2 - t^2 = g^{-2}$$