1

(a)

$$\hat{r} = \rho \sin\phi \cos\theta \hat{i} + \rho \sin\phi \sin\theta \hat{j} + \rho \cos\phi \hat{k}$$

(b)

$$\alpha = 90^\circ - \phi \qquad \beta = 90^\circ - \theta$$

Despejando θ y ϕ

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\sin\frac{\pi}{2} - \alpha = \cos\alpha \qquad \cos\frac{\pi}{2} - \alpha = \sin\alpha$$

$$\sin\frac{\pi}{2} - \beta = \cos\beta \qquad \cos\frac{\pi}{2} - \beta = \sin\beta$$

Reemplazando en $\hat{r}$

$$\hat{r} = \rho \cos\alpha \sin\beta \hat{i} + \rho \cos\alpha \cos\beta \hat{j} + \rho \sin\alpha \hat{k}$$

(c)

Coordenadas horizontales: Tomando el plano del horizonte como el plano xy y el eje cenit como el eje z positivo; β seria la coordenada acimut y α seria la altura.

Coordenadas ecuatoriales geocentricas: Tomando el plano xy como el plano ecuatorial y el eje z positivo como el norte celeste, θ seria la ascension recta y α seria la declinacion.

Coordenadas eclipticas: Tomando el plano xy como el plano ecliptico y el eje z positivo como el polo ecliptico norte; θ seria la longitud y α seria la latitud.

Coordenadas galácticas: Tomando el plano xy como el plano del circulo galáctico y el eje z positivo como el polo norte galáctico; θ seria la longitud galactica y α seria la latitud galactica.

2

(a)

$$m r_A v_A = m r_B v_B \quad \rightarrow \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{r_B}{r_A}$$

Como $r_B = 4r_A$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{4r_A}{r_A} = 4 \quad \rightarrow \quad v_A = 4v_B$$

(b)

$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \quad \rightarrow \quad \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^{3/2}$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{r_A}{4r_A}\right)^{3/2} = \frac{1}{8}$$

$$T_B = 8T_A$$

(c) El potencial gravitacional es $u = -\frac{GMm}{r}$ y para orbitas circulares tenemos que $v^2 = \frac{GM}{r}$

$$H = k + u = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{r}$$

$$H_A = -\frac{GMm}{r_A} \qquad H_B = -\frac{GMm}{r_B} = -\frac{GMm}{4r_A}$$

$$\frac{H_A}{H_B} = \frac{\frac{GMm}{r_A}}{\frac{GMm}{4r_A}} = 4$$

$$H_A = 4H_B$$

El planeta A tiene 4 veces la energia total del planeta B.

3

(a)

$$mr_a v_a = mr_p v_p \qquad \frac{r_a}{r_p} = \frac{v_p}{v_a}$$

$$\text{Como } v_a = \frac{v_p}{3}$$

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{v_p}{v_p/3} = 3$$

$$r_a = 3r_p$$

(b)

Semieje Mayor

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{4}{2} r_p = 2r_p$$

Semidistancia Focal

$$c = \frac{r_a - r_p}{2} = \frac{2r_p}{2} = r_p$$

Excentricidad

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{r_p}{2r_p} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$U_a = -\frac{GMm}{r_a} \qquad U_p = -\frac{GMm}{r_p}$$

$$\frac{U_a}{U_p} = \frac{-\frac{GMm}{r_a}}{-\frac{GMm}{r_p}} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad U_p = 3U_a$$

4

(a)

Semieje Mayor

$$a = \frac{r_A + r_B}{2} = \frac{(8+2)10^8}{2} = 5 \times 10^8$$

Semidistancia Focal

$$c = \frac{r_a - r_p}{2} = \frac{(8+2)10^8}{2} = 5 \times 10^8$$

Excentricidad

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^8} = \frac{3}{5}$$

(b) Tenemos que $a_2^3 = 125 \times 10^{24}$, $a_1^3 = 8 \times 10^{24}$ y $T_1 = 2$años. Usando la tercera ley de kepler.

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad \rightarrow \quad T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2 a_2^3}{a_1^3}}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{2^2(125 \times 10^{24})}{8 \times 10^{24}}}\text{año} = 5\sqrt{5/2}\ \text{año}$$

(c) En el periastro $v_1 = v_2$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \frac{1}{\text{año}}$$

$$v_{p2} = v_{p1} = \pi \frac{1}{\text{año}} 2 \times 10^8\text{km} = 2\pi \times 10^8 \frac{\text{km}}{\text{año}}$$

$$v_{p2} = 2\pi \times 10^8 \frac{\text{km}}{\text{año}} \frac{\text{año}}{3.15 \times 10^7 s} = \frac{20\pi}{3.15} \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{p2} = 2\pi \times 10^8 \frac{\text{km}}{\text{año}} \frac{6.68 \times 10^{-9}\text{UA}}{\text{km}} = (2\pi)(6.68) \times 10^{-1} \frac{\text{UA}}{\text{año}}$$

En el apoastro

$$m v_{a2} r_a = m v_{p2} r_p \quad \rightarrow \quad v_{a2} = \frac{v_{p2} r_p}{r_a} = \frac{v_{p2}(2 \times 10^8)}{8 \times 10^8} = \frac{v_{p2}}{4}$$

$$v_{a2} = \frac{1}{4}\left(\frac{20\pi}{3.15}\right)\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

(d) Para orbitas circulares y $m \ll M$ tenemos que $GMT^2 = r^3 4\pi^2$.

$$M = \frac{r_1^3 4\pi^2}{GT_1^2} = \frac{(2 \times 10^{11}\text{m})^3 4\pi^2}{(6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{\text{kg s}^2})(6.31 \times 10^7\text{s})^2} = 1.19 \times 10^{30}\text{kg}$$

$$M = 1.19 \times 10^{30}\text{kg} \frac{M_\odot}{1.989 \times 10^{30}\text{kg}} = 0.598 M_\odot$$

5

Tenemos que $M_T = 2.14 \times 10^{22}$kg y $R_T = 1.35 \times 10^3$km .

$$g_T = \frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{\text{kg s}^2})(2.14 \times 10^{22}\text{kg})}{(1.35 \times 10^6\text{m})^2} = 7.83 \times 10^{-1} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Para hallar la masa (M) de un planeta con el radio de la tierra ($R = 6.38 \times 10^6 m$) que tenga la misma aceleracion (g) que el planeta triton debemos igualar ambas aceleraciones y despejar M.

$$g = \frac{GM}{R^2} = g_T$$

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{GM_T}{R_T^2} \quad \rightarrow \quad M = \frac{M_T R^2}{R_T^2}$$

$$M = \frac{(2.14 \times 10^{22}\text{kg})(6.38 \times 10^6 m)^2}{(1.35 \times 10^6\text{m})^2} = 4.78 \times 10^{23}\text{kg}$$

De forma analoga para $M = 5.97 \times 10^{24}$kg

$$R = \sqrt{\frac{MR_T^2}{M_T}} = \sqrt{\frac{(5.97 \times 10^{24}\text{kg })(1.35 \times 10^3\text{km })^2}{(2.14 \times 10^{22}\text{kg })}} = 22.55 \times 10^3\text{km}$$