Clase 5

Manuel Garcia.

February 22, 2024

1 Formulación Cuántica del Teorema de Liouville

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}^{(N)}, \hat{\rho}]$$

Cuando $\hat{\rho}$ es una funcion de la energia

$$\hat{\rho} = f(\hat{H}^{(N)}) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = 0$$

dado que $[\hat{H}^{(N)}, \hat{\rho}] = 0$.

Por el contrario cuando $\hat{\rho}$ depende del tiempo

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}^{(N)}, \hat{\rho}\right] \neq 0$$

En el espacio de fase $2f$ dimensional del sistema resulta posible definir una hipersuperficie $\omega(E)$ de dimension $2f-1$, mediante la siguiente integral

$$\omega(E) = \int_{E=H(p_1,\cdots,p_{3n};q_1,\cdots,q_{2N})} d\omega$$

Si $\Delta\Lambda$ es un elemento de volumen del espacio de fase entonces un elemento d ehipersuperficie $\Delta\omega$ está definido en un espacio de fase de dimension $2f-1$. La hipersuperficie de fase $\omega(E)$ de dimensión $2f-1$ envuelve un volumen Λ en el espacio de fase de dumensión $2f$.

$$\Lambda(E) = \int_{H(p_1,\cdots,p_f;q_1,\cdots,q_f)\leq E} d\Lambda$$

Numero de microestados Tenemos E variable y V, N fijos. Existe un numero $W(E,V,N)$ que se determina en términos de la hipersuperficie $\omega(E,V,N)$

$$W(E,V,N) = \frac{\omega(E,V,N)}{\omega_0}$$

Es de esperar que las propiedades termodinámicas del sistema no dependan de la constante d eproporcionalidad ω_o^{-1}. Razon de cambio

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{W(E_2,V,N)}{W(E_1,V,N)} = \frac{\omega(E_2,V,N)}{\omega(E_2,V,N)}$$

El volumen

$$\Lambda(E,V,N) = \int_{H(p_1,\cdots,p_f;q_1,\cdots,q_f)\leq E} dq_1\cdots dq_f dp_1\cdots dp_f$$

Un cambio en la energia interna del sistema ΔE genera un cambio en el area de la hipersuperficie

$$\Delta\omega = \omega(E_2,V,N) - \omega(E_1,V,N)$$

Dando lugar a

$$\Delta\Lambda = \Lambda(E+\Delta E,V,N) - \Lambda(E,V,N) = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial E}\right)_{V,N}\Delta E$$

Por el teorema de Cavalleri

$$\Delta\Lambda = \omega(E)\Delta E$$

Entonces

$$\omega(E) = \frac{\partial\Lambda(E)}{\partial E}$$

Por lo tanto

$$W(E,V,N) = \frac{\omega(E,V,N)}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\frac{\partial\Lambda}{\partial E}$$

Volumen en el espacio de fase para el gas ideal de particulas libres

$$V = \int d^2q \qquad \to \qquad \int dq_1\cdots dq_{3N} = V^N$$

Por lo tanto

$$\Lambda(E,V,N) = V^N\int_{H(p,q)\leq E} dp_1\cdots dp_{3N} = V^N V_{3N}^{\beta}$$

$$V_{3N}^{\beta} = \int_{H(p,q)\leq E} dp_1\cdots dp_{3N}$$