Clase 10

Manuel Garcia.

March 11, 2024

1 Ensamble Estadístico Canónico de N Partículas y Ejemplos

1.1 Fluctuacion de la Energía en el Ensamble Canónico

El promedio estadistico de la energia

$$\langle E \rangle$$

Y el promedio cuadrado

$$\left\langle E^2 \right\rangle$$

en terminos de la función de particion $Q_N = Q(T, V, N)$

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_j E_j e^{-\beta E_j}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} = -\frac{1}{Q_N}\frac{\partial Q_N}{\partial \beta}$$
$$\left\langle E^2 \right\rangle = \frac{\sum_j E_j^2 e^{-\beta E_j}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} = -\frac{1}{Q_N}\frac{\partial^2 Q_N}{\partial \beta^2}$$

Donde $Q_N = \sum_j e^{-\beta E_j}$.

La fluctuacion de la energia

$$\begin{aligned}
(\langle \Delta \rangle)^2 &= \left\langle E^2 \right\rangle - \langle E \rangle^2 \\
&= \frac{1}{Q_N}\frac{\partial^2 Q_N}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Q_N^2}\left(\frac{\partial Q_N}{\partial \beta}\right) \\
&= \frac{\partial x}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)
\end{aligned}$$

Potencial Canonico

$$\log Q_N = S^{(0)} - \beta E \equiv \Phi = -\frac{1}{\kappa_B T} A = -\beta A$$

$$S^{(0)} = \sum_j p_j \log p_j$$

Luego de mucha puta algebra se llega a

$$\boxed{(\Delta E)^2 = -\frac{\partial E}{\partial \beta} = \tau^2 c}$$

Donde τ es la energia termica y c es el calor especifico. El carlor especifico en terminos del calor especifico por particula es $c = N\bar{c}$, donde $\bar{c}$ es el calor promedio especifico por particula.

$$\Delta E = \tau\sqrt{c} = \tau\sqrt{N\bar{c}}$$

E se puede escribir en terminos d ela energia promedio por particula $\bar{\epsilon}$

$$\frac{\Delta E}{\langle E \rangle} = \frac{\tau\sqrt{N}\sqrt{\bar{c}}}{N\bar{\epsilon}} = \tau\frac{\sqrt{\bar{c}}}{\bar{\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{N}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

1.2 Equivalencia entre los ensambles microcanonico y canonico

Del principio de boltzman

$$S = \kappa_B \ln W = \beta_B \ln D(E)\Delta E$$

Siendo $D(E)$ la densidad de estados y ΔE el rango de nergía contenido en el intervalor $(E - \Delta E/2, E + \Delta E/2)$. La función de partición canónica para el sistema macroscópico de N partículas también se puede definir como

$$Q_N = \sum_j e^{-E_j/\kappa_B T} = \int e^{-E/\kappa_B T} D(E) dE$$

$$\langle E \rangle = \sum_j E_j p_j = \frac{\displaystyle\int E e^{-E/\kappa_B T} D(E) dE}{\displaystyle\int e^{-E/\kappa_B T} D(E) dE}$$

Como el denominador corresponde a la funcion de particion

$$Q_N \approx e^{-U/\kappa_B T} D(U)\Delta E$$

y

$$\int E e^{-E/\kappa_B T} D(E) dE \approx e^{-U/\kappa_B T} D(U)\Delta E$$