Clase Mecánica Estadística

Manuel Garcia.

August 23, 2024

1 Ejercicios

1.1 Sistema físico 1

Un sistema de N partículas se encuentra en equilibrio térmico con un foco calorífico a temperatura T cada partícula del sistema solamente tiene acceso a dos posible estados cuánticos $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ con niveles de energía asociados $\epsilon_1 = -\epsilon$ y $\epsilon_2 = +\epsilon$, siendo el valor de ϵ conocido . Si la probabilidad de encontrar a una partícula en el estado $|\phi_1\rangle$ es 4 veces la probabilidad de encontrar a una partícula en el estado $|\phi_2\rangle$, para este sistema encontrar

- **a)** La temperatura T
- **b** La energía interna U
- **c** La entropía S
- **d** La energía interna A

Estado	Nivel de energía	Numero de ocupación	Probabilidad del estado
$\|\phi_1\rangle$	$\epsilon_1 = -\epsilon$	$n_1 = 4n_2$	$P_1 = \frac{n_1}{N} = 4P_2$
$\|\phi_2\rangle$	$\epsilon_2 = +\epsilon$	n_2	$P_2 = \frac{n_2}{N}$

$$N = n_1 + n_2 = 5n_2 \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{1}{5}N, \quad n_1 = \frac{4}{5}N$$
$$P_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{1}{5} \qquad\qquad P_2 = \frac{n_2}{N} = \frac{1}{5}$$
$$\sum_{i=1}^{1} P_i = 1 = P_1 + P_2$$

Usamos que

$$x = \beta\epsilon = \frac{\epsilon}{\kappa_B T}$$

Luego las probabilidades de encontrar a las particulas en los estados es

$$P_1 = \frac{e^{-\beta\epsilon_1}}{\sum_{i=1}^{2} e^{-\beta\epsilon_i}} = \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{4}{5} \quad \rightarrow \quad e^{-2x} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln 4$$
$$P_2 = \frac{1}{1+e^{2x}} = \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad e^{-2x} = 4 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln 4$$

Como $\frac{\epsilon}{\kappa_B T} = \frac{1}{2}\ln 4$

$$T = \frac{2\epsilon}{\kappa_B \ln 4}$$

b)

$$E = n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 \quad \rightarrow \quad \bar{\epsilon} = \frac{E}{N} = \frac{n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2}{N} = P_1\epsilon_1 + P_2\epsilon_2$$
$$E = N\bar{\epsilon}$$
$$\bar{\epsilon} = \sum_{i=1}^{2} \epsilon_i P_i = -\frac{3}{5}\epsilon \quad \rightarrow \quad E = N\bar{\epsilon} = -\frac{3}{5}\epsilon N$$

c)

$$S = NS_p$$

Donde S_p es la entropía de Gibbs

$$\begin{aligned} S_p &= -\kappa_B \sum_{i=1}^{2} P_i \ln P_i \\ &= -\kappa_B \left[\ln S - \frac{4}{5}\ln 4\right] \\ S &= \kappa_B N \left[\ln 5 - \frac{4}{5}\ln 4\right] \end{aligned}$$

1.2 Sistema Físico 2

En la sal paramagnética con N átomos, cada átomo puede encontrarse en alguno de los dos estados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ definidos respectivamente por el hecho de que el momento dipolar paramagnético del átomo tiene proyección paralela o antiparallel a un campo magnético externos uniforme B. Estos dos estados tienen niveles de energía asociados $\epsilon_1 = -\mu B$ y $\epsilon_1 = \mu B$, siendo μ el magnetos de Bohr. Asumiendo que la probabilidad de encontrar un átomo en el estado $|\phi_1\rangle$ es 3 veces la de encontrar un átomo en el estado $|\phi_2\rangle$ encuentre de este sistema

a) La temperatura

b) La magnetización

c) La energía interna

d) La entropía

a)

Estado	Nivel de energía	Numero de ocupación	Probabilidad del estado
$\lvert\phi_1\rangle$	$\epsilon_1 = -\mu B$	$n_1 = 3n_2$	$P_1 + P_2 = 1 \rightarrow P_1 = \frac{3}{4}$
$\lvert\phi_2\rangle$	$\epsilon_2 = +\mu B$	n_2	$P_2 = \frac{1}{4}$

$$P_1 = \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{2}$$
$$P_2 = \frac{1}{1+e^{2x}} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{2}$$

Ya conociendo x

$$\frac{\mu B}{\kappa_B T} = x = \frac{\ln 3}{2} \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{2\mu B}{\kappa_B \ln 3}$$

b)

$$M = N\bar{\mu}$$
$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{2} \mu_1 P_i = \frac{1}{2}\mu$$
$$M = N\frac{1}{2}\mu$$

c)

$$E = N\bar{\epsilon}$$
$$\bar{\epsilon} = \epsilon_1 P_1 + \epsilon_2 P_2 = -\frac{1}{2}\mu B$$
$$E = -\frac{1}{2}N\mu B$$

d)

$$S_p = \kappa_B \left[\ln 4 - \frac{3}{4}\ln 3\right]$$
$$S = N\kappa_B \left[\ln 4 - \frac{3}{4}\ln 3\right]$$

1.3 Sistema Físico 3

Un gas de N osciladores armónicos unidimensionales independientes en el que todos los osciladores tienen una misma frecuencia característica de oscilación ω, se encuentra a una temperatura T, de tal forma que a esta temperatura la energía térmica es exactamente la mitad del cuanto de energía $\hbar\omega$ de un oscilador ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$). Para este sistema encontrar

a) La energía interna

b) La entropía

a) La energia interna $E = N\bar{\epsilon}$

$$\bar{\epsilon} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}}\right)$$

usando que $x = \beta\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{\kappa_B T} = 2$

$$E = n\hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^2 - 1}\right) \approx 0.6565 N\hbar\omega$$

b) La entropía del sistema $S = NS_p$

$$S_p = \kappa_B \left[x - \ln\big(e^2 - 1\big) + \frac{x}{e^2 - 1}\right] = \kappa_B \left[2 - \ln\big(e^2 - 1\big) + \frac{2}{e^2 - 1}\right] = 0.456 N\kappa_B$$

Si sucede que $x = \frac{\hbar\omega}{\kappa_B T} = 4$

$$E = 0.52 N\hbar\omega \qquad\qquad S = 0.093 N\kappa_B$$

1.4 Sistema Físico 4

Considere un gas ideal de N moléculas diatónicas, tal que N es del orden del número de Avogadro. Asuma que los niveles e energía irracionales de las moléculas del gas tiene la forma de los de un oscilador armónico cuántico de frecuencia natural ω, cumpliéndose que

$$\kappa_B \theta = \hbar\omega$$

Donde θ es la temperatura vibrational.
Si la temperatura del sistema tiende a cero encuentre

a) Energía interna

b) Entropía

a) Los niveles de energía

$$\epsilon_r = \kappa_B \theta (r + \frac{1}{2}); \qquad r = 0, 1, 2, 3, \cdots, \infty, \qquad \hbar\omega = \kappa_b \theta$$

$$E = N\bar{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \bar{\epsilon} = \kappa_B \theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} \right); \qquad x = \beta \kappa_B \theta = \frac{\kappa_B \theta}{\kappa_B T} = \frac{\theta}{T}$$

Para el caso $T \rightarrow 0$ tenemos que $x \rightarrow \infty$ y por lo tanto

$$\bar{\epsilon} = \kappa_B \theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\kappa_B \theta}{2}$$

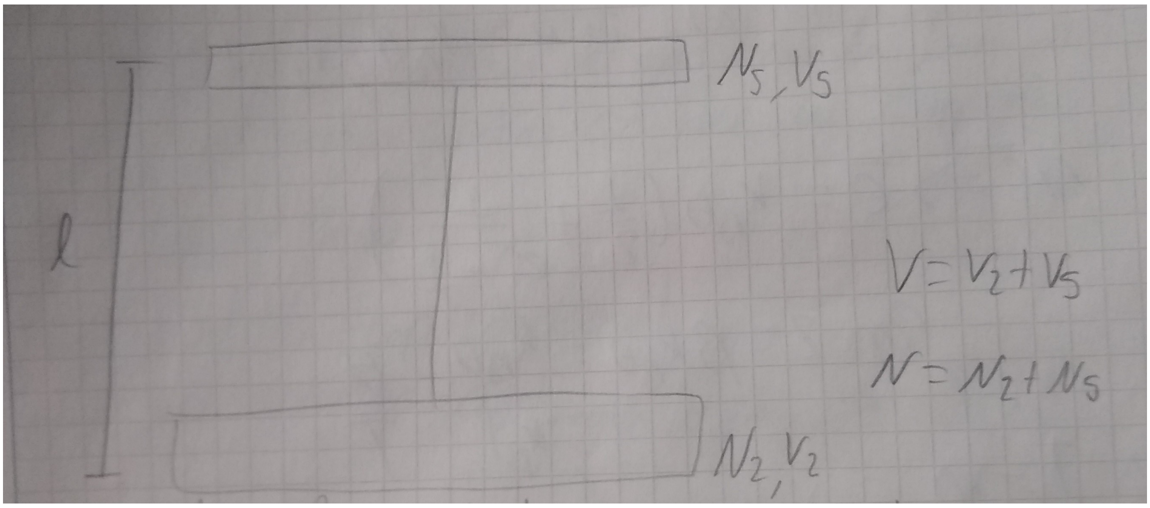
$$E = N \frac{\kappa_B \theta}{2}$$

Por lo tanto los osciladores se encuentran el estado base $r = 0$ $\quad \epsilon_0 = \frac{\kappa_b \theta}{2}$

b) $S = 0$

1.5 Sistema Físico 5

Aproximación semiclásica



Para este sistema si la razón entre la energía potencial gravitational de las partículas contenidas en el subsistema superior con respecto a la energía térmica del gas es exactamente igual a $\ln 2$, encuentre la frecuencia ρ_5/ρ_3

$$\rho_5 = \rho_3 e^{-mgl/\kappa_B T} = \rho_I e^{-x}, \qquad \text{Con } x = \frac{mgl}{\kappa_B}$$

$$x = \ln 2 \quad \rightarrow \quad \rho_3 = \rho_I e^{-\ln 2} = \frac{\rho_I}{e^{\ln 2}} = \frac{\rho_I}{2}$$

$$T = \frac{mgl}{\kappa_B \ln 2} \qquad\qquad \frac{\rho_3}{\rho_5} = \frac{1}{2}$$

1.6 Sistema físico 1

Hay Indistinguibilidad

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{2} e^{-\beta\epsilon_i} = e^{x} + e^{-x}$$

$$x = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2 \quad \rightarrow \quad Q_1 = e^{\ln 2} + \frac{1}{e^{\ln 2}} = 2.5$$

$$Q_N = \frac{1}{N!}(Q_1)^N = \frac{1}{N!}(2.5)^N$$

$$A = -\frac{1}{\beta}\ln Q_N = -\kappa_B T \ln\left[\frac{1}{N!}(2.5)^N\right] = \frac{2\epsilon}{\ln 4}[N\ln N - N - N\ln(2.5)]$$

$$A = \frac{2}{\ln 4}N\epsilon\left[\ln\frac{N}{2.5} - 1\right]$$

$$E = -\frac{3}{2}N\epsilon$$