Clase 3

Manuel Garcia.

February 19, 2024

1 Formalismo U-T

De la clase pasada

$$\underbrace{\langle 0(\beta)| \hat{A} |0(\beta)\rangle}_{\text{El vacio}} \stackrel{?}{=} < \hat{A} >= \frac{\sum_n \langle n| \hat{A} |n\rangle e^{-\beta E_n}}{Z(\beta)}$$

Teniamos que

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n\rangle$$

donde $|n\rangle$ son bases del espacio de Hilbert.

Operando con esto llegamos a

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = Z^{-1}(\beta) \quad \delta_{nm} e^{-\beta E_n}$$

Cuando empezamos a hacer el desarrollo suposimos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con bases $\{|n\rangle\}$. Ahora vamos a definir un nuevo espacio de hilbert compuesto por el espacio original y uno nuevo $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$. Ahora vamos a definir $|0(\beta)\rangle \in \bar{\mathcal{H}}$, por lo tanto

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n\rangle, \qquad \text{Donde } |n\rangle \in \mathcal{H},\ f_n(\beta) \in \tilde{\mathcal{H}}$$

Estructura de los espacios $\mathcal{H}$, $\tilde{\mathcal{H}}$

Se introduce un sistema auxiliar caracterizado por $\tilde{\hat{H}}$ tal que

$$\tilde{\hat{H}} |\tilde{n}\rangle = E_n |\tilde{n}\rangle, \qquad \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \delta_{nm}$$

Los estados en $\bar{\mathcal{H}}$ se expresan

$$|n, m\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle$$

Esto significa que

$$< \hat{A} >= \langle \tilde{m}, n| \hat{A} |n', \tilde{m}'\rangle = \langle \tilde{m}| \langle n| \hat{A} |n'\rangle |\tilde{m}'\rangle = \langle n| \hat{A} |n'\rangle \langle \tilde{m}|\tilde{m}'\rangle = \langle n| \hat{A} |n'\rangle \delta_{mm'}$$

$$< \tilde{\hat{A}} >= \langle \tilde{m}, n| \tilde{\hat{A}} |n', \tilde{m}'\rangle = \langle \tilde{m}| \tilde{\hat{A}} |\tilde{m}'\rangle \delta_{nn'}$$

Definicion de $f_n(\beta)$ en $\tilde{\mathcal{H}}$

$$f_n(\beta) := e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} Z^{-1/2}(\beta)\, |\tilde{n}\rangle$$

Entonces podemos reescribir

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_n f_n(\beta)\, |n\rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} Z^{-1/2}(\beta) \quad |\tilde{n}\rangle \otimes |n\rangle \\ &= Z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} \quad |n,\ \tilde{n}\rangle \end{aligned}$$