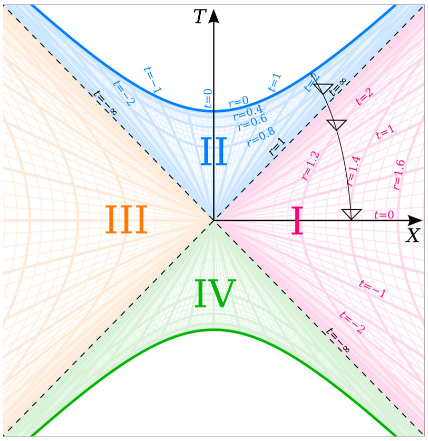
Clase Agujeros Negros Cuánticos

Manuel Garcia.

August 14, 2024

1



De la clase anterior teníamos la ecuación de Klein-Gordon y sus soluciones

$$(\Box - m^2)\phi = 0$$

$$\{\phi_\Omega^{(t)}(x)\} \qquad\qquad \phi_\Omega^{(t)}(x) = \phi_\Omega(t,x)\Theta_\epsilon(x)$$

$$\Theta_\epsilon(x) := \frac{1}{2}\{\Theta(-\epsilon U) + \Theta(\epsilon V)\} \qquad\qquad \text{Con } \epsilon = \pm 1$$

$$\phi_\Omega(t,\vec{x}) = \phi_\Omega(r) Y_{lm}(\theta,\phi)\frac{1}{\sqrt{2\,|\omega|}}e^{-i\omega t}$$

Reemplazando $\phi_\Omega(t,\vec{x})$ en la ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f(r)\frac{d\phi_\Omega(r)}{dr}\right) + \left(\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2\right)\phi_\Omega(r) = 0$$

Tenemos que la métrica $ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ab}dx^a dx^b$ donde $g_{00} = -f(r)$

Sea la definición

$$dr_* \equiv \frac{dr}{f(r)} \qquad \rightarrow \qquad r_* = \int f^{-1}(r)dr \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\hat{f}}{dr_*} = \frac{d\hat{f}}{f^{-1}(r)dr}$$

Obteniendo

$$\frac{d}{dr_*} = f(r)\frac{d}{dr}$$

Lo cual podemos reemplazar en la ecuación que teníamos

$$r^{-2}\frac{d}{dr_*}\left(r^2\frac{d}{dr_*}\phi_\Omega(r)\right)+\left[\omega^2-\left(\frac{l(l+1)}{r^2}+m^2\right)f(r)\right]\phi_\Omega(r)=0$$

Existen dos soluciones especiales $\phi^+_\Omega(r)$ y $\phi^-_\Omega(r)$, definidas por la condición de frontera

$$\begin{aligned} r &\to r_0 \quad \text{(horizonte)} \\ r_* &\to \infty \end{aligned}$$

En este limite

$$\phi^\pm_\Omega(r) \approx e^{\pm i\omega r_*}$$

reemplazando esto en $\phi_\Omega(t,\vec{x})$

$$\begin{aligned} \phi_\Omega &\to \phi^+_\Omega(t,\vec{x}) \\ \phi^+_\Omega(t,\vec{x}) = e^{i\omega r_*}e^{-i\omega t}Y_{lm}(\theta,\phi)\frac{1}{\sqrt{2\,|\omega|}} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}Y_{\theta,\phi}e^{-i\omega u} \end{aligned}$$

Donde $u := t - r_*$ y $v := t + r_*$