Clase Mecánica Estadística

Manuel Garcia.

September 23, 2024

1 Ejercicios

1.1 Ejemplo 1

a) para un gas ideal de bosones, demuestre que la entropía S^B se puede expresar como

$$S^B = k_B \sum_i \left[(n_i^{BE} + 1) \ln\bigl(1 + n_i^{BE}\bigr) - n_i^{BE} \ln n_i^{BE} \right]$$

Donde n_i^{BE} es la distribución de Bose-Einstein, tenga en cuenta que la entropía de este sistema se puede expresar como $S^B = k_B(\beta E + \ln Z^B)$ siendo Z^B la función de partición para el gas de bosones

b) Muestre que en el limite de altas temperatura la entropía S^B tiende a la entropía de Gibbs -Boltzmann y que la función de gran partición para el gas de bosones definida como

$$\ln Z^B = -\beta\mu N + \sum_i \ln Z_i^{BE}$$

Siendo Z_i^{BE} la función de Bose-Einstein, tiende a la función de partición de Gibbs- Boltzmann

Solución

a) Se tiene que

$$\ln Z^B = -\beta\mu N + \sum_i \ln Z_i^{BE} = -\beta\mu N - \sum_i \ln\Bigl(1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}\Bigr)$$

Dado que

$$n_i^{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$$

Entonces

$$\begin{gathered}
n_i^{BE} e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - n_i^{BE} - n_i^{BE} = 1 \\
n_i^{BE} e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - n_i^{BE} = 1 + n_i^{BE} \\
\ln\Bigl(n_i^{BE} e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - n_i^{BE}\Bigr) = \ln\bigl(1 + n_i^{BE}\bigr) \\
\ln n_i^{BE} + \ln\Bigl(e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - n_i^{BE}\Bigr) = \ln\bigl(1 + n_i^{BE}\bigr) \\
\beta(\epsilon_i - \mu) = \ln \frac{1 + n_i^{BE}}{n_i^{BE}} \\
\beta\epsilon_i = \beta\mu + \ln \frac{1 + n_i^{BE}}{n_i^{BE}}
\end{gathered}$$

Sustituyendo esto en la primera ecuación

$$\ln Z^B = \beta\mu N - \sum_i \ln\left(1 - \frac{n_i^{BE}}{1+n_i^{BE}}\right) = -\beta\mu N + \sum_i \ln\bigl(1+n_i^{BE}\bigr)$$

La energía interna promedio

$$\bar{\epsilon} = \sum_i \epsilon_i n_i^{BE} \to \beta\bar{\epsilon}_i = \sum_i (\beta\epsilon_i) n_i^{BE}$$

Por lo tanto

$$\beta\bar{\epsilon} = \sum_i \left(\beta\mu + \ln\frac{1+n_i toBE}{n_i^{BE}}\right) n_i^{BE}$$

$$= \sum_i \left[\beta\mu n_i^{BE} + n_i^{BE}\ln\bigl(1+n_i^{BE}\bigr) - n_i^{BE}\ln n_i^{BE}\right]$$

Sustituyendo esto en la entropía S^B

$$S^B = k_B\left(\sum_i (\beta\mu n_i^{BE} + n_i^{BE}\ln\bigl(1+n_i^{BE}\bigr) - n_i^{BE}\ln n_i^{BE}) - k_B(\sum_i \beta\mu n_i^{BE} + \ln\bigl(1+n_i^{BE}\bigr))\right)$$

$$= k_b\sum_i (n_i^{BE}+1)\ln\bigl(1+n_i^{BE}\bigr) - n_i^{BE}\ln n_i^{BE}$$

Si $T\to\infty$; $\beta = \frac{1}{k_B T} \to 0$; $n_i^{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}-1}$

$$n_i^{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}-1} \quad\to\quad n_i^{BE} \approx \frac{1}{e^{\beta\epsilon_i}} \to 0; \qquad \beta\epsilon_i \gg 0$$

Teniendo en cuenta que $\mu < \epsilon_0 \ \to\ \epsilon_i \gg \mu$

$$\beta\epsilon_i = \frac{\epsilon_i}{k_B T};\ \ \epsilon_i \gg k_B T \qquad e^{\beta(\epsilon_i-\mu)} \approx e^{\beta\epsilon_i} \gg 0$$

Luego

$$\ln\bigl(1+n_i^{BE}\bigr) \approx \ln(1) \to 0$$
$$(n_i^{BE})\ln\bigl(1+n_i^{BE}\bigr) \approx 1\ln 1 \to 0$$

Así

$$S^B = -k_B\sum_i n_i^{BE}\ln n_i^{BE}$$

$$S = -k_B\sum_i D_i\ln P_i$$

b)

$$\ln Z^B = -\beta\mu N + \sum_i \ln Z_i^{BE} = -\beta\mu N - \sum_i \ln\Bigl(1 - e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)}\Bigr)$$

Si $T\to\infty$, $\beta\to 0 \ \to\ -\beta\mu N \to 0$
Así

$$\ln Z^B = -\sum_i \ln\Bigl(1 - e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)}\Bigr)$$

Dado que $\epsilon_i \gg \epsilon_0$; $\mu < \epsilon_0$
Así $\epsilon_i \gg \mu$
Luego $e^{-\beta(\epsilon_i-\mu)} \approx e^{-\beta\epsilon_i}$
Así $\ln\bigl(1-e^{-\beta\epsilon_i}\bigr) \approx e^{-\beta\epsilon_i}$

$$\ln Z^B = -\sum_i \ln\bigl(1-e^{-\beta\epsilon_i}\bigr) = \sum_i e^{-\beta\epsilon_i} = Q_1$$

1.2 Ejemplo 2

La fluctuación relativa en el numero de partículas F para el sistema descrito por el ensamble grancanónico se puede escribir como

$$F = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{1}{\beta}\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu}}$$

a) Demuestre que F en el numero de fermiones para un gas de N fermiones es

$$F^{FD} = \sqrt{\frac{1-n^{FD}}{n^{FD}}}$$

b) Encuentre F^{FD} a $T = 0$

a)

$$\langle N \rangle = N = n_i^{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}$$

$$F_i^{FD} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{1}{\beta}\frac{\partial \langle N_i \rangle}{\partial \mu}}$$

Así

$$\frac{\partial \langle N_i \rangle}{\partial \mu} = \frac{(-1)(-\beta)e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}}{(e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}+1)^2}$$
$$= \beta\left(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu+1)}+1} - \frac{1}{(e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}+1)^2}\right)$$
$$= \beta(n_i^{FD} - (n_i^{FD})^2)$$
$$= \beta n_i^{FD}(1-n_i^{FD})$$

Sustituyendo esto en F_i^{FD}

$$F_i^{FD} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\beta}\beta n_i^{FD}(1-n_i^{FD})}}{\sqrt{(n_i^{FD})^2}}$$
$$F_i^{FD} = \sqrt{\frac{1-n_i^{FD}}{n_i^{FD}}}$$

b) Si $T \to 0 = n^{FD} = 1$

$$\to F_i^{FD} = \sqrt{\frac{1-1}{1}} = 0$$

1.3 Ejemplo 3

Para un gas ideal de N partículas simples sin espín contenido en un recipiente de volumen V a temperatura T se satisface las siguientes ecuaciones de estado

$$E = \frac{3}{2}Nk_BT$$
$$PV = \frac{2}{3}E$$

Ahora considere que las partículas del gas ideal puede ser función de spin $S = \frac{1}{2}$ o bosones de espín $S = 1$; de tal forma que los fermiones tienen la misma masa m que los bosones, cumpliéndose que cuando el gas ideal es de fermiones, la energía interna y presión son respectivamente

$$E_B \quad \text{y} \quad p_F$$

encontrar que si el gas ideas es de bosones, la energía y la presión son

$$E_B \quad \text{y} \quad P_B$$

Haciendo uso de la expresión semiclásica, en la que

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi m k_B T)^{1/2}}$$

Para dos gases ideales, el primero de N fermiones y el segundo de N bosones, contenido en un recipiente de volumen V y a la misma temperatura T, define la diferencia de energía interna

$$\Delta E = E_F - E_B$$

y la diferencia de presión

$$\Delta P = P_F - P_B$$

Entre los dos gases.

En la aproximación analítica tiene que la energía interna en un gas de partícula en espín S es

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N\lambda^3}{(2S+1)V} \right]$$

Siendo $(+)$ para fermiones ($S = \frac{1}{2}$), $(-)$ para bosones ($S = 1$) para este gas ideal se cumple que

$$PV = \frac{2}{3} E$$

Para gas de fermiones

$$E_F = \frac{3}{2} N k_B T \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{1}{(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)} (N/V)\lambda^3 \right]$$
$$E_B = \frac{3}{2} N k_B T \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{1}{(2 \cdot 1 + 1)} (N/V)\lambda^3 \right]$$

Así

$$\Delta E = E_F - E_B = \frac{3}{2} k_B T \left[\frac{1}{\sqrt{32}} \frac{1}{2} (N/V)\lambda^3 + \frac{1}{32} \frac{1}{3} (N/V)\lambda^3 \right] = \frac{3}{2} N k_B T \frac{5}{33.94} (N/V)\lambda^3$$
$$\Delta E = 0.044 N k_B T (N/V)\lambda^3$$

$$\Delta P = P_F - P_B = \frac{1}{V} \left(\frac{2}{3} E_F - \frac{2}{3} E_B \right) = \frac{1}{V} \frac{2}{3} \Delta E$$
$$\Delta P = 0.029 k_B T (N/V)^2 \lambda^3$$

b) Si $N/2$ sea fermiones y $N/2$ sea bosones, determine E y P

$$E^{\text{gas y espin}} = E_P + E_B = \frac{3}{2}(N/2) k_B T \left[1 + \frac{1}{\sqrt{32}} \frac{1}{2} \frac{1}{2} (N/V)\lambda^3 \right] + \frac{3}{2}(N/2) k_B T \left[1 + \frac{1}{\sqrt{32}} \frac{1}{3} \frac{1}{2} (N/V)\lambda^3 \right]$$

La diferencia con respecto al gas ideal de particulas sin espin

$$\Delta E = E^{espin} - E^{sin\ espin} = 0.011 N k_B T (N/V)\lambda^3$$
$$\Delta P = P^{espin} - P^{sin\ espin} = \frac{1}{V} \left(\frac{2}{3} E^{espin} - \frac{2}{3} E^{sin\ espin} \right) = \frac{1}{V} \frac{2}{3} \Delta E$$
$$\Delta P = 0.007 k_B T (N/V)^2 \lambda^3$$

$$T\lambda^3 = T\frac{1}{(T^{1/2})^3} = T^{-1/2}$$

$$\Delta E \approx \frac{1}{\sqrt{T}} \qquad \Delta P \approx \frac{1}{\sqrt{T}}$$