Clase Mecánica Estadística

Manuel Garcia.

September 19, 2024

1 Gas de Fermiones

Función de Fermi

$$F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\epsilon_f)}} = e^{\beta(\epsilon_f-\epsilon)} = e^{-\beta(\epsilon-\epsilon_f)}$$

Si se comporta como una distribución de Boltzmann $\epsilon = \epsilon_F$

$$F(\epsilon) = \frac{1}{2}$$

El estudio de $F(\epsilon)$ se centra para el caso cuando

$$\beta\epsilon_F = \frac{\epsilon_f}{kT} \gg 1$$

Para este caso se tienen tres opciones

- $\epsilon \gg \epsilon_f$, por lo cual $\beta(\epsilon-\epsilon_f) \ll 0$, lo cual conduce a que $e^{\beta(\epsilon-\epsilon_f)} \approx 0$ y entonces

$$F(\epsilon) = 1$$

- $\epsilon \gg \epsilon_f$ por lo cual $\beta(\epsilon-\epsilon_f) \gg 0$, lo cual conduce a que $e^{\beta(\epsilon-\epsilon_f)} \gg 0$ y entonces

$$F(\epsilon) = e^{-\beta(\epsilon-\epsilon_f)}$$

- $\epsilon = \epsilon_f$ lo que significa que

$$F(\epsilon) = \frac{1}{2}$$

La energía de Fermi ϵ_f^0 a temperatura $T = 0$ se calcula de la siguiente manera: La energía de cada partícula está relacionada con su momento por $\vec{p} = h\vec{k}$

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Cuando $T = 0$ todos los estados de mas baja energía se llenan hasta la energía de Fermi ϵ_f^0 que corresponde a un momento de Fermi de magnitud $p_f = \hbar k_F$ tal que

$$\epsilon_f^2 = \frac{p_f^2}{2m} = \frac{h^2 k_f^2}{2m}$$

A $T = 0$ todos los estados con $k < k_f$ están llenos y aquellos con $k > k_f$ estás vacíos.

Debido a que el número total de estados en la esfera debe ser igual al numero total de partículas acomodadas en estos estados (una partícula por estado), se sigue que

$$2\frac{V}{(2\pi)^3}\left(\frac{4}{3}\pi k_f^3\right) = N$$

$$k_f = (2\pi^2\frac{N}{V})^{1/3}$$

$$\lambda_f = \frac{2\pi}{(3\pi^2)^{1/3}}\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

Todos los estados de partícula con $\lambda = \frac{2\pi}{k} > \lambda_f$ están ocupados a $T = 0$ y aquellos con $\lambda < \lambda_f$ están vacíos

La energía de Fermi a $T = 0$ es, luego

$$\epsilon_f^0 = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$$

Ver ejercicio en las notas de classroom