

## دستگاه‌های مختصات و تغییر مختصات

### ۱- دستگاه مختصات دکارتی

معادلات  $x=a$ ،  $y=b$  و  $z=c$  در دستگاه مختصات دکارتی صفحه‌های موازی صفحات مختصات را مشخص می‌کنند.

فراخوانی بسته plots	<code>with(plots) :</code>
تعیین مشخصات ظاهری نمودارها	<code>setoptions3d (axes = normal, labels = ['x','y','z'], transparency = 0.5, style = patchnogrid )</code>
رسم نمودار $x = 1$	<code>plot3d ([1, y, z], y = -3 ..3, z = -3 ..3)</code>
رسم نمودار $y = 1$	<code>plot3d ([x, 1, z], x = -3 ..3, z = -3 ..3, color = red)</code>
رسم نمودار $z = 1$	<code>plot3d ([x, y, 1], x = -3 ..3, y = -3 ..3, transparency = 0.5)</code>
رسم نمودار $x = 1, y = 1$	<code>plot3d ([1, 1, z], y = -3 ..3, z = -3 ..3, style = patch)</code>
رسم نمودار $x = 1, z = 2$	<code>plot3d ([1, y, 2], x = -3 ..3, y = -3 ..3, style = patch)</code>
رسم نمودارهای $x = -1, y = 1$ و $y = 2, z = 1$	<code>plot3d ({[x, 2, 1], [-1, 1, z]}, x = -3 ..3, z = -3 ..3, style = patch)</code>

**نکته:** برای تعیین مشخصات ظاهری نمودارها، می‌توان به جای این که در هر دستور رسم آنها را مشخص کرد، یکبار با استفاده از دستور `setoptions3d` آنها را مشخص کرد. پس از اجرای این دستور آن مشخصه‌هایی که در دستور رسم نمودار تعیین نشوند، از طریق این دستور تعیین می‌شوند. در مثال بالا ویژگی‌های زیر برای نمودارها تعیین شده است:

- عبارت `labels` در دستور `setoptions3d` باعث می‌شود برچسب‌های سه محور به صورت تعریف شده در نمودار نمایش داده شوند.
- عبارت `transparency` نشان دهنده میزان شفافیت نمودار است و مقدار آن بین صفر تا ۱ تغییر می‌کند. در صورتی که شفافیت برابر با صفر باشد، رویه رسم شده غیر شفاف است و در صورتی که شفافیت آن برابر با ۱ باشد، رویه کاملاً شفاف است.
- عبارت `style` نشان دهنده نوع نمایش است و می‌تواند یکی از انواع `contour`، `pathnogrid`، `patch`، `point`، `hidden`، `patchcontour` یا `line` باشد.

ویژگی‌های دیگری را هم می‌توان به نمودارها اضافه کرد که در راهنمای Maple می‌توانید درباره آنها بخوانید.

**نکته:** دقت کنید که در Maple اولویت برای تعیین یک ویژگی، دستوری است که در دستور رسم مشخص شده باشد. به همین دلیل در سه نمودار آخر نوع نمودار با کمک عبارت `style = patch` مشخص شده است و نه نوعی که در دستور `setoptions3d` تعیین شده است.

**تمرین ۱:** نمودار معادله‌های زیر را یک بار در دستگاه مختصات دو بعدی و یک بار در دستگاه مختصات سه بعدی رسم کنید.

$$x^2 + 4y^2 = 16 \quad (1) \quad y + \cos(x) = 1 \quad (2)$$

## ۲- دستگاه مختصات قطبی

دستگاه مختصات قطبی در فضای دو بعدی به کار می‌رود. در این دستگاه مختصات، به هر نقطه دو مختص  $r$  و  $\theta$  نسبت داده می‌شود که در آن  $r$  طول پاره‌خطی است که نقطه را به مبدا مختصات متصل می‌کند و  $\theta$  اندازه زاویه بین قسمت مثبت محور  $x$  ها و این پاره‌خط به رادیان است. بنابراین دو دستگاه مختصات به صورت زیر به هم مربوطند:

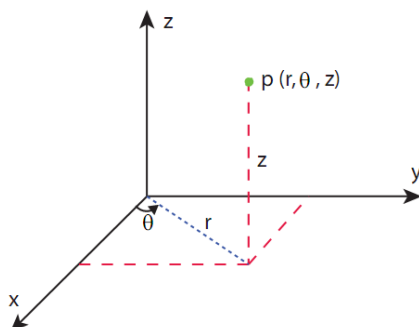
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{یا} \quad x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

برای رسم تابع  $r = f(\theta)$  از دستور polarplot که در بسته plots وجود دارد استفاده می‌کنیم. گرامر این دستور مانند بقیه دستورهای رسم نمودار است. در مثال‌های زیر نمونه‌هایی مشاهده می‌کنید.

with(plots) :	فراخوانی بسته plots
polarplot (1, theta = 0 .. 2 Pi)	رسم نمودار $r = 1$ برای $0 \leq \theta \leq 2\pi$
polarplot $\left( \left[ r, \frac{\pi}{4}, r = 0 .. 2 \right], \text{theta} = 0 .. \pi \right)$	رسم نمودار $\theta = \frac{\pi}{4}$ برای $0 \leq r \leq 2$
polarplot $\left( \left\{ \left[ r, \frac{\pi}{4}, r = 1 .. 2 \right], \left[ r, \frac{\pi}{3}, r = 0 .. 1.5 \right] \right\}, \text{theta} = 0 .. \pi, \text{thickness} = 3 \right)$	رسم دو نمودار $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$
polarplot (3 + 5 cos(theta), theta = 0 .. 2 Pi)	رسم نمودار تابع $r = 3 + 5 \cos(\theta)$
polarplot ([sin(5 theta + Pi), sin(5 theta)], theta = 0 .. Pi)	رسم نمودارهای $r = \sin(\Delta\theta + \pi)$ , $r = \sin(\Delta\theta)$

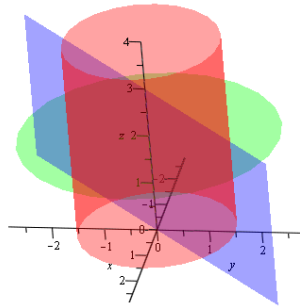
## ۳- دستگاه مختصات استوانه‌ای

در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای هر نقطه سه مختص  $r$ ,  $\theta$  و  $z$  نسبت داده می‌شود. این دستگاه مختصات تلفیقی از دستگاه قطبی در صفحه  $xy$  و مختص دکارتی  $z$  است. این سه مختص در شکل زیر نشان داده شده‌اند. مقادیر  $r$  و  $\theta$  در این دستگاه مختصات مانند آنچه در مختصات قطبی گفته شد، به مقادیر  $x$  و  $y$  مربوطند.



برای مشاهده دستگاه مختصات استوانه‌ای از دستور `coordplot` که در بسته `plots` وجود دارد، استفاده کنید.  
`coordplot3d (cylindrical)`

شکل زیر نمودار سه معادله  $r = c$  ,  $\theta = c$  ,  $z = c$  را به ترتیب با رنگ‌های سبز، آبی و قرمز نشان می‌دهد.



برای رسم نمودارها در دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌توان از دستور `cylinderplot` از بسته `plots` استفاده کرد.  
شکل کلی این دستور به صورت زیر است.

`cylinderplot(L, r1, r2, options)`

که در آن یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

- $L$  یک لیست سه تایی است که اعضای آن به ترتیب مقادیر شعاع، زاویه و  $z$  را نشان می‌دهند و  $r1$  و  $r2$  حدود متغیرهای پارامتری صفحه هستند. این پارامترها می‌توانند همان  $\theta$  و  $z$  باشند.
- $L$  یک عبارت برحسب دو متغیر است که  $r1$  و  $r2$  حدود آن متغیرها را نشان می‌دهند. در این صورت،  $L$  تابعی از دو متغیر مشخص شده در  $r1$  و  $r2$  است که نشان دهنده شعاع ( $r$ ) در مختصات قطبی است و  $r1$  و  $r2$  به ترتیب نشان دهنده زاویه ( $\theta$ ) و  $z$  هستند.

در ادامه مثال‌هایی از روش استفاده از این دستور برای رسم نمودارهای ساده را آورده‌ایم.

<code>with(plots) :</code>	فراخوانی بسته <code>plots</code>
<code>setoptions3d (axes = normal, scaling = constrained )</code>	تعیین مشخصات نمودارها
<code>cylinderplot ([1, <math>\theta</math>, <math>z</math>], <math>\theta = 0 .. 2 \text{ Pi}</math>, <math>z = 0 .. 2</math>)</code>	رسم نمودار $r = 1$ با $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2$
<code>cylinderplot ([<math>r</math>, <math>\frac{3 \text{ Pi}}{4}</math>, <math>z</math>], <math>r = -1 .. 1</math>, <math>z = 0 .. 2</math>)</code>	رسم نمودار $\theta = \frac{3\pi}{4}$ با $0 \leq z \leq 2, -1 \leq r \leq 1$
<code>cylinderplot ([<math>r</math>, <math>\theta</math>, 2], <math>r = 0 .. 2</math>, <math>\theta = 0 .. \text{Pi}</math>)</code>	رسم نمودار $z = 2$ با $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2$

دستورهای زیر نمودار رنگی ابتدای بخش را تولید می کند.

```
plot1 := cylinderplot ([ r, θ, 2 ], r = 0 .. 2.5, θ = 0 .. 2 Pi, color = green )
plot2 := cylinderplot ([ r,  $\frac{\pi}{4}$ , z ], r = -4 .. 4, z = 0 .. 3, color = blue )
plot3 := cylinderplot ([ 1.5, θ, z ], θ = 0 .. 2 Pi, z = 0 .. 4, color = red )
display ([ plot1, plot2, plot3 ], style = patchnogrid, transparency = 0.8)
```

**نکته ۱:** در دستورهای بالا، نام متغیرها نشان دهنده دستگاه مختصات نیست. در Maple اولین مختص در مختصات استوانه‌ای، معرف  $t$ ، دومین متغیر نشان دهنده  $\theta$  و سومین متغیر نشان دهنده  $z$  است. ما برای این که خواننده با مفاهیم این سه متغیر آشنا است، از این نام ها استفاده کردیم.

**نکته ۲:** دستور `display` از بسته `plots`، نمودارهای از قبل تعریف شده را در یک دستگاه مختصات رسم می کند. در این دستور می توان ویژگی های مشترکی برای همه نمودارها تعریف کرد.

مثال های زیر روش استفاده از دستور `cylinderplot` در حالتی که  $L$  یک عبارت است، را نشان می دهد.

<code>with(plots) :</code>	فراخوانی بسته <code>plots</code>
<code>setoptions3d (axes = normal, scaling = constrained )</code>	تعیین مشخصات نمودارها
<code>cylinderplot ( 1 + cos(t), t = 0 .. 2 Pi, z = 0 .. 2)</code>	رسم نمودار $r = 1 + \cos(t)$
<code>cylinderplot ( a cos(t), t = 0 .. Pi, a = 0 .. 2)</code>	رسم نمودار $r = z \cos(\theta)$ با $0 \leq z \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$

برای رسم نمودارها در دستگاه مختصات استوانه‌ای می توان از دستورهای `plot3d` و `implicitplot3d` هم استفاده کرد. در این صورت باید در دستور، با استفاده از عبارت `coords = cylindrical` دستگاه مختصات را به استوانه‌ای تغییر داد. در ادامه مثال هایی را آورده ایم.

<code>plot3d ( 1 + cos(θ), θ = 0 .. 2 Pi, z = -3 .. 3, coords = cylindrical )</code>	رسم نمودار $r = 1 + \cos(\theta)$
<code>plot3d ([ 1 - 2 sin(3 θ), θ, z ], θ = 0 .. 2 Pi, z = -3 .. 3, coords = cylindrical, grid = [ 60, 60])</code>	رسم نمودار $r = 1 - 2 \sin(3\theta)$
<code>plot3d ( height, angle = 0 .. 2 π, height = -5 .. 5, coords = cylindrical, title = CONE )</code>	رسم نمودار $r = z$ که در آن نام متغیر $z$ به <code>height</code> تغییر کرده است.
<code>plot3d ( angle, angle = 0 .. 2 π, height = -5 .. 5, coords = cylindrical, title = spiral )</code>	رسم نمودار $r = \theta$ که در آن نام متغیر $\theta$ به <code>angle</code> تغییر کرده است.
<code>implicitplot3d ( z = r, r = 0 .. 3, theta = 0 .. 2 Pi, z = 0 .. 3, coords = cylindrical, grid = [ 20, 20, 20])</code>	رسم نمودار $r = z$

نکته: دقت کنید در دستورهایی رسم نمودار، برای تعیین حدود متغیرها، باید ترتیب آنها حفظ شود. به عبارت دیگر برای Maple اولین متغیری که دامنه آن در دستور plot3d با مختصات استوانه‌ای مشخص می‌شود، زاویه و متغیر دوم، Z را نشان می‌دهد. در دستور implicitplot3d هم متغیر اول، شعاع، متغیر دوم زاویه و متغیر سوم، Z را نشان می‌دهد.

**تمرین ۳:** نمودارهای زیر را یک بار در دستگاه مختصات دو بعدی و یک بار در دستگاه مختصات سه بعدی رسم کنید. سپس توضیح دهید دو نمودار رسم شده چه رابطه‌ای با هم دارند.

$$r = \cos(2\theta) \quad (۱)$$

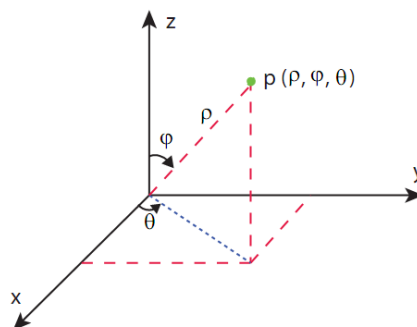
$$r \cos(\theta) = 1 \quad (۲)$$

$$r = z \quad (۳)$$

$$(۴)$$

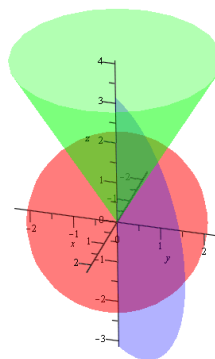
#### ۴- دستگاه مختصات کروی

در این دستگاه مختصات محل نقطه P در فضا به وسیله دو زاویه و یک طول مشخص می‌شود. مختص اول که با  $\rho$  نشان داده می‌شود، طول پاره خط OP و همواره مثبت است، مختص دوم، که با  $\varphi$  نشان داده می‌شود، زاویه OP با قسمت مثبت محور Z است. این متغیر مقادیر بین صفر تا  $\pi$  را اختیار می‌کند. مختص سوم، همان زاویه  $\theta$  در مختصات قطبی است. شکل زیر این سه مختص را نشان می‌دهد.



برای مشاهده دستگاه مختصات کروی از دستور coordplot که در بسته plots وجود دارد، استفاده کنید.  
`coordplot3d (spherical)`

شکل زیر نمودار معادلات  $\varphi = c$  ,  $\theta = c$  ,  $\rho = c$  را به ترتیب با رنگ‌های سبز، آبی و قرمز نشان می‌دهد.



رابطه‌های زیر مختصات دکارتی و کروی را به هم مربوط می‌کنند:

$$x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \quad z = \rho \cos(\varphi)$$

نکته: در Maple مختصات کروی با سه تایی  $(r, \theta, \phi)$  تعریف شده است که در آن به جای  $\rho$  از  $r$  استفاده می شود و جای دو مختص  $\phi$  و  $\theta$  با هم عوض شده است.

برای رسم نمودار در دستگاه مختصات کروی از دستور `sphereplot` از بسته `plots` استفاده می شود. شکل کلی این دستور به صورت زیر است:

`sphereplot(L, r1, r2, options)`

در این دستور هم مشابه دستور `cylinderplot` مقدار  $L$  به دو صورت مشخص می شود:

- $L$  به صورت عبارتی برحسب دو متغیر داده می شود که دامنه آنها در  $r1$  و  $r2$  مشخص شده است. در این صورت عبارت  $L$  مقادیر شعاع ( $\rho$ ) را برحسب  $\theta$  و  $\phi$  معرفی می کند و  $r1$  و  $r2$  به ترتیب حدود  $\theta$  و  $\phi$  را نشان می دهند.
- $L$  به صورت یک لیست سه تایی داده می شود که در آن اولین عضو، مقدار شعاع ( $\rho$ )، دومین عضو مقدار  $\theta$  و سومین عضو مقدار  $\phi$  را برحسب دو پارامتر که دامنه آنها در  $r1$  و  $r2$  مشخص شده است، را نشان می دهند.

در مثال های زیر روش استفاده از این دستور نشان داده شده است.

<code>sphereplot ([ 1, theta, phi], theta = 0 .. Pi, phi = 0 .. Pi)</code>	رسم نمودار $\rho = 1$ با $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi$
<code>sphereplot ([ 1, theta, phi], theta = 0 .. <math>\frac{\pi}{3}</math>, phi = 0 .. Pi)</code>	رسم نمودار $\rho = 1$ با $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \phi \leq \pi$
<code>sphereplot ([ sin(t), t, s], t = 0 .. Pi, s = 0 .. <math>\frac{\pi}{2}</math>)</code>	رسم نمودار $\rho = \sin(\theta)$ که در آن نام متغیر $\theta$ به $t$ و نام متغیر $\phi$ به $s$ تغییر کرده است.
<p>اجرای دستورهای زیر نمودار رنگی ابتدای بخش را تولید می کند.</p> <pre>plot1 := sphereplot ([ 2, <math>\theta</math>, <math>\phi</math>], <math>\theta = 0 .. 2 \text{ Pi}</math>, <math>\phi = 0 .. \text{Pi}</math>, color = red) plot2 := sphereplot ([ <math>\theta</math>, <math>\frac{\text{Pi}}{4}</math>, <math>\phi</math>], <math>\theta = 0 .. \text{Pi}</math>, <math>\phi = 0 .. \text{Pi}</math>, color = blue) plot3 := sphereplot ([ <math>s</math>, <math>\theta</math>, <math>\frac{\text{Pi}}{6}</math>], <math>\theta = 0 .. 2 \text{ Pi}</math>, <math>s = 0 .. \text{Pi}</math>, color = green) display ([plot1, plot2, plot3], axes = normal, transparency = 0.7, scaling = constrained, style = patchnogrid)</pre>	
<code>sphereplot ([ 1, 2], t = 0 .. 2 Pi, s = 0 .. <math>\frac{\text{Pi}}{2}</math>, style = line, axes = normal)</code>	رسم کره های $\rho = 1$ و $\rho = 2$
<code>sphereplot ( sin(2 phi), theta = 0 .. Pi, phi = 0 .. Pi)</code>	رسم نمودار $\rho = \sin(2\phi)$

برای رسم نمودارها در مختصات کروی می توان از دستورهای `plot3d` و `implicitplot3d` هم استفاده کرد. در این صورت باید دستگاه مختصات را با عبارت `coords=spherical` در دستور معرفی کرد. در ادامه نمونه هایی را آورده ایم.

<code>implicitplot3d(r<sup>2</sup> = 1 + r sin(<math>\phi</math>) cos(<math>\theta</math>), r = 0 .. 2, <math>\theta = 0 .. 2 \pi</math>, <math>\phi = 0 .. \pi</math>, coords = spherical, grid = [25, 25, 25])</code>	رسم نمودار معادله $\rho^2 = 1 + \rho \sin(\phi) \cos(\theta)$
---	---



$\text{plot3d}\left(\sin(\varphi) \cos\left(\theta + \frac{\text{Pi}}{6}\right), \theta = 0.. \text{Pi}, \varphi = 0.. \frac{\text{Pi}}{2}, \text{coords} = \text{spherical}\right)$	رسم نمودار $\rho = \sin(\varphi) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$
$\text{plot3d}([r, s, \text{Pi}, 1], s = -5..5, r = -6..6, \text{coords} = \text{spherical})$	رسم نمودار سطح پارامتری شده $\rho = r, \theta = s.\pi, \varphi = 1$

**تمرین ۴:** معادله  $r^2 + z^2 = 4r \cos(\theta) + 6r \sin(\theta) + 2z$  یک کره را در دستگاه مختصات استوانه‌ای نشان می‌دهد. با استفاده از دستورهای Maple این معادله را به معادله‌ای در دستگاه مختصات دکارتی تبدیل کنید و مختصات مرکز و اندازه شعاع کره را به دست آورید. (راهنمایی: برای تعیین مرکز کره با استفاده از دستور sphere در بسته geom3d ابتدا کره را معرفی کنید و سپس با استفاده از دستور detail مختصات مرکز و اندازه شعاع آن را به دست آورید).

#### ۵- تغییر مختصات (تمرین در خانه)

برای تغییر مختصات در دستگاه‌های دو یا سه بعدی می‌توان از فرمولهای تغییر مختصات و دستور جایگذاری (subs) استفاده کرد. علاوه بر آن، دستور chagneoord که در بدنه Maple وجود دارد، می‌تواند عبارت‌های داده شده در دستگاه مختصات دکارتی را به دستگاه مختصات دلخواه تبدیل کند. شکل کلی این دستور به صورت زیر است:

**changecoords(expr, vars, coord, new\_vars)**

در این دستور، expr عبارتی در دستگاه مختصات دکارتی (دو یا سه بعدی)، var لیست متغیرها در این دستگاه، coords نام دستگاه مختصات جدید و new\_vars لیست متغیرها در دستگاه مختصات جدید را نشان می‌دهد.

نمونه‌هایی از اجرای این دستور در ادامه آمده است.

$\text{changecoords}(x, [x, y], \text{polar}, [r, \theta])$	تغییر مختصات به قطبی برای عبارت X
$\text{changecoords}(z, [x, y, z], \text{spherical}, [\rho, \theta, \varphi])$	تغییر مختصات به کروی برای عبارت X . Z
$\text{changecoords}(x^2 + y^2 + z, [x, y, z], \text{cylindrical}, [r, \theta, z])$ <i>simplify(%)</i>	تغییر مختصات به استوانه‌ای برای $x^2 + y^2 + z$ ساده سازی حاصل اجرای دستور بالا

در Maple دستگاه مختصات پیش فرض، دستگاه مختصات دکارتی است. بنابراین همه محاسبات در این دستگاه انجام می‌شود. برای تغییر دستگاه مختصات در زمان کارکردن با ساختمان داده بردار می‌توان از دستور SetCoordinates که در بسته Student[VectorCalculus] و VectorCalculus وجود دارد، استفاده کرد. برای تعیین مختصاتی که بردار v در آن مختصات تعریف شده است، دستور GetCoordinates از همان بسته‌ها استفاده می‌شود. مثال‌های زیر روش استفاده از این دستور و کاربرد آن را نشان می‌دهند.

$\text{SetCoordinates}(\text{polar})$ $a := \left\langle 1, \frac{\text{Pi}}{2} \right\rangle$	تغییر دستگاه مختصات به قطبی معرفی بردار a در این دستگاه مختصات
---	---



$SetCoordinates(spherical)$ $b := \left\langle 2, \frac{\pi}{3}, 0 \right\rangle$	تغییر دستگاه مختصات به کروی معرفی بردار $b$ در این دستگاه مختصات
$GetCoordinates(a)$ $GetCoordinates(b)$	به دست آوردن دستگاه مختصاتی که بردار $a$ در آن تعریف شده است. به دست آوردن دستگاه مختصاتی که بردار $b$ در آن تعریف شده است.

تمرین ۵: معادله محل تقاطع کره  $\rho = 2$  و مخروط  $\theta = \frac{\pi}{4}$  را به دست آورید.