بسمه تعالی

پروژه کلاسی درس نرم افزر ریاضی۲

نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۷–۱۳۹۸ گروه علوم کامپیوتر

خم ها در فضای دو و سه بعدی **۹۸/۰۱/۱۸**

۱- خم‌ها

یک خم تابعی به صورت $r: IR \to IR^n$ است. در این بخش با خم‌های دو و سه بعدی (که برای آنها $n=2,3$) کار می‌کنیم. نمودار خم بالا که در فضای n بعدی رسم می‌شود، مجموعه نقطه‌هایی مانند A است که به ازای یک مقدار $t \in IR$، $r(t)=A$ باشد. در بعضی مواقع، از این نمودار به عنوان اثر یا رد[1]خم یاد می‌شود. پس، نمودار یک خم با نمودار تابع از نظر مفهومی تفاوت دارد. البته نمودار یک تابع $f: IR \to IR$ را می توان به صورت خم $r: IR \to IR^2$ در نظر گرفت که در آن $r(t) \to (t, f(t))$.

برای معرفی یک خم تابع، تابع مربوط به آن را تعریف می‌کنیم. در برخی بسته‌های Maple مانند بسته plots، می‌توان خم را به صورت تابعی که یک لیست ۲ یا ۳ عضوی را به یک عدد نسبت می‌دهد، مشخص کرد. اما در برخی بسته‌های تخصصی‌تر، مانند VectorCalculus و Stucent[VectorCalculus] لازم است که تابع معرف خم به صورت برداری معرفی شود.

مثال:

معرفی خم R به صورت لیست	$R := t \to [t, t\sin(t), t^2]$
معرفی خم f به صورت بردار	$R2 := t \to \langle t, t^2, 2\cos(t) \rangle$

برای رسم نمودار یک خم از دستورهای spacecurve یا tubplot که در بسته plots وجود دارند، استفاده می‌شود. ورودی این دستورها مانند سایر دستورهای رسم در بسته plots است. در واقع، شکل کلی دستور به صورت زیر است:

```
spacecurve(sc, r, opts)
```

که در آن sc لیست یا آرایه‌ای است که خم را در فضای سه بعدی نشان می‌دهد، r دامنه تغییرات متغیر خم است و opts ویژگی‌های نمودار است که مانند دستورهای رسم دیگر این بسته تعریف می‌شود و با استفاده از آن می‌توان رنگ، ضخامت، نوع خط نمودار، ویژگیهای محورهای مختصات و سایر ویژگی‌های نمودار را تعیین کرد.

دستور tubeplot برای رسم خم از یک لوله با ضخامتی که کاربر تعیین می‌کند، استفاده می‌شود. برتری این دستور به دستور قبل، این است که با استفاده از این دستور، خم دارای ضخامتی می‌شود و در مواردی که قسمتی از هم از روی قسمت دیگر عبور می‌کند، نمودار حاصل این موضوع را بهتر نشان می‌دهد. این دستور به شکل زیر است:

```
tubeplot(C, opts)
```

که در آن C لیستی از یک یا چند خم و opts مجموعه‌ای از ویژگی‌ها است. برای مشخص کردن ضخامت نمودار (لوله) از عبارت radius = r در دستور استفاده می‌کنیم که در آن r می‌تواند یک عدد یا تابعی از متغیر خم باشد.

مثال:

---
[1] trace

فراخوانی بسته plots	$with(plots)$
معرفی خم	$R1 := t \to [\cos(t), \sin(t), t]$
رسم خم با استفاده از دستور spacecurve	$spacecurve\,(R1(t), t = 0\,..3\,\mathrm{Pi})$
رسم خم با استفاده از دستور tubeplot با شعاع ثابت	$tubeplot\,(R1(t), t = 0\,..\mathrm{Pi}, radius = 0.25)$
رسم خم با استفاده از دستور tubeplot با شعاع متغیر	$tubeplot\left(R1(t), t = 0\,..\mathrm{Pi}, radius = \frac{1}{4}(\mathrm{Pi} - t)\right)$

نکته: خم‌های معرفی شده به این دستورها باید حتما سه بعدی باشند. برای رسم یک خم دو بعدی کافی است مختص سوم آن را برابر با صفر قرار دهید. در بخش‌های بعد نشان می‌دهیم که می‌توانیم خم‌های دو بعدی را با استفاده از دستورهای بسته Student[VectorCalculus] به صورت مستقیم رسم کنیم.

با استفاده از این دستورها می‌توان خم‌های جالبی رسم کرد. در هندسه، زمینه‌ای به نام نظریه گره‌ها وجود دارد. در ادامه چند گره جالب را رسم می‌کنیم.
(این خم گره سه خم[۲] نام دارد.)

$spacecurve\,([(2 + \cos(1.5\,t))\cos(t), (2 + \cos(1.5\,t))\sin(t), \sin(1.5\,t)], t = 0\,..4\,\mathrm{Pi})$

$tubeplot\,([(2 + \cos(1.5\,t))\cos(t), (2 + \cos(1.5\,t))\sin(t), \sin(1.5\,t)], t = 0\,..4\,\mathrm{Pi})$

$tubeplot\,([(2 + \cos(1.5\,t))\cos(t), (2 + \cos(1.5\,t))\sin(t), \sin(1.5\,t)], t = 0\,..4\,\mathrm{Pi}, radius = 0.25)$

این خم، خم چنبره‌ای نام دارد.

$tubeplot\,([(8 + \sin(10\,t))\cos(t), (8 + \sin(10\,t))\cdot\sin(t), \cos(10\,t)], t = 0\,..4\,\mathrm{Pi}, numpoints = 200, radius = 2)$

تمرین۱: خم $(\sin(t), e^t, t)$ را با استفاده از دستور spacecurve روی بازه $[-1.5, 1.5]$ رسم کنید. حالا محورهای مختصات را به صورت normal روی خم نمایش دهید و با چرخاندن نمودار به دست آمده، بررسی کنید که تصویر خم در دو صفحه xz و yx مشابه نمودار چه تابعی است. نتیجه را با استفاده از ضابطه خم تفسیر کنید.

تا کنون خم‌ها را به صورت مستقیم تعریف کردیم. اما همان طور که اشاره شد، نمودار یک تابع $f : IR \to IR$ هم یک خم است. حالا دستورهای زیر را اجرا کنید.

$f := x \to x^2$
$spacecurve\,([t, f(t), 0], t = -5\,..5, axes = normal)$
$spacecurve\,([5\,t, f(5\,t), 0], t = -5\,..5, axes = normal)$

مشاهده می‌کنید که نمودار آنها در ظاهر بر هم منطبق است.
برای نشان دادن این موضوع دستور زیر را اجرا کنید.

$spacecurve\,(\{[t, f(t), 2], [2\,t, f(2\,t), 0]\}, t = -2\,..2, axes = normal)$

اگر نمودار حاصل را طوری دوران دهید که محور z ها رو به شما باشد، مشاهده می‌کنید که قسمتی از دو نمودار بر هم منطبق هستند. اما ضابطه آنها با هم تفاوت دارد. علت این تناقض، نقش متغیر t در نمودار خم است. در واقع، وقتی ذره‌ای در نظر بگیرید که مسیر حرکت آن روی خم تعریف شده است، در هر زمان t ذره در مکان‌های مختلفی از دو خم قرار می‌گیرد.

[۲] trifoil

بنابراین، این دو خم با وجود این که با استفاده از یک تابع معرفی شده‌اند و اثر (نمودار) آنها هم روی هم منطبق شده است، متفاوت هستند.

تمرین۲: دو ذره روی خم‌های $R_1(t)=(t-1,2t-2,(t-1)^2)$ و $R_2(t)=(\sin(t),t,t)$ حرکت می‌کنند. نمودار این حرکت این دو ذره را رسم کنید و بررسی کنید با هم تقاطع دارند یا نه. حالا زمان وقوع تصادف بین دو ذره را به دست آورید. آیا امکان دارد؟

تمرین ۳: خم‌ها را می توان به صورت محل تقاطع دو رویه هم در نظر گرفت. با استفاده از Maple نمودارهایی رسم کنید که نشان دهد خم $x(t)=۲t, y(t)=۳t, z(t)=۴t$ محل تقاطع رویه‌های $z=\frac{۴}{۳}y$ و $z=۲x$ است.

برای رسم خم‌ها می‌توان از دستور SpaceCurve که در بسته Student[VectorCalculus] وجود دارد هم استفاده کرد. تفاوت عمده این دستور با دستور spavecurve از بسته plots، نوع خم ورودی است. در دستور SpaceCurve ورودی به صورت برداری داده می‌شود. علاوه بر آن، در این دستور می‌توان خم دو بعدی را هم معرفی و رسم کرد. مثال‌های زیر روش استفاده از این دستور را نشان می‌دهد.

$with(Student[VectorCalculus])$
$SpaceCurve(\langle t, t^2\rangle, t=0..2)$
$R := t \to \langle \sin(t), \cos(t), t\rangle$
$SpaceCurve(R(t), t=0..\mathrm{Pi})$

۲- سرعت و شتاب

اگر ذره‌ای روی خم $R(t)=(x(t),y(t),z(t))$ حرکت کند، $R'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ نشان دهنده سرعت و $R''(t)=(x''(t),y''(t),z''(t))$ نشان دهنده شتاب آن است. اندازه شتاب و سرعت ذره هم به ترتیب اندازه بردارهای سرعت و شتاب است. برای محاسبه مشتق یک بردار از دستور diff که در بسته Student[VectorCalculus] وجود دارد استفاده می‌کنیم. شکل کلی این دستور به صورت diff(**f, v**) است که در آن f یک بردار یا عبارت جبری است و v نام متغیری است که بر حسب آن مشتق گرفته می‌شود. اگر خم به صورت تابعی برداری تعریف شده باشد، برای محاسبه مشتق آن می‌توان از دستور D استفاده کرد.

مثال: بردار سرعت و شتاب و اندازه سرعت و شتاب ذره‌ای که روی خم $R(t)=(t\sin(t),t\cos(t),t)$ حرکت می‌کند را در لحظه t به دست آورید.

$with(Student[VectorCalculus])$	فراخوانی بسته
$Ra := \langle t\sin(t), t\cos(t), t\rangle$	تعریف بردار
$va := diff(Ra, t)$	محاسبه بردار سرعت
$Norm(va)$	محاسبه طول بردار سرعت
$aa := diff(va, t)$	محاسبه بردار شتاب
$Norm(aa)$	محاسبه طول بردار شتاب

تمرین۴: خم $r(t)=(t,t^2,t^3)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید برای این خم $v(t).r(t)=\frac{1}{2}.\frac{d}{dt}(r^2(t))$. دقت کنید این رابطه برای هر خم درست است.

۳- طول خم

برای محاسبه طول خم از دستور ArcLength که در بسته Student[VectorCalculus] وجود دارد استفاده می‌کنیم. شکل کلی این دستور به صورت زیر است

ArcLength(**C**, **interval**, output = **output_type**)

که در آن C یک بردار معرف خم در فضای دو یا سه بعدی و interval نشان دهنده بازه مورد محاسبه است. خروجی این دستور به یکی از شکل‌های value یا integral است که در مقابل عبارت output اضافه می‌شود. نمونه اجرای این دستور را در مثال‌های زیر مشاهده می‌کنید.

$ArcLength\left(\langle\cos(t), \sin(t), t\rangle, 0..6\,\pi, output = integral\right)$
$ArcLength\left(\langle\cos(t), \sin(t)\rangle, 0..\mathrm{Pi}\right)$

۴- دستگاه TNB(تمرین در خانه)

به هر نقطه از خم می‌توان یک دستگاه مختصات متشکل از سه بردار یکه متعامد نسبت داد. این دستگاه برخلاف دستگاه مختصات دکارتی، با خم حرکت و دوران می‌کند. بردارهای تشکیل دهنده این دستگاه عبارتند از

- بردار یکه مماس T که هم راستا و همجهت بردار سرعت خم است. مقدار آن برابر با $\frac{v(t)}{||v(t)||}$ است.
- بردار یکه نرمال N که عمود بر خم است و جهت آن به سمت جهتی است که خم می‌چرخد. برای محاسبه این بردار از رابطه $N=\frac{T'(t)}{||T'(t)||}$ استفاده می‌شود که در آن مشتق‌ها نسبت به t محاسبه می‌شود.
- بردار یکه نرمال دوم B که با دو بردار قبل یک دستگاه راستگرد درست می‌کند. برای محاسبه این بردار از رابطه $B=T\times B$ استفاده می‌شود.

برای ساختن این بردارها می‌توان از روش مشتق‌گیری مستقیم استفاده کرد. علاوه بر آن، دستورهای زیر از بسته Student[VectorCalculus] استفاده کرد.

برای محاسبه بردارهای T ، N و B به ترتیب از دستورهای TangentVector ، PrincipalNormal و BiNormal استفاده می‌شود. شکل کلی این دستورها به صورت زیر است.

TangentVector(**C**, **t**, **opts**)
PrincipalNormal(**C**, **t**, **opts**)
Binormal(**C**, **t**, **opts**)

در این دستورها C یک بردار دو یا سه بعدی، t متغیر (اختیاری) و opts ویژگی‌های خروجی است. از جمله ویژگی‌های خروجی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- نوع خروجی دستور با استفاده از عبارت output مشخص می‌شود. خروجی این دستور به یکی از شکل‌های value، plot یا animation است.
- خروجی این دستور در حالت کلی بردار یکه نیست. برای این که بردار یکه به عنوان خروجی به دست آید، از عبارت normalized = true / false استفاده می‌شود. در حالت true بردار یکه و در حالت false یا زمانی که اشاره‌ای به آن نشود، بردار یکه نخواهد بود.
- برای مشخص کردن دامنه خم از عبارت range = a..b استفاده می‌شود که در آن خم روی بازه $[a,b]$ رسم می‌شود.
- سایر ویژگی‌های نمودار را می‌توان با عبارت‌های curveoptions یا vectoroptions مشخص کرد. برای مشاهده جزییات از راهنمای Maple استفاده کنید.

در مثال‌های زیر نمونه‌هایی از اجرای این دستورها را مشاهده می‌کنید.

$with(Student[VectorCalculus])$	فراخوانی بسته
$Ra := \langle t\sin(t), t\cos(t), t\rangle$	معرفی بردار
$TangentVector(Ra)$	بردار مماس
$TangentVector(Ra, normalized = true)$	بردار مماس یکه
$TangentVector(Ta, output = animation)$	خروجی دستور انیمیشنی است که نحوه تغییر بردار T را نشان می‌دهد.
$Binormal(Ta, output = plot, range = 0..2\ \mathrm{Pi})$	نمودار خم و بردار موازی با B را برای خم داده شده رسم می‌کند. بردار لزوما یکه نیست.
$PrincipalNormal(\langle t, t^2, t^3\rangle, range = -2..2, output = plot)$	نمودار خم و بردار موازی با N را برای خم داده شده رسم می‌کند. بردار لزوما یکه نیست.
بردار N را برای خم داده شده رسم می‌کند. به تفاوت این نمودار و نمودار حاصل از دستور قبل دقت کنید. $PrincipalNormal(\langle t, t^2, t^3\rangle, range = -2..2, output = plot, normalized = true)$	

برای محاسبه و رسم دستگاه TNB از دستور TNBFrame استفاده می‌شود. خروجی این دستور هر سه بردار T، N و B به یکی از شکل‌های value، plot یا animation است. در این دستور می‌توانید هر یک از بردارهای T، N و B را در خروجی حذف کنید. برای این کار به ترتیب از عبارت‌های tangent = *true/false*، normal = *true/false* و binormal = *true/false* استفاده می‌شود. در حالت پیش فرض همه این عبارات برابر با true هستند. برای تعریف ویژگی‌های سه بردار و خم از عبارت‌های tangentoptions = *list*، normaloptions = *list* ، binormaloptions = *list* و curveoptions = *list* استفاده می‌شود. در مثال‌های زیر روش استفاده از این دستور آمده است. دستورهای زیر را در ادامه دستورهای بالا تایپ کنید.

$TNBFrame(Ta, output = plot)$	رسم دستگاه TNB برای خم Ta
$TNBFrame(\langle t\sin(t), t\rangle, output = plot)$	رسم بردارهای T و N و خم دو بعدی داده شده
$TNBFrame(\langle t\sin(t), t, t\rangle, output = animation)$	انیمیشن نشان دهنده نحوه حرکت دستگاه TNB روی خم داده شده
رسم نمودار خم و بردارهای T و B با رنگ‌های داده شده برای بردار T و خم	

```
TNBFrame(⟨t sin(3 t), t cos(3 t), t⟩, output = plot, normal = false,
    tangentoptions = [color = red], curveoptions = [color = green])
```

تمرین ۵: فرض کنید ذره‌ای روی بیضی $y^2+4x^2=1$ حرکت می‌کند. معادله پارامتری خم به صورت $x=\frac{1}{2}\sin(t)$ و $y=\cos(t)$ است. شتاب ذره را به دست آورید. سپس بردارهای T و N را برای این خم تعیین کنید و مولفه‌های مماسی و قائم شتاب را در نقطه $t = 0$ محاسبه کنید. (راهنمایی: مولفه‌های مماسی و قائم شتاب، تصویر بردار شتاب به ترتیب روی بردارهای T و N هستند.)

۵- انحنا و تاب(تمرین در خانه)

انحنای یک خم آهنگ تغییر بردار مماس خم نسبت به طوی خم است. برای محاسبه آن می توان از فرمول‌ها استفاده کرد. دستور Curvature از بسته Student[VectorCalculus] انحنای خم را محاسبه می‌کند. شکل کلی دستور به صورت

Curvature(**C**,t)

است که در آن C یک بردار دو یا سه بعدی و t (اختیاری) نام متغیر خم است. در صورتی که t مشخص نشده باشد، Maple از متغیر موجود در خم استفاده می‌کند.

شعاع انحنای خم برابر با شعاع دایره‌ای است که در نقطه داده شده بر خم مماس است. این دایره دایره بوسان نام دارد. مقدار شعاع انحنای یک خم برابر با عکس انحنای آن است. برای محاسبه این پارامتر از دستور

RadiusOfCurvature(**C**, **t**, **opts**)

استفاده می‌شود. در این دستور C یک بردار دو یا سه بعدی، t (اختیاری) نام متغیر و opts ویژگی‌های خروجی است که مانند ویژگی‌های دستور TangentVector تعریف می‌شود.

مثال: هذلولی را می‌توان به شکل پارامتری $(\cosh(t),\sinh(t))$ در نظر گرفت.

تعریف خم	$R := \langle\cosh(t), \sinh(t)\rangle$
محاسبه انحنا	$Curvature(R)$
ساده کردن عبارت بالا	$simplify(\%)$
محاسبه انحنا در دو نقطه $t = 0$ و $t = 1$	$eval(\%, t=0)$ $eval(\%\%, t=1)$
محاسبه شعاع انحنای خم داده شده و به دست آوردن آن در یک نقطه	$RadiusOfCurvature(\langle\sin(2\ t),\ \cos(t)\rangle)$ $eval\left(\%, t=\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right)$
تولید انیمیشنی که نحوه تغییر دایره بوسان را نشان می‌دهد. $RadiusOfCurvature(\langle\cos(t), \sin(t), t\rangle, output = animation, scaling = constrained)$	

تاب یک خم آهنگ خارج شدن خم از صفحه‌ای که بردارهای T و N می‌سازند، نسبت به طول خم است. برای به دست آوردن تاب یک خم از دستور Torsion از بسته Student[VectorCalculus] استفاده می‌کنیم. شکل کلی این دستور به صورت Torsion(**C**, **t**) است که در آن C بردار معرف یک خم و t (اختیاری) متغیر خم است.

تمرین ۶: یک خم که در صفحه قرار دارد تعریف کنید و مقدار تاب آن را محاسبه کنید.

تمرین ۷: یک ماهواره در فضا با معادله $(4\cos(t), 4\sin(t), 4\cos(t))$ حرکت می‌کند. ابتدا خم را رسم کنید. پس ار آن نشان دهید مسیر حرکت این ماهواره یک بیضی است و معادله دکارتی آن را به دست آورید. سپس شعاع انحنای آن را محاسبه کنید. (راهنمایی: نشان دهید خم داده شده محل تقاطع یک استوانه مستدیر قائم با یک صفحه است.)