

جلسه ۳: آشنایی با مقاطع مخروطی

۱- رسم نمودار سه بعدی (تمرین در خانه)

برای رسم نمودارهای سه بعدی در Maple روش های مختلفی وجود دارد. یکی از ساده ترین روش ها استفاده از دستور smartplot3d است. در دستور smartplot3d فقط کافی است معادله نشان دهنده رویه مورد نظر که به صورت $f(x, y, z) = 0$ است را وارد کنیم. Maple حدود مناسب برای رسم نمودار را تعیین کرده و نمودار را با استفاده از نقطه یابی رسم می کند.

<code>smartplot3d(x*y + x*z + y*z = 1)</code>	رسم نمودار $xy + yz + xz = 1$
<code>smartplot3d(x + y + 2*z = 1)</code>	رسم نمودار $x + y + 2z = 1$

توجه کنید که در این دستور تعداد نقطه های انتخاب شده برای رسم نمودار کم است و معمولاً بهتر است از دستورهای دیگری که در ادامه معرفی می شوند برای رسم نمودار استفاده شود.

روش دیگری برای رسم نمودار در مختصات سه بعدی استفاده از دستور implicitplot3d از بسته plots است. در این دستور هم مانند قبل معادله نشان دهنده رویه که به شکل $f(x, y, z) = 0$ است را وارد می کنیم. در این جا باید حدود هر سه متغیر X و Y و Z را به نرم افزار بدهیم. Maple با نقطه یابی نمودار را در حدود داده شده رسم می کند. در این دستور می توانیم خصوصیات ظاهری نمودار را مانند نمودارهای دو بعدی تغییر دهیم. توجه کنید که دستور implicitplot در دستگاه مختصات دو بعدی رسم می کند.

<code>with(plots):</code>	فراخوانی بسته plots
<code>implicitplot3d(x=2,x=1..3,y=0..4, z=0..4)</code>	رسم نمودار $x = 2$ در دستگاه مختصات سه بعدی
<code>implicitplot3d(x^2-y=0,x=-1..1, y=-1..1, z=0..3, axes=normal, style=hidden,color=red);</code>	رسم نمودار $x^2 - y = 0$ در دستگاه مختصات سه بعدی

نکته ۱: برای فراخوانی یک دستور خاص از یک بسته بدون فراخوانی کل بسته می توان نام بسته و نام دستور را استفاده کرد. به طور مثال، برای رسم $xy + yz + xz = 1$ می توان از دستور زیر استفاده کرد.

```
plots[implicitplot3d](x + y^2 + z^2 = 1, x = -1..1, y = -2..2, z = -2..2, axes = framed)
```

نکته ۲: در دستور implicitplot3d مانند سایر دستورهای رسم نمودار می توان رنگ و نمای شکل را تغییر داد. برای نمایش محورها از دستور axes = normal استفاده کرده ایم. دستور style = hidden باعث می شود زمینه شکل بی رنگ شود. شرایط و نحوه نمایش نمودارها را می توان از قبل و خارج از دستور رسم نمودار تعریف کرد. برای این کار از دستور setoptions3d استفاده می شود.

setoptions3d(style=hidden, color=green, axes=normal, scaling=constrained)	تعریف مشخصات
implicitplot3d(sin(x)=y, x=-Pi..Pi, y=-2..2, z=0..3)	رسم نمودار با مشخصات تعریف شده
رسم نمودار $x \sin x - y = 0$ در دستگاه مختصات سه بعدی	
implicitplot3d(x*sin(x)-y=0, x=-3*Pi..3*Pi, y=-10..10, z=0..3, grid=[50,20,20]);	

نکته ۳: دستور $grid = [100,20,20]$ در مثال بالا تعداد زیربازه‌ها در هر راستا را نشان می‌دهد و برای دقیق تر شدن شکل نمودار به کار می‌رود.

نکته ۴: برای تغییر در نمایش نمودار می‌توان روی شکل کلیک راست کرد و نحوه نمایش محورها، رنگ آمیزی، نوردهی به شکل و نوع نمایش را تغییر داد. این تغییر دائمی نیست و با اجرای دوباره دستور از بین می‌رود. از نوار ابزار MAPLE هم می‌توان به صورت مشابه برای ایجاد تغییرات در نحوه نمایش نمودار استفاده کرد.

راه دیگری برای رسم نمودارها در دستگاه مختصات سه بعدی، استفاده از دستور `plot3d` از بسته `plots` است. این دستور برای رسم نمودار رویه $z = f(x, y)$ به کار می‌رود. پس در عبارت داده شده به دستور، متغیر z وجود ندارد. متغیر z را در این جا x و y هستند و تنها داشتن حدود آنها کافی است. نرم افزار حدود متغیر z را با استفاده از حدود x و y تعیین می‌کند.

with(plots):	فراخوانی بسته plots
plot3d(sqrt(x ² + y ²), x=-2..2, y=-2..2)	رسم نمودار $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
plot3d({sqrt(x ² + y ² - 1), -sqrt(x ² + y ² - 1)}, x=-8..8, y=-8..8, numpoints = 1000)	رسم نمودارهای $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ و $z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

نکته ۱: در دستور `plot3d` هم می‌توان خصوصیات ظاهری نمودارها را تعریف کرد.

نکته ۲: برای به دست آوردن نمودارهای با دقت بالاتر می‌توان تعداد نقطه‌های استفاده شده برای نقطه یابی را با استفاده از دستور `numpoints` تعریف کرد.

نکته ۳: برای رسم چند نمودار روی یک دستگاه مختصات معادلات آنها را بین دو `{}` یا `[]` قرار می‌دهیم.

۲- نمودارهای ساده در دستگاه مختصات سه بعدی (تمرین در خانه)

در دستگاه مختصات دو بعدی، معادلات $x = a, y = b, z = c$ نشان دهنده خط‌های عمود بر محورهای z, y و x هستند. اما در دستگاه مختصات سه بعدی، این معادلات صفحه‌های عمود بر محورها را نشان می‌دهند.

implicitplot(x=2, x=1..3, y=0..4)	رسم نمودار $x = 2$ در دستگاه مختصات دو بعدی
implicitplot3d(x=2, x=1..3, y=0..4, z=0..3)	رسم نمودار $x = 2$ در دستگاه مختصات سه بعدی



رسم نمودار $y = 1$ در دستگاه مختصات سه بعدی	<code>implicitplot3d(y=1,x=1..3,y=0..4,z=0..4)</code>
---	---

نمودار تابع‌های به صورت $f(x, y) = 0$, $g(x, z) = 0$ و $h(y, z) = 0$ که در آنها یکی از سه متغیر غایب است، استوانه هستند. استوانه با یک خم هادی و یک خط که با آن در یک نقطه تقاطع دارد، ساخته می‌شود. با حرکت این خط روی خم هادی استوانه تشکیل می‌شود.

رسم نمودار $x^2 + y^2 = 2$ در دستگاه مختصات دو بعدی	<code>implicitplot(x^2 + y^2 = 2, x = -3..3, y = -3..3)</code>
رسم نمودار $x^2 + y^2 = 2$ در دستگاه مختصات سه بعدی	<code>implicitplot3d(x^2 + y^2 = 2, x = -3..3, y = -3..3, z = -3..3)</code>
رسم نمودار $x^2 = y$ در دستگاه مختصات سه بعدی	<code>implicitplot(x^2 - y = 0, x = -3..3, y = -3..3)</code>
رسم نمودار $(x+1)^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ در دستگاه مختصات سه بعدی	<code>implicitplot3d(x^2 + y = 0, x = -3..3, y = -3..3, z = -3..3, axes = normal)</code>

۳- رویه های درجه دوم (تمرین در خانه)

نمودار کلی یک رویه درجه دوم در دستگاه مختصات سه بعدی به صورت

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + g = 0$$

است. با تغییر ضرایب نمودارهای متفاوتی تولید می‌شوند که در ادامه برخی از آنها را رسم می‌کنیم.

تعریف نمودار کره واحد	<code>plot1 := implicitplot3d(x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2)</code>
تعریف نمودار کره	<code>plot2 := implicitplot3d(x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1/4, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..3, grid = [20, 20, 20], axes = normal)</code>
نمایش دو نمودار بالا در یک شکل	<code>display(plot1, plot2)</code>
نمودار بیضیوار	<code>implicitplot3d(x^2 + 2y^2 + (z-1)^2 = 1, x = -1.5..1.5, y = -2..2, z = -1..2.5, grid = [20, 20, 20], axes = normal)</code>
معرفی نمودار هذلولیوار یکپارچه	<code>plot1 := implicitplot3d(x^2 + 2y^2 - (z-1)^2 = 1, x = -1.5..1.5, y = -2..2, z = -1..2.5, grid = [20, 20, 20], axes = normal)</code>
معرفی نمودار هذلولیوار دوپارچه	<code>plot2 := implicitplot3d(x^2 - 2y^2 - (z-1)^2 = 1, x = -1.5..1.5, y = -2..2, z = -1..2.5, grid = [20, 20, 20], axes = normal)</code>



$display(plot1)$ $display(plot2)$ $display(plot1, plot2)$	<p>رسم نمودار هذلولیوار یکپارچه</p> <p>رسم نمودار هذلولیوار دوپارچه</p> <p>رسم نمودار دو هذلولیوار</p>
$ellpara := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $ellpara1 := subs(\{a=1, b=2\}, ellpara)$ $plot3d(ellpara1, x=-2..2, y=-4..4, scaling=constrained, axes=frame)$	<p>شکل کلی معادله سهمیوار با مرکز مبدا</p> <p>تعیین مقدار a و b</p> <p>رسم نمودار سهمیوار</p>
$conez := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $conez1 := subs(\{a=1, b=2, c=3\}, conez)$ $implicitplot3d(conez1, x=-1..1, y=-2..2, z=-3..3, scaling=constrained, axes=frame, grid=[15, 15, 15])$	<p>شکل کلی معادله مخروط</p> <p>مشخص کردن مقدار a و b و c</p> <p>رسم نمودار مخروط</p>
$hyperpara := \frac{(x-x1)^2}{a^2} - \frac{(y-y1)^2}{b^2}$ $hyperpara1 := subs(\{a=1, b=2, x1=0, y1=2\}, hyperpara)$ $plot3d(hyperpara1, x=-2..2, y=-4..6, scaling=constrained, axes=frame)$	<p>شکل کلی معادله سهمیوار هذلولوی</p> <p>تعیین مقدار متغیرها</p> <p>رسم نمودار سهمیوار هذلولوی</p>
$implicitplot3d(z=2xy, x=-3..3, y=-3..3, z=-3..3, grid=[20, 20, 20])$	<p>نمونه‌ای دیگر از سهمیوار هذلولوی</p>

نکته ۱: در مواردی ممکن است نمودار رسم شده با رویه‌ای که شما انتظار دارید متفاوت باشد. این اشکال معمولاً به دلیل کم بودن تعداد نقطه‌های انتخاب شده برای رسم شکل اتفاق می‌افتد. برای رفع این مشکل با دستور $grid=[a, b, c]$ تعداد نقطه‌ها را افزایش دهید.

تمرین:

۱- نمودار رویه‌های زیر را رسم کنید و نوع هر رویه را مشخص کنید.

$$x^2 - 2y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

$$\frac{(y-1)^2}{2} - \frac{x^2}{4} - (z+1)^2 = 1$$

$$x - y^2 + 3z^2 + z = 1$$

۲- دستورهای زیر اجرا کنید. این دستورها یک بستنی رسم می‌کنند. درباره بسته `plottools` تحقیق کنید.

`with(plottools):`

`icecream := cone([0,0,-1],0.7,color=gold), sphere([0,0,0.1],0.6,color=pink):`

`plots[display](icecream, scaling=constrained, style=patch)`