بسمه تعالی

درس نرم افزر ریاضی۲

نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷ گروه علوم کامپیوتر

جلسه۱: آشنایی با جبرخطی **هفته اول و دوم**

۱- معرفی ماتریس‌ها

ماتریس‌ها با دستور Matrix( ) معرفی می‌شوند. در این دستور می‌توان ماتریس را به صورت‌های مختلفی معرفی کرد. نمونه‌هایی از این صورت‌ها در مثال‌های زیر آمده‌اند.

`restart`	شروع
`M:= Matrix(3,2,1)`	ماتریس M به صورت یک ماتریس ۲×۳ با درایه های برابر با ۱ معرفی می‌شود.
`M1:=Matrix([[1,2],[3,-1],[2,1]])`	ماتریس $M1=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ معرفی می‌شود.
`M2:=Matrix(1..3,1..5,fill=2)`	ماتریس ۵×۳ که همه درایه های آن برابر با ۲ هستند معرفی می‌شود.
`Matrix(3)`	ماتریس ۳×۳ که همه درایه های آن برابر با ۰ هستند معرفی می‌شود.
`Matrix(3,1)`	ماتریس ۱×۳ که همه درایه های آن برابر با ۰ هستند معرفی می‌شود.
`s={(1,1)=3,(1,2)=1,(2,2)=-1}` `Matrix(2,3,s)`	مقدار دهی به درایه ها در مجموعه s ساختن ماتریس ۳×۲ با اعضای s که در آن بقیه اعضا برابر با صفر قرار داده می‌شوند.
`A:=[[2,1],[1,1,1]]` `M:=convert(A,Matrix)`	لیست A معرفی می‌شود. این لیست به ماتریس تبدیل می‌شود.
`M:=Matrix([[1,1],[2,2],[3,3]])` `M1:=Matrix(3,4,M)`	ماتریس اولیه M تعریف می‌شود. ماتریس M1 با استفاده از M ساخته می‌شود.
`f:=(i,j)->i+2*j` `Mf:=Matrix(3,5,f)`	تابع دومتغیره f تعریف می‌شود. ماتریس Mf که در آن درایه‌ها با تابع f تعریف شده‌اند، معرفی می‌شود.

نکته ۱: در تعریف ماتریس‌ها، به جای درایه‌هایی که مقدار آنها مشخص نشده است، صفر قرار می‌گیرد.

نکته ۲: Matrix یک نوع هم هست و می‌توان در دستورهایی مانند convert از آن استفاده کرد.

شکل ماتریس را هم می‌توان با استفاده از عبارت shape = name در تعریف ماتریس مشخص کرد. برخی از شکل‌های ماتریس عبارتند از: قطری (diagonal)، همانی (identity)، مثلثی (triangular)، متقارن (symmetric)، ثابت (constant) و صفر (zero). شکل‌های دیگری از ماتریس‌ها هم تعریف شده‌اند که می‌توانید برای بررسی آنها به راهنمای Maple مراجعه کنید. مثال‌های زیر این شکل‌ها را نشان می‌دهند.

`Matrix(3,shape=identity)`	ماتریس همانی ۳×۳
`Matrix(4,3,shape=constant[-1])`	ماتریس ۴×۴ معرفی می‌شود که همه درایه‌های آن برابر با ۱- هستند.

`x(1,1):=2:x(1,2):=3:x(1,3):=-1:x(2,2):=1:`
`x(3,3):=4:x(2,3):=-2:x(2,1):=6:`
 	
`Matrix(3,shape=triangular,x)`
	معرفی درایه‌های x
	
	معرفی ماتریس بالامثلثی با درایه‌های x

`M:=Matrix(3,[[a],[b,c],[d,e,f]], shape=triangular[lower])`	ماتریس پایین مثلثی M معرفی می‌شود.
`Matrix(3,{(1,1)=2,(1,2)=3,(1,3)=5}, fill=-1,shape=symmetric)`	یک ماتریس ۳×۳ متقارن معرفی می‌شود که برخی درایه‌های آن داده شده‌اند و بقیه درایه‌ها همگی برابر با ۱- هستند.
`V:=Vector([1,3,5])` `M:=Matrix(4,v,shape=diagonal)`	بردار v تعریف می شود. ماتریس قطری۴×۴ به نام m با بردار v روی قطر اصلی آن تعریف می شود.

۲- عملیات اولیه روی ماتریس‌ها

عملیات ساده جمع، تفریق، ضرب، توان، تعیین معکوس (در صورت وجود) در Maple به سادگی انجام می‌شود.

`restart;`	شروع

`A:= Matrix([[1,2,3],[4,2]])`
`B:= Matrix([[3],[2,-1,-1]])`
`C:= Matrix(3,4,[[2,1],[3],[5,-1]])`
	معرفی ماتریس‌های A و B و C

`A+B`
`2A`
`C.A`
	انجام عملیات ساده جمع و ضرب روی ماتریس‌ها

نکته‌ها:

۱- دقت کنید عمل ضرب در ماتریس ها با استفاده از علامت "." به جای "*" انجام می‌شود.
۲- برای ضرب دو ماتریس می‌توان از دستور Multiply که در بسته LinearAlgebra وجود دارد هم استفاده کرد.

معرفی ماتریس M	`M:=Matrix([[1,2],[3,1]])`
محاسبه توان های ۲ و ۴ از M	`M^2` `M^4`
محاسبه وارون ماتریس M	`M^-1`
محاسبه حاصلضرب ماتریس M و وارون آن	`M^-1.M`

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی از دستور Determinant که در بسته LinearAlgebra وجود دارد استفاده می‌شود.

فراخوانی بسته LinearAlgebra	`with(LinearAlgebra)`
محاسبه دترمینان ماتریس M	`Determinant(M)`
بردار سطر اول M برگردانده می‌شود.	`Row(M,1)`
بردار ستون دوم C برگردانده می‌شود.	`Column(C,2)`
بردارهای ستون‌های دوم تا چهارم C برگردانده می‌شود.	`Column(C,2..4)`
ماتریس C2 معرفی می‌شود.	`C2:= Matirx(5,4,C,fill=1)`
حذف سطر ۲ از ماتریس C2	`DeleteRow(C2,2)`
حذف ستون‌های ۱ و ۴ از ماتریس C2	`DeleteColumn(C2,[1,4])`
زیرماتریسی از سطرها و ستون‌های مشخص شده ماتریس C2 می‌سازد.	`SubMatrix(C2,[2..4],[3,1,4])`
دو ماتریس M و N را ضرب می کند. خروجی یک ماتریس است.	`MatrixMatrixMultiply(M,N)`

۲- حل دستگاه معادله در Maple

برای حل دستگاه معادله از دستورهای بسته Student[LinearAlgebra] استفاده می کنیم.

with(LinearAlgebra)	فراخوانی بسته LinearAlgebra
A:=Matrix([[1,2,3],[4,2,1],[1,0,-1]]) b:=Vector([2,-3,5])	معرفی ماتریس A و بردار b
LinearSolve(A,b) type(%,Vector)	دستگاه معادله AX = b را حل می‌کند. خروجی این دستور یک بردار است.
ReducedRowEchelonForm(<A,b>)	فرم سطری کاهش یافته ماتریس را می‌دهد.

نکته: برای معرفی ماتریس‌ها به جای عبارت Matrix می‌توان از علامت های < و > هم استفاده کرد. در این صورت هر ستون ماتریس به صورت یک بردار مشخص می‌شود و بین هر دو بردار یک جدا کننده قرار می‌گیرد. شکل زیر روش استفاده از این دستور را نشان می‌دهد.

$M := \langle\langle 1, 2, 1\rangle \vert \langle 2, 4, 5\rangle \vert \langle 1, 2, 2\rangle\rangle$	معرفی ماتریس M

۳- بردارها

برای نمایش بردارها در Maple از دستور Vector استفاده می‌شود. سایر دستورهای مورد استفاده برای کارکردن با بردارها در در بسته LinearAlgebra وجود دارد.

V:=Vector(5,[1,4,2])	بردار ۵ بعدی v معرفی می شود. دو عضو آخر آن برابر با صفر هستند.
f:= i-> i^2 u:=Vector(5,f)	تعریف تابع f تعریف بردار u

نکته: در حالت پیش فرض در Maple، بردارها به صورت ستونی معرفی می‌شوند، اما می‌توان آنها را به شکل سطری هم تعریف کرد. برای انجام عملیات جمع و تفریق روی بردارها باید همه بردارها سطری یا همه ستونی باشند.

W:=Vector[row](3,[1,2,4])	تعریف بردار سطری w
u+2*v	محاسبات مقدماتی
with(Student[LinearAlgebra])	فراخوانی بسته LinearAlgebra
DotProduct(u,v)	ضرب نقطه ای دوبردار
x:=<1,2,0> y:=<2,-1,3>	بردارها را می‌توان با کمک نمادهای > و < هم تعریف کرد.
CrossProduct(x,y)	ضرب خارجی دو بردار x و y محاسبه می‌شود.

`Norm(v)`	اندازه بردار v محاسبه می‌شود.
`VectorAngle(x,y)`	زاویه دو بردار x و y برحسب رادیان محاسبه می‌شود.
`evalf(%)`	مقدار بالا به صورت اعشاری محاسبه می‌شود.
`convert(%,degrees)`	عدد به دست آمده در بالا (برحسب رادیان) به درجه تبدیل می‌شود.

`M:=Matrix([[1,2,3],[4,1,1],[-1,0,1])`
`MatrixVectorMultiply(M,y)`
`type(%,Vector)`
	ماتریس M و بردار y را ضرب می‌کند. خروجی یک بردار است.

نکته۱: ضرب خارجی دو بردار فقط برای بردارهای دو و سه بعدی تعریف شده است.

نکته۲: دستور type(expr,t) بررسی می‌کند آیا عبارت expr دارای نوع t است.

۴- بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه (اختیاری)

برای به دست آوردن بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه از دستورهای Eigenvectors و Eigenvalues که در بسته LinearAlgebra وجود دارند استفاده می‌کنیم.

`with(LinearAlgebra)`	فراخوانی بسته LinearAlgebra
`A:=<<1,2,3>|<3,1,1>|<-1,0,1>>`	معرفی ماتریس A
`v:= Eigenvalues(A)`	مقدارهای ویژه A را در بردار v قرار می‌دهد.
`v,e:=Eigenvectors(A)`	مقدارهای ویژه ماتریس را در بردار v و بردارهای ویژه متناظر را در ستون‌های ماتریس e قرار می‌دهد.
`v1:= v[1]` `e1:= e[1..3,1]`	اولین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن را می‌دهد.
`M.e1 = v1*e1`	بررسی درستی مقدار و بردار ویژه

راه معمول برای به دست آوردن مقدارهای ویژه یک ماتریس M، محاسبه ریشه‌های دترمینان ماتریس $M - \lambda I$ است. این ماتریس را ماتریس مشخصه[۱] و دترمینان آن را که یک چندجمله‌ای برحسب λ است، چندجمله‌ای مشخصه[۲] می‌نامند. با دستورهای زیر این مقادیر را به دست می‌آوریم.

---

[۱] Characteristic matrix
[۲] Characteristic polynomial

`A:=<<1,2,3>|<3,1,1>|<-1,0,1>>`	معرفی ماتریس A
`CharacteristicMatrix(A, lambda)`	محاسبه ماتریس مشخصه ماتریس
`Determinant(%)`	محاسبه دترمینان ماتریس بالا
`solve(%)`	حل چندجمله‌ای حاصل برای محاسبه λ
`CharacteristicPolynomial(A)`	محاسبه چندجمله‌ای مشخصه
`solve(%)`	حل چندجمله‌ای بالا

۵- دستورات بسته Student[LinearAlgebra]

- دستور AddRow(A,i,j,s) در ماتریس A سطر i را با سطر i +s برابر سطر j جمع می کند و در سطر i قرار می دهد. i,j شماره سطر و s عدد است.
- دستور MultiplyRow(A,I,s) سطر i از ماتریس A را در s ضرب می‌کند.
- دستور SwapRow(A,i,j) جای دو سطر i و j را در ماتریس A عوض می‌کند.

مثال:

$A := \langle\langle 2,3,4\rangle|\langle -1,3,0\rangle|\langle 1,5,9\rangle\rangle$
$AddRow(A,1,2,-1)$
$B := MultiplyRow(A,2,x)$
$subs(x=2,B)$
$SwapRow(B,1,3)$

نکته: مشابه این دستورات ولی کلی‌تر در دستورهای RowOperation و ColumnOperation در بسته LinearAlgebra وجود دارد.

- دستور CrossProductPlot(u,v) نمودار بردارهای u و v و بردار حاصلضرب برداری آنها را رسم می‌کند.

$u := \langle 2,1,3\rangle$
$v := \langle 2,0,-1\rangle$
$u \ \&x \ v$
$CrossProductPlot(u,v)$

- دستور Diagonal(A) قطر ماتریس A را به صورت یک بردار ستونی می‌دهد.

- برای برداریا لیست L از اعداد یا ماتریس ها، دستور DiagonalMatrix(L) یک ماتریس قطری با عناصر L روی قطر آن می‌سازد.

$L1 := \langle 2,5,3\rangle$
$DiagonalMatrix(L1)$
$L2 := [\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle]$
$DiagonalMatrix(L2)$
$L3 := [\langle\langle 1,2\rangle|\langle 8,-1\rangle\rangle, \langle\langle 1,1\rangle|\langle -2,-1\rangle\rangle]$

$DiagonalMatrix\,(L3)$

- دستور PlanePlot به دو صورت استفاده می‌شود:

الف) زمانی که معادله صفحه داده شده باشد. در این صورت ورودی دستور به شکل PlanePlot(p , var) است که در آن p معادله صفحه و var لیست متغیرهای آن است.

ب) زمانی که بردار نرمال صفحه p1 و یک نقطه از آن pt (به شکل بردار) یا لیستی از چندبردار از صفحه داده شده باشد. در این صورت شکل دستور PlanePlot(p1 , pt) است.

$PlanePlot(-3\,x+2\,y+z=-3, [x, y, z])$

$PlanePlot(\langle 1, 1, 1\rangle, \langle 2, 2, 2\rangle)$

$PlanePlot([\langle 1, 2, 3\rangle, \langle -1, 2, 1\rangle])$

نکته: برای معرفی صفحه می‌توان از دو یا چند بردار استفاده کرد که دقیقا ۲ تای آنها مستقل خطی باشند.

- دستور ProjectionPlot بردار دو یا سه بعدی داده شده را روی یک خط یا فضای دیگر تصویر می‌کند. برای تصویر بردار v روی خط $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ کافی است دستور ProjectionPlot(v, <a,b,c>) را اجرا کنید. (برای حالت دو بعدی هم به صورت مشابه عمل می‌کنیم.)

برای تصویر کردن بردار v روی صفحه، معادله صفحه یا بردارهای تشکیل دهنده آن را به دستور می‌دهیم. دقت کنید که در این صورت لازم است لیست نام متغیرها هم در دستور بیاید.

$ProjectionPlot\,(\langle -2, 3\rangle, \langle 5, 7\rangle)$

$ProjectionPlot\,(\langle -3, 5, -3\rangle, x+3\,y=0, [x, y, z])$

$ProjectionPlot\,(\langle 1, 5, 3\rangle, \{\langle 1, 1, 1\rangle, \langle 1, -1, -1\rangle\}, vectoroptions\ = [color = magenta])$

تمرین۱: ماتریس مربعی 2x2 بسازید که معکوس آن با ترانهاده آن یکسان باشد. (دستور ReflectionMatrix هم کار می‌کند.)

تمرین ۲: ماتریس زیر را برحسب n بسازید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

تمرین ۳: وارون پذیری ماتریس فوق را برای n=4 بررسی کنید. (راهنمایی: ماتریس M وارون پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن ناصفر باشد.)

تمرین ۴: مقادیر ویژه ماتریس فوق را برای n=3 بدست آورید. (اختیاری)

تمرین ۵: پنج بردار به طور تصادفی انتخاب و استقلال خطی آنها را بررسی کنید. (اختیاری)