



جلسه ۳: آشنایی با مقاطع مخروطی

۱- مقاطع مخروطی

مقاطع مخروطی خم‌هایی دوبعدی هستند که از برش مخروط به دست می‌آیند. مخروط $cone_z$ با زاویه $\alpha = \frac{\pi}{4}$ و راس در مبدا مختصات، با معادله $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ تعریف می‌شود. این مخروط مکان هندسی همه نقطه‌هایی است که پاره‌خط متصل کننده آنها به مبدا با محور Z زاویه ۴۵ درجه می‌سازد. محل تقاطع مخروط با صفحه $z = c$ یک دایره است.

<code>restart</code> <code>with(plots):</code>	
<code>cone_z:=x^2+y^2-z^2=0</code>	معرفی مخروط
<code>plane1:=z=2:</code>	معرفی صفحه
رسم نمودار مخروط و صفحه	
<code>implicitplot3d({cone_z,plane1},x=-4..4,y=-3..3,z=-3..3, axes=frame, scaling=constrained, style=patchnogrid, lightmodel=light2, grid=[15,15,15])</code>	
<code>circle1:=(x-a)^2+(y-b)^2=r^2</code> <code>circle2:=subs(a=1,b=1,r=2,circle1)</code> <code>implicitplot(circle2,x=-1..3,y=-1..3)</code>	شکل کلی معادله دایره با مرکز (a,b) و شعاع r تعیین مقدار ثابت‌ها رسم دایره

از تقاطع مخروط با هر صفحه با شیب $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$ یک بیضی تشکیل می‌شود.

<code>plane2:=z=0.5*x+1:</code>	معرفی صفحه
رسم نمودار مخروط و صفحه	
<code>implicitplot3d({cone_z,plane2},x=-4..4,y=-3..3,z=-3..3, axes=frame, scaling=constrained, style=patchnogrid, lightmodel=light2, grid=[15,15,15])</code>	
<code>ellip:=(x-x1)^2/a^2+(y-y1)^2/b^2=1</code> <code>ellip1:=subs(x1=-1,y1=1,a=1,b=2,ellip)</code> <code>implicitplot(ellip1,x=-2..2,y=-3..5, scaling=constrained)</code>	شکل کلی معادله بیضی با مرکز (a,b) تعیین مقدار ثابت‌ها رسم بیضی

از تقاطع مخروط با هر صفحه با شیب $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ یک سهمی تشکیل می‌شود.

<code>plane3:=z=x+1:</code>	معرفی صفحه
رسم نمودار مخروط و صفحه	
<code>implicitplot3d({cone_z,plane3},x=-4..4,y=-3..3,z=-3..3, scaling=constrained, axes=frame, style=patchnogrid, lightmodel=light2, grid=[15,15,15])</code>	

```
parab1:=(x-x1)/a+(y-y1)^2/b^2=1
parab2:=(x-x1)^2/a^2+(y-y1)/b=1
parab11:=subs(x1=-1,y1=1,a=1,b=2,parab1)
parab21:=subs(x1=-1,y1=1,a=1,b=2,parab2)
implicitplot(ellip1,x=-2..2,y=-3..5,
scaling=constrained)
implicitplot(ellip1,x=-2..2,y=-3..5,
scaling=constrained)
```

شکل کلی معادله سهمی با مرکز (a,b)
تعیین مقدار ثابت ها
رسم سهمی

۲- مشخصات مقطع مخروطی

هریک از مقاطع مخروطی مکان هندسه نقطه‌هایی با ویژگی‌های خاص است.

بیضی: برای دو نقطه A و B در صفحه، مکان هندسی نقطه‌هایی که مجموع فاصله آنها از این دو نقطه برابر با عدد ثابتی باشد، بیضی نام دارد. این دو نقطه را کانون‌های بیضی می‌نامیم. معادله بیضی با مرکز (α, β) و قطرهای a و b به صورت زیر است.

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

در این بیضی خط واصل دو کانون با یکی از محورهای مختصات موازی است. دایره حالت خاصی از بیضی است که در آن دو کانون بر هم منطبق هستند و معادله کلی آن به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ است.

هذلولی: برای دو نقطه A و B در صفحه، مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل فاصله آنها از این دو نقطه برابر با عدد ثابتی باشد، هذلولی نام دارد. این دو نقطه را کانون‌های هذلولی می‌نامیم. معادله هذلولی با مرکز (α, β) و قطرهای a و b به صورت زیر است. در این هذلولی خط واصل دو کانون با یکی از محورهای مختصات موازی است.

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

هر هذلولی دارای دو مجانب است که از مرکز بیضی عبور می‌کنند.

سهمی: برای نقطه A و خط l ، مکان هندسی نقطه‌هایی است که فاصله آنها از خط و نقطه برابر باشد. نقطه A را کانون و خط l را خط هادی سهمی می‌نامند. معادله کلی سهمی به یکی از صورت‌های زیر است. در این سهمی‌ها خط هادی با یکی از محورهای مختصات موازی است.

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = \frac{(y-\beta)}{b}, \quad \frac{(x-\alpha)}{a} = \frac{(y-\beta)^2}{b^2}$$

برای رسم مقاطع مخروطی می‌توان از دستورهای بسته geometry هم استفاده کرد. مقاطع مخروطی به دستور conic که در این بسته وجود دارد، تولید و رسم می‌شوند. این دستور را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان استفاده کرد:

conic(p, [A, B, C, E, F], n)

conic(p, eqn, n)

پروژه کلاسی درس نرم افزار ریاضی ۲
نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۸ گروه علوم کامپیوتر

که در آن p نام مقطع مخروطی است، A, B, C, E, F پنج نقطه متمایز هستند، eqn معادله مقطع مخروطی است و n لیست نامهای محورهای مختصات است.

نکته: در دستور `conic`، مقطع مخروطی به یکی از صورت‌های زیر شناخته می‌شود:

۱- سهمی (`parabola2d`)

۲- بیضی (`ellipse2d`)

۳- هذلولی (`hyperbola2d`)

۴- دایره (`circle2d`)

۵- یک نقطه (`point2d`) که حالت خاصی از بیضی است.

۶- دو خط (`two lines, double line2d`) که حالت خاصی از هذلولی است.

برای رسم مقطع مخروطی معرفی شده، از دستور `draw` استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن این مشخصات از دستور

`detail` استفاده می‌کنیم. لیست پارامترهای خروجی دستور `detail` به صورت زیر است.

نام مقطع یا مقطع‌های مخروطی	نام مشخصه	معادل انگلیسی
سهمی	کانون	focus
بیضی، هذلولی	کانون‌ها	foci
هذلولی	مجانِب	asymptote
سهمی	راس	vertex
بیضی، هذلولی	راس‌ها	vertices
سهمی	خط هادی	directrix
بیضی، هذلولی	مرکز	center
بیضی	قطر اصلی	major axis
بیضی	قطر فرعی	minor axis

مثال:

$$conic(c1, x^2 + 5y^2 - 3xy = 1, [x, y])$$

$$detail(c1)$$

$$draw(c1)$$

$$conic(c2, x^2 - 3x - 2y^2 = 3, [x, y])$$

$$conic(c4, x^2 - y = 1, [x, y])$$

پروژه کلاسی درس نرم افزار ریاضی ۲
نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۸ گروه علوم کامپیوتر

برای معرفی یک نقطه در بسته geometry از دستور point استفاده می کنیم. در این دستور، نام نقطه و مختصات آن را به دستور می دهیم.

```
point(A, 1, 2)
point(B, -1, 2)
point(C, 2, 5)
point(E, -2, 5)
point(F, 0, 1)
conic(p2, [A, B, C, E, F], [x, y])
detail(p2)
```

نکته: برای به دست آوردن هر یک از مشخصات مقطع مخروطی کافی است از نام آن به عنوان دستور استفاده کنید. سپس از دستور map استفاده کنید. در مثال های زیر نمونه هایی آمده است.

```
conic(c5, x^2 - 3 y^2 + y = 1, [x, y])
asymptotes(c5), map(Equation, asymptotes(c5))
foci(c5)
map(coordinates, foci(c5))
```

با اجرای دستورهای بالا، معادله مجانب ها و مختصات کانون های هذلولی c5 چاپ می شود.

تمرین ۱: در مقاطع مخروطی که در بالا به آنها اشاره شد، خط هادی یا خط واصل دو کانون با یکی از محورهای مختصات موازی بود. بررسی کنید معادلات زیر با دوران کدام مقطع مخروطی به چه اندازه ای به دست آمده اند. (راهنمایی: زاویه خط هادی یا خط واصل دو کانون با محور X ها را به دست آورید).

$$\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}x\sqrt{2} - \frac{3}{2}y\sqrt{2} = 1$$

$$\frac{3}{2}x^2 + 3xy + \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}x\sqrt{2} - \frac{3}{2}y\sqrt{2} = 1$$

$$\frac{1}{2}y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 - 2y\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 2$$

تمرین ۲: در هر یک از موارد زیر، مقطع مخروطی داده شده را به اندازه مشخص شده دوران دهید و معادله مقطع مخروطی جدید را بنویسید. (راهنمایی: با استفاده از ماتریس دوران به اندازه زاویه داده شده، تغییر متغیر در معادله ها اعمال کنید).

$$x - 3y^2 + y = 1, \theta = \frac{1}{4}\pi$$

$$x^2 - y^2 = 1, \theta = -\frac{1}{4}\pi$$

$$3x^2 + y^2 = 2, \theta = \pi$$