بسمه تعالی

پروژه کلاسی درس نرم افزر ریاضی۲

نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۷–۱۳۹۸ گروه علوم کامپیوتر

توابع چند متغیره (حد و مشتق)

۱- مشتق

مشتق‌گیری جزیی، مفهوم مشتق را به ابعاد بالاتر (چند متغیره) گسترش می‌دهد. مشتق جزیی یک تابع چندمتغیره، مشتق آن تابع نسبت به یک متغیر است در حالی که سایر متغیرها ثابت باشند. مشتق‌های پاره‌ای می‌توانند به روش‌های مختلف با یکدیگر ترکیب شده و عبارات پیچیده‌تری را بسازند. در حساب برداری، برای تعریف گرادیان، دیورژانس و کرل از مشتقات جزیی استفاده می‌شود. یک ماتریس از مشتقات جزیی ، که با نام ماتریس ژاکوبی شناخته می‌شود، می‌تواند برای نشان‌دادن مشتق‌های یک تابع بین دو فضا با ابعاد دلخواه مورد استفاده قرار گیرد.

معادلات دیفرانسیل شامل مشتقات جزیی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای یا به‌اختصار PDE نامیده می‌شوند. حل این معادلات معمولاً نسبت به معادلات دیفرانسیل معمولی که تنها شامل مشتق‌های نسبت به یک متغیر هستند دشوارتر است.

مشتقات جزیی (یادآوری)	

مشتق گیری از یک عبارت	`q := sin( x*y );`
	`diff( q, x );`
	`diff( q, x, y );`

روش دوم برای مشتق‌گیری	`k := (x, y) → cos(x) + sin(y);`
	`D[1](k); y`
	`D[2](k);`
	`D[1, 1](k);`
	`D[1](D[2](k));`
	`D[1, 2](k) - D[2, 1](k);`

مشتق‌گیری از تابع	`f := (x, y) → sin(x^4) - (cos(x))^3;`
	`df := diff(f(x, y), x);`
	`d2f := diff(df, x);`

روش سوم برای مشتق‌گیری توابع	`h := (x, y, z) → x*y*log(z) + sin(x·cos(yz));` `d2h := diff(h(x, y, z), x$2);`

تمرین۱: آیا تابع زیر در رابطه لاپلاس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ صدق می‌کند؟

$$f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$$

تمرین۲: از تابع زیر بر حسب x و y مشتق بگیرید.

$$f(x,y)=\int_x^y g(t)dt$$

۲- گرادیان

در حسابان برداری، گرادیان یک میدانی برداری است که مؤلفه‌های آن نرخ تغییر میدان نخستین را در جهت‌های مختلف نشان می‌دهد. جهت خود میدان برداری گرادیان جهت بیشینه تغییرات است.

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

	$with(Student[MultivariateCalculus]):$
محاسبه گرادیان در یک نقطه	$Gradient\left(x^2 + y^2, [x, y] = [1, 1]\right)$
محاسبه گرادیان در دو نقطه متفاوت در یک دستور	$Gradient\left(x^2 + y^2, [x, y] = [[1, 1], [2, 0]]\right)$
رسم میدان برداری گرادیان	$Gradient\left(x^2 + y^2, [x, y] = [[1, 1], [2, 0]], output = gradplot\right)$
رسم رویه به همراه بردار گرادیان که بر منحنیهای تراز عمود هستند.	$Gradient\left(x^2 + y^2, [x, y] = [[0, 1], [2, 1]], x = -2 ..5, y = -2 ..5, z = 0 ..10, output = plot\right)$

۳- مشتق جهتی

مشتق جهت‌دار یا مشتق جهتی یک تابع مشتق‌پذیر چند متغیره در راستای یک بردار v در نقطه x، به‌طور شهودی نشان‌دهنده نرخ تغییرات لحظه‌ای آن تابع در حال عبور از نقطه x با سرعتی معادل بردار v است. بنابراین، مشتق جهت‌دار، مفهوم مشتق جزیی را که در آن نرخ تغییرات در راستای یکی از محورهای مختصات با ثابت در نظر گرفتن سایر مختصات محاسبه می‌شود، تعمیم می‌دهد. مشتق جهت‌دار یک تابع چندمتغیره $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در راستای بردار $v = (v_1, \dots, v_n)$ تابعی است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_v f(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X + hv) - f(X)}{h}$$

اگر تابع f در نقطه X مشتق‌پذیر باشد، سپس مشتق جهت‌دار آن در این نقطه، در راستای هر بردار v وجود داشته و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\nabla_v f(X) = \nabla f(X).v$$

with(Student[MultivariateCalculus]) :	
DirectionalDerivative (cos(x) + sin(y), [x, y] = [1, Pi], [1, 1]);	محاسبه مشتق جهتی در یک نقطه
DirectionalDerivative ($x^2 + y^3$, [x, y] = [−4, 4], [−4, 4], output = animation, frames = 7)	رسم مشتق جهتی و انیمشتین تغییرات

تمرین۳: رابطه $\nabla_v f(X) = \nabla f(X).v$ را برای توابع زیر تحقیق کنید. (مشتق جهتی= گرادیان در بردارجهت)

(a) $\mathrm{f(x,y)} = \mathrm{x^2y} + \sin(\mathrm{xy^2})$

(b) $f(x,y) = (x+y)^{\frac{1}{2}}$

تمرین ۴: از توابع زیر با فرمول مشتق جهتی نسبت به x و y مشتق بگیرید.

(a) $\mathrm{f(x,y)} = \mathrm{x^2y} + \sin(\mathrm{xy^2}) + z^2$

(b) $f(x,y) = (x+y+z)^{\frac{1}{2}}$

۴- مشتق جزیی

همانطور که گفتیم محاسبه مشتق جزیی با مراتب مختلف بسیار آسان و از چندین را قابل انجام است.

f := 3*z^2*cos(x*z) + x^2/(y^2 + sin(y)^2*z);	معرفی تابع
Dfx := Diff(f, x) = diff(f, x);	مشتق جزیی نسبت به x
fx := unapply(op(Dfx)[2], x, y, z);	اگر نیاز به محاسبه مشتقهای جزیی در نقاط مختلف باشد با این دستور عبارت تبدیل به تابع می‌شود.
\`fx(1,1,0)\` = fx(1, 1, 0);	محاسبه مشتق در یک نقطه خاص
fx(1,1,0)\` = subs({x = 1, y = 1, z = 0}, op(Dfx)[2]);	این کار با دستور subs هم امکانپذیر است.
Diff('f', x, y$2) = diff(f, x, y$2);	مشتقهای جزیی مختلف با مرتبه های گوناگون با $ امکانپذیر است.

`f1 := (x, y) → 16-4*x^2-y^2;`	معرفی
`g := unapply(f1(x, 2), x); fx := D(g);`	مقداردهی به متغیر دوم و تبدیل عبارت به تابع مشتق بوسیله عملگر D
`` `fx(1)` = fx(1); ``	مقداردهی
`gx := subs({x = 2, y = 1}, diff(f1(x, y), x));`	محاسبه مشتق تابع در نقطه (۱,۲)

`S := plot3d(f1(x, y), x =-5 ..5, y =-5 ..5, axes = framed) :`
`with(plots) :`
`L1 := spacecurve(evalm([1, 2, 8] + t·[1, 0,-8]), t =-5 ..1, color = yellow) :`
`L2 := spacecurve(evalm([2, 1,-1] + t·[1, 0,-16]), t =-10 ..1/16, color = yellow) :`
`display3d({S, L1, L2}, axes = framed)`
	نقطه(۱,۲,۸) صفحه مماس بر رویه $z =$ $f1(x, y)$ در جهت بردار x دارای شیب ۸– است و در نقطه(۱–,۲,۱) صفحه مماس بر رویه $z =$ $f1(x, y)$ در جهت بردار x دارای شیب ۱۶– است.
	ابتدا این خطوط مماس را رسم و سپس آنها را به همراه رویه نمایش داده ایم.

تمرین ۵: عملیات بالا را بر روی سطح کره انجام دهید.

تمرین ۶: ثابت کنید جواب معادله گرمایی تابع $u(x,t) = e^{-a^2k^2t}\sin(kx)$ است.