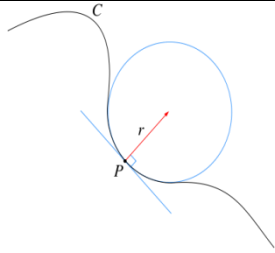
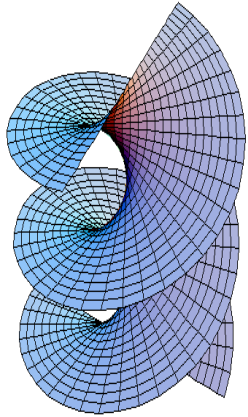
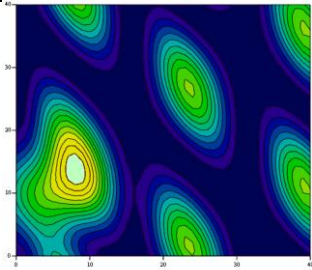
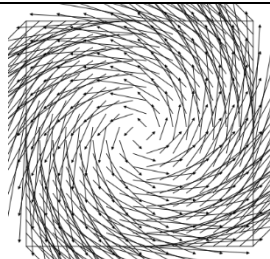


توابع چند متغیره

۱- مقدمه

توابع چند متغیره به توابعی گفته می شود که دامنه، هم دامنه و یا هر دو، یک فضای برداری بیشتر از یک بعد است. همچنین حساب توابع چند متغیره حالت کلی حساب توابع یک متغیره است: حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال

تکنیکهای کاربردی	دامنه/هم دامنه		
طول خمها، خطوط انتگرال، انحنا و تاب	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$		خمها (Curves)
مساحت رویه، انتگرال رویه، شارهای گذرنده از رویه، و انحنا	$f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$		رویه ها (Surfaces)
ماکزیمم و مینیمم، ضرایب لاگرانژ، مشتقات جهتی	$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$		میدانهای اسکالر (Scalar Fields)
گرادیان، دیورژانس، کرل	$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$		میدانهای برداری (Vector Fields)

در این بخش به میدان‌های اسکالر می‌پردازیم. ابزارهای کار کردن با این نوع توابع را بررسی و طی چند جلسه به نحوه محاسبه حد، پیوستگی، انواع مشتق و انتگرال می‌پردازیم.

۲- معرفی

تولید عبارت‌ها و تابع‌های چند متغیره	
معرفی عبارت های p و q	$p := x^2 y$ $q := u \cdot v \cdot \sin(w)$
محاسبه مقدار عبارت‌ها به ازای مقداردهی به همه یا برخی از متغیرها	$eval(p, \{x = 2, y = 3\})$ $subs\left(\left\{u = -1, w = \frac{\pi}{4}\right\}, q\right)$ $eval\left(q, \left\{u = -1, w = \frac{\pi}{4}\right\}\right)$
معرفی تابع چند متغیره	$f := (x, y, z) \rightarrow x \cdot y \cdot \log(z)$ $f(1, -2, 4)$ $f(1, y, 7)$
مقداردهی	

تمرین ۱: یک تابع با دستور proc بسازید و مقداردهی کنید.

تمرین ۲: تابع چندمتغیره چند ضابطه‌ای زیر را تعریف کنید مقداردهی کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} - y & 1 \geq x > y \geq 0 \\ \frac{x}{y} - x & 1 \geq y > x \geq 0 \\ 1 - x & x = y > 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

۳- رسم نمودار و منحنی‌های تراز

برای رسم نمودار رویه‌های به شکل $F(x, y, z) = 0$ می‌توان از دستور `implicitplot3d` و برای توابع دو متغیره $z = f(x, y)$ نیز از همان دستور استفاده کرد. هرچند برای رسم سه بعدی دستور `plot3d` وجود دارد.

```
plot3d(x y^2, x = -1 .. 1, y = -3 .. 3)
implicitplot3d(z = x y^2, x = -1 .. 1, y = -3 .. 3, z = -4 .. 4)
plot3d(abs(x) + abs(y), x = -5 .. 5, y = -5 .. 5)
```

تمرین ۳: دستور زیر را اجرا کنید. عبارت `style = patch` در این دستور و سایر دستورهای رسم نمودار به چه منظور است؟ آن را تغییر دهید و نتیجه را بررسی کنید.

```
plot3d(sin(x) * cos(y), x = -2 Pi .. 2 Pi, y = -2 Pi .. 2 Pi, style = patch)
```

منحنی تراز رویه حاصل از معادله $z = f(x, y)$ از تقاطع این رویه با یک صفحه با معادله $z = c$ به دست می‌آید. برای مشاهده منحنی‌های تراز یک رویه می‌توانید پس از رسم آن با دستورهای `plot3d` یا `implicitplot3d` از منوی `plots` گزینه `contour` را انتخاب کنید یا این که در دستور رسم عبارت `style = contour` را وارد کنید. علاوه بر آن، در بسته `plots` دستوری برای رسم منحنی‌های تراز در یک نمودار دو بعدی وجود دارد. این دستور `contourplot` است. با اجرای دستور نمودار دو بعدی شامل تعدادی از خم‌های تراز رویه داده شده، تولید می‌شود.

شکل کلی این دستور به صورت‌های زیر است:

`contourplot(expr, a..b, c..d, opts)`
`contourplot([exprf, exprg, exprh], s=a..b, t=c..d, opts)`

که در آن‌ها `expr` یک عبارت برحسب دو متغیر `x` و `y`، `a..b` حدود متغیر `x` و `c..d` حدود متغیر `y` است و `exprf` و `exprg` و `exprh` عبارت‌های معرف رویه برحسب دو متغیر `s` و `t` و بازه‌ها نشان دهنده حدود متغیرها هستند. به این دستور می‌توان ویژگی‌هایی اضافه کرد. از جمله این ویژگی‌ها، تعداد خم‌های تراز با عبارت `contours = n` است که در آن `n` تعداد خم‌های تراز رسم شده است. پیش فرض نرم افزار رسم ۸ خم تراز است. برای تولید نمودارهای رنگی، می‌توان از عبارت `filledregions = true` استفاده کرد که باعث می‌شود ناحیه بین خم‌ها رنگ‌آمیزی شود. رنگ‌ها در حالت پیش فرض از بازه زرد تا قرمز انتخاب می‌شوند، اما شما می‌توانید با اضافه کردن عبارت `coloring = [a,b]` رنگ‌های دلخواه خود را جایگزین کنید. مثال‌های زیر روش استفاده از این دستور را نشان می‌دهند.

فراخوانی بسته	<code>with(plots) :</code>
رسم نمودار خم‌های تراز رویه $z = x + y $	<code>contourplot(abs(x) + abs(y), x=-5..5, y=-5..5)</code>
رسم نمودار رویه بالا	<code>plot3d(abs(x) + abs(y), x=-5..5, y=-5..5)</code>
رسم خم‌های تراز رویه بالا	<code>plot3d(abs(x) + abs(y), x=-5..5, y=-5..5, style = contour)</code> <code>contourplot3d(abs(x) + abs(y), x=-5..5, y=-5..5)</code>

نکته: مشاهده می‌کنید که هر دو دستور بالا دقیقاً یک نمودار را رسم می‌کنند. به دستور `contourplot3d` دقت کنید.

معرفی دو رویه <code>c1</code> و <code>c2</code>	<code>c1 := [cos(x) - 2*cos(0.4*y), sin(x) - 2*sin(0.4*y), y]</code> <code>c2 := [cos(x) + 2*cos(0.4*y), sin(x) + 2*sin(0.4*y), y]</code> <code>contourplot3d({c1, c2}, x=0..2*pi, y=0..10, grid=[25, 15], filledregion = true)</code> <code>contourplot({c1, c2}, x=0..2*pi, y=0..10, grid=[25, 15], filledregion = true)</code>
رسم منحنی‌های تراز و رنگ‌آمیزی ناحیه‌ها	<code>contourplot(-5*x/(x^2 + y^2 + 1), x=-3..3, y=-3..3, filledregions = true, coloring = [white, blue])</code>
می‌توان خم‌های تراز را در محلهای مورد نظر رسم کرد.	<code>contourplot(sin(x*y), x=-3..3, y=-3..3, grid=[15, 15], contours = [-1/2, 1/4, 1/2, 3/4])</code>

تمرین ۴: گزینه grid را به دستور

$\text{contourplot}(\sin(x) \cdot \cos(y), x = -2 \text{ Pi} .. 2 \text{ Pi}, y = -2 \text{ Pi} .. 2 \text{ Pi}, \text{contours} = 12)$

اضافه کنید و تغییرات را توضیح دهید.

تمرین ۵: آیا این گزاره درست است؟ "منحنی‌های تراز تمایل دارند که اکسترممهای موضوعی را در برگیرند." برای پاسخ چندین مورد را با Maple بررسی کنید.

تمرین ۶: منحنی‌های تراز رویه زین اسبی (saddle) را رسم کنید.

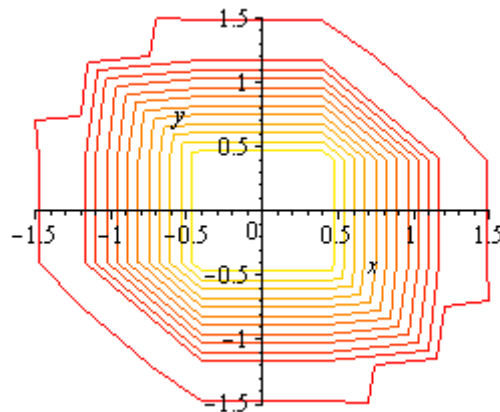
$\text{contourplot}(\text{binomial}(0..5, 0..5), \text{grid} = [10, 10])$
$\text{contourplot}(1.3^x \sin(y), x = -1 .. 2 \pi, y = 0 .. \pi, \text{coords} = \text{spherical})$
$\text{contourplot}\left(\left[r, t, \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin(t) - \ln(r)\right], r = 1 .. 4, t = 0 .. 2 \pi, \text{coords} = \text{cylindrical}, \text{contours} = 20, \text{grid} = [50, 50]\right)$
$\text{contourplot3d}\left(-\frac{5x}{x^2 + y^2 + 1}, x = -3 .. 3, y = -3 .. 3, \text{filledregions} = \text{true}, \text{coloring} = [\text{red}, \text{blue}]\right)$

تمرین ۷: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

1- $z = (\cos(x))(\cos(y))e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

2- $z = -\frac{xy^2}{x^2+y^2}$

تمرین ۸: منحنی تراز زیر مربوط به کدامیک از رویه‌های بالاست. (بدون استفاده از نرم‌افزار)



۴- حد و پیوستگی

برای محاسبه حد تابع‌های چند متغیره از دستور Limit استفاده می‌شود. تفاوت چندانی بین حدگیری چندمتغیره و تک متغیره وجود ندارد. در دستور limit می‌توان حد را روی مسیرهای خاص هم محاسبه کرد. در مثال‌های زیر نمونه‌هایی از انواع محاسبه حد را آورده‌ایم.

$\text{limit}((x+y^2)/(2x+y), \{x=1, y=1\})$	محاسبه حد در نقطه (۱،۱)
$\text{limit}\left(\frac{1}{y-x}, \{x=y\}, \text{right}\right)$	محاسبه حد راست تابع دو متغیره وقتی روی خط $y=x$ از سمت راست به نقطه نزدیک می‌شویم.
$p := \frac{(x^2 - y^2)}{x + y}$ $\text{limit}(p, \{x=0, y=0\})$ $\text{plot3d}(p, x=-3..3, y=-3..3)$	تعریف عبارت p محاسبه حد آن در مبدا رسم نمودار تابع

نکته: در بعضی از موارد نرم افزار کمک نمی‌کند. در اینجا رسم شکل ممکن است دید خوبی در مورد علت حد نداشتن در مبدا بدهد.

تمرین ۹: نقاط ناپیوستگی توابع زیر را پیدا کنید.

$$h(x, y, z) = \frac{1}{|xy| + |z|}$$

$$g(x, y, z) = xysin\left(\frac{1}{z}\right)$$

تمرین ۱۰: آیا توابع زیر در (۰،۰) حد دارند؟

- $-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\frac{x^4}{x^4+y^2}$