



نظریه زبان ها و اتوماتا

دکتر شهرام خزایی

بهار ۱۴۰۱

تمرین سری ششم

زبان‌های مستقل از متن (۳)

مهلت تحویل: ساعت ۲۳:۵۹ روز ۶ خرداد

لطفاً پیش از پاسخ‌دادن به تمرین‌ها به نکات زیر توجه کنید:

- تمرین از دو بخش سوالات تحویلی و سوالات تکمیلی تشکیل شده است. توجه کنید که پاسخ‌دادن به سوالات تکمیلی نمره‌ای اضافه‌ای ندارد.
- ارسال سوال‌ها به فروم‌های اینترنتی و جست‌وجوی پاسخ آن‌ها در اینترنت مجاز نیست.
- می‌توانید با یکدیگر در حل سوالات مشورت کنید؛ اما باید اولاً راه‌حل‌تان را با بیان خودتان بنویسید و ثانیاً نام کسانی که با آن‌ها در حل سوال مشورت کرده‌اید را پیش از پاسخ‌تان به سوال ذکر کنید.
- در صورتی که در مورد تمرین‌ها سوالی و ابهامی داشتید پیشنهاد می‌شود از دستیاران بپرسید. در صورت تشخیص مشابهت در راه‌حل‌ها، با فرض عدم تخلف تصحیح صورت خواهد گرفت اما مستندات بدون اطلاع دانشجو به مراجع ذی‌صلاح جهت بررسی، تصمیم و اقدام ارسال خواهد شد.
- دقت لازم را در نوشتن اثبات‌ها و بیان ادعاها به خرج دهید. علی‌الاصول هر ادعایی که در پاسخ به تمرین‌ها می‌آورید باید با اثبات همراه باشد؛ مگر آن‌که آن گزاره‌ی مزبور در طول درس اثبات شده باشد و یا سوال صراحتاً گفته باشد که نیازی به اثبات نیست.
- برای مرتبط کردن بخش‌های مختلف یک اثبات، به جای استفاده از پیکان، از کلمات استفاده کنید. همچنین برای هر منظور از سورها (\forall, \exists) استفاده نکنید. پاسخ‌تان به سوالات باید همراه با توضیحات کافی باشد که مصحح بتواند راه‌حل شما را متوجه شود. متن کتاب مرجع را الگو قرار دهید و پاسخ‌تان را طوری بنویسید که هر کسی بتواند آن را دنبال کند و متوجه شود.
- پاسخ‌تان را در فایل‌ها با نام شماره دانشجوییتان در سامانه ایلود کنید. فرمت فایل ارسالی باید حتماً به صورت pdf باشد. اگر از پاسخ‌تان عکس می‌گیرید در نور مناسب این کار را بکنید و توجه کنید که تصویر واضح باشد. فایل ارسالی شما نباید نیاز به چرخاندن (rotation) داشته باشد. توجه کنید که پاسخ‌هایی که موارد قبل در آن رعایت نشده باشند یا ناخوانا و مخدوش باشند تصحیح نخواهند شد.



تمرینات تحویلی

سوال ۱

(۳۰ نمره)

نشان دهید هر زبان مستقل از متن روی الفبای $\Sigma = \{a\}$ یک زبان منظم است.

سوال ۲

(۳۰+۳۰ نمره)

دو مورد را به دلخواه خود انتخاب کنید و به آن پاسخ دهید

۱. اگر زبان L یک زبان مستقل از متن باشد، بررسی کنید که آیا زبان L_{\neq} مستقل از متن هست یا نه؟

$$L_{\neq} = \{x : \exists y, |x| = |y| \text{ \& } xy \in L\}$$

۲. خارج قسمت راست L_1 بر L_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^* : \exists y \in L_2, xy \in L_1\}$$

آیا اگر L_1 و L_2 زبان‌های مستقل از متن باشند، L_1/L_2 لزوماً مستقل از متن است؟

۳. اگر L یک زبان مستقل از متن باشد، آیا زبان

$$L_* = \{x : x^* \subseteq L\}$$

مستقل از متن است؟

سوال ۳

(۳۵+۲۵ نمره)

به گرامر مستقل از متن $G = \{V, \Sigma, R, S\}$ خطی گفته می‌شود هرگاه هر قاعده از آن به یکی از دو فرم زیر باشد:

$$A \rightarrow wBx \quad (A, B \in V, w, x \in \Sigma^*, wx \neq \epsilon)$$

$$A \rightarrow w \quad (A \in V, w \in \Sigma^*)$$

زبان L خطی نامیده می‌شود اگر یک گرامر مستقل از متن خطی وجود داشته باشد که آن را تولید کند.

۱. نشان دهید به ازای هر زبان خطی L وجود دارد ثابت $K > 0$ به صورتی که هر رشته‌ای $w \in L$ که $|w| \geq K$ را می‌توان به صورت $w = uvxyz$ نوشت به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$vy \neq \epsilon$$

$$|uvyz| \leq K$$

$$\forall n : uv^nxy^n z \in L$$

۲. تحقیق کنید زبان زیر خطی است یا خیر؟

$$L = \{xy \in \{a, b\}^* \mid |x| = |y|, x \neq y\}$$

تمرینات تکمیلی

سوال ۱

فرض کنید L زبانی مستقل از متن باشد که با گرامری مانند G تولید شده است و G این خاصیت را دارد که اولاً K متغیر دارد و ثانیاً طول سمت راست هر قاعده‌ی G حداکثر d است. قرار دهید $n = d^{n+1}$. ثابت کنید برای هر $z \in L$ که $|z| \geq n$ اگر n حرف یا بیش‌تر به دلخواه از z علامت‌گذاری شوند، تجزیه‌ای از z به صورت $z = uvwxy$ وجود دارد که:

- vx حداقل یک حرف علامت‌خورده داشته باشد.
- vw حداکثر n حرف علامت‌نخورده داشته باشند.
- متغیری مانند A در G وجود دارد به نحوی که داریم $S \Rightarrow^* uAy$ یا $A \Rightarrow^* vAx$ و یا $A \Rightarrow^* w$ بنابراین برای هر $i \geq 0$ داریم: uv^iwx^iy
- نشان‌دهید زبان زیر مستقل از متن نیست:

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ or } j = k\}$$

به شرط این‌که هر دو تساوی همزمان برقرار نباشند.

سوال ۲

خواص بستاری زیر را بر روی زبان‌های مستقل از متن بررسی کنید.

- عملگر MIN که برای زبان L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$MIN(L) : x \in L$$

که در آن x پیشوند اکید ندارد.

- فرض کنید $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ یک همورفسم است. آیا $f(L)$ و $f^{-1}(L')$ برای زبان‌های مستقل از متن $L \subseteq \Sigma^*$ و $L' \subseteq \Gamma^*$ لزوماً مستقل از متن است؟

$$f(L) = \{y \in \Gamma^* : \exists x \in L, f(x) = y\}$$

$$f^{-1}(L') = \{x \in \Sigma^* : f(x) \in L'\}$$

- فرض کنید $L \subseteq \Sigma^*$ مستقل از متن است. تعریف کنید:

$$\sigma(L) = \{x \in \Sigma^* : \forall y \in \Sigma^*, xy \in L\}$$

آیا $\sigma(L)$ مستقل از متن است؟