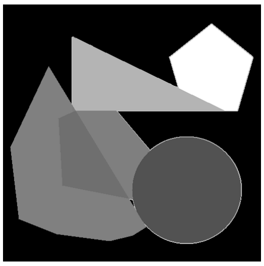
Relazione Progetto di Calcolo Numerico

Benatti Alice, Manuelli Matteo, Qayyum Shahbaz Ali

Gennaio 2022

Indice



(a) Immagine geometrica originale img1.png

(b) Immagine fotografica originale paesaggio.png

1 Presentazione del problema

Il progetto ha come scopo quello di comprendere e mettere in atto metodi per ricostruire immagini blurrate e svolgere il lavoro opposto, quindi generare immagini corrotte (dal rumore) a partire da un immagine originale.

Il problema che ci è stato presentato riguarda la ricostruzione di immagini corrotte attraverso il blur Gaussiano.

Verrà analizzata inizialmente l'immagine `data.camera()` importata da `skimage`, successivamente verranno analizzate un set di 8 immagini con oggetti geometrici di colore uniforme su sfondo nero, realizzate da noi.

Il problema di deblur consiste nella ricostruzione di un immagine a partire da un dato acquisito mediante il seguente modello:

$$b = Ax + \eta$$

dove b rappresenta l'immagine corrotta, x l'immagine originale che vogliamo ricostruire, A l'operatore che applica il blur Gaussiano ed η il rumore additivo con distribuzione Gaussiana di media $\nvdash$ e deviazione standard σ.

Per svolgere il progetto si farà uso dei moduli `numpy`, `skimage` e `matplotlib` utilizzando il linguaggio Python.

1.1 Generazione dataset

E' richiesto un set di immagini con le seguenti specifiche:

- 8 Immagini di dimensione 512×512;
- Formato PNG in scala dei grigi;
- Devono contenere tra i 2 ed i 6 oggetti geometrici;
- Oggetti di colore uniforme su uno sfondo nero.

Useremo anche altre due immagini di tipo fotografico/medico/astronomico a scelta trovate su internet. Quest'ultime saranno importate all'interno del progetto con la libreria `skimage`, impostando il flag `as_gray=True` per averle in bianco e nero.

Le immagini selezionate sono le seguenti:

Immagine con Testo Composizione di prime pagine di giornale con i relativi articoli.

Immagine Fotografica Che ritrae il volto di una persona in modo dettagliato e con varie tonalità di grigio.

1.2 Generazione Immagini Corrotte

Obiettivo: Degradare le immagini applicando, mediante le funzioni riportate nella cella precedente, l'operatore di blur con parametri

- $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5
- $\sigma = 1$ dimensione 7×7

- $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9

ed aggiungendo rumore gaussiano con deviazione standard $(0, 0.05)$

1.3 Osservazioni

Osserviamo il risultato su un'immagine scelta casualmente del set creato e sulle due immagini aggiuntive:

La figura che analizziamo variando i valori di sigma è l'immagine numero 8. Ricordiamo che più è alto il valore del PSNR maggiore sarà la vicinanza dell'immagine corrotta rispetto alla versione originale. Le figure di sinistra rappresentano l'immagine originale, invece a destra sono riportate le immagini corrotte con i rispettivi valori di PSNR. Notiamo che all'aumentare delle dimensioni di sigma il valore di PSNR diminuisce che denota un peggioramento della qualità dell'immagine, infatti le immagini subiscono un'appiattimento dell'intensità della scala dei colori e i contorni delle varie figure geometriche perdono di fermezza. Inoltre è curioso notare..

Valutiamo ora l'immagine fotografica: Si nota un'altra volta che all'aumentare delle dimensioni di sigma diminuisce il PSNR e l'immagine perde di incisività, le versioni corrotte benché risultino visivamente peggiori, si riesce ancora a ben distinguere il soggetto in primo piano, anche se sfocato, in tutte le immagini.

Passando alla valutazione dell'immagine con testo: In questa immagine abbiamo una raccolta di prime pagine di giornale che ci permettono di osservare e valutare meglio la differenza tra l'immagine originale e la versione corrotta, per esempio con $\sigma = 0,5$ otteniamo un un immagine con del testo ancora leggibile sebbene meno nitida, la difficoltà inizia ad essere maggior invece con $\sigma = 1$ dove le scritte più piccole diventano quasi illeggibili, con $\sigma = 1.3$ il PSNR diminuisce ancora sebbene non molto rispetto rispetto a sigma uguale a 1, ma in questo caso anche le scritte più grandi, fatta eccezione per i titoli, perdono di chiarezza.

2 Ricostruzione di un immagine rispetto una versione corrotta

Una possibile ricostruzione dell'immagine originale x partendo dall'immagine corrotta b è la soluzione naive data dal minimo del seguente problema di ottimizzazione:

$$x^* = \arg\min_x \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2$$

Nell'analisi delle immagini ricostruite useremo $\sigma = 1$ dimensione 7×7 come valore standard.

2.1 Metodo del Gradiente Coniugato (naive)

Il metodo del gradiente coniugato è un algoritmo per la risoluzione numerica di un sistema lineare la cui matrice sia simmetrica e definita positiva e consente di risolvere il sistema in un numero di iterazioni che e' al massimo n.

La funzione f da minimizzare è data dalla formula $f(x) = \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2$, il cui gradiente ∇f è dato da $\nabla f(x) = A^T Ax - A^T b$.

Utilizzando il metodo del gradiente coniugato implementato dalla funzione `minimize` abbiamo calcolato la soluzione naive.

2.2 Metodo del Gradiente

Il metodo del gradiente è un algoritmo che calcola il vettore di minimo globale, ovvero: Un vettore x^* è un punto di minimo globale di $f(x)$ se $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in R^n$. Analogamente, un vettore x^* è un punto di minimo globale in senso stretto di $f(x) se f(x^*) < f(x) \forall x \in R + nx \neq x^*$.