

Relazione Progetto di Calcolo Numerico

"Deblur Immagini"

Benatti Alice, Manuelli Matteo, Qayyum Shahbaz Ali

Gennaio 2022

"Di sicuro, ci sarà sempre chi guarderà solo la tecnica e si chiederà "come", mentre altri di natura più curiosa si chiederanno "perché"."

— *Man Ray*
(fotografo statunitense)



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA - SCIENZA E INGEGNERIA

Indice

1 Presentazione del problema	3
1.1 Generazione dataset	3
1.2 Generazione Immagini Corrotte	4
1.3 Osservazioni	11
1.3.1 Analisi immagine geometrica	11
1.3.2 Analisi immagini fotografiche	11
2 Ricostruzione di un'immagine rispetto una versione corrotta	13
2.1 Metodo del Gradiente Coniugato	13
2.2 Metodo del Gradiente implementato con ricerca in linea inesatta (backtracking)	14
2.2.1 Risultati della soluzione naïve	15
2.3 Metodo del Gradiente e Metodo del Gradiente Coniugato a confronto	16
3 Regolarizzazione	18
3.1 Regolarizzazione del Metodo del Gradiente Coniugato <code>minimize</code>	18
3.1.1 Immagini geometriche regolarizzate	18
3.1.2 Immagini fotografiche regolarizzate	20
3.2 Metodo di Regolarizzazione di Tikhonov	21
4 Variazione Totale	23
4.1 Variazione totale delle immagini geometriche:	24
4.1.1 Immagine geometrica img2.png	24
4.1.2 Immagine geometrica img4.png	25
4.1.3 Immagine geometrica img6.png	26
4.2 Variazione totale dell'immagine ritratto:	27
4.3 Variazione totale dell'immagine con testo:	28
4.4 Variazione totale dell'immagine con testo e immagini:	29
5 Conclusioni	29

1 Presentazione del problema

L'obiettivo del progetto è comprendere e mettere in atto metodi per la ricostruzione, o recupero, di immagini blurate, lavorando su problemi test, ovvero generando immagini corrotte da un rumore Gaussiano applicandolo ad un set di immagini pulite in modo tale da analizzare il problema.

Inizialmente verrà analizzata l'immagine `data.camera()` importata da `skimage`, successivamente verranno analizzate 8 immagini con oggetti geometrici di colore uniforme su sfondo nero, realizzate da noi.

Il problema di deblur consiste nella ricostruzione di un'immagine a partire da un dato acquisito mediante il seguente modello:

$$b = Ax + \eta$$

dove b rappresenta l'immagine corrotta, x l'immagine originale che vogliamo ricostruire, A l'operatore che applica il blur Gaussiano ed η il rumore additivo con distribuzione Gaussiana di media 0 e deviazione standard σ .

Per svolgere il progetto si farà uso dei moduli `numpy`, `skimage` e `matplotlib` utilizzando il linguaggio Python.

Affinché risultino chiari i valori a cui andremo a riferirci nella relazione, bisogna tenere ben presente il significato di questi tre parametri.

PSNR (Peak Signal to Noise Ratio): Misura la qualità di un'immagine ricostruita rispetto all'immagine originale, la formula per calcolarlo è la seguente:

$$PSNR = \log_{10}\left(\frac{\max x^*}{\sqrt{MSE}}\right)$$

MSE (Mean Squared Error): Con la sigla ci riferiamo all'errore quadratico medio ed è così ottenuto:

$$MSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij}^* - x_{ij})^2}{nm}}$$

I due valori sono inversamente proposizionali; più è alto il PSNR e basso l'MSE, più l'immagine sarà simile all'immagine originale. Il PSNR dipende dall'MSE.

Deviazione standard: indica quanto sono distribuiti i dati rispetto alla loro media: un valore piccolo indica che i dati sono "ammassati" intorno al valore medio, mentre un valore grande indica che i dati sono distribuiti lungo tutto il grafico.

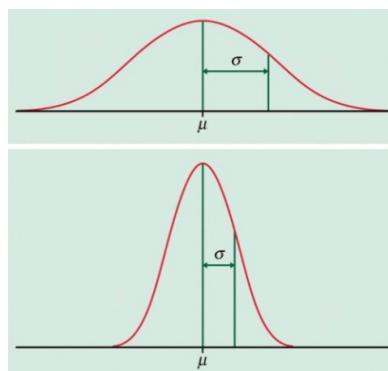


Figura 1: Distribuzione valori rispetto ad un valore medio

1.1 Generazione dataset

È richiesto un set di immagini con le seguenti specifiche:

- 8 Immagini di dimensione 512×512 ;
- Formato PNG in scala di grigi;
- Devono contenere tra i 2 ed i 6 oggetti geometrici;
- Oggetti di colore uniforme su uno sfondo nero.

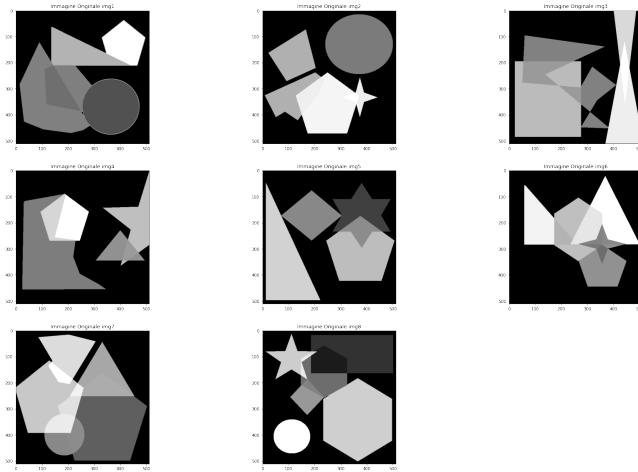


Figura 2: Immagini geometriche studiate

Inoltre useremo immagini "fotografiche" con dimensione 512×512 , le quali verranno mostrate usando la flag `as_gray=True` per poterle visualizzare in bianco e nero.

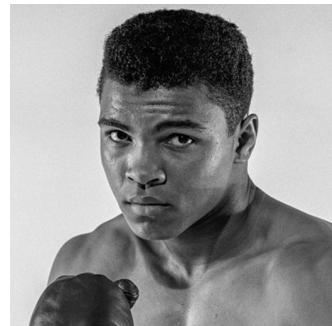
Le immagini selezionate sono le seguenti:

Immagine Fotografica Inquadra un fotografo nell'intento di uno scatto con sfondo paesaggistico. (Importate all'interno del progetto con la libreria `skimage`)

Immagine Ritratto Ritrae il volto di una persona in modo dettagliato e con varie tonalità di grigio. È necessario caricare l'immagine nel progetto con il comando `imread` per poterla analizzare.



(a) Immagine fotografica



(b) Immagine ritratto

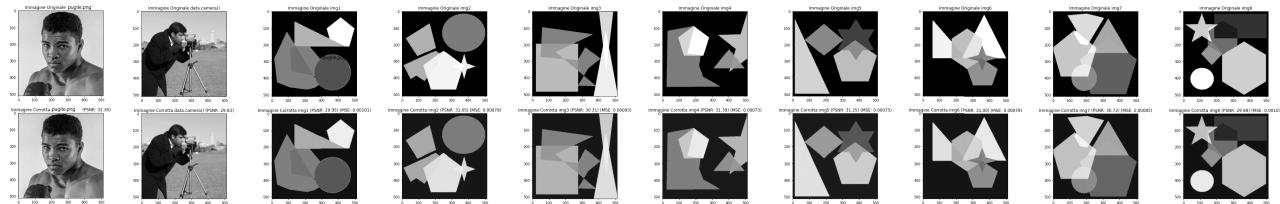
Figura 3: Immagini fotografiche analizzate

1.2 Generazione Immagini Corrotte

Obiettivo: Degradare le immagini applicando, mediante le funzioni fornite, l'operatore di blur con parametri:

- $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5
- $\sigma = 1$ dimensione 7×7
- $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9

ed aggiungendo rumore gaussiano con diversi valori che spaziano nell'intervallo $(0, 0.5]$.

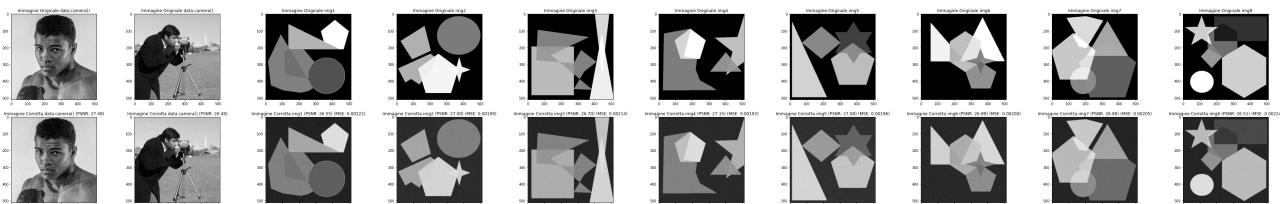


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	5	0.5	0.02	29.8344	0.00103886
pugile.png	5	0.5	0.02	32.3195	0.0005862
img1.png	5	0.5	0.02	29.9493	0.00101175
img2.png	5	0.5	0.02	31.0498	0.000785276
img3.png	5	0.5	0.02	30.3053	0.000932107
img4.png	5	0.5	0.02	31.3947	0.000725313
img5.png	5	0.5	0.02	31.2456	0.00075065
img6.png	5	0.5	0.02	30.9971	0.00079486
img7.png	5	0.5	0.02	30.7187	0.000847478
img8.png	5	0.5	0.02	29.8802	0.00102797

Medie calcolate

Media PSNR 30.772611701896455
 Media MSE 0.0008494089846671857
 Dev. Std. PSNR 0.7547454045875164
 Dev. Std. MSE 0.0001420353322461252

Figura 4 & Tabella 1: Immagini corrotte con $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5 e noise = 0.02

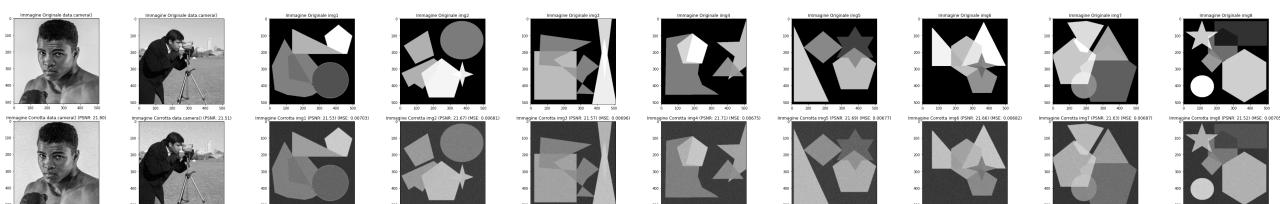


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	5	0.5	0.04	26.5112	0.00223297
pugile.png	5	0.5	0.04	27.4667	0.0017919
img1.png	5	0.5	0.04	26.5452	0.00221553
img2.png	5	0.5	0.04	27.0007	0.00199492
img3.png	5	0.5	0.04	26.6982	0.00213887
img4.png	5	0.5	0.04	27.1549	0.00192537
img5.png	5	0.5	0.04	27.0846	0.00195677
img6.png	5	0.5	0.04	26.9876	0.00200098
img7.png	5	0.5	0.04	26.8806	0.00205086
img8.png	5	0.5	0.04	26.5063	0.00223545

Medie calcolate

Media PSNR 26.891734569652385
 Media MSE 0.002050504949458885
 Dev. Std. PSNR 0.3007954092260605
 Dev. Std. MSE 0.00014057036112999103

Figura 5 & Tabella 2: Immagini corrotte con $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5 e noise = 0.04

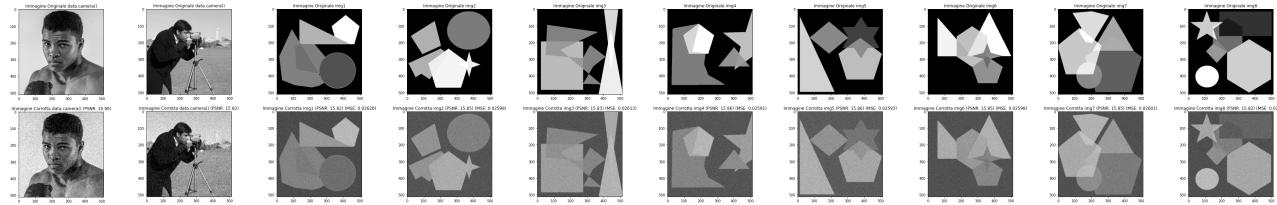


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	5	0.5	0.08	21.5325	0.00702666
pugile.png	5	0.5	0.08	21.7986	0.0066091
img1.png	5	0.5	0.08	21.5332	0.00702558
img2.png	5	0.5	0.08	21.6702	0.00680731
img3.png	5	0.5	0.08	21.5736	0.00696048
img4.png	5	0.5	0.08	21.7089	0.00674704
img5.png	5	0.5	0.08	21.6929	0.00677191
img6.png	5	0.5	0.08	21.6626	0.00681931
img7.png	5	0.5	0.08	21.633	0.00686601
img8.png	5	0.5	0.08	21.519	0.00704858

Medie calcolate

Media PSNR 21.656429313389726
 Media MSE 0.00683046240248098
 Dev. Std. PSNR 0.08995967536472305
 Dev. Std. MSE 0.00014118437500020744

Figura 6 & Tabella 3: Immagini corrotte con $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5 e noise = 0.08

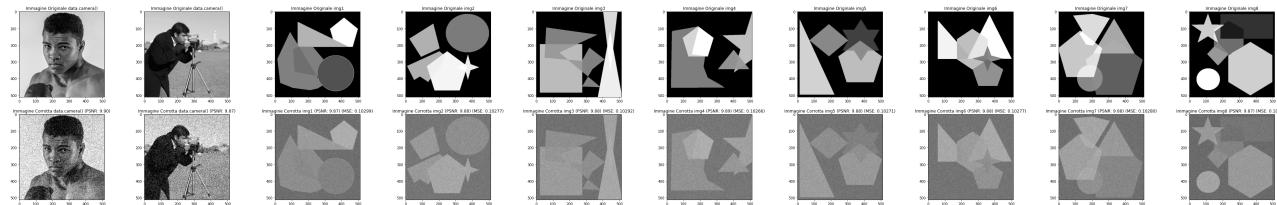


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	5	0.5	0.16	15.7869	0.0263819
pugile.png	5	0.5	0.16	15.89	0.0257632
img1.png	5	0.5	0.16	15.8162	0.0262048
img2.png	5	0.5	0.16	15.8543	0.025976
img3.png	5	0.5	0.16	15.8278	0.0261347
img4.png	5	0.5	0.16	15.8649	0.0259124
img5.png	5	0.5	0.16	15.8618	0.0259313
img6.png	5	0.5	0.16	15.8537	0.0259797
img7.png	5	0.5	0.16	15.849	0.0260077
img8.png	5	0.5	0.16	15.8161	0.0262051

Medie calcolate

Media PSNR 15.821291629768288
 Media MSE 0.026174436676272776
 Dev. Std. PSNR 0.02377710929356369
 Dev. Std. MSE 0.00014322778885193189

Figura 7 & Tabella 4: Immagini corrotte con $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5 e noise = 0.16

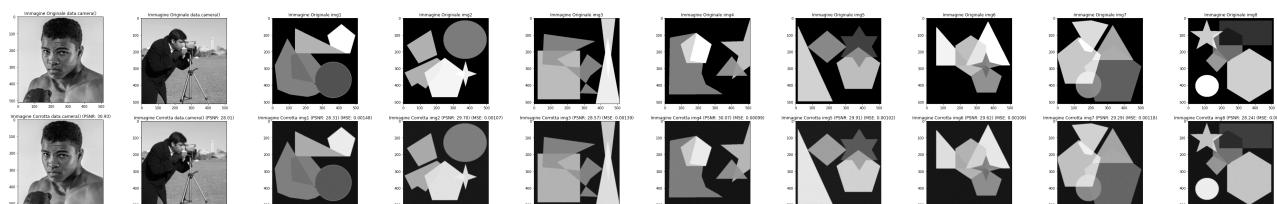


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	5	0.5	0.32	9.90122	0.102301
pugile.png	5	0.5	0.32	9.89115	0.102538
img1.png	5	0.5	0.32	9.8721	0.102989
img2.png	5	0.5	0.32	9.88127	0.102772
img3.png	5	0.5	0.32	9.87516	0.102916
img4.png	5	0.5	0.32	9.8862	0.102655
img5.png	5	0.5	0.32	9.88405	0.102706
img6.png	5	0.5	0.32	9.88154	0.102765
img7.png	5	0.5	0.32	9.88	0.102802
img8.png	5	0.5	0.32	9.87102	0.103014

Medie calcolate

Media PSNR 9.908921219921675
 Media MSE 0.10211940428183572
 Dev. Std. PSNR 0.005854966950232008
 Dev. Std. MSE 0.00013766495799610393

Figura 8 & Tabella 5: Immagini corrotte con $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5 e noise = 0.32

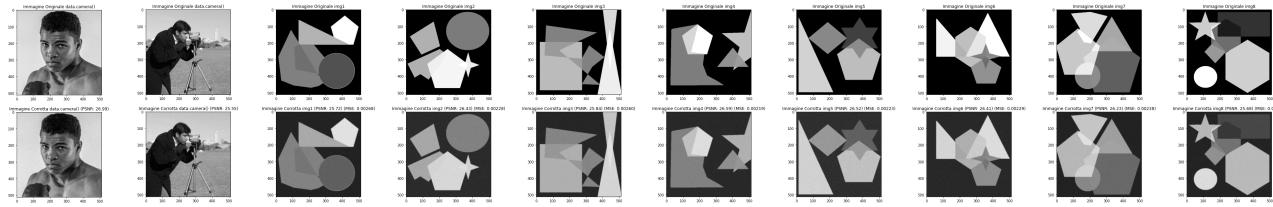


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	7	1	0.02	27.9965	0.00158617
pugile.png	7	1	0.02	30.9284	0.000807527
img1.png	7	1	0.02	28.3054	0.00147726
img2.png	7	1	0.02	29.7038	0.00107057
img3.png	7	1	0.02	28.5689	0.00139029
img4.png	7	1	0.02	30.0656	0.000985011
img5.png	7	1	0.02	29.9064	0.0010218
img6.png	7	1	0.02	29.6228	0.00109074
img7.png	7	1	0.02	29.2918	0.00117711
img8.png	7	1	0.02	28.2434	0.00149851

Medie calcolate

Media PSNR 29.2560497491376
 Media MSE 0.0012124124340562978
 Dev. Std. PSNR 0.903380822617657
 Dev. Std. MSE 0.0002471649641134373

Figura 9 & Tabella 6: Immagini corrotte con $\sigma = 1$ dimensione 7×7 e noise = 0.02

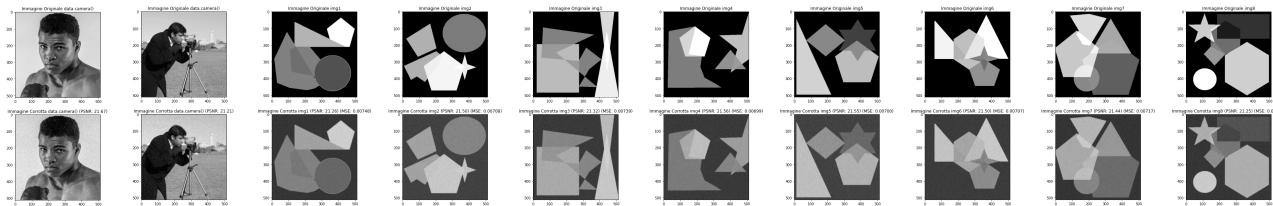


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	7	1	0.04	25.5438	0.00279009
pugile.png	7	1	0.04	26.9696	0.00200928
img1.png	7	1	0.04	25.7196	0.00267942
img2.png	7	1	0.04	26.4282	0.00227604
img3.png	7	1	0.04	25.8439	0.00260379
img4.png	7	1	0.04	26.5898	0.0021929
img5.png	7	1	0.04	26.5209	0.00222797
img6.png	7	1	0.04	26.4067	0.00228732
img7.png	7	1	0.04	26.2277	0.00238357
img8.png	7	1	0.04	25.6828	0.00270224

Medie calcolate

Media PSNR 26.195844232338864
 Media MSE 0.0024139860627763257
 Dev. Std. PSNR 0.4492018368928465
 Dev. Std. MSE 0.0002491578891141964

Figura 10 & Tabella 7: Immagini corrotte con $\sigma = 1$ dimensione 7×7 e noise = 0.04

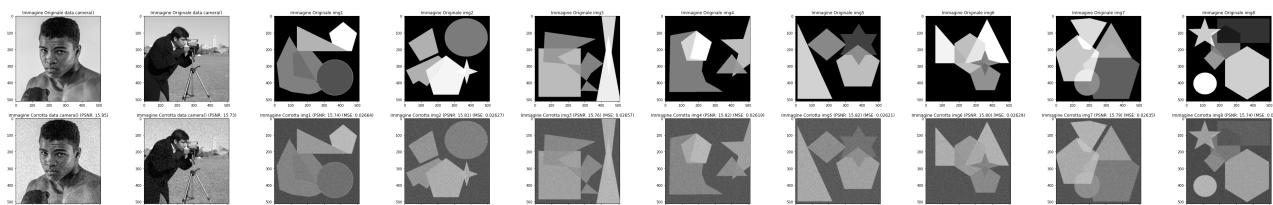


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	7	1	0.08	21.2232	0.0075453
pugile.png	7	1	0.08	21.6733	0.00680245
img1.png	7	1	0.08	21.2586	0.00748406
img2.png	7	1	0.08	21.5025	0.00707543
img3.png	7	1	0.08	21.3156	0.0073866
img4.png	7	1	0.08	21.5582	0.00698523
img5.png	7	1	0.08	21.5463	0.00700433
img6.png	7	1	0.08	21.5043	0.00707252
img7.png	7	1	0.08	21.4429	0.00717307
img8.png	7	1	0.08	21.2464	0.00750518

Medie calcolate

Media PSNR 21.429621292884747
 Media MSE 0.0071992640601343085
 Dev. Std. PSNR 0.14744138849178753
 Dev. Std. MSE 0.0002443541830272355

Figura 11 & Tabella 8: Immagini corrotte con $\sigma = 1$ dimensione 7×7 e noise = 0.08

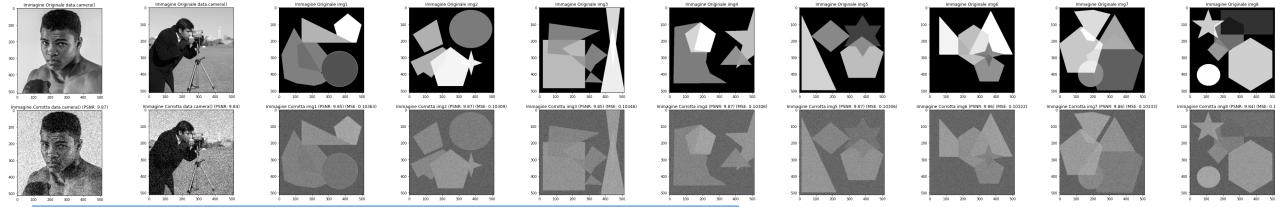


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	7	1	0.16	15.7309	0.0267244
pugile.png	7	1	0.16	15.8496	0.0260039
img1.png	7	1	0.16	15.7444	0.0266415
img2.png	7	1	0.16	15.8054	0.0262698
img3.png	7	1	0.16	15.7565	0.0265673
img4.png	7	1	0.16	15.8194	0.0261856
img5.png	7	1	0.16	15.8151	0.0262111
img6.png	7	1	0.16	15.8029	0.0262853
img7.png	7	1	0.16	15.7926	0.0263473
img8.png	7	1	0.16	15.7385	0.0266776

Medie calcolate

Media PSNR 15.79693992935469
 Media MSE 0.026322419224025406
 Dev. Std. PSNR 0.04145677255353015
 Dev. Std. MSE 0.00025141610640160646

Figura 12 & Tabella 9: Immagini corrotte con $\sigma = 1$ dimensione 7×7 e noise = 0.16

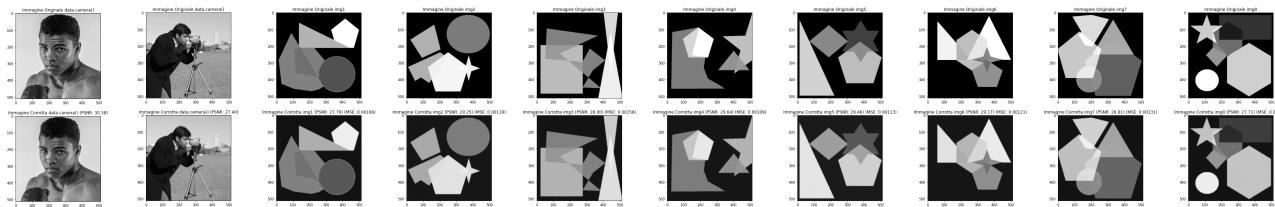


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	7	1	0.32	9.85731	0.10334
pugile.png	7	1	0.32	9.87496	0.102921
img1.png	7	1	0.32	9.84505	0.103632
img2.png	7	1	0.32	9.86765	0.103094
img3.png	7	1	0.32	9.85214	0.103463
img4.png	7	1	0.32	9.86913	0.103059
img5.png	7	1	0.32	9.869	0.103062
img6.png	7	1	0.32	9.86252	0.103216
img7.png	7	1	0.32	9.85775	0.10333
img8.png	7	1	0.32	9.84472	0.10364

Medie calcolate

Media PSNR 9.868096562243034
 Media MSE 0.10308404121278847
 Dev. Std. PSNR 0.009739789869654458
 Dev. Std. MSE 0.00023117252120505893

Figura 13 & Tabella 10: Immagini corrotte con $\sigma = 1$ dimensione 7×7 e noise = 0.32

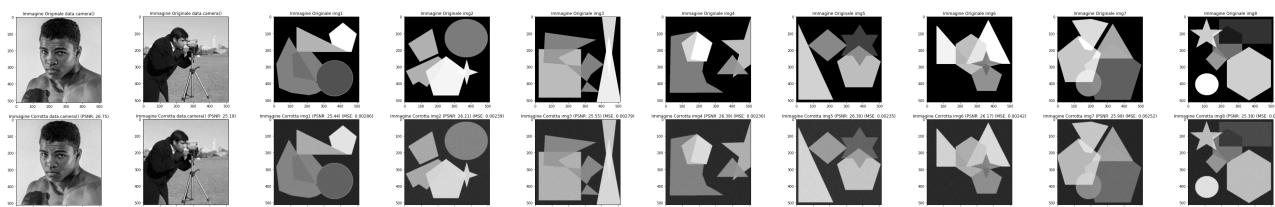


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	9	1.3	0.02	27.4138	0.00181392
pugile.png	9	1.3	0.02	30.3576	0.0009209
img1.png	9	1.3	0.02	27.7886	0.00166394
img2.png	9	1.3	0.02	29.2539	0.00118745
img3.png	9	1.3	0.02	28.0014	0.00158437
img4.png	9	1.3	0.02	29.6382	0.00108688
img5.png	9	1.3	0.02	29.4566	0.00113329
img6.png	9	1.3	0.02	29.1727	0.00120986
img7.png	9	1.3	0.02	28.8132	0.00131424
img8.png	9	1.3	0.02	27.7142	0.00169269

Medie calcolate

Media PSNR 28.75660830135966
 Media MSE 0.0013622992560759118
 Dev. Std. PSNR 0.9328668712951993
 Dev. Std. MSE 0.0002893379298389771

Figura 14 & Tabella 11: Immagini corrotte con $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9 e noise = 0.02

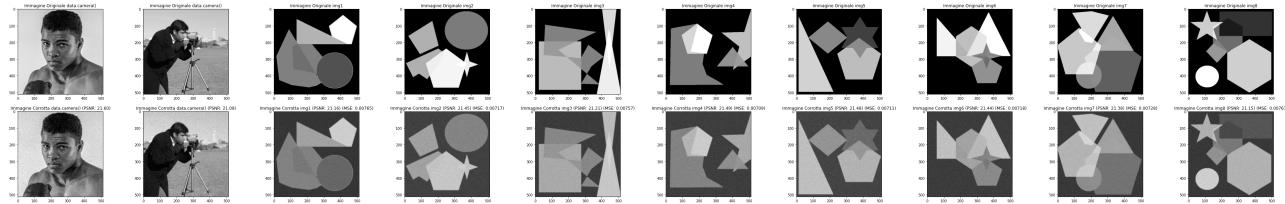


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	9	1.3	0.04	25.1912	0.00302606
pugile.png	9	1.3	0.04	26.7366	0.00212
img1.png	9	1.3	0.04	25.4375	0.00285925
img2.png	9	1.3	0.04	26.2124	0.00239202
img3.png	9	1.3	0.04	25.5474	0.0027878
img4.png	9	1.3	0.04	26.389	0.00229666
img5.png	9	1.3	0.04	26.2972	0.00234571
img6.png	9	1.3	0.04	26.1696	0.00241568
img7.png	9	1.3	0.04	25.9907	0.00251728
img8.png	9	1.3	0.04	25.3782	0.00289853

Medie calcolate

Media PSNR 25.935031436703177
 Media MSE 0.0025660139420201973
 Dev. Std. PSNR 0.4896546967680673
 Dev. Std. MSE 0.000289707809390377

Figura 15 & Tabella 12: Immagini corrotte con $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9 e noise = 0.04

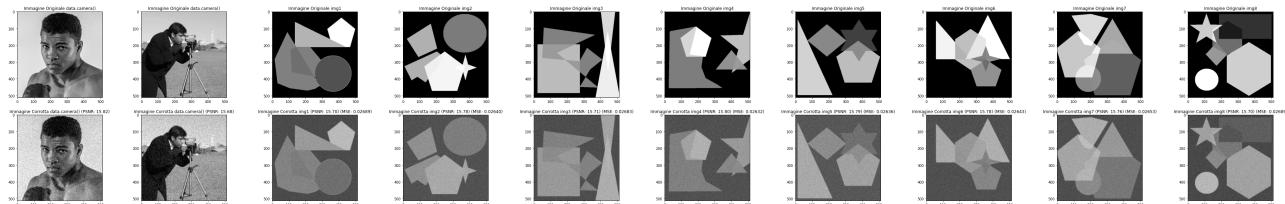


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	9	1.3	0.08	21.0692	0.00781774
pugile.png	9	1.3	0.08	21.6072	0.0069068
img1.png	9	1.3	0.08	21.1615	0.0076534
img2.png	9	1.3	0.08	21.446	0.00716802
img3.png	9	1.3	0.08	21.2099	0.00756858
img4.png	9	1.3	0.08	21.4931	0.00709073
img5.png	9	1.3	0.08	21.4791	0.0071136
img6.png	9	1.3	0.08	21.436	0.0071845
img7.png	9	1.3	0.08	21.3758	0.00728476
img8.png	9	1.3	0.08	21.1529	0.00766845

Medie calcolate

Media PSNR 21.32346241378315
 Media MSE 0.007378763783377743
 Dev. Std. PSNR 0.169144238763136
 Dev. Std. MSE 0.0002879965860764816

Figura 16 & Tabella 13: Immagini corrotte con $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9 e noise = 0.08

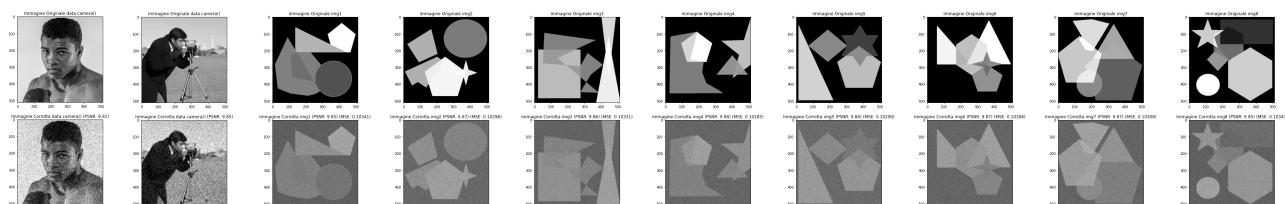


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	9	1.3	0.16	15.6736	0.0270796
pugile.png	9	1.3	0.16	15.8334	0.0261013
img1.png	9	1.3	0.16	15.7044	0.026888
img2.png	9	1.3	0.16	15.7843	0.0263979
img3.png	9	1.3	0.16	15.7146	0.0268251
img4.png	9	1.3	0.16	15.7966	0.026323
img5.png	9	1.3	0.16	15.7911	0.0263568
img6.png	9	1.3	0.16	15.7794	0.0264277
img7.png	9	1.3	0.16	15.7632	0.0265265
img8.png	9	1.3	0.16	15.7044	0.0268884

Medie calcolate

Media PSNR 15.752586448516155
 Media MSE 0.026593095526593946
 Dev. Std. PSNR 0.04888788575026526
 Dev. Std. MSE 0.00029971901539735954

Figura 17 & Tabella 14: Immagini corrotte con $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9 e noise = 0.16

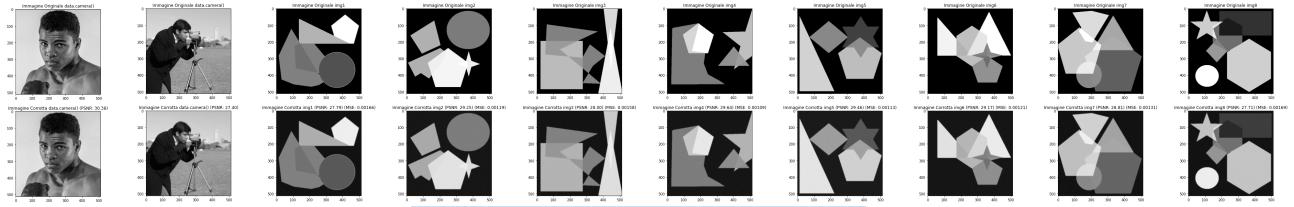


Nome Img	DimKer	Sigma	Noise Dev	PSNR	MSE
data.camera()	9	1.3	0.32	9.82272	0.104167
pugile.png	9	1.3	0.32	9.88385	0.10271
img1.png	9	1.3	0.32	9.85454	0.103406
img2.png	9	1.3	0.32	9.87346	0.102957
img3.png	9	1.3	0.32	9.85875	0.103306
img4.png	9	1.3	0.32	9.87778	0.102854
img5.png	9	1.3	0.32	9.87599	0.102897
img6.png	9	1.3	0.32	9.86911	0.10306
img7.png	9	1.3	0.32	9.8681	0.103084
img8.png	9	1.3	0.32	9.85336	0.103434

Medie calcolate

Media PSNR 9.842576581447004
 Media MSE 0.10369173965451903
 Dev. Std. PSNR 0.012567871393636715
 Dev. Std. MSE 0.0003001770981803593

Figura 18 & Tabella 15: Immagini corrotte con $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9 e noise = 0.32



Istanza del Problema

Media PSNR	28.75660830135966
Media MSE	0.001362299256075918
Dev. Std. PSNR	0.9328668712951993
Dev. Std. MSE	0.0002893379298389771

Figura 19 & Tabella 16: Immagini corrotte con noise = 0.02, $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9

Notiamo che tutte le immagini all'aumentare del valore rumore "noise" peggiorano qualitativamente: con $\sigma = 0.5$ e noise 0.02 abbiamo per esempio un valore medio del PSNR vicino a 30, invece aumentando il noise a 0.32 scende addirittura attorno a 9, con immagini che tendono a risultare molto sfocate e disturbate dal rumore guassiano. Inoltre quando il rumore è alto, le deviazioni standard tendono a diminuire: infatti i valori di PSNR e MSE sono pressocchè uguali tra di loro, quasi come se fossero stati pareggiati (o livellati).

All'aumentare delle dimensioni del Kernel ($\sigma = 1$ e dimensioni 7×7) notiamo che fissato da un rumore pari a 0.02, abbiamo un PSNR in media leggermente inferiore rispetto alla precedente dimensione del Kernel. La cosa si ripete quando si passa a $\sigma = 1.3$. I valori di PSNR delle rispettive immagini decrescono rispetto ai valori ottenuti dalle precedenti dimensioni del Kernel con lo stesso valore noise fissato.

1.3 Osservazioni

Osserviamo i risultati ottenuti su un'immagine scelta casualmente del set creato e sulle due immagini fotografiche aggiunte.

Ricordiamo che più è alto il valore del PSNR maggiore sarà la vicinanza dell'immagine corrotta all'immagine originale.

1.3.1 Analisi immagine geometrica

Analizziamo l'immagine img8.png al variare del valore σ con noise fissato a 0.02:

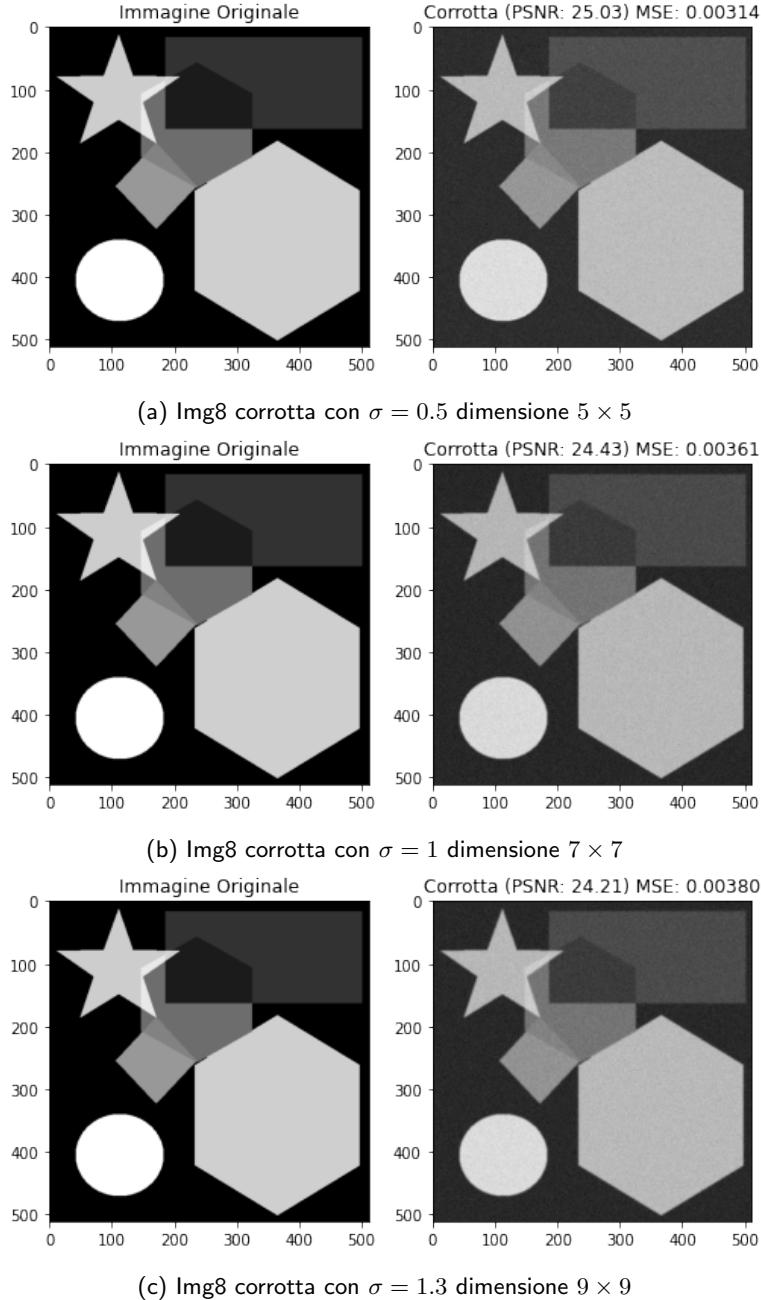
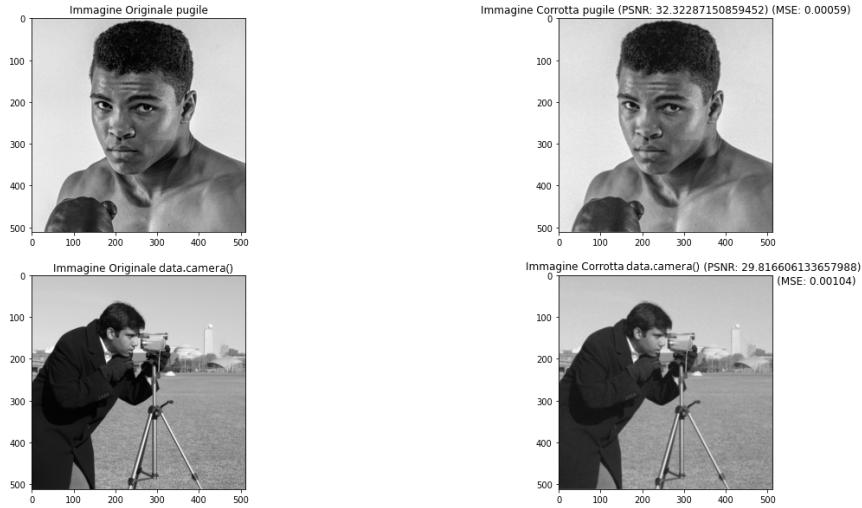


Figura 20: Immagine geometrica corrotta al variare di σ

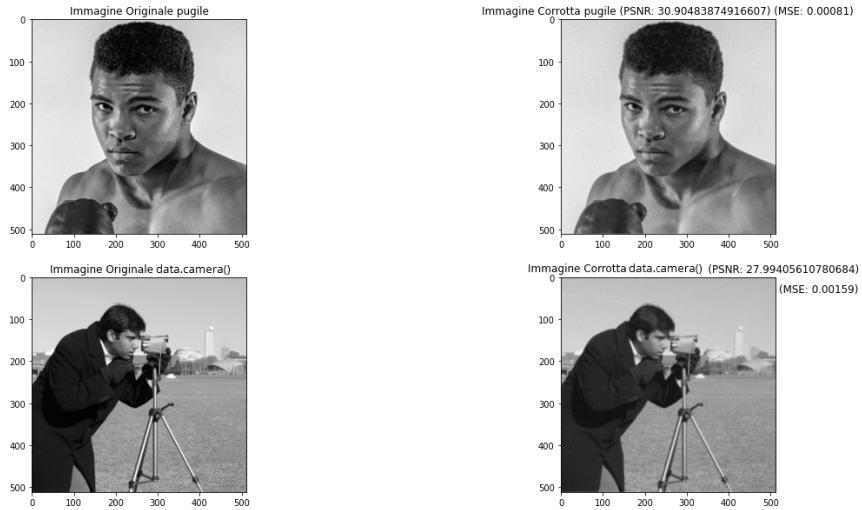
Le figure di sinistra rappresentano l'immagine originale, invece a destra sono riportate le immagini corrotte con i rispettivi valori di PSNR e MSE. Notiamo che all'aumentare delle dimensioni di sigma il valore di PSNR diminuisce: ciò denota un peggioramento della qualità dell'immagine. Infatti le immagini subiscono un affievolimento dell'intensità della scala dei colori e i contorni delle varie figure geometriche perdono di fermezza.

1.3.2 Analisi immagini fotografiche

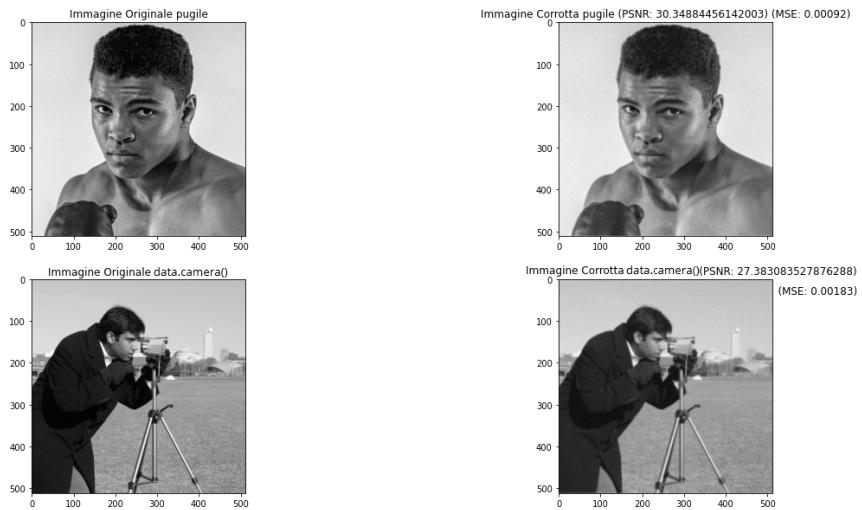
Analizziamo le immagini fotografiche al variare del valore σ con noise fissato a 0.02:



(a) immagini corrotte con $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5



(b) immagini corrotte con $\sigma = 1$ dimensione 7×7



(c) immagini corrotte con $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9

Figura 21: Immagini fotografiche corrotte al variare di σ

Si nota un'altra volta che all'aumentare delle dimensioni di σ diminuisce il PSNR e l'immagine perde di incisività (nitidezza). In ogni caso nelle versioni corrotte, benché risultino visivamente peggiori, si riesce ancora a ben distinguere il soggetto in primo piano, anche se sfocato, in tutte le immagini.

2 Ricostruzione di un'immagine rispetto una versione corrotta

Una possibile ricostruzione dell'immagine originale x partendo dall'immagine corrotta b è la soluzione naïve data dal minimo del seguente problema di ottimizzazione:

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

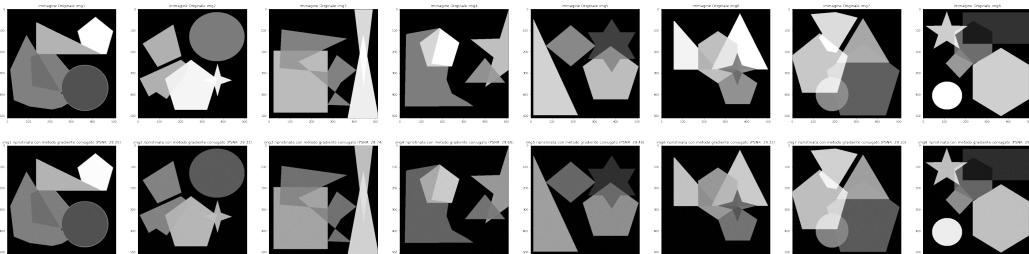
Da ora in poi, come istanza del problema durante l'analisi ci baseremo sulle ricostruzioni di quelle immagini con parametri $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9 noise = 0.02.

2.1 Metodo del Gradiente Coniugato

Il metodo del gradiente coniugato è un algoritmo per la risoluzione di un sistema lineare la cui matrice associata è simmetrica e definita positiva, e consente di risolvere il sistema in un numero di iterazioni che è al massimo n (in aritmetica esatta).

La funzione f da minimizzare è data dalla formula $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$, il cui gradiente ∇f è dato da $\nabla f(x) = A^T Ax - A^T b$.

Utilizzando il metodo del gradiente coniugato implementato nella funzione `minimize` abbiamo calcolato la soluzione naïve.



(a) Immagini geometriche ripristinate con metodo del gradiente coniugato naïve



(b) Immagine ritratto ripristinata con metodo del gradiente coniugato naïve

(c) Immagine con testo ripristinata con metodo del gradiente coniugato naïve

Figura 22: Analisi immagini ripristinate con metodo del gradiente coniugato naïve

Immagine	PSNR corrotte	PSNR riprist.
img1.png	27.7886	28.20
img2.png	29.2539	29.33
img3.png	28.0014	28.74
img4.png	29.6382	29.60
img5.png	29.4566	29.49
img6.png	29.1727	29.32
img7.png	28.8132	29.10
img8.png	27.7142	28.43
puglie.png	30.3576	30.36
data.camera()	27.4138	27.48

Tabella 17: Valori PSNR delle immagini ricostruite con il metodo del gradiente coniugato naïve

```

1  from scipy.optimize import minimize
2  def f(x, B, labda = 0):
3      X = x.reshape(m,n)
4      res = 0.5*(np.linalg.norm(A(X, K)-B))**2 + 0.5*labda*(np.linalg.norm(X))**2
5      return np.sum(res)
6  def df(x, B, labda=0):
7      X = x.reshape(m,n)
8      res = AT(A(X, K)-B, K) + labda*X
9      RES = np.reshape(res, m*n)
10     return RES
11
12 func = lambda x: f(x, B) #o exec
13 grad_func = lambda x: df(x, B)
14 res = minimize(func, np.zeros(b.shape), method="CG", jac=grad_func, options={
15     'disp': True, 'maxiter':6})
16 RES = res.x.reshape(m,n)
17 PSNR = metrics.peak_signal_noise_ratio(X, RES) #alfabeto[4] solo lettere
18
18 plt.figure(figsize=(20,15))
19 plt.title(f'Ripristinata con metodo gradiente coniugato (PSNR: {PSNR})')
20 plt.imshow(RES, cmap="gray", vmin=0, vmax=1)

```

Figura 23: Codice in Python 3 del Metodo del Gradiente Coniugato applicato ad una singola immagine

2.2 Metodo del Gradiente implementato con ricerca in linea inesatta (backtracking)

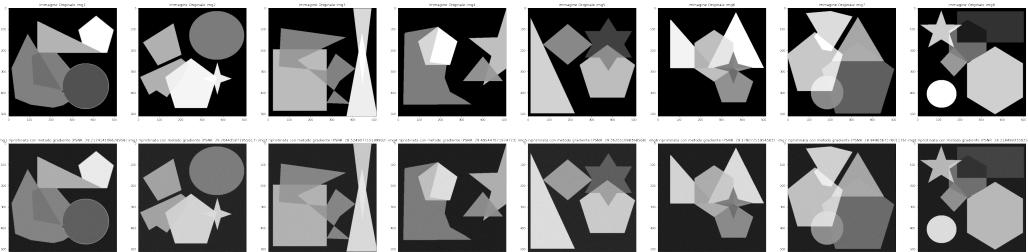
Il metodo del gradiente è un algoritmo che cerca di trovare l'argomento del minimo globale, ovvero: un vettore x^* è un punto di minimo globale di $f(x)$ se $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in R^n$.

Analogamente, un vettore x^* è un punto di minimo globale in senso stretto di $f(x)$ se $f(x^*) < f(x) \forall x \in R^n - \{x^*\}$.

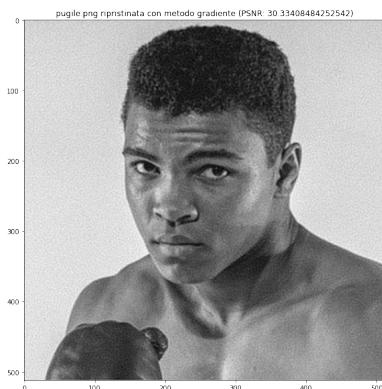
In termini molto generali si può dire che la ricerca in linea esatta è impiegata essenzialmente ad assicurare la convergenza globale dell'algoritmo, mentre la rapidità di convergenza dipende in prevalenza dalla direzione di ricerca.

Tuttavia, un valore di a_k poco appropriato può distruggere le proprietà di rapidità di convergenza associate alla scelta di p_k .

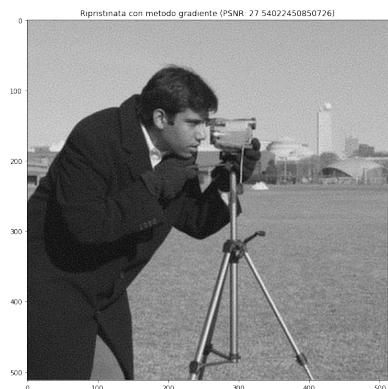
Per questi motivi, anziché fissare fin dall'inizio α , ad ogni iterazione calcoliamo il passo più opportuno (ricerca in linea inesatta).



(a) Immagini geometriche ripristinate con il metodo del gradiente



(b) Immagine ritratto ripristinata con il metodo del gradiente



(c) Immagine fotografica ripristinata con il metodo del gradiente

Figura 24: Immagini analizzate ripristinate con il Metodo del Gradiente

Immagine	PSNR corrotte	PSNR riprist.
img1.png	27.7886	28.217
img2.png	29.2539	29.204
img3.png	28.0014	28.525
img4.png	29.6382	29.495
img5.png	29.4566	29.362
img6.png	29.1727	29.178
img7.png	28.8132	28.949
img8.png	27.7142	28.218
puglie.png	30.3576	30.334
data.camera()	27.4138	27.540

Tabella 18: Valori PSNR delle immagini ricostruite con il metodo del gradiente

```

● ● ●
1 listaValGradG = []
2 listaErrRelG = []
3 listaPSNRG = []
4 listaValFunG = []
5
6 def next_step(x, grad, B, labda = 0):
    # backtracking procedure for the choice of the steplength
7     alpha=1.1
8     c1 = 0.25
9     p=-grad
10    j=0
11    jmax=10
12
13    #condizioni che servono per soddisfare dei criteri di convergenza - condizioni di Wolfe
14    while ((f(x + alpha*p, B, labda) > f(x, B, labda)+c1*alpha*grad.T@p) and j <jmax):
15        alpha = alpha*0.5
16        j+=1
17    return alpha
18
19 def gradient_minimize(B, labda= 0, maxit=19, abstopp = 1.e-6):
20     x_last =np.zeros(m*n)
21     k = 0
22     while (np.linalg.norm(df(x_last, B, labda))>abstopp and k < maxit):
23         k=k+1
24         grad = df(x_last, B, labda)
25         step = next_step(x_last, grad, B, labda)
26
27         listaValFunG.append(f(x_last, B))
28         x_last=x_last-step*grad
29
30         listaValGradG.append(np.linalg.norm(grad.reshape(m,n), "fro"))
31         listaErrRelG.append(np.linalg.norm(x_last.reshape(m,n) - X, "fro")/np.linalg.norm(X, "fro"))
32         listaPSNRG.append(metrics.peak_signal_noise_ratio(X, x_last.reshape(m,n)))
33
34     return x_last
35
36 z_naive = gradient_minimize(B, labda = 0, maxit = 50)
#maxit = 27. Messo maxit = 50 per studiare metodi e loro velocità
37 PSNR = metrics.peak_signal_noise_ratio(X, z_naive.reshape(m,n))
#cambiare anche qui ogni volta nome immagine originale
38 plt.figure(figsize=(30,10))
39 plt.title(f'Ripristinata con metodo gradiente (PSNR: {PSNR})')
40 plt.imshow(z_naive.reshape(m,n), cmap="gray")

```

Figura 25: Codice in Python 3 del metodo del gradiente applicato ad una singola immagine

2.2.1 Risultati della soluzione naïve

Nella soluzione naïve notiamo che con entrambi i metodi otteniamo ricostruzioni con PSNR leggermente superiori (e in alcuni casi addirittura di poco inferiori) rispetto ai PSNR delle immagini corrotte iniziali.

2.3 Metodo del Gradiente e Metodo del Gradiente Coniugato a confronto

Metodo di discesa generale in pseudocode

```

1:  $x_0 \in R^n, k = 0$ 
2: while  $\nabla f(x_k) \neq 0$  and  $k < \text{maxit}$  do ▷ maxit è il massimo numero di iterazioni
3:   calcolare la direzione di discesa  $d_k$  (infuenzato da  $\nabla f(x_k)$ )
4:   calcolare il passo di discesa  $\alpha_k$ 
5:    $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ 
6:    $k = k + 1$ 
7: end while
8: return  $x_{last}$ 
```

Analizziamo il comportamento del gradiente utilizzando i due metodi sull'immagine `data.camera()`:

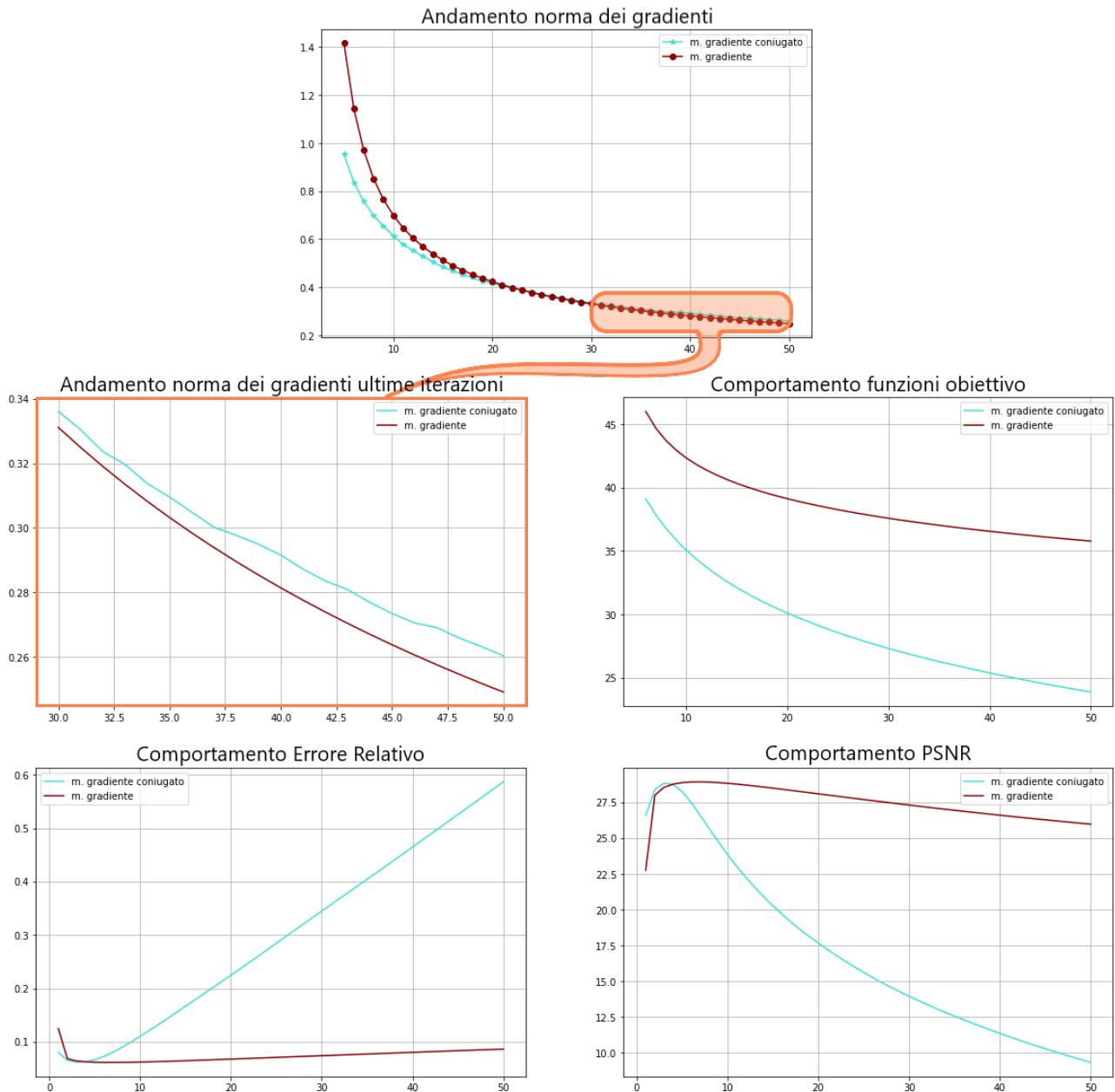


Figura 26: Gradiente immagine `data.camera()`

Per quanto riguarda l'immagine fotografica `pugile.png`, abbiamo riscontrato:

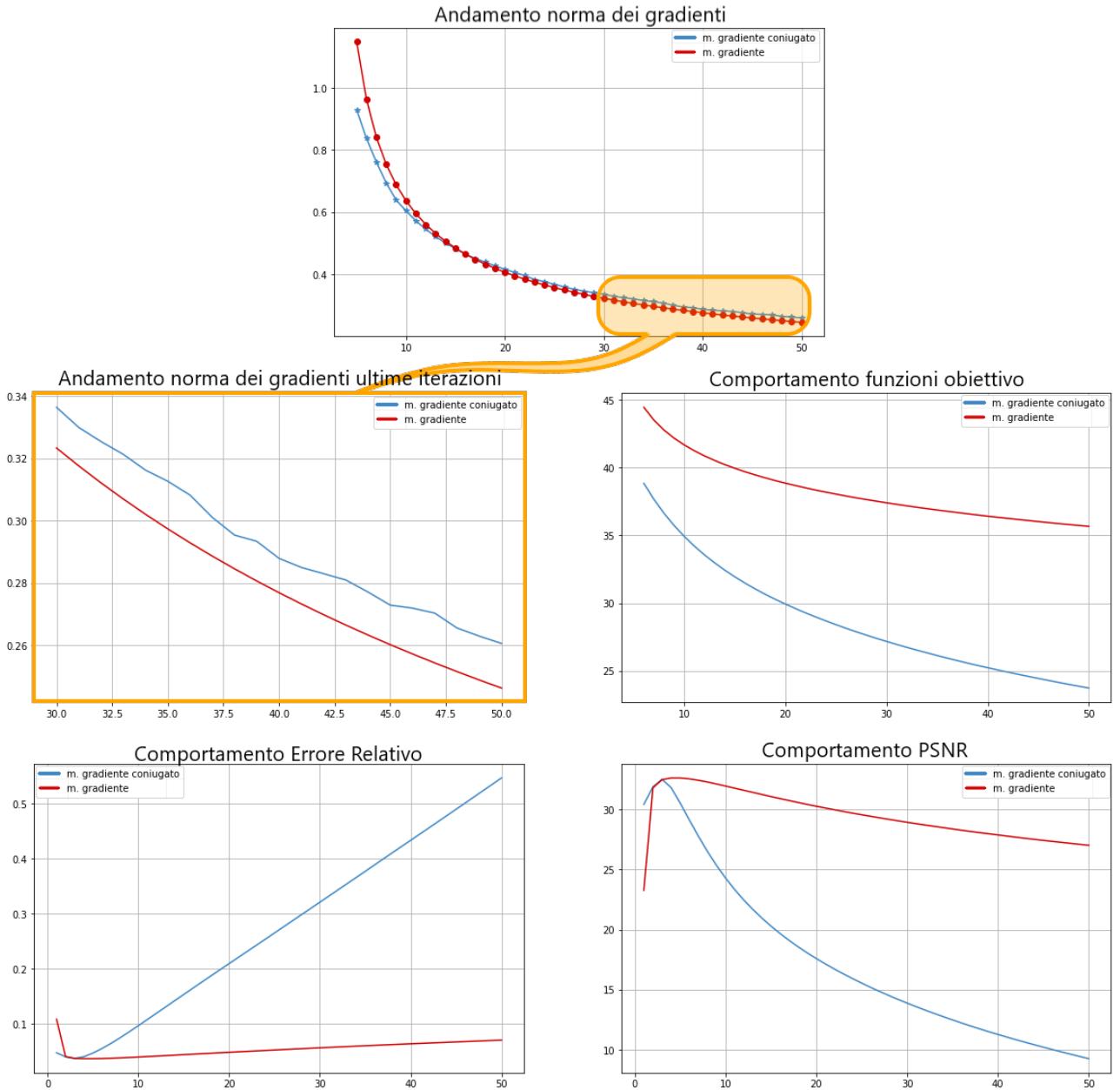


Figura 27: Gradiente immagine fotografica

Prendendo "in prestito" il problema di ottimizzazione naïve, abbiamo "registrato" su due esecuzioni distinte (la prima su `data.camera()` (Figura 26) e la seconda su `pugile` (Figura 27)) il comportamento dei metodi numerici utilizzati (in termini di numero di iterazioni, andamento dell'errore, della funzione obiettivo e della norma del gradiente), ottenendo un andamento generale comune ad entrambe le esecuzioni.

Abbiamo riscontrato che il metodo del gradiente con ricerca in linea inesatta è più veloce a raggiungere un intorno di un punto x^* tale che $\nabla f(x^*) = 0$ rispetto al metodo del gradiente coniugato (come si può osservare nel focus delle ultime iterazioni dell'andamento della norma del gradiente).

Per questo motivo, considerando che i metodi di discesa sono definiti dall'iterazione **generale**

$$x_{k+1} = x_k - a_k \nabla f(x_k)$$

e si differenziano per la scelta della direzione di discesa e della lunghezza del passo d_k e a_k , le quali sono fortemente influenzate da $\nabla f(x_k)$ ([slide Metodi di Discesa](#) pg 65/79 per metodo del gradiente coniugato) allora avverrà che nel metodo del gradiente si presenterà prima una serie di iterati molto vicini l'uno dall'altro che si allontanano meno velocemente dalla vera soluzione, mantenendo quindi un PSNR quasi costante, poiché all'iterato successivo sommiamo una quantità molto piccola dal momento che viene moltiplicata per $\nabla f(x)$ la quale è molto vicino a 0.

Dall'altra parte, l'andamento della funzione obiettivo nel metodo del gradiente coniugato è più ripido poiché raggiunge meno velocemente un intorno dove $\nabla f(x^*) = 0$ quindi si allontana di più dalla vera soluzione, con ripercussioni sul PSNR ed errore relativo.

3 Regolarizzazione

I metodi regolarizzati rinunciano a trovare la soluzione esatta del precedente problema di ottimizzazione, calcolando invece la soluzione di un problema leggermente "deviato", ovvero prendendo meno di riferimento il termine noto b che corrisponde all'immagine disturbata dal rumore. Quest'ultimo viene chiamato problema regolarizzato o regressione.

3.1 Regolarizzazione del Metodo del Gradiente Coniugato minimize

In linea generale vediamo che al crescere dei λ , il PSNR fino a $\lambda \simeq 0.02$ continua ad aumentare, quindi migliora l'immagine, raggiunge un picco massimo e successivamente decresce. Quindi deduciamo che tramite la regolarizzazione si ottiene una soluzione o un PSNR migliore, ma non per qualsiasi valore λ .

3.1.1 Immagini geometriche regolarizzate

Grafici andamento PSNR, media PSNR e MSE nella ricostruzione delle immagini con il metodo del gradiente coniugato regolarizzato:

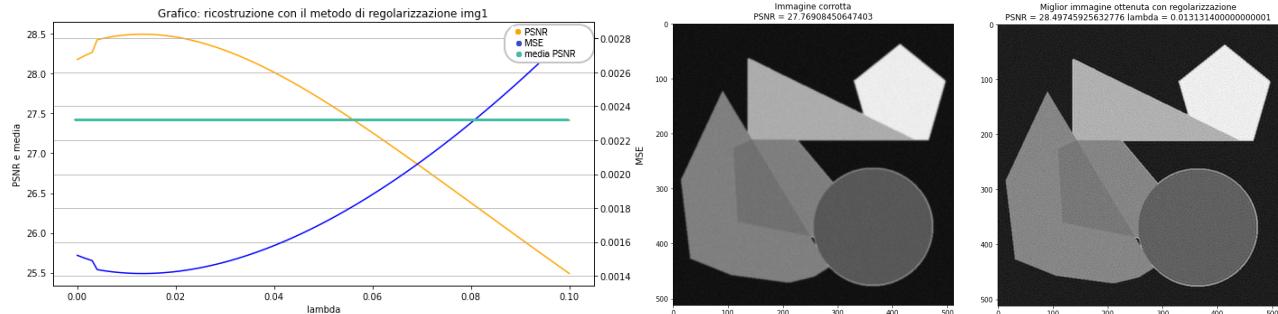


Figura 28: Esempio di regolarizzazione

Figura 29: Ricostruzione immagine geometrica img1.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

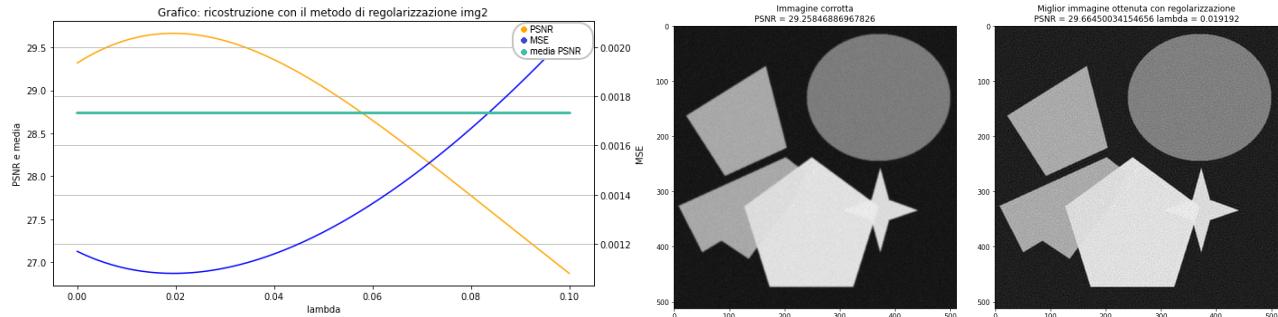


Figura 30: Ricostruzione immagine geometrica img2.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

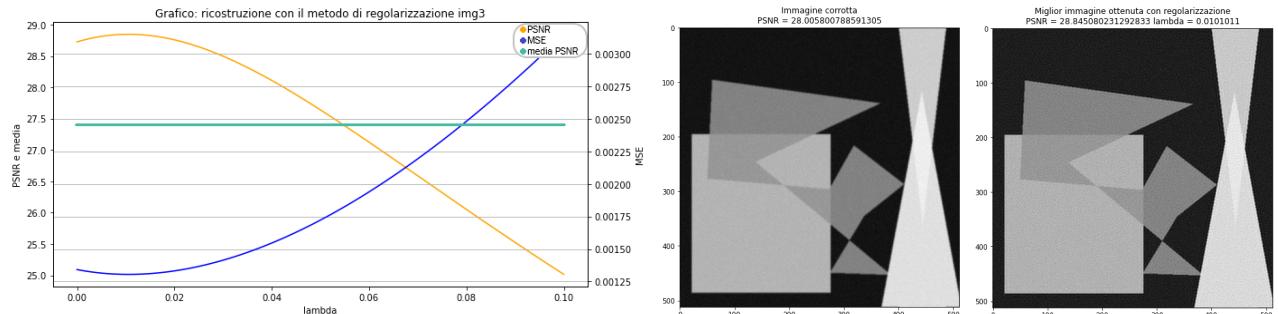


Figura 31: Ricostruzione immagine geometrica img3.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

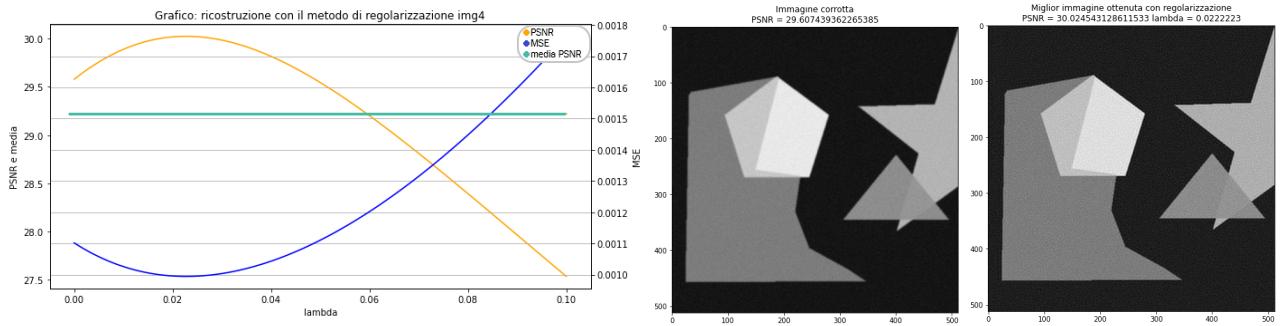


Figura 32: Ricostruzione immagine geometrica img4.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

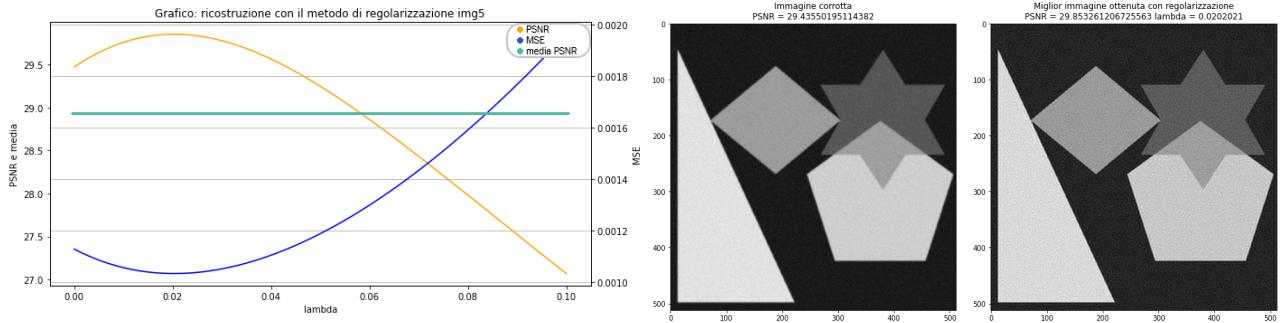


Figura 33: Ricostruzione immagine geometrica img5.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

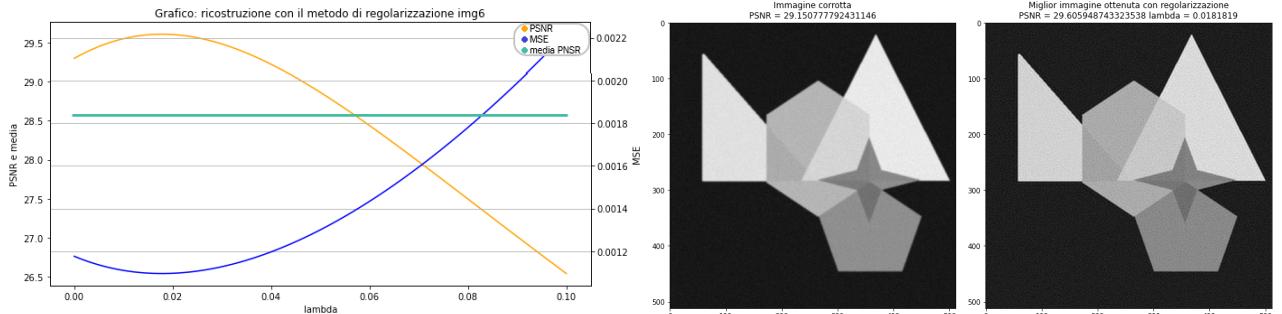


Figura 34: Ricostruzione immagine geometrica img6.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

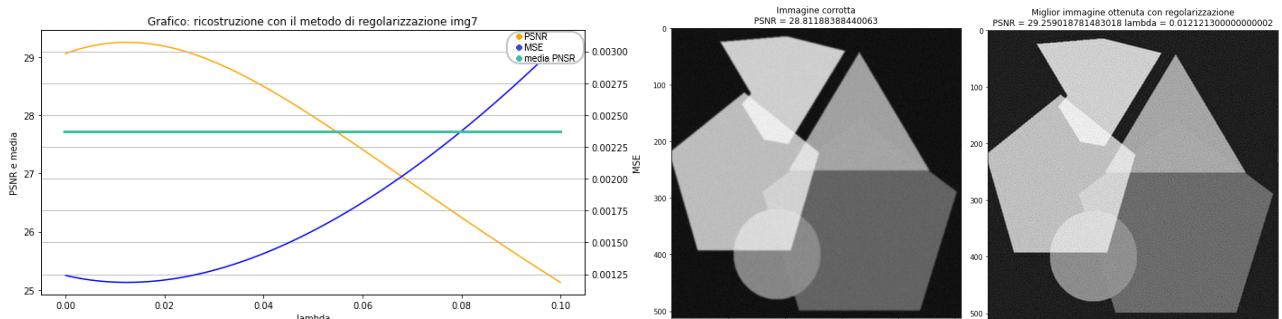


Figura 35: Ricostruzione immagine geometrica img7.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

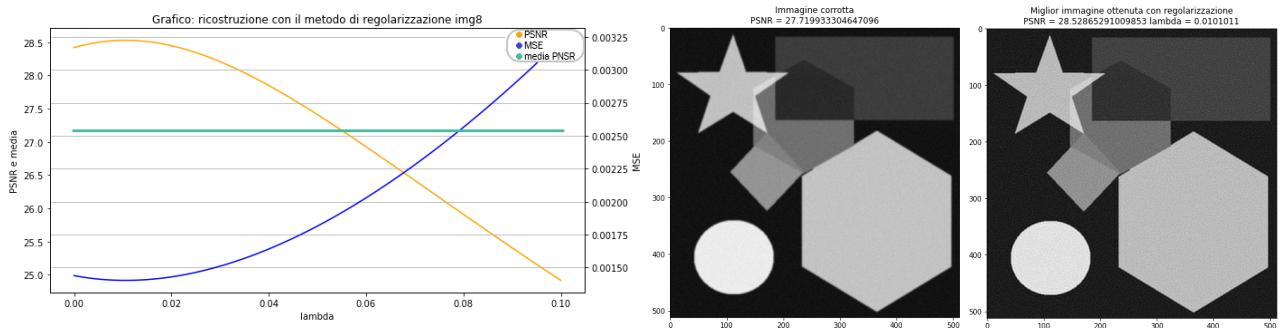


Figura 36: Ricostruzione immagine geometrica img8.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

3.1.2 Immagini fotografiche regolarizzate

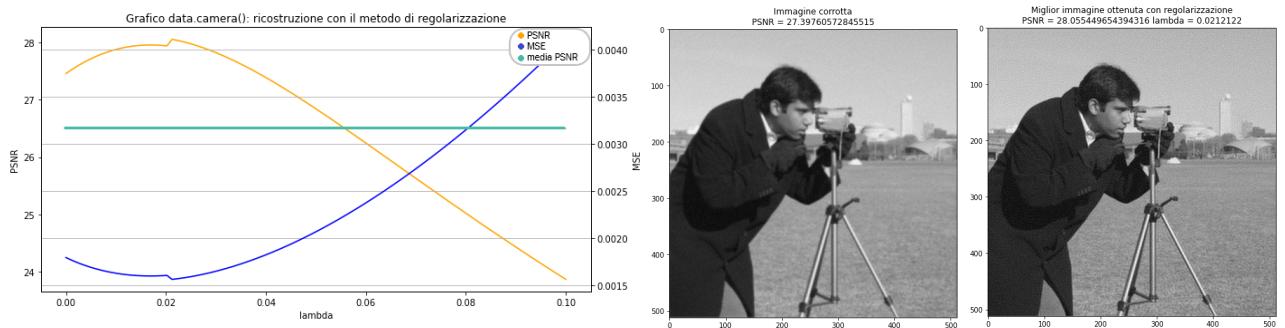


Figura 37: Ricostruzione immagine fotografica data.camera() [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

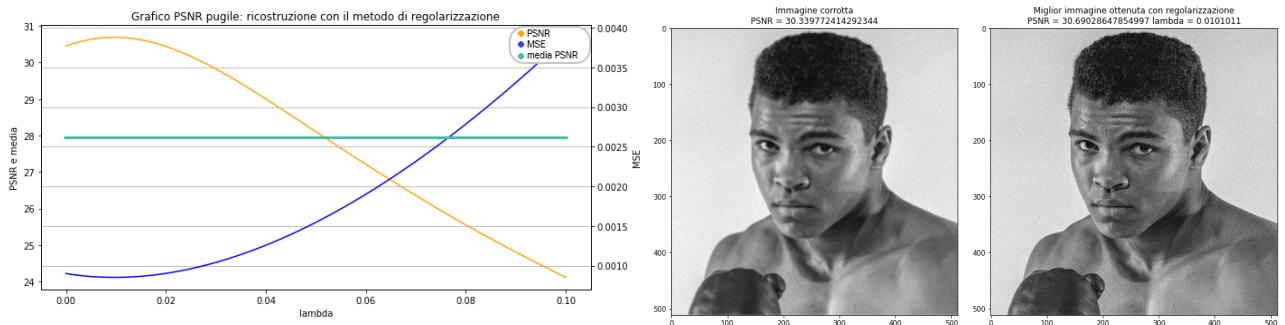


Figura 38: Ricostruzione immagine fotografica pugile.png [a destra: immagine corrotta, sinistra: miglior immagine ottenuta con regolarizzazione]

3.2 Metodo di Regolarizzazione di Tikhonov

Per ridurre gli effetti del rumore nella ricostruzione si può altrimenti aggiungere un termine di regolarizzazione di Tikhonov.

Si considera quindi il seguente problema di ottimizzazione:

Al posto di risolvere direttamente il sistema lineare (se il sistema è quadrato) o di minimizzare la norma 2 del residuo $\|Ax_\epsilon - b_\epsilon\|_2^2$ (se il sistema è rettangolare),

si aggiunge un termine "rilassatore" al problema naïve precedente e lo si minimizza, ad esempio

$$\|Ax_\epsilon - b_\epsilon\|_2^2 + \gamma_\epsilon \|x_\epsilon\|_2^2$$

$$Ax_\epsilon = b_\epsilon \text{ con } b_\epsilon = b + \epsilon$$

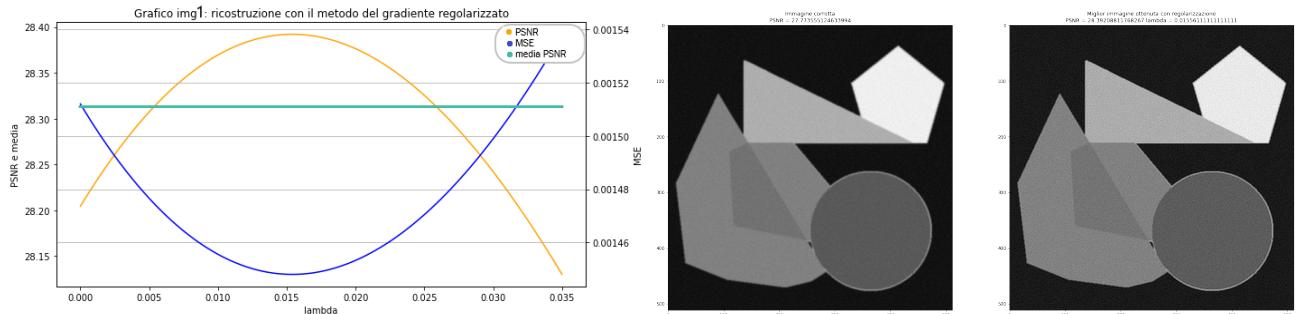


Figura 39: Ricostruzione immagine geometrica img1.png

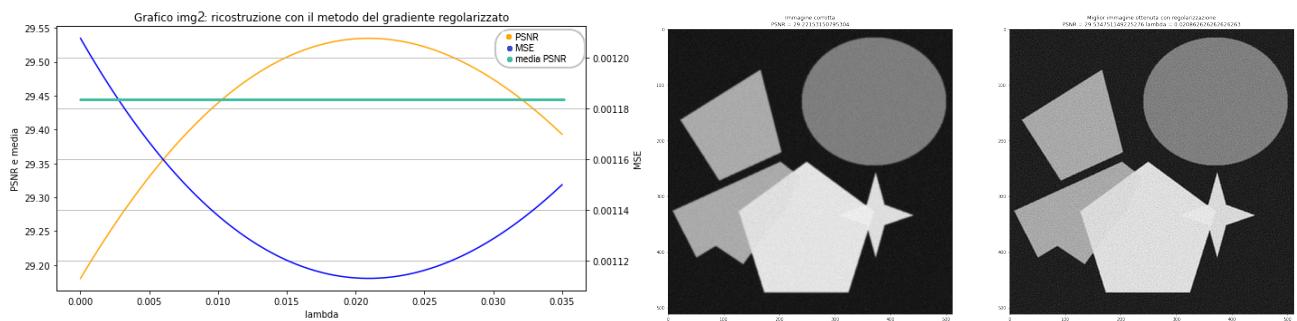


Figura 40: Ricostruzione immagine geometrica img2.png

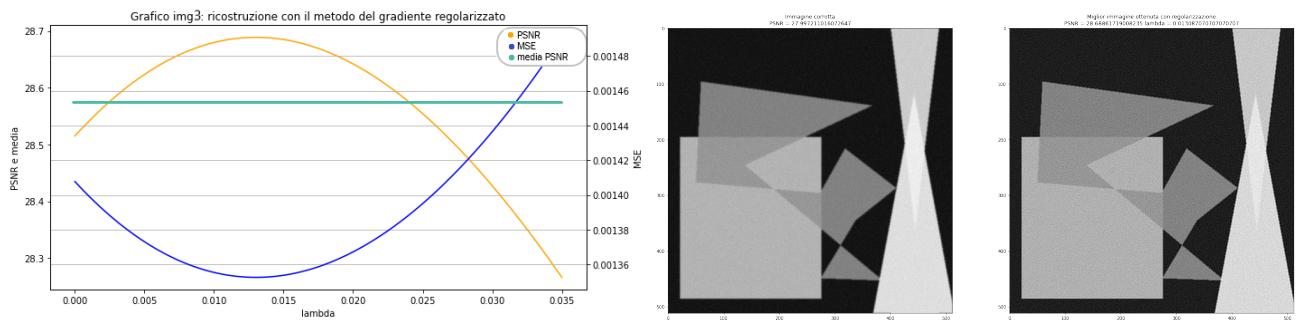


Figura 41: Ricostruzione immagine geometrica img3.png

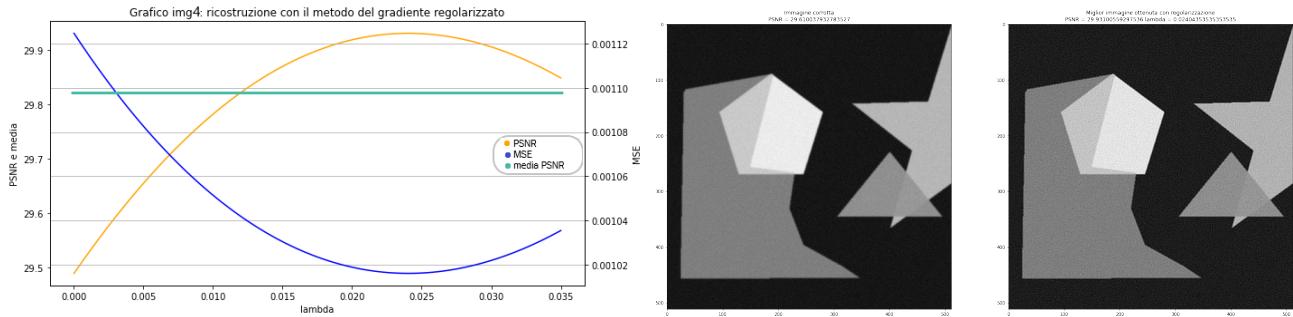


Figura 42: Ricostruzione immagine geometrica img4.png

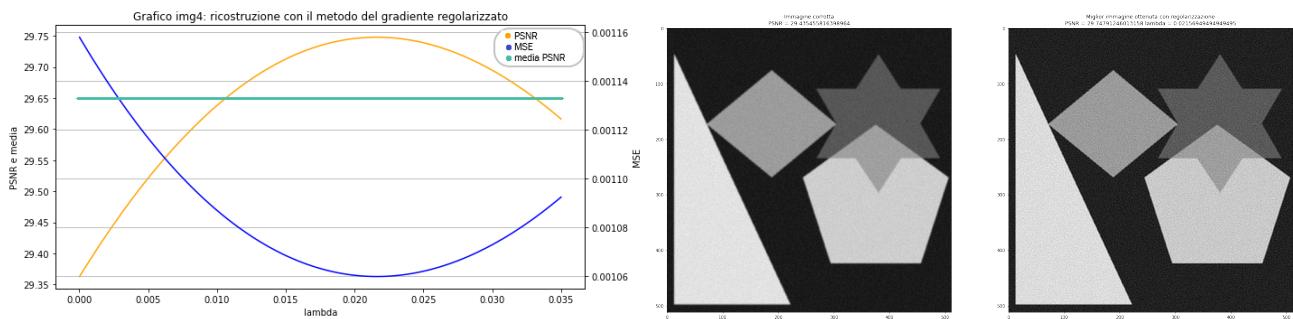


Figura 43: Ricostruzione immagine geometrica img5.png

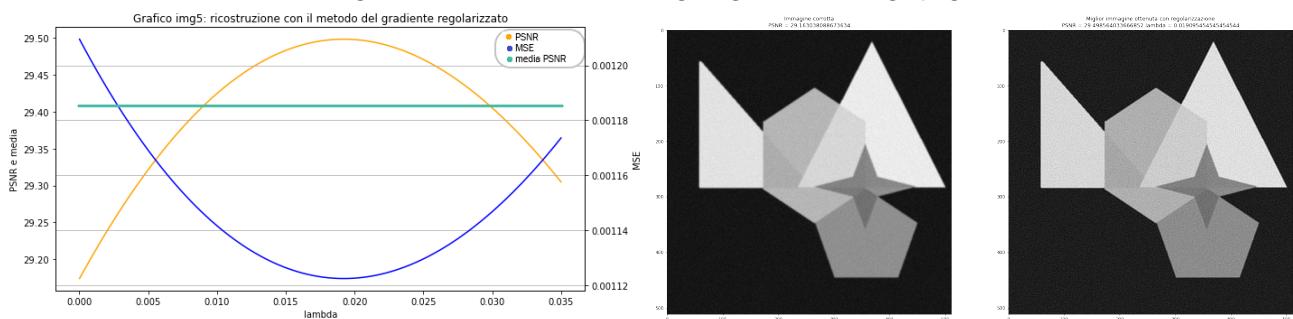


Figura 44: Ricostruzione immagine geometrica img6.png

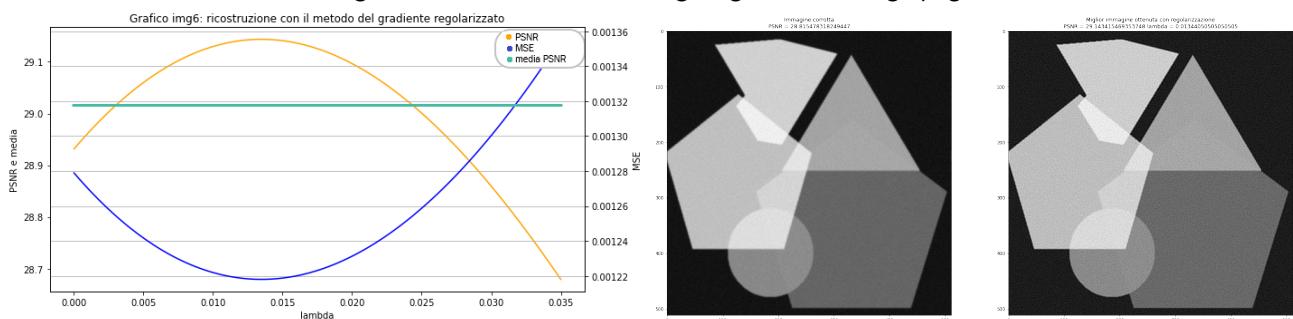


Figura 45: Ricostruzione immagine geometrica img7.png

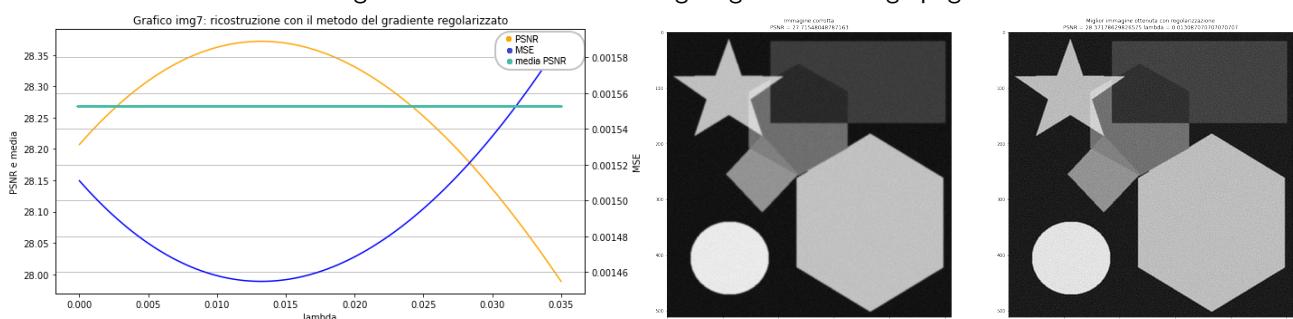


Figura 46: Ricostruzione immagine geometrica img8.png

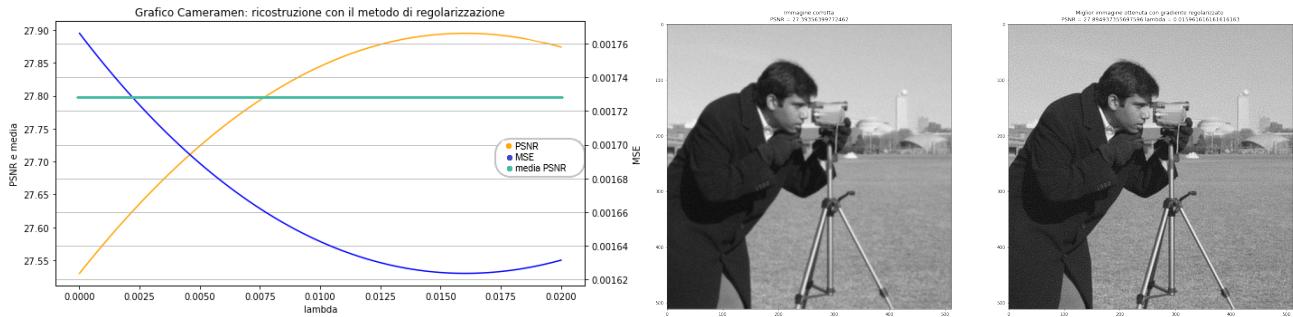


Figura 47: Ricostruzione immagine fotografica data.camera()

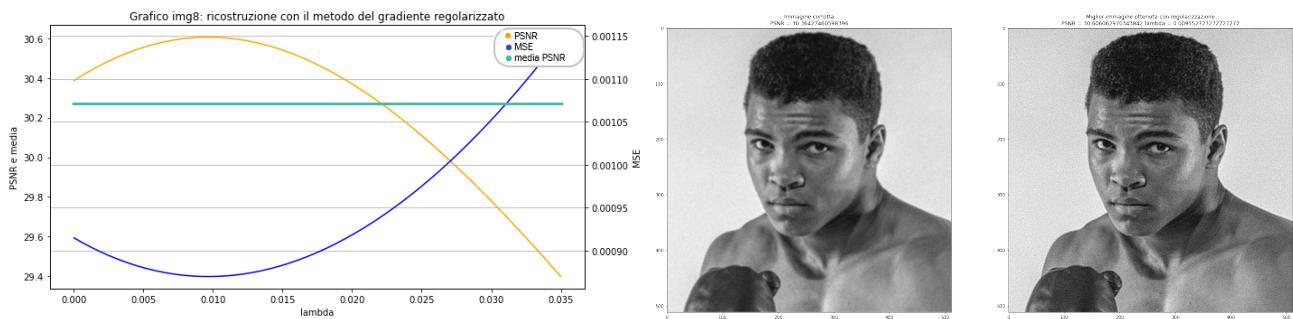


Figura 48: Ricostruzione immagine fotografica pugile.png

4 Variazione Totale

Tramite un algoritmo possiamo recuperare immagini sfocate basandoci sulla Variazione totale partendo da una Blurring Point-Spread function di un'immagine.

La variazione totale è definita dalla seguente formula:

$$TV(u) = \sum_i^n \sum_j^m \sqrt{\|\nabla u(i,j)\|_2^2 + \epsilon^2}$$

Per calcolare il gradiente dell'immagine ∇u usiamo la funzione `np.gradient` che approssima la derivata per ogni pixel calcolando la differenza tra pixel adiacenti.

I risultati sono due immagini della stessa dimensione dell'immagine in input, una che rappresenta il valore della derivata orizzontale dx e l'altra della derivata verticale dy. Il gradiente dell'immagine nel punto (i,j) è quindi un vettore di due componenti, uno orizzontale contenuto in dx e uno verticale in dy.

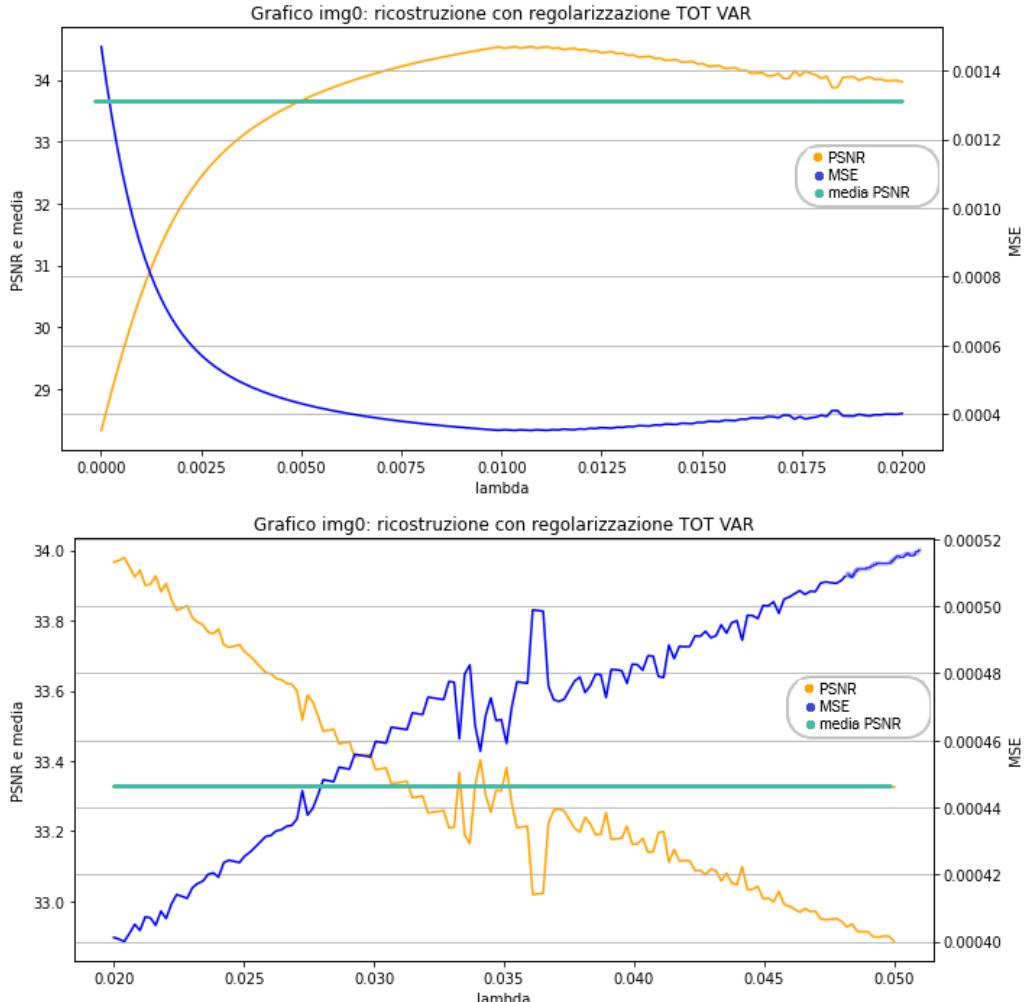
$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda TV(u)$$

il cui gradiente ∇f è dato da:

$$\nabla f(x) = (A^T Ax - A^T b) + \lambda \nabla TV(x)$$

4.1 Variazione totale delle immagini geometriche:

4.1.1 Immagine geometrica img2.png



(a) Proseguimento oscillante dei valori PSNR con regolarizzazione TOT VAR i quali però, per lambda che tende a infinito, tendono a 0

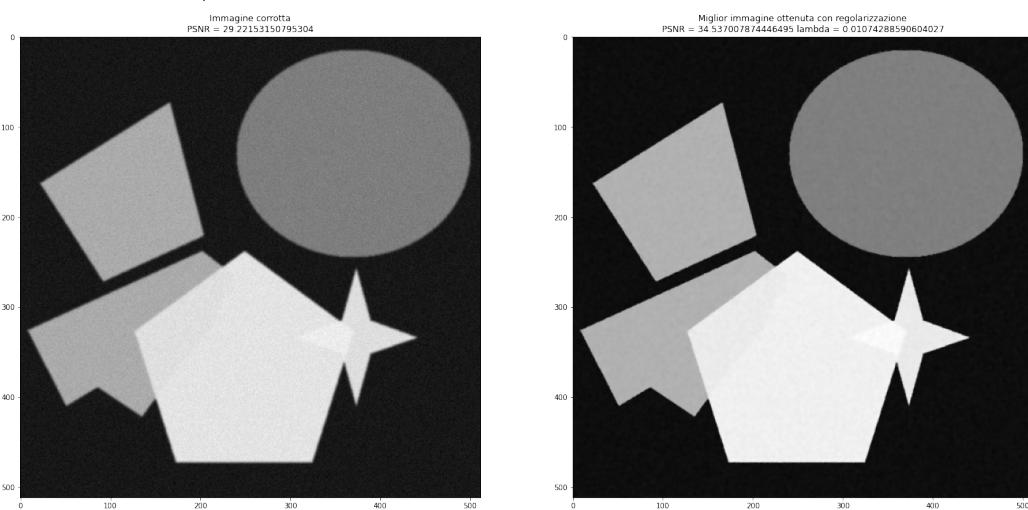
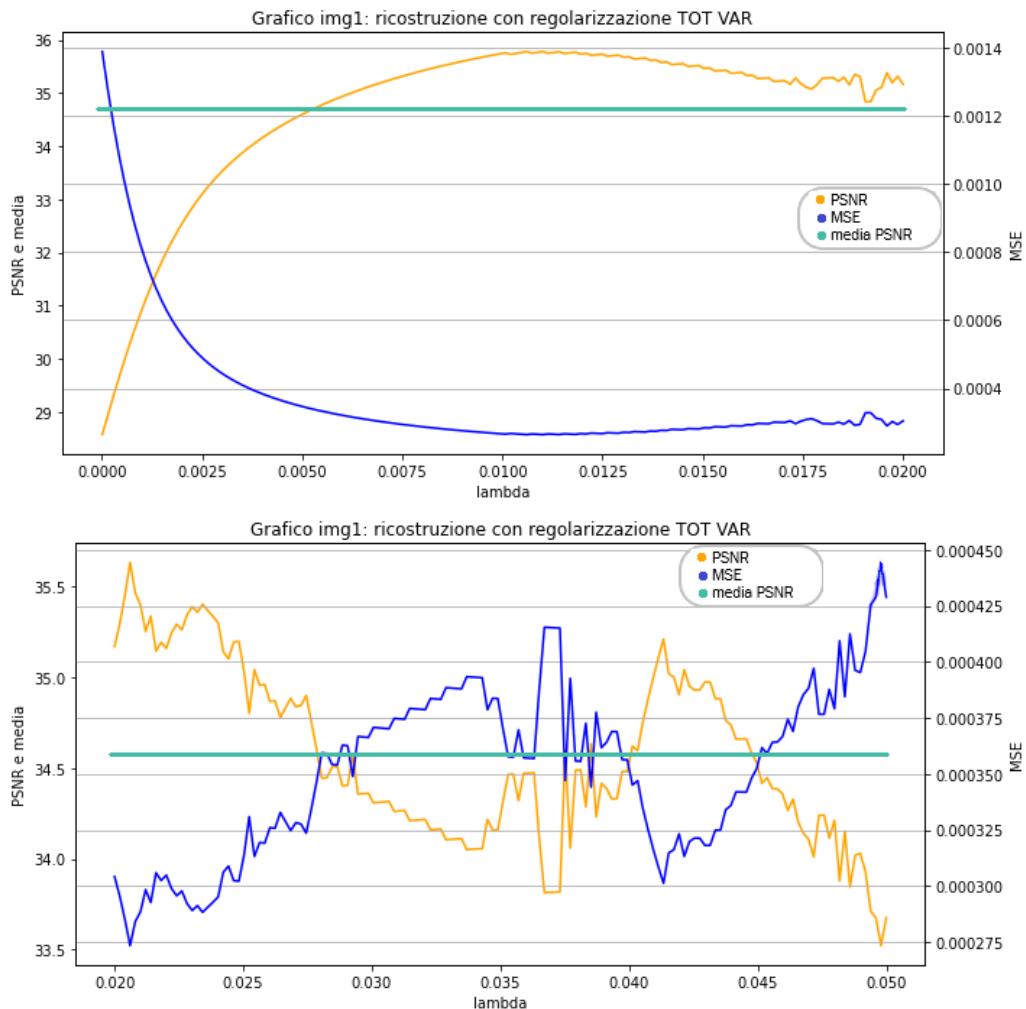


Figura 49: Immagine Corrotta, Immagine Ricostruita

4.1.2 Immagine geometrica img4.png



(a) Proseguimento oscillante dei valori PSNR con regolarizzazione TOT VAR i quali però, per lambda che tende a infinito, tendono a 0

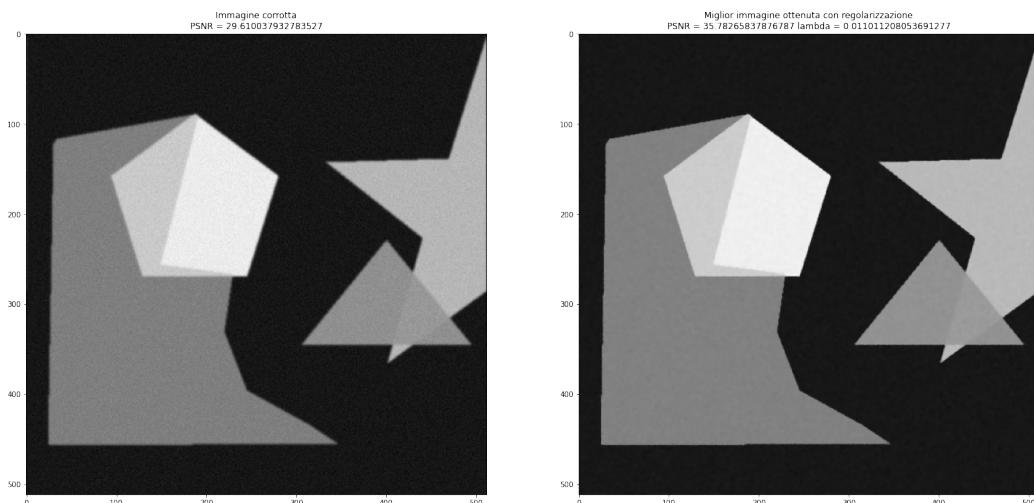
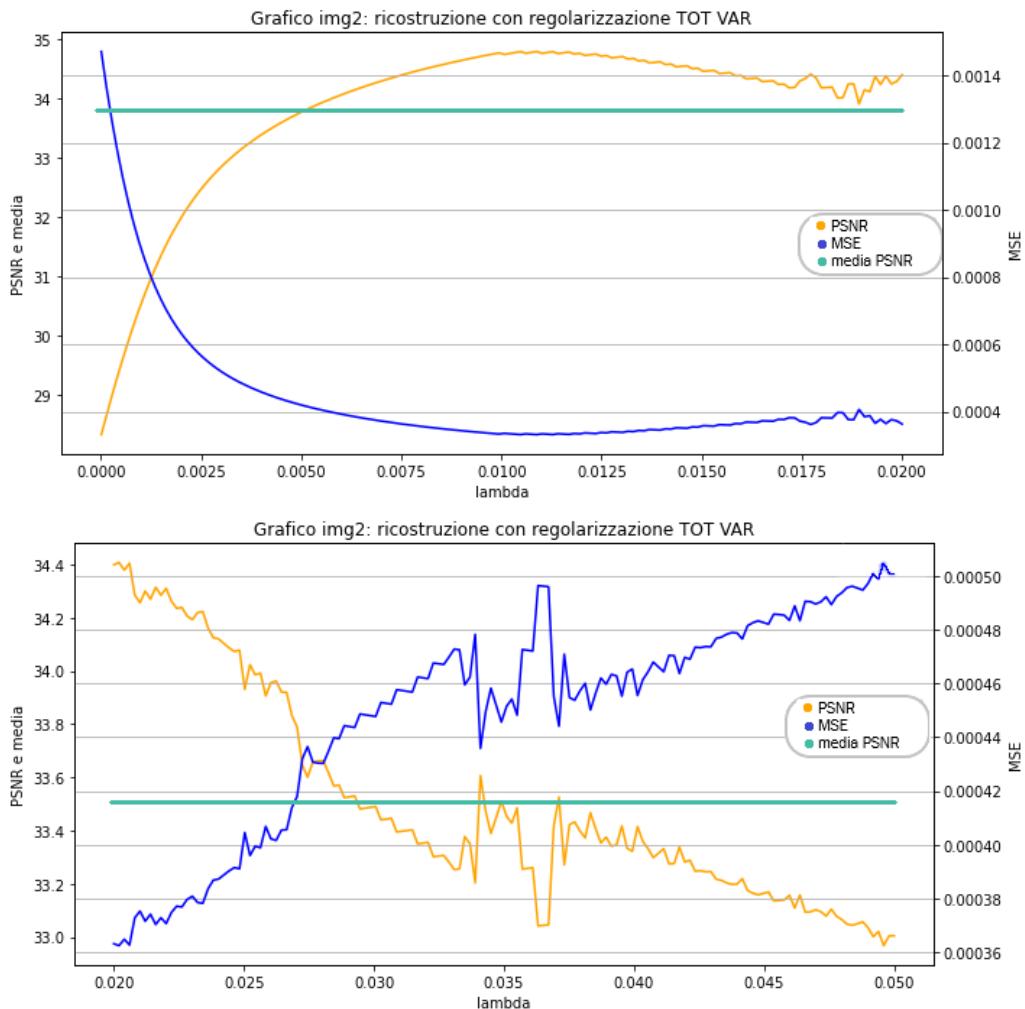


Figura 50: Immagine Corrotta, Immagine Ricostruita

4.1.3 Immagine geometrica img6.png



(a) Proseguimento oscillante dei valori PSNR con regolarizzazione TOT VAR i quali però, per lambda che tende a infinito, tendono a 0

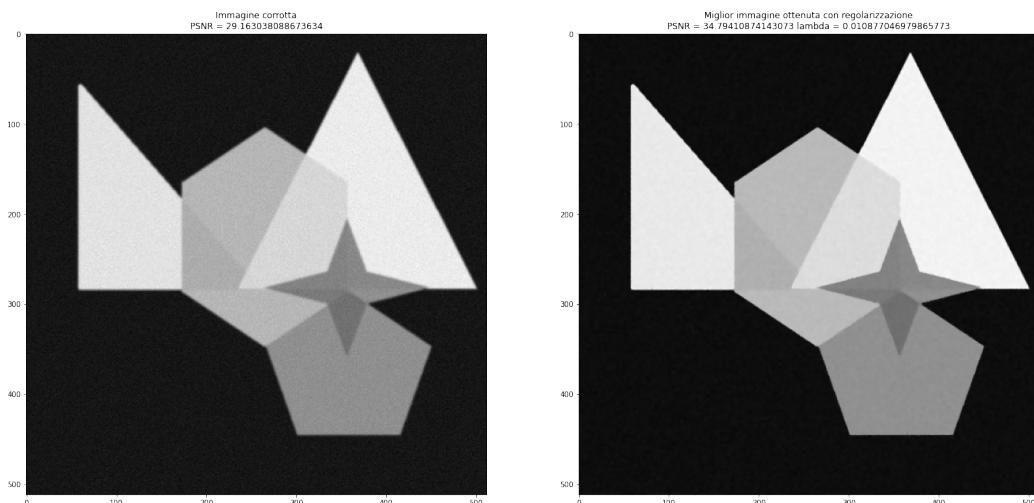


Figura 51: Immagine Corrotta, Immagine Ricostruita

4.2 Variazione totale dell'immagine ritratto:

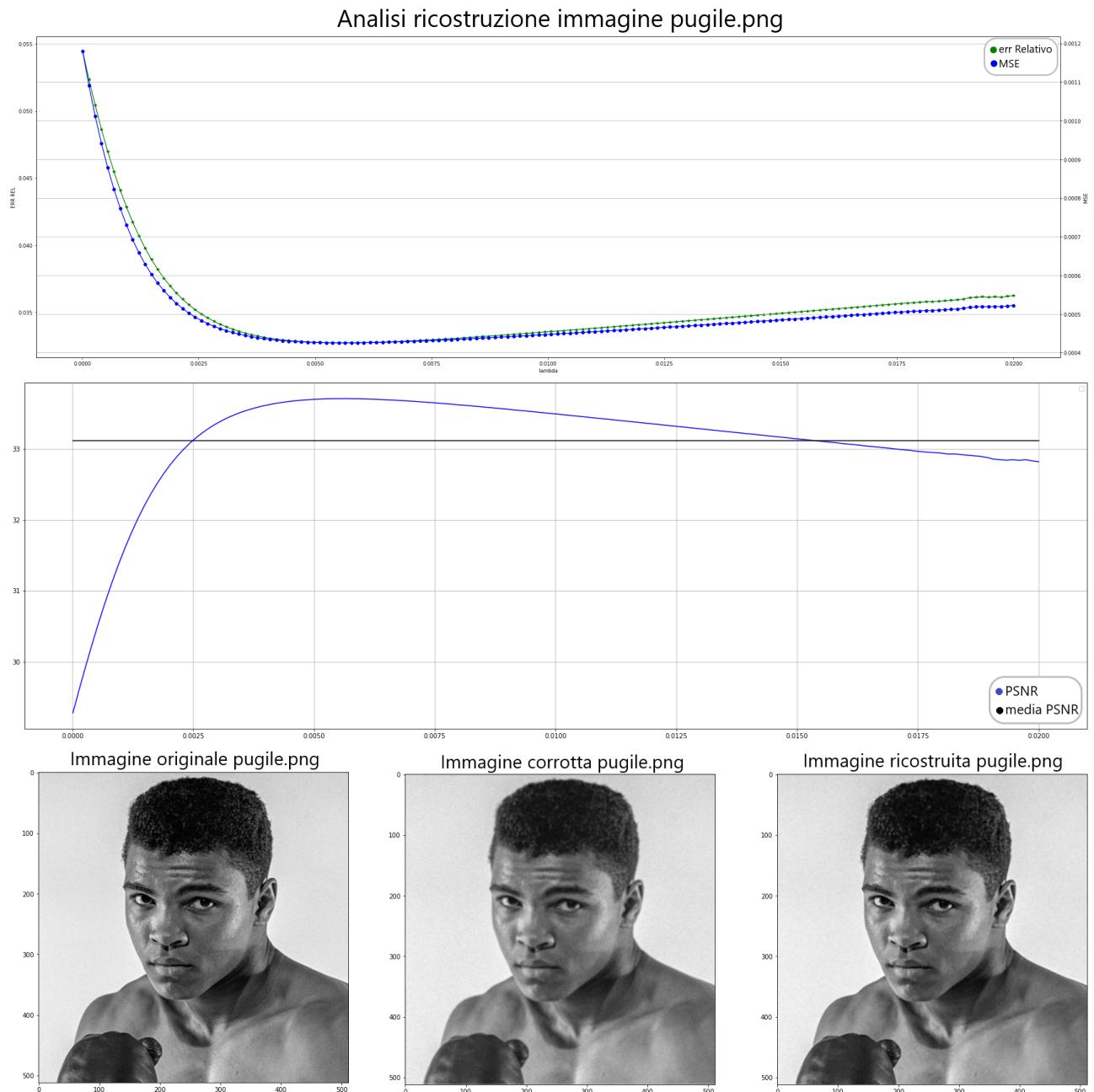


Figura 52: Immagine Originale, Immagine Corrotta, Immagine Ricostruita

4.3 Variazione totale dell'immagine con testo:

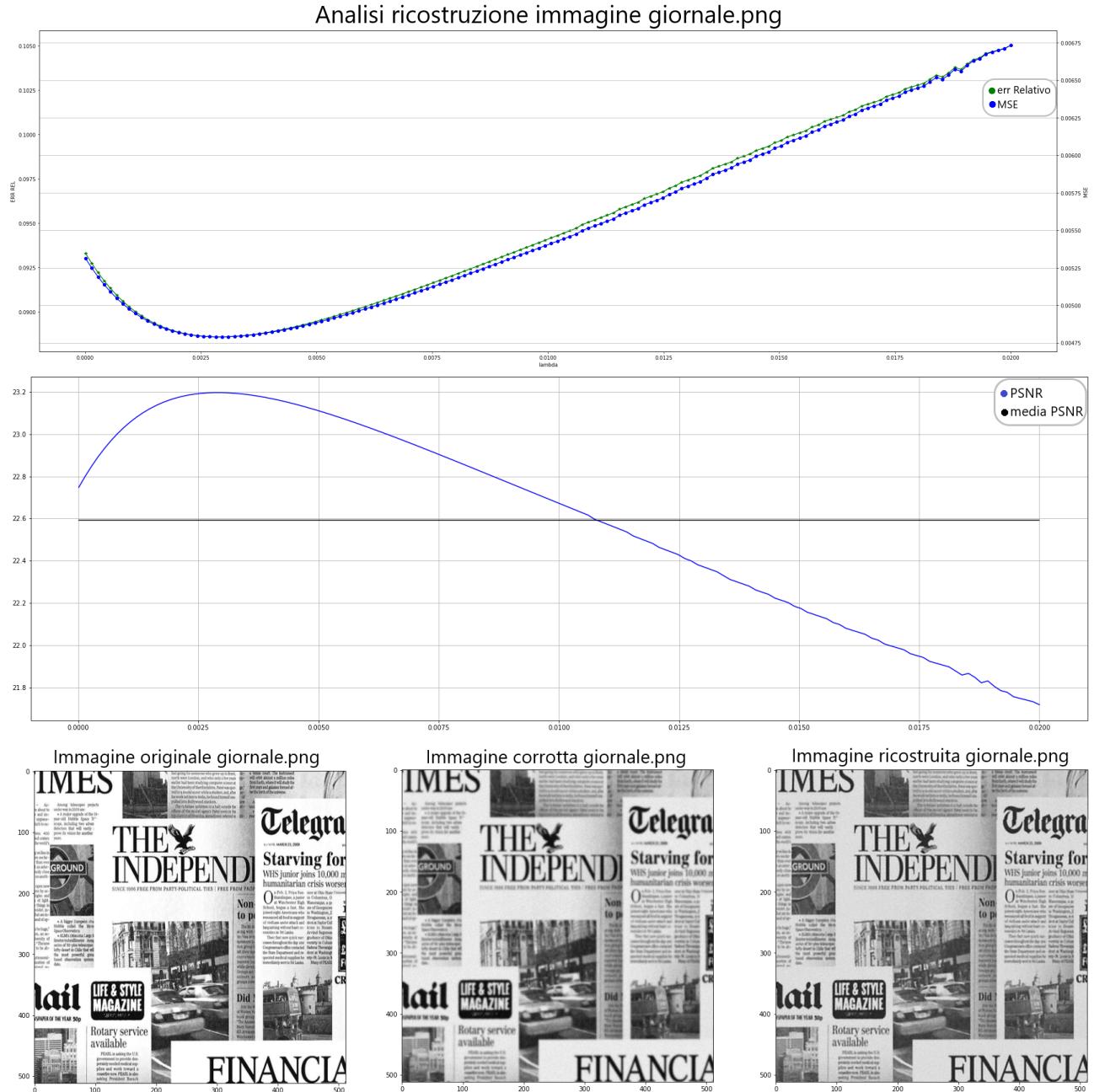


Figura 53: Immagine Originale, Immagine Corrotta, Immagine Ricostruita

4.4 Variazione totale dell'immagine con testo e immagini:

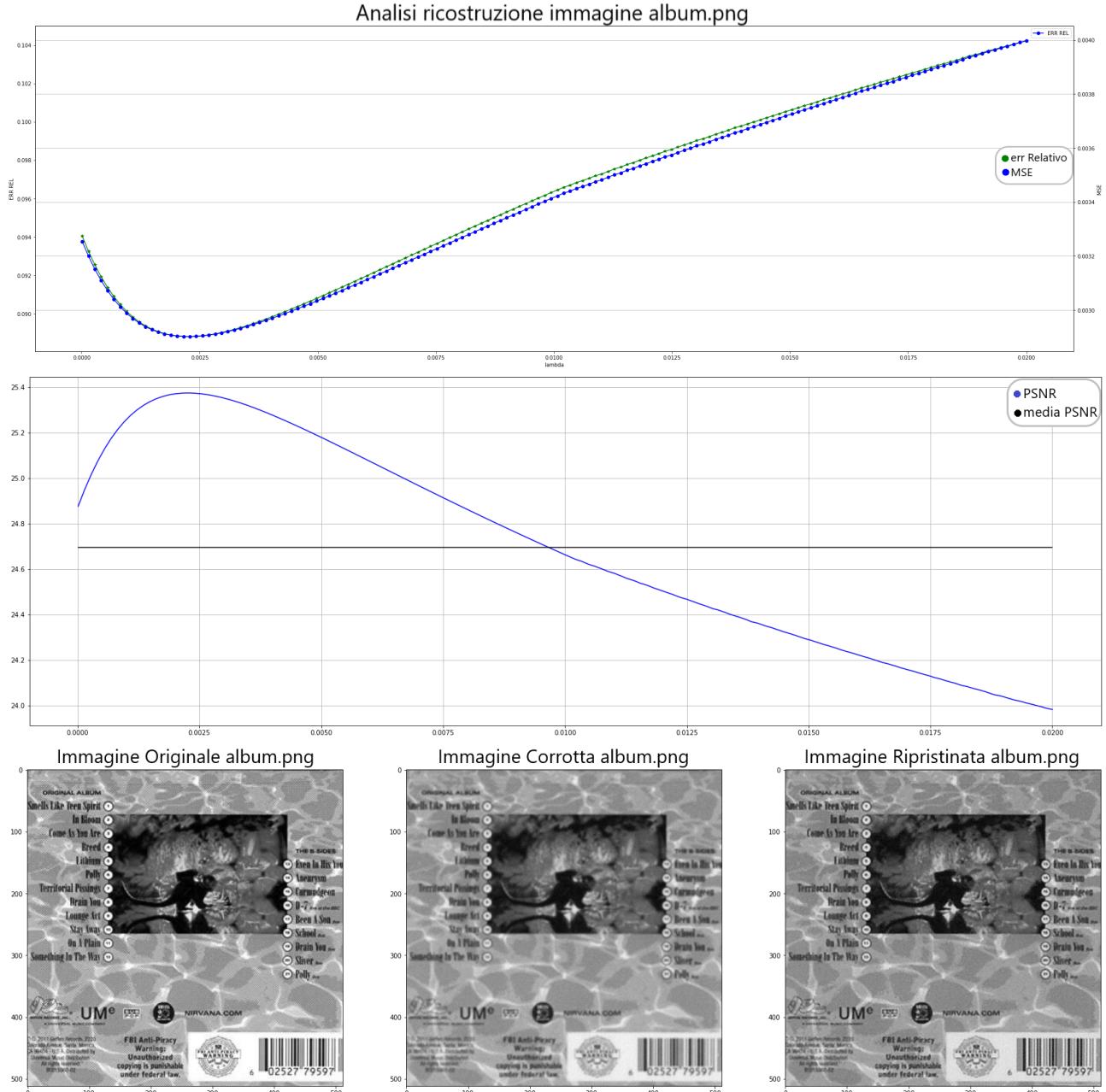


Figura 54: Immagine Originale, Immagine Corrotta, Immagine Ricostruita

5 Conclusioni

Dopo aver svolto un'analisi *in depth* sull'"image deblurring", possiamo affermare che la qualità della ricostruzione naïve è leggermente migliore, (ma in alcuni casi addirittura peggiore) dell'immagine corrotta, poiché nella soluzione naïve si prende troppo di riferimento l'immagine blurrata deviata dal rumore. Infatti se si rinuncia a trovare una soluzione esatta del problema naïve (ovvero se applichiamo una regolarizzazione), otteniamo risultati nettamente migliori.