جزوه معادلات دیفرانسیل

بهروز آدینه

فهرست مطالب

فصل ۴

تبدیلات لاپلاس

۴-۱) تبدیل لاپلاس و خواص آن

تعریف ۴-۱ فرض کنید تابع f برای $0 \leqslant t < \infty$ تعریف شده و s یک متغیر حقیقی باشد. تابع F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۵]:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \quad s > 0 \tag{۴-۱}$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ می‌نامیم و آن را با $L\{f(t)\}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۴-۱ تبدیل لاپلاس $f(t) = 1$ را بدست آورید [۵].

حل- داریم:

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} 1 \times e^{-st}dt = \Big[\frac{e^{-st}}{-s}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

مثال ۴-۲ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = t$ را بدست آورید [۵].

حل- با استفاده از انتگرال جز به جز داریم:

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} te^{-st}dt = \Big[-\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

انتگرال جز به جز:

مشتق		انتگرال
t	$+$	e^{-st}
1	$-$	$-\frac{1}{s}e^{-st}$
0		$\frac{1}{s^2}e^{-st}$

$$\Rightarrow \int te^{-st}dt = -\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st} = -\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2}$$

مثال ۴-۳ تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{at}$ را بدست آورید [۵].

حل- داریم:

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

مثال ۴-۴ تبدیل لاپلاس $f(t)=sinat$ را بدست آورید [۵].

حل- داریم:

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty \sin ate^{-st}dt$$

برای محاسبه این انتگرال از روش انتگرال جز به جز استفاده می‌کنیم:

مشتق		انتگرال
$\sin at$	$+$	e^{-st}
$a\cos at$	$-$	$-\frac{1}{s}e^{-st}$
$-a^2\sin at$		$\frac{1}{s^2}e^{-st}$

پس داریم:

$$\Rightarrow \int \sin ate^{-st}dt = -\frac{1}{s}\sin ate^{-st} - \frac{a}{s^2}\cos ate^{-st} - \int \frac{a^2}{s^2}\sin ate^{-st}dt$$

$$\frac{s^2+a^2}{s^2}\int \sin ate^{-st}dt = -\frac{1}{s}\sin ate^{-st} - \frac{a}{s^2}\cos ate^{-st} \Rightarrow$$

$$\int \sin ate^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(s\sin at + a\cos at)$$

در ادامه داریم:

$$L\{\sin at\} = \left[-\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(s\sin at + a\cos at) \right]_0^\infty = \frac{a}{s^2+a^2}$$

جدول ۴-۱: لاپلاس‌های مهم

t1

شروط	$F(x)$	$f(t)$
$s>0$	$\frac{a}{s}$	a
$s>a$	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$s>a$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$s>a$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$s>\lvert a\rvert$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$s>\lvert a\rvert$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$s>0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$s>0$	$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$s>0$	1	$\delta(t)$

قضیه ۴-۱ (خاصیت خطی بودن)- فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دو تابع باشند که تبدیل لاپلاس آن‌ها موجود است. اگر c_1 و c_2 دو ثابت دلخواه باشند، آنگاه [5]:

$$L\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\} = c_1L\{f_1(t)\} + c_2L\{f_2(t)\}$$

مثال ۴-۵ لاپلاس عبارت مقابل را بدست آورید [5]. $f(t) = 4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}$

حل- داریم:

$$L\{4t^2-3\cos 2t+5e^{-t}\} = 4L\{t^2\} - 3L\{\cos 2t\} + 5L\{e^{-t}\} = \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}$$

قضیه ۴-۲ (قضیه اول انتقال) اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه:

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

مثال ۴-۶ لاپلاس عبارت زیر را حساب کنید [5]. $f(t) = e^{-t}\cos 2t$

حل- می‌دانیم: $L\{\cos ۲t\} = \frac{s}{s^۲+۴}$ پس:

$$L\{e^{-t}\cos ۲t\} = \frac{s+۱}{(s+۱)^۲+۴}$$

مثال ۴-۷ لاپلاس عبارت زیر را حساب کنید [۵]. $f(t) = t^۲e^{۳t}$

حل- می‌دانیم: $L\{t^۲\} = \frac{۲}{s^۳}$ پس:

$$L\{t^۲e^{۳t}\} = \frac{۲}{(s-۳)^۳}$$

قضیه ۴-۳ (تبدیل لاپلاس مشتق)- فرض کنید $f(t)$ برای $t \geqslant ۰$ پیوسته و $f'(t)$ برای $t \geqslant ۰$ پیوسته قطعه‌ای باشد و تبدیل لاپلاس هر دو تابع برای $s > s.$ موجود باشند که $s.$ عددی مفروض است.در این صورت:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(۰)$$

همچنین داریم:

$$L\{f''(t)\} = s^۲L\{f(t)\} - sf(۰) - f'(۰)$$
$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-۱}f(۰) - s^{n-۲}f'(۰) - \cdots - f^{(n-۱)}(۰)$$

مثال ۴-۸ لاپلاس عبارت زیر را حساب کنید [۵]. $f(t) = \sin^۲ t$

حل- داریم:

$$f'(t) = ۲\sin t\cos t = \sin ۲t, f(۰) = ۰$$

و $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(۰) = sL\{f(t)\}$

از طرفی $L\{f'(t)\} = L\{\sin ۲t\} = \frac{۲}{s^۲+۴}$

بنابراین $L\{f(t)\} = \frac{۲}{s(s^۲+۴)}$

۴-۲) تبدیلات معکوس لاپلاس

تعریف ۴-۲ فرض کنید تبدیل لاپلاس تابع f موجود و تابع F باشد، یعنی

$$L\{f(t)\} = F(s) \qquad (۴-۲)$$

در این صورت f را تبدیل معکوس F می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \tag{۴-۳}$$

مثال ۴-۹ تبدیل معکوس تابع زیر را پیدا کنید [۵]. $F(s) = \dfrac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}$

حل- ابتدا کسر فوق را به کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \Rightarrow 5s^2+s+4 = A(s^2+4)+(Bs+C)(s+4)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} s=-4 \Rightarrow 80-4+4 = 20A \Rightarrow A=4 \\ s=0 \Rightarrow 4 = 4\times 4 + 4C \Rightarrow -12 = 4C \Rightarrow C=-3 \\ s=1 \Rightarrow 5+1+4 = 5\times 4 + (B-3)\times 5 \Rightarrow -10 = 5(B-3) \Rightarrow B=1 \end{cases}$$
$$Y(s) = \frac{4}{s+4} + \frac{s-3}{s^2+4} = \frac{4}{s+4} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{s^2+4}$$

بنابراین:

$$L^{-1} = \left\{\frac{5s^2+s+4}{(s+4)(s^2+4)}\right\} = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$
$$= 4e^{-4t} + \cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t$$

مثال ۴-۱۰ پیدا کنید [۵]:

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-6s+13}\right\}$$

حل- می‌توان نوشت:

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-6s+13}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-3+4}{(s-3)^2+4}\right\}$$
$$= L^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3)^2+4}\right\} = e^{3t}\cos 2t + 2e^{3t}\sin 2t$$

۴-۳) کاربرد تبدیل لاپلاس در حل مسایل مقدار اولیه (معادلات دیفرانسیل)

تبدیلات لاپلاس ابزار مفیدی برای حل انواع معینی از معادلات دیفرانسیل هستند. در زیر با چند مثال کاربرد این تبدیلات را تشریح می‌کنیم.

مثال ۴-۱۱ جواب مساله مقدار اولیه (معادله) زیر را بدست آورید [۵].

$$y'(t) + 2y(t) = 4t, \quad y(0) = 0$$

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم. داریم:

$$L\{y'(t)\} + 2L\{y(t)\} = 4L\{t\} \Rightarrow sL\{y(t)\} - y(0) + 2L\{y(t)\} = \frac{4}{s^2}$$

فرض کنید $L\{y(t)\} = Y(s)$. آنگاه داریم:

$$(s+2)Y(s) = \frac{4}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{4}{s^2(s+2)}$$

با تجزیه کسر به کسرهای ساده، بدست می‌آوریم:

$$\frac{4}{s^2(s+2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s+2} \Rightarrow (As+B)(s+2) + Cs^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} s = 0 \Rightarrow 2B = 4 \Rightarrow B = 2 \\ s = -2 \Rightarrow 4C = 4 \Rightarrow C = 1 \\ s = 1 \Rightarrow (A+2)(3) + 1 \times 1^2 = 4 \Rightarrow A + 2 = 1 \Rightarrow A = -1 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{-s+2}{s^2} + \frac{1}{s+2} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2}$$

بنابراین:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = -L^{-1}\{\frac{1}{s}\} + 2L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} + L^{-1}\{\frac{1}{s+2}\} = -1 + 2t + e^{-2t}$$

مثال ۴-۱۲ جواب مساله مقدار اولیه (معادله) زیر را بدست آورید [۵].

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

حل: با فرض، $L\{y(t)\} = Y(s)$، از دو طرف معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$L\{y''\} + 3L\{y'(t)\} + 2L\{y(t)\} = L\{0\} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 0 \Rightarrow$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

با تجزیه کسر به کسرهای ساده داریم:

$$\frac{۱}{(s+۱)(s+۲)} = \frac{A}{s+۱} + \frac{B}{s+۲} \Rightarrow A(s+۱) + B(s+۲) = ۱ \Rightarrow$$
$$\begin{cases} s = -۱ \Rightarrow A = ۱ \\ s = -۲ \Rightarrow -B = ۱ \Rightarrow B = -۱ \end{cases}$$
$$Y(s) = \frac{۱}{s+۱} - \frac{۱}{s+۲}$$

بنابراین جواب مساله عبارت است از:

$$y(t) = L^{-۱}\{Y(s)\} = L^{-۱}\{\frac{۱}{s+۱}\} - L^{-۱}\{\frac{۱}{s+۲}\} = e^{-t} - e^{-۲t}$$

مراجع

[۱] "آموزش تصویری معادلات دیفرانسیل،" http://www.faradars.org.

[۲] دکتر محمد صادق معتمدی. *معادلات دیفرانسیل*. چاپ پنجم، پارسه، ۱۳۸۷.

[۳] دکتر مسعود نیکوکار. *معادلات دیفرانسیل*. چاپ بیستم، انتشارات آزاده، ۱۳۸۴.

[4] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, 10th ed. , 2012.

[۵] دکتر اصغر کرایه‌چیان. *معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها*. چاپ بیست و هفتم، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۹۴.