

LES ONDES

Le transport de l'énergie et de la quantité de mouvement se fait uniquement par 2 mécanismes fondamentaux : des particules qui se déplacent ou des ondes qui se propagent. Ces 2 conceptions apparemment différentes sont subtilement liées : il n'y a pas d'ondes sans particules et pas de particules sans ondes.

Une onde est une perturbation se propageant de proche en proche dans un milieu. Les sortes de perturbations et de milieux peuvent être très différents .Quelques exemples :

- **onde de surface** : le milieu est la surface libre d'un liquide, la perturbation correspond au déplacement des particules du liquide par rapport à leur position de repos (les vagues)(**Démo 275 a)**)
- **onde sonore** : le milieu est un solide, liquide ou gaz, la perturbation est une variation de pression)(**Démo 275 b)**)
- **onde électromagnétique** : le milieu est la matière ou le vide. La perturbation correspond à une variation du champ électromagnétique, la cause de cette perturbation étant due à l'accélération des charges électriques (la lumière, les ondes radio et TV, micro-ondes)

LES ONDES MECANIQUES

Nous allons étudier les ondes dans les milieux matériels : ce sont des **ondes mécaniques** car elles sont dues aux déplacements des constituants du milieu. La source de toute onde est une vibration. C'est cette vibration se propageant qui constitue l'onde.

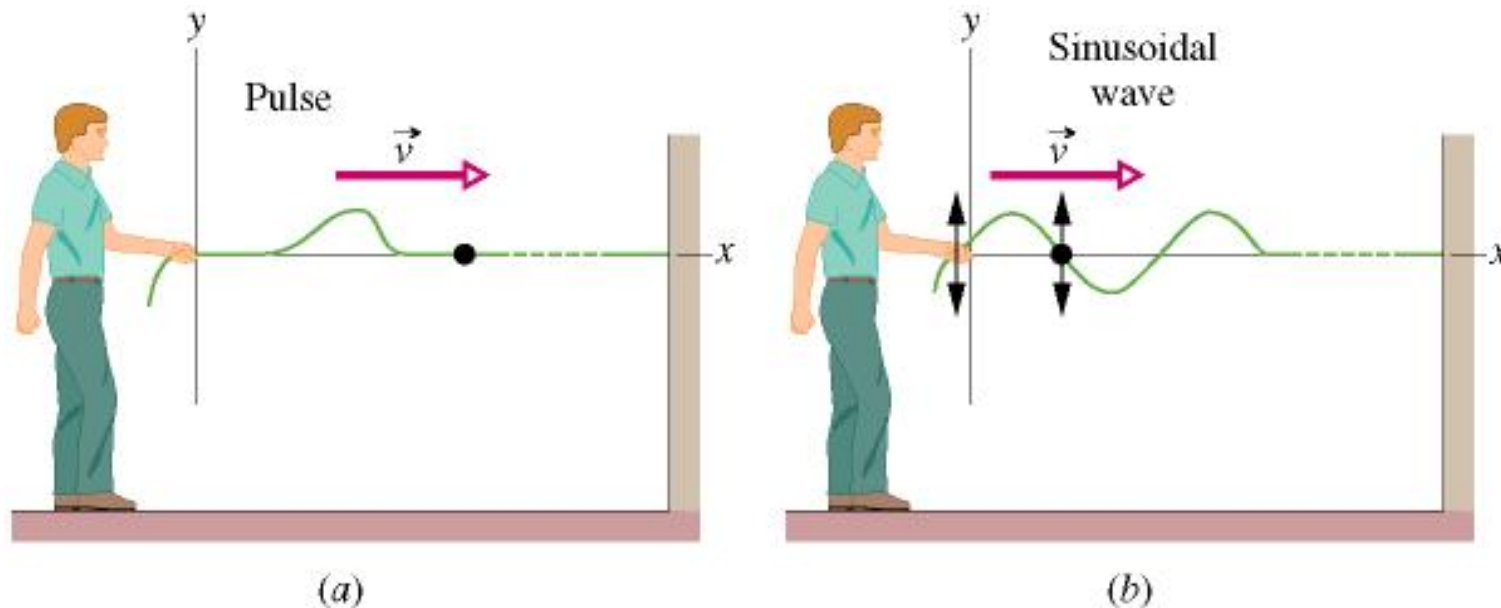
Une onde mécanique progressive est un ébranlement ou une perturbation de l'équilibre d'un milieu matériel qui se propage d'une région à une autre et qui transporte de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Bien que la perturbation transportant l'énergie se déplace dans le milieu sur de grandes distances, les atomes individuels participant au processus restent au voisinage de leurs positions respectives d'équilibre.

La perturbation se propage mais sans déplacement de matière à grande échelle.

Les types d'ondes

Ondes transversales : la vitesse de l'onde \vec{v} et la perturbation \vec{y} sont perpendiculaires)(**Démo 275** corde).



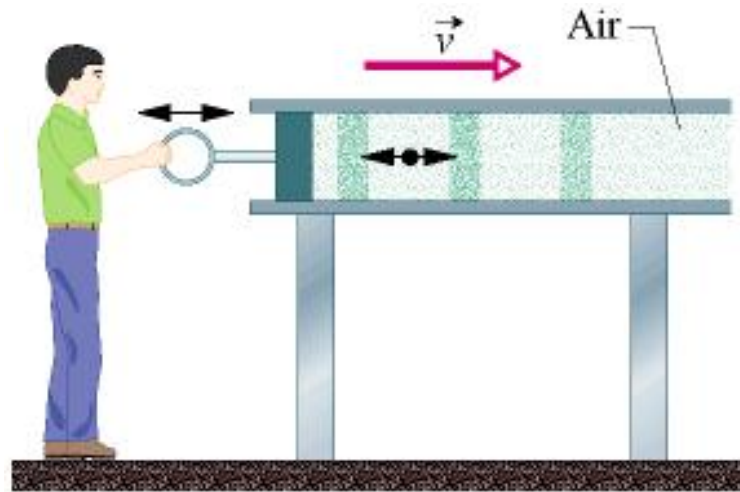
Les points successifs de la corde entraînent chaque point contigu suivant vers le haut → déplacement longitudinal de la crête de l'onde.

Les forces de cohésion entre les parties contiguës font voyager l'impulsion longitudinalement.

Les particules se déplacent perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde.

Les types d'ondes (suite)

Ondes longitudinales : la vitesse de l'onde \vec{v} et la perturbation \vec{y} sont parallèles)(**Démo 275** ressort).



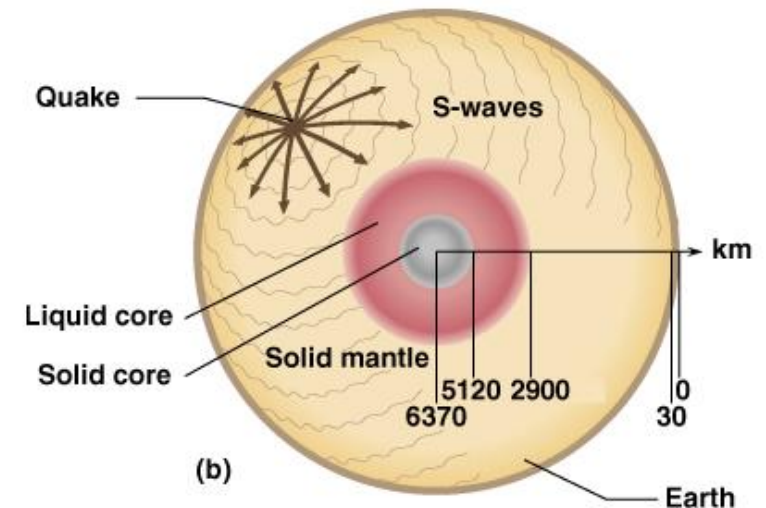
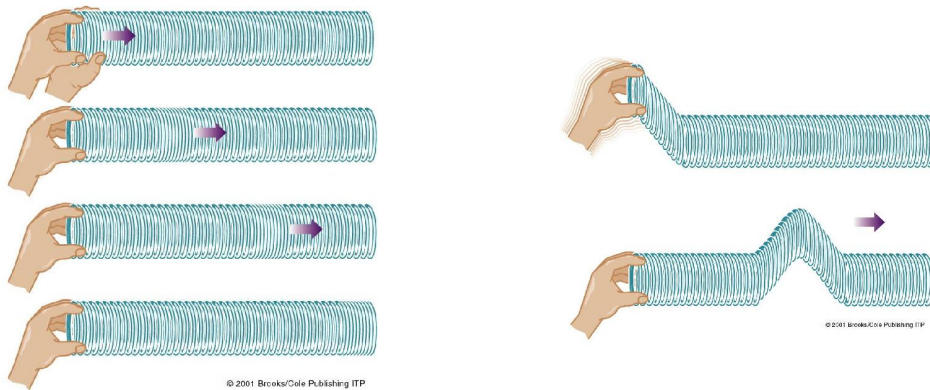
Les particules se déplacent parallèlement à la direction de propagation de l'onde.

Ces ondes longitudinales et transversales sont des **ondes progressives** car elles voyagent d'un point à un autre (d'un bout d'une corde à l'autre bout). Ce sont les ondes qui bougent entre 2 points et pas la matière (corde ou air) à travers laquelle les ondes bougent.

La vitesse des particules de matière \neq vitesse de l'onde.

Les types d'ondes (suite)

Dans un solide, il peut y avoir des ondes mécaniques transversales et longitudinales. Ces 2 types d'onde peuvent voyager dans un solide puisque chaque atome ou molécule peut vibrer autour de sa position d'équilibre, dans n'importe quelle direction. Par exemple les perturbations dues aux tremblements de terre.

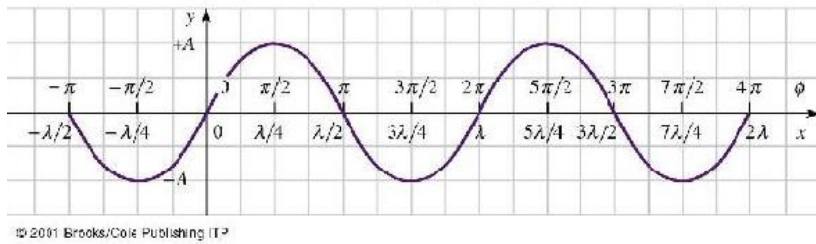


©Brooks/Cole Publishing Company/ITP

Dans un fluide, il y a uniquement des ondes mécaniques longitudinales de compression appelées **ondes acoustiques**. Ceci est dû au fait que dans un liquide un mouvement transversal ne rencontre pas de force de rappel.

Onde harmonique : représentation mathématique

L'ébranlement le plus simple à analyser mathématiquement est l'**onde sinusoïdale** et c'est aussi le plus répandu dans la nature. En nous référant aux équations du MHS, on peut écrire la fonction représentée ci-contre par :



$$y(x) = y_m \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

L'argument $(2\pi x/\lambda)$ est la **phase** de l'onde. Cette équation décrit le profil d'une onde harmonique figée au temps $t = 0$.

Le profil se répète avec une période d'espace égale à la **longueur d'onde**, λ ; donc $y = 0$ pour $x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$. y_m est l'**amplitude**, valeur toujours positive, bien que y puisse être négatif. Mais on cherche une équation générale qui décrit la propagation de l'onde à la vitesse v . Au temps t , l'onde conservera la même forme mais toutes ses parties auront bougé d'une même distance, vt . Si l'onde voyage vers la droite, il suffit de remplacer x par $(x - vt)$, soit :

$$y(x, t) = y_m \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

Il y a une périodicité dans l'espace et dans le temps.

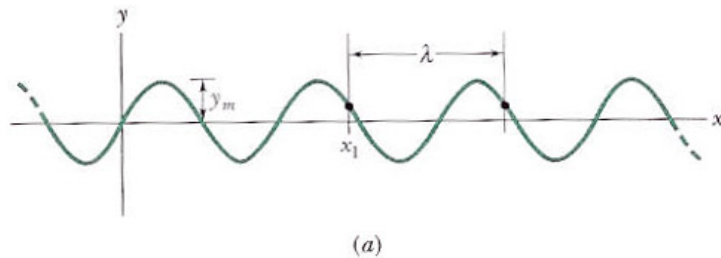
Onde harmonique : représentation mathématique (suite)

La forme générale d'une onde sinusoïdale progressive (onde harmonique) :

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

avec y_m = **amplitude** de l'onde ; $(kx - \omega t + \phi)$ = **phase** de l'onde ;
 ϕ = **déphasage** ; ω = **fréquence angulaire/pulsation** et k = **nombre d'onde**.

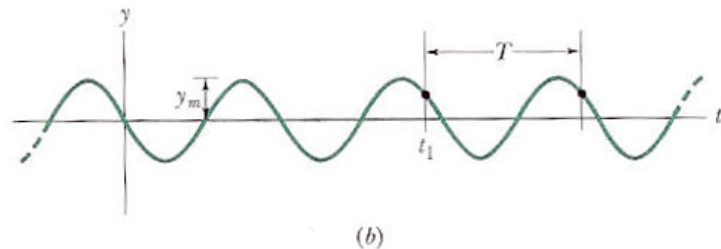
– **nombre d'onde : k**



$$\begin{aligned} y_m \sin kx_1 &= y_m \sin [k(x_1 + \lambda)] \\ &= y_m \sin (kx_1 + k\lambda) \end{aligned}$$

$k = 2\pi/\lambda$ en rad/m et λ : la longueur d'onde en m.

– **fréquence angulaire : ω**



$$\begin{aligned} y_m \sin \omega t_1 &= y_m \sin [\omega(t_1 + T)] \\ &= y_m \sin (\omega t_1 + \omega T) \end{aligned}$$

$\omega = 2\pi/T$ en rad/s et T : la période

– **fréquence : f**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

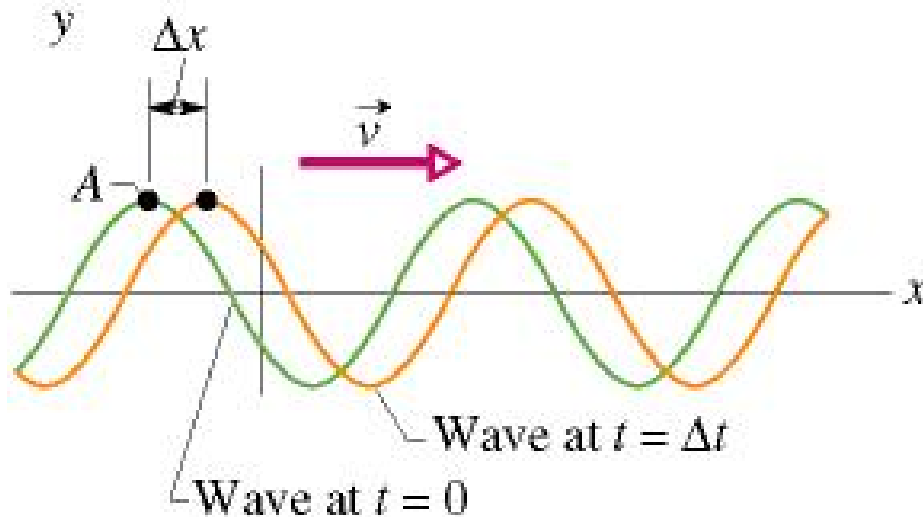
Posons $\phi=0$,

$$(a) y(x, t = 0) = y_m \sin kx$$

$$\begin{aligned} (b) y(x = 0, t) &= y_m \sin (-\omega t) \\ &= -y_m \sin \omega t \end{aligned}$$

La vitesse de propagation des ondes

Soit deux instantanés de l'onde pris pour un intervalle de temps Δt . La forme de l'onde est fixe et se déplace latéralement sans déformation.



$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est la vitesse de l'onde.

Lors du déplacement, tous les points de l'onde gardent la même valeur de $y \rightarrow$ argument du sinus doit être constant

$$kx - \omega t = \text{constante}$$

Dérivons par rapport à t :

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f > 0$$

L'onde bouge d'une distance égale à une longueur d'onde pendant une oscillation, la vitesse est une longueur d'onde par période (voir TP M6).

La vitesse de propagation des ondes (suite)

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

Cette équation décrit le mouvement d'une onde se déplaçant vers les x croissants.

Pour trouver l'équation d'une onde se déplaçant vers les x décroissants, on remplace t par $-t$. Ceci correspond à la condition :

$$kx + \omega t = \text{constante}$$

condition qui impose que x doit décroître quand le temps augmente. Ainsi l'équation d'une onde se déplaçant vers les x décroissants est :

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

et la vitesse de cette onde sera :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k} < 0$$

Le signe $-$ indique que l'onde se déplace vers les x décroissants.

D'une manière générale, une onde progressive est de la forme $y(x, t) = h(kx \pm \omega t)$ où h est une fonction quelconque.

Exemple : une onde sinusoïdale progressive

Soit l'onde sinusoïdale le long d'une corde :

$y(x, t) = 0,00327 \sin(72,1x - 2,72t)$ dans laquelle les constantes numériques valent dans le SI : 0,00327 m, 72,1 rad/m et 2,72 rad/s.

– Déterminer son amplitude, k , λ , T , f ?

$$y_m = 0,00327 \text{ m}, \quad k = 72,1 \text{ rad/m}, \quad \omega = 2,72 \text{ rad/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ rad}}{72,1 \text{ rad/m}} = 0,0871 \text{ m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2,72 \text{ rad/s}} = 2,31 \text{ s}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,31 \text{ s}} = 0,433 \text{ Hz}$$

– Quelle est la vitesse de l'onde ?

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2,72 \text{ rad/s}}{72,1 \text{ rad/m}} = 0,0377 \text{ m/s}$$

– Que vaut y au point $x = 22,5 \text{ cm}$ et $t = 18,9 \text{ s}$?

$$y = 0,00327 \sin(72,1 \times 0,225 - 2,72 \times 18,9) = 0,00192 \text{ m}$$

– Calculer la vitesse transversale, u , de ce point ?

Prenons la dérivée partielle par rapport au temps :

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

$$u = (-2,72 \text{ rad/s})(3,27 \text{ mm}) \cos(-35,1855 \text{ rad}) = 7,2 \text{ mm/s}$$

– Calculer l'accélération ?

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y = -14,2 \text{ mm/s}^2$$

Vitesse de propagation des ondes

La vitesse de l'onde est reliée à la longueur d'onde et à la fréquence, mais **est définie par le milieu**. Si une onde se propage dans un milieu tel que l'eau, l'air, l'acier ou une corde tendue, elle fait osciller les particules de ce milieu. Pour que cela puisse se faire, il faut que le milieu possède d'une part des propriétés inertielles (pour que l'énergie cinétique puisse être stockée) et d'autre part des propriétés élastiques (de telle sorte que l'énergie potentielle puisse être rétablie). Ces 2 propriétés déterminent la vitesse de propagation de l'onde. On peut donc calculer cette vitesse à partir des propriétés du milieu.

Détermination dimensionnelle

On examine les dimensions de toutes les quantités physiques qui interviennent. Pour une corde tendue, sa caractéristique inertielle est la masse d'un élément de corde, soit sa masse divisée par sa longueur $\mu = m/l$, appelée la masse linéique exprimée en kg.m^{-1} . Pour étirer une corde, il faut lui appliquer une force de tension F_T de dimension kg.m.s^{-2} . Comment combiner μ et F_T pour obtenir une vitesse ? On trouve facilement :

$$v = C \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \quad C = \text{constante sans dimension}$$

Cette analyse ne permet pas de déterminer la valeur de la constante. Pour cela il faut faire une dérivation mathématique correcte en écrivant les forces qui interviennent. On trouvera que $C = 1$.

La vitesse de propagation des ondes

Cette vitesse est déterminée par les propriétés élastiques et inertielles du milieu. D'une manière générale, on trouve que :

$$v = \sqrt{\frac{\text{facteur de force élastique}}{\text{facteur d'inertie}}}$$

- **Onde transversale sur une corde tendue** : $v = \sqrt{F_T/\mu}$
 F_T est la tension et μ la masse par unité de longueur (ou masse linéique) (voir TP M6 DvD 9-11).
- **Onde longitudinale dans une barre** : $v = \sqrt{E/\rho}$
 E est le module d'élasticité/Young (voir chapitre 10) et ρ la masse volumique.
- **Onde longitudinale dans un liquide** : $v = \sqrt{B/\rho}$
 B est le module de compressibilité (voir chapitre 10).
- **Onde acoustique dans un gaz** : $v = \sqrt{\gamma P/\rho} = \sqrt{\gamma R T/M}$
 $\gamma = C_p/C_v$ est rapport des capacités calorifiques molaires à pression et volume constant (voir chapitre 14) et vaut $\sim 1,4$ pour les gaz diatomiques comme l'hydrogène, oxygène et approximativement pour l'air. P est la pression, R la constante des gaz parfaits, M la masse moléculaire du gaz et T la température absolue(voir TP M6).

Exemples : vitesse de propagation

EXEMPLE 1 : Une corde horizontale de longueur 2,0 m et de masse 40 g passe autour d'une poulie de masse négligeable et sans frottement et porte, à son extrémité libre, une masse de 2,0 kg. Calculer la vitesse de propagation d'une impulsion ondulatoire sur cette corde. Négliger le poids de la partie de la corde en suspension.

SOLUTION : Nous avons besoin de F_T et de μ . La tension est exactement la charge en newtons, soit $(2,0 \text{ kg}) \times (9,81 \text{ m/s}^2) = 19,62 \text{ N}$. La masse linéique $\mu = (0,040 \text{ kg}) / (2,0 \text{ m}) = 0,020 \text{ kg/m}$. D'où :

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{19,62 \text{ N}}{0,020 \text{ kg/m}}} = 31 \text{ m/s}$$

EXEMPLE 2 : Une explosion a eu lieu à une faible profondeur au-dessous de la surface de l'océan. Calculer la vitesse de l'onde de compression résultante mesurée par des instruments placés à quelques mètres au-dessous d'un navire.

Exemples : vitesse de propagation (suite)

SOLUTION : Il s'agit d'une onde de compression dans l'eau de mer. Comme la source n'est pas profonde, on peut prendre comme masse volumique $\rho = 1,03 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ et $B = 2,2 \text{GPa}$. On a donc :

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,2 \times 10^9 \text{Pa}}{1,03 \times 10^3 \text{kg/m}^3}} = 1,46 \times 10^3 \text{m/s}$$

C'est 4 fois la vitesse du son dans l'air.

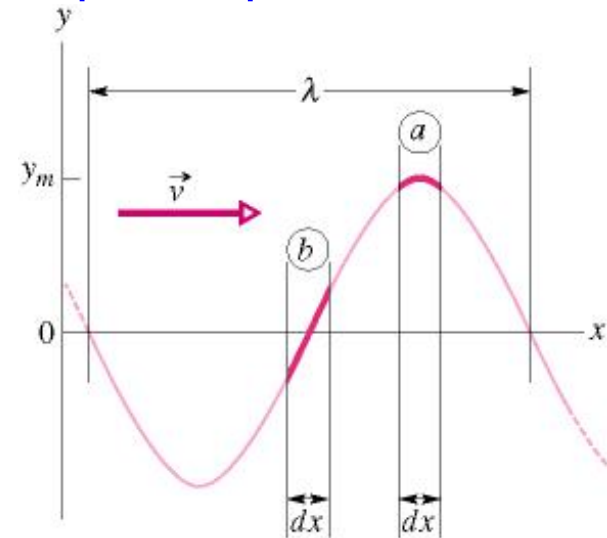
EXEMPLE 3 : Calculer la vitesse du son dans l'air dans les conditions normales de température et de pression ?

SOLUTION : Les conditions normales sont : température 0°C , pression $1 \text{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{Pa}$, et ainsi $\rho = 1,29 \text{kg/m}^3$. La vitesse du son est :

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,4(1,013 \times 10^5 \text{Pa})}{1,29 \text{kg/m}^3}} = 332 \text{m/s}$$

Energie transmise par les ondes

Quand on envoie une onde dans une corde tendue, on fournit de l'énergie pour le mouvement de la corde. En s'éloignant, l'onde transporte cette énergie sous forme d'énergie cinétique et potentielle élastique. L'élément de corde a de masse, $dm = \mu dx$, a un déplacement maximum y_m et l'élément b un déplacement nul. L'énergie cinétique d'un élément de corde à chaque position dépend de sa vitesse transversale u , tandis que l'énergie potentielle dépend de la quantité par laquelle l'élément de corde est étiré au passage de l'onde.



Quand l'élément passe par la position $y = 0$, sa vitesse transversale est maximum et donc aussi son énergie cinétique. Par contre quand l'élément est dans sa position extrême a , sa vitesse est nulle et $E_c = 0$. En position y_m , l'élément n'est pas étiré, son énergie potentielle élastique est nulle. En position $y = 0$, il est étiré au maximum et son énergie potentielle élastique est maximum. Ainsi les régions de la corde avec déplacement maximum n'ont pas d'énergie et ceux avec déplacement nul ont une énergie maximale.

Energie transmise par les ondes (suite)

Energie cinétique associé à dm :

$$dE_c = \frac{1}{2} dm u^2 = \frac{1}{2} \mu dx u^2$$

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

En regroupant ces 2 équations :

$$dE_c = \frac{1}{2} (\mu dx) (-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

En divisant par dt , on obtient le taux de variation d'énergie cinétique d'un élément de corde,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Le taux moyen de transmission

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{dE_c}{dt} \right)} &= \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)} \\ &= \frac{1}{4} \mu v \omega^2 y_m^2 \end{aligned}$$

$$\text{car } \overline{\cos^2(kx - \omega t)} = 1/2$$

On trouve le même taux moyen de transmission pour l'**énergie potentielle**.

Puissance moyenne : taux moyen auquel les 2 sortes d'énergie sont transmises par une onde :

$$\overline{P} = 2 \overline{\left(\frac{dE_c}{dt} \right)} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2$$

Onde transversale : puissance moyenne : $\overline{P} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F_T} \omega^2 y_m^2$

Onde longitudinale : puissance moyenne : $\overline{P} = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} A \omega^2 y_m^2$

L'énergie transportée est proportionnelle au carré de l'amplitude.

Exemple : Puissance moyenne

Une corde de masse linéique $\mu=525$ g/m est étirée avec une tension F_T de 45 N. Une onde dont la fréquence f et l'amplitude y_m sont 120 Hz et 8,5 mm respectivement, se propage le long de cette corde. Calculer la puissance moyenne transmise par cette corde ?

SOLUTION : Calculons d'abord la fréquence angulaire ω et la vitesse de propagation de l'onde, v :

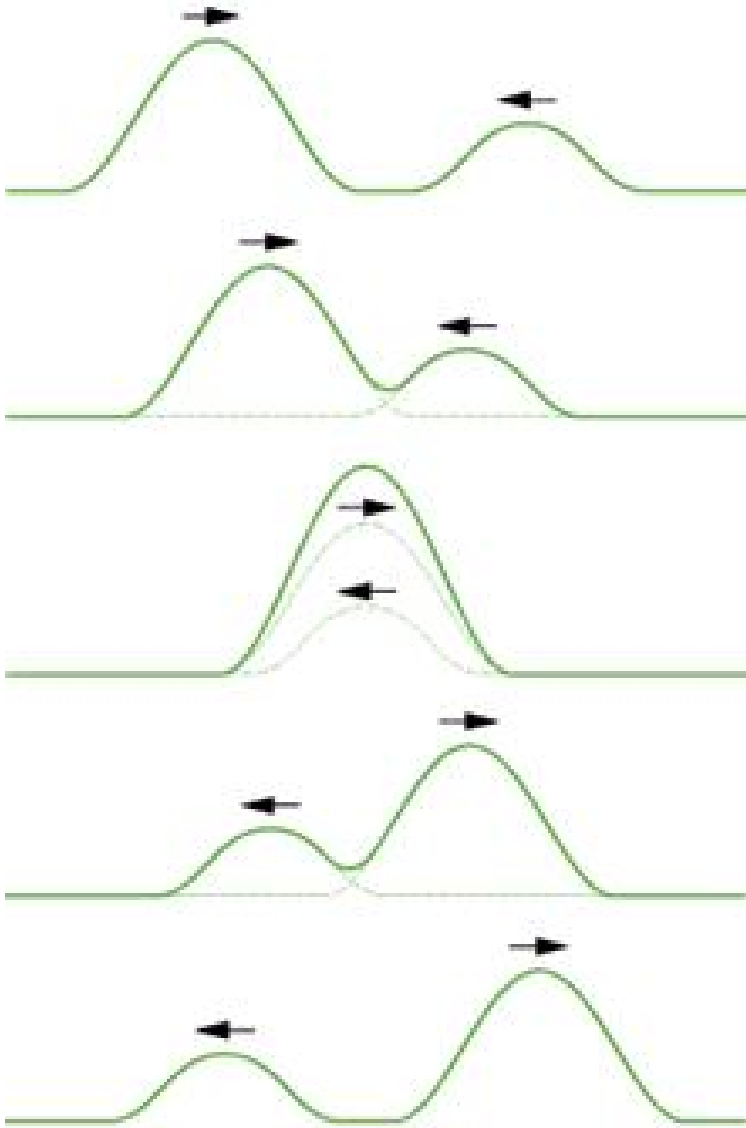
$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(120\text{Hz}) = 754\text{rad/s}$$

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{45\text{N}}{0,525\text{kg/m}}} = 9,26\text{m/s}$$

Nous pouvons calculer la puissance moyenne :

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \frac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \\ &= \frac{1}{2}(0,525\text{kg/m})(9,26\text{m})(754\text{rad/s})^2(0,0085\text{m})^2 \\ &= 100\text{W}\end{aligned}$$

Principe de superposition pour les ondes



$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

Dans la région où deux ou plusieurs ondes de même type se superposent, l'onde résultante est la somme algébrique des contributions de ces ondes en chaque point.

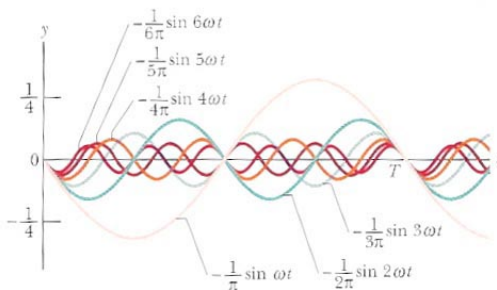
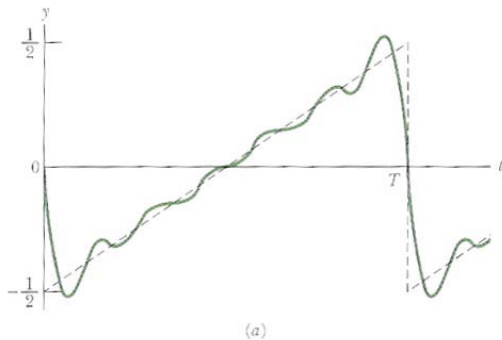
Les ondes continuent à se déplacer indépendamment l'une de l'autre.

L'onde résultante n'est pas en général une onde sinusoïdale simple mais une onde composite.

DvD 9-16

Analyse de Fourier

Jean-Baptiste Fourier (1786-1830) a expliqué comment le principe de superposition peut être utilisé pour analyser des ondes nonsinusoidales. Selon Fourier, toute **fonction périodique** de fréquence f (fonction dont la structure est reproductible à intervalles réguliers) peut être décomposée en une somme de sinusoides avec des amplitudes et des phases appropriées.



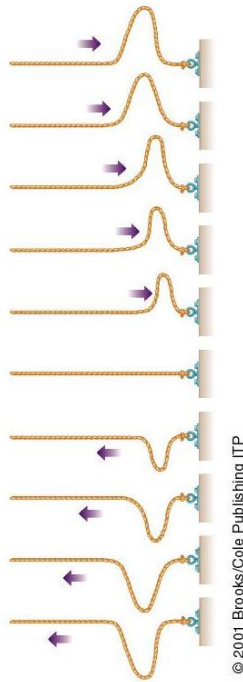
$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 \sin(\omega t + \phi_1) + a_2 \sin(2\omega t + \phi_2) \\ &+ a_3 \sin(3\omega t + \phi_3) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t + \phi_n) \\ &= 1 \text{ fondamentale} + \text{harmoniques} \end{aligned}$$

avec $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence de la fonction analysée. Le premier terme a la même fréquence f : c'est le fondamental ou premier harmonique. Le terme suivant de fréquence $f_2 = 2f$ est appelé *deuxième harmonique* etc. Les amplitudes et les déphasages dépendent de la fonction $y(t)$ considérée.

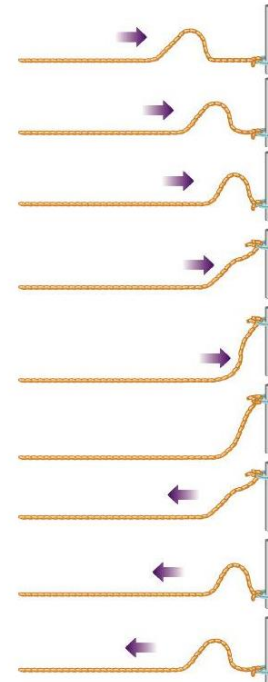
Il nous suffira de savoir qu'une fonction quelconque $y(t)$ de période T peut toujours être décomposée en une fondamentale de même période et ses harmoniques.

Les conditions aux limites : réflexion

Considérons une corde de longueur finie, dont une des extrémités est tenue fixe (figure de gauche) ou complètement libre (figure de droite)(DvD 9-12,17).



© 2001 Brooks/Cole Publishing ITP



© 2001 Brooks/Cole Publishing ITP

En rencontrant

un obstacle fixe, l'énergie ne peut que se réfléchir. L'onde réfléchie transporte toute l'énergie incidente : $y_i + y_r = 0$. Elle a donc même amplitude, même longueur d'onde MAIS signe opposé. Elle est déphasée de 180° .

La corde monte jusqu'à ce que toute l'énergie soit emmagasinée élastiquement. La corde descend ensuite, produisant une onde réfléchie de même amplitude, même longueur d'onde et de même signe.

Les conditions aux limites : absorption et transmission

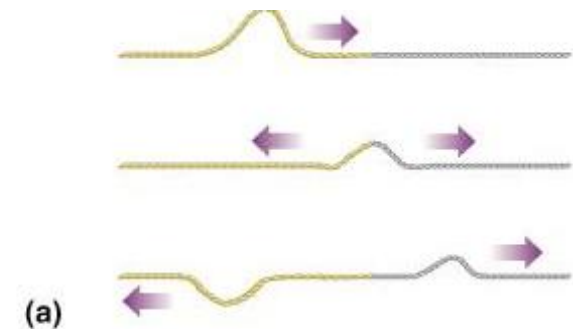
– Absorption

Si l'extrémité d'une corde dissipe de l'énergie par frottement ou autre processus, l'impulsion réfléchiée a moins d'énergie. Donc l'amplitude est plus petite.

– Transmission

Quand une onde passe d'un milieu à un autre de caractéristiques différentes, une redistribution de l'énergie se passe.

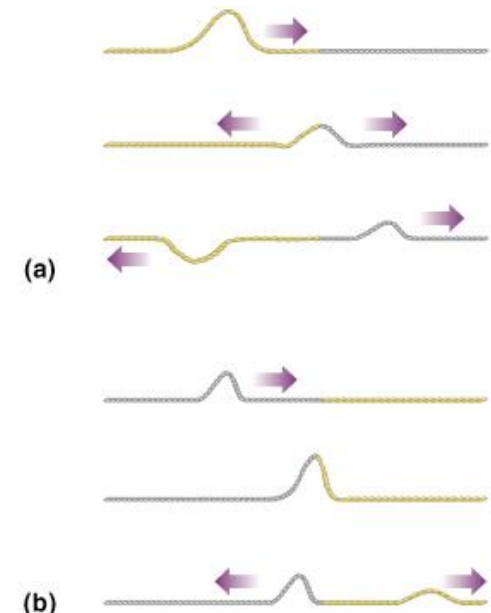
Cas (a) : Soit une impulsion ondulatoire se propageant sur une corde de faible masse linéique et rencontrant l'interface avec une deuxième corde de plus grande masse linéique. La plus grande inertie de la 2ème corde gêne le mouvement au point de jonction. Le second milieu exerce une force de réaction qui s'oppose au mouvement et produit une onde réfléchiée inverse (déphasage 180°).



Les conditions aux limites : absorption et transmission

Mais le 2eme milieu se déplace aussi. Une fraction de l'énergie incidente parait dans le second milieu sous la forme d'une onde transmise. Les vitesses des impulsions dans les 2 cordes sont différentes car les 2 cordes ont la même tension mais des masses linéiques différentes.

Cas (b) : Si le premier milieu est plus dense que le deuxième, la situation ressemble à celle avec une extrémité libre. Il n'y a alors aucun changement de phase de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente et l'onde transmise a une plus grande longueur d'onde.



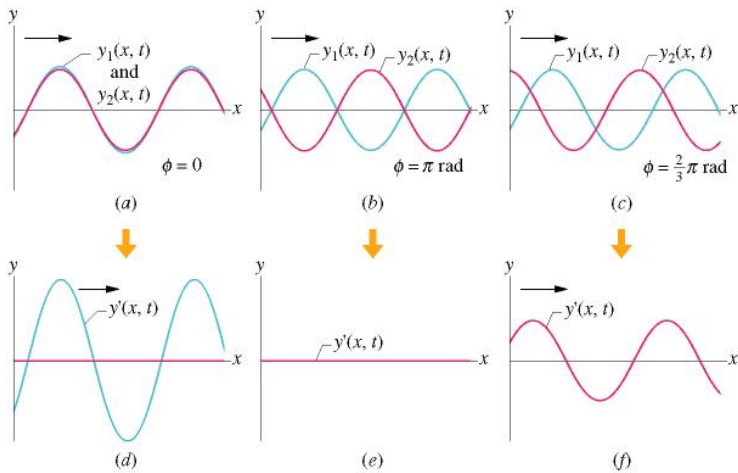
©Brooks/Cole Publishing Company/ITP

Si l'onde incidente est périodique, l'onde transmise aura la même fréquence mais une vitesse différente, donc λ différent ($v = \lambda f$). **Plus la densité du milieu est grande, plus petite est la longueur d'onde.** Le fait que les fréquences des ondes incidente, réfléchie et transmise sont les mêmes est vrai quelle que soit la nature de l'ébranlement (mécanique, lumineux...).

Interférences d'ondes

On réserve le terme *interférence* à la superposition d'ondes *cohérentes*, ondes qui sont *synchrones* (même ω) et dont le déphasage relatif ne varie pas avec le temps.

Supposons qu'on envoie 2 sinusoïdes cohérentes dans la même direction le long d'une corde tendue. Le résultat va dépendre de la manière dont les deux sinusoïdes sont déphasées (décalées) l'une par rapport à l'autre.



$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

D'après le principe de superposition :

$$y'(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

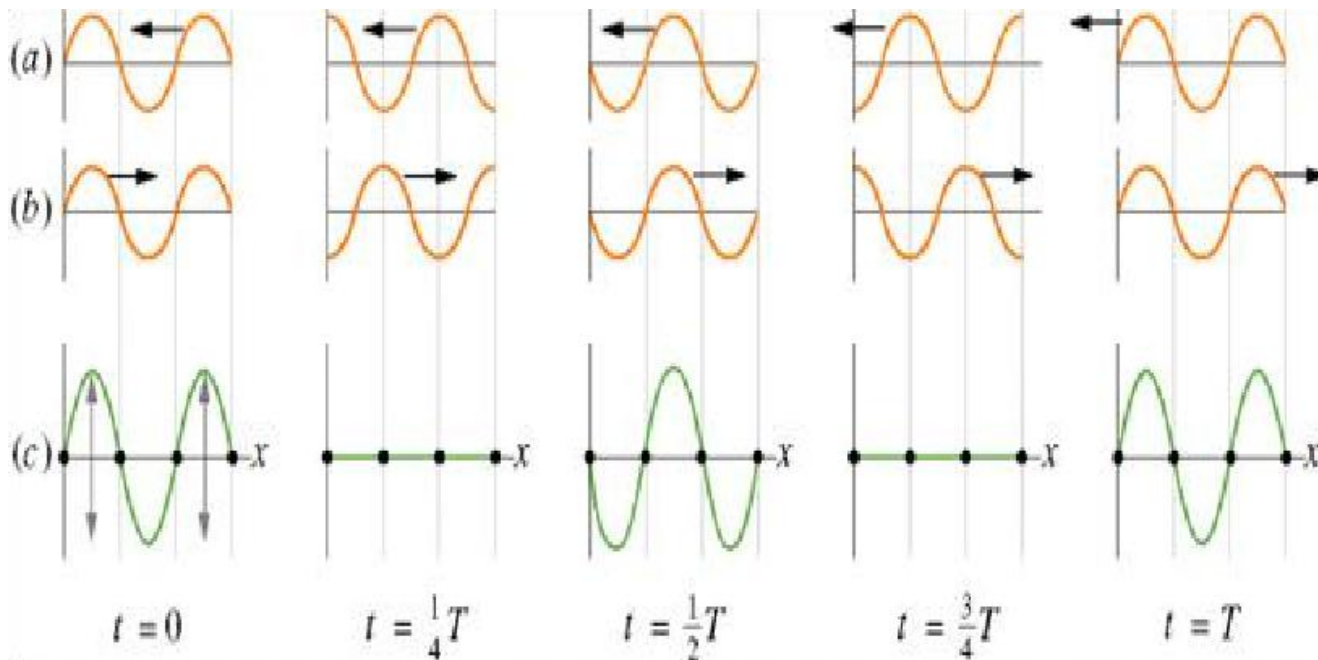
$$= [2y_m \cos \frac{1}{2}\phi] \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi)$$

car $(\sin p + \sin q) = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)$. **L'onde résultante est aussi une sinusoïde voyageant dans la même direction**, mais qui diffère des ondes originales par : (1) sa phase et (2) son amplitude. Pour $\phi = 0^\circ$: interférence totalement constructive. Pour $\phi = \pi \text{ rad}(180^\circ)$: interférence totalement destructive. Il n'y a aucun mouvement de la corde.

Les ondes stationnaires

Supposons une corde de longueur L fixée à une extrémité.

Si une onde sinusoïdale rencontre cette extrémité, il y aura une onde réfléchie qui sera l'image symétrique inversée de l'onde incidente ; deux ondes sont donc présentes sur la corde et se propagent dans des directions opposées.



DvD 9-24,26,28

Les ondes incidente et réfléchie se combinent pour produire une onde stationnaire caractérisée par des positions fixes ayant un déplacement nul **les noeuds** et des positions fixes ayant des déplacements maxima **les ventres**.

Représentation mathématique des ondes stationnaires

Soit 2 ondes sinusoïdales de même longueur d'onde et amplitude, se propageant en **sens inverse** (posons $\phi = 0$)

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) \quad \text{et} \quad y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

D'après le principe de superposition :

$$y'(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y'(x, t) = [2 y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Le terme entre crochets peut être interprété comme l'amplitude de l'oscillation d'un élément de corde à la position x . On voit que cette amplitude varie avec la position x , ce qui n'est pas le cas pour une onde sinusoïdale progressive. Cette fonction ne représente pas une onde progressive ($y = h(kx \pm \omega t)$) mais une **onde stationnaire**. L'amplitude de cette onde sera nulle pour des valeurs de k telles que $\sin kx = 0$. Les valeurs des noeuds sont à :

$$kx = n\pi \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2$$

On aura des ventres, aux positions $|\sin kx| = 1$, soit $kx = \pi/2 + n\pi$:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

Les ondes stationnaires sur une corde tendue

Si la corde est fixée aux 2 extrémités, on impose un 2eme point fixe à $y(x = L, t) = 0$. Il doit y avoir au moins 2 noeuds. Ceci limite les fréquences auxquelles une onde stationnaire se produira le long d'une corde ; elle ne peut se produire que si L est un multiple entier de $\lambda/2$.

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

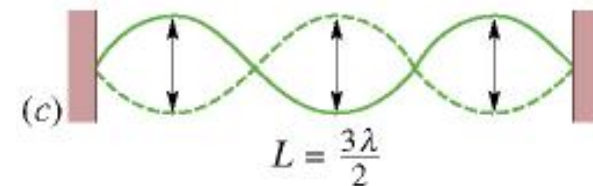
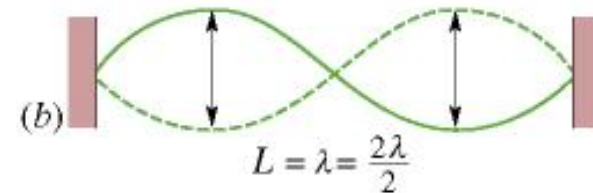
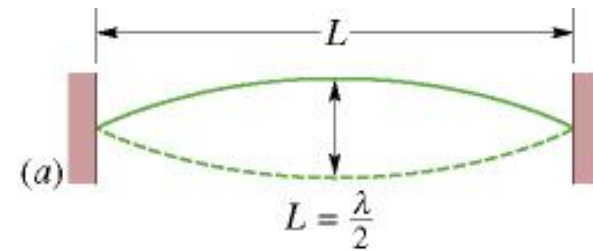
Les fréquences possibles correspondantes ($f = v/\lambda$) sont :

$$f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1$$

La fréquence la plus basse, f_1 , correspond au **mode fondamental** (ou premier harmonique) et la fréquence f_n à l'harmonique d'ordre n .

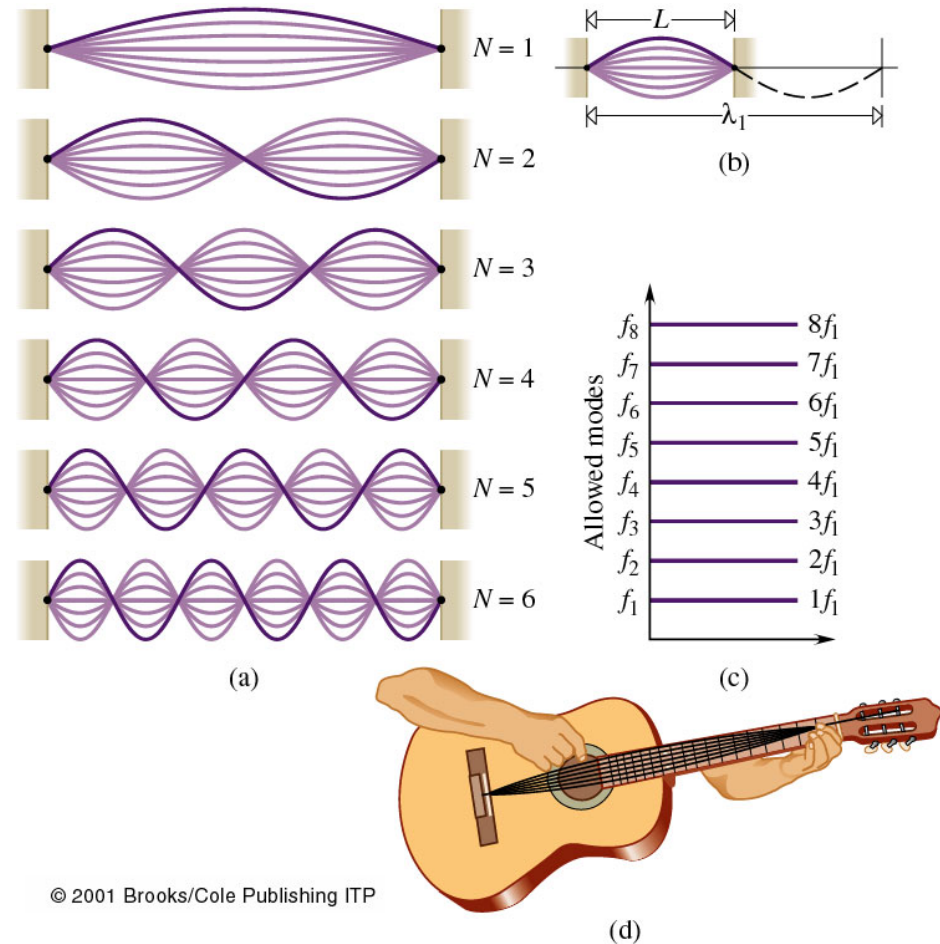
$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

La longueur d'onde est donnée UNIQUEMENT par la longueur de la corde, mais la fréquence dépend aussi de la vitesse v , qui est donnée par la tension et la masse linéique (Démonstration 282, 283)



Applications : instruments de musique à cordes

Galilée comprit qu'une corde vibrante "fait vibrer l'air qui l'entoure", produisant un son de même fréquence que la corde. Les cordes vibrantes ne peuvent pas ébranler une grande quantité d'air, car elles n'émettent pas elles-mêmes des sons de grande intensité. A cause de cela, elles sont toujours couplées à des caisses de résonance (comme dans les pianos, violons et guitares).



Les ondes stationnaires dans un tuyau

On observe également des ondes stationnaires pour des ondes longitudinales (ondes sonores) dans un tuyau (instrument de musique). Une extrémité fermée correspond à un noeud de déplacement et à un ventre de pression. Une extrémité ouverte correspond à un ventre de déplacement et à un noeud de pression.

Pour un tuyau fermé/ouvert aux deux extrémités : les fréquences des modes normaux sont :

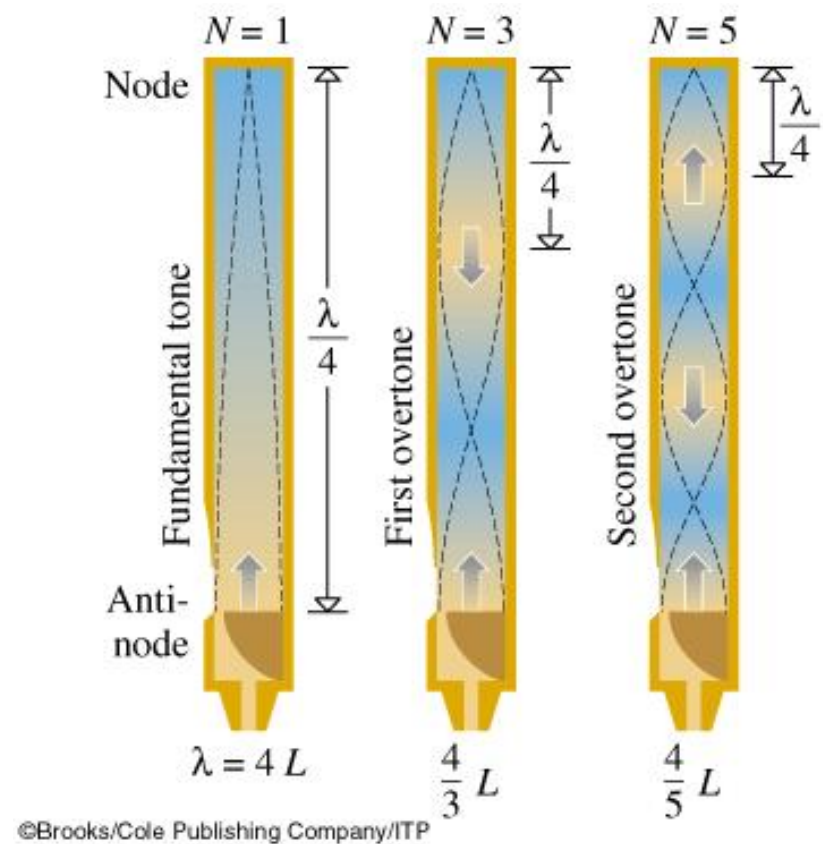
$$f_n = \frac{n v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3...)$$

Pour un tuyau ouvert aux 2 extrémités, le résultat est le même à l'exception de l'emplacement des noeuds.

Pour un tuyau ouvert à une extrémité : les fréquences des modes normaux sont :

$$f_n = \frac{n v}{4L} \quad (n = 1, 3, 5...)$$

où v est la vitesse du son dans l'air.



DvD 11-01