

Introduction à la propagation d'incertitude / fiabilité

Méthodes d'approximations

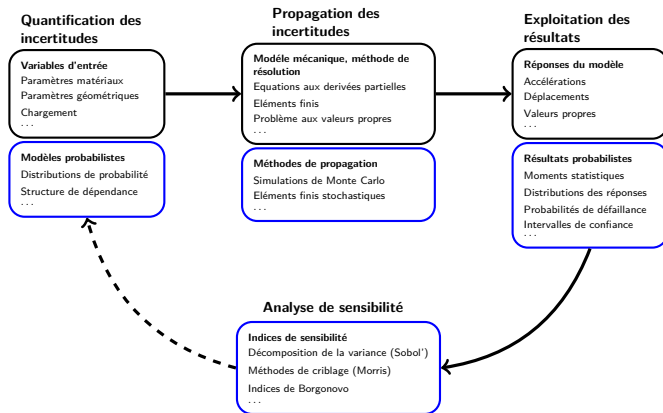
S. Dubreuil / N. Bartoli
sylvain.dubreuil@onera.fr
nathalie.bartoli@onera.fr

13/02/2026

Plan

- 1 Rappels
- 2 Analyse de sensibilité
- 3 Approximation par chaos polynomial
- 4 Conclusions

Démarche générale



Problématique

- La méthode de Monte Carlo permet de résoudre tous les problèmes de propagation d'incertitude/fiabilité mais ...
- Convergence lente \Rightarrow coût de calcul trop important si le modèle \mathcal{M} est cher à évaluer (CFD, éléments finis etc.)

Problématique

- La méthode de Monte Carlo permet de résoudre tous les problèmes de propagation d'incertitude/fiabilité mais ...
- Convergence lente \Rightarrow coût de calcul trop important si le modèle \mathcal{M} est cher à évaluer (CFD, éléments finis etc.)
- Nous avons vu une première méthode d'approximation linéaire dans le cas de la fiabilité, la méthode FORM

Problématique

- La méthode de Monte Carlo permet de résoudre tous les problèmes de propagation d'incertitude/fiabilité mais ...
- Convergence lente \Rightarrow coût de calcul trop important si le modèle \mathcal{M} est cher à évaluer (CFD, éléments finis etc.)
- Nous avons vu une première méthode d'approximation linéaire dans le cas de la fiabilité, la méthode FORM
- Généralisation de cette idée : construire une approximation analytique de la fonction \mathcal{M} . Nous avons vu une méthode d'apprentissage actif basée sur l'interpolation par processus gaussien.

Problématique

- La méthode de Monte Carlo permet de résoudre tous les problèmes de propagation d'incertitude/fiabilité mais ...
- Convergence lente \Rightarrow coût de calcul trop important si le modèle \mathcal{M} est cher à évaluer (CFD, éléments finis etc.)
- Nous avons vu une première méthode d'approximation linéaire dans le cas de la fiabilité, la méthode FORM
- Généralisation de cette idée : construire une approximation analytique de la fonction \mathcal{M} . Nous avons vu une méthode d'apprentissage actif basée sur l'interpolation par processus gaussien.
- Nous allons voir une autre méthode d'approximation, bien adaptée à l'analyse de sensibilité.

Plan

- 1 Rappels
- 2 Analyse de sensibilité**
- 3 Approximation par chaos polynomial
- 4 Conclusions

Analyse de sensibilité

Contexte

\mathbf{X} un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de densité $f_{\mathbf{X}}$. Y une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} , de loi inconnue, telle que $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec \mathcal{M} un modèle "boite noire".
L'analyse de sensibilité consiste à *quantifier* l'influence des variations des entrées \mathbf{X} sur les variations de la sortie Y .

Plusieurs définitions

Analyse de sensibilité

Contexte

\mathbf{X} un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de densité $f_{\mathbf{X}}$. Y une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} , de loi inconnue, telle que $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec \mathcal{M} un modèle "boite noire". L'analyse de sensibilité consiste à *quantifier* l'influence des variations des entrées \mathbf{X} sur les variations de la sortie Y .

Plusieurs définitions

- Sensibilité locale : calcul des dérivées partielles en un point, $\frac{\partial Y(\mathbf{x})}{\partial x_i} \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}$ (point de vue plutôt déterministe)

Analyse de sensibilité

Contexte

\mathbf{X} un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de densité $f_{\mathbf{X}}$. Y une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} , de loi inconnue, telle que $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec \mathcal{M} un modèle "boite noire".
L'analyse de sensibilité consiste à *quantifier* l'influence des variations des entrées \mathbf{X} sur les variations de la sortie Y .

Plusieurs définitions

- Sensibilité locale : calcul des dérivées partielles en un point, $\frac{\partial Y(\mathbf{x})}{\partial x_i} \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}$ (point de vue plutôt déterministe)
- Sensibilité globale :

Analyse de sensibilité

Contexte

\mathbf{X} un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de densité $f_{\mathbf{X}}$. Y une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} , de loi inconnue, telle que $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec \mathcal{M} un modèle "boite noire". L'analyse de sensibilité consiste à *quantifier* l'influence des variations des entrées \mathbf{X} sur les variations de la sortie Y .

Plusieurs définitions

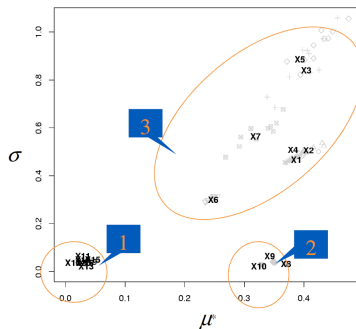
- Sensibilité locale : calcul des dérivées partielles en un point, $\frac{\partial Y(\mathbf{x})}{\partial x_i} \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}$ (point de vue plutôt déterministe)
- Sensibilité globale :
 - Screening ou criblage : on cherche à discriminer les variables qui n'ont *aucune influence* sur la réponse (n très grand). Exemples : méthode de Morris, graphe de $(\mathbb{E}[\frac{\partial Y(\mathbf{X})}{\partial x_i}], \mathbb{V}[\frac{\partial Y(\mathbf{X})}{\partial x_i}])$. Si l'espérance et la variance sont faibles alors l'influence de la variable est faible. DGSM (Derivative global sensitivity measure). etc.

Analyse de sensibilité

Illustration méthode de Morris

- *effets élémentaires* $d_i = \frac{Y(x_{i-1}) - Y(x_i)}{\delta}$ avec $x_i = x_{i-1} + \delta e_i$ avec $e_i, i = 1, \dots, n$ les vecteurs de la base canonique (plan d'expériences One At a Time)
- Calcul des effets élémentaires pour r points de départ x_0 différents. Coût de calcul $r \times (n + 1)$
- Graphe des points μ_i^*, σ_i respectivement la moyenne empirique et l'écart type des r valeurs de $|d_i|$

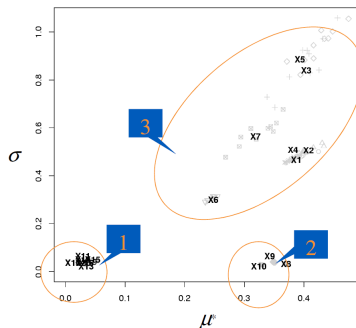
Analyse de sensibilité



Illustration

- Illustration du cours de B. Iooss Traitement des incertitudes INSA GMM $n = 20, r = 10$

Analyse de sensibilité



Illustration

- Illustration du cours de B. Iooss Traitement des incertitudes INSA GMM $n = 20$, $r = 10$
- 3 groupes de variables
 - 1 Effets négligeables
 - 2 Effets linéaires
 - 3 Effets non linéaires et/ou avec interactions

Analyse de sensibilité

Contexte

\mathbf{X} un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de densité $f_{\mathbf{X}}$. Y une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} , de loi inconnue, telle que $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec \mathcal{M} un modèle "boite noire". L'analyse de sensibilité consiste à *quantifier* l'influence des variations des entrées \mathbf{X} sur les variations de la sortie Y .

Plusieurs définitions

- Sensibilité locale : calcul des dérivées partielles en un point, $\frac{\partial Y(\mathbf{x})}{\partial x_i} \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}$ (point de vue plutôt déterministe)
- Sensibilité globale :
 - Screening ou criblage : on cherche à discriminer les variables qui n'ont *aucune influence* sur la réponse (n très grand). Exemples : méthode de Morris, graphe de $(\mathbb{E}[|\frac{\partial Y(\mathbf{X})}{\partial x_i}|], \mathbb{V}[\frac{\partial Y(\mathbf{X})}{\partial x_i}])$. Si l'espérance et la variance sont faibles alors l'influence de la variable est faible. DGSM (Derivative global sensitivity mesure). etc.

Analyse de sensibilité

Contexte

\mathbf{X} un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de densité $f_{\mathbf{X}}$. Y une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} , de loi inconnue, telle que $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec \mathcal{M} un modèle "boite noire". L'analyse de sensibilité consiste à *quantifier* l'influence des variations des entrées \mathbf{X} sur les variations de la sortie Y .

Plusieurs définitions

- Sensibilité locale : calcul des dérivées partielles en un point, $\frac{\partial Y(\mathbf{x})}{\partial x_i} \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}$ (point de vue plutôt déterministe)
- Sensibilité globale :
 - Screening ou criblage : on cherche à discriminer les variables qui n'ont *aucune influence* sur la réponse (n très grand). Exemples : méthode de Morris, graphe de $(\mathbb{E}[\frac{\partial Y(\mathbf{X})}{\partial x_i}], \mathbb{V}[\frac{\partial Y(\mathbf{X})}{\partial x_i}])$. Si l'espérance et la variance sont faibles alors l'influence de la variable est faible. DGSM (Derivative global sensitivity mesure). etc.
 - Méthodes basées sur la loi conditionnelle de Y , ("écart" entre la cdf de Y et celle de $Y|X_i$), etc.

Analyse de sensibilité

Contexte

\mathbf{X} un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de densité $f_{\mathbf{X}}$. Y une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} , de loi inconnue, telle que $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec \mathcal{M} un modèle "boite noire"
L'analyse de sensibilité consiste à *quantifier* l'influence des variations des entrées \mathbf{X} sur les variations de la sortie Y .

Plusieurs définitions

- Sensibilité locale : calcul des dérivées partielles en un point, $\frac{\partial Y(\mathbf{x})}{\partial x_i} \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}$ (point de vue plutôt déterministe)
- Sensibilité globale :
 - Screening ou criblage : on cherche à discriminer les variables qui n'ont *aucune influence* sur la réponse (n très grand). Exemples : méthode de Morris, graphe de $(\mathbb{E}[\frac{\partial Y(\mathbf{X})}{\partial x_i}], \mathbb{V}[\frac{\partial Y(\mathbf{X})}{\partial x_i}])$. Si l'espérance et la variance sont faibles alors l'influence de la variable est faible. DGSM (Derivative global sensitivity mesure). etc.
 - Méthodes basées sur la loi conditionnelle de Y , ("écart" entre la cdf de Y et celle de $Y|X_i$), etc.
 - Méthodes basées sur la **variance**.

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948]

- \mathbf{X} est un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de composantes indépendantes et $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec $\mathbb{E}[Y^2] \leq \infty$

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948]

- \mathbf{X} est un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de composantes indépendantes et $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec $\mathbb{E}[Y^2] \leq \infty$
- Il existe une décomposition unique de $Y(\mathbf{X})$ sous la forme :

$$Y(\mathbf{X}) = Y_0 + \sum_{i=1}^n Y_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_{i,j}(X_i, X_j) + \cdots + Y_{1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n)$$

telle que : $\mathbb{E}[Y_I(X_I)|X_J] = 0$ pour tout sous ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$ et pour tout sous ensemble $J \subsetneq I$

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948]

- \mathbf{X} est un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de composantes indépendantes et $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec $\mathbb{E}[Y^2] \leq \infty$
- Il existe une décomposition unique de $Y(\mathbf{X})$ sous la forme :

$$Y(\mathbf{X}) = Y_0 + \sum_{i=1}^n Y_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_{i,j}(X_i, X_j) + \cdots + Y_{1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n)$$

telle que : $\mathbb{E}[Y_I(X_I)|X_J] = 0$ pour tout sous ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$ et pour tout sous ensemble $J \subsetneq I$



$$\begin{aligned} Y_0 &= \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})] \\ Y_i(X_i) &= \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i] - Y_0 \\ Y_{i,j}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i, X_j] - Y_i(X_i) - Y_j(X_j) - Y_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948]

- \mathbf{X} est un vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n , continu, de composantes indépendantes et $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ avec $\mathbb{E}[Y^2] \leq \infty$
- Il existe une décomposition unique de $Y(\mathbf{X})$ sous la forme :

$$Y(\mathbf{X}) = Y_0 + \sum_{i=1}^n Y_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_{i,j}(X_i, X_j) + \cdots + Y_{1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n)$$

telle que : $\mathbb{E}[Y_I(X_I)|X_J] = 0$ pour tout sous ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$ et pour tout sous ensemble $J \subsetneq I$



$$\begin{aligned} Y_0 &= \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})] \\ Y_i(X_i) &= \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i] - Y_0 \\ Y_{i,j}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i, X_j] - Y_i(X_i) - Y_j(X_j) - Y_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Tous les termes de la décomposition sont orthogonaux entre eux : $\mathbb{E}[Y_I(X_I), Y_J(X_J)] = 0$ pour tous les sous ensembles d'indice $I \neq J$

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948], ANOVA Sobol [1993]

- En utilisant l'orthogonalité des termes de la décomposition nous obtenons :

$$\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[Y_i(X_i)] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{V}[Y_{i,j}(X_i, X_j)] + \cdots + \mathbb{V}[Y_{1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n)]$$

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948], ANOVA Sobol [1993]

- En utilisant l'orthogonalité des termes de la décomposition nous obtenons :

$$\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[Y_i(X_i)] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{V}[Y_{i,j}(X_i, X_j)] + \cdots + \mathbb{V}[Y_{1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n)]$$

- Que l'on notera :

$$D = \sum_{i=1}^n D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} D_{i,j} + \cdots + D_{1,\dots,n}$$

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948], ANOVA Sobol [1993]

- En utilisant l'orthogonalité des termes de la décomposition nous obtenons :

$$\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[Y_i(X_i)] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{V}[Y_{i,j}(X_i, X_j)] + \cdots + \mathbb{V}[Y_{1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n)]$$

- Que l'on notera :

$$D = \sum_{i=1}^n D_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} D_{i,j} + \cdots + D_{1,\dots,n}$$

- On obtient alors les indices de sensibilité (indice de Sobol) :

$$S_I = \frac{D_I}{D}$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_{i,j} + \cdots + S_{1,\dots,n} = 1$$

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948], ANOVA Sobol [1993]

- Les indices d'ordre 1,

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i]]}{\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})]}$$

caractérisent l'influence de la variable X_i seule sur la variation de la sortie $Y(\mathbf{X})$.

Les indices d'ordre supérieur caractérisent l'effet des interactions entre variables sur la variation de la sortie $Y(\mathbf{X})$.

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948], ANOVA Sobol [1993]

- Les indices d'ordre 1,

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i]]}{\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})]}$$

caractérisent l'influence de la variable X_i seule sur la variation de la sortie $Y(\mathbf{X})$.

Les indices d'ordre supérieur caractérisent l'effet des interactions entre variables sur la variation de la sortie $Y(\mathbf{X})$.

- On définit également l'indice total de la variable X_i comme l'influence de la variable X_i seule et en interaction avec toutes les autres :

$$S_i^t = \sum S_{I_i}$$

tel que $i \in I_i$

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948], ANOVA Sobol [1993]

- Les indices d'ordre 1,

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i]]}{\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})]}$$

caractérisent l'influence de la variable X_i seule sur la variation de la sortie $Y(\mathbf{X})$.

Les indices d'ordre supérieur caractérisent l'effet des interactions entre variables sur la variation de la sortie $Y(\mathbf{X})$.

- On définit également l'indice total de la variable X_i comme l'influence de la variable X_i seule et en interaction avec toutes les autres :

$$S_i^t = \sum S_{l_i}$$

tel que $i \in l_i$

- Ces indices peuvent être estimés par échantillonnage, il existe différentes méthodes d'échantillonnage mais le coût de calcul est en général assez important. Nous allons voir dans la suite une approche par approximation du modèle $\mathcal{M}(\mathbf{X})$.

Méthodes basées sur la variance

Décomposition de Hoeffding [1948], ANOVA Sobol [1993]

- Les indices d'ordre 1,

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i]]}{\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})]}$$

caractérisent l'influence de la variable X_i seule sur la variation de la sortie $Y(\mathbf{X})$.

Les indices d'ordre supérieur caractérisent l'effet des interactions entre variables sur la variation de la sortie $Y(\mathbf{X})$.

- On définit également l'indice total de la variable X_i comme l'influence de la variable X_i seule et en interaction avec toutes les autres :

$$S_i^t = \sum S_{I_i}$$

tel que $i \in I_i$

- Ces indices peuvent être estimés par échantillonnage, il existe différentes méthodes d'échantillonnage mais le coût de calcul est en général assez important. Nous allons voir dans la suite une approche par approximation du modèle $\mathcal{M}(\mathbf{X})$.
- La somme des indices d'ordre 1 est inférieure ou égale à 1, la somme des indices totaux est supérieure ou égale à 1. L'écart de ces sommes à 1 permet de quantifier rapidement si les interactions entre variables ont une importance.

Plan

- 1 Rappels
- 2 Analyse de sensibilité
- 3 Approximation par chaos polynomial**
- 4 Conclusions

Hypothèses

- On s'intéresse toujours à un problème de la forme

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$$

Hypothèses

- On s'intéresse toujours à un problème de la forme

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$$

- Et l'on veut construire une approximation

$$Y \approx \hat{Y} = \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{X})$$

Hypothèses

- On s'intéresse toujours à un problème de la forme

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$$

- Et l'on veut construire une approximation

$$Y \approx \hat{Y} = \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{X})$$

- On suppose que Y est une variable aléatoire d'ordre 2, $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$

Hypothèses

- On s'intéresse toujours à un problème de la forme

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$$

- Et l'on veut construire une approximation

$$Y \approx \hat{Y} = \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{X})$$

- On suppose que Y est une variable aléatoire d'ordre 2, $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$
- Espace L^2 des fonctions de carré intégrable, espace de Hilbert, approximation de Y sur une base de l'espace de Hilbert

Chaos polynomial

- Chaos polynomial = base des polynômes orthogonaux par rapport à la loi de \mathbf{X}

Chaos polynomial

- Chaos polynomial = base des polynômes orthogonaux par rapport à la loi de \mathbf{X}
- On appelle $\Phi = \{\phi_i(\mathbf{X})\}_{i \in \mathbb{N}}$ la base, on a alors :

$$\mathbb{E}[\phi_i(\mathbf{X})\phi_j(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_i(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \delta_{ij}\mathbb{E}[\phi_i(\mathbf{X})\phi_j(\mathbf{X})]$$

En pratique on norme les polynômes par $\mathbb{E}[\phi_i(\mathbf{X})^2]$

Chaos polynomial

- Chaos polynomial = base des polynômes orthogonaux par rapport à la loi de \mathbf{X}
- On appelle $\Phi = \{\phi_i(\mathbf{X})\}_{i \in \mathbb{N}}$ la base, on a alors :

$$\mathbb{E}[\phi_i(\mathbf{X})\phi_j(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_i(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \delta_{ij}\mathbb{E}[\phi_i(\mathbf{X})\phi_i(\mathbf{X})]$$

En pratique on norme les polynômes par $\mathbb{E}[\phi_i(\mathbf{X})^2]$

- L'approximation sera donc (Cameron and Martin 1947),

$$Y = \hat{Y} = \sum_i^{\infty} \alpha_i \phi_i(\mathbf{X})$$

convergence en moyenne quadratique.

Chaos polynomial : construction de l'approximation



$$Y = \hat{Y} = \sum_i^{\infty} \alpha_i \phi_i(\mathbf{x})$$

Chaos polynomial : construction de l'approximation



$$Y = \hat{Y} = \sum_i^{\infty} \alpha_i \phi_i(\mathbf{x})$$

- 1) Construction de la base

Chaos polynomial : construction de l'approximation



$$Y = \hat{Y} = \sum_i^{\infty} \alpha_i \phi_i(\mathbf{x})$$

- 1) Construction de la base
- 2) Troncature

Chaos polynomial : construction de l'approximation



$$Y = \hat{Y} = \sum_i^{\infty} \alpha_i \phi_i(\mathbf{x})$$

- 1) Construction de la base
- 2) Troncature
- 3) Calcul des coefficients

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Construction de la base
 - Cas **X** de composantes indépendantes et de lois marginales "classiques"

Chaos polynomial : construction de l'approximation

• Construction de la base

- Cas **X** de composantes indépendantes et de lois marginales "classiques"
- Tensorisation de famille de polynômes tabulés

Distribution	Polynômes
Normale ($\mu = 0, \sigma = 1$)	Hermite
Uniforme ($a = -1, b = 1$)	Legendre
Gamma	Laguerre
Beta	Jacobi
Poisson	Charlier

Exemple : polynômes d'Hermite, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$,
 $H_0 = 1$, $H_1 = x$, $H_2 = x^2 - 1$, $H_3 = x^3 - 3x$

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Construction de la base

- Cas **X** de composantes indépendantes et de lois marginales "classiques"
- Tensorisation de famille de polynômes tabulés

Distribution	Polynômes
Normale ($\mu = 0, \sigma = 1$)	Hermite
Uniforme ($a = -1, b = 1$)	Legendre
Gamma	Laguerre
Beta	Jacobi
Poisson	Charlier

Exemple : polynômes d'Hermite, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$,

$H_0 = 1, H_1 = x, H_2 = x^2 - 1, H_3 = x^3 - 3x$

- Lois marginales non tabulées : construction numérique de la famille de polynômes orthogonaux (transformée de Stieltjes)

Chaos polynomial : construction de l'approximation

• Construction de la base

- Cas **X** de composantes indépendantes et de lois marginales "classiques"
- Tensorisation de famille de polynômes tabulés

Distribution	Polynômes
Normale ($\mu = 0, \sigma = 1$)	Hermite
Uniforme ($a = -1, b = 1$)	Legendre
Gamma	Laguerre
Beta	Jacobi
Poisson	Charlier

Exemple : polynômes d'Hermite, $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$,

$H_0 = 1, H_1 = x, H_2 = x^2 - 1, H_3 = x^3 - 3x$

- Lois marginales non tabulées : construction numérique de la famille de polynômes orthogonaux (transformée de Stieltjes)
- Structure de dépendance entre les composantes de **X** : construction numérique d'après Soize et Ghanem, 2004

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Troncature



$$Y \approx \hat{Y} = \sum_{i=0}^{P-1} \alpha_i \phi_i(\mathbf{x})$$

- Choix de P

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Troncature



$$Y \approx \hat{Y} = \sum_{i=0}^{P-1} \alpha_i \phi_i(\mathbf{X})$$

- Choix de P
- \mathbf{X} de dimension n . Choix de P tel que la base contienne tous les polynômes jusqu'à l'ordre d

$$P = \frac{(d+n)!}{d!n!}$$

Chaos polynomial : construction de l'approximation

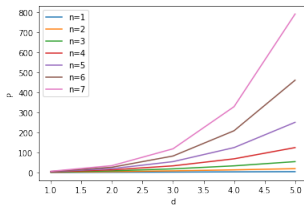
- Troncature



$$Y \approx \hat{Y} = \sum_{i=0}^{P-1} \alpha_i \phi_i(\mathbf{X})$$

- Choix de P
- \mathbf{X} de dimension n . Choix de P tel que la base contienne tous les polynômes jusqu'à l'ordre d

$$P = \frac{(d+n)!}{d!n!}$$



Chaos polynomial : construction de l'approximation

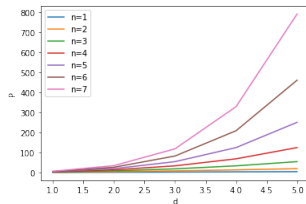
- Troncature



$$Y \approx \hat{Y} = \sum_{i=0}^{P-1} \alpha_i \phi_i(\mathbf{X})$$

- Choix de P
- \mathbf{X} de dimension n . Choix de P tel que la base contienne tous les polynômes jusqu'à l'ordre d

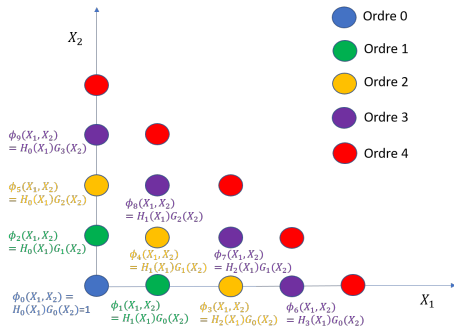
$$P = \frac{(d+n)!}{d!n!}$$



- La taille de la base et donc le nombre de coefficients à déterminer "explosent" avec la dimension (malédiction de la dimension, curse of dimensionality)

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Exemple de construction et d'énumération en dimension 2. On note H_i les polynômes orthogonaux par rapport à la distribution de X_1 et G_i ceux par rapport à la distribution de X_2 .



Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Calcul des coefficients α_i

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Calcul des coefficients α_i
 - Historiquement approche "éléments finis stochastiques" on utilise la base Φ comme base de projection des équations stochastiques à résoudre (Ghanem et Spanos, 1991). Méthode intrusive donc difficile à mettre en œuvre.

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Calcul des coefficients α_j
 - Historiquement approche "éléments finis stochastiques" on utilise la base Φ comme base de projection des équations stochastiques à résoudre (Ghanem et Spanos, 1991). Méthode intrusive donc difficile à mettre en œuvre.
 - Projection + intégration numérique, pour chaque α_j , on multiplie l'approximation par ϕ_j et on prend l'espérance

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Calcul des coefficients α_j

- Historiquement approche "éléments finis stochastiques" on utilise la base Φ comme base de projection des équations stochastiques à résoudre (Ghanem et Spanos, 1991). Méthode intrusive donc difficile à mettre en œuvre.
- Projection + intégration numérique, pour chaque α_j , on multiplie l'approximation par ϕ_j et on prend l'espérance

$$\alpha_j = \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})\phi_j(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} Y(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

avec $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ la densité de probabilité de \mathbf{X} .

Intégrale évaluée numériquement (donc problème quand la dimension est grande ...)

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Calcul des coefficients α_j

- Historiquement approche "éléments finis stochastiques" on utilise la base Φ comme base de projection des équations stochastiques à résoudre (Ghanem et Spanos, 1991). Méthode intrusive donc difficile à mettre en œuvre.
- Projection + intégration numérique, pour chaque α_j , on multiplie l'approximation par ϕ_j et on prend l'espérance

$$\alpha_j = \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})\phi_j(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} Y(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})f_X(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

avec $f_X(\mathbf{x})$ la densité de probabilité de \mathbf{X} .

Intégrale évaluée numériquement (donc problème quand la dimension est grande ...)

- Régression + moindres carrés ordinaires. A partir d'un échantillon \mathbf{Y} de la fonction à approcher on cherche

$$\alpha^* = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^P} \|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}\|^2$$

Quand la dimension est grande, la taille de la base de données pour construire \mathbf{Y} peut devenir problématique.

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Quelques pistes pour vaincre la malédiction de la dimension

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Quelques pistes pour vaincre la malédiction de la dimension
 - Calcul par projection :

$$\alpha_j = \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})\phi_j(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} Y(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})f_X(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Quadrature en dimension n par tensorisation des règles en dimension 1 \Rightarrow le nombre de points devient très grand.

Une solution, grille creuse (sparse grid), règle de Smolyak.

Chaos polynomial : construction de l'approximation

- Quelques pistes pour vaincre la malédiction de la dimension
 - Calcul par projection :

$$\alpha_j = \mathbb{E}[Y(\mathbf{X})\phi_j(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{R}^n} Y(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})f_X(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Quadrature en dimension n par tensorisation des règles en dimension 1 \Rightarrow le nombre de points devient très grand.

Une solution, grille creuse (sparse grid), règle de Smolyak.

- Calcul par régression : construction d'une base creuse

$$Y \approx \hat{Y} = \sum_{\beta_i \in \mathcal{B}} \alpha_{\beta_i} \phi_{\beta_i}(\mathbf{X})$$

où l'ensemble \mathcal{B} ne contient pas tous les indices jusqu'à l'ordre P mais uniquement ceux des polynômes intéressants.

De nombreuses approches de régression creuses ont été développées, par exemple la méthode Least Angle Regression construit itérativement l'ensemble \mathcal{B} en ajoutant l'indice du polynôme le plus corrélé avec le résidu (parmi un ensemble de candidats contenant les indices de tous les polynômes jusqu'à l'ordre d) (G. Blatman et B. Sudret, 2010) .

Chaos polynomial : illustration

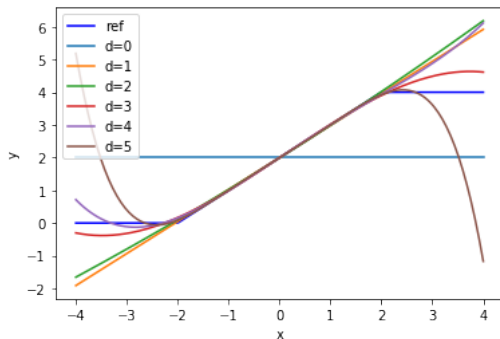


$$Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 2 + x, & x \in [-2, 2] \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

Chaos polynomial : illustration

•

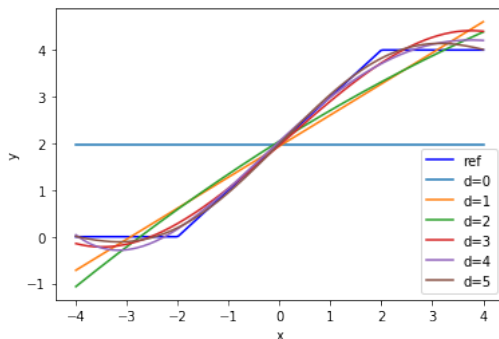
$$Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 2 + x, & x \in [-2, 2] \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

• $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 

Chaos polynomial : illustration

•

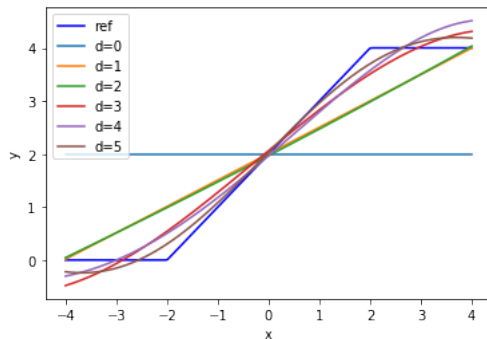
$$Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 2 + x, & x \in [-2, 2] \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

• $X \sim \mathcal{N}(0, 2)$ 

Chaos polynomial : illustration

•

$$Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 2 + x, & x \in [-2, 2] \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

• $X \sim \mathcal{N}(0, 3)$ 

Chaos polynomial : illustration



$$Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 2 + x, & x \in [-2, 2] \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

- Le choix de polynômes orthogonaux par rapport à la loi de \mathbf{X} , ainsi que la méthode de calcul des coefficients (pondération par rapport à la loi de \mathbf{X}) conduit à une "meilleure" approximation là où la densité de \mathbf{X} est importante. Cette approche est donc efficace pour estimer les premiers moments de Y mais n'est a priori pas dédiée à la fiabilité (zones d'intérêt où la densité de \mathbf{X} est faible).

Chaos polynomial : moyenne, variance et indices de sensibilité

Moyenne et variance



$$Y \approx \hat{Y} = \sum_{i=1}^P \alpha_i \phi_i(\mathbf{X})$$

- Calcul de la moyenne et de la variance de \hat{Y}

Chaos polynomial : moyenne, variance et indices de sensibilité

Moyenne et variance



$$Y \approx \hat{Y} = \sum_{i=1}^P \alpha_i \phi_i(\mathbf{X})$$

- Calcul de la moyenne et de la variance de \hat{Y}

$$\mathbb{E}[\hat{Y}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^P \alpha_i \phi_i(\mathbf{X})\right] = \alpha_1$$

$$\mathbb{V}[\hat{Y}] = \sum_{i>1} \alpha_i^2$$

Chaos polynomial : moyenne, variance et indices de sensibilité

Indices de sensibilité (Sudret [2008])

- Par identification de l'approximation par chaos polynomial avec la décomposition de Hoeffding on montre que les indices de sensibilité sont calculables analytiquement.

Chaos polynomial : moyenne, variance et indices de sensibilité

Indices de sensibilité (Sudret [2008])

- Par identification de l'approximation par chaos polynomial avec la décomposition de Hoeffding on montre que les indices de sensibilité sont calculables analytiquement.
- Notations : \mathbf{a} un vecteur de taille n qui contient les degrés des variables dans le polynôme $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})$, exemple $n = 3$, $\mathbf{a} = \{0, 1, 2\}$ alors le polynôme $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})$ est constant suivant X_1 , linéaire suivant X_2 et quadratique suivant X_3 .
 $\mathcal{L}_I = \{\mathbf{a} : a_k > 0 \text{ si } k \in I, a_k = 0 \text{ si } k \notin I\}$. Ces ensembles permettent d'identifier les polynômes dépendant uniquement de la variable i (avec $I = i$) ou dépendant uniquement d'un groupe de variables (ex. $I = \{i, j\}$)

Chaos polynomial : moyenne, variance et indices de sensibilité

Indices de sensibilité (Sudret [2008])

- Par identification de l'approximation par chaos polynomial avec la décomposition de Hoeffding on montre que les indices de sensibilité sont calculables analytiquement.
- Notations : \mathbf{a} un vecteur de taille n qui contient les degrés des variables dans le polynôme $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})$, exemple $n = 3$, $\mathbf{a} = \{0, 1, 2\}$ alors le polynôme $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})$ est constant suivant X_1 , linéaire suivant X_2 et quadratique suivant X_3 .
 $\mathcal{L}_I = \{\mathbf{a} : a_k > 0 \text{ si } k \in I, a_k = 0 \text{ si } k \notin I\}$. Ces ensembles permettent d'identifier les polynômes dépendant uniquement de la variable i (avec $I = i$) ou dépendant uniquement d'un groupe de variables (ex. $I = \{i, j\}$)
- Décomposition de Hoeffding de l'approximation par chaos polynomial

Chaos polynomial : moyenne, variance et indices de sensibilité

Indices de sensibilité (Sudret [2008])

- Par identification de l'approximation par chaos polynomial avec la décomposition de Hoeffding on montre que les indices de sensibilité sont calculables analytiquement.
- Notations : \mathbf{a} un vecteur de taille n qui contient les degrés des variables dans le polynôme $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})$, exemple $n = 3$, $\mathbf{a} = \{0, 1, 2\}$ alors le polynôme $\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})$ est constant suivant X_1 , linéaire suivant X_2 et quadratique suivant X_3 .
 $\mathcal{L}_I = \{\mathbf{a} : a_k > 0 \text{ si } k \in I, a_k = 0 \text{ si } k \notin I\}$. Ces ensembles permettent d'identifier les polynômes dépendant uniquement de la variable i (avec $I = i$) ou dépendant uniquement d'un groupe de variables (ex. $I = \{i, j\}$)
- Décomposition de Hoeffding de l'approximation par chaos polynomial

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\mathbf{X}) = \hat{Y}_0 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}_i} \alpha_{\mathbf{a}} \phi_{\mathbf{a}}(X_i) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}_{i,j}} \alpha_{\mathbf{a}} \phi_{\mathbf{a}}(X_i, X_j) \\ &+ \dots \\ &+ \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}_{1, \dots, n}} \alpha_{\mathbf{a}} \phi_{\mathbf{a}}(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Chaos polynomial : moyenne, variance et indices de sensibilité

Indices de sensibilité (Sudret [2008])

- Approximation des indices de sensibilité

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i]]}{\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})]} \approx \hat{S}_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[\hat{Y}(\mathbf{X})|X_i]]}{\mathbb{V}[\hat{Y}(\mathbf{X})]}$$

Chaos polynomial : moyenne, variance et indices de sensibilité

Indices de sensibilité (Sudret [2008])

- Approximation des indices de sensibilité

$$S_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y(\mathbf{X})|X_i]]}{\mathbb{V}[Y(\mathbf{X})]} \approx \hat{S}_i = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[\hat{Y}(\mathbf{X})|X_i]]}{\mathbb{V}[\hat{Y}(\mathbf{X})]}$$

- On obtient

$$\hat{S}_i = \frac{\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}_i} \alpha_{\mathbf{a}}^2 \mathbb{E}[\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})^2]}{\mathbb{V}[\hat{Y}]}$$

et

$$\hat{S}_i^t = \frac{\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{L}_i^+} \alpha_{\mathbf{a}}^2 \mathbb{E}[\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{X})^2]}{\mathbb{V}[\hat{Y}]}$$

avec $\mathcal{L}_i^+ = \{\mathbf{a} : a_k > 0\}$

Plan

- 1 Rappels
- 2 Analyse de sensibilité
- 3 Approximation par chaos polynomial
- 4 Conclusions**

Conclusions

Approximation par chaos polynomial

- Approximation par chaos polynomial : approximation polynomiale "pondérée" par la distribution des paramètres aléatoires

Conclusions

Approximation par chaos polynomial

- Approximation par chaos polynomial : approximation polynomiale "pondérée" par la distribution des paramètres aléatoires
- Calcul analytique de la moyenne, de la variance et des indices de sensibilité. Il n'y a donc pas d'erreur liée à l'échantillonnage.

Conclusions

Approximation par chaos polynomial

- Approximation par chaos polynomial : approximation polynomiale "pondérée" par la distribution des paramètres aléatoires
- Calcul analytique de la moyenne, de la variance et des indices de sensibilité. Il n'y a donc pas d'erreur liée à l'échantillonnage.
- La qualité de l'estimation va dépendre de la qualité de l'approximation du modèle \mathcal{M} , mais il est difficile de relier l'erreur de l'approximation du modèle à l'erreur commise sur l'estimation de la moyenne, de la variance ou des indices de sensibilité. Le rééchantillonnage bootstrap peut être une solution.

Conclusions

Approximation par chaos polynomial

- Approximation par chaos polynomial : approximation polynomiale "pondérée" par la distribution des paramètres aléatoires
- Calcul analytique de la moyenne, de la variance et des indices de sensibilité. Il n'y a donc pas d'erreur liée à l'échantillonnage.
- La qualité de l'estimation va dépendre de la qualité de l'approximation du modèle \mathcal{M} , mais il est difficile de relier l'erreur de l'approximation du modèle à l'erreur commise sur l'estimation de la moyenne, de la variance ou des indices de sensibilité. Le rééchantillonnage bootstrap peut être une solution.

Conclusions

Approximation par chaos polynomial

- Approximation par chaos polynomial : approximation polynomiale "pondérée" par la distribution des paramètres aléatoires
- Calcul analytique de la moyenne, de la variance et des indices de sensibilité. Il n'y a donc pas d'erreur liée à l'échantillonnage.
- La qualité de l'estimation va dépendre de la qualité de l'approximation du modèle \mathcal{M} , mais il est difficile de relier l'erreur de l'approximation du modèle à l'erreur commise sur l'estimation de la moyenne, de la variance ou des indices de sensibilité. Le ré-échantillonnage bootstrap peut être une solution.
- Dans le cadre de la fiabilité il est possible d'utiliser l'approximation par chaos polynomial pour une analyse par Monte-Carlo, on cumule alors 2 sources d'erreur.

Conclusions

Approximation par chaos polynomial

- Approximation par chaos polynomial : approximation polynomiale "pondérée" par la distribution des paramètres aléatoires
- Calcul analytique de la moyenne, de la variance et des indices de sensibilité. Il n'y a donc pas d'erreur liée à l'échantillonnage.
- La qualité de l'estimation va dépendre de la qualité de l'approximation du modèle \mathcal{M} , mais il est difficile de relier l'erreur de l'approximation du modèle à l'erreur commise sur l'estimation de la moyenne, de la variance ou des indices de sensibilité. Le ré-échantillonnage bootstrap peut être une solution.
- Dans le cadre de la fiabilité il est possible d'utiliser l'approximation par chaos polynomial pour une analyse par Monte-Carlo, on cumule alors 2 sources d'erreur.
- Enfin, les méthodes d'approximation peuvent être combinées (ex. approximation par processus gaussien dont la moyenne est un développement en polynômes de chaos).