

# شبیه‌سازی رایانه‌ای در فیزیک

ترم پاییز ۱۳۹۹ - دکتر قنبرنژاد

## امتحان میان ترم

زمان امتحان ۲۴ ساعت از ۹ شب ۵شنبه ۶ آذر، تا ۹ شب جمعه ۷ آذر است. از بین سوال‌های ۱ و ۱' تنها به یک سوال جواب دهید. سوال‌های ۴ و ۴' نیز همین‌گونه هستند و از بین آن‌ها تنها به یک سوال جواب دهید. سوال ۴ و ۴' گروهی است و برای حل آن می‌توانید گروه‌هایی شامل ۲ یا ۳ نفر تشکیل دهید. در برگه‌ی پاسخستان **حتماً** اسم اعضای گروه را بنویسید و هر یک از اعضا به صورت مستقل جواب سوال را تحویل دهد. در سوال‌های ۴ و ۴' نمره‌ی کامل به خلاقانه‌ترین جواب تعلق می‌گیرد و باقی پاسخ‌ها به صورت نسبی نمره دهی می‌شوند. کدهایی که زده‌اید به همراه گزارش (و اگر فکر می‌کنید فایل دیگری نیاز است) را زیپ کنید. اسم فایل زیپ، نام و نام خانوادگی به همراه شماره دانشجویی باشد. در گزارش‌های خود، راه‌حل، استدلال، الگوریتم و نتایجی که به دست آورده‌اید را **کامل** توضیح دهید. مثال‌های زده شده برای سوال‌های ۴ و ۴' تنها به عنوان نمونه است و به صورت کیفی و خلاصه شده می‌باشد. در گزارش خود لازم است نتایج کمی، نمودارها و حل عددی را نیز بیاورید. همچنین هر بخش را به صورت کامل تشریح و گزارش کنید. مجموع نمرات ۱۰۵ است که ۵ نمره‌ی آن امتیازی است.

(الف) با مسئله‌ی تراوش اتاقکی<sup>۱</sup> دوبعدی در تمرین‌ها آشنا شده‌اید. یک شبکه‌ی سه بعدی به طول  $L$  در نظر بگیرید که می‌تواند یکی از مقادیر  $L = \{10, 20, 40, 80\}$  را داشته باشد. هر خانه از شبکه را به احتمال  $p$  روشن کنید. (ب) اگر دو خانه یک سطح مشترک داشته باشند با یکدیگر همسایه هستند و تشکیل خوشه می‌دهند. طول همبستگی و حجم بزرگ‌ترین خوشه‌ی غیر بی‌نهایت را برای این شبکه‌ها در سه بعد پیدا کنید و نتیجه را برحسب مقادیر مختلف  $p$  رسم کنید (نتیجه برای هر طول را در یک نمودار جداگانه رسم کنید). (پ) با توجه به آن نقطه بحرانی وابسته به طول  $p_c(L)$  را به دست آورید. (ت) به کمک رابطه (۱) و رسم نمودار مربوط به آن، نمای بحرانی را بیابید. (۳۰ نمره)

$$|p_c(L) - p_c(\infty)| \sim L^{-\frac{1}{\nu}}. \quad (1)$$

(الف) مسئله‌ی تراوش زنجیره‌ای<sup>۲</sup> دوبعدی را می‌خواهیم بررسی کنیم. برای این کار یک شبکه‌ی دو بعدی به طول  $L$  بسازید که می‌تواند یکی از مقادیر  $L = \{10, 20, 40, 80, 160\}$  را داشته باشد. هر **یال** از شبکه با احتمال  $p$  وجود دارد.

(ب) طول همبستگی و حجم بزرگ‌ترین خوشه‌ی غیر بی‌نهایت را برای این شبکه‌ها پیدا کنید و نتیجه را برحسب مقادیر مختلف  $p$  رسم کنید (نتیجه برای هر طول را در یک نمودار جداگانه رسم کنید).

<sup>1</sup>site percolation

<sup>2</sup>bond percolation

(پ) با توجه به آن نقطه بحرانی وابسته به طول شبکه  $p_c(L)$  را به دست آورید.  
 (ت) مقدار  $\nu$  را با رسم نمودار  $|p_c(L) - p_c(\infty)|$  برحسب  $L$  گزارش کنید.  
 (۳۰ نمره)

(۲ الف) شبکه‌ی اردوش-رنی با  $N = 10000$  راس و متوسط درجه‌ی رئوس  $\langle k \rangle = \{1, 8, 64, 512\}$  بسازید. خوشگی را در آن بررسی کنید و تابع توزیع آن را رسم کنید.  
 (ب) می‌دانیم در شبکه اردوش-رنی تابع توزیع درجه رئوس از توزیع پواسون (رابطه (۲)) پیروی می‌کند.

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (2)$$

صحت این رابطه را در شبکه‌هایی که ساخته‌اید بررسی کنید. (۱۵ نمره)

(۳ الف) می‌خواهیم مولدی برای تولید اعداد کاتوره‌ای با تابع توزیع  $g(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$  در بازه  $[x_m, \infty)$  و برای  $\alpha > 0$  داشته باشیم. تابع تبدیل لازم برای تغییر مولد یکنواخت به این تابع توزیع را محاسبه کنید. صحت تابع توزیعی که به دست آورده‌اید را برای  $\alpha = 1$  و  $x_m = 1$  نشان دهید.

(ب) از الگوریتم متروپولیس استفاده کنید تا تابع توزیع بخش قبل را برای  $\alpha = 1$  و  $x_m = 1$  بسازید و صحت آن را نمایش دهید. در یک جدول طول قدم، نرخ قبولی و طول همبستگی را برای تمام نرخ‌های قبولی در بازه  $\{0/1, 0/2, \dots, 0/9\}$  گزارش کنید  
 (۲۵ نمره)

(۴) با توجه به مباحثی که در زمینه اتوماتای سلولی، لایه‌نشانی و ولگشت آموخته‌اید، یک پدیده‌ی طبیعی (زیستی، اجتماعی، اقتصادی و ...) را مدل کنید و با شبیه‌سازی چهار بخش زیر را در آن بررسی کنید.

(الف) مسئله‌ای که می‌خواهید مدل کنید را شرح دهید.  
 (ب) نحوه مدل کردن، تغییر پارامترها و تقریب‌هایی که زده‌اید را توضیح دهید.  
 (پ) شبیه‌سازی را انجام دهید و نتایج را گزارش کنید.  
 (ت) نتایج به دست آمده را تحلیل و تفسیر کنید.  
 (۳۵ نمره)

به عنوان مثال، مساله‌ی مد را که در تمرین اول بررسی کردید در نظر بگیرید.

**شرح مساله:** می‌خواهیم نحوه پخش مد در یک گروه را مطالعه کنیم و بررسی کنیم اعضای گروه در برابر آن چه رفتاری نشان می‌دهند.

**مدل سازی:** هر شخص یا از مد پیروی می‌کند یا مقابل آن می‌ایستد. همچنین زمان را به صورت گسسته بررسی می‌کنیم و فرض می‌شود افراد در هر واحد زمان نظر ثابت و مشخصی دارند. هر فرد تنها با دو نفر در ارتباط است و با توجه به نظر این دو رفتار خود در قبال مد را تعیین می‌کند. اگر یکی از افرادی که وی با آن‌ها تماس دارد از مد پیروی کند، او نیز از مد پیروی می‌کند در غیر این صورت از مد پیروی نخواهد کرد.

**نحوه شبیه‌سازی:** این مساله را با اتوماتای سلولی در شرایط مرزی دوره‌ای<sup>۳</sup> بررسی کردید. نتیجه‌ی آن را نیز در تمرین اول گزارش کردید.

**تفسیر:** هیچ شخصی مانند افرادی که با آن‌ها در تماس است رفتار نمی‌کند. همچنین هر شخص در اولین فرصت ممکن رفتار خود را تغییر می‌دهد.

<sup>3</sup>periodic boundary condition

(۴) با توجه به مباحثی که در زمینه اتوماتای سلولی، لایه‌نشانی و ولگشت آموخته‌اید، یک بازی بسازید و آن را توضیح دهید. در بازی خود چهار بخش زیر را مشخص کنید.

الف) قوانین بازی را توضیح دهید.

ب) نحوه‌ی اتمام بازی و تعیین برنده را مشخص کنید.

پ) رابطه‌ی میان بازی و مباحث فیزیکی و شبیه‌سازی که خواسته شده است را توضیح دهید. در این بخش ذکر کنید که بازی شما به کدام مبحث ذکر شده مربوط است.

ت) بازی را اجرا کرده و احتمال برد و دیگر پارامترهای مربوطه را بیابید. (۳۵ نمره)

به طور مثال با استفاده از مسئله تراوش می‌توان یک بازی به شکل زیر طراحی کرد.

**قوانین:** شخصی می‌خواهد گنجی را در زیر زمین پیدا کند. بیلی که او دارد مکعب‌هایی با اندازه ۱ واحد را می‌تواند حفر کند و گنج در عمق  $L$  می‌باشد. وی با احتمال  $p$  هر سلول را حفر می‌کند و سلول‌هایی را که حفر نمی‌کند می‌پوشاند تا معدن خراب نشود (با احتمال  $1 - p$ ) به این معنا که در صورتی که یک سلول را حفر نکرد دیگر آن را حفر نمی‌کند (چون می‌ترسد چاهی که حفاری کرده بر رویش خراب شود). توجه کنید ساخت معدن به صورت عمودی به داخل زمین برای او امکان پذیر نیست.

**اتمام بازی و بردن:** اگر حفار به جایی برسد که دیگر نتواند به حفاری ادامه دهد و مجبور به خروج از چاه شود بازنده است. اگر وی به گنج برسد برنده خواهد بود.

**فیزیک مساله:** با توجه به  $L$  و  $p$  و مسائلی که در تراوش آموختیم، می‌توان احتمال بردن او را پیدا کرد. کافی است از الگوریتم رشد خوشه استفاده کنیم و بررسی کنیم با چه احتمالی خوشه‌ای با قطر  $L$  ساخته می‌شود. احتمال ساخته شدن این خوشه برابر با احتمال برد شخص و رسیدن به گنج است.

**حل بازی و محاسبه احتمال برد:** در این بخش نمودار و نتایجی که از شبیه‌سازی به دست می‌آید را گزارش کنید و از آن نتیجه‌ی بازی را مشخص کنید.