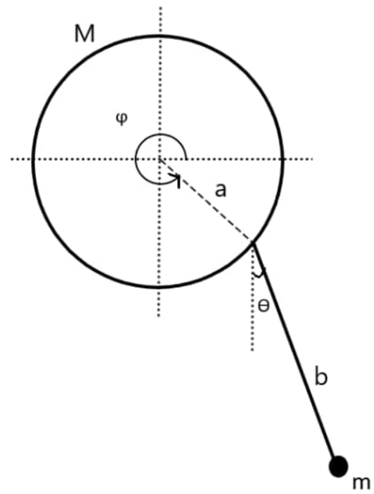
پروژه مکانیک تحلیلی ۲

ارمیا اعتمادی ۹۸۱۰۰۵۹۴ومژگان اروجلو ۹۸۱۰۰۵۷۲و زهرا اکبری ۹۸۱۰۰۶۱۲ و سپیده حسینی۹۸۱۰۰۷۴۲

۲۳ اسفند ۱۳۹۹



شکل ۱:

حل مسئله

برای حل مسئله آونگ متصل به چرخ جرم دار، لاگرانژی سیستم را می‌نویسیم و با حل معادلات اویلر لاگرانژ نسبت به مختصه های (θ و ϕ)معادلات دیفرانسیلی که حرکت سیستم را توصیف می‌کنند را به دست می‌آوریم.
چون چرخ جرم دارد باید انرژی جنبشی دورانی چرخ را هم علاوه بر انرژی جنبشی آونگ و پتانسیل گرانشی آونگ در نظر بگیریم. لاگرانژی سیستم برابر است با:

$$L = T - U \tag{1}$$

$$L = 1/2Ma^2\dot{\phi}^2 + 1/2m(b^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\phi}^2 + 2ab\dot{\phi}\dot{\theta}sin(\theta-\phi)) - mg(asin(\phi) - bcos(\theta)) \tag{2}$$

معادلات دیفرانسیل توصیف کننده حرکت عبارتند از:

$$mb^2\ddot{\theta} + mab\ddot{\phi}sin(\theta-\phi) + mgbsin(\theta) - mab\dot{\phi}^2cos(\theta-\phi) = 0 \tag{3}$$

$$a^2\ddot{\phi}(M+m) + mgacos(\phi) + mab\dot{\theta}^2cos(\theta-\phi) + mab\ddot{\theta}sin(\theta-\phi) = 0 \tag{4}$$

برای حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه ۲ از تابع $solve_ivp$ کتابخانه $scipy$ و روش حل BDF کمک گرفتیم. الگوریتم های دیگر برای حل این دستگاه مناسب نیستند چون معادلات ما اصطلاحا $stiff$ هستند، به این

معنا که جواب‌های کند تغییر نزدیک به جواب‌های تند تغییر دارند و الگوریتم‌های عادی تنها در صورتی که اندازه گام‌ها بسیار کوچک تعریف شوند می‌توانند دقت قابل قبول داشته باشند که درآن زمان زیادی برای محاسبه صرف خواهد شد.

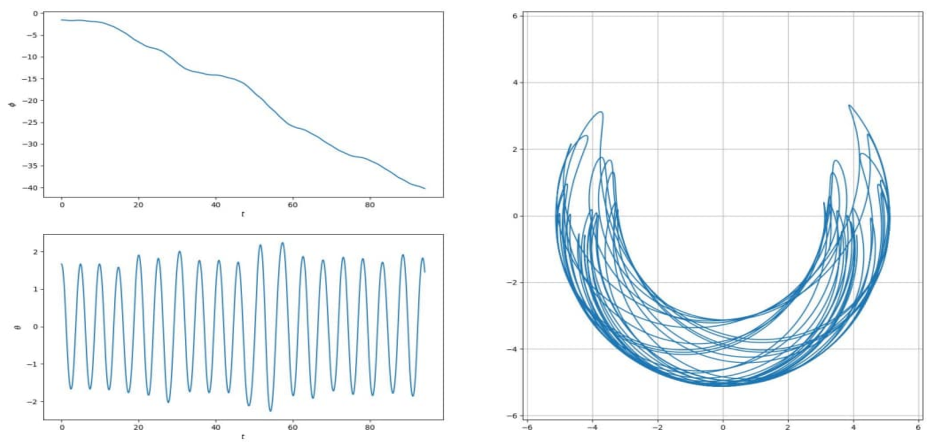
۱ نتایج

برای ۲ شرایط اولیه متفاوت نمودار های تغییرات زاویه ی ϕ و θ و همینطور مختصه های y برحسب x رسم شده اند. برای این دو شرایط اولیه که در ادامه ذکر خواهند شد تتای اولیه مقدار بسیار کمی تغییر داده شده تا نشان داده شود که آیا سیستم آشوبناک است یا خیر.

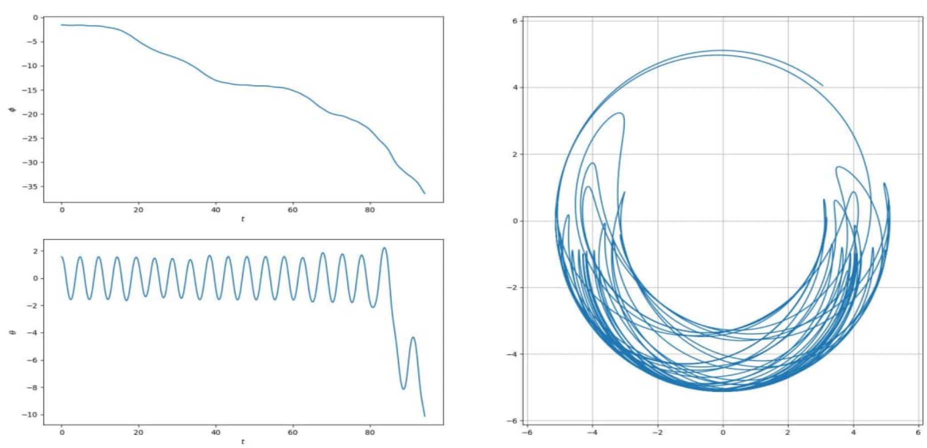
۱.۱ حالت اول

$$M = \sqrt(1715) \tag{۵}$$
$$m = 1 \tag{۶}$$
$$a = 1 \tag{۷}$$
$$b = \sqrt(17) \tag{۸}$$
$$g = 9.78 \tag{۹}$$
$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \tag{۱۰}$$
$$\phi_0 = -\frac{\pi}{2} \tag{۱۱}$$
$$\dot{\phi} = 0 \tag{۱۲}$$
$$\dot{\theta} = 0 \tag{۱۳}$$
$$\tag{۱۴}$$

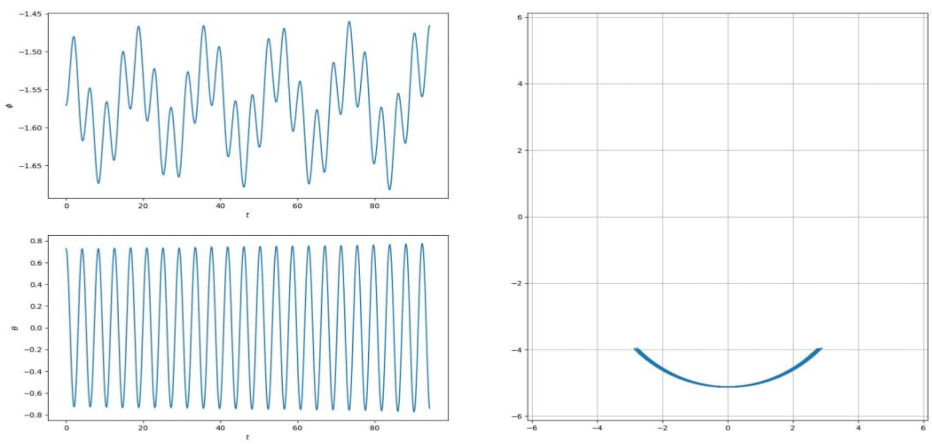
برای شرایط اولیه بالا و تغییر بسیار کم در زوایا نتایج آورده شده اند:



شکل ۲:



شکل ۳:



شکل ۴:

۲.۱ حالت دوم

$$M = \sqrt(1715) \qquad (۱۵)$$

$$m = 1 \qquad (۱۶)$$

$$a = 1 \qquad (۱۷)$$

$$b = \sqrt(17) \qquad (۱۸)$$

$$g = 9.78 \qquad (۱۹)$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{5} \qquad (۲۰)$$

$$\phi_0 = -\frac{\pi}{2} \qquad (۲۱)$$

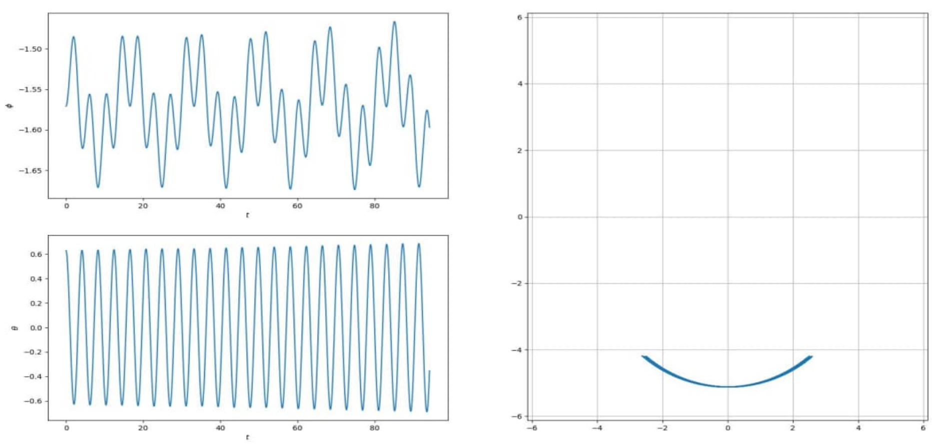
$$\dot{\phi} = 0 \qquad (۲۲)$$

$$\dot{\theta} = 0 \qquad (۲۳)$$

(۲۴)

برای شرایط اولیه بالا و تغییر بسیار کوچک در زوایا نتایج در ۵نمودار های ۴آورده شده اند.

با بررسی نمودار ها نتیجه میگیریم آشوب در زوایای بزرگ تر چشم گیر تر است و با تغییر بسیار کوچک در شرایط اولیه، نتایج بسیار متفاوت خواهند شد. این اثر را در نتایج مان برای زوایای کوچک تر کمتر میبینیم که البته اگر محاسبات را برای زمان طولانی تری انجام دهیم مشاهده می شود که در آن حالت هم سیستم آشوبناک خواهد



شکل ۵:

بود.

۲ ضمیمه ها

در اینجا کد پایتون حل معادلات دیفرانسیل آورده شده است:

$importnumpyasnp$
$fromnumpyimportsin, cos, pi, sqrt, floor$
$importmatplotlib.pyplotasplt$
$fromscipy.integrateimportsolve_ivp$

$START_t = 0$
$STOP_t = 30 * pi$
$EPSILON = 0.001$
$NUMBER = int((STOP_t - START_t)/EPSILON)$
$Y0 = [-pi/2, 0, pi/5, 0]$

$M = sqrt(1715)$
$m = 1$
$a = 1$
$b = sqrt(17)$

$g = 9.78$

$def prime_func(t, Y):$
$phi = Y[0]$
$p_phi = Y[1]$
$theta = Y[2]$
$p_theta = Y[3]$
$pp_phi = m * cos(theta - phi)/(M + m * cos(theta - phi) * *2) * (b * ((p_theta) * *2) - a * ((p_phi) * *2) * sin(theta - phi))$
$pp_phi+ = m * g * (sin(theta) * sin(theta - phi) - cos(phi))/(a * (M + m * cos(theta - phi) * *2))$
$pp_theta = (cos(theta - phi))/(M + m * (cos(theta - phi) * *2)) * ((M + m) * a * (p_phi * *2) - m * (p_theta * *2) * sin(theta - phi))$
$pp_theta+ = (g/(b*(M+m*cos(theta-phi)**2)))*(m*(cos(phi))*(sin(theta-phi)) - (M + m) * sin(theta))$

$return[p_phi, pp_phi, p_theta, pp_theta]$

$t = np.linspace(START_t, STOP_t, NUMBER)$
$sol = solve_ivp(prime_func, [START_t, STOP_t], Y0, t_eval = t, method = "BDF")$
$phi = sol.y[0]$
$theta = sol.y[2]$
$x = a * cos(phi) + b * sin(theta)$
$y = a * sin(phi) - b * cos(theta)$

$fig = plt.figure()$
$ax1 = fig.add_subplot(221)$
$ax2 = fig.add_subplot(223)$
$ax3 = fig.add_subplot(122)$
$ax1.plot(sol.t, phi)$
$ax2.plot(sol.t, theta)$
$ax3.plot(x, y)$
$")$ $ax1.set_xlabel("$
$ax1.set_ylabel("$

")

")

$ax2.set_x label("$

$ax2.set_y label("$

")

$ax3.set_x lim([-(a+b+1),(a+b+1)])$

$ax3.set_y lim([-(a+b+1),(a+b+1)])$

$ax3.grid()$

$fig.set_s ize_i nches((20,11))$

$plt.savefig("fig : " + "[M,m,a,b] = " + str([M,m,a,b]) + " - " + "Y0 = " + str(Y0)$

$+ "time = " + str(STOP_t - START_t) + ".png")$

$plt.show()$