دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

Signals and Systems

Dr Rahmati

Provided by Ali Moradzade

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری اول درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها
(فصل اول)

توضیحات

- مهلت تحویل تا ساعت ۲۳:۵۹ روز ۱۴۰۰/۰۸/۰۱ در نظرگرفته شده است و امکان تمدید وجود ندارد لذا با توجه به حجم تمرین برنامه ریزی مناسبی انجام دهید.

- پاسخ بخش تئوری را در یک فایل PDF با نام شماره دانشجویی خود و بخش عملی را با نام سوال(q1.m or q1.py, ...) در یک فایل ZIP با نام «HW1_StudentNumber.zip»در سایت درس بارگذاری کنید.

- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته‌شود و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره برای همه افراد صفر در نظرگرفته خواهد شد.

- در صورت داشتن هرگونه اشکال در تمرینات می‌توانید با rasoul.khazaeei@gmail.com و mahshidrahmani۲۰۰۱@gmail.com در ارتباط باشید.

سوال ۱

متناوب بودن و نبودن سیگنال های زیر را مشخص کنید و درصورت متناوب بودن دوره تناوب آن‌ها را پیدا کنید.

آ) $x_1(t) = \sin^4(-\frac{t+\pi}{6}) + \cos^4(\frac{2t+5\pi}{3})$

ب) $x_2[n] = (-1)^n \cos[\frac{\pi}{8}n]$

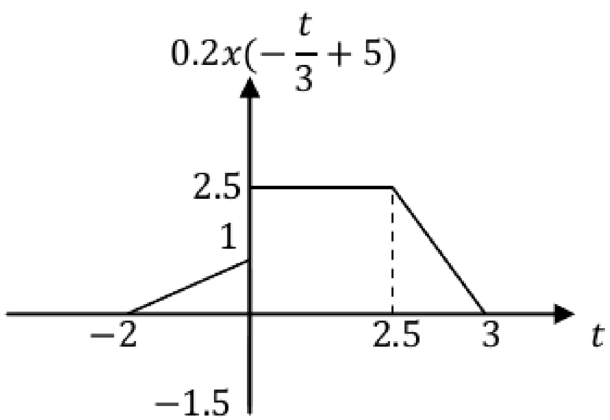
ج) $x_3[n] = e^{j(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}})}$

د) $x_4[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n^2)$

ه) $x_5(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{(2t+k)} u(2t-k)$

سوال ۲

سیگنال $0.2x(-\frac{t}{3}+5)$ را در شکل ۱ نظر بگیرید:



شکل ۱

آ) $x(t)$ را رسم کنید.

ب) $x(2t) + 1.5$ را رسم کنید.

ج) مقدار $\int_{-\infty}^{2} x(t)dt$ را محاسبه کنید.

سوال ۳

توان و انرژی بودن سیگنال‌های زیر را مشخص کنید.

آ) $x(t) = \delta(3t^2 + 9t + 6)$

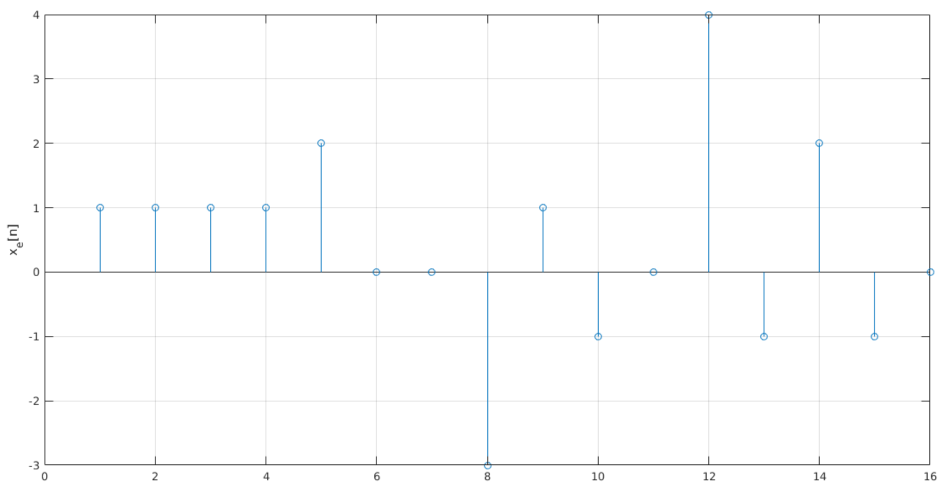
ب) $x[n] = (3n+1)(u[n+2]-u[n-4])$

ج) $x(t) = (\frac{1}{3}^{-3|t|})$

د) $x[n] = (\frac{1}{4}^{n} u[n])$

سوال ۴

شکل ۲ بخش زوج سیگنال گسسته x[n] را برای $n > 0$ نشان می‌دهد. می‌دانیم که برای $n < 0$، $x[n] = 0$ است.



شکل ۲

آ) انرژی سیگنال $x[n]$ رامحاسبه کنید.

ب) نمودار $x[n]$ راررسم کنید.

سوال ۵

معکوس پذيري سيستم‌هاي زير را بررسی کنید و در صورت معکوس پذیر بودن، معکوس سیستم را بدست آورید.

آ) $y[n] = x[n-1]x[n-3]$

ب) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

سوال ۶

خواص علی بودن، تغییر ناپذیري با زمان، خطی بودن، حافظه دار بودن و پایداري را در هر یک از سیستمهاي زیر بررسی کنید.

آ) $y(t) = \int_{t}^{t+1} x(\tau) d\tau$

ب) $y(t) = \frac{dx}{dt}$

ج) $\sin(x[n])$

د) $[\cos(3t)]x(t)$

ه) $Even\{x[n-1]\}$

و) $y[n] = x[n].\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$

سوال ۷

روابط زیر را ثابت کنید.

آ) $\forall x[n] \Rightarrow \sum_{k=-N}^{+N} x^2[n] = \sum_{k=-N}^{+N} x_{odd}^2[n] + \sum_{k=-N}^{+N} x_{even}^2[n]$

ب) $f(t)\dot{\delta}(t) = f(0)\dot{\delta}(t) - f'(0)\delta(t)$ ($\dot{\delta}$ به معنای مشتق تابع ضربه است.)

بخش عملی

برای تابع پیوسته لازم است تعدادی از نقاط تابع را در برداری ذخیره کنید فاصله این نمونه ها را در همه سوالات ۱۰ میلی ثانیه فرض کنید.

سوال ۱

با استفاده از متلب یا پایتون سیگنال‌های $x_1(t) = \cos^2(\frac{\pi f_0}{2}t)$ و $x_2[n] = \cos(2\pi f_0 n)$ را برای $f_0 = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, 5$ در بازه $[0, 10]$ رسم کنید.

سوال ۲

سیگنال‌های زیر را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید.

آ) $x_3(t) = \sum_{n=-20}^{20} e^{-|2t+n|}$

ب) $x_4[n] = u[n-3] - u[-n+3] + 2\delta[n]$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

پاسخنامه تمرین سری اول درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل اول)

سوال ۱

آ)

$$\text{آ)}\quad x_1(t) = \sin^4\left(-\frac{t+\pi}{6}\right) + \cos^4\left(\frac{2t+5\pi}{3}\right)$$

$$x(t+T) = x(t)$$

$$\sin^4\left(-\frac{t+T+\pi}{6}\right) + \cos^4\left(\frac{2(t+T)+5\pi}{3}\right) = \sin^4\left(-\frac{t+\pi}{6}\right) + \cos^4\left(\frac{2t+5\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{t+T+\pi}{6}\right) = \pm \sin\left(-\frac{t+\pi}{6}\right) : \quad \frac{\cancel{-t}-T-\pi}{6} = \frac{\cancel{-t}-\pi}{6} + k\pi \\ \qquad -T\cancel{-\pi} = \cancel{-\pi} + 6k\pi \\ \qquad T = 6k\pi \quad \text{(I)} \\ \cos\left(\frac{2t+2T+5\pi}{3}\right) = \pm \cos\left(\frac{2t+5\pi}{3}\right) : \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{2t}+2T+\cancel{5\pi}}{3} = \frac{\cancel{2t}+\cancel{5\pi}}{3} + k\pi$$

$$2T = 3k\pi \quad \text{(II)}$$

$$\text{(I)}, \text{(II)} \Rightarrow \boxed{T_0 = 6\pi}$$

ب)

$$\text{ب)}\quad x_2[n] = (-1)^n \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right]$$

متناوب نیست

شرط تناوب : $x_2[n] = x_2[n+N]$

$$(-1)^n \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] = (-1)^{n+N}\cos\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right]$$

$$\xrightarrow{N=2k} \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] = \cos\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right] \Rightarrow \underbrace{\left[\frac{\pi}{8}n\right] + 2k\pi}_{\text{غلط}} = \underbrace{\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right]}_{\text{صحیح}} \quad \times$$

$$\xrightarrow{N=2k+1} \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] = -\cos\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right] \Rightarrow \underbrace{\left[\frac{\pi}{8}n\right] + 2k\pi + \pi}_{\text{غلط}} = \underbrace{\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right]}_{\text{صحیح}} \quad \times$$

ج)

ج) $x_3[n] = e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)}$ متناوب نیست

شرط تناوب : $x_3[n] = x_3[n+N]$

$$e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)} = e^{j\left(\frac{6\pi(n+N)}{\sqrt{5}}\right)} \Rightarrow \cancel{e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)}} = \cancel{e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)}}\, e^{j\left(\frac{6\pi N}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$1 = e^{j\left(\frac{6\pi N}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$\frac{6\pi N}{\sqrt{5}} = 2k\pi \qquad N = \frac{\sqrt{5}}{3}k \notin \mathbb{Z}$$

د)

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right)$$

شرط تناوب : $\cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n+N)^2\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(n^2 + N^2 + 2nN\right)\right)$$

$$\cancel{\frac{\pi}{4}n^2} + 2k\cancel{\pi} = \cancel{\frac{\pi}{4}n^2} + \cancel{\pi}/4\, N^2 + \cancel{\frac{\pi}{4}} \times 2nN$$

$$8k = N^2 + 2nN$$

$8k = N(N+2n)$ X $\rightarrow$ نمی‌توان N را بدست آورد متناوب نیست

(۵

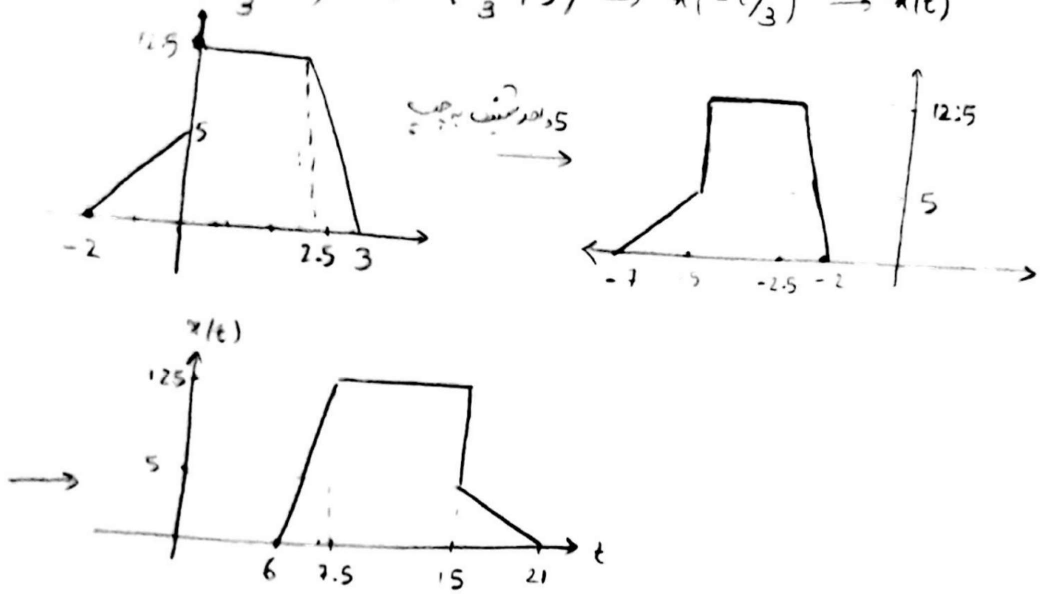
$$x(t+T)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t+2T-k)}\,u(2t+2T-k) \xRightarrow{k'=k-2T} x(t+T)=\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t-k')}u(2t-k')$$

$$if\ 2T\ \in \mathbb{Z}\ \Rightarrow x(t+T)=x(t)$$

$$T=\frac{n}{2}\quad (n\ \in \mathbb{Z}) \Rightarrow T_0=\frac{1}{2}$$

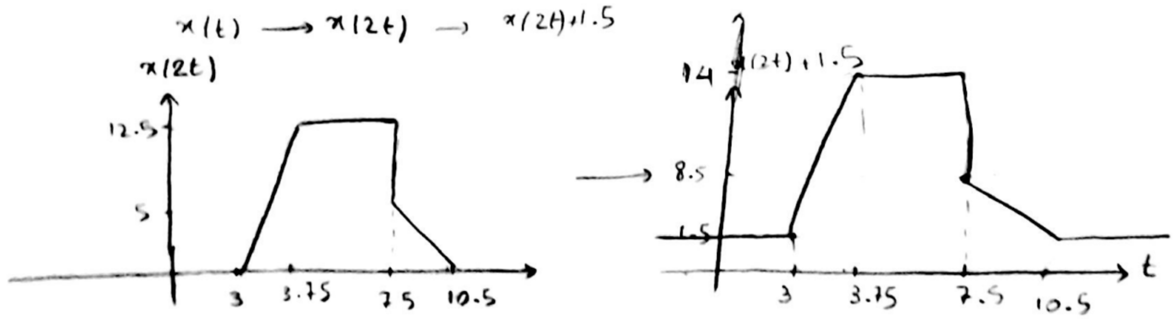
سوال ۲

آ) $0.2\,x\left(-\frac{t}{3}+5\right) \rightarrow x\left(-\frac{t}{3}+5\right) \rightarrow x\left(-t/3\right) \rightarrow x(t)$



ب) $x(2t)+1.5$

$x(t) \longrightarrow x(2t) \longrightarrow x(2t)+1.5$



ج) $\int_{-\infty}^{2} x(t)\,dt = \int_{6}^{21} x(t)\,dt = \frac{12.5\times1.5}{2} + 7.5\times12.5 + \frac{6\times5}{2}$

مساحت زیر نمودار

$= 118.125$

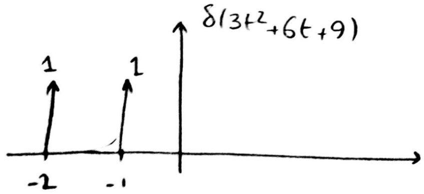
سوال ۳

آ)

آ) $x(t) = \delta(3t^2+6t+9)$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(3t^2+6t+9)\,dt = \delta^2(3t^2+6t+9)\Big|_{3t^2+6t+9=0}$$

$$3t^2+6t+9=0 \qquad 3(t+1)(t+2)=0 \begin{cases} \rightarrow t=-1 \\ \rightarrow t=-2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{E_\infty = 2}$$

E_∞ متناهی $\Rightarrow P_\infty = 0$

ب)

ب) $x[n] = (3n+1)(u[n+2]-u[n-4])$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(3n+1)^2 \underbrace{(u[n+2]-u[n-4])}_{\text{در بازه } -2 \leqslant n \leqslant 3 \text{ مقدار غیرصفر دارد}} = \sum_{n=-2}^{3}(3n+1)^2$$

$$= 25+4+1+16+49+100 = 195$$

ج)

$$ج)\ x(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3|t|} = \begin{cases} (1/3)^{-3t} & t \geq 0 \\ (1/3)^{3t} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 27^{t} & t \geq 0 \\ (1/27)^{t} & t < 0 \end{cases}$$

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} x^2(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} x^2(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (27)^{-2t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} (27)^{2t}\,dt = +\infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-\infty}^{0} (27)^{-2t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} (27)^{2t}\,dt \right) = +\infty$$

د)

$$E_{\infty} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \Sigma_{0}^{+\infty} (1/16)^n = 1 + 1/16 + 1/256 + \ldots$$
$$= 1/(1 - 1/16) = 16/15$$

$$Pav_{\infty} = \lim_{N \to \infty} 1/(2N+1)\, \Sigma_{-N}^{+N} |x[n]|^2 = \lim_{N \to \infty} 1/(2N+1)\, \Sigma_{n=0}^{+N} (1/16)^n$$
$$= C/\infty = 0$$

سوال ۴

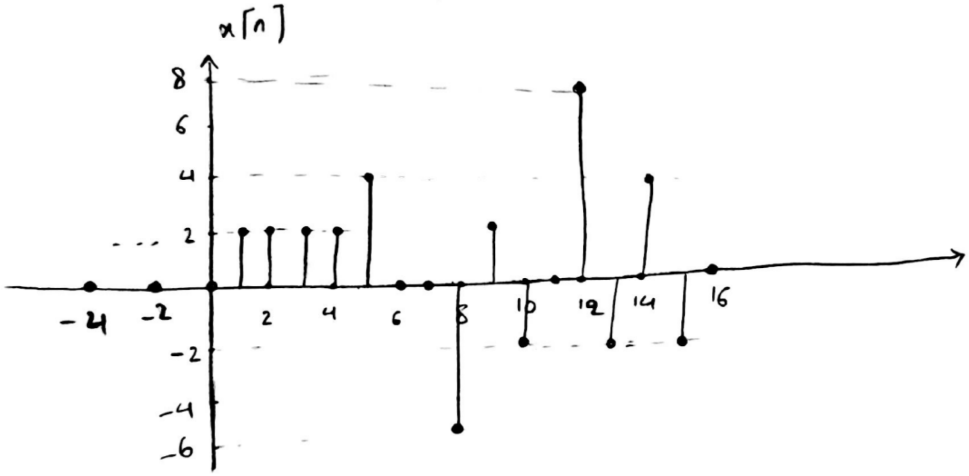
$$x[n] = x_o[n] + x_e[n]$$

$$n < 0: \quad x[n] = 0 \Rightarrow x_e[n] = -x_o[n]$$

$$n > 0: \quad x[n] = x_e[n] + x_o[n] = x_e[n] - x_o[-n] = x_e[n] + x_e[-n]$$

$$= 2x_e[n]$$

$$n = 0: \quad x[n] = x_e[n] + \cancel{x_o[n]}^{0} = x_e[n] = 0$$



$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=1}^{15} x^2[n] = 8 \times 4 + 2 \times 16 + 36 + 64 = \boxed{164}$$

سوال ۵

آ)

$$y[n] = x[n-1]x[n-3]$$

$$x_1 = \delta[n] + \delta[n+2] \rightarrow y[n] = \delta[n-1]$$

$$x_2 = -\delta[n] - \delta[n+2] \rightarrow y[n] = \delta[n-1]$$

$x_1 \neq x_2$

معکوس پذیر نیست

ب)

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{t+\Delta t} x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{t}^{t+\Delta t} x(\tau)d\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t)\Delta t}{\Delta t} = x(t)$$

معکوس سیستم: $x(t) = \frac{dy}{dt}$

سوال ۶

آ)

$$y(t) = \int_{t}^{t+1} x(\tau)d\tau$$

- حافظه دار است
- علی نیست زیرا y(t) به مقادیر آینده x(t) نیاز دارد
- پایدار است y(t) <= max[x(t)]، y(t) حتما از ماکسیمم x(t) در بازه [t, t+1] کمتر است و از آنجایی که x(t) پایدار است y(t) نیز پایدار است
- خطی است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \int_{t}^{t+1} x_1(\tau)d\tau$$
$$x_2(t) \xrightarrow{s} y_2(t) = \int_{t}^{t+1} x_2(\tau)d\tau$$

$$x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{s} y_3(t) = \int_t^{t+1} x_3(\tau)d\tau$$
$$= \int_t^{t+1} (Ax_1(\tau) + Bx_2(\tau))d\tau$$
$$= A\int_t^{t+1} x_1(\tau)d\tau + B\int_t^{t+1} x_1(\tau)d\tau$$

- تغییرناپذیر با زمان است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \int_t^{t+1} x_1(\tau)d\tau$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \xrightarrow{s} y_2(t) = \int_{t-t_0}^{t-t_0+1} x_1(\tau)d\tau$$
$$y_1(t-t_0) = \int_{t-t_0}^{t-t_0+1} x_1(\tau)d\tau$$
$$y_2(t) = y_1(t-t_0)$$

ب)

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- حافظه دار است مشتق تنها با استفاده از اطلاعات یک نقطه قابل محاسبه نیست
- علی نیست برای محاسبه مشتق باید اطلاعات یک Δt بعد از نقطه فعلی را داشته باشیم
- کراندار نیست، مثال نقض سیگنال های دارای ناپیوستگی
- خطی است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \frac{dx_1}{dt}$$

$$x_2(t) \xrightarrow{s} y_2(t) = \frac{dx_2}{dt}$$

$$x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{s} y_3(t) = \frac{dx_3}{dt} = \frac{d\big(Ax_1(t) + Bx_2(t)\big)}{dt}$$
$$= A\frac{dx_1}{dt} + B\frac{dx_2}{dt}$$

- تغییرناپذیر با زمان است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \frac{dx_1}{dt}$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \xrightarrow{s} y_2(t) = \frac{dx_2}{dt}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2(t+\Delta t) - x_2(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1(t+\Delta t - t_0) - x_1(t-t_0)}{\Delta t}$$
$$y_1(t-t_0) = \frac{dx_1(t-t_0)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1(t+\Delta t - t_0) - x_1(t-t_0)}{\Delta t}$$
$$y_2(t) = y_1(t-t_0)$$

ج)

$$y[n] = \sin(x[n])$$

- حافظه دار نیست
- علی است
- کراندار است. -1 <= sin(x[n]) <= 1
- خطی نیست

$$x_1[n] \xrightarrow{s} y_1[n] = \sin(x_1[n])$$
$$x_2[n] \xrightarrow{s} y_2[n] = \sin(x_2[n])$$
$$x_3[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n]$$
$$\xrightarrow{s} y_3[n] = \sin(Ax_1[n] + Bx_2[n]) \neq A\sin(x_1[n]) + B\sin(x_2[n])$$

- تغییرناپذیر با زمان است

$$x_1[n] \xrightarrow{s} y_1[n] = \sin(x[n]) \Longrightarrow y_1[n-n_0] = \sin(x[n-n_0])$$
$$x_2[n] = x_1[n-n_0] \xrightarrow{s} y_2[n] = \sin(\, x_1[n-n_0])$$

د)

$$y(t) = [\cos(3t)]x(t)$$

- حافظه دار نیست
- علی است
- پایدار است. چرا که -1<= [cos(t)] <= 1 و در صورتی که x(t) پایدار باشد y(t) نیز قطعا پایدار خواهد بود
- خطی است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = [\cos(3t)]x_1(t)$$
$$x_2(t) \xrightarrow{s} y_2(t) = [\cos(3t)]x_2(t)$$
$$\begin{aligned} x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{s} y_3(t) &= [\cos(3t)]x_3(t) \\ &= [\cos(3t)]\big(Ax_1(t) + Bx_2(t)\big) \\ &= A[\cos(3t)]x_1(t) + [\cos(3t)]x_2(t) \end{aligned}$$

- تغییرپذیر با زمان است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = [\cos(3t)]x_1(t)$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \xrightarrow{s} y_2(t) = [\cos(3t)]x_2(t) = [\cos(3t)]x_1(t-t_0)$$
$$y_1(t-t_0) = [\cos(3(t-t_0)]x_1(t-t_0)$$
$$y_2(t) \neq y_1(t-t_0)$$

ه)

$$y[n] = Even\{n-1\} = \frac{x[n-1] - x[1-n]}{2}$$

- پایدار است چرا که y[n] جمع شیفت داده شده x[n] است که یعنی در صورتی که x[n] پایدار باشد y[n] نیز پایدار است
- حافظه دار است
- علی نیست زیرا در n<0 برای محاسبه y[n] به مقادیر مثبت n نیز نیاز داریم
- خطی است

$$x_1[n] \xrightarrow{s} y_1[n] = \frac{x_1[n-1] - x_1[1-n]}{2}$$
$$x_2[n] \xrightarrow{s} y_2[n] = \frac{x_2[n-1] - x_2[1-n]}{2}$$
$$x_3[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n] \xrightarrow{s} y_3[n] = \frac{x_3[n-1] - x_3[1-n]}{2}$$
$$= \frac{A(x_1[n-1] - x_1[1-n]) + B(x_2[n-1] - x_2[1-n])}{2}$$
$$= Ay_1[n] + By_2[n]$$

- تغییرپذیر با زمان است

$$x_1[n] \xrightarrow{s} y_1[n] = \frac{x_1[n-1] - x_1[1-n]}{2}$$
$$x_2[n] = x_1[n-n_0] \xrightarrow{s} y_2[n] = \frac{x_2[n-1] - x_2[1-n]}{2}$$
$$= \frac{x_1[n-n_0-1] - x_1[1-n-n_0]}{2}$$
$$y_1[n-n_0] = \frac{x_1[n-n_0-1] - x_1[1-n+n_0]}{2}$$
$$y_1[n-n_0] \neq y_2[n]$$

و)

$$y[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

تابع در نقاطی که n زوج باشد برابر باشد y[n]=x[n] است در بقیه نقاط y[n]=0

- بدون حافظه است چون y[n] تنها به x[n] وابسته است

- پایدار است چون y[n] تنها به x[n] وابسته است پس اگر x[n] کراندار باشد y[n] نیز کراندار است
- علی است چرا که y[n] به مقادیر آینده x[n] وابسته نیست
- خطی است

$$y_1[n] = x_1[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

$$y_2[n] = x_2[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

$$\begin{aligned} x_3[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n] \xrightarrow{s} y_3[n] &= x_3[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \\ &= (Ax_1[n] + Bx_2[n]) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \\ &= Ax_1[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] + Bx_2[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \\ &= Ay_1[n] + By_2[n] \end{aligned}$$

- تغییر پذیر با زمان است

$$x_1[n] \xrightarrow{s} y_1[n] = x_1[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

$$\begin{aligned} x_1[n] = x_1[n-n_0] \xrightarrow{s} y_2[n] &= x_2[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \\ &= x_1[n-n_0] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \end{aligned}$$

$$y_1[n-n_0] = x_1[n-n_0] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0-2k]$$

$$y_2[n] \neq y_1[n-n_0]$$

سوال ۷

آ)

$$\text{آ)}\quad \forall x[n] \Rightarrow \sum_{n=-N}^{+N} x^2[n] = \sum_{n=-N}^{+N} x_o^2[n] + \sum_{n=-N}^{+N} x_e^2[n]$$

$$\sum_{n=-N}^{+N} x^2[n] = \sum_{n=-N}^{+N} (x_o[n] + x_e[n]) = \sum_{n=-N}^{+N} \left(x_o^2[n] + x_e^2[n] + 2x_o[n]x_e[\right.$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} x_o^2[n] + \sum_{n=-N}^{+N} x_e^2[n] + \underbrace{2\sum_{n=-N}^{-1} x_e[n]x_o[n] + 2\sum_{n=1}^{N} x_e[n]x_o[n]}_{2\sum_{n=1}^{N} x_e[-n]x_o[-n] + 2\sum_{n=1}^{N} x_e[n]x_o[n]} + 2x_o[0$$

$$2\sum_{n=1}^{N} x_e[-n]x_o[-n] + 2\sum_{n=1}^{N} x_e[n]x_o[n]$$

$$= -2\sum_{n=1}^{N} x_o[n]x_e[n] + 2\sum_{n=1}^{N} x_e[n]x_o[n] = 0$$

ب)

$$\text{ب)}\quad f(t)\dot{\delta}(t) = f(0)\dot{\delta}(t) - f'(0)\delta(t)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(f(t)\delta(t)\right)}_{\frac{d}{dt}\left(f(0)\delta(t)\right) = f(0)\dot{\delta}(t)} = \underbrace{f'(t)\delta(t)}_{f'(0)\delta(t)} + f(t)\dot{\delta}(t)$$

$$\Rightarrow f(0)\dot{\delta}(t) = f'(0)\delta(t) + f(t)\dot{\delta}(t)$$

$$\Rightarrow f(t)\dot{\delta}(t) = f(0)\dot{\delta}(t) - f'(0)\delta(t)$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری دوم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل دوم – سیستم‌های LTI)

توضیحات:

- مهلت تحویل تا ساعت ۲۳:۵۵ روز ۱۴۰۰/۰۸/۲۴ در نظر گرفته شده است و امکان تمدید وجود ندارد لذا با توجه به حجم تمرین، برنامه ریزی مناسبی انجام دهید.
- پاسخ بخش تئوری در یک فایل PDF با نام و شماره دانشجویی خود و بخش عملی را با نام سوال (q1.m or pq.py, ...) در یک فایل ZIP با نام HW2_StudentNumber.zip در سایت درس بارگذاری کنید.
- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هر گونه تقلب، نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- در صورت داشتن هر گونه اشکال در تمارین می‌توانید با aref78.m@gmail.com و fatemeh.vpasha@gmail.com در ارتباط باشید.

بخش تئوری:

۱) برای هر جفت از سیگنال‌های x و h ، کانولوشن آن‌ها را محاسبه کنید.

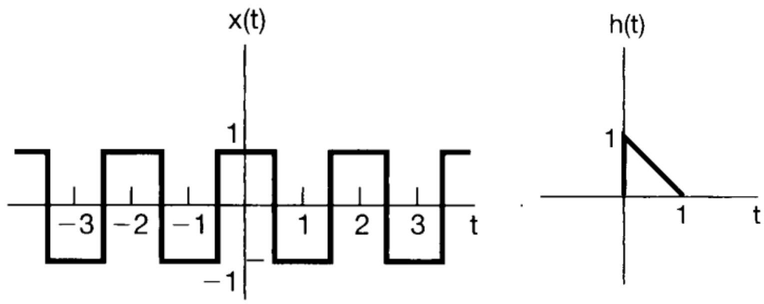
a) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$

$h(t) = e^{2t}u(1-t)$

b) $x[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n-4]$

$h[n] = 4^n u[2-n]$

c)



d) $x[n] = \frac{1}{4^n}$

$h[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n]$

e) $x(t) = e^{-t}u(t+1)$

$h(t) = e^{2t}u(-t)$

f) $x[n] = 3^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

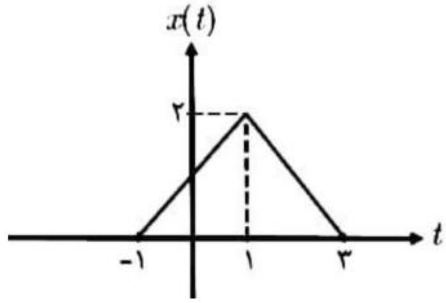
$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$

g) $x(t) = e^{-t}u(t)$

$h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t-\ 1) + 0.3\delta(t-2)$

کانولوشن را بر اساس فرمول محاسبه کنید. تنها برای قسمت c می‌توانید طبق شکل، سیگنال خروجی را رسم کنید.

۲) پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر با $u(t+2)-u(t-6)$ داده شده است. پاسخ این سیستم وقتی ورودی قسمت زوج سیگنال $x(t)$ باشد، چه خواهد بود؟



۳) خواص علّی بودن و پایداری سیستم های LTI زیر که با پاسخ ضربه یا معادله صریح مشخص شده‌اند را تعیین کنید.

a) $h[n]=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n]+(1.01)^{n}u[1-n]$

b) $h[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n-1]$

c) $h(t)=e^{-6|t|}$

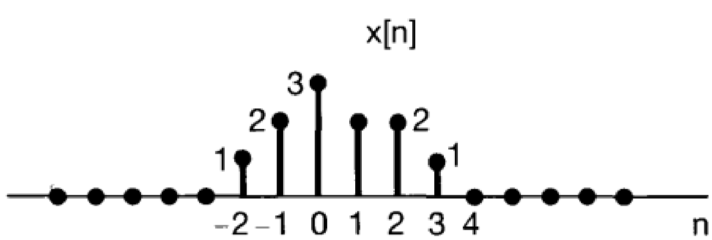
d) $h(t)=te^{-t}u(t)$

e) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)u(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$

۴) سیستم *LTI* زیر را که *initially at rest* است و با معادله‌ی دیفرانسیلی زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]+2x[n-2]$$

پاسخ این سیستم را به ورودی زیر با حل معادله دیفرانسیلی به صورت بازگشتی بدست آورید.



۵) برای معادله دیفرانسیلی زیر block diagram مناسبی رسم کنید.

$$2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$$

۶) حافظه‌دار بودن یا نبودن سیستم های LTI زیر را که پاسخ ضربه آنها داده شده است، مشخص و اثبات کنید.

a) $h(t) = e^{3t}\, u(-1-t)$

b) $h(t) = sin(5\pi t)\, u(t)$

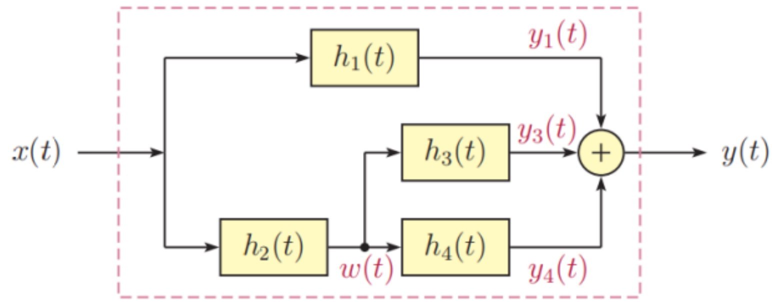
c) $h[n] = cos(n\pi)\, u[n+5]$

۷) با توجه به پاسخ ضربه‌ی داده شده، برای هر مورد پاسخ پله را بدست آورید.

a) $h(t) = \delta(t-5) + \delta(t)$

b) $h(t) = e^{-|t|}$

۸) سیستم CT LTI زیر را در نظر بگیرید.



اطلاعات زیر در رابطه با پاسخ ضربه این سیستم موجود است:

$$h_1(t) = e^{-t}u(t)$$

$$h_2(t) = h_3(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$h_4(t) = \delta(t-1)$$

الف) پاسخ ضربه h_{eq} کل سیستم معادل را بدست آورید.

ب) فرض کنید سیگنال ورودی $x(t) = u(t)$ باشد، سیگنال‌های $\omega(t)$ و $y_1(t)$ و $y_3(t)$ و $y_4(t)$ را بدست آورید.

بخش عملی:

۱) در سوال اول بخش عملی لازم بایستی تابعی بنویسید که دو سیگنال را به عنوان ورودی دریافت کند و سپس کانولوشن این دو سیگنال را به عنوان خروجی ارسال کند.

۲) با استفاده از تابعی که در سوال قبل پیاده سازی کرده‌اید، کانولوشن سیگنال های زیر را با پاسخ های ضربه گفته شده محاسبه کنید. برای اطمینان از درستی نتیجه می‌توانید با خروجی کتابخانه های شناخته شده چک کنید.

a) $x[n] = e^{2n}(-u[n-2] + u[n+3])$, in [-10,10]
   1. $h[n] = u[n+10] - u[n]$
   2. $h[n] = 3\delta[n-5] - \delta[n]$

b) $x(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2t} u(t+3), in\ [-15,15], step = 0.1$
   1. $h(t) = |t|\left(u(t-2) - u(t)\right)$
   2. $h(t) = u(t+5)$

برای هر قسمت سوال در کنار کد، نمودار خروجی را نیز در فایل ارسالی قرار دهید.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

پاسخ‌نامه تمرین سری دوم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل دوم – سیستم‌های LTI)

۱) برای هر جفت از سیگنال های x و h ، کانولوشن آنها را محاسبه کنید.

پاسخ:

می دانیم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

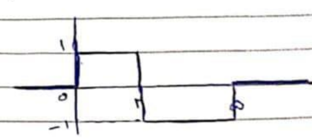
a) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$

$h(t) = e^{2t}u(1-t)$

پاسخ:

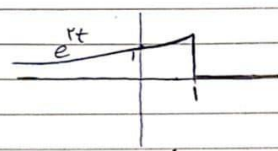
$$x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$$

$$= \begin{cases} t<0 \Rightarrow x(t)=0 \\ 0<t<2 \Rightarrow x(t)=1 \\ 2<t<5 \Rightarrow x(t)=-1 \\ t>5 \Rightarrow x(t)=0 \end{cases}$$

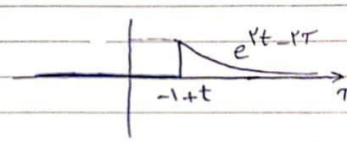


$$h(t) = e^{2t}u(1-t)$$

$$= \begin{cases} t<1 : e^{2t} \\ t>1 : 0 \end{cases}$$



$h(t-\tau)$



$x(t) * h(t) =$ ① $t-1>5 \Rightarrow y(t)=0$

② $2<t-1<5 \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{5} -e^{2t-2\tau}\, d\tau$

③ $0<t-1<2 \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{2} e^{2t-2\tau}\, d\tau + \int_{2}^{5} -e^{-2t-2\tau}\, d\tau$

(4) $t-1 \leq 0 \Rightarrow y(t) = \int_{0}^{2} e^{2t-2\tau} d\tau + \int_{2}^{5} -e^{2t-2\tau} d\tau$

$$y(t) = \begin{cases} t \leq 1 \Rightarrow y(t) = \int_{0}^{2} e^{2t-2\tau} d\tau + \int_{2}^{5} -e^{2t-2\tau} d\tau \\ 1 \leq t \leq 3 \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{2} e^{2t-2\tau} d\tau + \int_{2}^{5} -e^{-2t-2\tau} d\tau \\ 3 \leq t \leq 6 \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{5} -e^{2t-2\tau} d\tau \\ t > 6 \Rightarrow y(t) = 0 \end{cases}$$

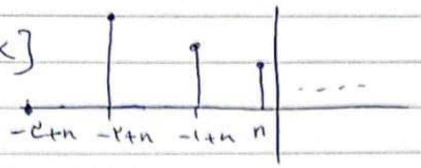
b) $x[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n} u[n-4]$

$h[n] = 4^{n} u[2-n]$

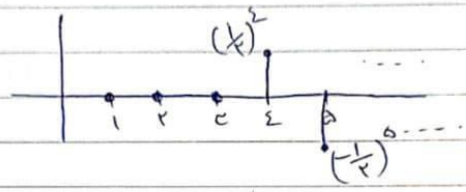
پاسخ:

$h[n] = ۴^n \, u[۲-n]$

$h[n-k]$



$x[n] =$



① $n-۲ \leqslant ۴ \Rightarrow n \leqslant ۶ \Rightarrow$

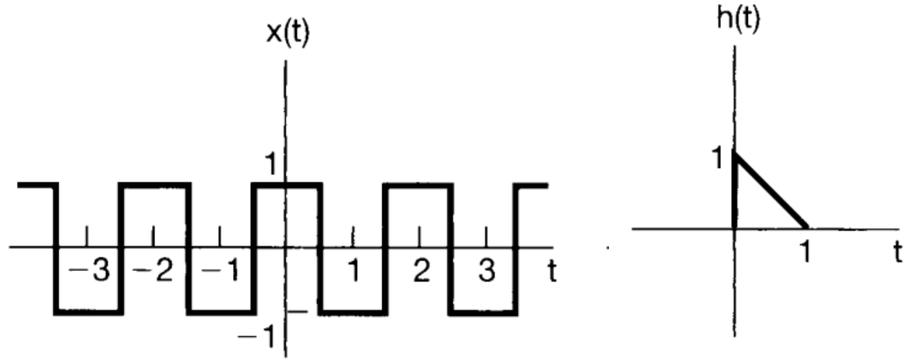
$$y[n] = ۴^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{۸}\right)^k - \sum_{k=0}^{۳} \left(\frac{-1}{۸}\right)^k \right\}$$

② $n-۲ > ۴ \Rightarrow n > ۶ \Rightarrow$

$$y[n] = ۴^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{۸}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{-1}{۸}\right)^k \right\}$$

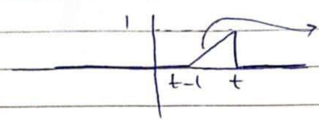
داریم $\Rightarrow y[n] = \begin{cases} \left(\frac{۸}{۹}\right)\left(\frac{-1}{۸}\right)^{۴} ۴^n & n \leqslant ۶ \\ \left(\frac{۸}{۹}\right)\left(\frac{-1}{۲}\right)^n & n > ۶ \end{cases}$

c)



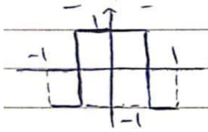
پاسخ:

$h(t-\tau)$



معادله خط $= \tau + 1 - t$

می‌دانیم وقتی $x(t)$ متناوب است پس $y(t)$ هم متناوب خواهد بود. در این جا یک دوره تناوب $x(t)$ را بررسی می‌کنیم



$$① \begin{cases} -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} < t-1 < -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{-1/2} (t-\tau-1)\, d\tau + \int_{-1/2}^{t} (\tau+1-t)\, d\tau$$

$$② \begin{cases} \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} < t-1 < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{1/2} (\tau+1-t)\, d\tau + \int_{1/2}^{t} (t-\tau-1)\, d\tau$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} + t - t^2 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ t^2 - 3t + \frac{7}{4} & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}$$

d) $x[n] = \frac{1}{4^n}$
$h[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n]$

پاسخ:

$$x[n] * h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n * \left(\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n * \delta[n+2] + \left(\frac{1}{4}\right)^n * \delta[n+1] + \left(\frac{1}{4}\right)^n * \delta[n]$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

e) $x(t) = e^{-t}u(t+1)$
$h(t) = e^{2t}u(-t)$

پاسخ:

From the definition of the convolution, we have the following expression for the output y(t):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

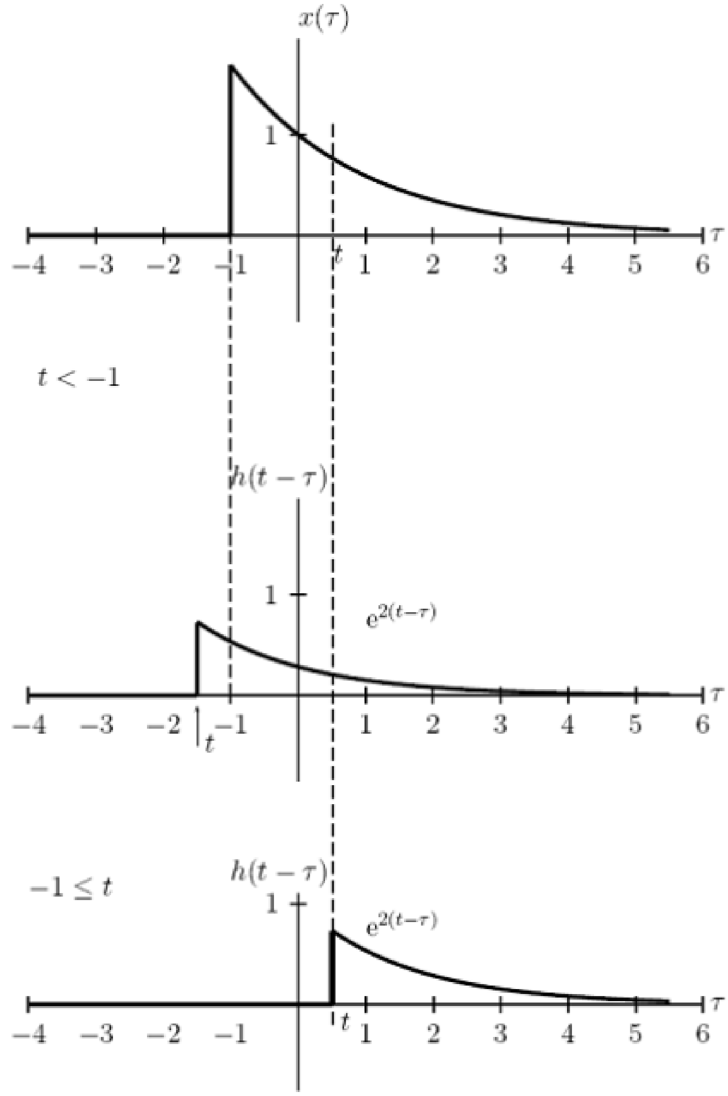
Based on the given x(t) and h(t), we can break the integration up into 2 regions as illustrated in the diagram. The ranges are t<−1 and t→−1.

For the range t < −1, the region where $h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ is non-zero is from $-1 \to \infty$. So, the expression for y(t) is given by:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-1}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-1}^{\infty} e^{2(t-\tau)}e^{-\tau}d\tau \\ &= e^{2t}\int_{-1}^{\infty} e^{-3\tau}d\tau = e^{2t}\left[-\frac{1}{3}e^{-3\tau}\right]_{-1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{3}e^{2t+3} \end{aligned}$$

For the range t > −1, the region where $h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ is non-zero is from $\tau > t$. So, the expression for y(t) is given by:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{t}^{\infty} e^{2(t-\tau)}e^{-\tau}d\tau \\ &= e^{2t}\int_{t}^{\infty} e^{-3\tau}d\tau = e^{2t}\left[-\frac{1}{3}e^{-3\tau}\right]_{t}^{\infty} \\ &= e^{2t}\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}\right] \\ &= \frac{1}{3}e^{-t} \end{aligned}$$



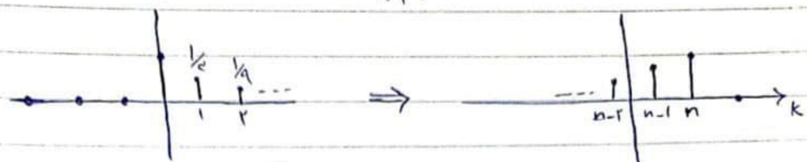
$x(\tau)$
1
τ
-4 -3 -2 -1 t 1 2 3 4 5 6
$t < -1$
$h(t-\tau)$
1
$e^{2(t-\tau)}$
τ
-4 -3 -2 t -1 1 2 3 4 5 6
$-1 \le t$
$h(t-\tau)$
1
$e^{2(t-\tau)}$
τ
-4 -3 -2 -1 t 1 2 3 4 5 6

f) $x[n] = 3^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

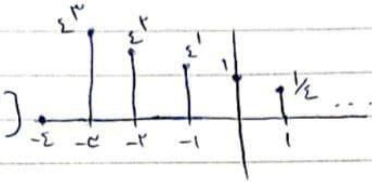
$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$

پاسخ:

$$y_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$



$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$



$$y_1[n] = \begin{cases} n < -4 & \Rightarrow y_1[n] = 0 \\ n \geq -4 & \Rightarrow y_1[n] = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3(256)\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

$$y_2[n] = 3^n u[-n-1] * \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$

مشابه راه‌حل بالا داریم:

$$y_2[n] = \begin{cases} n < -4 & \Rightarrow y_2[n] = \left(\frac{12^4}{11}\right) 3^n \\ n \geq -3 & \Rightarrow y_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{11}\right) \end{cases}$$

پس با استفاده از distributive property داریم: $y[n] = y_1[n] + y_2[n]$

$$y[n] = \begin{cases} \left(\frac{12^4}{11}\right) 3^n & n < -4 \\ (1/11)\, 4^4 & n = -4 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{11}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3(256)\left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq -3 \end{cases}$$

g) $x(t) = e^{-t}u(t)$

$h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t-\ 1) + 0.3\delta(t-2)$

پاسخ:

$x(t) = e^{-t}u(t)$

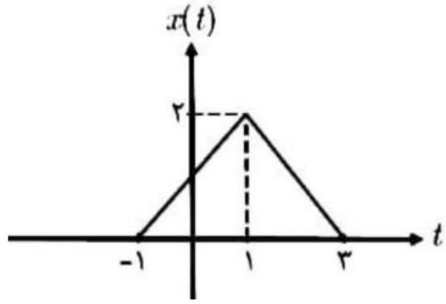
$h(t) = \delta(t) + 0.5\,\delta(t-1) + 0.3\,\delta(t-2)$

$x(t) * h(t) = e^{-t}u(t) * \delta(t) + e^{-t}u(t) * 0.5\,\delta(t-1)$

$+ e^{-t}u(t) * 0.3\,\delta(t-2) =$

$= e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-t+1}u(t-1) + \frac{3}{10}e^{-t+2}u(t-2)$

۲) پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر با $u(t+2)-u(t-6)$ داده شده است. پاسخ این سیستم وقتی ورودی قسمت زوج سیگنال $x(t)$ باشد، چه خواهد بود؟

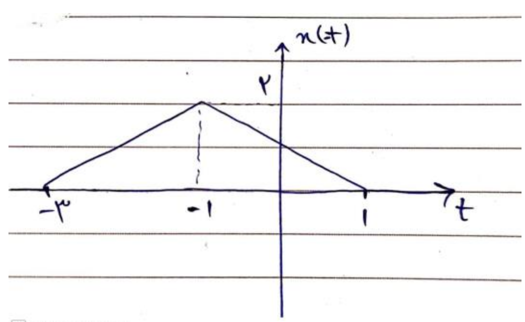


پاسخ:

می دانیم که قسمت زوج سیگنال x(t) از این رابطه بدست می‌آید:

$$Even\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

با رسم نمودار x(-t) مطابق شکل زیر متوجه می شویم که x(-t) = x(t + 2)



سپس داریم:

$$x(t) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y(t)$$

$$x(t+2) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y(t+2)$$

$$\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}x(t+2) \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow \frac{1}{2}y(t)+\frac{1}{2}y(t+2)$$

پس پاسخ سیستم برابر است با:

$$Y_{final}(t) = \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2}y(t+2) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(u(t+2) - u(t-6) + u(t+4) - u(t-4)\Big)$$

۳) خواص علّی بودن و پایداری سیستم های LTI زیر را که با پاسخ ضربه یا معادله صریح مشخص شده‌اند را تعیین کنید.

پاسخ:

برای بررسی علّی بودن و پایداری شرط های زیر را داریم:

پایداری $\Rightarrow$ if $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \rightarrow$ summable $\rightarrow y[n]$ is bounded

if $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \rightarrow$ integrable $\rightarrow y(t)$ is 〃

علّی بودن $\Rightarrow$ if $h(t) = 0$ for $t < 0$

if $h[n] = 0$ for $n \leqslant -1$

a) $h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$

پاسخ:

مثال نقض $\quad n = -1 \Rightarrow h[n] = -2 + \frac{100}{101} \neq 0$

علّی نیست

$$h[n] = \begin{cases} n < 0 & \Rightarrow h[n] = (1.01)^n \\ 0 \leqslant n \leqslant 1 & \Rightarrow h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n + (1.01)^n \\ n > 1 & \Rightarrow h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{cases}$$

با توجه به مقادیر بالا نتیجه می‌گیریم که $h[n]$، summable هست پس پایدار است.

b) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

پاسخ:

علّی بودن $\Rightarrow$ $h[n] = \begin{cases} 0 & n<1 \\ n\left(\frac{1}{3}\right)^n & n\geq 1 \end{cases}$ پس علّی هست.

پایداری $\Rightarrow$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{9} + 3\times\frac{1}{27} + \cdots$

چون جملات این دنباله به صفر میل می‌کند پس مقدار مجموع $|h[k]|$ summable است پس پایدار است.

c) $h(t) = e^{-6|t|}$

پاسخ:

$h(t) = e^{-6|t|} = \begin{cases} e^{6t} & t<0 \\ e^{-6t} & t\geq 0 \end{cases}$ پس علّی نیست.

پایداری $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{6\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-6\tau} d\tau$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ پس سیستم پایدار است.

d) $h(t) = te^{-t}u(t)$

پاسخ:

$h(t) = te^{-t}u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ te^{-t} & t\geq 0 \end{cases}$ پس علّی هست.

پایداری $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{0}^{\infty} \tau e^{-\tau} d\tau = 1$

پس پایدار هم هست.

e) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)u(t-\tau)x(\tau)\, d\tau$

پاسخ:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)u(t-\tau)x(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow h(t) = tu(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t\geq 0 \end{cases}$$ پس علّی هست

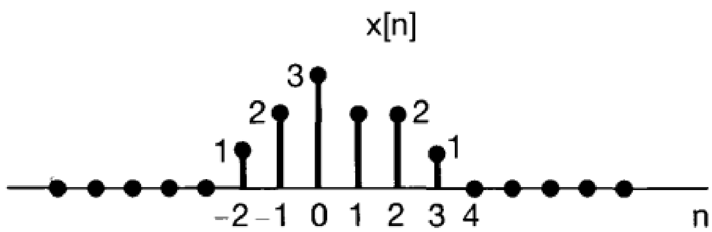
پایداری $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{0}^{\infty} \tau\, d\tau = \frac{\tau^2}{2} \not< \infty$

پس پایدار نیست.

۴) سیستم *LTI* زیر را که *initially at rest* است و با معادله‌ی دیفرانسیلی زیر تعریف می‌شود، در نظربگیرید.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2]$$

پاسخ این سیستم را به ورودی زیر با حل معادله دیفرانسیلی به صورت بازگشتی بدست آورید.



پاسخ:

می دانیم:

initially at rest $\Rightarrow y[n] = 0 \quad n < -2$

حل رابطه به صورت بازگشتی به این صورت می باشد:

$$y[n] = x[n] + 2x[n-2] - 2y[n-1]$$

$$y[-2] = x[-2] + 2x[-4] - 2y[-3] = 1$$

$$y[-1] = x[-1] + 2x[-3] - 2y[-2] = 0$$

$$y[0] = x[0] + 2x[-2] - 2y[-1] = 5$$

$$y[1] = x[1] + 2x[-1] - 2y[0] = -4$$

$$y[2] = x[2] + 2x[0] - 2y[1] = 16$$

$$y[3] = x[3] + 2x[1] - 2y[2] = -27$$

$$y[4] = x[4] + 2x[2] - 2y[3] = 58$$

$$y[5] = x[5] + 2x[3] - 2y[4] = -114$$

$$y[6] = x[6] + 2x[4] - 2y[5] = 228$$

$$\vdots$$

در نتیجه داریم:

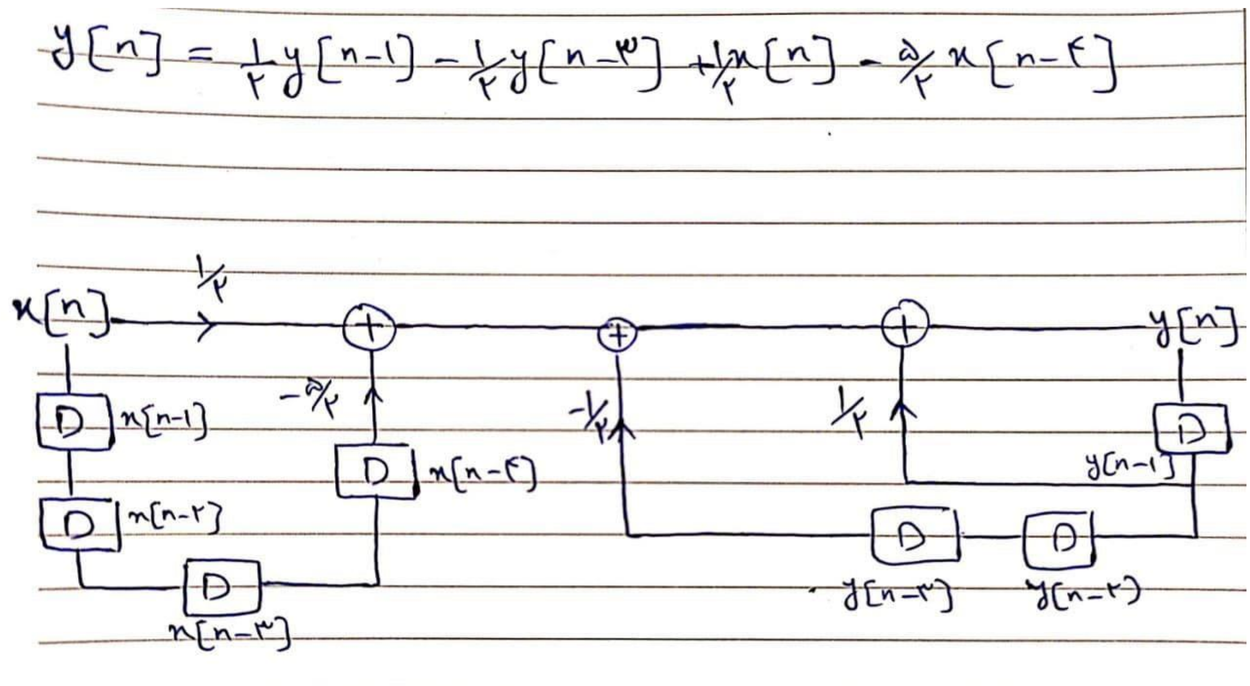
$$y[n] = -2y[n-1] \qquad n \geq 6$$

۵) برای معادله دیفرانسیلی زیر block diagram مناسبی رسم کنید.

$$2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$$

پاسخ:

با توجه به قوانین رسم block diagram گفته شده در اسلایدها، داریم:



۶) حافظه‌دار بودن یا نبودن سیستم های LTI زیر را که پاسخ ضربه آنها داده شده است، مشخص و اثبات کنید.

پاسخ:

می دانیم که اگر شرط زیر در سیستم برقرار باشد، آن سیستم بدون حافظه است:

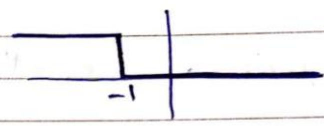
$$h[n] = 0 \quad for \quad n \neq 0$$

$$h(t) = 0 \quad for \quad t \neq 0$$

a) $h(t) = e^{3t}u(-1-t)$

پاسخ:

$u(-1-t)$



$$h(t) = \begin{cases} e^{3t} & t \leq -1 \\ 0 & t > -1 \end{cases}$$

پس سیستم حافظه‌دار است.

b) $h(t) = sin(5\pi t)u(t)$

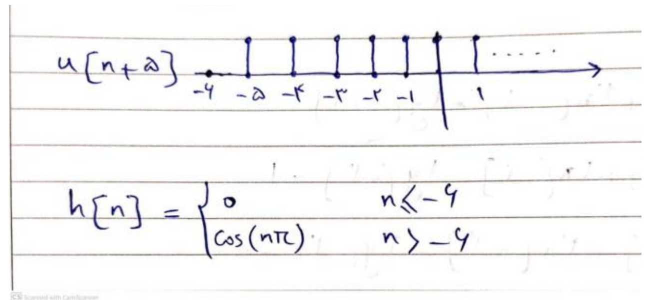
پاسخ:

$$h(t) = \begin{cases} \sin(5\pi t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

پس سیستم حافظه‌دار است.

c) $h[n] = cos(n\pi)u[n+5]$

پاسخ:



پس سیستم حافظه‌دار است.

۷) با توجه به پاسخ ضربه‌ی داده شده، برای هر مورد پاسخ پله را بدست آورید.

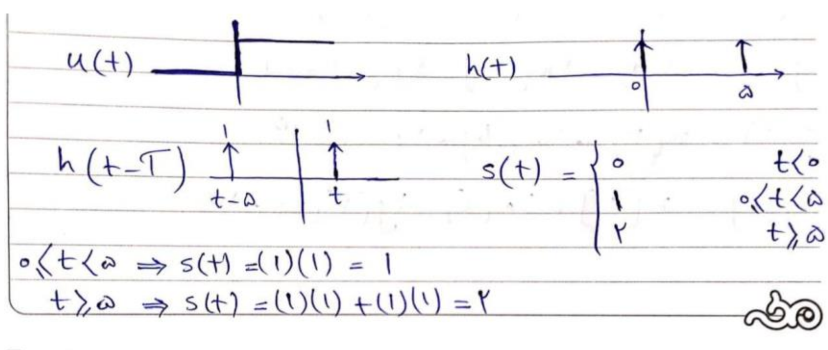
پاسخ:

می دانیم که پاسخ پله برابر است با :

$$S(t) = u(t) * h(t)$$

a) $h(t) = \delta(t-5) + \delta(t)$

پاسخ:

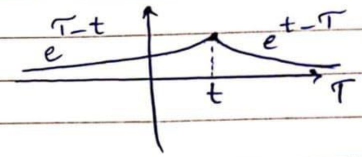


در نتیجه $s(t) = u(t) + u(t-5)$ خواهد بود.

b) $h(t) = e^{-|t|}$

پاسخ:

$h(t) = e^{-|t|}$ $\qquad h(t-\tau)$

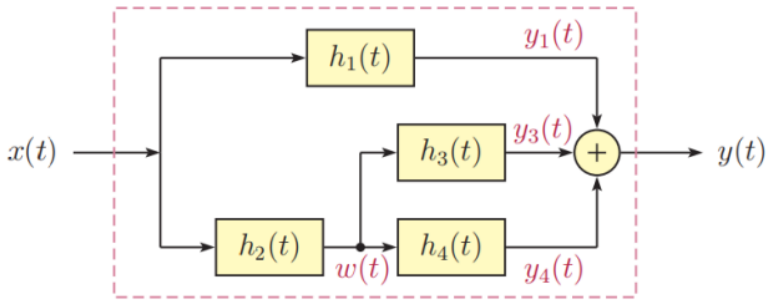


$$s(t) \Rightarrow \begin{cases} t<0 \Rightarrow \int_0^\infty e^{t-\tau}\,d\tau = -e^{t-\tau}\Big|_0^\infty = e^{t} \\ t>0 \Rightarrow \int_0^t e^{\tau - t}\,d\tau + \int_t^\infty e^{t-\tau}\,d\tau = 2 - e^{-t} \end{cases}$$

$$= 2 - e^{-t}$$

$$s(t) = e^{t}u(-t) + (2 - e^{-t})u(t)$$

۸) سیستم CTLTI زیر را در نظر بگیرید.



اطلاعات زیر در رابطه با پاسخ ضربه این سیستم موجود است:

$$h_1(t) = e^{-t}u(t)$$

$$h_2(t) = h_3(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$h_4(t) = \delta(t-1)$$

الف) پاسخ ضربه h_{eq} کل سیستم معادل را بدست آورید.

پاسخ:

مطابق روابطی که برای دو سیستم موازی یا سری داشتیم، در اینجا داریم:

$$h_{eq} = h_1(t) + h_2(t) * \left(h_3(t) + h_4(t)\right)$$

$$= h_1(t) + h_2(t) * h_3(t) + h_2(t) * h_4(t)$$

$$= e^{-t}u(t) + \left(\left(u(t) - u(t-1)\right) * \left(u(t) - u(t-1)\right)\right) +$$

$$+ \left(u(t) - u(t-1)\right) * \delta(t-1)$$

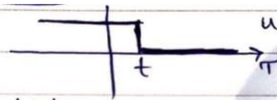
از distributive property استفاده میکنیم

$$h_{eq} = e^{-t}u(t) + tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

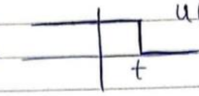
$$+ u(t-1) - u(t-2)$$

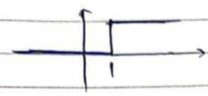
$$h_{eq} = (e^{-t} + t)u(t) + (3-2t)u(t-1) + (t-3)u(t-2)$$

نکات تکمیلی:

$u(t) * u(t) \Rightarrow$ 

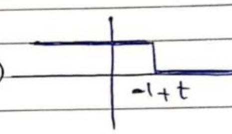
$$\begin{cases} t<0 \Rightarrow u(t)*u(t)=0 \\ t>0 \Rightarrow u(t)*u(t)=(1)(t)=t=\int_0^t 1\,d\tau = t \end{cases}$$

$u(t) * u(t-1) \Rightarrow$ 

$u(t-1)$ 

$$\begin{cases} t<1 \Rightarrow u(t)*u(t-1)=0 \\ t>1 \Rightarrow u(t)*u(t-1)=\int_1^t 1\,d\tau \\ \qquad = t-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t)*u(t-1) = (t-1)\,u(t-1)$$

$u(t-1) * u(t-1)$ $\quad u(t-\tau+1)$ 

$$\begin{cases} t-1<1 \Rightarrow 0 \\ t-1>1 \Rightarrow \int_1^{t-1} 1\,d\tau = t-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(t-1)*u(t-1) = (t-2)\,u(t-2)$$

$$u(t) * \delta(t-1) = u(t-1)$$

$$u(t-1) * \delta(t-1) = u(t-2)$$

ب) فرض کنید سیگنال ورودی $x(t) = u(t)$ باشد، سیگنال‌های $\omega(t)$ و $y_1(t)$ و $y_3(t)$ و $y_4(t)$ را بدست آورید.

پاسخ:

$\omega(t) = x(t) * h_2(t)$ می‌دانیم $\Leftarrow$

$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$

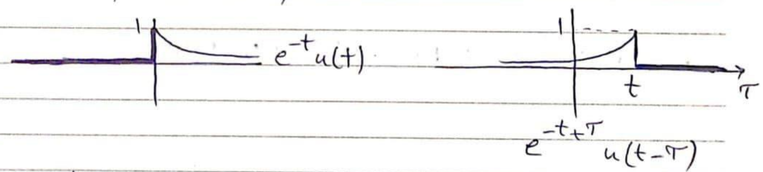
$y_3(t) = \omega(t) * h_3(t)$

$y_4(t) = \omega(t) * h_4(t)$

$$\omega(t) = x(t) * h_2(t) = u(t) * h_2(t) = u(t) * \left(u(t) - u(t-1)\right)$$

$$= \left(u(t) * u(t)\right) - \left(u(t) * u(t-1)\right) = tu(t) - (t-1)u(t-1)$$

$$y_1(t) = u(t) * e^{-t}u(t) =$$



$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_0^t e^{-t+\tau}\, d\tau = e^{-t+\tau}\Big|_0^t = 1 - e^{-t} & t>0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

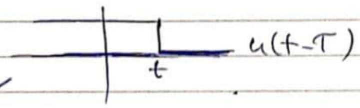
$$y_{۳}(t) = \Big(tu(t) - (t-1)u(t-1)\Big) * \Big(u(t) - u(t-1)\Big)$$

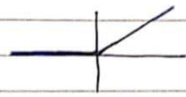
$$= tu(t) * u(t) - tu(t) * u(t-1) - u(t) * (t-1)u(t-1)$$

$$+ \Big((t-1)u(t-1)\Big) * u(t-1)$$

$$= u(t) * u(t) * u(t) - u(t) * u(t) * u(t-1) - u(t) * u(t) *$$

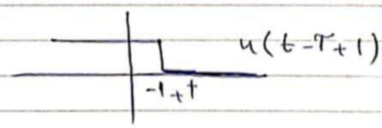
$$u(t-1) + u(t) * u(t-1) * u(t-1)$$

$tu(t) * u(t) \Rightarrow$ 

$tu(t)$ 

$$\begin{cases} t<۰ \Rightarrow ۰ \\ t>۰ \Rightarrow \int_{۰}^{t} \tau\, d\tau = \frac{t^{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow tu(t) * u(t) = \frac{t^{۲}}{۲} u(t)$$

$tu(t) * u(t-1)$ 

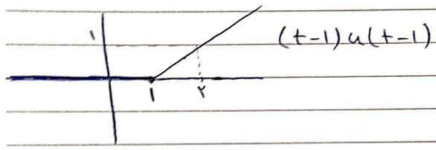
$$\begin{cases} t-1<۰ \Rightarrow ۰ \\ t-1>۰ \Rightarrow \int_{۰}^{t-1} \tau\, d\tau = \frac{(t-1)^{۲}}{۲} \end{cases}$$

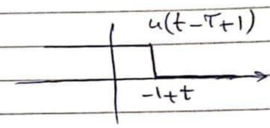
$$tu(t) * u(t-1) = \frac{(t-1)^{۲}}{۲} u(t-1)$$

می‌دانیم $\Rightarrow u(t) * (t-1)u(t-1) = u(t) * u(t) * u(t-1)$

$$= tu(t) * u(t-1)$$

$$u(t-1) * \big((t-1)u(t-1)\big)$$





$$\begin{cases} t-1 < 1 \Rightarrow 0 \\ t-1 > 1 \Rightarrow \int_1^{t-1} (\tau-1)\,d\tau = \dfrac{(t-2)^2}{2} \end{cases}$$

$$u(t-1) * \big((t-1)u(t-1)\big) = \frac{(t-2)^2}{2} u(t-2)$$

$$\Longrightarrow y_2(t) = \frac{t^2}{2} u(t) - 2\frac{(t-1)^2}{2} u(t-1) + \frac{(t-2)^2}{2} u(t-2)$$

$$y_4(t) = \big(tu(t) - (t-1)u(t-1)\big) * \delta(t-1)$$

$$= (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2)$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری سوم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(سری فوریه زمان پیوسته)

توضیحات

- مهلت تحویل تا ساعت ۲۳:۵۹ روز سه شنبه ۱۴۰۰/۹/۹ در نظر گرفته شده است و امکان تمدید وجود ندارد لذا با توجه به حجم تمرین برنامه ریزی مناسبی انجام دهید.

- پاسخ بخش تئوری را در یک فایل PDF با نام شماره دانشجویی خود و بخش عملی را با نام سوال(q1.m or q1.py, ...) در یک فایل ZIP با نام «HW3_StudentNumber.zip»در سایت درس بارگذاری کنید.

- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته‌شود و در صورت مشاهده هر گونه تقلب نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.

- در صورت داشتن هر گونه اشکال در تمرینات می‌توانید با rasoul.khazaeei@gmail.com و mahshidrahmani۲۰۰۱@gmail.com در ارتباط باشید.

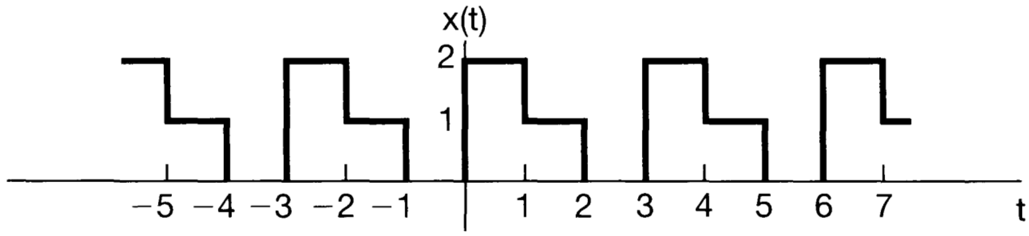
سوال ۱

ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

آ)

$$x_1(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 3\cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

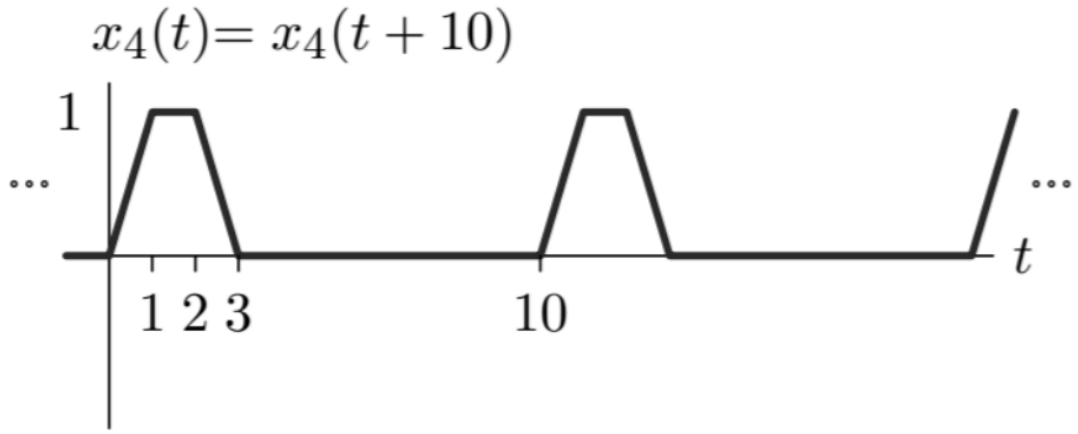
ب) .



(f)

شکل ۱

ج) .



شکل ۲

سوال ۲

در هر یک از حالتهاي زیر ضرایب سری فوریه یک سیگنال زمان پیوسته به شما داده شده است. با استفاده از این ضرایب سیگنال x(t) را مشخص کنید.

آ)

$$a_k = \begin{cases} 1, & keven \\ 2, & kodd \end{cases}$$

ب)

$$a_k = \begin{cases} jk, & |k| \leq 3 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

سوال ۳

فرض کنید x(t) یک سیگنال سیگنال متناوب با دوره تناوب T است و ضرایب سري فوریه آن برابر با a_k است. ضرایب فوریه سیگنال هاي زیر را بر حسب a_k بدست آورید.

آ) $x(t-t_0) + x(t+t_0)$

ب) $Even[x(t)]$

ج) $Re[x(t)]$

د) $\frac{d^2x}{dt^2}$

ه) $x(3t-1)$

سوال ۴

توان متوسط سیگنال زیر را حساب کنید.

$$x(t) = \frac{3\pi}{2}\cos(\frac{3\pi}{2}t + \pi)\sin(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2})$$

سوال ۵

فرض کنید x(t) یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $T = 4$ باشد و ضرایب سري فوریه آن برابر با $a_k = j^k$ باشد. اگر $y(t) = x(t)\cos(\frac{\pi}{4}t) + x(4t)$ باشد پنج ضریب اول سري فوریه براي سیگنال y(t) را بدست آورید.

سوال ۶

یک سیستم LTI زمان پیوسته با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

اگر ورودی این سیستم سیگنال متناوب:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ -1, & 4 \le t8 \end{cases}$$

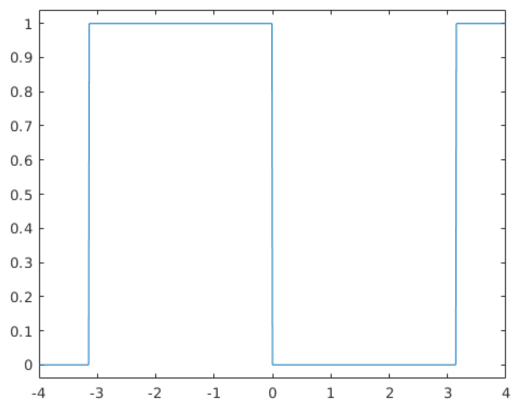
با دوره تناوب ۸ باشد، ضرایب سری فوریه x(t) و خروجی متناظر سیستم (y(t)) را بدست آورید.

تمرین عملی

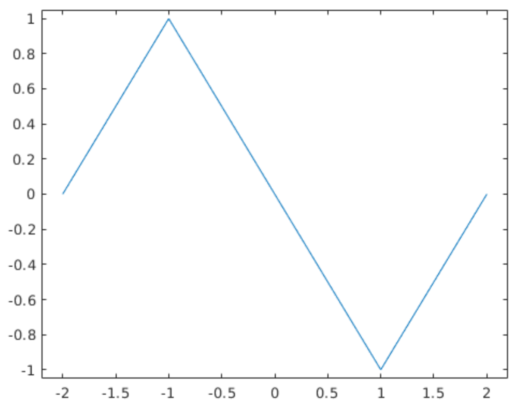
می‌دانیم که سري فوریه را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت، که در آن سیگنال‌ها به صورت جمع سینوس‌ها و کسینوس‌ها نوشته شده‌اند. اگر حاصل سیگما را تا جمله k = c بدست آوریم، تقریبی از سیگنال x(t) خواهیم داشت. هرچه c بزرگتر باشد، سیگنال تقریب زده شده به سیگنال اصلی نزدیکتر است.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$
$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, \mathrm{dt}$$
$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, \mathrm{dt}$$

تابعی بنویسید که از c = ۰ تا c = ۱۰ تقریب سیگنال را محاسبه کرده و در هر مرحله سیگنال تقریب زده شده را رسم کند. این تابع را بر روي دو سیگنال زیر (که بر روي یک دوره تناوب رسم شده اند) اعمال کنید.



شکل ۳: دوره تناوب = 2π



شکل ۴: دوره تناوب = 4

سوال ۱

آ)

$$x_1(t) = 1 + \sin w_0 t + 3\cos(2w_0 t + \frac{\pi}{4})$$

چون که ربط حاصل جمع یک DC با دو سیگنال سینوسی است می‌توانیم با تبدیل کردن x به صورت $x(t) = \sum a_k e^{jkw_0 t}$ ضرایب a_k را تعیین کرد.

$$x_1(t) = 1 + \underbrace{\frac{1}{2j}\left(e^{jw_0 t} - e^{-jw_0 t}\right)}_{\text{همان } \sin \text{ است.}} + \frac{3}{2}\left(e^{j(2w_0 t + \frac{\pi}{4})} + e^{-(j2w_0 t + j\frac{\pi}{4})}\right)$$

$$e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \overset{a_0}{1} + \overset{a_1}{\frac{1}{2j}} e^{jw_0 t} - \overset{a_{-1}}{\frac{1}{2j}} e^{-jw_0 t} + \overbrace{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{a_2} e^{j2w_0 t}$$

$$+ \underbrace{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{a_{-2}} e^{-j2w_0 t} \quad , \quad a_k = 0 \quad \text{for } |k| > 2.$$

ب) $T = 3 \Rightarrow w_0 = \frac{2\pi}{3}$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jkw_0 t} dt = \frac{1}{3}\int_0^3 x(t) e^{-jkw_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 2e^{-jk\frac{2\pi}{3}t} dt + \frac{1}{3}\int_1^2 1e^{-jk\frac{2\pi}{3}t} dt$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{-1}{jk\frac{2\pi}{\cancel{3}}} e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\Big|_0^1 + \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{-1}{jk\frac{2\pi}{\cancel{3}}} e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\Big|_1^2$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{j}{ka}\left(e^{-j\frac{2ka}{3}} - 1\right) + \frac{j}{2ka}\left(e^{-jk\frac{4a}{3}} - e^{-jk\frac{2a}{3}}\right)$$

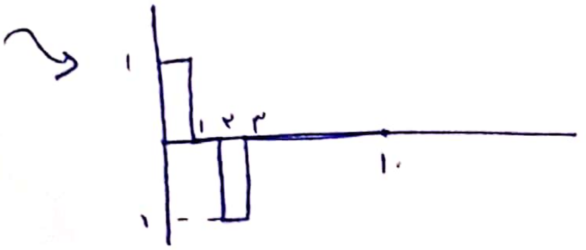
انتگرال گیری با فرض $k \neq 0$ گرفته شده است چون تعریف نشده است لذا برای $k=0$ جداگانه حساب می‌کنیم:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^1 2\,dt + \int_1^2 1\,dt = \frac{1}{3}(3) = \underline{1}$$

(ج-1

از تابع مشتق می‌گیریم.

$x_3(t) = x_3(t+10)$



$x_2(t) \longrightarrow a_k$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x_2(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{10}\left(\int_0^1 e^{-jk\frac{\pi}{5}t}dt - \int_2^3 e^{-jk\frac{\pi}{5}t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2jk\pi}\left(1-e^{-jk\frac{\pi}{5}}\right)\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{5}}\right)$$

$$\Rightarrow a_k = j\omega_0 k b_k \Rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{5} & k=0 \\ \frac{10}{4j^2k^2\pi^2}\left(1-e^{-jk\frac{\pi}{5}}\right)\times\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{5}}\right) \end{cases}$$

(2 الف)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k:\text{even}}}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k:\text{odd}}}^{+\infty} 2e^{jk\omega_0 t}$$

$k \to 2k+1$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2k\omega_0 t} + 2e^{j2k\omega_0 t} e^{+j\omega_0 t}$$

$$= (2e^{j\omega_0 t}+1) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2k\omega_0 t}$$

عبارت سیگما همان تابع دلتا است که دوره تناوبش برابر $\frac{2\pi}{2\omega_0}$ است

$$\Rightarrow x(t) = (2e^{jk\omega_0 t}+1) \times \delta\left(t - k\frac{\pi}{\omega_0}\right)$$

2) ب)

$$x(t) = -3je^{-j3w_0t} + 3je^{j3w_0t} - 2je^{-j2w_0t} + 2je^{j2w_0t}$$
$$-je^{-jw_0t} + je^{jw_0t}$$

$$= 3j \times 8j(\sin 3w_0t) + 2j \times 2j(\sin 2w_0t)$$
$$+ j \times 2j(\sin w_0t) = -6\sin 3w_0t - 4\sin 2w_0t - 2\sin w_0t$$

---

3) آ)

$$x(t-t_0) + x(t+t_0) \Rightarrow x(t) \rightarrow a_k$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) \rightarrow a_k e^{-jkw_0t_0} \quad , \quad x(t+t_0) \rightarrow a_k e^{jkw_0t}$$

$$\Rightarrow a'_k = a_k e^{jkw_0t} + a_k e^{-jkw_0t} = 2a_k \cos(kw_0t)$$

ب)

$$even(x) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad , \quad x(+t) \rightarrow a_k \Rightarrow x(-t) \rightarrow a_{(-k)}$$

$$\Rightarrow a'_k = \frac{a_k + a_{-k}}{2} = even(a_k)$$

ج)

$$Re(x(t)) = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \quad , \quad x(t) \rightarrow a_k \Rightarrow x^*(t) \rightarrow a^*_{-k}$$

$$\Rightarrow a'_k = \frac{a_k + a^*_{-k}}{2}$$

د)

$$x''(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \qquad x(t) \rightarrow a_k \Rightarrow x'(t) \rightarrow jk\omega_0 a_k$$

$$\Rightarrow x''(t) \rightarrow j^2 k^2 \omega_0^2 a_k = -k^2 \omega^2 a_k$$

ه)

$$x(t) \rightarrow a_k \Rightarrow x(t-1) \rightarrow e^{-jk\omega_0} a_k$$

$$\Rightarrow x(3t-1) \rightarrow a_k e^{-jk\omega_0}$$ چون : $\alpha > 0$

4) از یاد سوال استفاده می‌کنیم: ① تبدیل ضرب به جمع سینوس ها:

$$x(t) = \frac{3\pi}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} t + \pi\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{3\pi}{4}\left(\cos \frac{9\pi}{4} t + \cos \frac{3\pi}{4} t\right).$$

$$= -\frac{3\pi}{4} \times \left(\frac{e^{j\frac{9\pi}{4}t} + e^{-j\frac{9\pi}{4}t}}{2} + \frac{e^{j\frac{3\pi}{4}t} + e^{-j\frac{3\pi}{4}t}}{2} \right)$$

$$\rightsquigarrow a_1 = a_{-1} = -\frac{3\pi}{8}, \quad a_{3,-3} = \frac{-3\pi}{8}, \quad \omega_0 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\rightsquigarrow P = \sum |a_k|^2 = \cancel{8}4 \times \frac{9\pi^2}{\cancel{64}16} = \frac{9\pi^2}{16}$$

(5

$$y(t) = \frac{x(t)e^{j\frac{\pi}{4}t}}{2} + \frac{x(t)e^{-j\frac{\pi}{4}t}}{2} + x(4t) \sim T'' = 1$$

$$T = 4 \sim \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad a_k = j^k \longrightarrow T' = 8$$

$$f_s\left(x(t)e^{j\frac{\pi}{4}t}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\frac{\pi}{4}t}e^{j\frac{2\pi}{8}kt}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\frac{\pi}{4}(k+1)t} \Rightarrow \quad a_{k+1}$$

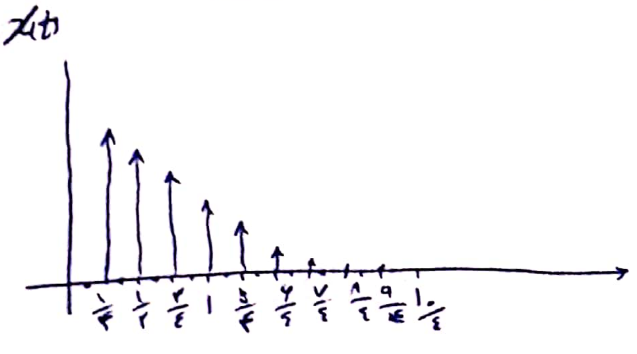
با توجه به این که دوره تناوب دو برابر قبلی در نظر گرفته شده پس فرکانس ها در اینجا نصف فرکانس های خود $x(t)$ است یعنی مثلا $x(t)$ در فرکانس های $f = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ مولفه داشت ولی الان a_k ها در فرکانس های $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ مقدار دارد.

در این جا هم دوره تناوب نسبت به $x(t)$، $\frac{1}{4}$ برابر می شود

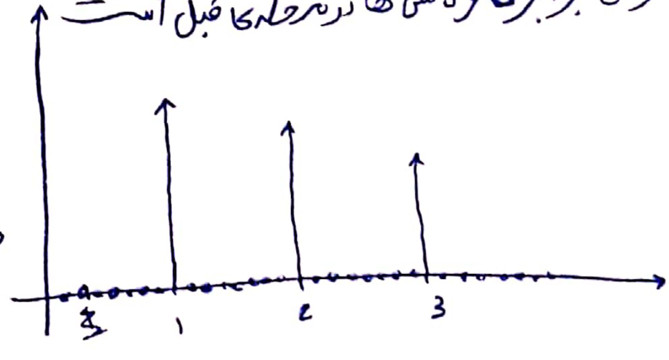
$x(4t) \Rightarrow a_k'$

پس فرکانس ها 4 برابر حالت $x(t)$ است یعنی به این صورت درآمده است.

و 8 برابر فرکانس ها در مرحله قبل است



$\Rightarrow$

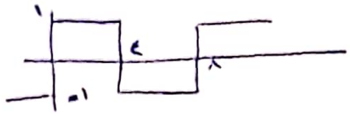


پس در جمع a_kها، a_k ای که در $x(4t)$ به فرکانسی اشاره می کند 8 برابر فرکانس a_k است.

پس داریم: $a_k'' = a_{\frac{k}{8}}$

$$F_s(y(t)) = \frac{1}{4}\left(j^{k+1} + j^{k-1}\right) + j^{\frac{k}{8}}\,\delta_{k(8n)}$$

اگر k ضریبی از 8 نباشد مقدارش صفر است.



جمع دو پالس هست:

$$a_k = \frac{\sin k\pi\left(\frac{4}{8}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi} - \frac{\sin\frac{k\pi}{2}\, e^{jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}$$

$$= \frac{-j\sin\frac{k\pi}{2}\left(2\sin\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} = \frac{-2j}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2$$

$$a_0 = 0 \quad \text{و}$$

توابع سینوس و کسینوس توابع ویژه سیستم های LTI هستند پس وقتی از یک سیستم LTI رد می‌شوند فقط در پاسخ سیستم به آن فرکانس ضرب می‌شوند:

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum a_k H(j\omega) e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow b_k = a_k H(j\omega)$$

فرکانس مربوط به $k \Longleftarrow \omega = k\omega_0$

$$\Rightarrow b_k = \frac{\sin(4k\omega_0)}{k\omega_0} \times \left(-\frac{2j}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{\sin k\pi}{k\omega_0}\left(-\frac{2j}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2\right) = 0$$

پس سیستم ما مولفه های فرکانسی ورودی را از خود رد نمی‌کند و خروجی برابر صفر است.

$$y(t) = 0$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری چهارم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل چهارم – تبدیل فوریه سیگنال های پیوسته زمان)

توضیحات:

- مهلت تحویل تا ساعت ۲۳:۵۵ روز ۱۴۰۰/۰۹/۱۱ در نظر گرفته شده است و امکان تمدید وجود ندارد لذا با توجه به حجم تمرین، برنامه ریزی مناسبی انجام دهید.
- پاسخ بخش تئوری در یک فایل PDF با نام و شماره دانشجویی خود در یک فایل ZIP با نام HW4_StudentNumber.zip در سایت درس بارگذاری کنید.
- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هر گونه تقلب، نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- در صورت داشتن هر گونه اشکال در تمارین می‌توانید با aref78.m@gmail.com و fatemeh.vpasha@gmail.com در ارتباط باشید.

بخش تئوری:

۱) تبدیل فوریه سیگنال های زیر را بدست آورید.

a) $x(t) = e^{-2|t-1|}$

b) $x(t) = 1 + 3\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

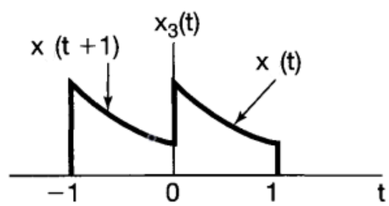
c) $x(t) = e^{5\pi jt} - \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$

d) $x(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{t\sin(t)}{\pi t}\right)^2$

e) $x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$

f)

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



۲) عکس تبدیل فوریه سیگنال های زیر را محاسبه کنید.

a) $X(j\omega) = 2\delta(\omega + 6)$

b) $X(j\omega) = 2\,\frac{\sin[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$

c) $X(j\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$

d) $X(j\omega) = \frac{7j\omega + 46}{-\omega^2 + 13j\omega + 42}$

۳) درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

- یک سیگنال فرد و موهومی، همیشه دارای تبدیل فوریه فرد و موهومی خواهد بود.
- کانولوشن یک تبدیل فوریه فرد با یک تبدیل فوریه زوج، همیشه فرد است.

۴) طبق رابطه‌های زیر

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

و

$$g(t) = x(3t) * h(3t)$$

و اینکه می‌دانیم سیگنال x(t) تبدیل فوریه آن $X(j\omega)$ و تبدیل فوریه سیگنال h(t) برابر $H(j\omega)$ است، مقدار A و B را در رابطه زیر بیابید:

$$g(t) = A\,y(Bt)$$

۵) سیگنال x(t) را به گونه ای در نظر بگیرید که تبدیل فوریه آن به صورت زیر باشد:

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$$

حال داریم

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

الف) آیا سیگنال x(t) متناوب است؟

ب) آیا x(t)*h(t) متناوب است؟

ج) آیا کانولوشن دو سیگنال غیر متناوب می‌تواند متناوب باشد؟

۶) سیستم LTI علّی با پاسخ فرکانسی زیر را در نظر بگیرید

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega) + 3}$$

برای یک ورودی مخصوص x(t)، پاسخ سیستم به صورت زیر بوده است.

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

ورودی x(t) را بیابید.

۷) با استفاده از رابطه پارسوال مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(\frac{sin(t)}{\pi t}\right)^4 dt$$

۸) یک سیستم پایدار و علّی LTI با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

الف) پاسخ ضربه این سیستم را محاسبه کنید.

ب) اگر ورودی سیستم $x(t) = te^{-2t}u(t)$ باشد، پاسخ سیستم را محاسبه کنید.

۹) پاسخ ضربه یک سیستم LTI به این صورت است.

$$h(t) = \delta(t) - 3e^{-t}u(t)$$

الف) پاسخ ضربه سیستم معکوس را بیابید.

ب) پاسخ سیستم داده شده در سوال را به ورودی زیر محاسبه کنید.

$$x(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

موفق باشید

پاسخ نامه تمرین ۴:

۱)

a)

$$x(t) = e^{-2|t-1|}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-1|} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{1} e^{2(t-1)} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{e^{-j\omega}}{j\omega + 2} + \frac{e^{-j\omega}}{2 - j\omega} = \frac{4e^{-j\omega}}{\omega^2 + 4}$$

(b

$$x(t) = 1 + ۳\cos\left(۴\pi t + \frac{\pi}{۳}\right) \qquad w_0 = ۴\pi$$

$$= 1 + ۳\left((\cos ۴\pi t)\left(\cos \frac{\pi}{۳}\right) - \sin(۴\pi t)\sin\left(\frac{\pi}{۳}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{۳}{۲}\cos ۴\pi t - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\sin(۴\pi t)$$

$$= 1 + \frac{۳}{۲} \times \frac{e^{۴\pi t j} + e^{-۴\pi t j}}{۲} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\left(\frac{e^{۴\pi t j} - e^{-۴\pi t j}}{۲j}\right)$$

$$= \underbrace{1}_{a_0} + e^{۴\pi t j}\underbrace{\left(\frac{۳}{۴} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۴j}\right)}_{a_1} + e^{-۴\pi t j}\underbrace{\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۳\sqrt{۳}}{۴j}\right)}_{a_{-1}}$$

$$w_0 = ۴\pi$$

طبق رابطه $x(t) = \sum a_k e^{jkw_0 t} \xleftrightarrow{F} X(jw) = \sum ۲\pi a_k \delta(w - kw_0)$

$$\rightarrow X(jw) = ۲\pi\,\delta(w) + ۲\pi\left(\frac{۳}{۴} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۴j}\right)\delta(w - ۴\pi)$$

$$+ ۲\pi\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۳\sqrt{۳}}{۴j}\right)\delta(w + ۴\pi)$$

(c

$$x(t) = e^{5\pi j t} - \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$$

$$e^{5\pi j t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\,\delta(\omega - 5\pi)$$

$$\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1 & |\omega| < 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

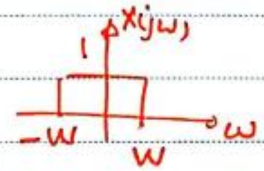
$$X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega - 5\pi) - \begin{cases} 1 & |\omega| < 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi\,\delta(\omega - 5\pi) - 1 & |\omega| < 2\pi \\ 2\pi\,\delta(\omega - 5\pi) & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

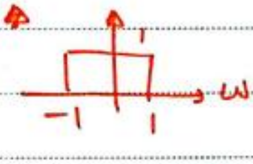
(d

$$x(t) = t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longrightarrow x(t) = t\,\frac{\sin(t)}{\pi t}\,\frac{\sin(t)}{\pi t}$$

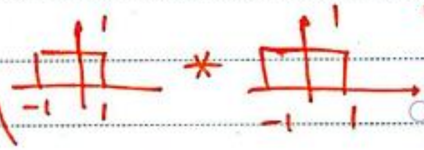
* می‌دانیم $\quad x(t) = \dfrac{\sin(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{FT}$



$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(t)}{\pi t} \longleftrightarrow$$

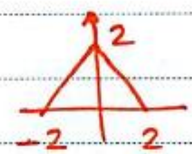


$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\Bigg($$



$$\Bigg)$$

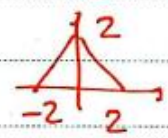
$$= \frac{1}{2\pi}$$



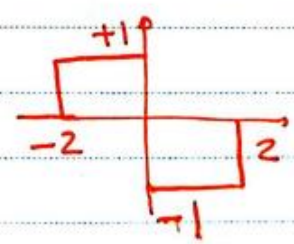
$$* \quad x(t) \longleftrightarrow X(jw)$$

$$t\,x(t) \longleftrightarrow j\frac{d}{dw}X(jw)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}$$



$$t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{j}{2\pi}$$



(e

$$x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

Duality: $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

we know: $e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$

$\xrightarrow{\text{Duality}} \quad \frac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} \quad \frac{4t}{(1+t^2)^2} \longleftrightarrow j\omega\left(2\pi e^{-|\omega|}\right)$

(f

$x_3(t) = x(t) + x(t+1)$

با توجه به خواص linearity و time shifting داریم:

$X_3(j\omega) = X(j\omega) + e^{j\omega} X(-j\omega)$

$= \frac{1 + e^{j\omega} - e^{-1}(1 + e^{-j\omega})}{1 + j\omega}$

(۲

(a

$$X(jw) = ۲\delta(w+۴)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ۲\delta(w+۴)\, e^{jwt}\, dw = \frac{۲}{۲\pi} e^{-۴jt} = \frac{e^{-۴jt}}{\pi}$$

(b

می دانیم معکوس تبدیل فوریه $\frac{2\sin(3w)}{w}$ برابر با یک موج مربعی می باشد:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} 1 & |t| < 3 \\ 0 & |t| > 3 \end{Bmatrix}$$

علاوه بر این طبق خاصیت ***time shifting*** و ***duality*** داریم:

$$e^{jw_0 t} x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(w - w_0))$$

بنابراین پاسخ نهایی بدین شکل می باشد:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} e^{2\pi t} & |t| < 3 \\ 0 & |t| > 3 \end{Bmatrix}$$

(c

$$X(j\omega) = 2[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)] + 3[\delta(\omega-2\pi) + \delta(\omega+2\pi)]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{\pi} e^{jt} - \frac{1}{\pi} e^{-jt} + \frac{3}{2\pi} e^{2j\pi t} + \frac{3}{2\pi} e^{-2j\pi t}$$

$$\Rightarrow e^{jt} = \cos t + j\sin t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\cos t - \cos t}^{\,0} + j\sin t + j\sin t\right) + \frac{3}{2\pi}\left(\cos 2\pi t + \cos(-2\pi t)\right.$$

$$\left. + \cancel{j\sin 2\pi t} + \cancel{j\sin(-2\pi t)}\right)$$

$$x(t) = \frac{2j}{\pi}\sin t + \frac{3}{\pi}\cos 2\pi t$$

(d

$$\frac{7j\omega+46}{-\omega^2+13j\omega+42}=\frac{7j\omega+46}{(j\omega)^2+13j\omega+42}=\frac{7j\omega+46}{(j\omega+7)(j\omega+6)}$$

$$=\frac{A}{j\omega+7}+\frac{B}{j\omega+6}\qquad \left\{\begin{array}{l} A+B=7 \\ 6A+7B=46 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} A=3 \\ B=4 \end{array}$$

$$\frac{1}{j\omega+7}\longleftrightarrow e^{-7t}u(t)$$

$$\frac{1}{j\omega+6}\longleftrightarrow e^{-6t}u(t)$$

$$X(j\omega)=\frac{3}{j\omega+7}+\frac{4}{j\omega+6}\longleftrightarrow(3e^{-7t}+e^{-6t})u(t)$$

۳)

- می دانیم که سیگنال real و فرد x(t) تبدیل فوریه فرد و purely imaginary با نماد X(jw) دارد. حال سیگنال purely imaginary و فرد jx(t) را در نظر میگیریم. با استفاده از خاصیت linearity، می دانیم که تبدیل فوریه سیگنال مورد نظر jX(jw) خواهد بود که به وضوح real و فرد است. در نتیجه جمله داده شده غلط است.
- می دانیم که تبدیل فوریه زوج مربوط به یک سیگنال زوج و تبدیل فوریه فرد مربوط به یک سیگنال فرد است. کانولوشن یک تبدیل فوریه فرد با تبدیل فوریه زوج در حوزه سیگنال در واقع ضرب یک سیگنال فرد و یک سیگنال زوج در حوزه زمان است که همواره نتیجه آن یک سیگنال فرد است. می دانیم که تبدیل فوریه این سیگنال فرد هم فرد است. در نتیجه، این جمله درست است.

۴)

می‌دانیم که

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{۳} X\left(\frac{j\omega}{۳}\right) \cdot \frac{1}{۳} H\left(\frac{j\omega}{۳}\right)$$

$$= \frac{1}{۹} X\left(\frac{j\omega}{۳}\right) H\left(\frac{j\omega}{۳}\right)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{۹} Y\left(\frac{j\omega}{۳}\right) = \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۳} Y\left(\frac{j\omega}{۳}\right)$$

$$\frac{1}{۳} Y\left(\frac{j\omega}{۳}\right) \longleftrightarrow y(۳t)$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{۳} y(۳t) \Longrightarrow \begin{cases} A = 1/۳ \\ B = ۳ \end{cases}$$

۵)

الف)

عکس تبدیل فوریه را محاسبه می‌کنیم تا $x(t)$ را بدست آوریم:

$$\delta(\omega) \overset{F.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \qquad \delta(\omega-\pi) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{j\pi t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} e^{j\pi t} + \frac{1}{2\pi} e^{j5t}$$

در نتیجه، سیگنال $x(t)$ مجموع یک عدد ثابت و دو سیگنال نمایی با فرکانس پایه $\frac{2\pi}{5}$ و 2 است. چون نسبت این دو فرکانس عدد گویا نیست پس یک فرکانس پایه مشترک نمی‌توان برای آنها پیدا کرد. پس سیگنال $x(t)$ متناوب نیست.

ب)

فرض می‌کنیم $y(t) = x(t) * h(t)$ باشد که نتیجه می‌گیریم که $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

همچنین $h(t)$ را به حوزه فرکانس می‌بریم و داریم:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

چون وقتی $\omega = k\pi$ باشد مقدار $H(j\omega)$ صفر است پس داریم:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - 5)$$

وقتی $Y(j\omega)$ را به حوزه فرکانس ببریم داریم:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{j5t}}_{\text{میدانیم این بخش متناوب است.}}$$

همچنین می‌دانیم که اضافه کردن عدد ثابت تاثیری در متناوب بودن ندارد. در نتیجه $y(t)$ یا $x(t) * h(t)$ متناوب است و فرکانس پایه آن $\frac{2\pi}{5}$ است.

ج) در بخش های قبل متوجه شدیم که x(t) متناوب نیست. همچنین می دانیم که h(t) هم متناوب نیست. ولی کانولوشن آن ها متناوب است. پس جواب بله است.

۶)

ابتدا باید $y(t)$ را به حوزه فرکانس ببریم:

$$e^{-3t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+3}$$

$$-e^{-4t}u(t) \longleftrightarrow \frac{-1}{j\omega+4}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3} - \frac{1}{j\omega+4} = \frac{1}{(j\omega+3)(j\omega+4)}$$

همچنین می‌دانیم که $Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega)$

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{\frac{1}{\cancel{(j\omega+3)}(j\omega+4)}}{\frac{1}{\cancel{(j\omega+3)}}} = \frac{1}{j\omega+4}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+4} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} e^{-4t}u(t)$$

داریم $\Rightarrow x(t) = e^{-4t}u(t)$

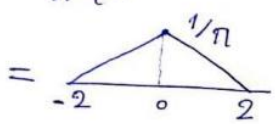
۷) با نوشتن رابطه پارسوال می توانیم x(t) را مطابق حل زیر بدست آوریم. سپس تبدیل فوریه آن را بدست می آوریم.(تبدیل فوریه معادل $\frac{sin(t)}{\pi t}$ را هم به عنوان دانش اولیه داریم و می دانیم که اگر در حوزه زمان سیگنالی در t ضرب بشود، باید از معادل سیگنال در حوزه فرکانس مشتق بگیریم)

در نهایت، باقی پارامترهای لازم برای جایگذاری در رابطه پارسوال را از همین اطلاعات بدست آمده داریم و می توانیم با قرار دادن آنها در رابطه پارسوال، حاصل انتگرال را بدست آوریم.

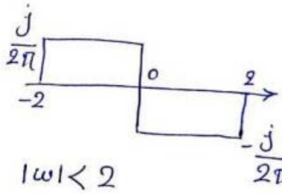
$$|x(t)|^2 = t^2\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^4 \Rightarrow x(t) = t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 = t \times \frac{\sin(t)}{\pi t} \times \frac{\sin(t)}{\pi t}$$

$$\frac{\sin^2(t)}{\pi^2 t^2} \xleftrightarrow{F.T} \frac{1}{2\pi} \times$$

$$=$$



$$t\,\frac{\sin^2(t)}{\pi^2 t^2} \xleftrightarrow{F.T}$$



$$= X(j\omega)$$

$$\Rightarrow |X(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & |\omega| < 2 \\ 0 & O.w \end{cases} \Rightarrow |X(j\omega)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} & |\omega| < 2 \\ 0 & O.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi^3}$$

۸)

الف) اگر از هر طرف معادله تبدیل فوریه حساب بکنیم ، داریم:

$$j^2\omega^2 H(j\omega) + 6j\omega H(j\omega) + 8H(j\omega) = 2$$

$$H(j\omega)\left(j^2\omega^2 + 6j\omega + 8\right) = 2$$

$$H(j\omega) = \frac{2}{j^2\omega^2 + 6j\omega + 8} = \frac{2}{-\omega^2 + 6j\omega + 8} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$= \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 4}$$

که اگر $H(j\omega)$ را به حوزه زمان ببریم داریم:

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

* $\frac{1}{j\omega+2} \longleftrightarrow e^{-2t}u(t)$ ریشه مخرج $= -2 =$ ضریب t در توان e

ب) $x(t) = te^{-2t}u(t) \Leftarrow$ داریم

ابتدا این سیگنال را به حوزه‌ی فرکانس می‌بریم:

$$e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+2}$$

$$te^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \left(\frac{1}{j\omega+2}\right)^2 = j\frac{d\left(\frac{1}{j\omega+2}\right)}{d\omega} = X(j\omega)$$

می‌دانیم که $Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \left(\frac{1}{j\omega+2}\right)^2 \left(\frac{2}{-\omega^2+6j\omega+8}\right)$$

$$= \frac{2}{(j\omega+2)^3(j\omega+4)}$$

$$= \frac{A}{j\omega+2} + \frac{Bj\omega+E}{(j\omega+2)^2} + \frac{G+Cj^2\omega^2+Fj\omega}{(j\omega+2)^3} + \frac{D}{j\omega+4}$$

$$= \frac{1/4}{j\omega+2} + \frac{-1/2}{(j\omega+2)^2} + \frac{1}{(j\omega+2)^3} + \frac{-1/4}{j\omega+4}$$

Y(jw) را به حوزه زمان می‌بریم و y(t) را بدست می‌آوریم،

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{2} t e^{-2t} u(t) + t^2 e^{-2t} u(t) - \frac{1}{4} e^{-4t} u(t)$$

۹)

الف) ابتدا با روابطی که داریم پاسخ ضربه را به حوزه فرکانس می بریم. سپس با توجه به اینکه می دانیم که کانولوشن h(t) و $h^{-1}(t)$ برابر تابع ضربه است، با بردن آن به حوزه فرکانس داریم:

$$H(w) \times H^{-1}(w) = 1$$

و به کمک این رابطه $H^{-1}(w)$ را بدست می آوریم و سپس آن را به حوزه زمان می بریم.

ب) ابتدا ورودی را به حوزه فرکانس می بریم و X(jw) را محاسبه می کنیم. سپس می دانیم که Y(jw) = X(jw)H(jw) است و در نهایت پس از محاسبه ی Y(jw) و بردن حاصل آن به حوزه زمان، پاسخ سیستم را به عنوان نتیجه سوال خواهیم داشت.

$$h(t) = \delta(t) - 3e^{-t}u(t)$$

الف)

سیستم را به حوزه‌ی فرکانس می‌بریم.

$$H(w) = 1 - \frac{3}{1+jw} = \frac{1+jw-3}{1+jw} = \frac{jw-2}{1+jw}$$

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t) \Rightarrow H(w) \times H^{-1}(w) = 1 \rightarrow H^{-1}(w) = \frac{1}{H(w)}$$

$$H^{-1}(w) = \frac{1+jw}{jw-2} = 1 + \frac{3}{jw-2} = 1 - \frac{3}{2-jw}$$

$$h^{-1}(t) = \delta(t) - 3e^{2t}u(-t)$$

ب)

$$x(t) = (e^{-3t} - e^{-4t})u(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

$$X(jw) = \frac{1}{3+jw} - \frac{1}{4+jw}$$

$$X(jw)H(jw) = \frac{jw-2}{(3+jw)(1+jw)} - \frac{jw-2}{(4+jw)(1+jw)} = \frac{A}{3+jw} + \frac{B}{1+jw} - \left(\frac{C}{4+jw} + \frac{D}{1+jw}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{3+jw} + \underbrace{\frac{\frac{-3}{2}}{1+jw} - \frac{2}{4+jw} + \frac{1}{1+jw}}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1+jw}$$

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - 2e^{-4t}u(t)$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

تمرین سری پنجم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

توضیحات

- مهلت تحویل تا ساعت ۲۳:۵۹ روز چهارشنبه ۱۴۰۰/۱۰/۸ در نظر گرفته شده است و امکان تمدید وجود ندارد لذا با توجه به حجم تمرین برنامه ریزی مناسبی انجام دهید.

- پاسخ بخش تئوری را در یک فایل PDF با نام شماره دانشجویی خود و بخش عملی را با نام سوال(q1.m or q1.py, ...) در یک فایل ZIP با نام «HW5_StudentNumber.zip»در سایت درس بارگذاری کنید.

- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته‌شود و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.

- در صورت داشتن هرگونه اشکال در تمرینات می‌توانید با rasoul.khazaeei@gmail.com و mahshidrahmani۲۰۰۱@gmail.com در ارتباط باشید.

سوال ۱

نرخ نایکوئیست سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

آ) $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$

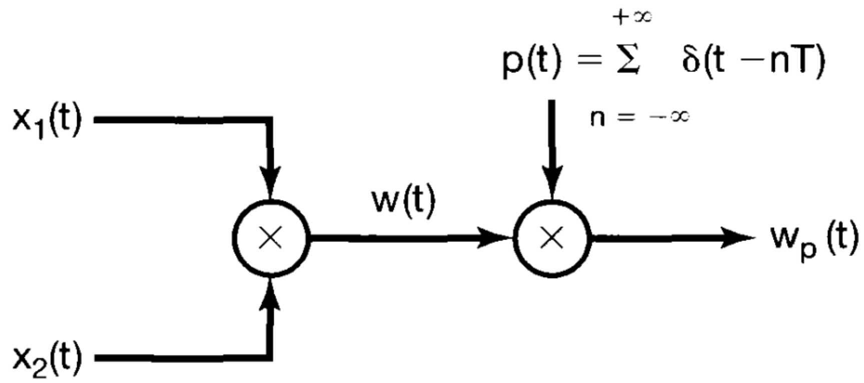
ب) $\left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)$

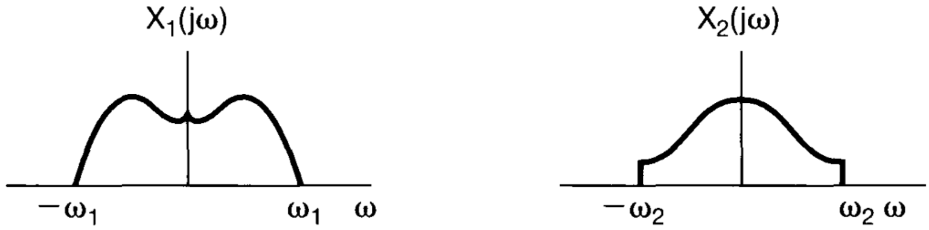
ج) $\frac{\sin(\omega_1)}{\pi t}\cos(\omega_2 t)$

د) $x(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } |t| < T \\ 0, & \text{if } |t| \geq T \end{cases}$

سوال ۲

سیستم زمان پیوسته زیر را در نظر بگیرید.





$X_1(j\omega) = 0, |\omega| \geq |\omega_1|,$
$X_2(j\omega) = 0, |\omega| \geq |\omega_2|,$

بیشترین دوره تناوب نمونه برداري T را بیابید به گونه اي که بتوان w(t) را از روي $w_p(t)$ به وسیله یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل بدست آورد.

سوال ۳

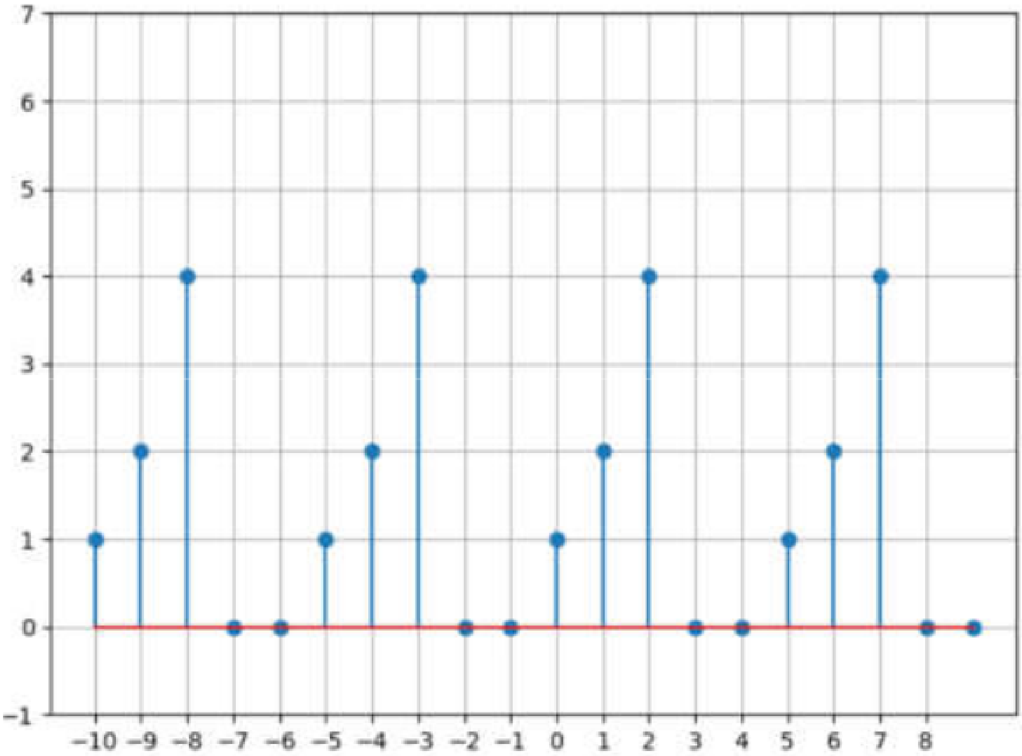
ضرایب سری فوریه را برای سیگنال‌های گسسته زیر بدست آورید.

آ) $(-1)^n + \cos^2(\frac{\pi}{5}n + \frac{\pi}{4})$

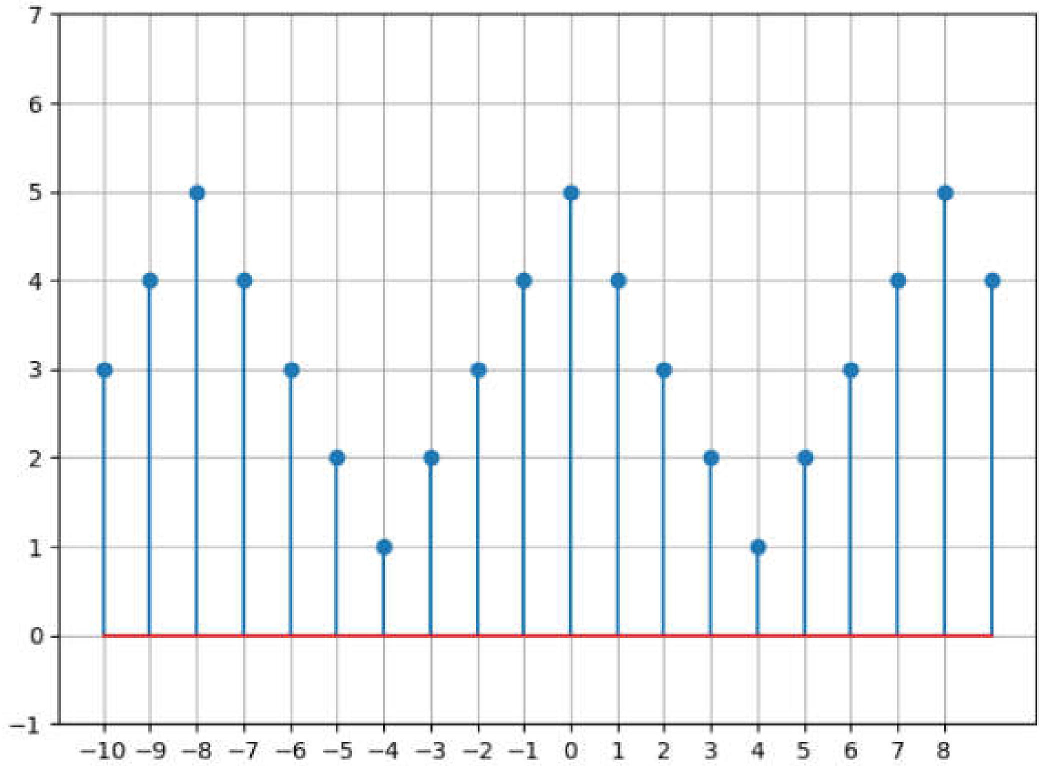
ب) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\{4\delta[n-4m] + 8\delta[n-1-4m]\}$

ج) $2 + 3\cos(\frac{2\pi}{3}n) + \sin(\frac{\pi}{3}n)$

د) .



ه) .



سوال ۴

فرض کنید سیگنال x[n] یک سیگنال حقیقی و فرد با دوره تناوب N = ۵ و ضرایب سری فوریه a_k است. با داشتن

$$a_{11} = j, a_{13} = 3j, a_{17} = \frac{j}{2}$$

حاصل ضرایب $a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}$ را بدست آورید.

سوال ۵

فرض کنید سیگنال x[n] یک سیگنال متناوب با دوره تناوب N و ضرایب سري فوریه a_k است. در این صورت ضرایب سري فوریه را براي سیگنال هاي زیر برحسب a_k بدست آورید.

- $\sum_{r=<N>} x[r]x[n+l-r]$
- $x[n+1] - x[n] + x[n-2]$
- $x^2[n]$

سوال ۶

فرض کنید:
$x(t) = \cos(200\pi t) + 2\sin(400\pi t)$ و $g(t) = x(t)\sin(400\pi t)$ باشد. اگر سیگنال $w(t) = g(t)\sin(400\pi t)$ را از یک فیلتر پایین گذر ایده‌ال با پهنای باند 400π و بهره باند عبور ۲ بگذرد سیگنال بدست آمده در خروجی فیلتر را بدست آورید.

سوال ۷

فرض کنید سیگنال پیام ما به صورت $m(t) = cos(2\pi f_m t)$. سیگنال های DSB-AM(modulation index = a), Upper and lower sidebandsآنها را تعیین کنید و طیف فرکانسی آنها را رسم کنید.

سوال ۸

سیگنال پیام به صورت $m(t) = \cos(2000\pi t) + 2\sin(2000\pi t)$ است و دامنه و فرکانس سیگنال **carrier** برابر با $A_c = 10, f_c = 800kHz$

۱. LSSB-AM را در حوزه زمان بدست آورید.

۲. دامنه طیف فرکانسی بخش الف را تعیین کنید.

بخش عملی

سیگنال m(t) به صورت زیر داده شده‌است.

$$m(t) = \begin{cases} sinc(100t), & \text{if } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

که داریم: $t_0 = 0.1,\ c(t) = \cos(2\pi f_c t,\ f_c = 250Hz)$ و u(t) سیگنال مدوله شده‌است.

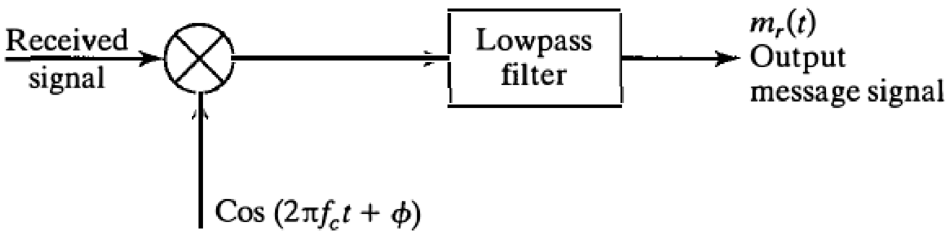
۱. Amplitude Modulation(DSB-AM)

۱. با فرض زمان نمونه برداری $t_s = 0.0001$ سیگنال‌های m(t)، u(t) را در بازه $[0, t_0]$ رسم کنید.

۲. m(t)، u(t) را در حوزه فرکانس رسم کنید.

۳. قسمت های قبل را با $t_0 = 0.4$ انجام دهید و نتیجه را استدلال کنید.

۴. با توجه به شکل ۱ سیگنال را دمدوله کنید. (در فیلتر پایین گذر frequency cutoff = 100)



شکل ۱:

۲. Amplitude Modulation(SSB-AM)

سیگنال مدوله شده در حالت زمان را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$u(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \mp A_c \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

که در آن $\hat{m}(t)$ تبدیل هیلبرت سیگنال است و علامت مثبت برای LSSB و منفی برای USSB است.

۱. سیگنال $\hat{m}(t), m(t)$ و سیگنال مدوله شده با LSSB را رسم کنید.

۲. طیف فرکانسی m(t) و سیگنال مدوله شده را رسم کنید.

۳. سیگنال را دمدوله و در حوزه زمان و فرکانس رسم کنید.(دمدولاسیون آن به صورت DSB خواهد بود)

HW 5 . Answers

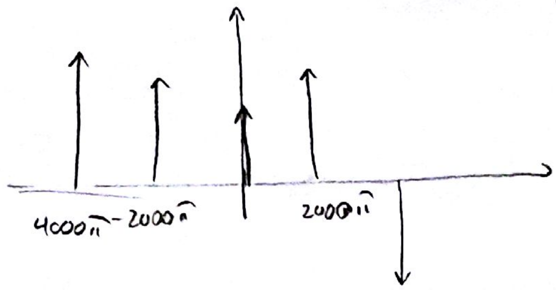
1)

a) $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$

Nyquist rate $= 2 \times 4000\pi$

$= 8000\pi$

$\overset{F.T.}{\longleftrightarrow}$

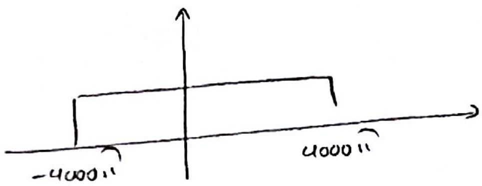


b) $\dfrac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$

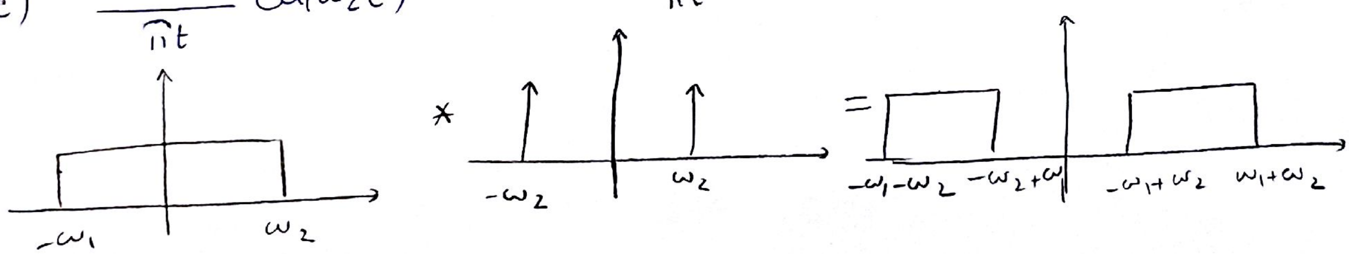
Nyquist rate $= 2 \times 4000\pi$

$= 8000\pi$

$\overset{F.T.}{\longleftrightarrow}$

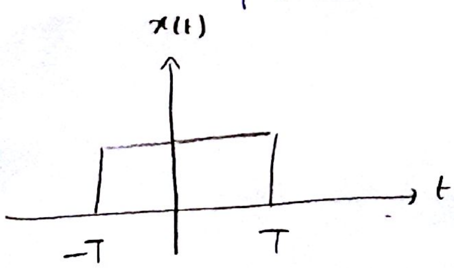


c) $\dfrac{\sin(\omega_1 t)}{\pi t} \cos(\omega_2 t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F\left\{ \dfrac{\sin(\omega_1 t)}{\pi t} \right\} * F\{\cos(\omega_2 t)\}$



Nyquist rate $= 2 \times (\omega_1 + \omega_2)$

d) $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } |t| < T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases}$

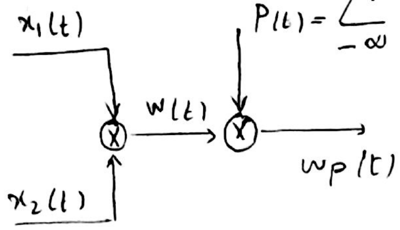


$\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \dfrac{2\sin(\omega t)}{\omega}$

بازه فرکانسی نامحدود است

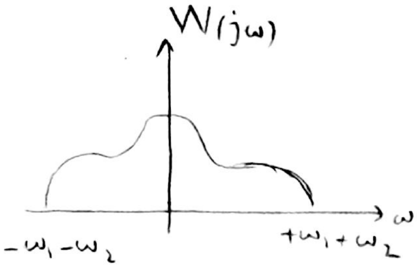
2)

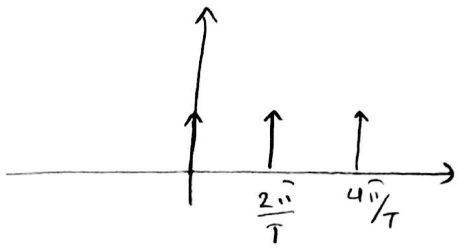
$P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$



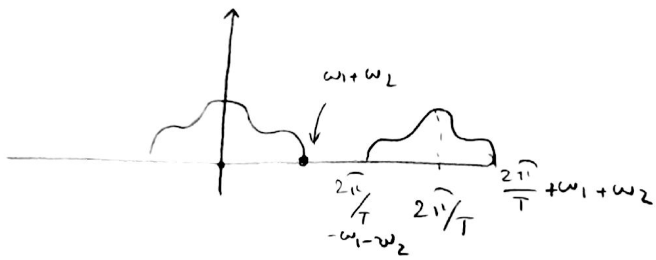
$W_p(j\omega) = P(j\omega) * W(j\omega)$

$w(t) = x_1(t) \times x_2(t) \Rightarrow W(j\omega) = X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$





$\Rightarrow$



$\omega_1 + \omega_2 \leqslant \frac{2\pi}{T} - (\omega_1 + \omega_2)$

$2(\omega_1 + \omega_2) \leqslant \frac{2\pi}{T}$

$T_{max} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$

---

3) a) $(-1)^n + \cos^2\left(\frac{\pi}{5} n + \pi/4\right)$ $\quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ $\quad N = \frac{2\pi}{\pi/5} = 10$

$\Rightarrow x[n] = (-1)^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{5} n + \frac{\pi}{2}\right)$

$X = e^{j\pi n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{5} n + \pi/2\right)} + e^{-j\left(2\pi/5\, n + \pi/2\right)}\right)$

$= e^{5j\frac{2\pi}{10} n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{j\pi/2} e^{2\times\frac{2\pi}{10} j n} + e^{-j\pi/2} e^{-2j\frac{2\pi}{10} n}\right)$

$a_0 = 1/2$, $a_5 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2} j$, $a_{-2} = -\frac{1}{2} j$

Generated by CamScanner

b) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{4\delta[n-4m] + 8\delta[n-1-4m]\}$

$= \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 4\delta[n-4m]}_{b_k} + \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 8\delta[n-1-4m]\}}_{c_k}$

$b_k = \frac{4}{N} = \frac{4}{4}$, $c_k = \frac{8}{4} \times e^{-jk\frac{2\pi}{\cancel{4}\,2}}$

$a_k = b_k + c_k = 1 + 2e^{-jk\pi/2}$

c) $2 + 3\cos(2\pi/3\, n) + \sin(\pi/3\, n)$ $\quad N = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$

$= 2 + \frac{3}{2}\left(e^{2\times\frac{2\pi}{6}jn} + e^{-2\times 2\pi/6\, jn}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{6}n} - e^{-j\frac{2\pi}{6}n}\right)$

$a_0 = 2$, $a_2 = 3/2$, $a_{-2} = 3/2$, $a_1 = \frac{1}{2j}$, $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$

d) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta[n-5m]}_{b_k} + \underbrace{2\delta[n-5m-1]}_{c_k} + \underbrace{4\delta[n-5m-2]}_{d_k}$

$b_k = \frac{1}{N} = \frac{1}{5}$ $\quad c_k = 2\times\frac{1}{5}\times e^{-jk\frac{2\pi}{5}}$ $\quad d_k = 4\times\frac{1}{5}\, e^{-jk\frac{2\pi}{5}\times 2}$

$x[n] \longleftrightarrow a_k = b_k + c_k + d_k = \frac{1}{5}\left(1 + 2e^{-jk\frac{2\pi}{5}} + \frac{4}{\cancel{7}}e^{-jk\frac{4\pi}{5}}\right)$

e) $N = 8$ $\quad a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{8}n}$

$a_0 = \frac{1}{8}(5+4+3+2+1+2+3+4) = 3$

Generated by CamScanner

4)

$x[n]$ real and odd $\Rightarrow$ a_k purely img. and odd

$a_0 = 0$

$a_{11} = a_6 = a_1 = -a_{-1} \Rightarrow a_{-1} = -j$

$a_{13} = a_8 = a_3 = -a_{-3} \Rightarrow a_{-3} = -3j$

$a_{17} = a_{12} = a_7 = a_2 = -a_{-2} \Rightarrow a_{-2} = -j/2$

---

5)

a) $\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]\, x[n+l-r]$

$= N a_k \times e^{jk\frac{2\pi}{N}l} a_k = N a_k^2 \, e^{jk\frac{2\pi}{N}l}$

b) $-x[n] + x[n+1] + x[n-2]$

$a_k' = \left(-1 + e^{jk\frac{2\pi}{N}} + e^{-j\times 2k\frac{2\pi}{N}}\right) a_k$

c) $x^2[n]$

$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l a_{k-l}$

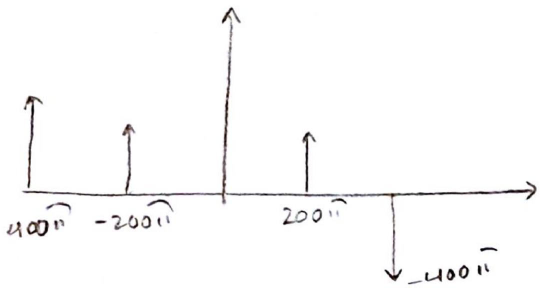
Generated by CamScanner

6) $w(t) = g(t)\sin(400\pi t)$

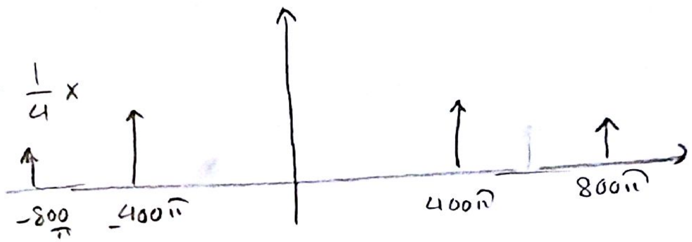
$$w(t) = x(t)\sin^2(400\pi t) = x(t)\left(\frac{1-\cos(800\pi t)}{2}\right)$$

$$= \frac{x(t)}{2} - \frac{x(t)\cos(800\pi t)}{2}$$

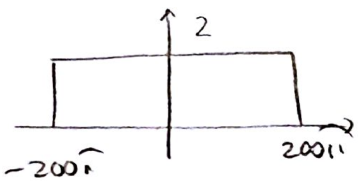
$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{2} - \frac{1}{4}\left(X(j\omega+800\pi) + X(j\omega-800\pi)\right)$$



$-\frac{1}{4}X$



فلتر :



$\Rightarrow$

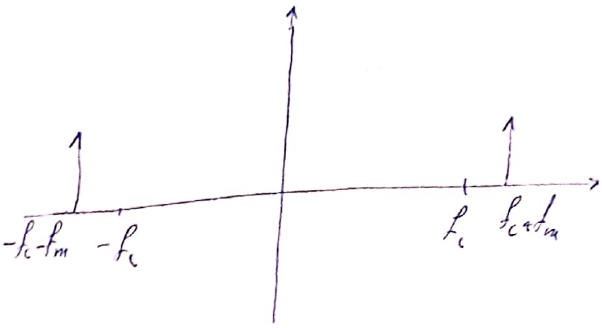
$\cos(200\pi t)$

7: SSB-AM

$m(t) = \cos 2\pi f_m t \longrightarrow \hat{m}(t) = \sin 2\pi f_m t$

$\Rightarrow u_u(t) = A_c \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_c t - A_c \sin 2\pi f_m t \sin 2\pi f_c t$

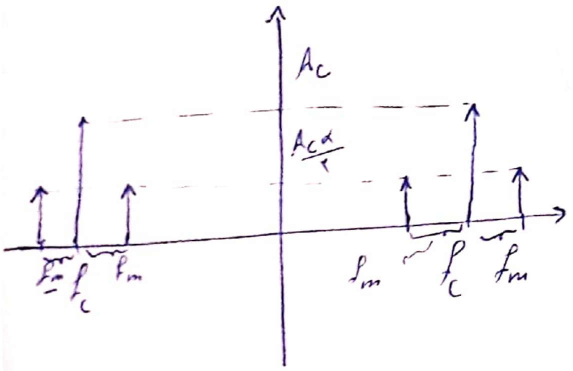
$= A_c \cos 2\pi (f_c + f_m) t$



DSB-AM:

$u(t) = A_c (1 + \alpha \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t$

$= A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \alpha}{2} \cos(2\pi (f_c - f_m) t) + \frac{A_c \alpha}{2} (\cos 2\pi (f_c + f_m) t)$



8.

1) $u_1(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)$

$$= 10\left(\cos 2\pi 1000 t + 2\sin(2\pi 1000 t)\right) \cos 2\pi f_c t$$

$$+ 10\underbrace{\left(\sin 2\pi 1000 t - 2\cos(2\pi 1000 t)\right)}_{\hat{m}(t)} \sin 2\pi f_c t$$

$$= 10\cos(2\pi(f-1000)t) - 20\sin(2\pi(f_c-1000)t)$$

2) $U_l(f) = 5(\delta(f-f_c+1000) + \delta(f+f_c-1000))$

$$+ 10j(\delta(f-f_c+1000) - \delta(f+f_c-1000))$$

$$= (5+10j)\,\delta(f-f_c+1000) + (5-10j)\,\delta(f+f_c-1000)$$

$$\Rightarrow |U_l(f)| = \sqrt{125}\,(\delta(f-f_c+1000) + \delta(f+f_c-1000))$$

Scanned with CamScanner

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

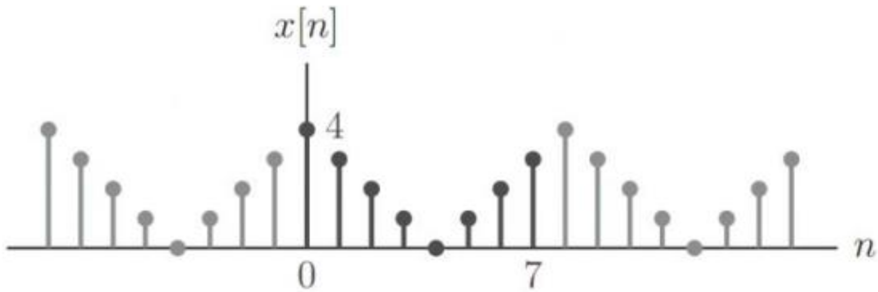
تمرین سری ششم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل ششم – تبدیل فوریه سیگنال های گسسته زمان)

توضیحات:

- مهلت تحویل تا ساعت ۲۳:۵۵ روز ۱۴۰۰/۱۰/۱۷ در نظر گرفته شده است و امکان تمدید وجود ندارد لذا با توجه به حجم تمرین، برنامه ریزی مناسبی انجام دهید.
- پاسخ بخش تئوری در یک فایل PDF با نام و شماره دانشجویی خود در یک فایل ZIP با نام HW6_StudentNumber.zip در سایت درس بارگذاری کنید.
- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هر گونه تقلب، نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- در صورت داشتن هر گونه اشکال در تمارین می‌توانید با aref78.m@gmail.com و fatemeh.vpasha@gmail.com در ارتباط باشید.

۱. ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را بدست آورید.



a)

b) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \cos(\frac{\pi}{4}n)$

۲. فرض کنید تبدیل فوریه سیگنال x[n] برابر $X(e^{j\omega})$ است. تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را با استفاده از خواص تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته زمان بدست آورید.

a) $x_1[n] = x[n - n_0] + x[n_1 - n]$

b) $x_2[n] = 3n\, x[n]$

c) $x_3[n] = (n - n_1)^2 x[n]$

۳. تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته زمان زیر را بدست آورید.

a) $x[n] = 6 + \sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{1}{2}\right)$

b) $x[n] = \frac{3\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\pi n}$

c) $x[n] = u[n] + u[n-7]$

d) $x[n] = (n+1)\, a^n\, u[n]$

۴. به کمک معادله، تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را در یک تناوب رسم کنید.

a) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$
b) $x[n] = \delta[n+2] - \delta[n-2]$

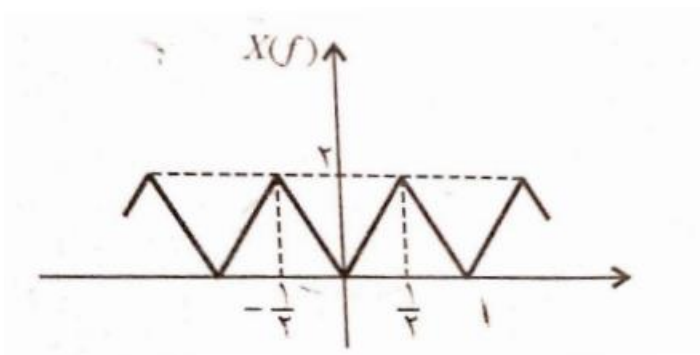
۵. سیگنال گسسته زمان متناوب x[n] یک سیگنال حقیقی است که N=5. ضرایب غیر صفر سری فوریه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$a_0 = 2, a_2 = a_{-2} = 2e^{\frac{j\pi}{6}}, a_4 = a_{-4} = e^{\frac{j\pi}{3}}$$

سیگنال x[n] را به فرم زیر تبدیل کنید.

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k)$$

۶. تبدیل فوریه سیگنال x[n] مطابق شکل زیر داده شده است.



انرژی سیگنال x[n] را در زمان‌های مثبت بدست آورید (حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} |x[n]|^2$)

۷. با استفاده از معادله، عکس تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ را پیدا کنید که

$$\triangleleft X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{3\omega}{2} \qquad \text{و} \qquad \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases}1, & 0\le|\omega|<\frac{\pi}{4}\\ 0, & \frac{\pi}{4}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

با استفاده از نتیجه بدست آمده، مقادیری از n را بیابید به طوری که x[n]=0

۸. یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $(|\alpha|<1)$ $\qquad h[n]=\alpha^n u[n]$ را در نظر بگیرید. پاسخ سیستم به ازای ورودی $x[n]=\cos(\frac{3\pi n}{5})$ را بدست آورید.

موفق باشید

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

پاسخ تمرین درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل ششم – تبدیل فوریه سیگنال های گسسته زمان)

.۱

a) $N = 8 \rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{4}n} \rightarrow \text{ضرایب} = \frac{1}{8}[4 + 3^{-jk\frac{\pi}{4}} + \cdots + 3e^{-jk\frac{7\pi}{4}}]$$

b) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

در این قسمت دوره تناوب sin برابر با ۱۲ است و تناوب cos برابر ۸ است. دوره تناوب مشترک به اندازه ک.م.م این دو عدد به اندازه ۲۴ می‌شود.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) = \frac{e^{j\frac{\pi}{6}n} - e^{-j\frac{\pi}{6}n}}{2j}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2}$$

$$x[n] = \frac{e^{j\frac{\pi}{6}n} - e^{-j\frac{\pi}{6}n}}{2j} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2} = \sum_{k=<24>} a_k e^{jk\frac{\pi}{12}n}$$

$$\rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = 2 \\ -\frac{1}{2j} & k = -2 \\ \frac{1}{2} & k = \pm 3 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

.۲

a) $x_1[n] = x[n - n_0] + x[n_1 - n]$

در این قسمت ما به صورت فرمولی در خواص تبدیل فوریه داریم

$$x[n - n_0] \dashrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

همچنین در خواص داریم:

$$x[-n] \dashrightarrow X(e^{j\omega})$$

پس تبدیل فوریه $x_1[n]$ می‌شود:

$$e^{-j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right) + e^{j\omega n_1}X(e^{j\omega})$$

b) $x_2[n] = 3nx[n]$

در فرمول ها داریم که فرمول ها داریم که

$$nx[n] = j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

که عدد ۳ نیز تنها یک ضریب است و در آن ضرب می‌شود. پس تبدیل فوریه $x_2[n]$ برابر می‌شود با:

$$3\,j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

c) $x_3[n] = (n - n_1)^2 x[n]$

طبق خواص تبدیل فوریه داریم

$$nx[n] = j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

همچنین اگر یکبار دیگر مشتق بگیریم، داریم:

$$n^2x[n] = j^2\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2} = -\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2}$$

حال $x_3[n]$ را باز می‌کنیم.

$$(n - n_1)^2x[n] = n^2x[n] + n_1^2x[n] - 2n_1nx[n]$$

تبدیل فوریه عبارت بالا برابر است با:

$$-\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2} + n_1^2X(e^{j\omega}) - 2n_1j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

---

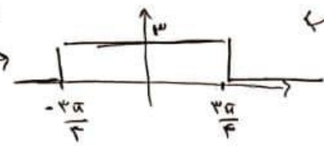
a) $x[n] = 6 + \sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{1}{4}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{4} \rightarrow N = 8$

$$x[n] = 6 + \frac{1}{2j}\left(e^{j(\frac{\pi}{4}n + \frac{1}{4})} - e^{-j(\frac{\pi}{4}n+\frac{1}{4})}\right) \rightarrow \begin{cases} a_0 = 6 = a_8 = \cdots \\ a_1 = \frac{1}{2j} e^{j\frac{1}{4}} = a_9 = \cdots \\ a_{-1} = \frac{-1}{2j} e^{-j\frac{1}{4}} = a_7 = \cdots \end{cases}$$

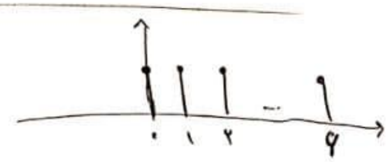
---

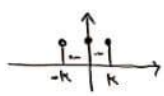
b) $x[n] = \dfrac{3\sin(\frac{3\pi}{4}n)}{\pi n}$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \begin{cases} 0 & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 1 & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow}$ 

---

c) $x[n] = u[n] + u[n-7] =$ 

$y[n] =$  $\overset{FT}{\longleftrightarrow} \dfrac{\sin(\frac{2k+1}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$ همچنین می‌دانیم

$\rightarrow$ انتقال زمانی $\rightarrow x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega 3} \dfrac{\sin(\frac{7}{2}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

---

d) $x[n] = (n+1)a^n u[n]$

می‌دانیم $a^n u[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

و می‌دانیم $n x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} j\dfrac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$

$$x[n] = \underbrace{n a^n u[n]}_{y[n]} + a^n u[n]$$

$$y[n] \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right] = \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

$$\rightarrow x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

.۴

حل:

(الف) فرض کنید $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$. با استفاده از معادله آنالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹).

تبدیل فوریه $(e^{j\omega})$ برای این سیگنال عبارتست از:

$$x(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jn}$$
$$=e^{-j\omega}+e^{j\omega}=2\cos\omega$$

(ب) فرض کنید $x[n]=\delta[n+2]-\delta[n-2]$. با استفاده از معادله آنـالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹)،

تبدیل فوریه $x(e^{j\omega})$ این سیگنال برابر است با:

$$x(c^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$
$$=e^{2j\omega}-e^{-2j\omega}=2j\sin(2\omega)$$

.۵

$$\begin{aligned}
x[n] &= a_0+a_2e^{j2(2\pi/N)n}+a_{-2}e^{-j2(2\pi/N)n}+a_4e^{j4(2\pi/N)n}+a_{-4}e^{-j4(2\pi/N)n}\\
&= 1+e^{j(\pi/4)}e^{j2(2\pi/5)n}+e^{-j(\pi/4)}e^{-2j(2\pi/5)n}\\
&\quad +2e^{j(\pi/3)}e^{j4(2\pi/N)n}+2e^{-j(\pi/3)}a_{-4}e^{-j4(2\pi/N)n}\\
&= 1+2\cos(\frac{4\pi}{5}n+\frac{\pi}{4})+4\cos(\frac{8\pi}{5}n+\frac{\pi}{3})\\
&= 1+2\sin(\frac{4\pi}{5}n+\frac{3\pi}{4})+4\sin(\frac{8\pi}{5}n+\frac{5\pi}{6})
\end{aligned}$$

۶.

رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\oint_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$$

شکل سیگنال زوج است پس می‌توان بجای یک بازه 2π از 0 تا π انتگرال گرفت

ونتیجه را در 2 ضرب کرد. معادله خط در بازه 0 تا π نیز $\frac{2}{\pi}\omega$ است.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 2\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{2}{\pi}\omega\right)^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{3\pi^2}\omega^3\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\times\frac{4}{3\pi^2}\times\pi^3 = \frac{4}{3}$$

حال چون $x[n]$ زوج وحقیقی است، پس $X(e^{j\omega})$ نیز زوج وحقیقی است (وبرعکس)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]|^2 + |x[0]|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |x[n]|^2 = |x[0]|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\oint_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega \xrightarrow{n=0} x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})\times 1 \, d\omega = \frac{1}{2\pi}\times 2\times\pi = 1$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x[n]|^2 = \left(\frac{4}{3} - 1\right)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

.۷

از اطلاعات داده شده:

$$\begin{aligned}x[n] &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi} \left|x\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\circ\{x(e^{j\omega})\}}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi/4}^{\pi} e^{-3/2\,\omega}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{4}\left(n-3/2\right)\right\}}{\pi\left(n-3/2\right)}\end{aligned}$$

سیگنال $x[n]$ هنگامیکه $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)$ یک ضریب غیرصفر π باشد و یا هنگامیکه $|n| \to \infty$، صفر خواهد بود. مقدار $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)$ هرگز مانند حالتی که آن یک ضریب غیرصفر π است باشد. بنابراین $x[n]=\circ$ تنها وقتی $n=\pm\infty$.

۸.

برای این سوال راه بدیهی استفاده از کانولوشن است ولی ضرب برای این ۲ سیگنال، محاسبه انتگرال مشکل است.

در سیستم‌های LTI با سیگنال‌های گسسته، رابطه زیر را داریم

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]}^{\,LTI} \longrightarrow y[n]$$

اگر $y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$ ، $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$ و $h[n] \xleftrightarrow{FT} H(e^{j\omega})$

$$b_k = a_k H(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r]\, e^{-j\omega r}$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{3\pi}{5} \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{10}{3} \rightarrow$$ با دوره تناوب ۱۰ متناوب است

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{3\pi}{5}n} + e^{-j\frac{3\pi}{5}n}\right) = \sum_{k=\langle 10\rangle} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{10}kn}$$

$$\rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm 3 = \pm 13 = \dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r]\, e^{-j\omega r} = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r e^{-j\omega r} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega}\right)^r$$

$$= \frac{1-\left(\alpha e^{-j\omega}\right)^{\infty}}{1-\alpha e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$\rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{2(1-\alpha e^{-j\omega})} & k = \pm 3, \pm 13, \dots \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

$$\rightarrow y[n] = \sum_{k=\langle 10\rangle} b_k\, e^{j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1}{2(1-\alpha e^{-j\omega})}\left(e^{-j\frac{3\pi}{5}n} + e^{j\frac{3\pi}{5}n}\right)$$

موفق باشید.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

پروژه پایانی درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

توضیحات:

- مهلت تحویل تا ساعت ۰۷:۵۵ روز ۱۴۰۰/۱۱/۸ در نظر گرفته شده است و امکان تمدید وجود ندارد لذا با توجه به حجم پروژه، برنامه ریزی مناسبی انجام دهید.
- فایل‌های پیاده‌سازی (با فرمت m و یا py) در کنار گزارش نهایی در یک فایل PDF با نام و شماره دانشجویی خود در یک فایل ZIP با نام HW6_StudentNumber.zip در سایت درس بارگذاری کنید.
- پروژه باید به صورت انفرادی نوشته شود و در صورت مشاهده هر گونه تقلب، نمره برای همه افراد صفر در نظر گرفته خواهد شد.
- پروژه امتیازی بوده و در صورت عدم انجام آن، نمره ای کسر نخواهد شد. نمره امتیازی پروژه تنها برای نمرات تمارین اعمال شده.
- در صورت داشتن هر گونه اشکال در پروژه می‌توانید با aref78.m@gmail.com در ارتباط باشید.

در این پروژه قصد داریم تا بیشتر با تبدیل فوریه و فیلترها و کاربرد آنها آشنا شویم.

فاز اول

در می‌خواهیم نویزهای یک فایل صوتی را از روی آن برداشته و به عبارتی سیگنال ها را دی-نویز کنیم. فایل phase1sample.wav در پوشه پروژه در اختیار شما قرار گرفته.

برای این پروژه نیاز دارید فایل را در متلب و یا پایتون باز کنید، سیگنال را استخراج کرده و عملیات زیر را بر روی آن انجام دهید.

- مشاهده و ترسیم سیگنال فایل صوتی (برای خوانایی بهتر نمودارها می‌توانید تنها بازه ۱ تا ۲۵۰ عدد ابتدایی سیگنال را رسم کنید)
- گرفتن تبدیل فوریه از سیگنال ورودی
- ترسیم تبدیل فوریه سیگنال : در این قسمت نیاز دارید تا تمام بازه فرکانسی را مشاهده کنید. نقاط فرکانسی دارای قدرت قویتر، مربوط به صدای اصلی بوده و فرکانس هایی که قدرت کمتری دارند، نویز هستند. پس از رسم نمودار سیگنال در حوزه فرکانسی، نویزها را شناسایی کرده و و گزارش شرح دهید.
- تمام نویزها را فیلتر کنید. برای این قسمت بایستی نقاطی که مربوط به صدای اصلی بوده را نگه داشته و بقیه را ۰ قرار دهید. پیدا کردن نقطه مرزی قدرت برای تفکیک نویز از فرکانس های اصلی، از نقاط مهم پروژه بوده و بایستی با آزمون و خطا نقطه بهتر را پیدا کنید.
- سیگنال حوزه فرکانسی جدید را ترسیم کنید و با سیگنال قبلی مقایسه کنید.
- با استفاده از تبدیل فوریه معکوس، سیگنال دی-نویز شده را در حوزه زمان بدست آورده و نمودار آن را ترسیم کنید. برای مقایسه بهتر نیز با سیگنال ابتدایی (فایل ورودی) مقایسه کرده و عملکرد برنامه را بسنجید.

لازم به ذکر است که در رسم سیگنال های حوزه زمان، برای ترسیم بهتر سیگنال‌ها می‌توانید بازه را محدود کنید تا شکل سیگنال ها را بهتر متوجه شوید.

فاز دوم

برای این قسمت می‌خواهیم در پروسه ساخت یک equalizer ساده، با باند های فرکانسی آشنا شوید.

در این قسمت بایستی در یک تابع ۱۰ باند فرکانسی در محدوده شنوایی انسان بسازید. به طور مثال می‌توانید از محدوده های زیر استفاده کنید.

- Band 1: 20-50 Hz
- Band 2: 50-100 Hz
- Band 3: 100-200 Hz
- Band 4: 200-500 Hz
- Band 5: 500-1000 Hz
- Band 6: 1000-2000 Hz
- Band 7: 2000-4000 Hz
- Band 8: 4000-8000 Hz
- Band 9: 8000-12000 Hz
- Band 10: 12000-20000 Hz

سپس در این تابع، طبق ورودی هر کدام از باندهای فرکانسی را طبق عدد متناظر amplify می‌کنیم. به طور مثال ورودی تابع لیست [2,3,1,1,0.2,0.2,0.1,0.1,0.1,0.1] است و طبق این ورودی باند اول را ۲ برابر، باند دوم را ۳ برابر، باند سوم و چهارم را ۱ برابر و ... می‌کنیم. در انتها تابع باید سیگنال فرکانسی را برگرداند.

برای تست و آشنایی با این باندهای فرکانسی، فایل phase2sample.wav را در پوشه پروژه بردارید و سیگنال آن را استخراج کنید. سپس با تبدیل فوریه، فرکانس را به حوزه فرکانسی تبدیل کرده، توسط کد فاز اول نویز را برداشته و طبق تابع نوشته شده، سیگنال را تغییر دهید. سپس در انتها سیگنال خروجی را با تبدیل فوریه معکوس به حوزه زمان برگردانده و فایل با فرمت wav خروجی دهید. حال می‌توانید دو فایل ورودی و خروجی را گوش دهید و تفاوت را مشاهده کنید.

برای این فاز لازم است ۲ بار با ورودی‌های متفاوت روی فایل تغییرات انجام دهید.

در ابتدا سیگنال را در حوزه فرکانس ترسیم کنید.

۱. برای قسمت اول برای ورودی تابع یک آرایه به طوری تهیه کنید که باندهای زیر ۱۲۰۰ را تقویت کرده و بقیه را تصعیف کند. فایل خروجی را چک کنید و نتیجه را شرح دهید.
۲. برای قسمت دوم آرایه را طوری انتخاب کنید که باندهای بالای ۲۰۰۰ را تقویت کند و بقیه را تضعیف کند. این‌گونه خروجی را چک کنید و نتایج را شرح دهید.

همچنین در فایل گزارش خود توضیح دهید که این مسئله باندهای فرکانسی و اکوالایز کردن چه تغییری بر روی سیگنال‌ها و فایل‌های صدا اعمال می‌کند.

لازم به ذکر است که نوشتن گزارش تمیز و خوانا و کامل حاوی جزئیات پیاده سازی و توضیحات، از نمره مهمی برخوردار است.

موفق باشید