دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# تمرین اول درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

## مهلت تحویل: ۹۹/۷/۲۷

- تمرینات به صورت انفرادی پاسخ داده شوند.
- فایل پاسخ با قالب «HW1_stdNumber.pdf» بارگذاری شود.
- در صورت وجود اشکال، از طریق ایمیل زیر با تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید:

signalsystem.fall2020@gmail.com

## بخش تئوری.

**سوال ۱-** انرژی کل و توان متوسط در بازه‌ی بینهایت سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

$(a)\ x_1(t) = e^{-4t}u(t)$

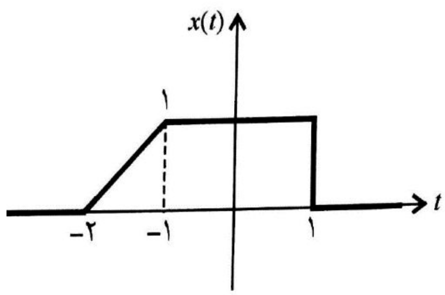
$(b)\ x_2(t) = \frac{1}{2}sin(\frac{3\pi}{4}t)$

$(c)\ x_3[n] = sin(n)u[n^2-9]$

$(d)\ x_4[n] = \frac{3}{2}cos(n^2)$

(برای قسمت d، تنها یک کران برای مقادیر خواسته شده بدست آورید.)

**سوال ۲-** فرض کنید سیگنال x(t) به شکل زیر باشد. سیگنال‌های خواسته شده را رسم کنید.




$(a)$ $x(2t-1)$

$(b)$ $x(-\frac{t}{2}+1)$

$(c)$ $x(\frac{6-t}{3})$

**سوال ۳-** در هر مورد ، بخش زوج $Ev\ \{x(t)\}$ و بخش فرد $Od\{x(t)\}$ سیگنال را بیابید.

$(a)\ x(t) = e^{-5t} sin(t) u(t)$

$(b)\ x(t) = e^{-3|t|} cos(t)$

$(c)\ x(t) = \Pi(t + \frac{1}{2})$

راهنمایی : می‌توانید از طریق رسم سیگنال جواب را بدست آورید.

$\prod(t) = rect(t) = unit\, pulse = u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2})$

**سوال ۴-** متناوب بودن سیگنال‌های زیر را بررسی کنید و در صورت متناوب بودن، دوره تناوب اصلی را به دست آورید.

$(a)\ x(t) = e^{j(2t+\frac{\pi}{10})}$

$(b)\ x(t) = sin^3(2t)$

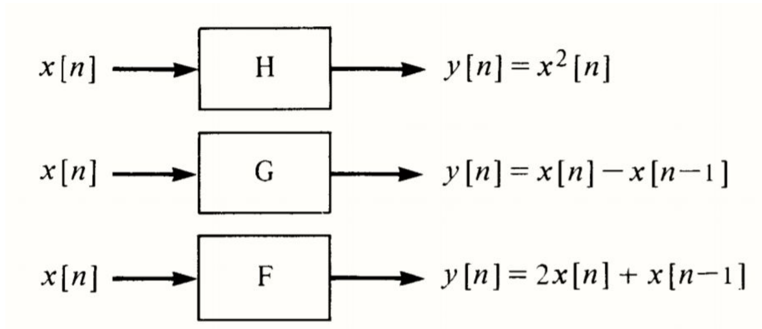
$(c)\ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|6t+n|}$

$(d)\ x[n] = 5cos(3n)$

$(e)\ x[n] = cos(\frac{3\pi n}{7} + 2)$

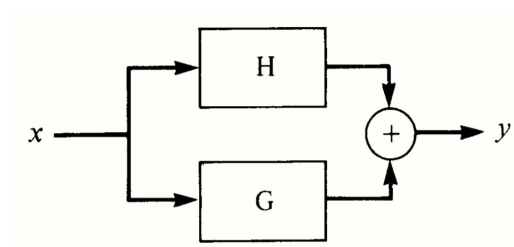
$(f)\ x[n] = 1 + \frac{2}{3}sin(\frac{5}{3}n)$

**سوال ۵-** سه سیستم زیر را در نظر بگیرید:

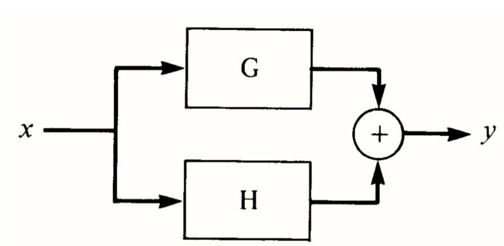



سیستم‌های شکل‌های 1 تا 6 با ترکیب موازی و سری سیستم های f, g و h تشکیل‌شده‌اند. با بیان خروجی $y[n]$ بر حسب ورودی $x[n]$ ، تعیین کنید که کدامیک از این سیستم‌ها معادل هستند.

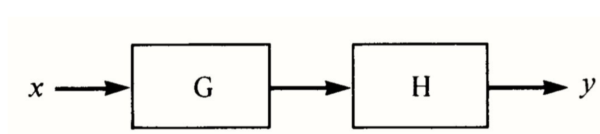
1)



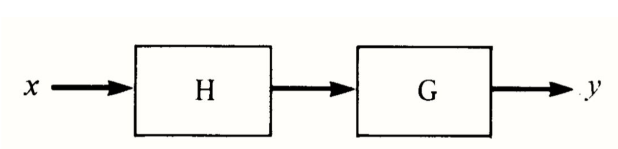

2)



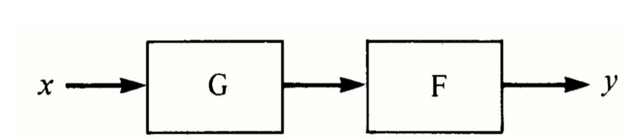

3)



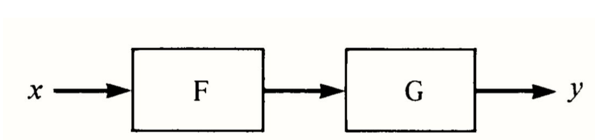

4)




5)




6)



**سوال ۶-** در سیستم‌های زیر خواص عمومی سیستم‌ها (خطی بودن، علّی بودن، پایداری، تغییر ناپذیری با زمان و حافظه‌دار بودن) را بررسی کنید.

$y_1[n] = x[n - n_0]$

$y_2[n] = x[-n]$

$y_3[n] = x[n] + 3u[n+1]$

$y_4[n] = e^{x[n]}$

$y_5[n] = nx[n]$

$y_6(t) = x(t-2) + x(2-t)$

$y_7(t) = x(t)cos(3t)$

$$y_8(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$$

$y_9(t) = x(\frac{t}{3})$

**سوال ۷-** سیستمی را با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ که به شکل زیر است در نظر بگیرید.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-nT)$$

الف) آیا این سیستم، یک سیستم خطی است؟

ب) آیا این سیستم تغییر پذیر با زمان است؟

پ) فرض کنیم سیگنال ورودی $x(t) = \cos(2\pi t)$ باشد:

خروجی را به ازای مقادیر $T = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{12}$ رسم کنید.

ت) قسمت «پ» را برای سیگنال ورودی $x(t) = e^t \cos(2\pi t)$ انجام دهید.

**سوال ۸-** معکوس پذیر بودن یا نبودن سیستم‌های زیر را بررسی نمایید.

$$(a)\ y[n] = cos(\frac{2\pi}{5}n)x[n-1]$$

$$(b)\ y(t) = \int_{t^2+t}^{+\infty} x(T-1)dT$$

## بخش پیاده‌سازی.

**سوال ۱-** توابع پیوسته زیر را در بازه‌ی $-3 < t < 3$ و اندازه‌ی گام ۰.۰۰۱ به کمک متلب و یا زبان پایتون رسم کنید.

$$x_1(t) = e^{-3t}$$

$$x_2(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$x_3(t) = e^{-3t}u(t) + 2sin(t+2)$$

$$x_4(t) = \begin{cases} e^{-t}(sin(t) + cos(t))u(t) & t > 1 \\ 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & t < -1 \end{cases}$$

**سوال ۲-** توابع گسسته زیر را در بازه‌ی $-۲۰ < t < ۲۰$ و اندازه‌ی گام ۱ به کمک متلب و یا زبان پایتون رسم کنید.

$$x_1[n] = u[n] - u[n-3] + u[n-5]$$

$$x_2[n] = 2cos(2\pi kn) \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$x_3[n] = 2cos(2kn) \quad (k = 1, 2, 3)$$

مطابق شکل های بدست آمده، متناوب بودن یا نبودن توابع بالا را مشخص کنید.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# پاسخ تمرین اول درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

۱-

پیوسته زمان

Year : ...... Month : ...... Day : ......

گسسته - زمان

(1)

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt \qquad \Big\{ \qquad E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

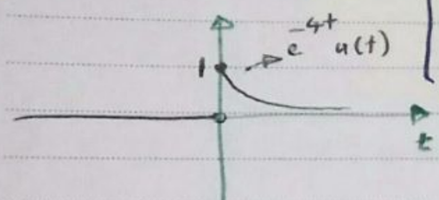
$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E_\infty \qquad \Big\{ \qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_\infty$$

(a) $x_1(t) = e^{-4t}u(t) \Longrightarrow$

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |e^{-4t}u(t)|^2\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-8t}\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{8}e^{-8t}\right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{1}{8}}{2T} = 0$$

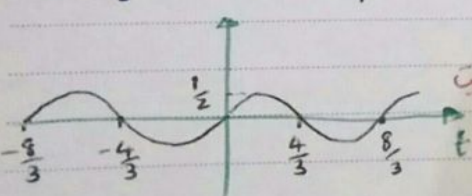



(b) $x_2(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \Longrightarrow$

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \left|\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)\right|^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}t\right) dt = \infty$$

مقدار سیگنال نامنفی ← مساحت زیر نمودار مثبت ← بی‌نهایت




$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T} \int_{-T}^{T} \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}t\right) dt$$

$$\overset{*}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T} \int_{-T}^{T} \frac{1-\cos\left(\frac{6\pi}{4}t\right)}{2}\,dt$$

$$*: \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

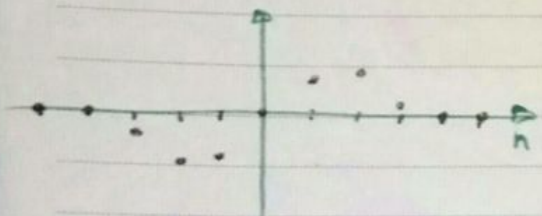
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T}\left[\frac{t}{2} - \frac{4}{6\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{4}t\right)\right]_{-T}^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T}(T) = \frac{1}{8}$$

SEPEHR

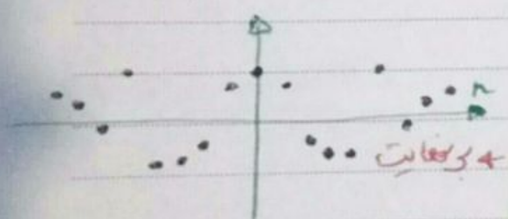
ادامه ①

$$(c)\ x_3[n] = \sin(n)\, u[9-n^2] \Rightarrow \begin{cases} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |\sin(n)\, u[9-n^2]|^2 \\ = \sum_{n=-3}^{3} |\sin(n)|^2 \simeq 3.1 \end{cases}$$



$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{3.1}{2N+1} = 0$$

$$(d)\ x_4[n] = \frac{3}{2}\cos(n^2) \Rightarrow \begin{cases} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left|\frac{3}{2}\cos(n^2)\right|^2 \\ = \frac{9}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos^2(n^2) = \infty \end{cases}$$



مقدار سیگنال نامنفی ← جمع نامتناهی مقادیر مثبت ← بی‌نهایت

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \frac{9}{4}\cos^2(n^2)$$

$$0 < \cos^2(n^2) \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \frac{9}{4}\cos^2(n^2) \leqslant \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{9}{4}\cos^2(n^2) \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \lim_{N\to\infty} (2N+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \frac{9}{4}\cos^2(n^2) \leqslant \frac{9}{4}$$

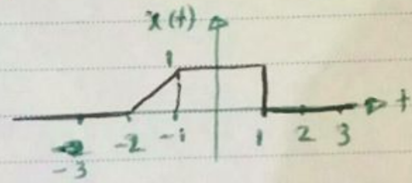
۲-

Year : ....... Month : ....... Day : .......

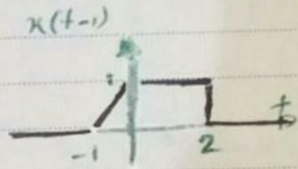
2

نکته: سیگنال را به صورت $x(\alpha t+\beta)$ می‌نویسیم. پس ابتدا به اندازه $\beta$، شیفت می‌دهیم و در ادامه به اندازه $\alpha$، انبساط/انقباض انجام می‌دهیم.

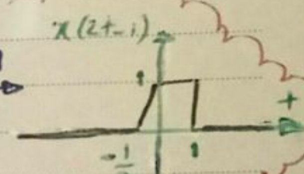
(اگر $\alpha$ منفی بود، یک بازتاب نیز در نهایت انجام می‌دهیم.)



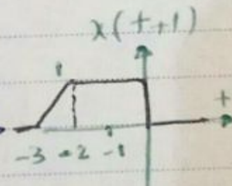

(a) $x(2t-1) \xrightarrow{\text{شیفت}}$



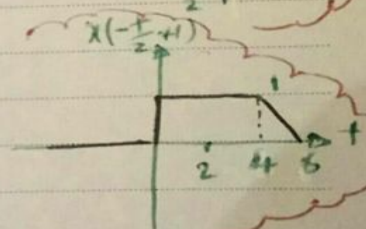

$\xrightarrow{\text{انقباض}}$



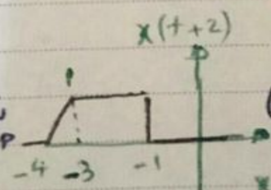

(b) $x(-\frac{t}{2}+1) \xrightarrow{\text{شیفت}}$



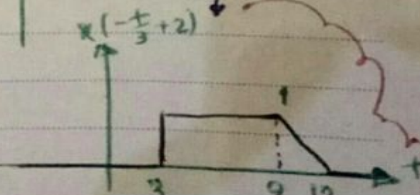

$\xrightarrow[\text{(و بازتاب)}]{\text{انبساط}}$




(c) $x\left(\frac{6-t}{3}\right) = x\left(-\frac{t}{3}+2\right) \xrightarrow{\text{شیفت}}$




انبساط (و بازتاب)



-٣

For each of the signals listed below, find the even and odd components $Ev\{x(t)\}$ and $Od\{x(t)\}$.

(a) $x(t) = e^{-5t}sin(t)u(t)$

$$x(t) = e^{-5t}sin(t)u(t)$$

$$x(-t) = e^{5t}sin(-t)u(-t) = -e^{5t}sin(t)u(-t)$$

$$Ev\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \Rightarrow Ev\{x(t)\} = \frac{e^{-5t}sin(t)u(t) - e^{5t}sin(t)u(-t)}{2}$$

$$Od\{x(t)\} = \frac{x(t)-x(-t)}{2} \Rightarrow Od\{x(t)\} = \frac{e^{-5t}sin(t)u(t) + e^{5t}sin(t)u(-t)}{2}$$

$$\Rightarrow Ev\{x(t)\} = \frac{sin(t)}{2}(e^{-5t}u(t) - e^{5t}u(-t))$$

$$\Rightarrow Od\{x(t)\} = \frac{sin(t)}{2}e^{-5|t|}$$

(b) $x(t) = e^{-3|t|}cos(t)$

$$x(t) = e^{-3|t|}cos(t)$$

$$x(-t) = e^{-3|-t|}cos(-t) = e^{-3|t|}cos(t) = x(t)$$

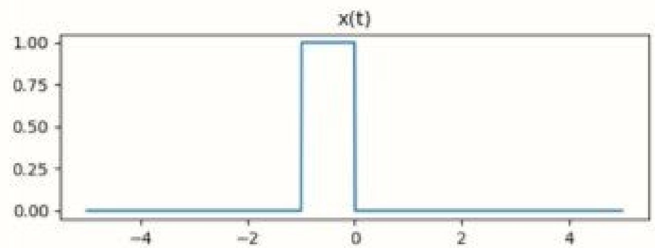
$$\Rightarrow Ev\{x(t)\} = x(t)$$

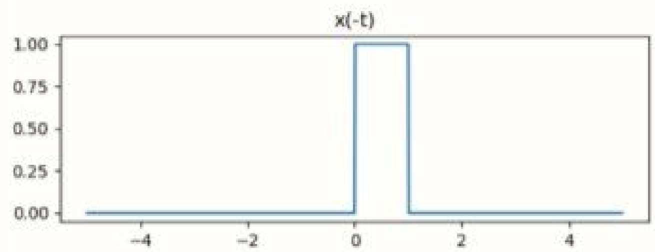
$$\Rightarrow Od\{x(t)\} = 0$$

(c) $x(t) = \Pi(t + \frac{1}{2})$, (Solve by sketching) Hint:

$$\Pi(t) = rect(t) = \text{unit pulse} = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$$

$$Ev\{x(t)\} = \begin{cases} 0.5, |x| < 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$




$$Od\{x(t)\} \begin{cases} 0.5, -1 < x < 0 \\ -0.5, 0 < x < 1 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

۴-

a)

$$x(t) = e^{j\left(2t+\frac{\pi}{10}\right)} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

b)

$$x(t) = \sin^3 2t \rightarrow$$

$$x(t+T) = \sin^3\big(2(t+T)\big) = \frac{1}{4}(3\sin(2t+2T) - \sin(6t+6T))$$

$$= \frac{3}{4}[(\sin 2t \cos 2T) + (\cos 2t \sin 2T)]$$

$$- \frac{1}{4}[\sin(6\mathrm{t})\cos(6\mathrm{T}) + \cos(6\mathrm{t})\sin(6\mathrm{T})] \rightarrow \text{if } 2T = 2\pi$$

$$\rightarrow x(t+T) = \frac{3}{4}(\sin 2t) - \frac{1}{4}(\sin 6T) = x(t) \rightarrow T = \pi.$$

c)

$$x(t+N) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} e^{-|6t+6N+n|} = \Sigma_{-\infty}^{\infty} e^{-|6t+n'|} \rightarrow 6N \in \mathbb{N} \rightarrow T_0 = \frac{1}{6}.$$

d)

$$x[n] = 5\cos(3n) \rightarrow x[n+N] = 5\cos(3n+3N)$$

$$= 5[\cos 3n \cos 3N - \sin 3n \sin 3N] \rightarrow \cos 3N = 1 \text{ and } \sin 3N = 0$$

$$\rightarrow 3N = 2k\pi \rightarrow N = \frac{2k\pi}{3} \notin \mathbb{N} \rightarrow x[n] \text{ is non-periodic.}$$

e)

$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi n}{7} + 2\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{7}} = \frac{14}{3} \rightarrow T = 3 \times \frac{14}{3} = 14.$$

f)

$$x[n] = 1 + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{5}{3}n\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{5}{3}} = \frac{6\pi}{5} \notin \mathbb{Q}. \rightarrow x[n] \text{ is non-periodic.}$$

۵-

**S3.5**

**(a)** $y[n] = x^2[n] + x[n] - x[n-1]$

**(b)** $y[n] = x^2[n] + x[n] - x[n-1]$

**(c)** $y[n] = \mathrm{H}[x[n] - x[n-1]]$
$= x^2[n] + x^2[n-1] - 2x[n]x[n-1]$

**(d)** $y[n] = \mathrm{G}[x^2[n]]$
$= x^2[n] - x^2[n-1]$



**(e)** $y[n] = \mathrm{F}[x[n] - x[n-1]]$
$= 2(x[n] - x[n-1]) + (x[n-1] - x[n-2])$
$y[n] = 2x[n] - x[n-1] - x[n-2]$

**(f)** $y[n] = \mathrm{G}[2x[n] + x[n-1]]$
$= 2x[n] + x[n-1] - 2x[n-1] - x[n-2]$
$= 2x[n] - x[n-1] - x[n-2]$

(a) and (b) are equivalent. (e) and (f) are equivalent.

-۶

1) $y[n] = x[n - n_0]$

حافظه‌دار هست، چون برای هر لحظه به زمان n0- آن بستگی دارد.

علی نیست لزوماً، چون بستگی به علامت n0 دارد .

پایدار است، زیرا:

$$|x[n]| < L_1 \to |x[n - n_0]| < L_1 \to y[n] < L_2.$$

تغییرناپذیر با زمان است. زیرا:

$$x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] \Rightarrow y_1[n] = x_1[n - n_0]$$
$$x_2[n] = x_1[n - n_1] \to y_2[n] = x_2[n - n_0] = x_1[n - n_0 - n_1]$$
$$y_1[n - n_1] = x_1[n - n_0 - n_1]$$
$$\Rightarrow y_2[n] = y_1[n - n_1]$$

خطی اســـت، زیرا هم خاصـــیت خطی دارد ($x_1[t] + x_2[t] \xrightarrow{T} y_1[t] + y_2[t]$) و هم خاصـــیت ضرب‌پذیری ($a\,x[t] \xrightarrow{T} ay[t]$).

2) $y[n] = x[-n]$

حافظه‌دار است، زیرا برای اعداد به قرینه آن احتیاج است.

غیرعلی است، زیرا برای اعداد منفی به اعداد مثبت احتیاج است.

پایدار است، چون برای ورودی محدود، خروجی، محدود است.

تغییرپذیر است، چون با شیف به سمت راست، خروجی به چپ شیفت پیدا می‌کند و از نظر ریاضی:

$$x_2[n] = x_1[n - n_0], x_1[n] \xrightarrow{T} y_1[n] \Rightarrow y_1[n] = x_1[-n]$$
$$y_2[n] = x_2[-n] = x_1[-n - n_0]$$
$$y_1[n - n_0] = x_1[-n + n_0] \neq y_2[n]$$

خطی است، زیرا دو شرط را دارد.

3) $y[n] = x[n] + 3u[n+1]$

حافظه‌دار نیست، زیرا در هرلحظه به مقدار سیگنال ایکس ارتباط دارد و تابع پله عددی جداست و ورودی نیست.

علی است، به صورت کلی هر تابع بدون حافظه‌ای، علی است.

پایدار، زیرا اگر خود ورودی محدود باشد، تابع پله نیز محدود است، پس جمعشان نیز محدود است.

تغییر پذیر است. چون اگر شیفت دهیم از اعداد منفی به مثبت، مقدار تابع پله، تاثیرخواهد گذاشت.

خطی اســـت، اگر چه وجود مقدار اضـــافه دو خاصـــیت را از بین می‌برد، اما میتوان این ســـیســـتم‌ها را incrementally linear است.

4) $y[n] = e^{x[n]}$

حافظه‌دار نیست، زیرا در هرلحظه به مقدار سیگنال ایکس در همان لحظه ارتباط دارد.

علی است، به صورت کلی هر تابع بدون حافظه‌ای، علی است.

پایدار، زیرا: $|x(t)| < L_1 \rightarrow -L_1 < x(t) < L_1 \rightarrow e^{-L_1} < y(t) < e^{L_1} \rightarrow |y(t)| < L_2$.

تغییر ناپذیر است.

خطی نیست، زیرا:

$$e^{x_1[n]+x_2[n]} = e^{x_1[n]}e^{x_2[n]} \neq y_1[n] + y_2[n]$$

5) $y[n] = n\,x[n]$

حافظه‌دار نیست، زیرا در هرلحظه به مقدار سیگنال ایکس در همان لحظه ارتباط دارد.

علی است، به صورت کلی هر تابع بدون حافظه‌ای، علی است.

ناپایدار، زیرا:

$$x[n] = 1 \rightarrow y[n] = n.$$

تغییرپذیر است، زیرا:

$$x_2[n] = x_1[n-n_0], y_1[n] = nx_1[n] \rightarrow y_1[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0]$$
$$y_2[n] = nx_1[n-n_0] \neq y_1[n-n_0]$$

خطی است، زیرا دو شرط را دارد.

6) $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$

حافظه‌دار است، زیرا به لحظات قبل و بعد ارتباط دارد بنابراین علی هم نیست.

پایدار، زیرا برای دامنه‌های محدود، خروجی محدود است.

تغییرپذیر است، زیرا:

$$y_1(t) = x_1(t-n_0-2) + x_1(2-t+n_0) \neq x_1(t-2-n_0) + x_1(2-t-n_0)$$

خطی است.

7) $y(t) = x(t)\cos(3t)$

بدون حافظه است، چون به زمان دیگری به غیر از زمان حال بستگی ندارد (کوسینوس ضریب است) و طبعاً علی است.

این سیستم، پایدار است، زیرا:

$$\text{if } |x(t)| < L_1 \xrightarrow{(\cos 3t)<1} |y(t)| < L_2.$$

تغییر پذیر است، زیرا مقدار شیفت به دوره تناوب کوسینوس ارتباط دارد.

خطی است زیرا دو شرط مقیاس‌پذیری و جمع‌پذیری را دارد.

8) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\iota)\, d\iota$

حافظه‌دار است، زیرا در هر لحظه به مقدار لحظات منفی بینهایت تا 2t بستگی دارد، و برای نقطه $t = 1$، به مقدار $x(2)$ احتیاج است، پس علی نیست.

پایدار نیست، زیرا محدوده پایین انتگرال باعث می‌شود برای مقادیر محدود سیگنال ورودی، مقادیر نامحدود تولید شود.

تغییرپذیر با زمان است، زیرا:

$$x_2(t) = x_1(t-t_0), y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\iota)\, d\iota, y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2t-2t_0} x_1(\iota - t_0)\, d\iota$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\iota)\, d\iota = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\iota - t_0)\, d\iota.$$

$$y_2(t) \neq y_1(t - t_0).$$

خطی است، زیرا قابلیت جمع‌پذیری و مقیاس‌پذیری برای انتگرال تعریف می‌شود.

8) $y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$

حافظه‌دار است. برای نقطه $t = -3$، باید به مقدار سیگنال ورودی در $x(-1)$ احتیاج است که پس یعنی علی نیست. این سیستم، فقط دامنه را سه برابر می‌کند، پس پایدار است.

تغییرپذیر است، زیرا:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0), y_1(t - t_0) = x\left(\frac{(t - t_0)}{3}\right),$$

$$y_2(t) = x_2\left(\frac{t}{3}\right) = x_1\left(\frac{t - 3t_0}{3}\right). \Rightarrow y_1(t - t_0) \neq y_2(t).$$

خطی است، زیرا خواص خطی بودن را دارد.

| Function | حافظه‌دار | علی | پایدار | تغییرپذیر | خطی |
|---|---|---|---|---|---|
| $y[n] = x[n - n_0]$ | بلی | خیر | بلی | خیر | بلی |
| $y[n] = x[-n]$ | بلی | خیر | بلی | بلی | بلی |
| $y[n] = x[n] + 3u[n + 1]$ | خیر | بلی | بلی | بلی | بلی |
| $y[n] = e^{x[n]}$ | خیر | بلی | بلی | خیر | خیر |
| $y[n] = n\, x[n]$ | خیر | بلی | خیر | بلی | بلی |
| $y(t) = x(t - 2) + x(2 - t)$ | بلی | خیر | بلی | بلی | بلی |
| $y(t) = x(t)\cos(3t)$ | خیر | بلی | بلی | بلی | بلی |
| $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\iota)\, d\iota$ | بلی | خیر | خیر | بلی | بلی |
| $y(t) = x\left(\frac{t}{3}\right)$ | بلی | خیر | بلی | بله | بله |

**۷-**

۷- الف)

$$x_3(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$$

$$\Rightarrow y_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_3(t)\,\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big(a x_1(t) + b x_2(t)\big)\,\delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a x_1(t)\,\delta(t-nT) + b x_2(t)\,\delta(t-nT)$$

$$= a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,\delta(t-nT) + b \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(t)\,\delta(t-nT)$$

$$= a\,y_1(t) + b\,y_2(t) \Rightarrow \text{Linear} ✓$$

ب)

$$x_2(t) = x_1(t-t_0)$$

$$\Rightarrow y_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t-t_0)\,\delta(t-nT)$$

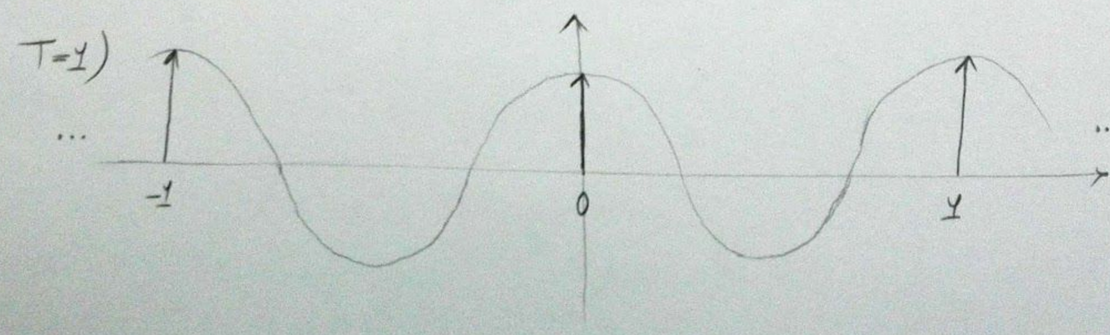
و

$$y_1(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(t-t_0)\,\delta(t-t_0-nT)$$

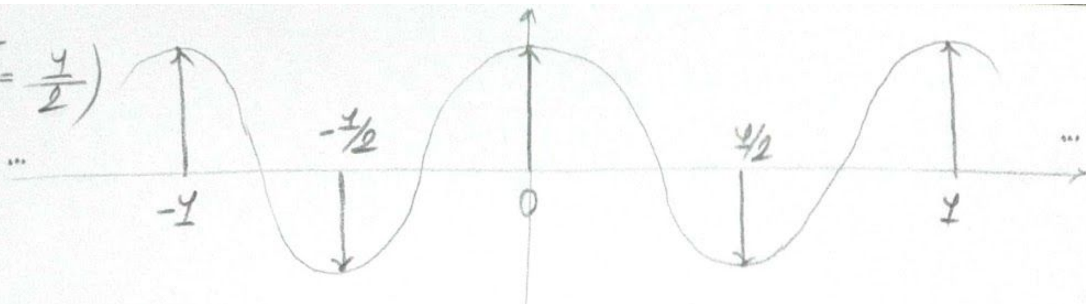
$$\xRightarrow{\text{به طور کلی}} y_2(t) \neq y_1(t-t_0) \Rightarrow \text{Time-Variant} ✓$$

پ)

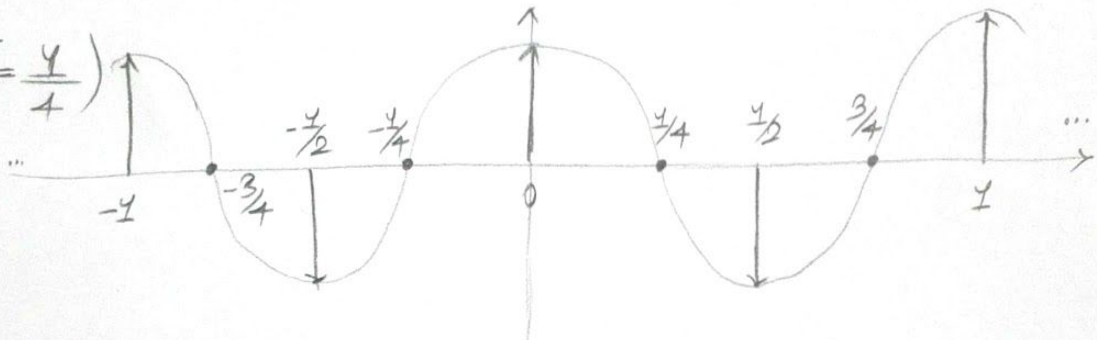
$$x(t) = \cos(2\pi t)$$



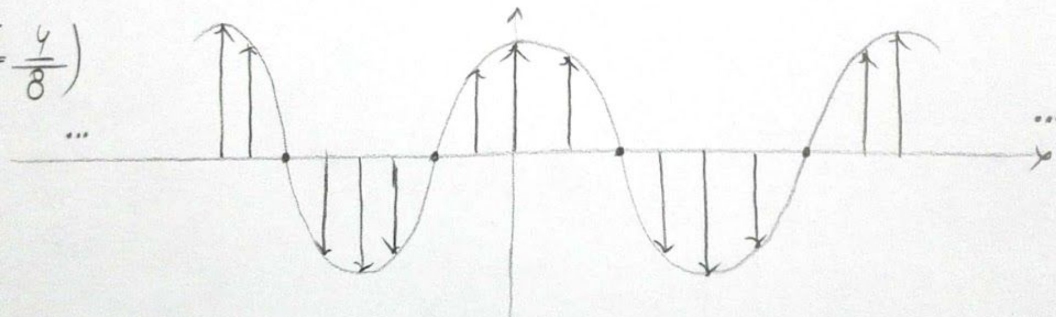
$T = \frac{1}{2})$



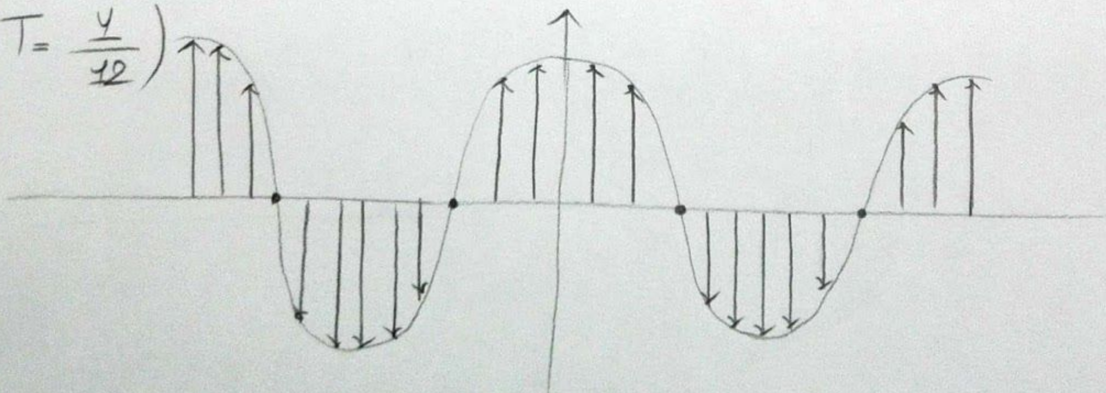

$T = \frac{1}{4})$




$T = \frac{1}{8})$

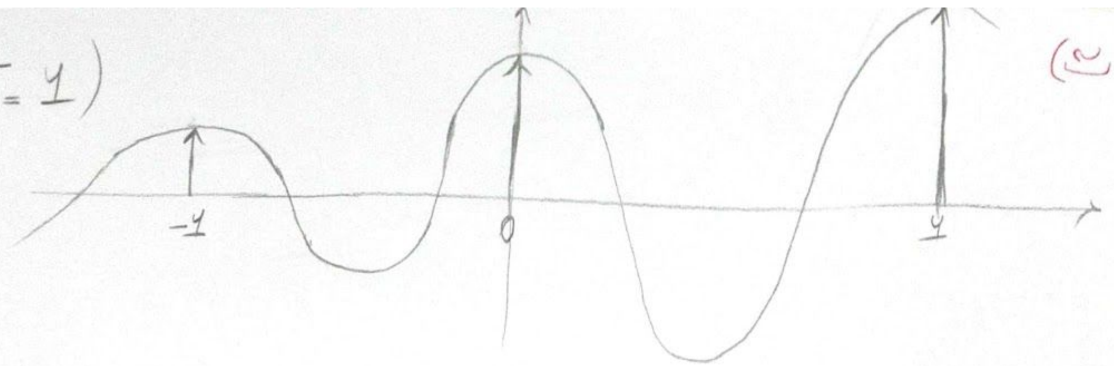


$T = \frac{1}{12})$

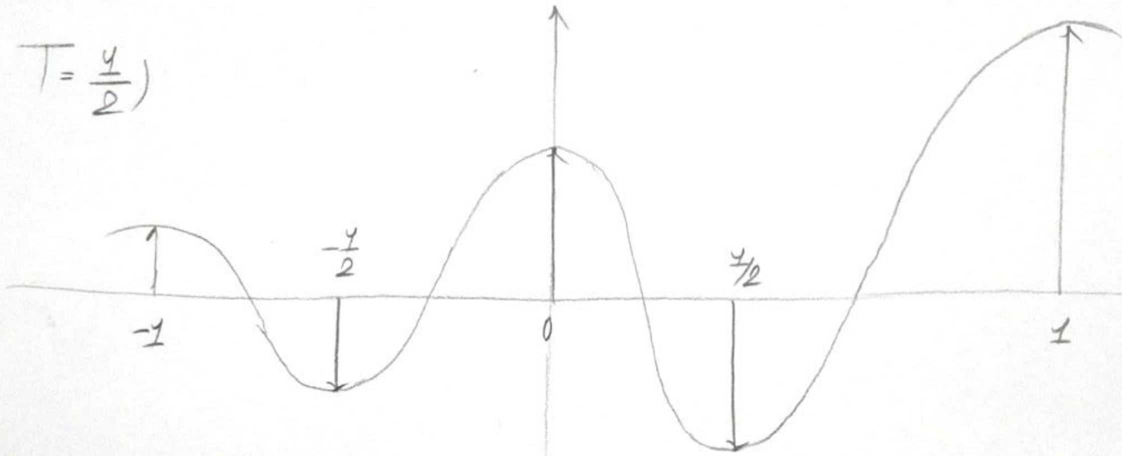


(* As we can see, the frequency is getting lower)

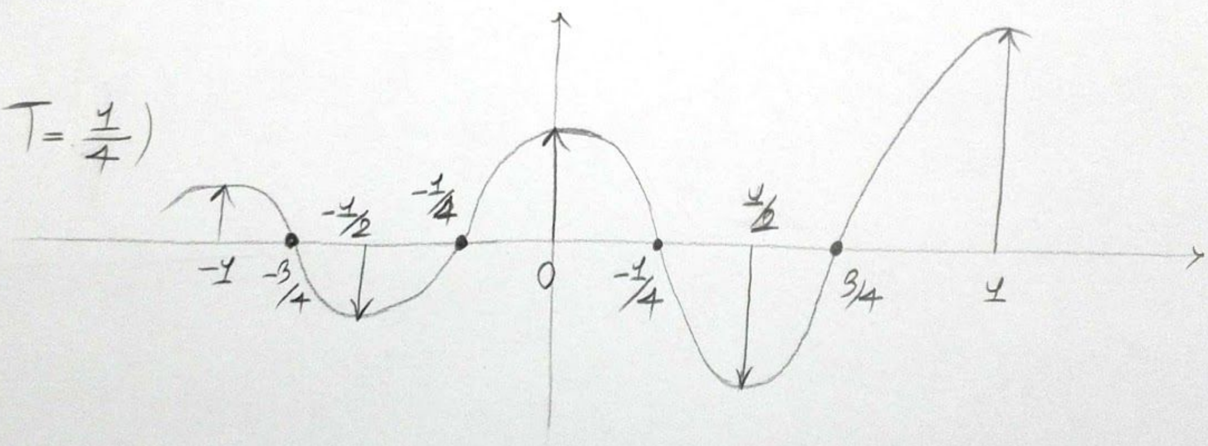
$T = 1)$



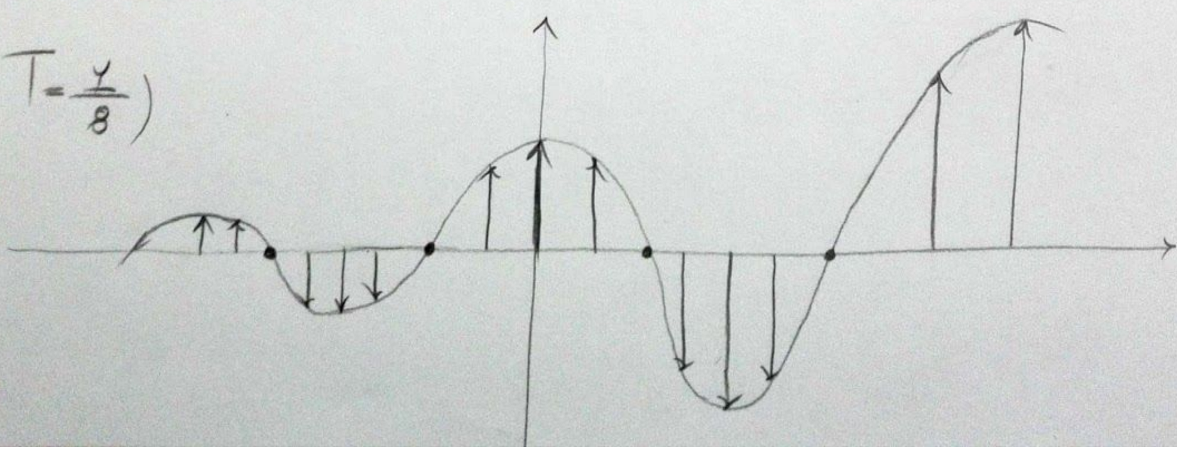

$T = \frac{1}{2})$

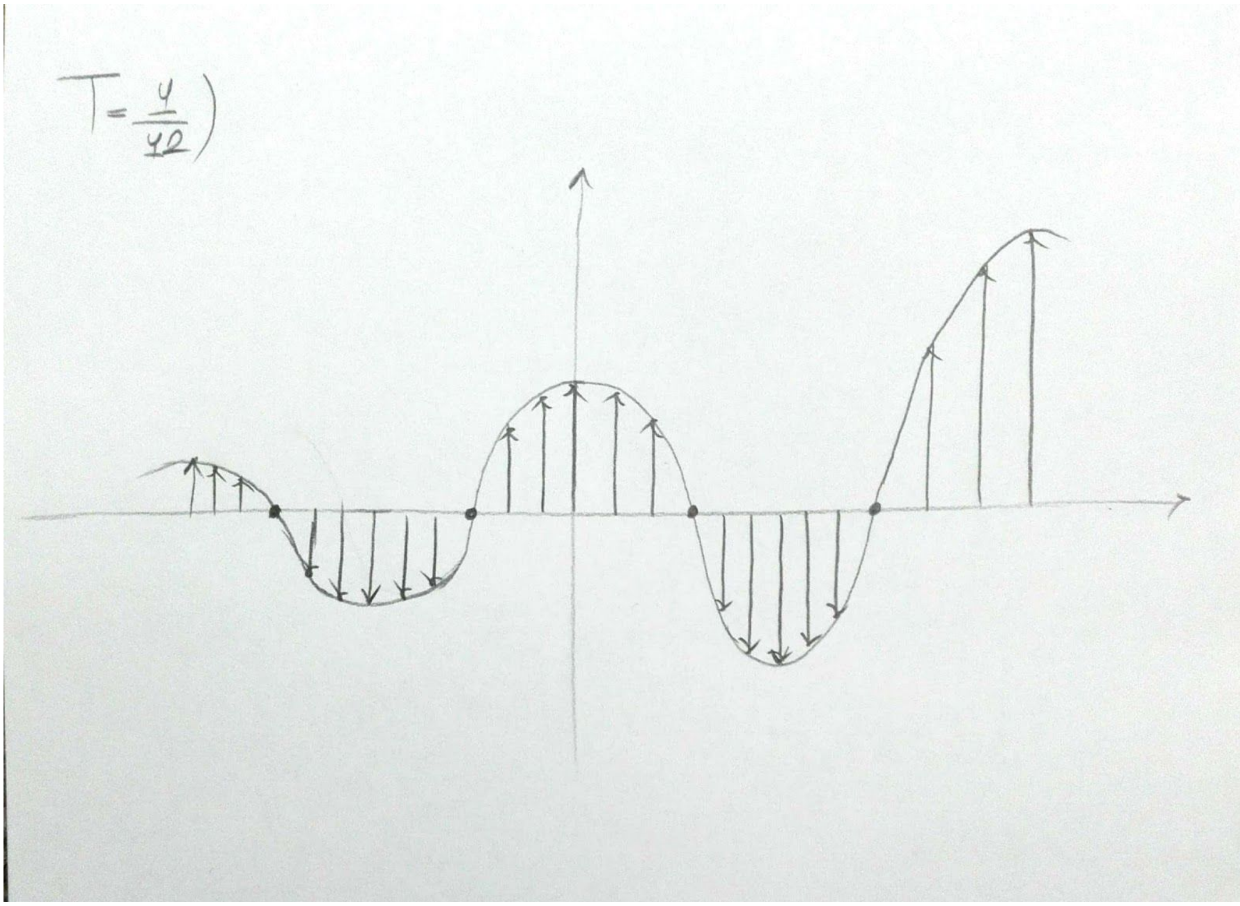



$T = \frac{1}{4})$




$T = \frac{1}{8})$




T = 4/4Ω)

۸-

۸-

الف) این سیستم، سیگنال ورودی را ۱ واحد به سمت راست شیفت می‌دهد و سپس آن را در سیگنال $\cos(\frac{2\pi}{5}n)$ ضرب می‌کند. از آن جایی که سیگنال $\cos(\frac{2\pi}{5}n)$ در هیچ $n$ ای ۰ نیست، اگر سیگنال خروجی را ۱ واحد به چپ شیفت دهیم و تقسیم بر $\cos(\frac{2\pi}{5}n)$ کنیم، سیگنال اولیه را باز تولید خواهیم کرد ⇐ سیستم معکوس پذیر است.

$$y^{-1}[n] = \frac{1}{\cos(\frac{2\pi}{5}n)} x[n+1]$$

★ به طور کلی، سیستم $y[n]=f(n)x[n-n_0]$ ( $y(t)=f(t)x(t-t_0)$ ) معکوس پذیر است، اگر $f(n)$ ( $f(t)$ ) در هیچ نقطه ای، برابر با صفر نشود.

ب)

$$y(t) = \int_{t^2+t}^{+\infty} x(\tau-1)\,d\tau = \int_{t^2+t-1}^{+\infty} x(\tau)\,d\tau$$

این سیستم برای تولید سیگنال خروجی، از ورودی خود به ازای مقادیر مختلف $t$، از بازه‌ی $t^2+t-1$ تا $+\infty$ انتگرال می‌گیرد. $f(t)=t^2+t-1$ یک تابع درجه ۲ است که مینیمم‌اش $-1.25$ است. درنتیجه این سیستم هیچ‌گاه از مقادیر سیگنال ورودی خود در $t<-1.25$ انتگرال نمی‌گیرد. پس اگر دو ورودی مختلف داشته باشیم که در $t>-1.25$ با هم برابر اند ولی در $t<-1.25$ متفاوت اند، این سیستم خروجی یکسانی به ازای آن‌ها تولید خواهد کرد.

⇐ این مثال نقضی برای معکوس پذیر بودن سیستم است ⇐ سیستم معکوس پذیر نیست.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# تمرین دوم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

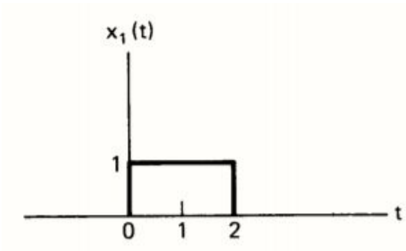
## مهلت تحویل: ۹۹/۸/۱۳

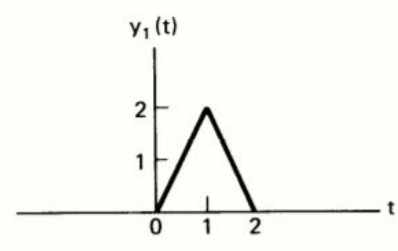
- تمرینات به صورت انفرادی پاسخ داده شوند.
- فایل پاسخ با قالب «HW2_stdNumber.zip» (شامل فایل pdf بخش تئوری و کد قسمت پیاده‌سازی) بارگذاری شود.
- در صورت وجود اشکال، از طریق ایمیل زیر با تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید:

signalsystem.fall2020@gmail.com

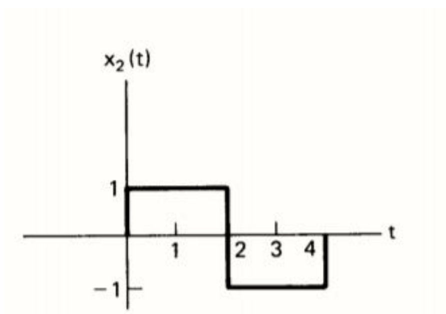
## بخش تئوری.

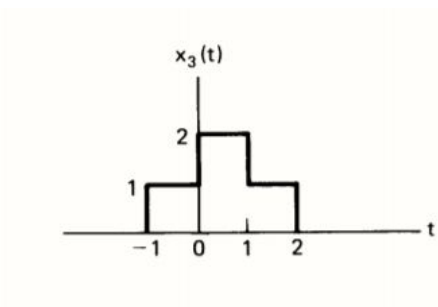
**سوال ۱-** فرض کنید پاسخ یک سیستم LTI به سیگنال $x_1(t)$ ، سیگنال $y_1(t)$ باشد.




الف) پاسخ این سیستم به سیگنال ورودی $x_2(t)$ و $x_3(t)$ را رسم کنید.

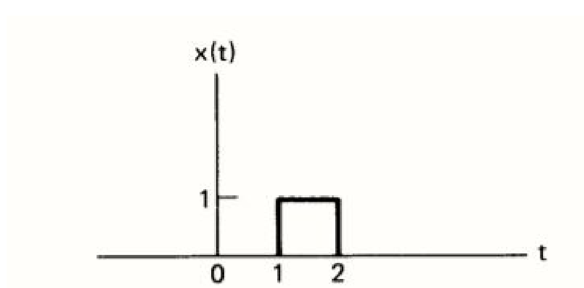



ب)حال، سیستم LTI دومی را درنظر بگیرید که به ازای ورودی $x(t) = u(t)$، خروجی زیر را می‌دهد.

$$y(t) = e^{-t}u(t) + u(-1-t)$$

پاسخ این سیستم به سیگنال زیر چه خواهد بود؟



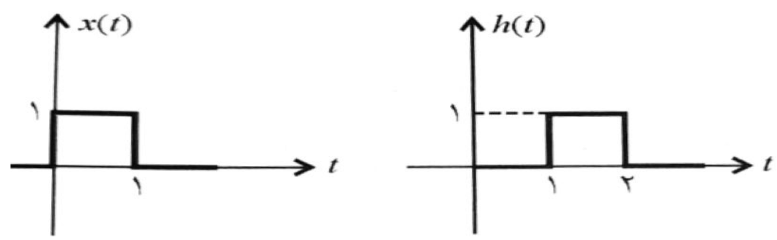
**سوال ۲-** برای هر جفت سیگنال x(t) و h(t) در زیر، کانولوشن را محاسبه کنید.

$(a)\ x(t) = u(t) - u(t-2),\ \ h(t) = e^{-2t}u(t)$

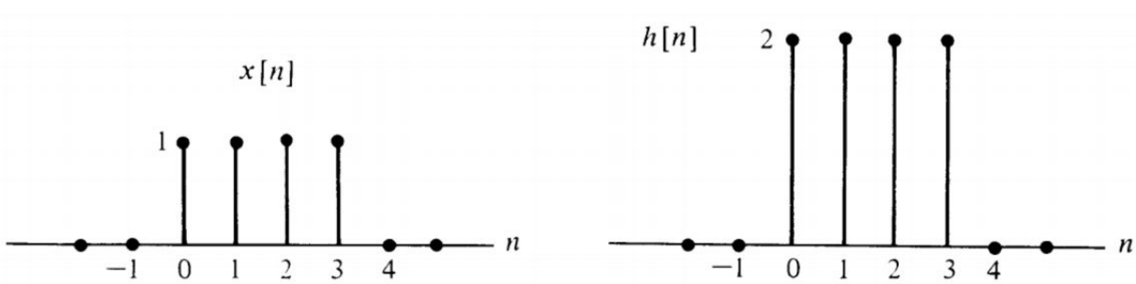
$(b)\ x(t) = \Pi(t-\frac{1}{2}) - \Pi(t-\frac{2}{3}),\ \ h(t) = u(t) - u(t-1)$

$(\prod(t) = rect(t) = unit\,pulse = u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2}))$

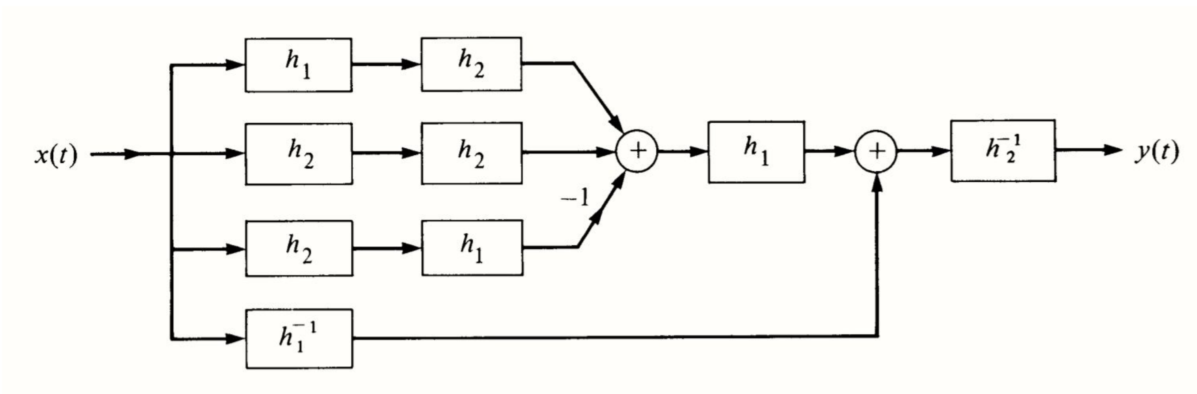
$(c)$




$(d)$



**سوال ۳-** پاسخ ضربه نهایی سیستم LTI زیر را بدست آورید.

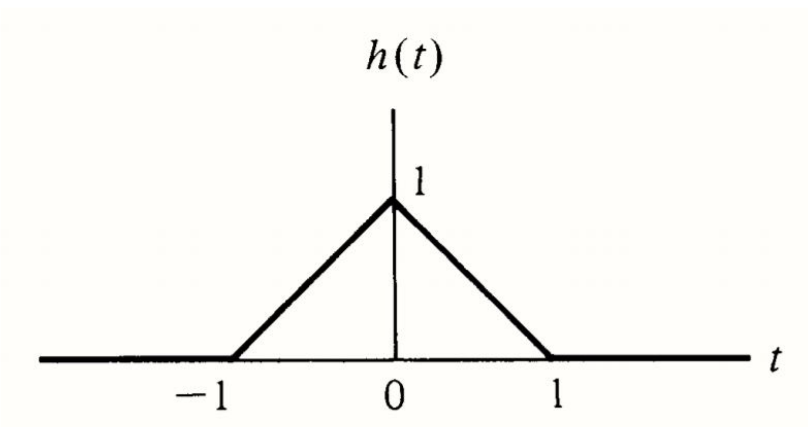



می‌دانیم که:

$$x(t) * h(t) * h^{-1}(t) = x(t)$$

**سوال ۴-** فرض کنید سیگنال x(t) یک قطار ضربه با رابطه‌ای که در ادامه نوشته شده است، باشد و سیگنال پاسخ ضربه h(t) را مطابق شکل در نظر بگیرید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$




الف) سیگنال x(t) را رسم کنید.

ب) در نظر بگیرید $T = \frac{3}{2}$ ، حال $y(t) = x(t) * h(t)$ را محاسبه و رسم کنید.

**سوال ۵-** گزاره های زیر را در نظر بگیرید. چنانچه گزاره‌ای درست به نظر می‌رسد، آن را اثبات کنید و در غیر این صورت نادرستی آن را از طریق تعریف و یا مثال نقض نشان دهید.

$$(a)\ x[n] * (h[n].g[n]) = (x[n] * h[n]).g(n)$$

$$(b)\ if\ \ y(t) = x(t) * h(t)\ \ then:\ \ y(2t) = 2x(2t) * h(2t)$$

$$(c)\ if\ x(t)\ and\ h(t)\ are\ odd\ signals,$$
$$then:\ y(t) = x(t) * h(t)\ is\ an\ even\ signal$$

**سوال ۶-** در مورد علیت، پایداری و حافظه‌دار بودن سیستم‌های LTI با پاسخ ضربه‌های زیر، بحث کنید.

$(a)\ h(t) = te^{-t}u(t)$

$(b)\ h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

$(c)\ h(t) = e^{-6t}u(t+2)$

$(d)\ h[n] = 5^n u[3-n]$

**سوال ۷-** با فرض برقراری سکون ابتدایی در معادله تفاضلی مرتبه اول زیر، پاسخ ضربه سیستمی را که رابطه ورودی-خروجی آن با این معادله تفاضلی توصیف شده است، بیابید.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

سکون ابتدایی:

$$if\ \forall n < n_0.\ x[n] = 0\ then:\ \forall\ n < n_0.\ y[n] = 0$$

## بخش پیاده‌سازی.

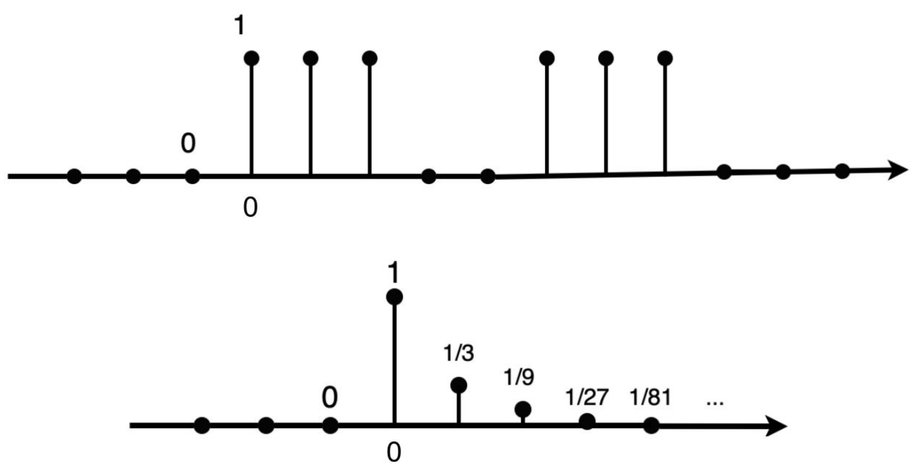
الف) تابعی برای محاسبه کانولوشن دو تابع گسسته بنویسید.

ب) تابع خود را بر روی سیگنال‌های زیر اعمال کنید و نتیجه را رسم کنید. (برای اطمینان از صحت عملکرد تابع خود می‌توانید نتیجه‌ی آن را با حالتی که از تابع کتابخانه‌ای استفاده می‌کنید، مقایسه کنید.)

$(a)\ x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t),\ \ h(t) = u(t) - u(t-5)\ \ ([-10, 10],\ step = 0.1)$

$(b)\ x[n] = (\frac{1}{3})^{-n}u[-n-1],\ \ h[n] = u[n-1]\ \ ([-5, 10])$

$(c)\ ([-5, 10],\ step = 1)$



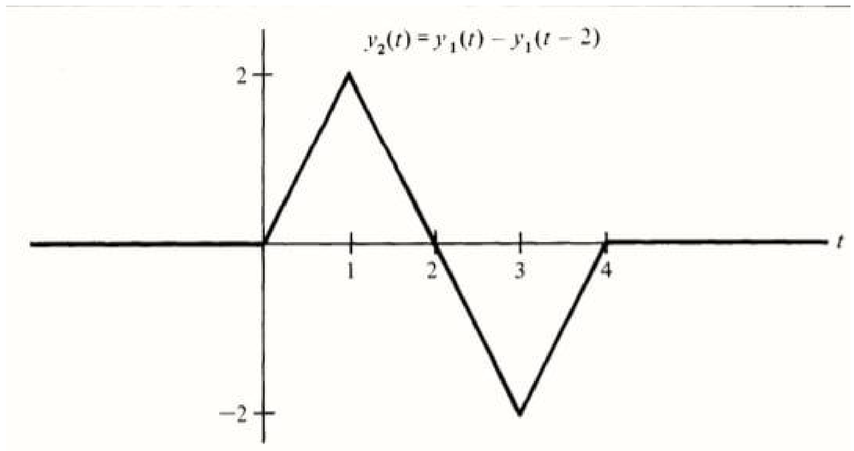
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# پاسخ تمرین دوم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

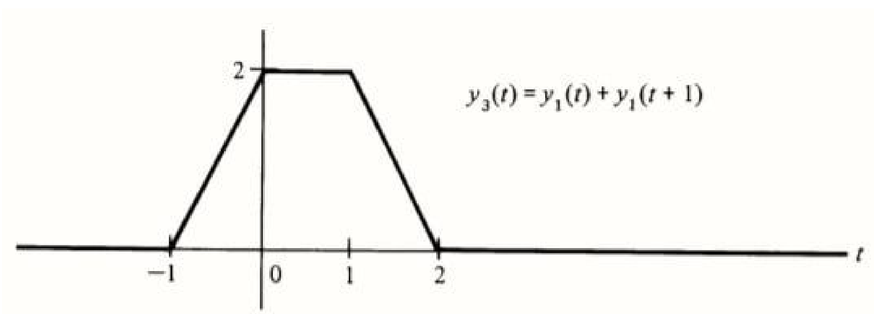
۱- الف)

$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$$



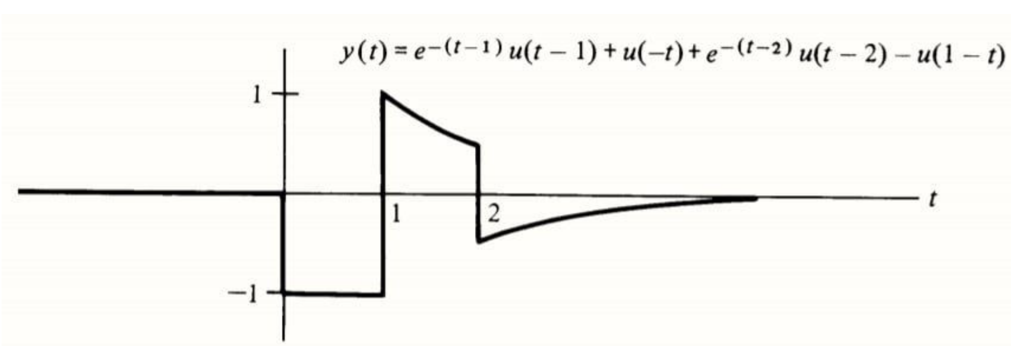

ب)

$$x_3(t) = x_1(t) + x_1(t+1)$$



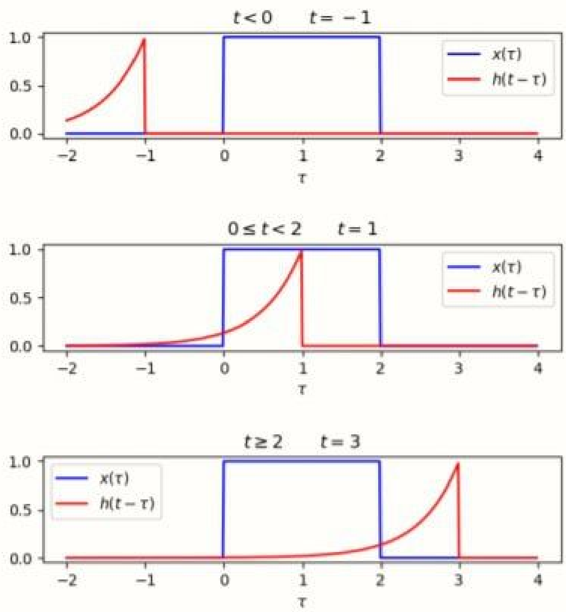

ج)

$$x(t) = u(t-1) - u(t-2)$$



۲-

(a) $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $h(t) = e^{-2t}u(t)$




- $t < 0$

$$y(t) = 0$$

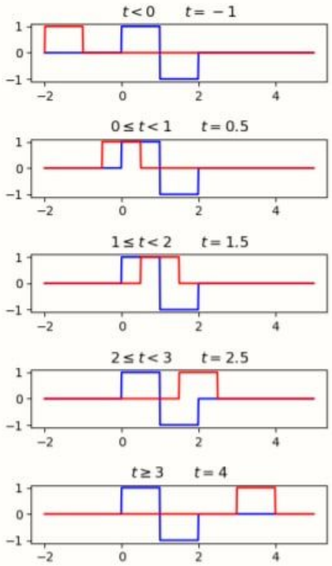
- $0 \leq t < 2$

$$y(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2}\left(e^{2(\tau-t)}\right)\Big|_0^t = \frac{1-e^{-2t}}{2}$$

- $t \geq 2$

$$y(t) = \int_0^2 e^{-2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2}\left(e^{2(\tau-t)}\right)\Big|_0^2 = \frac{e^{2(2-t)} - e^{-2t}}{2}$$

(b) $x(t) = \Pi(t - \frac{1}{2}) - \Pi(t - \frac{3}{2})$, $h(t) = u(t) - u(t-1)$




- $t < 0$ or $t \geq 3$

$$y(t) = 0$$

- $0 \leq t < 1$

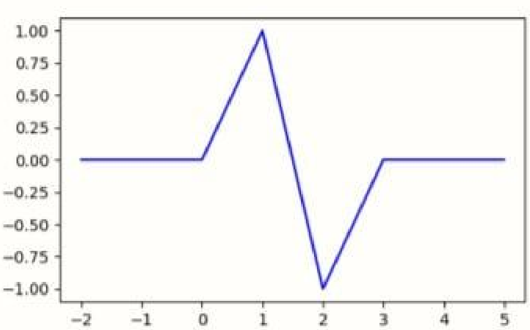
$$y(t) = \int_0^t d\tau = t$$

- $1 \leq t < 2$

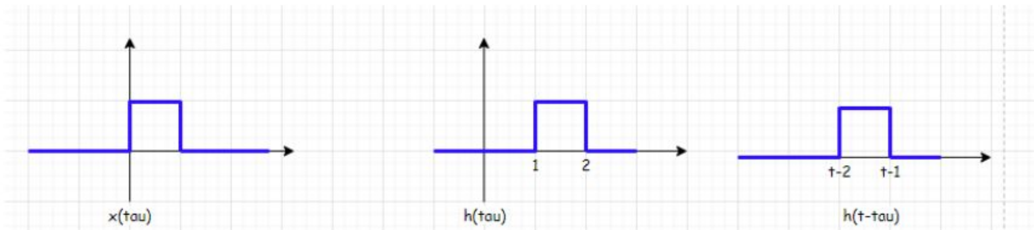
$$y(t) = \int_{t-1}^1 d\tau + \int_1^t -d\tau = 2 - t + 1 - t = 3 - 2t$$

- $2 \leq t < 3$

$$y(t) = \int_{t-1}^2 -d\tau = -(2 - (t-1)) = t - 3$$



c)




$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

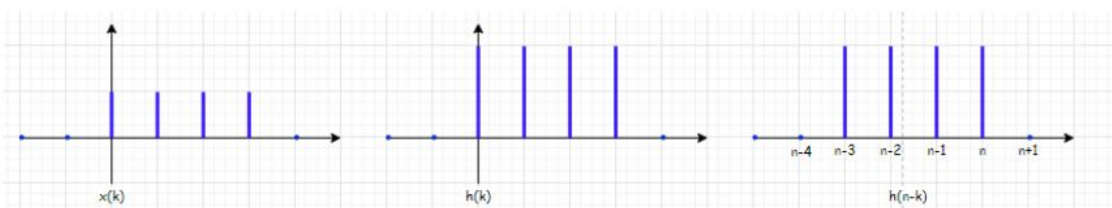
if $t < 1$: $y(t) = 0$.

if $1 < t < 2$: $y(t) = \int_0^{t-1} 1 \times 1\,\mathrm{d}\tau = t - 1$.

if $2 < t < 3$: $y(t) = \int_{t-2}^{1} 1 \times 1\,\mathrm{d}\tau = 3 - t$.

if $t > 3$: $\quad y(t) = 0$.

d)




$y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] =$

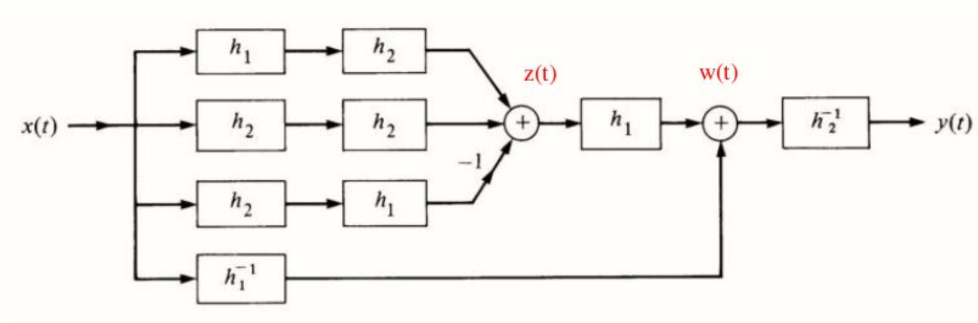
if $n < 0$: $y[n] = 0$.

if $0 \le n < 4$: $y[n] = \Sigma_{k=0}^{n} 2$.

if $4 \le n < 8$: $y[n] = \Sigma_{k=n-3}^{3} 2$.

if $n \ge 8$: $y[n] = 0$.

۳-



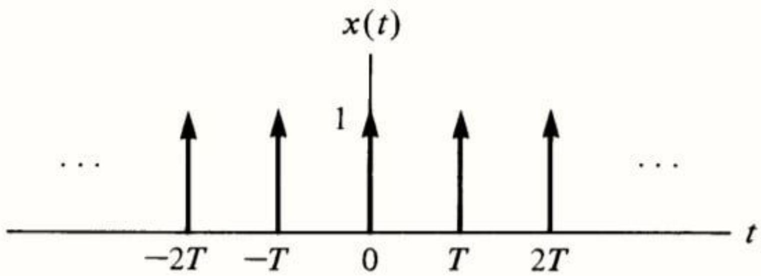

$$z(t) = (h_1 * h_2) + (h_2 * h_2) - (h_2 * h_1) = (h_1 * h_2) + (h_2 * h_2) - (h_1 * h_2)$$
$$= (h_1 + h_2 - h_1) * h_2 = h_2 * h_2.$$

$$w(t) = z(t) * h_1 + h_1^{-1} = h_2 * h_2 * h_1 + h_1^{-1}.$$

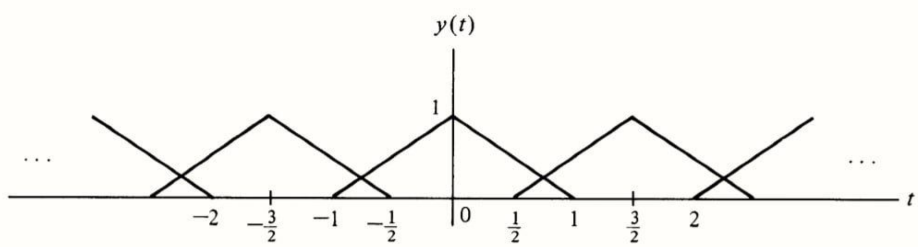
$$h(t) = w(t) * h_2^{-1} = h_2 * h_1 + h_1^{-1} * h_2^{-1}.$$

۴-

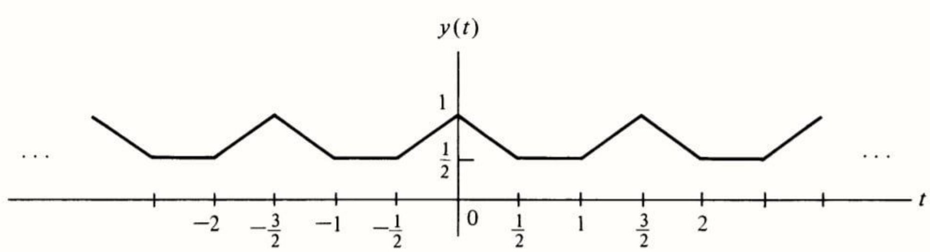
**(a)** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ is a series of impulses spaced $T$ apart.




**(b)** Using the result $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t_0)$, we have




So $y(t) = x(t) * h(t)$ is



۵-

**(a)** False. Counterexample: Let $g[n] = \delta[n]$. Then

$$x[n] * \{h[n]g[n]\} = x[n] \cdot h[0],$$

$$\{x[n] * h[n]\}g[n] = \delta[n] \cdot [x[n] * h[n]]\Big|_{n=0}$$

and $x[n]$ may in general differ from $\delta[n]$.

**(b)** True.

$$y(2t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(2t - \tau)h(\tau)d\tau$$

Let $\tau' = \tau/2$. Then

$$y(2t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(2t - 2\tau')h(2\tau')2\, d\tau'$$
$$= 2x(2t) * h(2t)$$

**(c)** True.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$y(-t) = x(-t) * h(-t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t + \tau)h(-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [-x(t - \tau)][-h(\tau)]\, d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)\, d\tau \qquad \text{since } x(\cdot) \text{ and } h(\cdot) \text{ are odd functions}$$
$$= y(t)$$

Hence $y(t) = y(-t)$, and $y(t)$ is even.

-۶

a) $h(t) = t\left(e^{-t}u(t)\right)$

حافظه‌دار است، زیرا:

$$\text{if } t = 1 \to h(1) \neq 0.$$

علی است، زیرا:

$$\forall n < 0 \to h(n) \overset{u(n)=0}{=} 0.$$

پایدار است، زیرا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t(e^{-t})u(t)\, dt \overset{\text{for t<0} \to \text{u(t)=0}}{=} \int_{0}^{\infty} |t\, e^{-t}|\, dt \overset{\text{I}}{=} [-(t+1)e^{-t}]_0^{\infty}$$
$$= [-(\infty + 1)e^{-\infty} + (0 + 1)e^{0}] = [0(\infty) + 1] < \infty.$$

I: $\int UV = U\int V - \int dU \int V.$

b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

حافظه‌دار است، زیرا:

$$h[1] = 0.8 \neq 0.$$

علی نیست، زیرا:

$$h[-1] = 0.8^{-1}u[1] = 0.8^{-1} \neq 0.$$

پایدار است، زیرا:

$$\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \Sigma_{n=-2}^{\infty} 0.8^n = 0.8^{-2} + 0.8^{-1} + \Sigma_{n=0}^{\infty} 0.8^n \cong 2.8 + \frac{1}{0.2} = 7.8 < \infty.$$

c) $h(t) = e^{-6t}u(t+2)$

حافظه‌دار است، زیرا:

$$h(1) = e^{-6}u(3) \neq 0.$$

علی نیست، زیرا:

$$h(-1) = e^{6t} \neq 0.$$

پایدار است، زیرا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-6t}u(t+2)|\, dt = \int_{-2}^{\infty} e^{-6t}\, dt = -\frac{1}{6}(e^{-6t})|_{-2}^{\infty} = -\frac{1}{6}(0 - e^{12}) < \infty.$$

d) $h[n] = 5^n u[3-n]$

حافظه‌دار است، زیرا:

$$h[3] = 5^3 \neq 0.$$

علی نیست، زیرا:

$$h[-1] = \frac{1}{5} \neq 0.$$

پایدار است، زیرا:

$$\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} 5^n u[3-n] = \Sigma_{n=-\infty}^{3} 5^n = 5^3 + 5^2 + 5 + \Sigma_{n=-\infty}^{0} 5^n = 155 + \frac{1}{\frac{4}{5}}$$

$$= 155 + \frac{5}{4} \neq \infty.$$

-۷

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

ورودی $x[n] = \delta[n]$

خروجی $y[n]$

$$\left.\begin{array}{l} x[n] = \delta[n] \\ y[n] \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{سکون ابتدایی}} \forall n<0 ,\ \delta[n]=0 \Rightarrow y[n]=0$$

$$n=0 \Rightarrow y[0] + 2\overset{0}{y[-1]} = \overset{1}{\delta[0]} \Rightarrow y[0]=1$$

$$n=1 \Rightarrow y[1] + \overset{2}{2y[0]} = \overset{0}{\delta[1]} \Rightarrow y[1]=-2$$

$$n=2 \Rightarrow y[2] + \overset{-4}{2y[1]} = \overset{0}{\delta[2]} \Rightarrow y[2]=4$$

$$\Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow \forall n\geq 0 ,\ y[n] = (-2)^n$$

$$\Rightarrow y[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ (-2)^n & n\geq 0 \end{cases}$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# تمرین سوم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

## مهلت تحویل: ۹۹/۸/۳۰

- تمرینات به صورت انفرادی پاسخ داده شوند.
- فایل پاسخ با قالب «HW3_stdNumber.zip» (شامل فایل pdf بخش تئوری و کد قسمت پیاده‌سازی) بارگذاری شود.
- به ازای هر روز تاخیر در ارسال، ۱۰ درصد از نمره کسر می‌شود.
- از طریق ایمیل زیر می‌توانید با تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید:

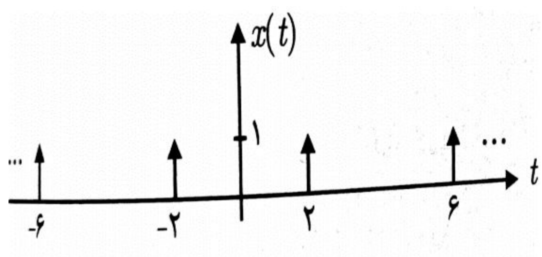
signalsystem.fall2020@gmail.com

## **بخش تئوری.**

**سوال ۱-** ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.

$$x(t) = 2j \sin\left(\frac{3}{2}t\right) + \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + 2$$

**سوال ۲-** سیگنال متناوب x(t) به شکل زیر است. ضرایب سری فوریه آن را بدست آورید.



**سوال ۳-** سیگنال x(t) با ضرایب سری فوریه $a_k$ و دوره تناوب T در نظر بگیرید. ضرایب سری فوریه و دوره تناوب سیگنال‌های زیر را برحسب $a_k$ و T بیان کنید.

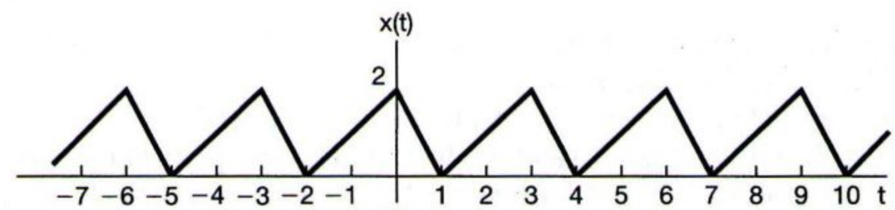
$a)\ x(t-t_0)+x(t+t_0)$

$b)\ Even\{x(t)\}$

$c)\ \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

$d)\ x(3t-1)$

**سوال ۴-** سری فوریه سیگنال زیر را محاسبه کنید.

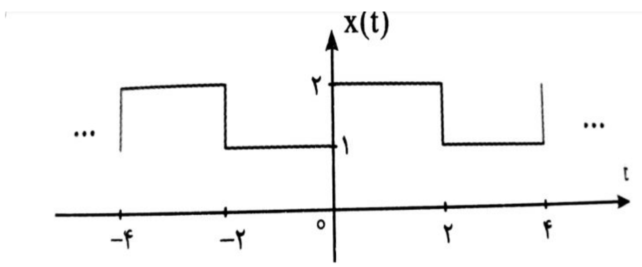



راهنمایی: از ویژگی‌های سری فوریه استفاده کنید.

**سوال ۵-** توان متوسط سیگنال زیر را بدست آورید.

$$x(t) = 3e^{j3t} + cos(2t) + e^{j4t}$$

**سوال ۶-** سیگنال متناوب x(t) با دوره تناوب ۴ و ضرایب فوریه $a_k$ در شکل زیر نشان داده شده است. سیگنال y(t) دارای سری فوریه $b_k = (-1)^k a_k + (-1)^k a_{-k}$ می‌باشد. سیگنال y(t) را رسم نمایید.




راهنمایی:

$$e^{j\pi k} = (-1)^k$$

**سوال ۷-** درباره سیگنال x(t) می‌دانیم که:

- سیگنالی حقیقی است و دوره تناوب اساسی آن T=6 است.
- برای k=0 و 2 < |k| ضرایب سری فوریه آن برابر صفر و در k=1 ضریب سری فوریه آن عدد حقیقی و مثبت است.
- برای این سیگنال $x(t) = -x(t-3)$ است.
- و همچنین می‌دانیم که:

$$\int_{-3}^{3} |x(t)|dt = 12\pi$$

ضرایب سری فوریه و از آن طریق، سیگنال x(t) را را بدست آورید.

**سوال ۸-** یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-4|t|}$ در نظر بگیرید. بدون کانولوشن و به کمک ارتباط سری فوریه با سیستم‌های LTI، ضرایب سری فوریه خروجی y(t) را به ازای ورودی زیر به دست آورید.

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t-n)$$

# بخش پیاده‌سازی.

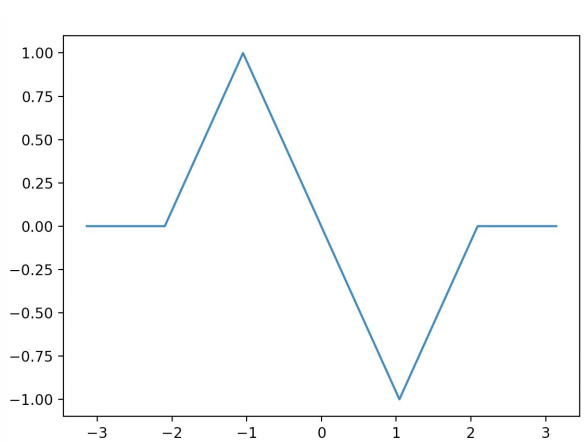
می‌دانیم که سری فوریه را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت، که در آن سیگنال‌ها به صورت جمع سینوس‌ها و کسینوس‌ها نوشته می‌شوند. اگر حاصل سیگما را تا جمله‌ی $k = c$ بدست آوریم، تقریبی از سیگنال x(t) خواهیم داشت. هر چه c بزرگ‌تر باشد، سیگنال تقریب‌زده‌شده، به سیگنال اصلی نزدیک‌تر خواهد شد.

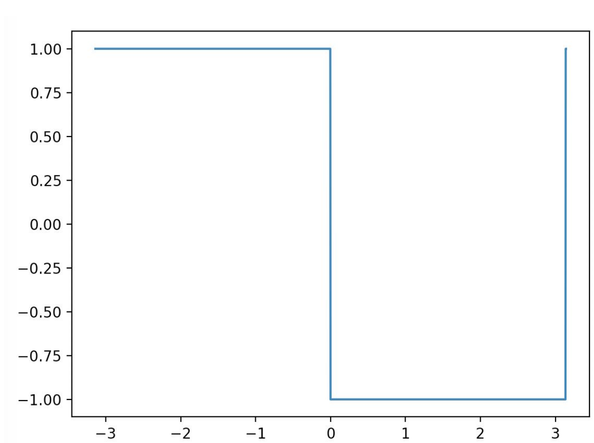
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin(k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, sin(k\omega_0 t)\, dt$$

تابعی بنویسید که به ازای $c = 0$ تا $c = 10$ تقریب سیگنال را محاسبه کرده و در مرحله سیگنال تقریب‌زده‌شده را رسم کند. این تابع را بر روی دو سیگنال زیر (که در یک دوره تناوب خود رسم شده اند) اعمال کنید.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# پاسخ تمرین سوم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

-۱

برای محاسبه ضرایب فوریه $x(t)$ می‌توان از همان فرمول محاسبه $a_k$ استفاده کرد. اما در حالتی که سیگنال ما بـه شکل نمایی باشد و یا به راحتی به شکل نمایی تبدیل شود، می‌توانیم از روش بهتری نیز اسـتفاده نمـاییم. هـدف از محاسبه ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناوب این است که آن سـیگنال را بـه‌صـورت مجمـوعی از نمـایی‌هـای مختلط متناوب بنویسیم که ضرایب آن نمایی‌ها برابر $a_k$ می‌باشد. گاهی اوقات می‌توان بدون محاسبه $a_k$، سیگنال را به‌صورت نمایی نوشت و در واقع بسط سری فوریه آن را به‌دست آورد. در این صورت $a_k$ را نیز می‌توان بـا توجـه به ضریب نمایی‌ها تعیین کرد. در این مثال سیگنال ما بـه‌صـورت سینوسـی اسـت و مـی‌تـوان آن را بـا اسـتفاده از فرمول‌های اویلر مستقیماً به‌صورت نمایی نوشت و اصلاً نیازی به استفاده از رابطه آنالیز نداریم. اما قبل از انجام ایـن کـار، دوره تنـاوب و فرکـانس اصـلی سـیگنال را محاسـبه مـی‌کنـیم. دوره تنـاوب $\sin\frac{۳}{۲}t$ برابـر $\frac{۴\pi}{۳}$ و دوره تناوب $\cos(t-\frac{\pi}{۳})$ نیز برابر $۲\pi$ می‌باشد. پس دوره تناوب اصلی $x(t)$ و فرکانس اصلی آن برابر است با:

$$T = \mathrm{lcm}(\frac{۴\pi}{۳}, ۲\pi) = ۴\pi \quad \longrightarrow \quad \omega_۰ = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$$

حال $x(t)$ را با استفاده از فرمول‌های اویلر به‌صورت نمایی می‌نویسیم:

$$x(t) = ۲j\sin\frac{۳}{۲}t + \cos(t-\frac{\pi}{۳}) + ۲ = e^{j\frac{۳}{۲}t} - e^{-j\frac{۳}{۲}t} + \frac{۱}{۲}e^{j(t-\frac{\pi}{۳})} + \frac{۱}{۲}e^{-j(t-\frac{\pi}{۳})} + ۲$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = (۱)e^{j\frac{۳}{۲}t} + (-۱)e^{-j\frac{۳}{۲}t} + (\frac{۱}{۲}e^{-j\frac{\pi}{۳}})e^{jt} + (\frac{۱}{۲}e^{j\frac{\pi}{۳}})e^{-jt} + ۲ \qquad (۱)$$

ملاحظه می‌کنید که $x(t)$ برحسب نمایی نوشته شده است. از طرف دیگر می‌دانیم که بسط سری فوریه $x(t)$ برابر می‌باشد با:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_۰ t} = \cdots + \underbrace{a_{-۲}\, e^{-j۲\omega_۰ t}}_{k=-۲} + \underbrace{a_{-۱}\, e^{-j\omega_۰ t}}_{k=-۱} + \underbrace{a_۰}_{k=۰} + \underbrace{a_۱\, e^{j\omega_۰ t}}_{k=۱} + \underbrace{a_۲\, e^{j۲\omega_۰ t}}_{k=۲} + \cdots$$

حال می‌توانیم با معادل قرار دادن رابطه فوق با رابطه (۱) و با توجه به مقـدار $\omega_۰ = \frac{۱}{۲}$، ضـرایب $a_k$ را شناسـایی و تعیین نماییم. برای این کار به‌صورت زیر استدلال می‌کنیم:

در بسط سری فوریه سیگنال، ضریب $e^{jk\omega_0 t}$ برابر $a_k$ می‌باشد. با توجه به اینکـه در اینجـا $\omega_0=\frac{1}{2}$ اسـت، پـس ضریب $e^{jk\frac{1}{2}t}$ برابر $a_k$ خواهد بود. یعنی داریم:

$$\text{ضریب } e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow a_k \xrightarrow{\omega_0=\frac{1}{2}} \text{ضریب } e^{jk\frac{1}{2}t} \longrightarrow a_k$$

حال باید در رابطه (۱)، ضریب نمایی $e^{jk\frac{1}{2}t}$ را بـه ازای هـر $k$ شناسـایی کنـیم. بـه عنـوان مثـال ضـریب نمـایی $e^{j(3)\frac{1}{2}t}$ برابر $a_3$، و یا ضریب نمایی $e^{j(-2)\frac{1}{2}t}=e^{-jt}$ برابر $a_{-2}$ می‌باشد. در نتیجه از رابطه (۱) داریم:

$$x(t)=\underbrace{(1)}_{a_3}e^{j\frac{3}{2}t}+\underbrace{(-1)}_{a_{-3}}e^{-j\frac{3}{2}t}+\underbrace{(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})}_{a_2}e^{jt}+\underbrace{(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})}_{a_{-2}}e^{-jt}+\underbrace{2}_{a_0}e^{j(0)t}$$

ضریب نمایی $e^{j\frac{3}{2}t}$ برابر $a_3$، ضریب نمایی $e^{-j\frac{3}{2}t}$ برابر $a_{-3}$، ضریب نمایی $e^{jt}$ برابـر $a_2$، ضـریب نمـایی $e^{-jt}$ برابر $a_{-2}$ و ضریب $e^{j(0)t}$ (یعنی عدد ثابت) برابر $a_0$ می‌باشد. همچنین بقیه ضرایب نیز صفر هستند. پس ضرایب سری فوریه $x(t)$ برابر می‌شود با:

$$a_0=2\ ,\ a_2=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\ ,\ a_{-2}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\ ,\ a_3=1\ ,\ a_{-3}=-1$$

-٢

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4}\int_0^4 x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \delta(t-2)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{4} e^{-jk\omega_0 \times 2} = \frac{1}{4} e^{-jk\frac{2\pi}{T}\times 2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} e^{-jk\pi}}$$

**۳-**

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

a) $x(t-t_0) + x(t+t_0) \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0}\ (a_k) + e_0^{jk\omega t_0}\ (a_k).$

$T_a = \text{lcm}(T_1, T_2) = \text{lcm}(T, T) = T.$

b) $Even\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} \frac{a_k}{2} + \frac{a_{-k}}{2}.$

$T_b = \text{lcm}(T, T) = T.$

c) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} (jk\omega_0)^2 a_k = -k^2\omega_0^2\ a_k.$

$T_c = T.$

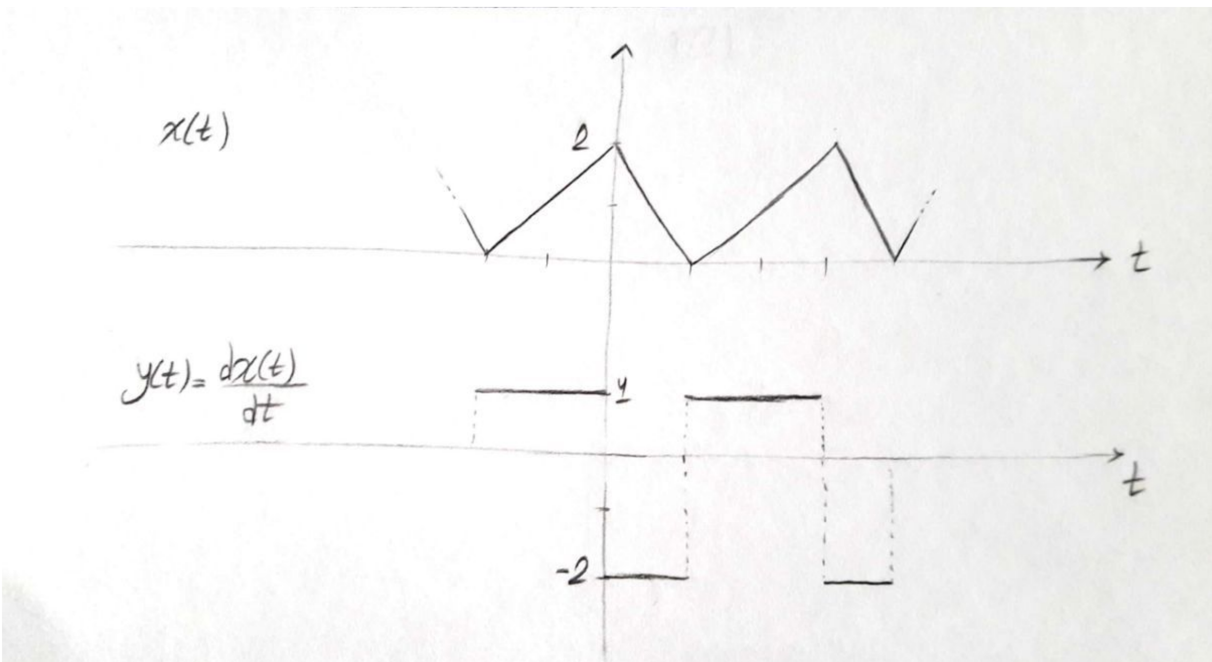
* $x(t) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = jk\omega_0\ \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} =$
$(jk\omega_0)^2\ \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$

❋ دوره تناوب مشتق یک تابع متناوب برابر با دوره تناوب خود تابع است.

d) $x(3t-1) \overset{\text{F.s}}{\rightarrow} e^{-jk\omega_0}\ a_k.$

$T_d = \frac{T}{3}.$

-۴



$$\left.\begin{aligned} & x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau \\ & x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k \\ & y(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k \\ & \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{طبق ویژگی}} a_k = \frac{b_k}{jk\omega_0}$$

* چون مخرج به ازای $k=0$ برابر با $0$ است ← $a_0$ نیاز است که به طور مستقیم و از روی خود $x(t)$ حساب شود.

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^3 y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 -2e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{3}\int_1^3 e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{-2}{3}\left(\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right)\Bigg|_1^3$$

$$= \frac{-1}{3jk\omega_0}\left(-2\left(e^{-jk\omega_0} - 1\right) + \left(e^{-3jk\omega_0} - e^{-jk\omega_0}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{3jk\omega_0}\left(-3e^{-jk\omega_0} + e^{-3jk\omega_0} + 2\right); \quad k \neq 0$$

$$b_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)\, dt = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} & a_k = \frac{-3e^{-jk\omega_0} + e^{-3jk\omega_0} + 2}{3k^2\omega_0^2} \quad ; \quad k \neq 0 \\ & \frac{1}{3}\int_0^3 x(t)\, dt = 1 \quad ; \quad k = 0 \end{aligned}}$$

۵-

$$x(t) = 3e^{j3t} + \cos 2t + e^{j4t} = 3e^{j3t} + \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} + e^{j4t}.$$

$$T = \mathrm{lcm}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{4}\right) = 2\pi \rightarrow \omega_0 = 1.$$

$$x(t) = 3e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega_0 t} + e^{j4\omega_0 t}.$$

$$a_2, a_{-2} = \frac{1}{2}, a_3 = 3, a_4 = 1.$$

$$P_{avr} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 + 3^2 + 1^2 = \frac{1}{2} + 9 + 1 = \frac{21}{2}.$$

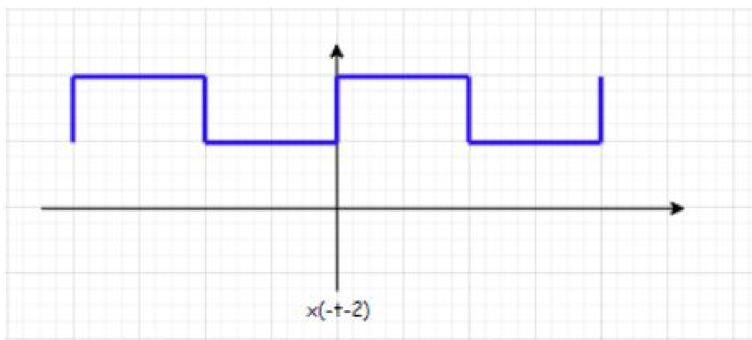
-۶

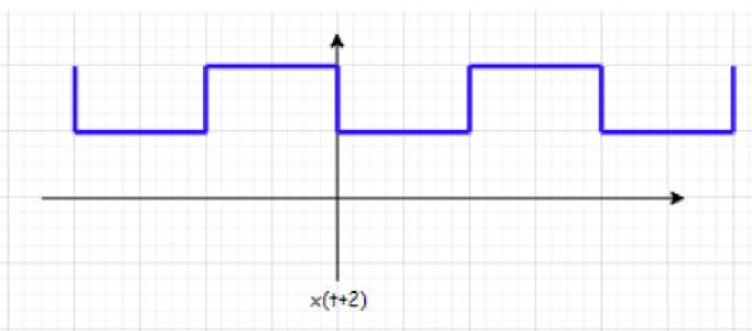
می‌دانیم که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$، پس می‌توانیم $b_k$ را به فرم زیر بنویسیم:

$$b_k = e^{jk\omega_0\times 2}\,(a_k) + e^{jk\omega_0\times 2}\,(a_{-k})$$

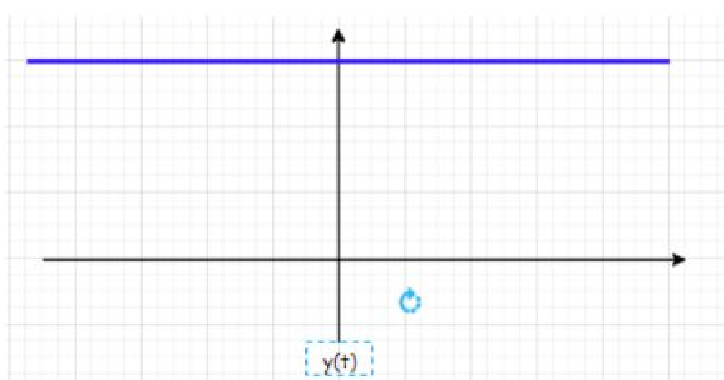
می‌دانیم که $x(-t) \xrightarrow{\text{F.s}} a_{-k}$ و همچنین، $x(t-t_0) \xrightarrow{\text{F.s}} e^{-jk\omega_0 t_0}\,a_k$. پس داریم:

$$y(t) = x(t+2) + x(-t-2).$$




$$y = 3$$



-۷

۱. سیگنال حقیقی است، پس: $a_k = a^*_{-k}$.

۲. سیگنال فقط دارای سه ضریب فوریه در kهای ۰، ۱، ۲، منفی دو و منفی یک دارد.

۳. مزدوج و حقیقی بودن ضرایب در ۱ و منفی یک: $a_1 = a_{-1}$.

۳. از رابطه داریم:

$$x(t) = -x(t-3) \to a_k = -e^{-jk\omega_0 3} a_k$$

$$\text{if k=0: } a_0 = -a_0 \to a_0 = 0.$$

$$\text{if k=1 or -1: } a_k = -e^{-kj\pi} a_k \to a_k = a_k.$$

$$\text{if } k = 2 \text{ or } -2\text{: } a_k = -a_k \to a_2 = a_{-2} = 0.$$

.۴

$$\int_{-3}^{3} \left| a_{-1} e^{-\frac{j\pi}{3}t} + a_1 e^{\frac{j\pi}{3}t} \right| dt = |a_1| \int_{-3}^{3} \left| e^{-\frac{j\pi}{3}t} + e^{\frac{j\pi}{3}t} \right| dt$$

$$= |2a_1| \int_{-3}^{3} \left| \cos\frac{\pi}{3}t \right| dt \overset{*}{=} \frac{24}{\pi} |a_1| = 12\pi \to a_1 = a_{-1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$* \int_{-3}^{3} \left| \cos\frac{\pi}{3}t \right| dt = \int_{-3}^{-\frac{3}{2}} \left( -\cos\frac{\pi}{3}t \right) dt + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left( \cos\frac{\pi}{3}t \right) dt + \int_{\frac{3}{2}}^{3} -\left( \cos\frac{\pi}{3}t \right) dt$$

$$= \frac{3}{\pi} + \frac{6}{\pi} + \frac{3}{\pi} = \frac{12}{\pi}.$$

$$x(t) = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

۸-

محاسبه پاسخ فرکانسی : $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ ①

چرا پاسخ فرکانسی؟ چون سیستم های LTI را می توان برای ورودی های متناوب به صورت یکتایی با $H(j\omega)$ بیان کرد: خروجی سیستم LTI به ورودی متناوب، سیگنالی است با همان دوره تناوب و ضرایب سری فوریه ی: $b_k = \underbrace{a_k}_{\text{ضرایب سری فوریه ی ورودی}} H(jk\omega)$

$$① : H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{4\tau - j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-4\tau - j\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{4-j\omega} e^{(4-j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-4-j\omega} e^{(-4-j\omega)\tau} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1-0}{4-j\omega} + \frac{0-1}{-4-j\omega} = \frac{1}{4-j\omega} + \frac{1}{4+j\omega} = \frac{8}{16+\omega^2}$$

حالا کافی است ضرایب سری فوریه سیگنال های ورودی را به دست آوریم:

$$x_1(t) : a_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(t)\, dt = 1$$

$T=1$ ← مقدار دوره

$$\Rightarrow y_1(t) : b_k = \frac{8}{16 + (k\underbrace{\omega_0}_{2\pi})^2} = \frac{8}{16 + 4\pi^2 k^2}$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# تمرین چهارم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

## مهلت تحویل: ۹۹/۹/۱۲

- تمرینات به صورت انفرادی پاسخ داده شوند.
- فایل پاسخ با قالب «HW4_stdNumber.zip» (شامل فایل pdf بخش تئوری و کد قسمت پیاده‌سازی) بارگذاری شود.
- از طریق ایمیل زیر می‌توانید با تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید:

signalsystem.fall2020@gmail.com

## بخش تئوری.

**سوال ۱-** سیگنال $x(t)$ به صورت یک پالس مربعی متقارن حول مبدا، به عرض $T_1$ و ارتفاع 1 است.

الف) سیگنال $x(t)$ و سیگنال $\widehat{x}(t)$ که یک سیگنال متناوب حاصل از تکرار $x(t)$ با دوره تناوب اصلی $T_0 = 3\frac{T_1}{2}$ است را رسم کنید.

ب) تبدیل فوریه سیگنال ($X(\omega)$) را محاسبه کنید و $|X(\omega)|$ را در بازه‌ی $|\omega| < \frac{6\pi}{T_1}$ رسم کنید.

پ) ضرایب سری فوریه سیگنال $\widehat{x}(t)$ را محاسبه کنید.

ت) با استفاده از دو قسمت قبل نشان دهید برای این سوال رابطه زیر برقرار است.

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{T_0}}$$

ث) با توجه به قسمت قبل توضیح دهید که چگونه سری فوریه یک سیگنال متناوب، از روی تبدیل فوریه این سیگنال در یک دوره تناوب بدست می‌آید.

**سوال ۲-** با استفاده از رابطه صریح تبدیل فوریه و یا استفاده از خواص تبدیل فوریه، برای سیگنال‌های زیر تبدیل فوریه را محاسبه کنید.

$(a)\ x(t) = e^{-3|t|} sin(2t)$

$(b)\ x(t) = \begin{cases} 1-t & 0<t<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

$(c)\ x(t) = \frac{sin\ 3t\ .\ cos\ t}{\pi t}$

$(d)\ x(t) = te^{-2|t-1|}$

$(e)\ x(t) = t(\frac{sin\ t}{\pi t})^2$

**سوال ۳-** عکس تبدیل فوریه سیگنال های زیر را محاسبه کنید.

$$(a)\ X(\omega) = 2\delta(\omega + 6)$$

$$(b)\ X(\omega) = \frac{7j\omega+46}{-\omega^2+13j\omega+42}$$

$$(c)\ X(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{sin2\omega - j\ cos2\omega}{1+\frac{j\omega}{3}}\right)$$

$$(d)\ X(\omega) = \pi e^{-3|\omega|}$$

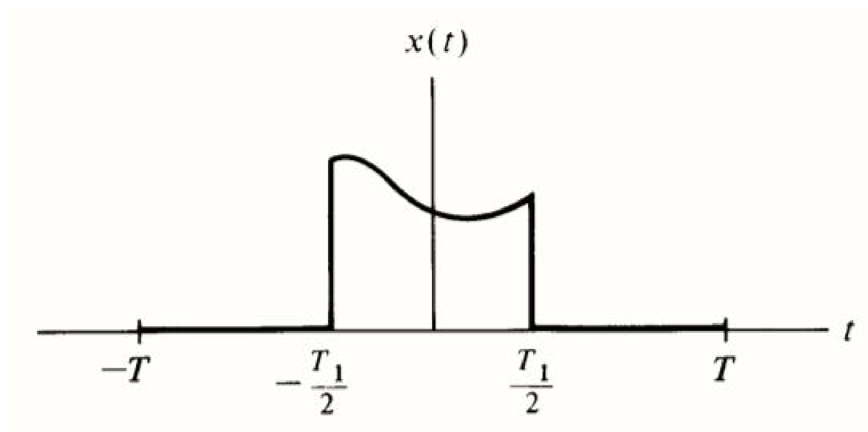
**سوال ۴-** قطار ضربه زیر را در نظر بگیرید.

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

الف) سری فوریه سیگنال $p(t)$ را بیابید.

ب) تبدیل فوریه سیگنال $p(t)$ را بیابید.

پ) سیگنال $x(t)$ به صورت زیر است.

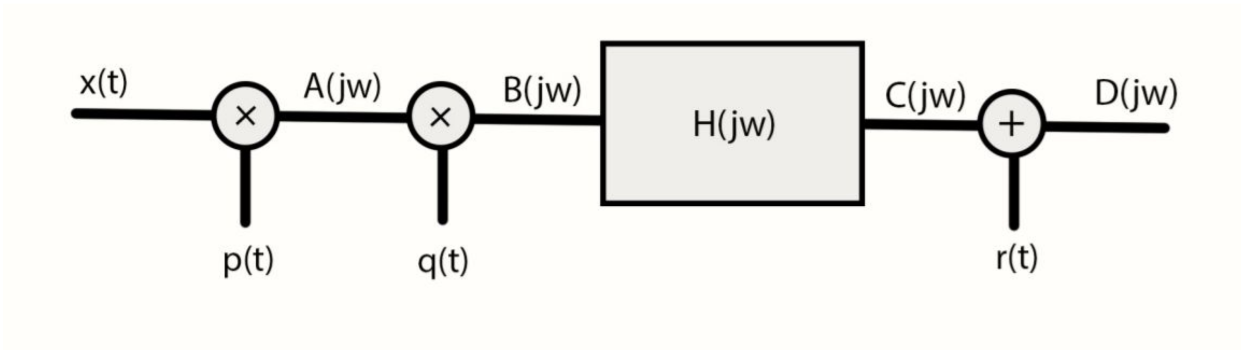



سیگنال $\widehat{x}(t)$ را از رابطه زیر بدست آورده و رسم کنید.

$$\hat{x}(t) = x(t) * p(t)$$

توضیح دهید که چرا حاصل کانولوشن سیگنال با قطار ضربه (اگر فاصله‌ی سیگنال ضربه‌ها کافی باشد)، سیگنالی متناوب است که از تکرار سیگنال اصلی تشکیل شده است.

**سوال ۵-** در سیستمی که در ادامه آمده است، سیگنال‌های $C(j\omega)$ , $B(j\omega)$ , $A(j\omega)$ و $D(j\omega)$ را به دست آورید.




$$x(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$p(t) = \frac{sin(2\pi t)}{\pi t}$$

$$q(t) = cos(3\pi t)$$

$$H(jw) = 2u(\omega + 3\pi) - 2u(\omega - 3\pi)$$

$$r(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$

**سوال ۶-** پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI پایدار به صورت زیر است :

$$H(j\omega) = \frac{j\omega+2}{6-\omega^2+5j\omega}$$

الف) یک معادله دیفرانسیل که رابطه ورودی و خروجی این سیستم را مشخص می‌کند، بنویسید.

ب) پاسخ ضربه را برای این سیستم بدست آورید.

پ) خروجی $y(t)$ را به ازای ورودی $x(t) = (1-t)e^{-4t}u(t)$ بیابید.

ث) خروجی $y_1(t)$ را به ازای $x_1(t) = e^{2t}$ بیابید.

**سوال ۷-** یک سیستم LTI با سکون ابتدایی با معادله دیفرانسیل زیر توصیف شده است:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

الف) پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

ب) فرض کنید که وارون این سیستم نیز دارای سکون ابتدایی است و با یک معادله دیفرانسیل توصیف می‌شود. این معادله دیفرانسیل را بیابید.

پ) پاسخ ضربه این سیستم وارون را بدست آورید.

## پیاده‌سازی.

در بخش پیاده‌سازی قصد داریم که کد مخفی شده در حوزه فرکانس تعدادی فایل صوتی را کشف کنیم. به این منظور باید:

- فایل صوتی مربوطه را بخوانیم.
- با استفاده از توابع مناسب، داده‌های مربوط به حوزه فرکانس را استخراج کنیم.
- در نمونه‌های قرار گرفته شده، کد مخفی درون ناحیه فرکانسی از فرکانس ۳۰۰ کیلوهرتز آغاز می شود.
- این کد با بازنمایی باینری در ناحیه طیفی سیگنال گنجانده شده است. دقت کنید که اندازه‌ی کد ۶۴ بیت است که نشانگر ۸ عدد ۸ بیتی است.
- هر عدد ۸ بیتی نمایشگر یک کاراکتر ASCII است، پس کافی است که عدد باینری ۸ بیتی را به عدد ده‌دهی متناظر تبدیل کنید. این عدد خانه‌ی کاراکتر مربوطه را در جدول ASCII نشان می دهد.
- رشته‌ی ۸ کاراکتری حاصل را گزارش کنید.
- این کار را به ازای همه‌ی فایل‌های صوتی که در اختیارتان قرار گرفته، تکرار کنید.

به سوالات زیر پاسخ دهید :

۱. چرا ناحیه انتخاب شده برای قرار دادن کد، از ناحیه ۳۰۰ کیلوهرتز آغاز شده است؟

۲. به نظر شما روش فوق چه کاربردهایی می تواند داشته باشد؟ مزایا و معایب این روش را شرح دهید.

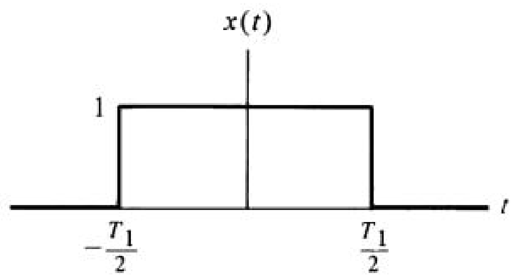
شما باید علاوه بر کد پیاده‌سازی شده، در قالب گزارشی عکس سیگنال های صوتی هم در ناحیه زمان و هم در ناحیه فرکانس، کد کشف‌شده مربوط به هر سیگنال و پاسخ سوالات را ضمیمه کنید.

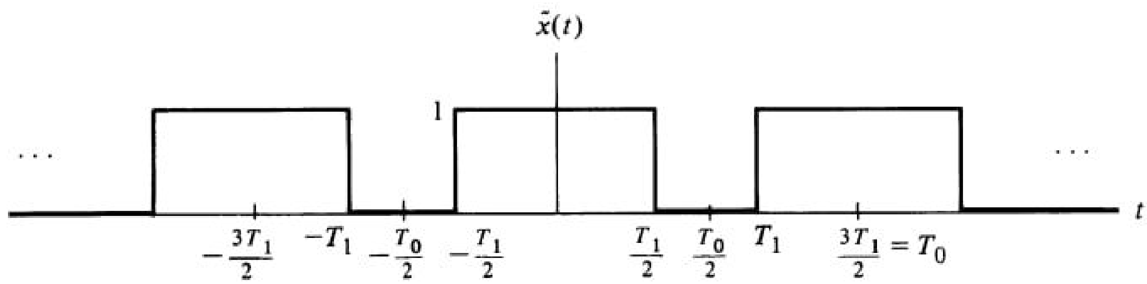
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# پاسخ تمرین چهارم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

۱- الف)



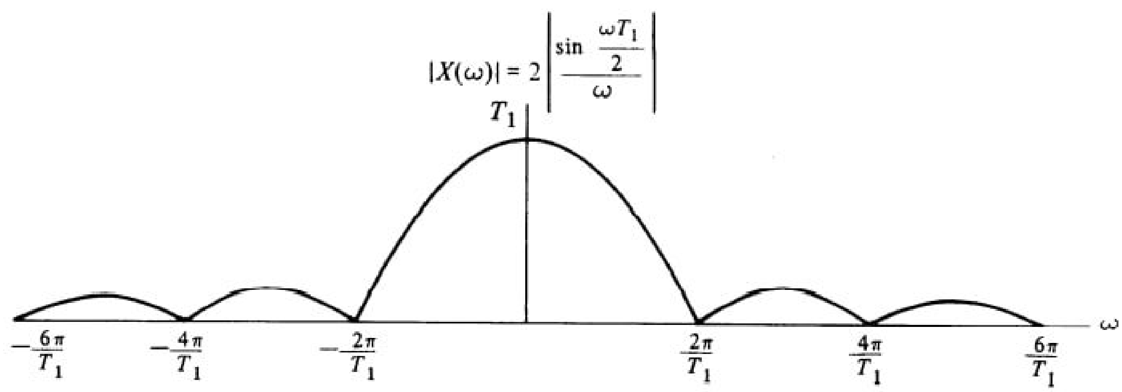




ب)

**Using the definition of the Fourier transform, we have**

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} 1e^{-j\omega t}\,dt \quad \text{since } x(t) = 0 \quad \text{for} \quad |t| > \frac{T_1}{2}$$

$$= \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1/2}^{T_1/2} = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega T_1/2} - e^{j\omega T_1/2}\right) = \frac{2\sin\frac{\omega T_1}{2}}{\omega}$$



پ)

Using the analysis formula, we have

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt,$$

where we integrate over *any* period.

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk(2\pi/T_0)t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{\;jk(2\pi/T_0)t}\, dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{-jk\dfrac{2\pi}{T_0}}\right)\left(e^{-jk\pi T_1/T_0} - e^{jk\pi T_1/T_0}\right) = \frac{\sin k\pi(T_1/T_0)}{\pi k} = \frac{\sin \pi(2k/3)}{\pi k}$$

ت)

$$\frac{1}{T_0}X(\omega)\Big|_{\omega=(2\pi k)/T_0} = \frac{1}{T_0}\frac{2\sin(\pi k T_1/T_0)}{2\pi k/T_0} = \frac{\sin \pi k(T_1/T_0)}{\pi k} = a_k$$

ث)

همانطور که در قسمت «ت» می‌بینیم، اگر در تبدیل فوریه‌ی سیگنال x، مقادیر $k\omega_0$ را جایگذاری کرده و حاصل را تقسیم بر اندازه‌ی دوره تناوب سیگنال متناوب‌شده‌ی x کنیم، حاصل آن سری فوریه‌ی فرم متناوب سیگنال x خواهد بود.

-۲

(a

$$a)\quad x(t) = e^{-۳|t|}\,\sin(۲t)$$

$$e^{-۳|t|} \xrightarrow{FT} \frac{۶}{۹+\omega^{۲}} \qquad \sin(۲t) \xrightarrow{FT} \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-۲)-\delta(\omega+۲)\right)$$

$$x(t)\,y(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{۲\pi}\,X(j\omega) * Y(j\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{۲\cancel{\pi}} \times \frac{\cancel{\pi}}{j}\left(\frac{۶}{۹+(\omega-۲)^{۲}} - \frac{۶}{۹+(\omega+۲)^{۲}}\right)$$

(b

(b) $x(t) = \begin{cases} 1-t & 0<t<1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

از تعریف تبدیل فوریه مسأله را حل می‌کنیم.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^1 (1-t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \underbrace{\int_0^1 e^{-j\omega t}\, dt}_{A} - \underbrace{\int_0^1 t e^{-j\omega t}\, dt}_{B} = A-B$$

$$A = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_0^1 = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - 1\right)$$

$$B = \int_0^1 t e^{-j\omega t}\, dt \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-j\omega t}\, dt \Rightarrow v = \dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \end{array}}$$

$$= uv\Big|_0^1 - \int_0^1 v\, du = \frac{t e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\, dt$$

$$= \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} - \left(\frac{-1}{\omega^2} e^{-j\omega t}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} - \left(\frac{e^{-j\omega}-1}{-\omega^2}\right)$$

$$= \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} + \frac{e^{-j\omega}-1}{+\omega^2}$$

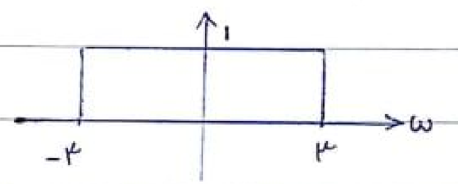
$$\Rightarrow X(\omega) = A-B = \frac{-2e^{-j\omega}+1}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega}-1}{\omega^2}$$

قسمت c)

c) $x(t) = \dfrac{\sin 3t \cdot \cos t}{\pi t}$

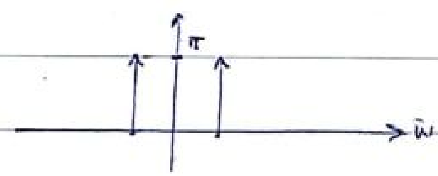
$$\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

$\rightarrow FT\left\{\dfrac{\sin 3t}{\pi t}\right\}$ :




$\rightarrow X_1(j\omega)$

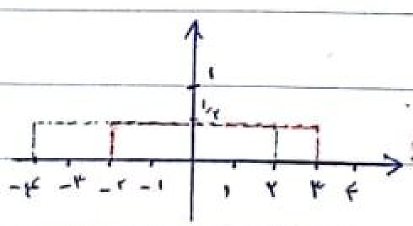
$FT\{\cos t\}$ :



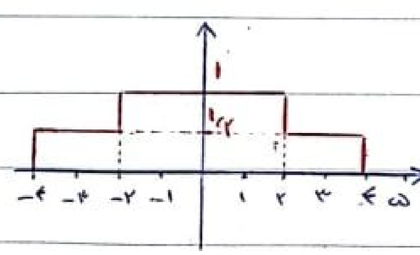

$X_2(j\omega)$

طبق خاصیت ضرب : $X(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

↓




→



(d

d) $te^{-2|t-1|}$

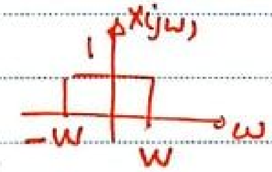
$\rightsquigarrow e^{-a|t|} \xrightarrow{FT} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \Rightarrow e^{-2|t|} \xrightarrow{FT} \frac{4}{4+\omega^2}$

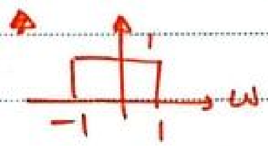
$\rightsquigarrow x(t+t_0) \xrightarrow{FT} e^{j\omega t_0} X(j\omega) \Rightarrow e^{-2|t-1|} \xrightarrow{FT} e^{-j\omega} \times \frac{4}{4+\omega^2}$

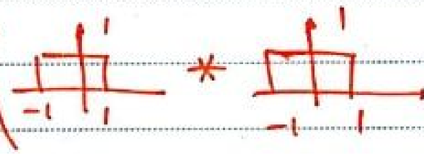
$\rightsquigarrow t\,x(t) \xrightarrow{FT} -\frac{1}{j} \cdot \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \Rightarrow te^{-2|t-1|} \xrightarrow{FT} -\frac{1}{j} \cdot \frac{d\left(\frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2}\right)}{d\omega}$

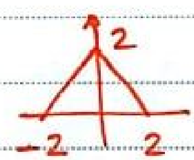
(e

$$x(t) = t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longrightarrow x(t) = t\,\frac{\sin(t)}{\pi t}\,\frac{\sin(t)}{\pi t}$$

می‌دانیم * $\quad x(t) = \dfrac{\sin(Wt)}{\pi t} \overset{FT}{\longleftrightarrow}$ 

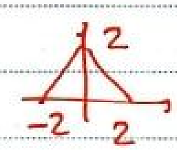
$$\Rightarrow \frac{\sin(t)}{\pi t} \longleftrightarrow$$ 

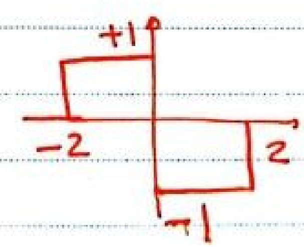
$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\Bigg($$  $$\Bigg)$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$ 

$$* \quad x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$

$$t\,x(t) \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}$$ 

$$t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{j}{2\pi}$$ 

-۳

(a

(a) $X(j\omega) = 2\delta(\omega+6)$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\xrightarrow[\text{Shift}]{\text{Frequency}} e^{j(-6)t} \longleftrightarrow 2\pi\delta\left(\omega-(-6)\right)$$

$$\xrightarrow{\div\pi} \frac{1}{\pi}e^{-j6t} \longleftrightarrow 2\delta(\omega+6)$$

(b

(b) $\dfrac{7j\omega+46}{-\omega^2+13j\omega+42} = \dfrac{7(j\omega)+46}{(j\omega)^2+13j\omega+42}$

$\Rightarrow X(j\omega) = \dfrac{7j\omega+46}{(j\omega+7)(j\omega+6)} = \dfrac{A}{j\omega+7} + \dfrac{B}{j\omega+6}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=7 \\ 6A+7B=46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=4 \end{cases}$

$\dfrac{1}{j\omega+7} \longleftrightarrow e^{-7t}u(t)$

$\dfrac{1}{j\omega+6} \longleftrightarrow e^{-6t}u(t)$

$\Rightarrow X(j\omega) = \dfrac{3}{j\omega+7} + \dfrac{4}{j\omega+6} \longleftrightarrow \left(3e^{-7t}+4e^{-6t}\right)u(t)$

(c

(C) $x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sin 2\omega - j\cos 2\omega}{1 + j\omega/3}\right) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{-j e^{2\omega j}}{1+j\omega/3}\right)$

$$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = \frac{-j e^{2\omega j}}{1 + j\omega/3}$$

$$z(t) \longleftrightarrow Z(\omega) = \frac{-j}{1 + j\omega/3} = \frac{-3j}{3 + j\omega}$$

$$\boxed{e^{-\alpha t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + j\omega}} \Rightarrow z(t) = \underbrace{(-3j)}_{\text{ضریب عددی ثابت}} e^{-3t} u(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} Y(\omega) = e^{2\omega j} Z(\omega) \\ \Rightarrow y(t) = z(t+2) = (-3j) e^{-3t-6} u(t+2) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ -jt\, f(t) \longleftrightarrow \frac{d}{d\omega} F(\omega) \end{array}} \Rightarrow \begin{cases} X(\omega) = \frac{d}{d\omega} Y(\omega) \\ \Rightarrow x(t) = -jt\, y(t) \end{cases}$$

$$= -3t\, e^{-3t-6} u(t+2)$$

(d

(d) $X(j\omega) = \pi e^{-3|\omega|}$

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\xrightarrow{\text{Duality}} \frac{2a}{a^2+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

$$\xrightarrow{a=3} \frac{6}{9+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-3|\omega|}$$

$$\overset{\div 2}{\Longrightarrow} \frac{3}{9+t^2} \longleftrightarrow \pi e^{-3|\omega|}$$

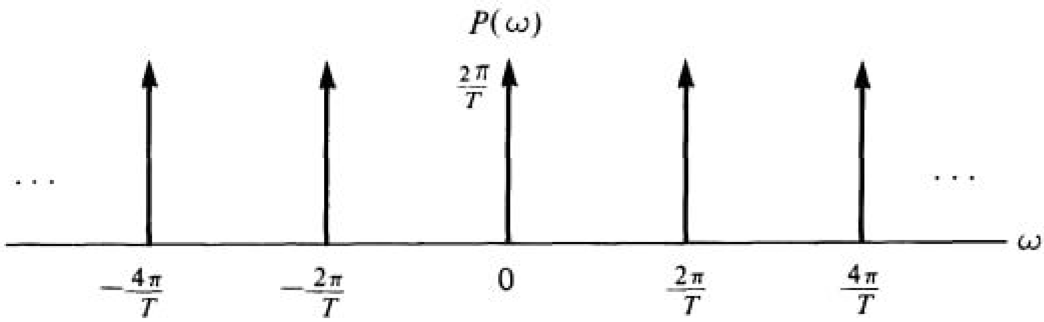
۴- a)

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk(2\pi/T)t}\, dt = \frac{1}{T}$$

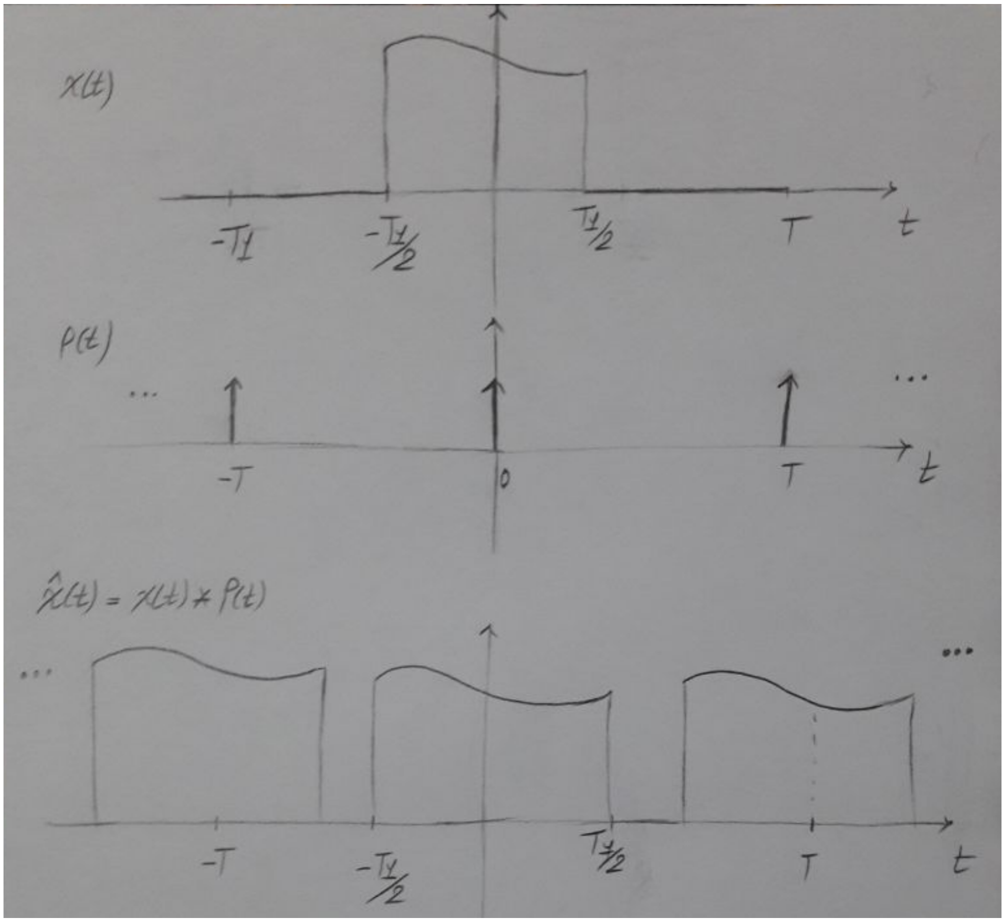
b)

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$



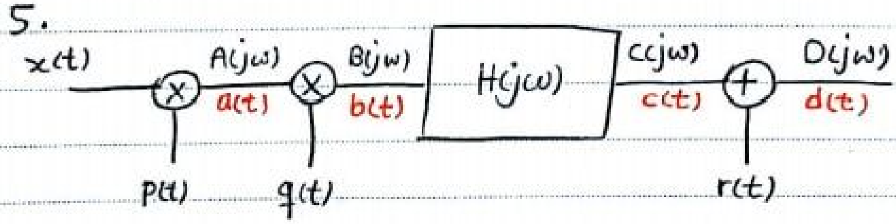
(c




همانطور که می‌دانیم، کانولوشن $x(t)$ با $\delta(t-t_0)$، حاصلش $x(t-t_0)$ است $\Leftarrow$
کانولوشن با قطاری از ضربه‌ها، منجر به تکرار سیگنال $x(t)$ در بازه‌هایی به طول $T$ می‌شود.
حال اگر $T$ کوچک باشد، تکرارهای $x(t)$ به یکدیگر برخورد می‌کنند، اما اگر $T$ به قدر کافی بزرگ باشد، سیگنال حاصل، سیگنالی متناوب است که از تکرار سیگنال $x(t)$ بدست می‌آید.

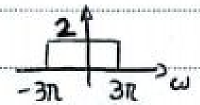
-۵

5.




$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ $\quad p(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ $\quad q(t) = \cos(3\pi t)$

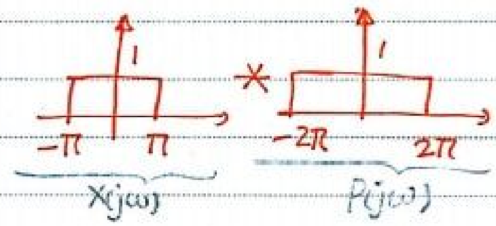
$H(j\omega) =$




$r(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

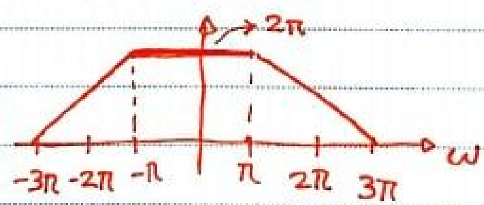
$A(j\omega)$ محاسبه* $\quad a(t) = x(t)\,p(t) \Rightarrow A(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(j\omega) * P(j\omega)\right)$

$\Rightarrow A(j\omega) = \frac{1}{2\pi}$

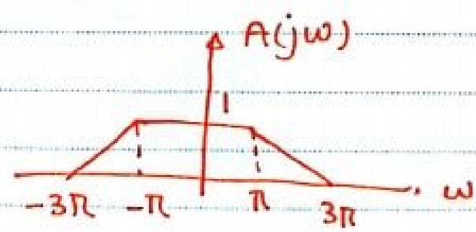



*برای انجام این convolution ، از کادر موجود در سولوشن سؤال 2c تمرین 2 استفاده کنید

$\Rightarrow A(j\omega) = \frac{1}{2\pi}$

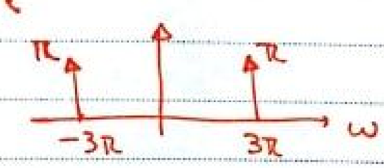



$=$



* محاسبه $B(j\omega)$ $\quad b(t) = a(t)\,q(t) \Rightarrow B(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(A(j\omega) * Q(j\omega)\right)$

$$q(t) = \cos(3\pi t) \Rightarrow Q(j\omega) = \pi\left(\delta(\omega - 3\pi) + \delta(\omega + 3\pi)\right)$$

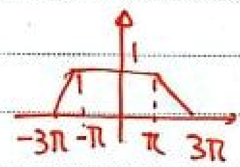



* یادآوری : $\quad \text{convolution}\left(\delta(\omega-\omega_0), X(j\omega)\right) = X(j(\omega-\omega_0))$

$$\Rightarrow B(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(A(j\omega) * \pi\left(\delta(\omega-3\pi)+\delta(\omega+3\pi)\right)\right)$$

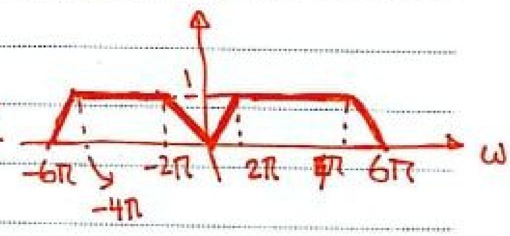
$$= \frac{1}{2}\left(A(j(\omega-3\pi)) + A(j(\omega+3\pi))\right)$$

$A(j\omega)$ :

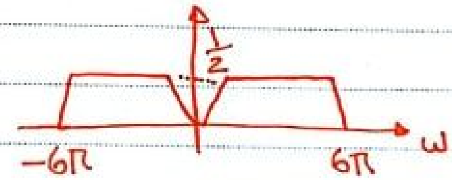



$B(j\omega) =$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(A(j(\omega-3\pi)) + A(j(\omega+3\pi))\right) = \frac{1}{2}$$

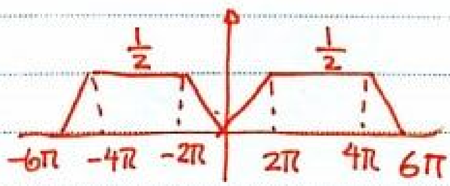



$$\Rightarrow B(j\omega) =$$

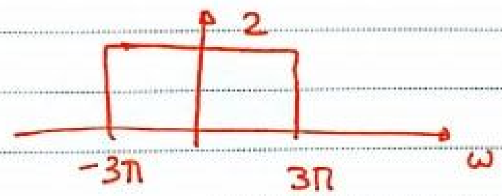


$C(j\omega)$ محاسب * $C(j\omega) = B(j\omega)\, H(j\omega)$

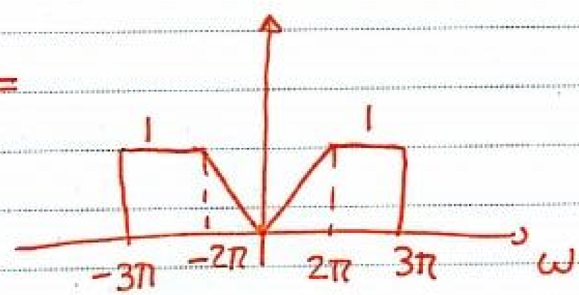
$B(j\omega)$ :




$H(j\omega)$ :




$\Rightarrow C(j\omega) =$



-۶

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{6 - \omega^2 + 5j\omega}$$

الف)

$$6H(j\omega) \underbrace{- \omega^2}_{+j^2\omega^2} H(j\omega) + 5j\omega H(j\omega) = j\omega + 2$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} 6h(t) + \frac{d^2h(t)}{dt} + 5\frac{dh(t)}{dt} = \frac{d\delta(t)}{dt} + 2\delta(t)$$

با جایگذاری $x(t) = \delta(t)$ , $y(t) = h(t)$ داریم :

$$6y(t) + \frac{d^2y(t)}{dt} + 5\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

ب) $h(t) = F^{-1}\{H(j\omega)\}$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega+3)(j\omega+2)} = \frac{1}{j\omega+3} \xrightarrow{F^{-1}} e^{-3t}u(t)$$

ج) $$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+4} - j\underbrace{\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{j\omega+4}\right\}}_{\frac{-1}{(j\omega+4)^2}} = \frac{j\omega+3}{(j\omega+4)^2}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{\cancel{j\omega+3}}{(j\omega+4)^2} \times \frac{\cancel{j\omega+2}}{(\cancel{j\omega+2})(\cancel{j\omega+3})}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+4)^2} \Rightarrow y(t) = t e^{-4t} u(t)$$

۲) $x_1(t) = e^{2t} \longrightarrow$ می دانیم $e^{2t}$ تبدیل فوریه ندارد.

اما اگر کانولوشن را انجام دهیم، سیستم برای این ورودی، خروجی می دهد:

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\tau} e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= e^{-3t} \int_{-\infty}^{t} e^{5\tau}\, d\tau = e^{2t} \times \frac{1}{5}$$

۷- الف)

الف) $\Rightarrow x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$

$$\Rightarrow \frac{d^{۲} h(t)}{dt^{۲}} + ۶ \frac{dh(t)}{dt} + ۹ h(t) = \frac{d^{۲} \delta(t)}{dt^{۲}} + ۳ \frac{d\delta(t)}{dt} + ۲ \delta(t)$$

$$\xrightarrow{FT} j^{۲} w^{۲} H(jw) + ۶ jw H(jw) + ۹ H(jw)$$

$$= j^{۲} w^{۲} + ۳ jw + ۲$$

$$\Rightarrow H(jw) = \frac{j^{۲} w^{۲} + ۳ jw + ۲}{j^{۲} w^{۲} + ۶ jw + ۹} = 1 - \frac{۳ jw + ۷}{(۳ + jw)^{۲}}$$

$$= 1 - \frac{۳}{jw + ۳} + \frac{۲}{(jw + ۳)^{۲}}$$

$$h(t) = \delta(t) - ۳ e^{-۳t} u(t) + ۲ t e^{-۳t} u(t)$$

ب و پ)

ب) با عوض کردن جای $x$ و $y$ در معادله‌ی سیستم، در واقع معادله‌ی سیستم وارون را خواهیم داشت:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 6\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$$

برای محاسبه‌ی $g(t)$: $\xrightarrow{\text{راه اول}}$ مثل قسمت قبل، $x(t) = \delta(t)$ بگذاریم، تبدیل فوریه بگیریم و بعد $F^{-1}$.

راه کوتاه‌تر: $\xrightarrow{\text{راه دوم}}$ در مورد پاسخ ضربه‌ی سیستم معکوس می‌دانیم که:

$$h(t) * g(t) = \delta(t) \Rightarrow H(j\omega) \times G(j\omega) = 1$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{j^2\omega^2 + 6j\omega + 9}{j^2\omega^2 + 3j\omega + 2} = 1 + \frac{3j\omega + 7}{(2+j\omega)(1+j\omega)}$$

$$= 1 + \frac{4}{1+j\omega} + \frac{-1}{2+j\omega} \xrightarrow{F^{-1}} \delta(t) + 4e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# تمرین پنجم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

## مهلت تحویل: ۹۹/۱۰/۵

- تمرینات به صورت انفرادی پاسخ داده شوند.
- فایل پاسخ با قالب «HW5_stdNumber.pdf» بارگذاری شود.
- به ازای هر روز تاخیر در ارسال، ۱۰ درصد از نمره کسر می‌شود.
- از طریق ایمیل زیر می‌توانید با تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید:

signalsystem.fall2020@gmail.com

## بخش تئوری.

**سوال ۱-** دو سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$y_1[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

$$y_2[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}$$

الف) برای هر دو سیستم، بدون محاسبه عملکرد سیستم، با ذکر دلیل مشخص کنید که این سیستم چگونه فیلتری است (پایین گذر، میان گذر، بالا گذر).

ب) برای هر سیستم پاسخ فرکانسی را بدست آورید و اندازه آن را بین $-2\pi$ و $2\pi$ رسم کنید.

**سوال ۲-** فرض کنید $x(t) = cos(200\pi t) + 2sin(400\pi t)$ و $g(t) = x(t)\, sin(400\pi t)$ باشد. اگر سیگنال $w(t) = g(t)\, sin(400\pi t)$ را از یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل و با پهنای باند $400\pi$ و بهره باند عبور ۲ بگذرد، سیگنال بدست آمده در خروجی فیلتر را بدست آورید.

**سوال ۳-** سیگنال $x(t) = (\frac{sin\,(50\pi t)}{\pi t})$ را در نظر بگیرید که یک بار با فرکانس نمونه‌برداری $w_s = 50\pi$ و یکبار با فرکانس $w_s = 150\pi$ نمونه‌برداری می‌کنیم.

الف) سیگنال های نمونه‌برداری شده را در حوزه فرکانس رسم کنید. آیا می‌توان این سیگنال‌ها را بازیابی کرد؟

ب) حداقل فرکانس نمونه‌برداری برای این سیگنال باید چه قدر باشد؟

**سوال ۴-** نرخ نایکوئست را برای سیگنال‌های زیر بدست آورید.

$(a)\ x(t) = e^{-5t}u(t)$

$(b)\ x(t) = 1 + cos(100\pi t) + cos(300\pi t)\ sin(50\pi t)$

$(c)\ x(t) = u(t) - u(t-4)$

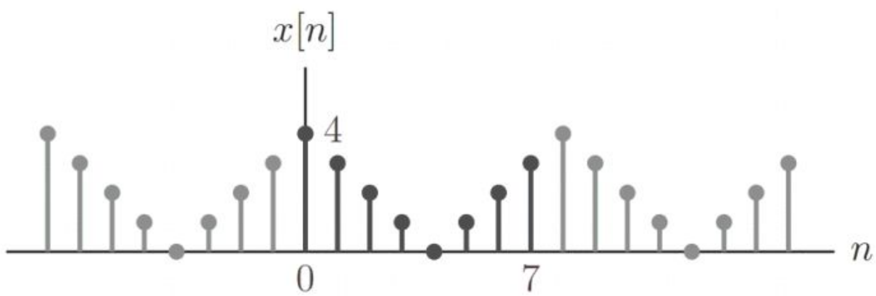
**سوال ۵-** اگر x[n] به شکل زیر باشد، ضرایب سری فوریه $a_1$ و $a_3$ را بدست آورید.

$$x[n] = 2 + cos(\frac{3\pi}{7}(n-1))$$

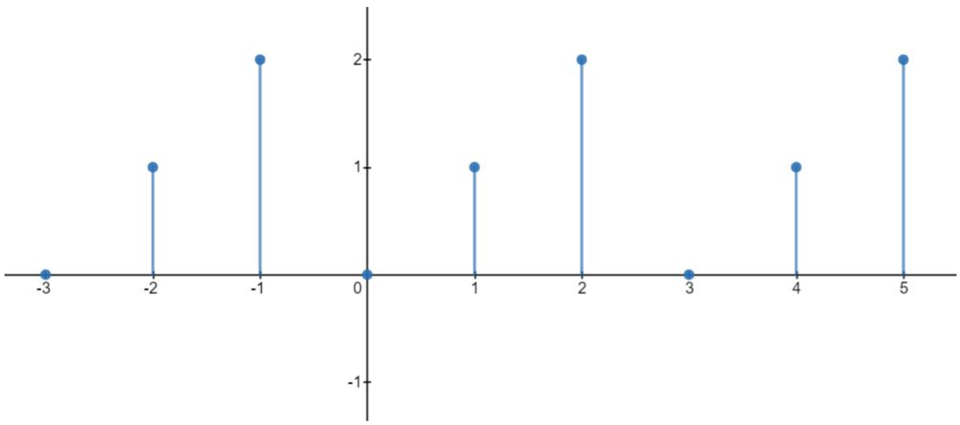
**سوال ۶-** سری فوریه سیگنال‌های گسسته زیر را بیابید.

$(a)\ x[n] = 1 + cos(n\frac{\pi}{2}) + sin(n\pi)$

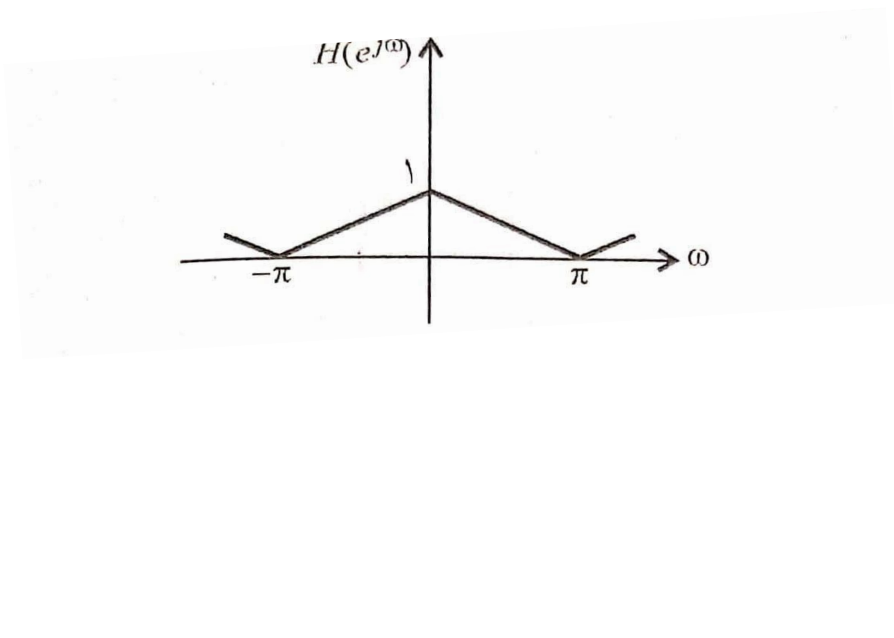
$(b)$



**سوال ۷-** سیگنال متناوب زیر با دوره تناوب N=3 را در نظر بگیرید.




این سیگنال وارد یک سیستم LTI با پاسخ فرکانس زیر می‌شود. ضریب $e^{\frac{j2\pi}{3}}$ در سری فوریه خروجی سیستم بدست آورید.

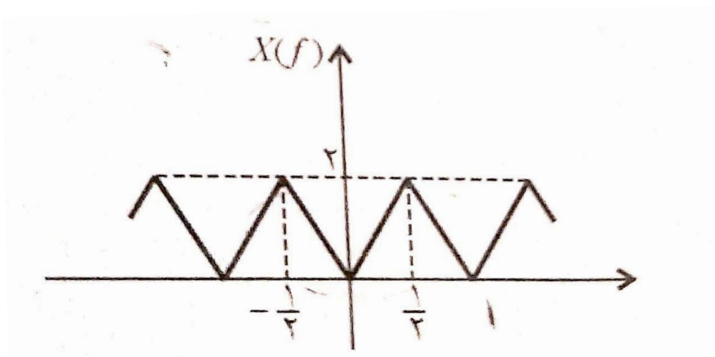


**سوال ۸-** تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

$$(a)\ x[n] = (n+1)\, a^n u[n]$$

$$(b)\ x[n] = \frac{sin^2(\frac{n\pi}{2})}{(n\pi)^2}$$

**سوال ۹-** تبدیل فوریه سیگنال x[n] مطابق شکل زیر داده شده است.




انرژی سیگنال x[n] در زمان‌های مثبت یعنی حاصل زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |x[n]|^2$$

**سوال ۱۰-** سیستم LTI توصیف‌شده با معادله‌ی تفاضلی را در نظر بگیرید.

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$$

الف) پاسخ فرکانسی این سیستم را بدست آورید.

ب) پاسخ سیستم به ورودی‌های زیر را بدست آورید.

$$(a)\ x[n] = (0.5)^n\ u[n]$$

$$(b)\ x[n] = (-0.5)^n\ u[n]$$

$$(c)\ X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-3j\omega}$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# پاسخ تمرین پنجم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

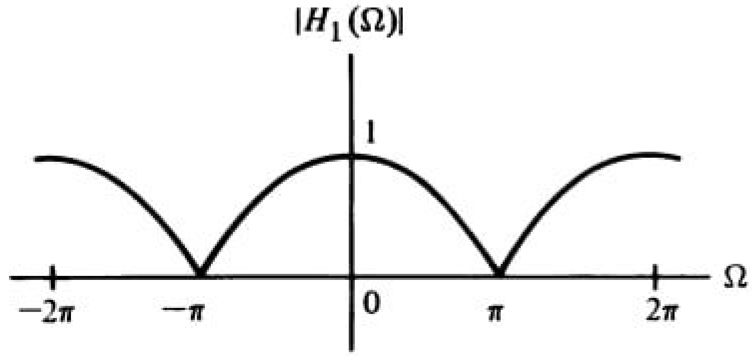
-١

**(a)** We see by examining $y_1[n]$ and $y_2[n]$ that $y_1[n]$ averages $x[n]$ and thus tends to suppress changes while $y_2[n]$ tends to suppress components that have not varied from $x[n-1]$ to $x[n]$. Therefore, the $y_1[n]$ system is lowpass and $y_2[n]$ is highpass.

**(b)** Taking the Fourier transforms yields

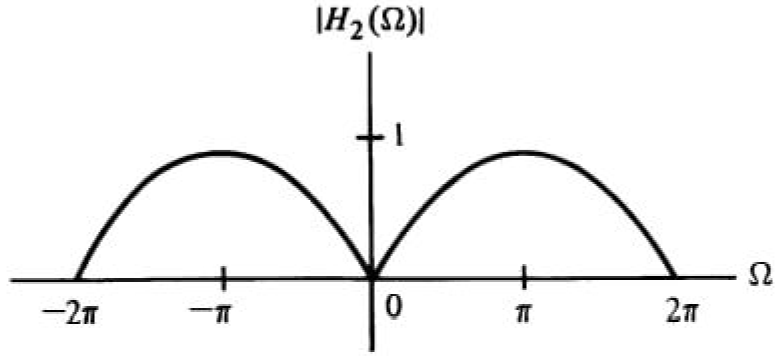
$$Y_1(\Omega) = X(\Omega)\left(\frac{1+e^{-j\Omega}}{2}\right),$$

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{2}(1+e^{-j\Omega})$$



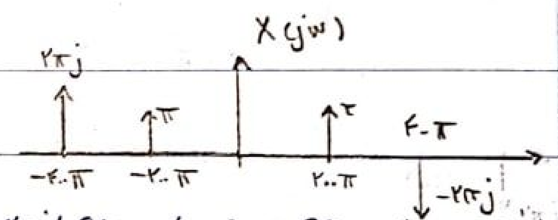

$$Y_2(\Omega) = X(\Omega)\left(\frac{1-e^{-j\Omega}}{2}\right),$$

$$H_2(\Omega) = \frac{1}{2}(1-e^{-j\Omega})$$



۲-

$x(t) = \cos(۲۰۰\pi t) + ۲\sin(۴۰۰\pi t)$




$X(j\omega) = \pi(\delta(\omega+۲۰۰\pi) + \delta(\omega-۲۰۰\pi)) + ۲\pi j(\delta(\omega+۴۰۰\pi) - \delta(\omega-۴۰۰\pi))$

$g(t) = x(t)\sin(۴۰۰\pi t)$

$\Rightarrow G(j\omega) = X(j\omega) * \frac{\pi}{j}(\delta(\omega-۴۰۰\pi) - \delta(\omega+۴۰۰\pi))$

$w(t) = g(t)\sin(۴۰۰\pi t)$

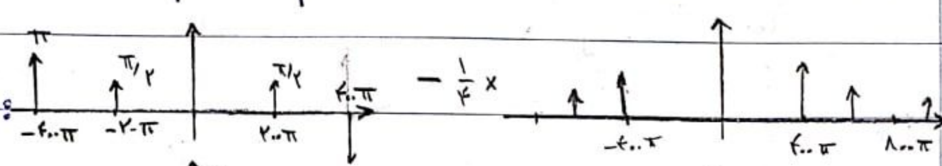
$\Rightarrow W(j\omega) = G(j\omega) * \frac{\pi}{j}(\delta(\omega-۴۰۰\pi) - \delta(\omega+۴۰۰\pi))$

$\Rightarrow$ یا, $w(t) = x(t)\sin^{۲}(۴۰۰\pi t) = x(t)\left(\frac{1}{۲}(1-\cos(۸۰۰\pi t))\right)$

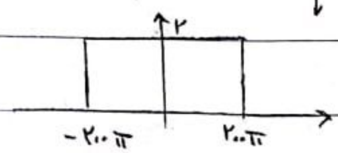
$= \frac{x(t)}{۲} - x(t)\frac{\cos ۸۰۰\pi t}{۲}$

$\Rightarrow W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{۲} - \frac{1}{۴}\left(X(j(\omega+۸۰۰\pi)) + X(j(\omega-۸۰۰\pi))\right)$

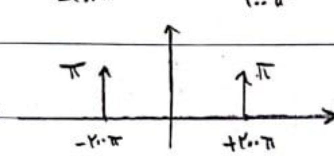
$W(j\omega)$:




فیلتر:




$\Rightarrow$ خروجی:

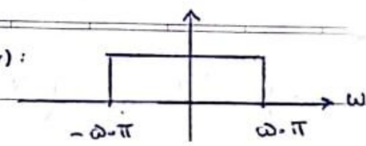



$\Downarrow$

output: $\cos(۲۰۰\pi t)$

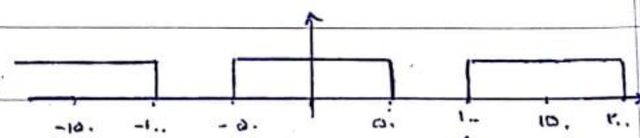
-۳

الف) $x(t) = \frac{\sin 500\pi t}{\pi t} \Rightarrow X(j\omega):$




$\rightarrow W_s = 1500\pi :$

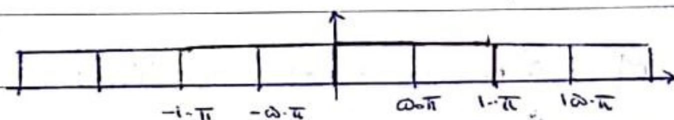
$\Rightarrow X_s(j\omega):$




← قابل بازیابی ✓

$\rightarrow W_s = 500\pi$

$\Rightarrow X_s(j\omega):$




← غیرقابل بازیابی X

ب) $W_{s\,min} = 2W_m = 1000\pi$

۴-

a) $x(t) = e^{-5t} u(t) \longleftrightarrow X(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 5}$

Band-Limited نیست

b) $x(t) = 1 + \cos(100\pi t) + \cos(300\pi t)\sin(50\pi t)$

$1$: یک impulse در $\omega = 0$

$\cos(100\pi t)$: دو impulse در $\omega = \pm 100\pi$

$\underbrace{\underbrace{\cos(300\pi t)}_{\substack{2\text{ impulses} \\ \omega = \pm 300\pi}} \underbrace{\sin(50\pi t)}_{\substack{2\text{ impulses} \\ \omega = \pm 50\pi}}}$

ضرب در حوزه زمان ← کانولوشن در فرکانس

باعث ایجاد impulse هایی در نقاط زیر می‌شود

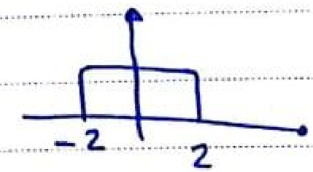
$\omega = -350\pi, -250\pi, 250\pi, 350\pi$

$\max\{0, -100\pi, 100\pi, -350\pi, 350\pi, -250\pi, 250\pi\} = 350\pi$

$\Rightarrow \omega_M = 350\pi$

$\Rightarrow \text{Nyquist Rate} = 700\pi = 2(350\pi)$

c) $x(t) = u(t) - u(t-4)$




$$\longleftrightarrow \quad \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

$$\xrightarrow{\text{shift}} x(t) \longleftrightarrow e^{-j\omega 2}\,\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

Band-limited نیست

**۵-**

$$N=\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{7}}\times m=\frac{14}{3}m \xrightarrow{m=3} N=14 \quad , \quad \omega_0=\frac{\pi}{7}$$

$$x[n]=2+\frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi}{7}}e^{j\frac{3n\pi}{7}}+\frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{7}}e^{-j\frac{3n\pi}{7}}$$

با توجه به فرکانس پایه $\omega_0=\frac{\pi}{7}$ ضرایب سری فوریه به شکل زیر بدست می‌آید:

$a_0=2$ , $a_3=\frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi}{7}}$ , $a_{-3}=\frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{7}}$ , سایر $a_k$ ها در یک پریود $=0$

-۶

a)

$$x[n] = 1+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\sin(n\pi)$$

$$\sin(n\pi)=0 \Rightarrow x[n] = 1+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

متناوب با $N=4$

$$x[n] = 1+\frac{1}{2}\left(e^{jn\frac{\pi}{2}}+e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\rightarrow a_0 = a_4 = a_8 = a_{12} = \cdots = 1$$

$$a_1 = a_5 = a_9 = a_{13} = \cdots = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = a_3 = a_7 = a_{11} = \cdots = \frac{1}{2}$$

e) $N=8 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{4}n} \xrightarrow[\text{با رسم}]{} \underbrace{\frac{1}{8}\left[4+3e^{-jk\frac{\pi}{4}}+\cdots+3e^{-jk\frac{7\pi}{4}}\right]}_{=a_k}$$

۷-

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{3}\right)n}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{3}(0+1+2) = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(e^{-j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{-j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{3}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

می‌دانیم که برای سیستم LTI، رابطه سری فوریه ورودی و سری فوریه خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$$b_k = a_k H(e^{j\omega})$$

ضرب $e^{\frac{j2\pi}{3}}$ را می‌خواهیم. بنابراین به ازای $k=-1$ داریم:

$$b_{-1} = a_{-1}H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{3}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 2e^{j2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}e^{\frac{j2\pi}{3}} + \cdots$$

بنابراین، ضریب $e^{\frac{j2\pi}{3}}$ در سری فوریه خروجی برابر $\frac{1}{9}$ می‌باشد.

-۸

ابتدا یادآوری می‌کنیم:

$$nx[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$

$$a^n u[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{۱}{۱-ae^{-j\omega}}$$

بنابراین داریم:

$$x[n]=(n+۱)a^n u[n]=na^n u[n]+a^n u[n]$$

$$na^n u[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{۱}{۱-ae^{-j\omega}}\right\}=\frac{ae^{-j\omega}}{(۱-ae^{-j\omega})^۲}$$

$$a^n u[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{۱}{۱-ae^{-j\omega}}$$

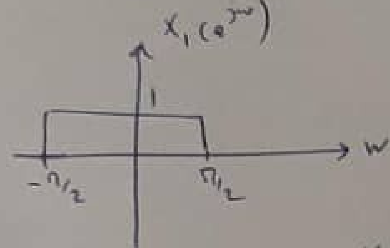
$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{ae^{-j\omega}}{(۱-ae^{-j\omega})^۲}+\frac{۱}{۱-ae^{-j\omega}}=\frac{ae^{-j\omega}+۱-ae^{-j\omega}}{(۱-ae^{-j\omega})^۲}=\frac{۱}{(۱-ae^{-j\omega})^۲}$$

$$x[n] = \frac{\sin^2(n\pi/2)}{(n\pi)^2}$$

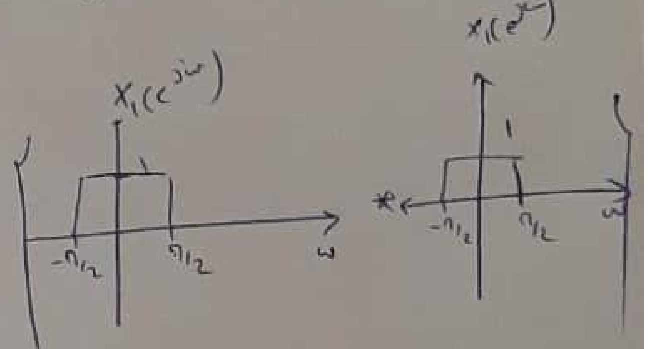
$x[n] \rightarrow \dfrac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi}$ در واقع ما ضرب دو سیگنال سینک است

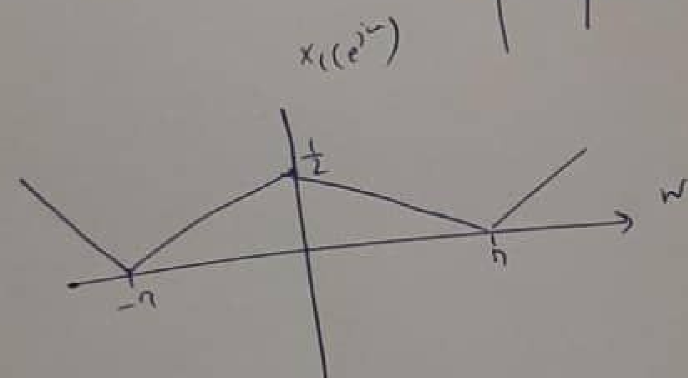
$$x[n]\, y[n] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \{ X(e^{j\omega}) \circledast Y(e^{j\omega})$$

$x_1[n] \xleftrightarrow{F}$

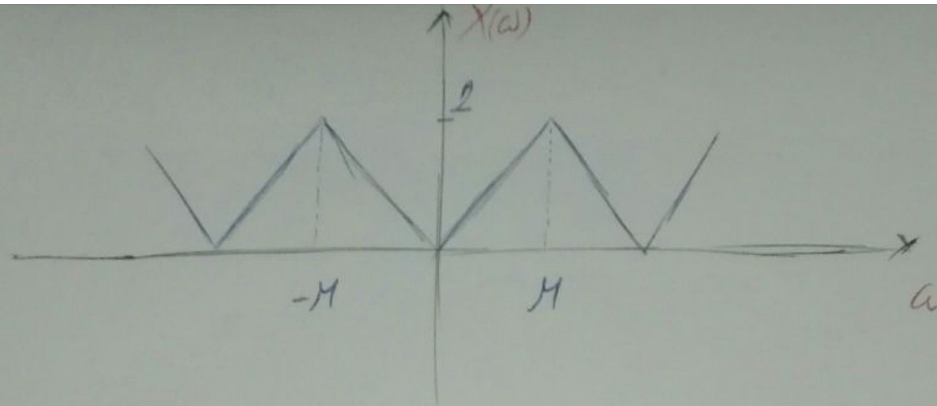



$$\left( \frac{\sin n\pi/2}{n\pi} \right)^2 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}$$



۹-




پارسوال $\rightarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2M}\int_{2M} |X(e^{j\omega})|^2 \, d\omega$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 2\times\frac{1}{2M}\int_0^M \left(\frac{2}{M}\omega\right)^2 d\omega$$

از آنجا که $X(\omega)$ زوج است ← انتگرال در $-M$ تا $M$ را به شکل دو برابر انتگرال در بازه‌ی $0$ تا $M$ نوشتیم.

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{4}{3M^2}\omega^3\right)\Big|_0^M = \frac{1}{M}\times\frac{4}{3M^2}\times M^3 = \frac{4}{3}$$

ویژگی ← اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد ← $X(\omega)$ نیز حقیقی و زوج خواهد بود.
و عکس این قضیه نیز برقرار است.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]|^2 + (x[0])^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |x[n]|^2$$

$$= \underbrace{\left(x[0]\right)^2}_{?} + \underbrace{2\sum_{n=1}^{\infty} |x[n]|^2}_{\text{خواسته‌ی سؤال}} = \frac{4}{3}$$

برای محاسبه‌ی $|x[0]|^2$ از تعریف تبدیل فوریه معکوس استفاده می‌کنیم:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\oint_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$\xrightarrow{n=0} \quad x[0] = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})\, d\omega}_{\text{جمع مساحت دو تا مثلث}} = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \frac{2\pi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{6}}$$

-۱۰

$$y[n] + ۰٫۵\, y[n-1] = x[n]$$

الف) $\xrightarrow{F.T} \quad Y(e^{jw}) + \frac{1}{۲} e^{-jw} Y(e^{jw}) = X(e^{jw})$

$$\Rightarrow H(e^{jw}) = \frac{1}{1+\frac{1}{۲}e^{-jw}}$$

ب)

a) $x[n] = (۰٫۵)^n u[n] \rightsquigarrow \alpha^n u[n] \xrightarrow{FT} \frac{1}{1-\alpha e^{-jw}}$

$$\Rightarrow X(e^{jw}) = \frac{1}{1-\frac{1}{۲}e^{-jw}}$$

$$\Rightarrow Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) H(e^{jw}) = \frac{1}{1-\frac{1}{۲}e^{-jw}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{۲}e^{-jw}}$$

$$= \frac{۰٫۵}{1-\frac{1}{۲}e^{-jw}} + \frac{۰٫۵}{1+\frac{1}{۲}e^{-jw}} \xrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{۲}\left( (\tfrac{1}{۲})^n u[n] + (-\tfrac{1}{۲})^n u[n] \right)$$

b) $x[n] = (-0.5)^n \, u[n]$

$$\Rightarrow X(e^{jw}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$\Rightarrow Y(e^{jw}) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-jw})^2}$$

$$\rightsquigarrow (n+1)\alpha^n u[n] \xrightarrow{FT} \frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})^2}$$

$$\Rightarrow y[n] = (n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

c) $X(e^{jw}) = 1 + 2e^{-2jw}$

$$\Rightarrow Y(e^{jw}) = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}}_{\downarrow F^{-1}} + \frac{2e^{-2jw}}{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$\downarrow F^{-1} \qquad\qquad \downarrow F^{-1}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# تمرین ششم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

## مهلت تحویل: ۹۹/۱۰/۱۹

- تمرینات به صورت انفرادی پاسخ داده شوند.
- فایل پاسخ با قالب «HW6_stdNumber.pdf» بارگذاری شود.
- به ازای هر روز تاخیر در ارسال، ۱۰ درصد از نمره کسر می‌شود.
- از طریق ایمیل زیر می‌توانید با تدریس‌یاران درس در ارتباط باشید:

signalsystem.fall2020@gmail.com

## بخش تئوری.

**سوال ۱-** تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرایی و نمودار صفر-قطب را برای سیگنال‌های زیر تعیین کنید.

$(a)\ x(t) = 3t^2 e^{-3t} u(t)$

$(b)\ x(t) = |t| e^{-4t}$

$(c)\ x(t) = (t-3) e^{-2t} u(t-3)$

$(d)\ x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

**سوال ۲-** سیگنال $x(t)$ متناظر با تبدیل لاپلاس و نواحی همگرایی داده شده را پیدا کنید.

$(a)\ X(s) = \frac{s}{s^2+9}\ :\ Real(s) > 0$

$(b)\ X(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}\ :\ -4 < Real(s) < -3$

$(c)\ X(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$ : for every possible ROC

**سوال ۳-** اگر عبارت جبری تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زیر برابر باشد، مقدار $A$ و $t_0$ را بدست آورید.

$$x(t) = e^{-5t}u(t-1)$$

$$y(t) = Ae^{-5t}u(-t-t_0)$$

**سوال ۴-** در یک سیستم LTI، به ازای ورودی $x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)$ خروجی $y(t) = te^{-4}u(t)$ بدست آمده است. با استفاده از تبدیل لاپلاس:

الف) تابع تبدیل سیستم را بدست آورید.

ب) پاسخ سیستم به ورودی $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ را بدست آورید.

ج) پاسخ سیستم به ورودی $x_2(t) = e^{2t}$ را بدست آورید.

د) تابع تبدیل معکوس سیستم را بدست آورید.

**سوال ۵-** دو سیستم سمت راستی $x(t)$ و $y(t)$ با معادلات دیفرانسیل زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$\frac{d}{dt}x(t) = -2y(t) + \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = 2x(t)$$

$X(s)$ ، $Y(s)$ و نواحی همگرایی آن‌ها را بیابید.

**سوال ۶-** یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

الف) تابع تبدیل این سیستم را به دست آورید و نمودار صفر-قطب آن را رسم کنید.

ب) پاسخ ضربه این سیستم را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید:

۱- در صورتی که سیستم پایدار باشد.

۲- در صورتی که سیستم علّی باشد.

۳- در صورتی که سیستم نه علّی باشد و نه پایدار.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی کامپیوتر

# پاسخ تمرین ششم درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

## اساتید درس: دکتر راستی، دکتر آقائیان

-١

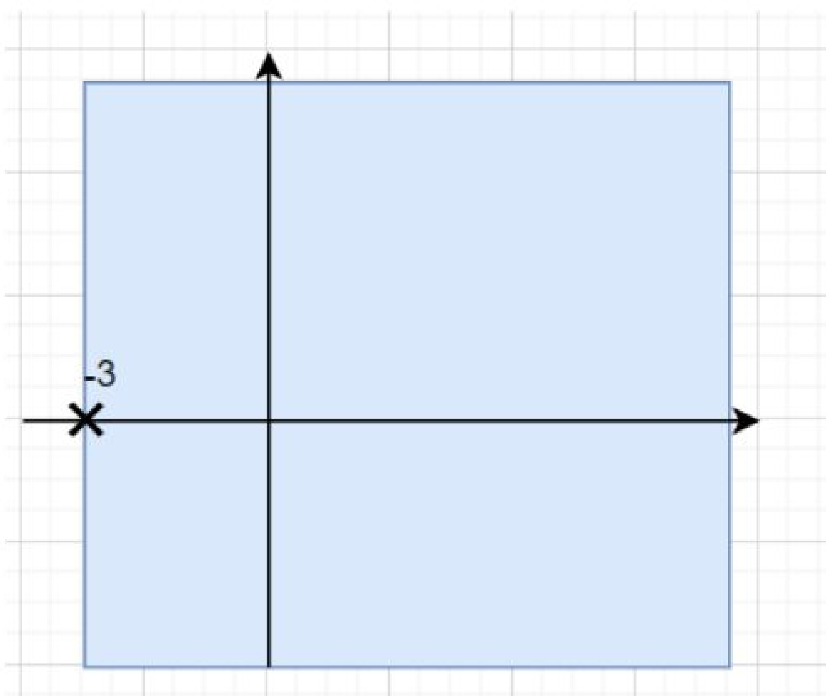
a.

$x(t) = 3t^2 e^{-3t} u(t)$

$z(t) = e^{-3t} u(t) \xrightarrow{S} Z(s) = \frac{1}{s+3}$, RoC = $Real\,\{s\} > -3$

$t^2 z(t) \xrightarrow{S} \left(\frac{d^2 Z(s)}{ds^2}\right) = \frac{d\left(-\frac{1}{(s+3)^2}\right)}{ds} = \frac{2(s+3)}{(s+3)^4} = \frac{2}{(s+3)^3}$, RoC = $Real\{s\} > -3$

$x(t) \xrightarrow{S} X(s) = \frac{6}{(s+3)^3}$, RoC = $Real\{s\} > -3$.



b.

$$x(t) = |t|e^{-4t} = -te^{-4t}u(-t) + te^{-4t}u(t) = y(t) + z(t)$$

$$y(t) \overset{\mathrm{S}}{\rightarrow} Y(s) = -\frac{d\left(\frac{1}{s+4}\right)}{ds} = \frac{1}{(s+4)^2}, \mathrm{RoC} = Re\{s\} < -4$$

$$z(t) \overset{\mathrm{S}}{\rightarrow} Z(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+4}\right) = \frac{1}{(s+4)^2}, \mathrm{RoC} = Re\{s\} > -4$$

$$X(s) = \frac{2}{(s+4)^2}, \mathrm{Roc} = \Phi$$

c.

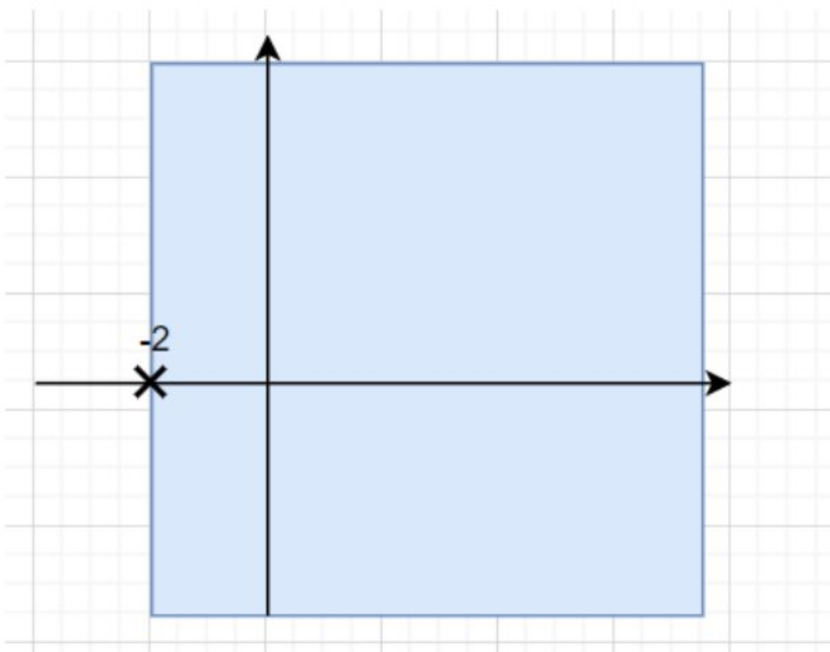
$$x(t) = (t-3)e^{-2t}u(t-3) = (t-3)e^{-2(t-3)}u(t-3)e^{-6}$$

$$y(t) = (t)e^{-2t}u(t)e^{-6}, z(t) = e^{-2t}u(t)e^{-6}$$

$$Z(s) = \frac{e^{-6}}{s+2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$

$$Y(s) = -\frac{d}{ds}\big(Z(s)\big) = \frac{e^{-6}}{(s+2)^2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$

$$X(s) = e^{-3s}Y(s) = \frac{e^{-6-3s}}{(s+2)^2}, \text{RoC} = Re\{s\} > -2$$




درنقطه منفی دو، دو عدد قطب دارد، یک عدد هم صفر در بینهایت دارد،

d.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt = \int_{0}^{1} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}\left(e^{-st}\right]_{1}^{0}) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}), \text{RoC} = \mathbb{R}^2.$$

در نقطه صفر، هم صفر دارد و هم قطب که با هم خنثی می‌شوند.

-۲

۲) a. $X(s) = \dfrac{s}{s^{۲}+۹}$   $\text{Real}\{s\} > ۰$

سیگنال دست راستی

$\Rightarrow x(t) = \cos ۳t \cdot u(t)$

b. $X(s) = \dfrac{s+۲}{s^{۲}+۷s+۱۲}$   $-۴ < \text{Real}\{s\} < -۳$

$\Rightarrow X(s) = \dfrac{-۱}{s+۳} + \dfrac{۲}{s+۴} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{۱}{s+۳} \text{ for } s < -۳\right\}$

$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{۲}{s+۴} \text{ for } s > -۴\right\}$

$\Rightarrow x(t) = e^{-۳t}\, u(-t) + ۲e^{-۴t}\, u(t)$

c.

$$X(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}$$

$$A = \frac{(s-1)}{(s+3)(s^2+s+1)}|_{s=-2} = -1$$

$$B = \frac{(s-1)}{(s+2)(s^2+s+1)}|_{s=-3} = \frac{4}{7}$$

$$s-1 = A(s+3)(s^2+s+1) + B(s+2)(s^2+s+1) + (Cs+D)(s+2)(s+3)$$

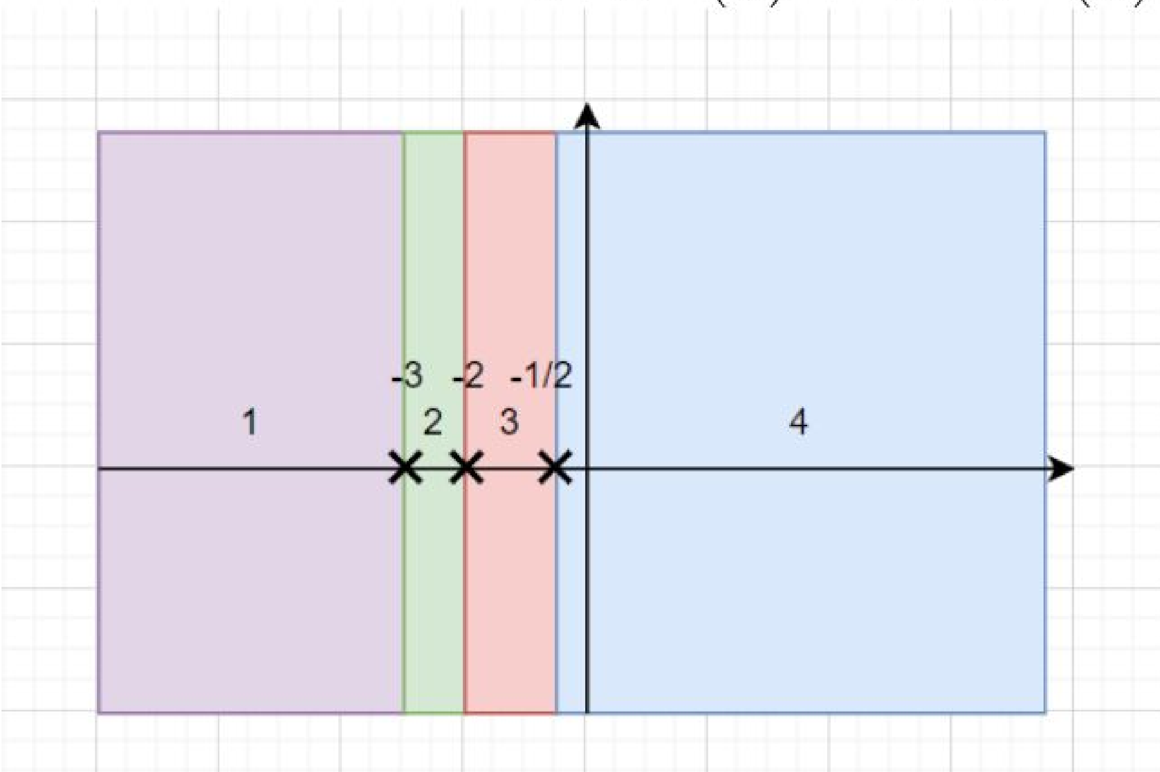
$$A(s^3+4s^2+4s+3) + B(s^3+3s^2+3s+2) + (Cs+D)(s^2+5s+6)$$
$$= A(s^3+4s^2+4s+3) + B(s^3+3s^2+3s+2) + Cs^3 + 5Cs^2 + Ds^2 + 5Ds + 6Cs + 6D$$

$$A+B+C=0 \rightarrow C = -(A+B) = \frac{3}{7}$$

$$3A+2B+6D=-1 \rightarrow 6D = -1+3-\frac{8}{7} \rightarrow D = \frac{1}{7}$$

$$-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{\frac{3}{7}s+\frac{1}{7}}{s^2+s+1}=-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{3}{7}\frac{s+\frac{1}{3}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{4}{7}}{s+3}+\frac{3}{7}\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{3}}{21}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$




$$1: x(t)=e^{-2t}u(-t)-\frac{4}{7}e^{-3t}u(-t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$$

$$2: x(t)=-e^{-2t}u(t)-\frac{4}{7}e^{-3t}u(-t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$$

$$3: x(t)=-e^{-2t}u(t)+\frac{4}{7}e^{-3t}u(t)-\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)+\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(-t)$$

$$4: x(t)=-e^{-2t}u(t)+\frac{4}{7}e^{-3t}u(t)+\frac{3}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)-\frac{\sqrt{3}}{21}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

-۳

توجه می‌کنیم که:

$$L\left\{e^{-at}u(t)\right\}=L\left\{-e^{-at}u(-t)\right\}=\frac{1}{s+a}$$

$$L\left\{e^{-a(t-1)}u(t-1)\right\}=L\left\{-e^{-a(t-1)}u(-(t-1))\right\}=\frac{e^{-s}}{s+a}$$

بنابراین:

$$L\left\{e^{-5(t-1)}u(t-1)\right\}=L\left\{-e^{-5(t-1)}u(-(t-1))\right\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{e^{-5t}u(t-1)\right\}=L\left\{-e^{-5t}u(-t+1)\right\}$$

لذا $A=-1$ و $t_0=-1$

۴-

$$y(t) = t e^{-۴t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{+۱}{(s+۴)^{۲}} \qquad \text{Real}\{s\} > -۴$$

$$x(t) = e^{-۴t} u(t) - t e^{-۴t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \underset{s>-۴}{\underset{\downarrow}{\frac{۱}{s+۴}}} - \underset{s>-۴}{\underset{\downarrow}{\frac{۱}{(s+۴)^{۲}}}} = \underset{s>-۴}{\underset{\downarrow}{\frac{s+۳}{(s+۴)^{۲}}}}$$

الف) $$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{+\frac{۱}{(s+۴)^{۲}}}{\frac{s+۳}{(s+۴)^{۲}}} = \frac{+۱}{s+۳} \qquad s>-۴$$

ب) $$Y_{۱}(s) = H_{۱}(s)\, X_{۱}(s)$$

$$X_{۱}(s) = \mathcal{L}\{e^{-۲t} u(t)\} = \frac{۱}{s+۲} \qquad s>-۲$$

$$\Rightarrow Y_{۱}(s) = \frac{۱}{s+۲} \times \frac{+۱}{s+۳} = \frac{A}{s+۲} + \frac{B}{s+۳}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = +۱ \\ B = -۱ \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{-۲t} u(t) - e^{-۳t} u(t)$$

ج)

$$x_2(t) = e^{2t} = e^{2t}u(t) + e^{2t}u(-t) \rightarrow X_2(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-2} = 0, \mathrm{RoC} = \Phi$$

پس لاپلاس ندارد و باید با کانولوشن رفت:

$$x_2(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{\infty} e^{-3\tau}e^{2t-2\tau}\, d\tau = e^{2t}\int_0^{\infty} e^{-5\tau}\, d\tau$$
$$= -e^{2t}\frac{1}{5}e^{-5\tau}\Big|_0^{\infty} = \frac{e^{2t}}{5}$$

د) برای به دست آوردن تابع تبدیل سیستم معکوس کافی است $y(t)$ را به عنوان ورودی و $x(t)$ را به عنوان خروجی در نظر بگیریم. که در این صورت کافی است: $G(s) = \frac{1}{H(s)}$

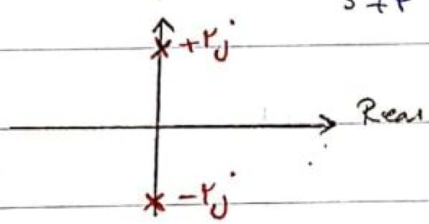
$\Rightarrow G(s) = s + 3$

-۵

$$\frac{d}{dt}x(t) = -۲y(t) + \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) = -۲Y(s) + ۱$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = ۲x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) = ۲X(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s) = \dfrac{۲}{s^۲+۴} & \rightarrow \text{دست راستی} \Rightarrow Real\{s\} > ۰ \\ X(s) = \dfrac{s}{s^۲+۴} & \rightarrow \quad〃 \qquad〃 \end{cases}$$



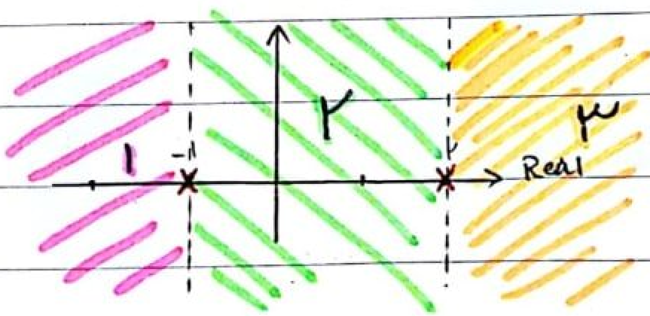
-۶

$$\frac{d^{۲}}{dt^{۲}}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - ۲y(t) = x(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

الف) $s^{۲}Y(s) - sY(s) - ۲Y(s) = X(s)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{۱}{s^{۲} - s - ۲} = \frac{۱}{(s-۲)(s+۱)}$$



ب) $H(s) = \dfrac{1/3}{s-2} - \dfrac{1/3}{s+1} \rightsquigarrow$ ROC

۱: سیستم LTI پایدار است $\longleftrightarrow$ Roc برای $H(s)$، شامل محور $j\omega$ باشد

$\Rightarrow$ ناحیه دوم: $-1 < \text{Real}\{s\} < 2$

$$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} u(-t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t)$$

۲: ROC برای $H(s)$ در یک سیستم علّی، سمت راستی است.

$\Rightarrow$ ناحیه سوم، $\text{Real}\{s\} > 2$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{3} e^{2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t)$$

۳، ناحیه اول، $\text{Real}\{s\} < -1$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{-1}{3} e^{2t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(-t)$$