



دانشکده مهندسی کامپیوتر

انتقال داده‌ها

پاییز ۱۴۰۰

تمرین فصل سوم

نظریه اطلاعات

استاد درس دکتر دیانت

نام علی صدیقی

شماره دانشجویی ۹۷۵۲۱۳۷۸

فهرست مطالب

۱ سوال اول ۲

۱.۱ الف ۲

۲.۱ ب ۲

۳.۱ ج ۲

۲ سوال دوم ۳

۱.۲ الف ۴

۲.۲ ب ۵

۳.۲ ج ۵

۴.۲ د ۶

۵.۲ ه ۷

۶.۲ و ۸

۷.۲ ز ۸

۸.۲ ح ۱۰

۹.۲ ط ۱۰

۱۰.۲ ی ۱۱

۱۱.۲ ک ۱۲

۱۲.۲ ل ۱۲

۳ سوال سوم ۱۴

۴ سوال چهارم ۱۶

۱.۴ الف ۱۶

۲.۴ ب ۱۶

۱ سوال اول

۱.۱ الف

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=1}^4 p_i \log_2(p_i) = \sum_{i=1}^4 p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \\ &= 0.5 \log_2(2) + 0.25 \log_2(4) + 0.125 \log_2(8) + 0.125 \log_2(8) \\ &= 0.5 + 0.5 + 0.375 + 0.375 = 1.75 \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right] \end{aligned}$$

۲.۱ ب

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=1}^4 p_i \log_2(p_i) = \sum_{i=1}^4 p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \\ &= 0.25 \log_2(4) + 0.5 \log_2(2) + 0.125 \log_2(8) + 0.125 \log_2(8) \\ &= 0.5 + 0.5 + 0.375 + 0.375 = 1.75 \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right] \end{aligned}$$

۳.۱ ج

با توجه به برابر شدن مقادیر بخش الف و ب و همچنین خاصیت جابجایی در جمع، می‌توان گفت آنتروپی به ترتیب الفبای منبع بستگی ندارد. در واقع از مفهوم آنتروپی نیز می‌توان این موضوع را دریافت کرد. زیرا آنتروپی بیانگر متوسط اطلاعات یا ابهام مربوط به کل پیشامدهای خروجی منبع اطلاعاتی است.

۲ سوال دوم

ابتدا جدول را با به دست آوردن احتمالات حاشیه‌ای Marginal کامل می‌کنیم.

Y/X	1	2	3	4	$P(Y)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

سپس احتمالات شرطی را به دست می‌آوریم.

$$P(Y|X) = \frac{P(X,Y)}{P(X)}$$

$P(Y X)$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{2}$	0	0	0

$$P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$$

$P(X Y)$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	1	0	0	0

۱.۲ الف

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(x, y) \log_2 P(y|x) \\
 &= \frac{1}{8} \log_2 4 + \frac{1}{16} \log_2 4 + \frac{1}{32} \log_2 4 + \frac{1}{32} \log_2 4 + \frac{1}{16} \log_2 8 \\
 &\quad + \frac{1}{8} \log_2 2 + \frac{1}{32} \log_2 4 + \frac{1}{32} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 2 + 0 + 0 + 0 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{13}{8} \left[\frac{bits}{symbol} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(X|Y) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(x, y) \log_2 P(x|y) \\
 &= \frac{1}{8} \log_2 2 + \frac{1}{16} \log_2 4 + \frac{1}{32} \log_2 8 + \frac{1}{32} \log_2 8 + \frac{1}{16} \log_2 4 \\
 &\quad + \frac{1}{8} \log_2 2 + \frac{1}{32} \log_2 8 + \frac{1}{32} \log_2 8 + \frac{1}{16} \log_2 4 + \frac{1}{16} \log_2 4 \\
 &\quad + \frac{1}{16} \log_2 4 + \frac{1}{16} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 1 + 0 + 0 + 0 \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{11}{8} \left[\frac{bits}{symbol} \right]
 \end{aligned}$$

۲.۲ ب

یک نابرابری میان دو مقدار محاسبه شده مشاهده کردیم. دلیل این نابرابری این است که $H(Y|X)$ برابر مقدار اطلاعات موجود در Y با شرط دانستن اطلاعات وجود در X است. اما $H(X|Y)$ برابر مقدار اطلاعات موجود در X با شرط دانستن اطلاعات موجود در Y است. که بدیهی است این دو مقدار برابر نیستند.

۳.۲ ج

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \\
 &= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{1}{8} \log_2 8 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{4} \left[\frac{bits}{symbol} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= - \sum_{y \in Y} P(y) \log_2 P(y) \\
 &= \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \left[\frac{bits}{symbol} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(X, Y) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(x, y) \log_2 P(x, y) \\
 &= \frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{1}{16} \log_2 16 + \frac{1}{32} \log_2 32 + \frac{1}{32} \log_2 32 + \frac{1}{16} \log_2 16 \\
 &\quad + \frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{1}{32} \log_2 32 + \frac{1}{32} \log_2 32 + \frac{1}{16} \log_2 16 + \frac{1}{16} \log_2 16 \\
 &\quad + \frac{1}{16} \log_2 16 + \frac{1}{16} \log_2 16 + \frac{1}{4} \log_2 4 + 0 + 0 + 0 \\
 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{27}{8} \left[\frac{bits}{symbol} \right]
 \end{aligned}$$

۴.۲ د

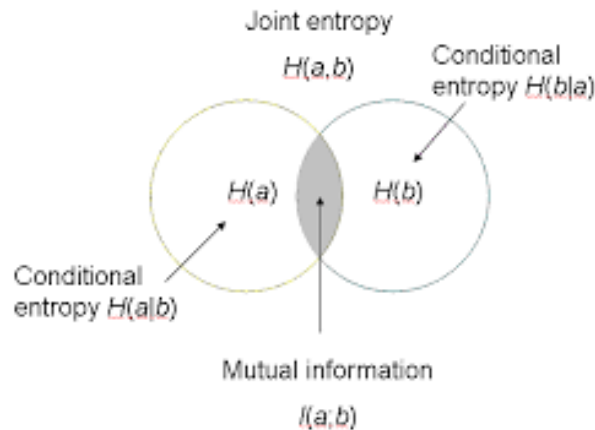
رابطه آنتروپی مشترک را بررسی می‌کنیم:

$$H(X) + H(Y|X) = \frac{7}{4} + \frac{13}{8} = \frac{27}{8} \left[\frac{bits}{symbol} \right]$$

$$H(Y) + H(X|Y) = 2 + \frac{11}{8} = \frac{27}{8} \left[\frac{bits}{symbol} \right]$$

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) \quad (۱)$$

رابطه شماره (۱) همان آنتروپی مشترک است. این معیار برای بیان میزان ابهام در مورد مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی بکار می‌رود. که به صورت شهودی در نمودار ون زیر قابل مشاهده است:



شکل ۱: نمودار ون آنتروپی مشترک

۵.۲ ه

با توجه به اینکه این مسئله دارای دو متغیر تصادفی X و Y است، رابطه فوق به شکل زیر درمی‌آید:

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$$

همانطور که در ذیل مشاهده می‌کنید این رابطه برقرار است.

$$\frac{27}{8} \leq \frac{7}{4} + 2 \Rightarrow \frac{27}{8} \leq \frac{15}{4}$$

۶.۲ و

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{11}{8} \\ &= 2 - \frac{13}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

۷.۲ ز

$$C = \max_{p_X(x)} I(X; Y)$$

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$$

بیشینه کردن مقدار $I(X; Y)$ نیازمند بیشینه کردن $H(X)$ و کمینه کردن $H(X|Y)$ است.

بیشینه کردن مقدار $H(X)$ نیازمند این است که $P(X)$ از توزیع یکنواخت پیروی کند.

کمینه کردن مقدار $H(X|Y)$ نیازمند این است که به شرط داشتن Y مقدار X به صورت قطعی مشخص شود.

جدول احتمال توام (مشترک) را مطابق نکات بالا تکمیل می‌کنیم.

$P(X, Y)$	1	2	3	4	$P(Y)$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
4	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$P(Y X)$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \\
 &= \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 = 2 \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= - \sum_{x \in X} - \sum_{y \in Y} P(x, y) \log_2 P(x, y) \\
 &= \frac{1}{4} \log_2 1 + \frac{1}{4} \log_2 1 + \frac{1}{4} \log_2 1 + \frac{1}{4} \log_2 1 = 0 \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right]
 \end{aligned}$$

$$I(X; Y) = H(X) - H(Y|X) = 2 - 0 = 2 \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right]$$

۸.۲ ح

باید حالتی را در نظر بگیریم که اطلاعات متقابل صفر شود. برای این امر بایستی اطلاعات X و Y هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند. در واقع بایستی متغیرهای تصادفی آنها مستقل از هم باشند. یعنی:

$$P(X, Y) = P(X).P(Y)$$

Y/X	1	2	3	4	$P(Y)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

۹.۲ ط

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) - I(X; Y)$$

برای حل این سوال باید از مقادیر جدول قبلی استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \\
 &= \frac{1}{2} \log_2 1 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{8} \log_2 8 + \frac{1}{8} \log_2 8 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{4} \left[\frac{\text{bit}}{\text{symbol}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= - \sum_{y \in Y} P(y) \log_2 P(y) \\
 &= \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \left[\frac{\text{bit}}{\text{symbol}} \right]
 \end{aligned}$$

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) - I(X; Y) = \frac{7}{4} + 2 - 0 = \frac{15}{4} \left[\frac{\text{bit}}{\text{symbol}} \right]$$

۱۰.۲ ی

از رابطه استقلال دو متغیر تصادفی داریم:

$$P(X, Y) = P(X).P(Y)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه صورت سوال داریم:

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= \sum_{x, y} P(x, y) \log_2 \left(\frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} \right) \\
 &= \sum_{x, y} P(x, y) \log_2 \left(\frac{P(x).P(y)}{P(x).P(y)} \right) \\
 &= \sum_{x, y} P(x, y) \log_2 1 = 0 \left[\frac{\text{bit}}{\text{symbol}} \right]
 \end{aligned}$$

رابطه بالا نیز صحت محاسبات قبلی را تایید می‌کند. به صورت کلی می‌توان گفت اگر دو متغیر تصادفی نسبت به هم مستقل باشند، اطلاعات متقابل آن‌ها صفر خواهد شد.

۱۱.۲ ک

بیشینه شدن مقدار $H(X)$ نیازمند یکنواخت شدن توزیع احتمال X است.
 بیشینه شدن مقدار آنتروپی مشترک $H(X, Y)$ نیازمند یکنواخت شدن توزیع مشترک $P(X, Y)$ است.

طبق نکات بالا جدول را کامل می‌کنیم.

Y/X	1	2	3	4	$P(Y)$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

۱۲.۲ ل

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= - \sum_{y \in Y} P(y) \log_2 P(y) \\
 &= \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \\
 &= \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(x, y) \log_2 P(x, y) \\ &= 16 \left(\frac{1}{16} \log_2 16 \right) \\ &= 16 \times \frac{1}{4} = 4 \left[\frac{bits}{symbol} \right] \end{aligned}$$

مقادیر $H(X)$ و $H(X, Y)$ نسبت به قسمت (ج) بیشتر شده است اما مقدار $H(Y)$ تغییری نکرده است.

۳ سوال سوم

اگر متغیر تصادفی X برابر عدد خوانده شده از تاس باشد و متغیر تصادفی Y تعداد دفعاتی که سکه خط می‌آید باشد داریم:

Y/X	$None$	1	2	3	4	5	6	$P(Y)$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{12}$
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

برای محاسبه مقدار اطلاعات متقابل $I(X; Y)$ نیاز به محاسبه‌ی مقادیر $H(X)$ ، $H(Y)$ و $H(X, Y)$ داریم:

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \\
 &= \frac{1}{3} \log_2(3) + \frac{6}{9} \log_2(9) \\
 &= \frac{1}{3} \log_2(3) + \frac{2}{3} 2 \log_2(3) \\
 &= \frac{5}{3} \log_2(3) \left[\frac{bits}{symbol} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= - \sum_{y \in Y} P(y) \log_2 P(y) \\ &= \frac{3}{4} \log_2\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{6} \log_2(6) + \frac{1}{12} \log_2(12) \\ &= \frac{3}{4} (2 \log_2(2) - \log_3(2)) \\ &\quad + \frac{1}{6} (\log_2(2) + \log_2(3)) \\ &\quad + \frac{1}{12} (2 \log_2(2) + \log_3(2)) \\ &= \frac{11}{6} \log_2(2) - \frac{1}{2} \log_2(3) \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(x, y) \log_2 P(x, y) \\ &= \frac{2}{12} \log_2(12) + \frac{1}{6} \log_2(6) + \frac{6}{9} \log_2(9) \\ &= \frac{1}{6} (2 \log_2(2) + \log_2(3)) + \frac{1}{6} (\log_2(2) + \log_2(3)) + \frac{4}{3} \log_2(3) \\ &= \frac{1}{2} \log_2(2) + \frac{5}{3} \log_2(3) \left[\frac{\text{bits}}{\text{symbol}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= \frac{5}{3} \log_2(3) + \frac{11}{6} \log_2(2) - \frac{1}{2} \log_2(3) - \frac{1}{2} \log_2(2) - \frac{5}{3} \log_2(3) \\ &= \frac{4}{3} \log_2(2) - \frac{1}{2} \log_2(3) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \log_2(3) = 0.54 \left[\frac{\text{bit}}{\text{symbol}} \right] \end{aligned}$$

۴ سوال چهارم

۱.۴ الف

$$\begin{aligned} SNR[dB] &= 10 \log_{10} SNR \\ &= 10^{0.5} = 3.16[dB] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= B \log_2(1 + SNR) \\ &= 10 \log_2(1 + 3.16) \\ &= 10 \log_2(4.16) = 20.57[MBps] \end{aligned}$$

۲.۴ ب

$$\begin{aligned} C &= B \log_2(1 + SNR) \\ 50 &= 10 \log_2(1 + SNR) \\ SNR &= 2^5 - 1 = 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SNR[dB] &= 10 \log_{10}(SNR) \\ SNR &= 10 \log_{10}(31) = 14.91[dB] \end{aligned}$$