



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی مکانیک

پروژه درس کنترل مقاوم

طراحی کنترل مقاوم برای سیستم

four wheel steering

استاد درس

جناب آقای دکتر کمالی ایگلی

نگارش

علی احمدی

تیرماه ۱۴۰۰

چکیده

فناوری چهار چرخ فرمان (4WS) می تواند به طور موثری ثبات هندلینگ خودرو و ایمنی رانندگی را بهبود بخشد. به منظور بررسی کامل تأثیر فرمان چرخ عقب، مدل دینامیک وسیله نقلیه 4WS، از جمله فرمان چرخ عقب توسط سیم و دو درجه آزادی، ایجاد شده است. نرخ یاو مورد نظر با توجه به استراتژی نسبت انتقال متغیر بدست می آید. استراتژی ردیابی نرخ یاو برای خودرو 4WS اعمال می شود و مقاومت فرمان عقب در نظر گرفته می شود. بر اساس تئوری کنترل مقاوم، طراحی کنترل کننده قوی مخلوط H_2 / H_∞ برای تحقیق در مورد کنترل پایدارکننده خودرو 4WS انجام شده است. سرانجام، شبیه سازی حلقه بسته انجام شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که کنترل کننده مقاوم مخلوط H_2 / H_∞ می تواند به کنترل پایداری دست یابد.

مقدمه

سیستم فرمان، یکی از چهار سیستم اصلی شاسی خودرو، بسیار بر ایمنی رانندگی و پایداری هندلینگ خودرو تأثیر می‌گذارد. با توسعه فناوری، فناوری فرمان چهار چرخ (4WS) بیشتر و بیشتر مورد توجه شرکت های خودروساز داخلی و خارجی قرار گرفته است و به اصلی ترین مسیر توسعه فناوری فرمان پذیری خودرو در آینده تبدیل شده است. می توان فناوری 4WS را در انجمن مهندسان خودرو و همایش فناوری ژاپن در دهه 1960 جستجو کرد. به منظور بهبود پایداری هندلینگ خودرو، یک مهندس، فن آوری فرمان عقب فعال را پیشنهاد داد و سپس شرکت های بزرگ خودرو تحقیق در زمینه فناوری 4WS را آغاز کردند. به دلیل محدودیت های فناوری الکترونیکی، فناوری اتوماسیون و فناوری کنترل، تحقیقات فناوری 4WS کنار گذاشته شد. از آنجایی که وسیله نقلیه 4WS در پایداری هندلینگ پیشرفت نسبتاً بزرگی داشته است، فناوری 4WS به دید مردم بازگشت. در سال ۲۰۰۸، سری ۷ جدید BMW مجهز به سیستم 4WS وارد بازار شد. در سرعت بالا، زوایای فرمان چرخ جلو و چرخ عقب در یک مرحله قرار دارند. در حالی که با سرعت کم، در فاز مخالف قرار دارند. حداکثر زاویه فرمان چرخ عقب تا 3 درجه است. متعاقباً، M37S، infinity، مجهز به سیستم 4WS را نیز به بازار عرضه کرد و در محرک فرمان نیز پیشرفت زیادی داشت. در آوریل ۲۰۱۵، کادیلاک با استفاده از فناوری 4WS در نمایشگاه ایالات متحده اولین CT6 را ارائه داد. این سیستم مکانیزم فرمان مستقل مشابهی را که توسط یک موتور سروو ۱۲ ولت همراه با سیستم تعلیق پنج پیوندی لوکس برای دستیابی به کنترل دقیق فرمان چرخ عقب ایجاد شده بود، اضافه کرد.

سیستم 4WS را می توان به دو نوع تقسیم کرد. یکی برای ایجاد زاویه لغزش کناری (slide slip angle) صفر، که مربوط به مسئله حفظ مسیر است. مورد دیگر برای ردیابی میزان راو مورد نظر طراحی شده است. کنترلر 4WS توسط چن و همکاران طراحی شده است. برای ساختن وسیله نقلیه با استفاده از تئوری پیش نمایش، تئوری قوام و مسیر انطباقی از قابلیت ردیابی مسیر خوب در هر دو جهت طولی و جانبی برخوردار است. از طریق مطالعه روی فرمان و چهار چرخ، کنترل کننده حالت کشویی بر اساس مدل ردیابی توسط نوناکا و اودا طراحی شده است. نتایج شبیه سازی نشان داد که خودرو عملکرد خوبی در ردیابی مسیر دارد. مفهوم variable gain توسط فون ویتینگوف و کینکه در تحقیق در زمینه فرمان چهار چرخ و ادغام مستقل رانندگی معرفی شد. مدل و کنترل غیرخطی در نرم افزار تجارت مجازی تأیید شد. با توجه به تغییر سرعت در مطالعه لی و همکاران مدل 4WS متغیر با زمان بوده است.

کنترل LPV به سیستم 4WS اعمال شد و نتایج شبیه سازی نشان داد که ویژگی های هندلینگ، ایمنی و راحتی رانندگی وسیله نقلیه با یک دامنه متفاوت از سرعت زیاد به طور قابل توجهی بهبود یافته است. و کنترل جداسازی با عملکرد H_{∞} برای وسایل نقلیه 4WS با سرعت طولی متفاوت مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان داد که این طرح کنترلی می تواند ویژگی های دستکاری، ایمنی و را بهبود بخشد. بین و همکاران از تئوری سنتز μ برای مطالعه وسیله نقلیه 4WS استفاده کرد. با توجه به عدم اطمینان از مدل، یک کنترل کننده قوی سنتز μ با توابع وزن بهینه شده برای کاهش اغتشاشات خارجی طراحی شده است. شبیه سازی عددی نشان داد که کنترل کننده قوی سنتز μ می تواند عملکرد یک وسیله نقلیه 4WS را بهبود بخشد. سانگ یک مدل پویا از ماشین 4WS با دو درجه آزادی را ارائه داد و تحلیل نظری آن از معادلات حرکت و پاسخ گذرا بدست آمد. ردیابی دینامیکی مدل مرجع مسطح غیرخطی عمومی توسط راسل و گردز پیشنهاد شده است. سیستم حلقه بسته اصلاح شده ثابت شده است و دارای عملکرد ردیابی قوی تا سطح معقول عدم اطمینان مدل است. نتایج تجربی تقلید موفقیت آمیز از پویایی مسطح مدل مرجع اصطکاک کم را برای انواع مانورهای رانندگی و ضرایب اصطکاک مرجع نشان داده است. مشادی و همکاران یک سیستم کنترل $DYC + 4WS$ یکپارچه برای هدایت وسیله نقلیه در مسیر مورد نظر طراحی کرده است. نتایج شبیه سازی نشان داد که کنترل کننده پیشنهادی توانایی این را دارد که وسیله نقلیه مسیر مورد نظر را طی

کند. الگوریتم autodriver در اصل بر روی پویایی وسایل نقلیه 4WS توسط مرزبانی و همکاران ساخته شده است. عدم اطمینان فرمان چهار چرخ بر اساس تئوری مرز منحصر به فرد و تئوری پایداری لیاپونوف توسط هوانگ و همکاران مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.

به طور خلاصه، بیشتر تحقیقات موجود بر ردیابی مسیر وسیله نقلیه 4WS متمرکز است، در حالی که تحقیقات در مورد پایداری هندلینگ اندک است. علاوه بر این، بر اساس مدل خودرو، مطالعات موجود در زمینه کنترل پایداری با نادیده گرفتن تأثیر محرک فرمان چرخ عقب، طراحی را شروع می کنند. بنابراین در این مقاله، مدل دینامیک خودرو از وسیله نقلیه 4WS، از جمله فرمان چرخ عقب توسط سیم و دو درجه آزادی ایجاد شده است. نرخ یاء مورد نظر با توجه به استراتژی نسبت انتقال متغیر بدست می آید. استراتژی ردیابی نرخ یاء در خودرو 4WS اعمال می شود و مقاومت فرمان عقب در نظر گرفته می شود. بر اساس تئوری کنترل مقاوم، طراحی کنترل کننده مقاوم مخلوط H_2 / H_∞ برای مطالعه کنترل پایداری سیستم 4WS انجام شده است. سرانجام، شبیه سازی حلقه بسته مدل درایور اضافه شده بر اساس تئوری پیش نمایش انجام شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که کنترل کننده قوی مخلوط H_2 / H_∞ می تواند به کنترل پایداری دست یابد.

فصل دوم

مدل دینامیکی سیستم

۱-۲ فرمان چرخ عقب توسط مدل سیستم سیم

در وسایل نقلیه موتوری، یک سیستم فرمان برقی با افزایش تلاش برای چرخاندن فرمان به رانندگان کمک می کند تا وسیله نقلیه را هدایت کنند و چرخش یا مانور را برای خودرو آسان تر کند. مانند انواع هیدرولیک، قدرت محرک (در این حالت موتور) توسط بقیه سیستم فرمان برقی کنترل می شود. محرک های هیدرولیکی یا الکتریکی انرژی کنترل شده ای به مکانیزم فرمان اضافه می کنند، بنابراین راننده می تواند هنگام رانندگی با سرعت معمولی تلاش کمتری برای چرخاندن چرخ های فرمان داشته باشد و به طور قابل توجهی از تلاش فیزیکی لازم برای چرخاندن چرخ ها در هنگام توقف یا حرکت آهسته وسیله نقلیه بکاهد.

معادله دیفرانسیل حرکت موتور فرمان (steering motor):

$$\begin{cases} J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + T_a = T_m, \\ T_m = K_t i, \end{cases} \quad (1-2)$$

جایی که J_m ممان اینرسی موتور فرمان، B_m ضریب میرایی موتور فرمان، T_m گشتاور الکترومغناطیسی موتور، i جریان الکتریکی موتور، K_t ثابت گشتاور الکترومغناطیسی، θ_m زاویه فرمان موتور، T_a گشتاور خروجی موتور فرمان است. معادله الکتریکی سیستم به صورت زیر است:

$$\begin{cases} L \dot{i} + Ri + E = U, \\ E = K_b \dot{\theta}_m, \end{cases} \quad (2-2)$$

جایی که L القای موتور فرمان است. R مقاومت موتور فرمان، E ، EMF موتور فرمان، U ولتاژ موتور، K_b ثابت فرمان EMF است. معادلات دیفرانسیل حرکت rack (چرخنده) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} M_r \ddot{x}_r + B_r \dot{x}_r + F_R = NT_a / r_p, \\ \theta_{sg} = x_r / r_p, \end{cases} \quad (3-2)$$

جایی که M_r جرم rack، B_r ضریب میرایی rack، F_R مقاومت فرمان rack، N نسبت کاهش موتور فرمان است. x_r جابجایی rack است. r_p شعاع دنده است. θ_{sg} زاویه فرمان دنده است. از تلفیق روابط بالا داریم:

$$M_{rp} \ddot{\theta}_{sg} + B_{rp} \dot{\theta}_{sg} + T_R = NT_a, \quad (۴-۲)$$

۲-۲ مدل تایر

تایر قسمت مهمی از خودرو است. نیروی خودرو بیشتر از تماس تایر و سطح جاده است، بنابراین مدل تایر نقش مهمی در شبیه سازی پایداری هندلینگ خودرو دارد. در این مقاله، به طور عمده با در نظر گرفتن دینامیک جانبی تایر و با در نظر گرفتن استراتژی هایی، مدل تایر خطی ایجاد شده است. دامنه کار تایر در منطقه خطی تایر است. در حال حاضر شتاب جانبی کمتر از ۰,۴ گرم و زاویه لغزش کمتر از ۵ درجه است. زاویه لغزش (slip angle):

$$\alpha_f = \beta + \frac{a}{u} r - \delta_f, \quad (۵-۲)$$

$$\alpha_r = \beta - \frac{b}{u} r - \delta_r, \quad (۶-۲)$$

که در آن α_f و α_r زاویه لغزش تایر جلو و عقب هستند. δ_f و δ_r زاویه فرمان چرخ جلو و عقب هستند. β زاویه لغزشی وسیله نقلیه 4WS است. r میزان یاء وسیله نقلیه 4WS است. a و b فاصله بین محور جلو و عقب تا مرکز جرم خودرو است. u سرعت خودرو است. نیروی جانبی تایر:

$$F_{Yf} = k_1 \alpha_f, \quad (۷-۲)$$

$$F_{Yr} = k_2 \alpha_r, \quad (۸-۲)$$

در جایی که k_1 و k_2 سفتی پیچ در چرخ جلو و عقب است. F_{Yf} و F_{Yr} نیروهای جانبی چرخ جلو و عقب هستند. گشتاور تایر خود تنظیم شده به صورت زیر می باشد:

$$T_f = F_{Yf} d, \quad (۹-۲)$$

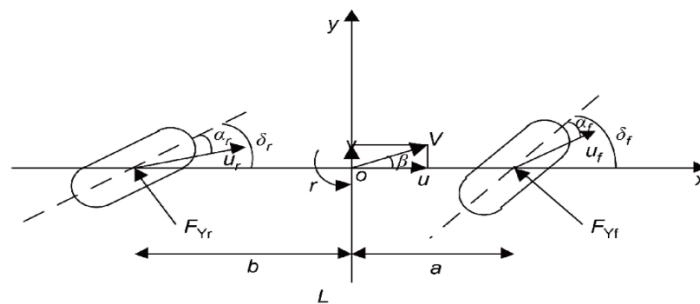
$$T_r = F_{Yr} d, \quad (۱۰-۲)$$

جایی که d دنباله پنوماتیک است؛ T_f و T_r گشتاورهای خود تنظیم چرخ جلو و عقب هستند.

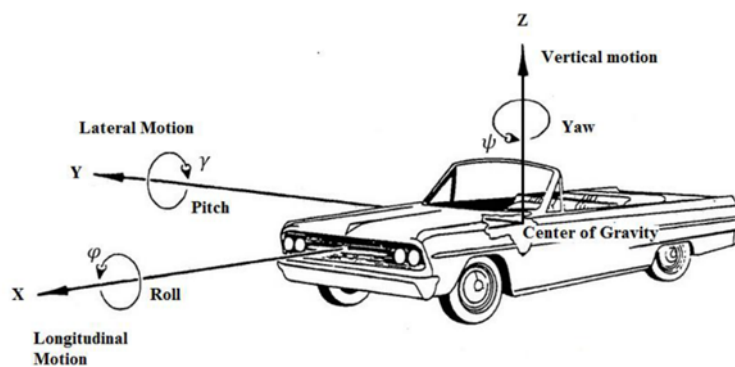
۳-۲ مدل خودرو WS4

برای وسیله نقلیه 4WS، تحقیق اصلی دینامیک جانبی خودرو است. با هدف تحقیق در مورد دینامیک جانبی وسیله نقلیه، 4WS یک مدل خودروی 4WS با نادیده گرفتن غلت زدن وسیله نقلیه و فقط با در نظر گرفتن درجه های جانبی (pitch) و یاء آزادی ایجاد می شود. دو درجه آزادی مدل وسیله نقلیه در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.

همانطور که در شکل ۱-۲ نشان داده شده است، اتومبیل در مرکز محور عمودی متقارن است. با نادیده گرفتن نقش سیستم تعلیق اتومبیل، اتومبیل فقط به موازات زمین حرکت می کند، یعنی جابجایی ماشین در امتداد محور Z ، گام به دور محور Y و حرکت رول در اطراف محور X در نظر گرفته نمی شود. از تغییر مشخصات تاثیر ناشی از تغییر بار غفلت می شود. زاویه لغزش چرخ چپ و راست یکسان است. معادلات دینامیکی وسیله نقلیه 4WS در حالت حرکت پیچ و یاء را می توان از شکل ۱-۲ بدست آورد. همچنین در شکل ۲-۲ می توانیم حرکت های مختلف یک خودرو را مشاهده کنیم.



شکل ۱-۲: مدل تایرهای خودرو به همراه نیروهای جانبی وارد بر آن ها



شکل ۲-۲: درجات آزادی یک خودروی واقعی

$$\begin{cases} mu(\dot{\beta} + r) = F_{Yf} \cos \delta_f + F_{Yr} \cos \delta_r, \\ I_z \dot{r} = F_{Yf} a \cos \delta_f - F_{Yr} b \cos \delta_r, \end{cases} \quad (11-2)$$

که در آن m جرم وسیله نقلیه است. l_z ممان حول z است. با توجه به مدل تایلر خطی، این معادله قابل تبدیل است به معادله (۲-۱۲):

$$\begin{cases} mu(\dot{\beta} + r) = -k_1\left(\beta + \frac{a}{u}r - \delta_f\right)\cos\delta_f - k_2\left(\beta - \frac{b}{u}r - \delta_r\right)\cos\delta \\ I_z\dot{r} = -k_1\left(\beta + \frac{a}{u}r - \delta_f\right)a\cos\delta_f + k_2\left(\beta - \frac{b}{u}r - \delta_r\right)b\cos\delta_f. \end{cases} \quad (2-12)$$

با توجه به کوچکتر بودن زاویه فرمان چرخ، $\cos\delta_f$ و $\cos\delta_r$ را می توان ۱ در نظر گرفت. حال مدل خطی دو درجه آزادی 4WS تکمیل می گردد:

$$\begin{cases} mu(\dot{\beta} + r) = -(k_1 + k_2)\beta - \frac{k_1a - k_2b}{u}r + k_1\delta_f + k_2\delta_r, \\ I_z\dot{r} = -(k_1a - k_2b)\beta - \frac{k_1a^2 + k_2b^2}{u}r + k_1a\delta_f - k_2b\delta_r. \end{cases} \quad (2-13)$$

فضای حالت این سیستم به صورت زیر می شود:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (2-14)$$

به طوریکه:

$$x = [\beta \ r]^T, u = [\delta_f \ \delta_r]^T, y = [\beta \ r]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{mv} & \frac{k_1a - k_2b}{mv^2} - 1 \\ \frac{k_1a - k_2b}{I_z} & \frac{k_1a^2 + k_2b^2}{I_zv} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{mv} & \frac{k_2}{mv} \\ \frac{k_1a}{I_z} & \frac{k_2b}{I_z} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

۲-۴ مدل راننده

به منظور بررسی تأثیر وسیله نقلیه 4WS بر ویژگی های دینامیکی، باید یک مدل سیستم حلقه بسته از جمله مدل راننده ایجاد شود. یک حلقه بسته از وسیله نقلیه انسانی برای ردیابی کامل برای هر مسیر تشکیل می شود. در این مقاله، از مدل پیش نمایش مرتبه اول استفاده شده است همانطور که در شکل ۲-۳ نشان داده شده است. در سیستم مختصات ژئودتیک

XOY ، موقعیت مرکز جرم خودرو و (X, Y) و زاویه موجود بین محور طولی خودرو و محور X ، Φ است. این سه پارامتر به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{cases} X = X_0 + u \int_0^t \cos(\beta + \Phi) dt, \\ Y = Y_0 + u \int_0^t \sin(\beta + \varphi) dt, \\ \Phi = \Phi_0 + \int_0^t r dt, \end{cases} \quad (15-2)$$

که در آن X_0, Y_0 و Φ_0 موقعیتی هستند که t صفر است. در روند رانندگی، راننده با توجه به انحراف جابجایی نقطه پیش نمایش و انحراف زاویه فرمان موقعیت فعلی خودرو، اندازه زاویه فرمان را تعیین می کند. انحراف جابجایی ε_y با جابجایی جانبی مسیر مورد نظر Y_d و جابجایی جانبی Y تعیین می شود که زمان پیش نمایش T_p باشد:

(16-2)

$$\varepsilon_y = Y_d(t + T_p) - (Y(t) + T_p \dot{Y}(t)),$$

که در آن Y_d جابجایی جانبی مورد نظر است. Y جابجایی جانبی است. T_p زمان پیش نمایش است. خطای زاویه رانندگی موقعیت فعلی و زاویه جهت جاده را می توان به صورت زیر بیان کرد:

(17-2)

$$\varepsilon_\phi = \Phi - \int_0^t \kappa u dt,$$

جایی که κ انحنای جاده است. و سپس، زاویه فرمان را می توان به عنوان حاصل جمع وزنی خطای جابجایی سفر خودرو و خطای جهت و تأخیر عملکرد راننده بیان کرد.

(19-2)

$$\theta_{sw} = (K_1 \varepsilon_y + K_2 \varepsilon_\phi) e^{\tau_d s},$$

جایی که θ_{sw} زاویه فرمان است. K_1 و K_2 بهره جبران کننده موقعیت و خطای جهت گیری راننده است. τ_d زمان تاخیر است.

فصل سوم

کنترل سیستم

هدف از کنترل پایداری وسیله نقلیه بهبود حالت پایدار و پاسخ گذرا و بهبود پایداری هندلینگ خودرو و توانایی مقاومت در برابر تداخل خارجی است. در این مقاله، ما ابتدا سرعت یاء ایده آال را بدست می آوریم. مطابق نظریه کنترل مقاوم، کنترل کننده قوی مخلوط H_2 / H_∞ برای تغییر گشتاور خروجی موتور فرمان چرخ عقب طراحی شده است تا زاویه فرمان چرخ عقب را تغییر دهد و سپس با ردیابی میزان ایده آال نرخ یاء، ثبات خودرو 4WS حاصل می شود.

۳-۱ نسبت انتقال متغیر

هنگام چرخش خودرو، نسبت زاویه فرمان به زاویه چرخ جلو خودرو به عنوان نسبت دنده فرمان تعریف می شود:

$$i_s = \frac{\theta_{sw}}{\delta_f} \quad (1-3)$$

برای وسیله نقلیه فرمان چرخ جلو، نسبت فرمان توسط پارامترهای ساختاری خودرو تعیین می شود و این یک مقدار ثابت است. بنابراین ویژگی فرمان با سرعت بسیار متفاوت است. تغییر نسبت گیرکس باعث می شود که مشخصات فرمان نسبت ثابتی با سرعت خودرو نداشته باشد، یعنی برای رسیدن به همان مشخصات فرمان در سرعت کم و سرعت بالا که می تواند بار راننده را برطرف کند. نسبت انتقال را نسبت انتقال ایده آال می نامند. در اینجا قانون نسبت انتقال متغیر با افزایش سرعت یاء ثابت استفاده می شود.

مطابق قانون نسبت انتقال متغیر حاصل از افزایش ثابت سرعت یاء، رابطه بین زاویه فرمان و زاویه فرمان چرخ جلو به صورت زیر است:

$$i_s = \frac{\theta_{sw}}{\delta_f} = \frac{u/L}{G_{sw}(1+Ku^2)}, \quad (2-3)$$

جایی که L فاصله محوری خودرو است؛ G_{sw} بهره ثابت میزان یاء است. K فاکتور پایداری است،

$$K = \frac{m}{L^2} \left(\frac{a}{k_2} - \frac{b}{k_1} \right). \quad (3-3)$$

با توجه به ورودی های فرمان راننده (زاویه فرمان)، یک مدل دوچرخه مسطح از دینامیک مرجع شبیه سازی می شود، که با استفاده از یک مدل تایر خطی محاسبه می شود.

$$\begin{cases} mu(\dot{\beta} + r) = -(k_1 + k_2)\beta - \frac{k_1 a - k_2 b}{u} r + k_1 \delta_f, \\ I_z \dot{r} = -(k_1 a - k_2 b)\beta - \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{u} r + k_1 a \delta_f. \end{cases} \quad (4-3)$$

نرخ یاء حالت پایدار r^* یک ثابت است و اکنون نرخ β و r هر دو صفر هستند. حالت پایدار r^* میزان یاء مورد نظر است. رابطه بین نرخ یاء و زاویه فرمان چرخ جلو:

$$\frac{r^*}{\delta_f} = \frac{u/L}{1 + Ku^2}. \quad (5-3)$$

۳-۲ مدل کنترلی سیستم

در مقایسه با وسیله نقلیه فرمان چرخ جلو، وسیله نقلیه 4WS به راحتی می تواند پایداری هندلینگ وسیله نقلیه توسط سیستم فرمان چرخ عقب را بهبود بخشد. در این مقاله، یک کنترل کننده مقاوم طراحی شده است تا نرخ یا ایده آل را ردیابی کند تا مشخصات فرمان مورد نظر را بدست آورد. در وسیله نقلیه 4WS، عملکرد سیستم فرمان عقب به طور مستقیم تعیین می کند که آیا وسیله نقلیه فرمان چهار چرخ می تواند به خواسته مورد نظر برسد یا نه، به عبارت دیگر، اگر عملکرد سیستم فرمان چرخ عقب ضعیف باشد، در این مرحله، عملکرد خودرو 4WS حتی از وسیله نقلیه فرمان چرخ جلو نیز بدتر است. بنابراین، سیستم فرمان چرخ عقب در وسیله نقلیه فرمان چهار چرخ در نظر گرفته می شود. به منظور تحقق بخشیدن به کنترل پایداری میزان yaw، کنترل کننده باید شرایط زیر را برآورده کند:

ردیابی میزان yaw، ردیابی مسیر و سرکوب اختلال. مدل فضای حالت کنترل پایداری برای وسیله نقلیه 4WS را می توان به صورت زیر استخراج کرد:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ y = Cx + D_1 w + D_2 u, \end{cases} \quad (6-3)$$

به طوریکه:

$$x = [\beta \quad r \quad \theta_{sg} \quad \dot{\theta}_{sg}]^T, u = T_a, w = [\delta_f \quad d_r \quad f_y]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k_1 + \Delta k_1 + k_2 + \Delta k_2}{mv} & -\frac{(k_1 + \Delta k_1)a + (k_2 + \Delta k_2)b}{mv^2} - 1 & \frac{k_2 + \Delta k_2}{Gmv} & 0 \\ -\frac{(k_1 + \Delta k_1)a - k_2 b}{I_z} & -\frac{(k_1 + \Delta k_1)a^2 + (k_2 + \Delta k_2)b^2}{I_z v} & -\frac{(k_2 + \Delta k_2)b}{GI_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{d(k_2 + \Delta k_2)}{GM_r r_p^2} & -\frac{d(k_2 + \Delta k_2)b}{GvM_r r_p^2} & \frac{-d(k_2 + \Delta k_2)}{G^2 M_r r_p^2} & -\frac{B_r}{M_r} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + \Delta k_1}{mu} & 0 & \frac{1}{mu} \\ \frac{(k_1 + \Delta k_1)a}{I_z} & 0 & \frac{l_w}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{M_r r_p^2} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{N}{M_r r_p^2} \end{bmatrix}^T, C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], D_1 = [0 \quad 0 \quad 0], D_2 = [0],$$

جایی که β زاویه لغزش وسیله نقلیه 4WS است. r میزان خمیازه وسیله نقلیه 4WS است. θ_{sg} زاویه فرمان دنده است. T_a گشتاور خروجی موتور فرمان است. δ_f زاویه فرمان چرخ جلو هستند. d_r اختلال تصادفی سطح جاده است. f_y اختلال باد جانبی است. l_w فاصله بین مرکز فشار و مرکز خودرو است، Δk_1 و Δk_2 عدم قطعیت های پارامتر k_1 و k_2 هستند.

۳-۳ کنترل پذیری سیستم

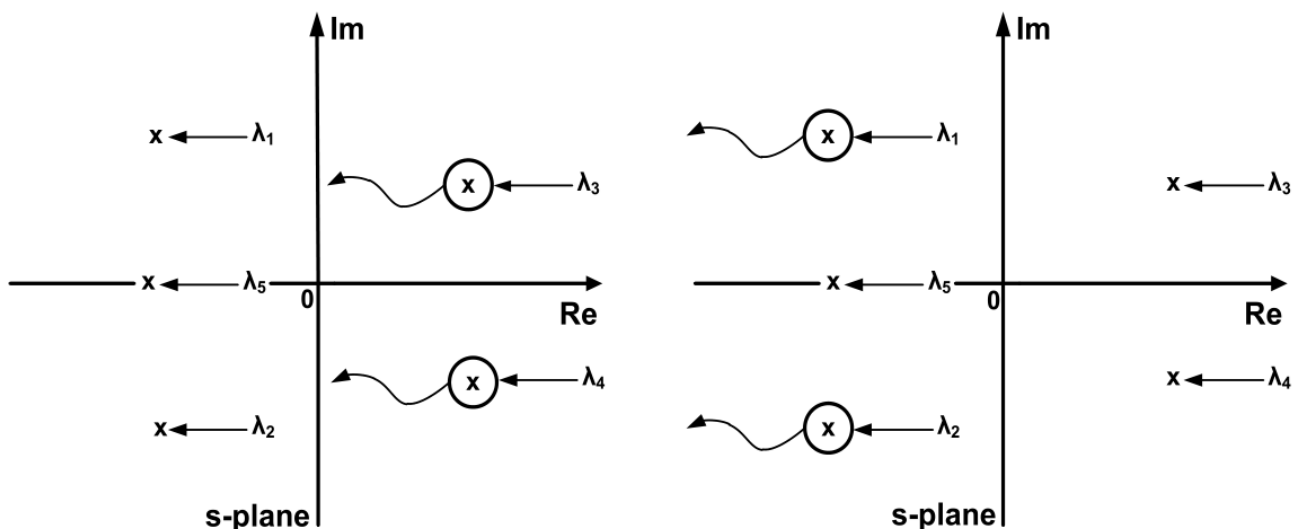
سیستمی در زمان t_0 کنترل پذیر نامیده می شود که بتوان آن را توسط تلاش کنترلی مناسب از هر حالت اولیه ای مانند $X(t_0) = X_0$ به هر حالت دلخواه رساند. به عبارت دیگر سیستمی در زمان t_0 کنترل پذیر نامیده می شود که بتوان قطب ها یا مقادیر ویژه سیستم را توسط یک بردار کنترلی مناسب به هر مکان مطلوب دیگر جابجا نمود. به منظور بررسی کنترل پذیری یک سیستم خطی، فرض کنید ماتریس A دارای ابعاد n در n باشد. ماتریس زیر را ماتریس کنترل پذیری می نامند:

$$C = \begin{bmatrix} A & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

چنانچه مرتبه ماتریس کنترل پذیری n باشد سیستم کنترل پذیر خطی است. در سیستم مورد نظر ما $n = 4$ می باشد. با کمک دستور `ctrb` ماتریس کنترل پذیری را ایجاد می کنیم. مرتبه ی این ماتریس 4 است در نتیجه سیستم ما کنترل پذیر می باشد.

۳-۴ پایدار پذیری سیستم

سیستم خطی پایدار پذیر است اگر قطب های ناپایدار آن کنترل پذیر باشند. برای روشن شدن این تعریف شکل زیر را در نظر بگیرید. در این شکل هر دو سیستم کنترل ناپذیرند. زیرا سه مقدار ویژه از پنج مقدار ویژه آن ها قابلیت جابجایی ندارند. اما در شکل سمت چپ سیستم پایدار پذیر است. زیرا قطب های (مقادیر ویژه) کنترل ناپذیر آن پایدار هستند. در حالی که در شکل سمت راست سیستم پایدار ناپذیر است زیرا برخی از قطب های کنترل ناپذیر آن ناپایدار هستند. از آن جایی که سیستم ما تماماً کنترل پذیر می باشد پایدار پذیر نیز هست.



شکل ۳-۱

۳-۵ رویت پذیری سیستم

سیستمی در زمان t_0 رویت پذیر است که بتوان با مشاهده خروجی حالت سیستم را مشخص کرد. به منظور بررسی رویت پذیری یک سیستم خطی فرض کنید ماتریس A دارای ابعاد n در n باشد. در این صورت ماتریس زیر را ماتریس رویت پذیری می نامند. چنانچه مرتبه ماتریس رویت پذیری n باشد سیستم خطی رویت پذیر است.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

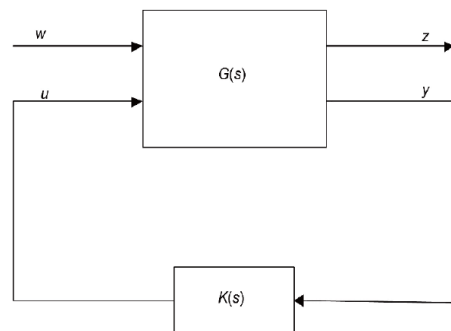
با کمک دستور **obvs** ماتریس رویت پذیری را ایجاد می نماییم. برای سیستم مورد نظر مرتبه این ماتریس 4 می باشد در نتیجه این سیستم یک سیستم خطی رویت پذیر است.

۳-۶ استراتژی کنترل مقاوم H_2 / H_∞

در کنترل پایداری وسیله نقلیه 4WS، سطح ماشین، باد جانبی و نویز سنسور هنگام ردیابی نرخ ایده آل یاء، در ماشین تداخل ایجاد می کند. نظریه کنترل H_∞ نوعی نظریه کنترل مدرن از طریق بهینه سازی نرم بی نهایت عملکرد در فضا است. به عنوان یک تعمیم از مسئله کنترل H_∞ ، مسئله قوام مخلوط H_2 / H_∞ یکی از مهمترین مسایل عملکرد مقاوم است. کنترل مخلوط H_2 / H_∞ عملکرد بهینه و مقاوم سیستم را با هم ترکیب می کند تا سیستم بتواند با حل یک کنترل کننده بهینه، دو ویژگی مهم سیستم را برای طراحان بدست آورد. مسئله طراحی استاندارد H_∞ در شکل ۳-۱ نشان داده شده است، جایی که u سیگنال ورودی است. w سیگنال تداخل است. z خروجی کنترل شده است. y سیگنال خروجی است. G سیستم کنترل شده است. K کنترل کننده است.

بیان فضای حالت ماتریس تابع انتقال G به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{cases} \quad (7-3)$$



شکل ۳-۲

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{12}(s) & G_{22}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}. \quad (۸-۳)$$

$$\begin{aligned} T_{zw} &= \text{LTF}(G(s), K(s)) \\ &= G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}. \end{aligned} \quad (۹-۳)$$

برای یک سیستم کنترل شده عمومی P، کنترل کننده بازخورد K حل شده است تا عملکرد انتقال حلقه بسته داخلی پایدار باشد و شرایط زیر را برآورده کند،

$$\|T_{zw}\|_{\infty} = \gamma_0 \quad (۱۰-۳)$$

یا

$$\|T_{zw}\|_{\infty} \leq \gamma \quad (\gamma \geq \gamma_0). \quad (۱۱-۳)$$

مسئله کنترل قوی H_{∞} حساسیت مخلوط یکی از معمول ترین مشکلات در کنترل H_{∞} است. هنگام استفاده از روش کنترل H_{∞} برای طراحی سیستم، مسئله طراحی شده معمولاً به مسئله حساسیت مخلوط تبدیل می شود تا حل شود. این می تواند از استحکام سیستم اطمینان حاصل کرده و عملکرد سیستم را بهبود بخشد. تابع حساسیت S تابع انتقال سیستم از اغتشاش به خروجی است که می تواند توانایی سیستم در مهار اغتشاش را منعکس کند. تابع حساسیت تکمیلی T مربوط به پایداری مقاوم سیستم است. بدیهی است که S کوچک e کوچک تولید می کند که با عملکرد ردیابی مطابقت دارد و T کوچک خروجی کنترل کمی تولید می کند. از آن جا جمع T و S یک می باشد، بنابراین ما باید با تنظیم مداوم توابع وزن برای عملکرد بهتر سیستم، در شرایط واقعی معامله کنیم. مسئله حساسیت مخلوط یافتن قانون کنترل پایدار کننده داخلی K است که باعث می شود سیستم حلقه بسته از اختلال W به خروجی کنترل شده Z برای رسیدن به ماتریس انتقال برسد:

$$\min_{K_{\text{stab}}} \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq 1. \quad (۱۲-۳)$$

۷-۳ طراحی کنترلر مخلوط

همانطور که گفته شد:

(۱) طراحی به منظور صفر کردن زاویه ی slideslip (زاویه ی β)، که این زاویه در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.

(slideslip angle) زاویه بین بردار سرعت خودرو با محور طولی خودرو می باشد)

(۲) طراحی با هدف ردیابی yaw rate مناسب.

به صورت خلاصه اکثر کارهای انجام شده ی مرتبط با این سیستم ها بر ردیابی مسیر متمرکز بوده اند و بحث پایداری در handle کردن سیستم کمتر مورد توجه قرار گرفته است. از طرفی تحقیقات انجام شده بر روی کنترل پایدار کننده ی سیستم های 4WS تاثیر تحریک فرمان چرخ های عقب را نادیده گرفته اند.

در این مقاله، دینامیک وسیله نقلیه 4WS، با در نظر گرفتن فرمان چرخ عقب ایجاد شده است. yaw rate مورد نظر با توجه به استراتژی variable transmission ratio بدست می آید و سپس استراتژی ردیابی yaw rate بدست آمده برای سیستم 4WS اعمال می شود و resistance moment چرخ عقب نیز در نظر گرفته می شود.

در مدلسازی دینامیکی این سیستم steering motor، مدل تایر و تاثیر راننده در نظر گرفته شده اند و در نهایت فضای حالت این سیستم که چهار ورودی و یک خروجی دارد استخراج شده است.

ماتریس های A و B و C و D فضای حالت سیستم استخراج شده است:

$$\mathbf{x} = [\beta \quad r \quad \theta_{sg} \quad \dot{\theta}_{sg}]^T, \mathbf{u} = T_a, \mathbf{w} = [\delta_f \quad d_f \quad f_y]^T, \quad (14-3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + \Delta k_1 + k_2 + \Delta k_2}{mv} & \frac{(k_1 + \Delta k_1)a + (k_2 + \Delta k_2)b}{mv^2} - 1 & \frac{k_2 + \Delta k_2}{Gmv} & 0 \\ \frac{(k_1 + \Delta k_1)a - k_2b}{I_z} & \frac{(k_1 + \Delta k_1)a^2 + (k_2 + \Delta k_2)b^2}{I_z v} & \frac{(k_2 + \Delta k_2)b}{GI_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{d(k_2 + \Delta k_2)}{GM_f r_p^2} & \frac{-d(k_2 + \Delta k_2)b}{GvM_f r_p^2} & \frac{-d(k_2 + \Delta k_2)}{G^2 M_f r_p^2} & \frac{-B_f}{M_f} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + \Delta k_1}{mu} & 0 & \frac{1}{mu} \\ \frac{(k_1 + \Delta k_1)a}{I_z} & 0 & \frac{l_w}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_f r_p^2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{N}{M_f r_p^2} \end{bmatrix}^T, \mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \mathbf{D}_1 = [0 \quad 0 \quad 0], \mathbf{D}_2 = [0],$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{D}_1 \mathbf{w} + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}, \end{cases} \quad (15-3)$$

همانطور که مشخص است ورودی های سیستم (u و w) قابل مشاهده هستند که در ادامه معرفی شده اند.

مدل سیستم دارای چهار متغیر حالت زیر میباشد:

(۱) زاویه β که قبلا معرفی شده است

(۲) نرخ یاو

(۳) زاویه فرمان دنده

(۴) نرخ زاویه فرمان دنده

V سرعت خودرو در راستای محور y ، u سرعت خودرو در راستای محور طولی خودرو (شکل ۲)، m جرم خودرو، I_z ممان اینرسی حول محور y ، a و b فاصله مرکز جرم تا مرکز چرخ های جلو و عقب، B_r ضریب دمپینگ $rack$ ، r_p شعاع چرخدنده $steering\ motor$ ، M_r جرم $rack$ ، l_w فاصله مرکز جرم تا مرکز فشار خودرو می باشد.

پارامتر N در این سیستم نسبت چرخش کامل فرمان به چرخش چرخ ها می باشد. مثلاً اگر فرمان را 360° درجه بچرخانیم و چرخ 24° درجه بچرخد مقدار این پارامتر که $steering\ ratio$ نام دارد 15 خواهد شد. که در خودروهای مختلف این نسبت از 12 تا 15 متغیر است. از اونجایی که مقدار دقیق آن در مقالات آورده نشده است این پارامتر را به صورت پارامتری با عدم قطعیت با مقدار نامی برابر 13 و رنج 1 در نظر می گیریم:

$$N=13\pm1$$

با توجه به اینکه ماتریس های A و B و C و D فضای حالت سیستم استخراج شده است با کمک دستور ss ، سیستم با حضور عدم قطعیت ها را می توان استخراج نمود که اطلاعات مربوط به آن به صورت زیر می باشد:

sys =

Uncertain continuous-time state-space model with 1 outputs, 4 inputs, 4 states.

The model uncertainty consists of the following blocks:

N: Uncertain real, nominal = 13, variability = [-1,1], 1 occurrences

d: Uncertain real, nominal = 0.05, variability = [-0.02,0.02], 1 occurrences

k1: Uncertain real, nominal = 6e+04, variability = [-5.7e+04,2.62e+03], 2 occurrences

k2: Uncertain real, nominal = 7e+04, variability = [-6.5e+04,4.02e+04], 3 occurrences

lw: Uncertain real, nominal = 0.2, variability = [-0.1,0.1], 1 occurrences

همچنین با دستور sys.NominalValue اطلاعات مربوط به مدل نامی فراخوانی می شوند:

```

A =
      x1      x2      x3      x4
x1    -893.7 -1.708e+04    0.154    0
x2     34.52   -78.32   -1.428    0
x3      0      0      0      1
x4    8.763e+04 -1.111e+04   -4381  -20.41

```

```

B =
      u1      u2      u3      u4
x1     1.524      0  2.54e-05      0
x2     22.59      0  5.148e-05      0
x3      0      0      0      0
x4      0   -500.7      0    6509

```

```

C =
      x1  x2  x3  x4
y1      0   1   0   0

```

```

D =
      u1  u2  u3  u4
y1      0   0   0   0

```

X_1 =slideslip angle

X_2 =yaw rate

X_3 = steering angle of the gear

X_4 =rate of steering angle of the gear

$U_1 = \delta_f$

$U_2 = d_r$

$U_3 = f_y$

$U_4 = T_a$

که از موارد بالا T_a (گشتاور خروجی steering motor) ورودی کنترل شده ی ما می باشد و

$Y_1 = r$

که خروجی سیستم است.

با دستور $G = \text{zpk}(\text{Nominal4WS})$ توابع تبدیل از ورودی پلنت به خروجی آن بدست می آیند:

G =

From input 1 to output:

$$22.595 (s+896) (s^2 + 20.43s + 4357)$$

$$\frac{(s^2 + 25.22s + 1121) (s^2 + 967.2s + 6.583e05)}{(s^2 + 25.22s + 1121) (s^2 + 967.2s + 6.583e05)}$$

From input 2 to output:

$$714.99 (s+890)$$

$$\frac{(s^2 + 25.22s + 1121) (s^2 + 967.2s + 6.583e05)}{(s^2 + 25.22s + 1121) (s^2 + 967.2s + 6.583e05)}$$

From input 3 to output:

$$5.148e-05 (s+910.7) (s^2 + 20.5s + 4299)$$

$$\frac{(s^2 + 25.22s + 1121) (s^2 + 967.2s + 6.583e05)}{(s^2 + 25.22s + 1121) (s^2 + 967.2s + 6.583e05)}$$

From input 4 to output:

$$-9294.9 (s+890)$$

$$\frac{(s^2 + 25.22s + 1121) (s^2 + 967.2s + 6.583e05)}{(s^2 + 25.22s + 1121) (s^2 + 967.2s + 6.583e05)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

که به ترتیب از بالا به پایین تابع تبدیل از δ_f , d_r , f_y , T_a به خروجی r می باشد. (شکل ۳-۲)

سیستم دارای قطب های زیر است:

p =

$$1.0e+02 *$$

$$-4.8362 + 6.5148i$$

$$-4.8362 - 6.5148i$$

$$-0.1261 + 0.3101i$$

$$-0.1261 - 0.3101i$$

این سیستم صفر انتقال ندارد و برای مثال صفرهای تابع تبدیل از f_y به r در آن به صورت زیر هستند:

ans =

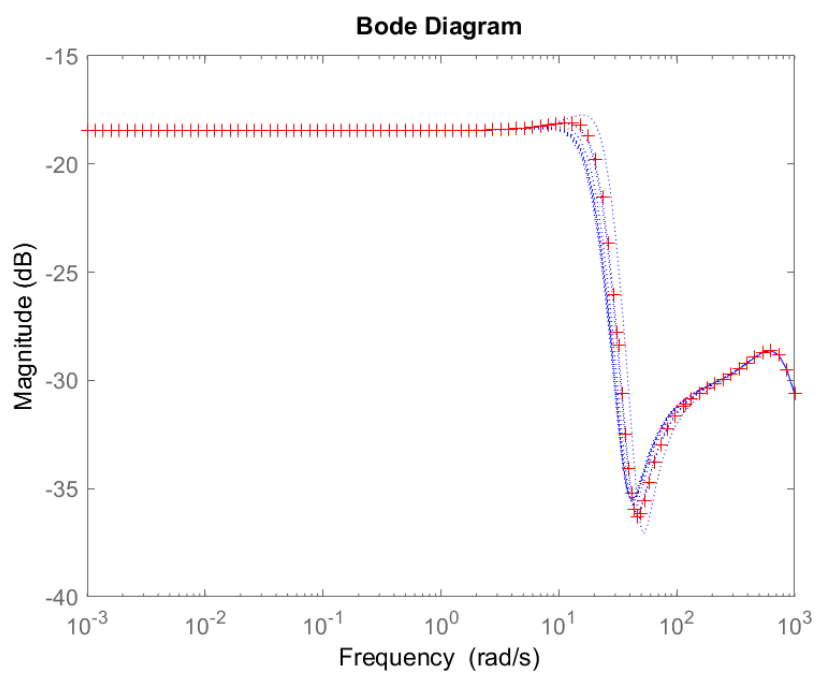
$$1.0e+02 *$$

$$-9.1068 + 0.0000i$$

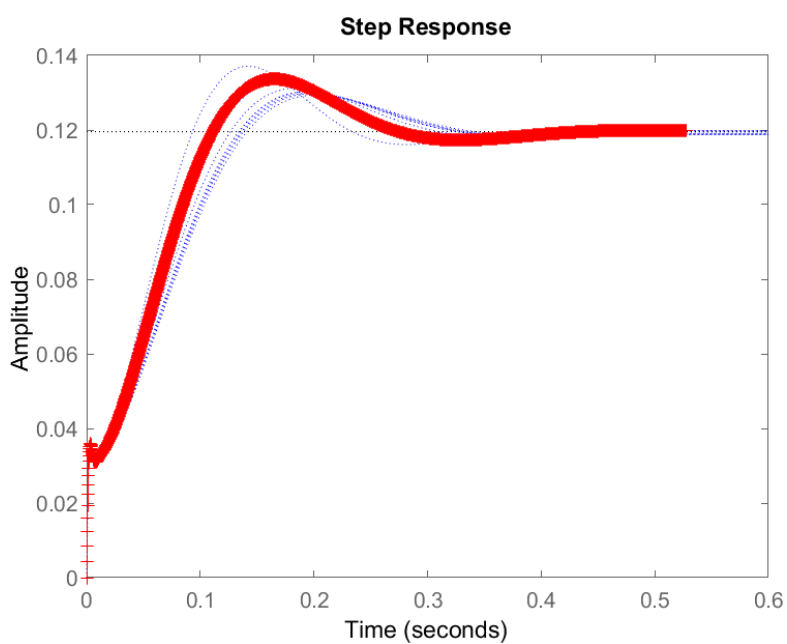
$$-0.1025 + 0.6476i$$

$$-0.1025 - 0.6476i$$

دیاگرام بود و پاسخ پله سیستم نامی و سیستم دارای عدم قطعیت (تابع تبدیل از δ_f به r) به صورت زیر است:

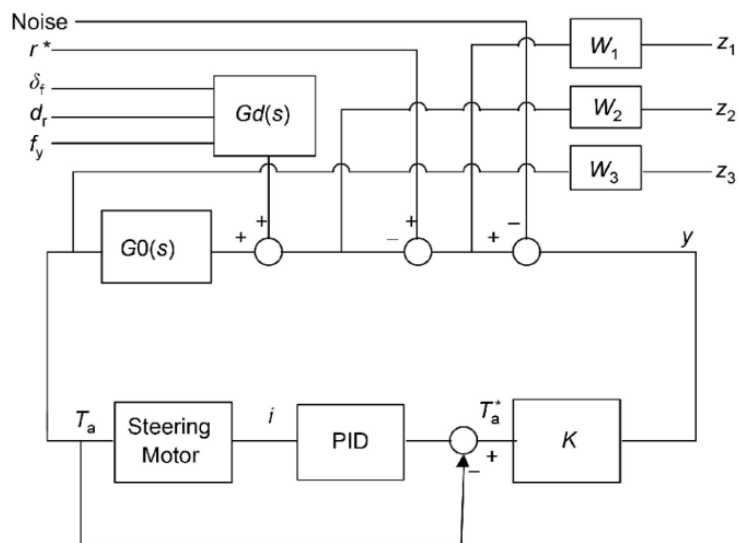


نمودار ۳-۱: دیاگرام بود سیستم نامی و سیستم دارای عدم قطعیت



نمودار ۳-۲: دیاگرام بود سیستم نامی و سیستم دارای عدم قطعیت

دیاگرام کنترلی سیستم را در شکل زیر مشاهده می کنید:



شکل ۳-۳: بلوک دیاگرام ساختار کنترلی 4WS

ورودی T_a ، G_0 و خروجی آن r (نرخ یاف) است. اغتشاشی در مسیر خروجی سیستم نامی تا کنترلر مقاوم وارد می شوند که نویز در سنسور (noise) می باشد. همچنین از اعمال نرخ یاف ایده آل (r^*) به سیستم به عنوان معیاری برای ردیابی نرخ یاف ایده آل استفاده می شود. همچنین زاویه فرمان چرخ جلو (δ_f)، اغتشاش وارده از طرف جاده که به صورت رندم است (d_r) و نیروی باد جانبی (f_y) اغتشاش های بیرونی هستند که به سیستم وارد می شوند. (شکل ۴)

G_d ماتریس توابع وزنی از سه اغتشاش ذکر شده ی آخر به r می باشد:

$$G_d(s) = [G_1, G_2, G_3] \quad (۱۶-۳)$$

که G_1 تابع تبدیل از δ_f به r ، G_2 تابع تبدیل از d_r به r و G_3 تابع تبدیل از f_y به r است.

با توجه به شکل (۲-۳) خواسته ها به صورت زیر هستند:

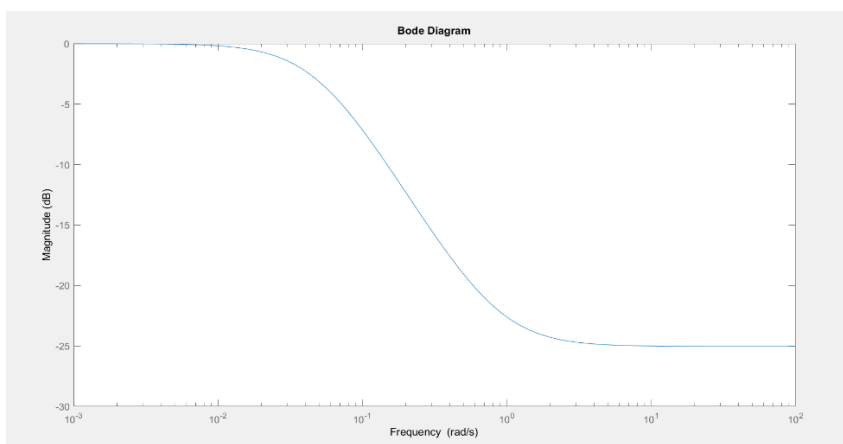
- Z1 که مربوط به ردیابی هدف می باشد ($r^* - r$) و هدف کاهش این سیگنال است
- Z2 که مربوط به پایداری و کارایی مقاوم است (r)
- Z3 که مربوط به اندازه خروجی کنترلر (تلاش کنترلی) می باشد (T_a)

در کنترل پایداری، گشتاور خروجی ایده آل موتور فرمان توسط کنترل کننده مقاوم بدست می آید. به منظور افزایش قابلیت اطمینان (اعتبار) موتور فرمان، یک حلقه بسته به موتور فرمان اضافه می شود. انحراف بین گشتاور خروجی ایده آل و گشتاور خروجی واقعی، ورودی کنترلر PID و جریان موتور فرمان i خروجی کنترلر PID است. سیگنال فعلی موتور فرمان توسط ECU داده می شود و گشتاور خروجی واقعی توسط موتور فرمان به دست می آید.

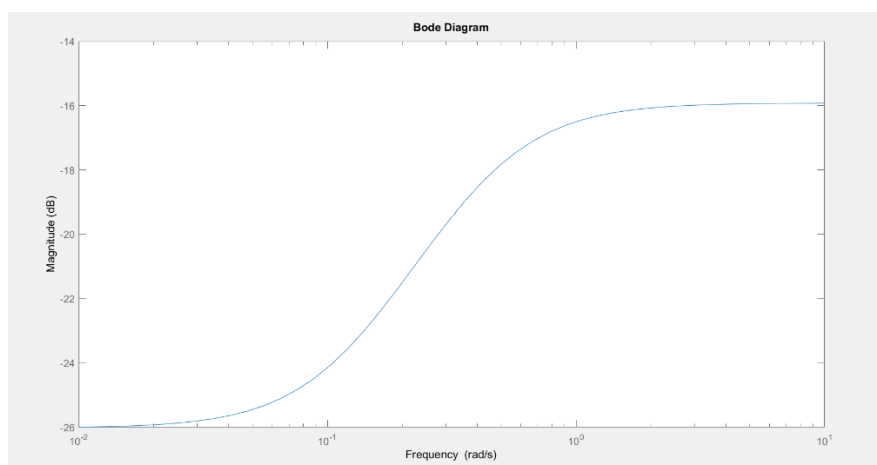
اصول کلی انتخاب توابع وزنی برای رسیدن به مطلوبیت ها به صورت زیر می باشد:

- W1 خواسته های عملکردی سیستم را منعکس می کند و تابع تبدیل آن به صورت low pass انتخاب می شود. این تابع وزنی مربوط به تابع تبدیل حساسیت (S) سیستم می شود که این تابع تبدیل رابطه بین ورودی ایده آل r^* و خطای $r - r^*$ را بیان می کند.
- W2 که مرتبط با تابع تبدیل مکمل حساسیت است را به صورت high pass انتخاب می کنیم.
- W3 که مرتبط با تلاش کنترلی ماست ثابت در نظر گرفته می شود

توابع وزنی پیشنهادی مقاله به صورت زیر هستند:



نمودار ۳-۳: دیاگرام بود تابع وزنی W1 پیشنهادی

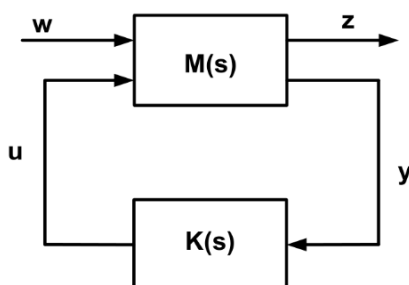


نمودار ۴-۳: دیاگرام بود تابع وزنی W2 پیشنهادی

❖ با توجه به اینکه پارامترهای به کار رفته در مقاله به صورت کامل در اختیار نیستند توابع وزنی بالا نمی توانند مطلوبیت های ما را ارضا کنند. برای مثال کنترلر H_∞ طراحی شده برای توابع وزنی بالا $g_{mma} = 1.4$ را به ما می دهد که این

همان نرم بی نهایت توابع تبدیل ورودی های بیرونی به مطلوبیت های ما می باشد و چون مقدار آن کمتر از یک است، پایداری برای سیستم نامی تضمین نشده.

در ادامه روند طراحی کنترلر استخراج سیستم M برای رسیدن به ساختار استاندارد $M-K$ مهم است و برای بدست آوردن آن از روش تابع تبدیل استفاده می کنیم تا M_{11} و M_{12} و M_{21} و M_{22} را بدست آوریم.



شکل ۵

برای این کار دو سر کنترلر در بلوک دیاگرام را بریده و با در نظر گرفتن این که M_{11} تابع تبدیل از w به z ، M_{12} تابع تبدیل از u به z ، M_{21} تابع تبدیل از w به y و M_{22} تابع تبدیل از u به y است، سیستم M را که برای طراحی کنترلر به آن نیاز داریم استخراج می کنیم. ارتباط مولفه های این ماتریس با ماتریس های A, B, C, D سیستم دینامیکی M به صورت زیر می باشد:

$$M = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= W_1 - W_1 G_1 - W_1 G_2 - W_1 G_3 & 0 \\ 0 & \quad W_2 G_1 & W_2 G_2 & W_2 G_3 & 0 \\ 0 & \quad 0 & 0 & 0 & 0 \end{aligned}$$

که یک ماتریس سه در پنج است.

$$M_{12} = -W_1 G_0$$

W2G0

W3

که یک ماتریس سه در یک است.

$$M21 = 1 \quad -G1 \quad -G2 \quad -G3 \quad -1$$

که یک ماتریس یک در پنج می باشد.

$$M22 = -G0$$

در نهایت سیستم M به صورت زیر خواهد بود که شامل شش ورودی و چهار خروجی است.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1G_1 & -W_1G_2 & -W_1G_3 & 0 & -W_1G_0 \\ 0 & W_2G_1 & W_2G_2 & W_2G_3 & 0 & W_2G_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_3 \\ W_1 & -W_1G_1 & -W_1G_2 & -W_1G_3 & -1 & -W_1G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^* \\ \delta_f \\ d_r \\ f_y \\ n \\ T_a \end{bmatrix}.$$

برای طراحی کنترلر H_∞ باید سیستم نامی M در شکل بالا را در متلب ایجاد کنیم و آن را با کنترلر ببندیم. برای بدست آوردن M از دستور sysic استفاده می کنیم. کد متلب مربوط به آن به صورت زیر است:

```
systemnames='W1 W2 W3 Gd_unc G_Ta_to_r_unc';
inputvar='[dis_turbs{3}; r_desired; noise; Ta]';
outputvar='[r_desired-Gd_unc-G_Ta_to_r_unc-noise; W1; W2; W3]';
input_to_W1='[r_desired-Gd_unc-G_Ta_to_r_unc]';
input_to_W2='[Gd_unc+G_Ta_to_r_unc]';
input_to_W3='[Ta]';
input_to_Gd_unc='[dis_turbs]';
input_to_G_Ta_to_r_unc='[Ta]';

sysoutname='truegencontobj';
cleanupsysic='yes';
sysic
```

دقت شود که برای طراحی کنترلر باید از سیستم نامی استفاده شود بنابراین سیستم نامی را به صورت `truegencontobj.Nominalvalue` تعریف می کنیم. حال می توانیم با دستور `hinfoyn` کنترلر را برای سیستم نامی طراحی کنیم:

```
nmeas=1;
ncont=1;
[Kinf,CLinf,gammainf]=hinfoyn(truegencontobj.Nominalvalue,nmeas,ncont);
```

دقت شود که ورودی کنترلر مقاوم در اینجا y می باشد و خروجی آن هم تنها یکیست T_a طراحی شده می باشد. برای بدست آوردن مدل نامی سیستم M همچنین می توانستیم از دستور زیر استفاده کنیم:

```
systemnames='W1 W2 W3 Gd G_Ta_to_r W_act';
inputvar='[dis_turbs{3}; r_desired; noise; Ta_desired]';
outputvar='[r_desired-Gd-G_Ta_to_r-noise; W1; W2; W3]';
input_to_W1='[r_desired-Gd-G_Ta_to_r]';
input_to_W2='[Gd+G_Ta_to_r]';
input_to_W3='[W_act]';
input_to_Gd='[dis_turbs]';
input_to_G_Ta_to_r='[W_act]';
input_to_W_act='[Ta_desired]';
sysoutname='gencontobj';
cleanupysic='yes';
sysic
```

در خط اول زیرسیستم هایی که قبلاً تعریف شده اند آمده است. خط دوم ورودی های سیستم M می باشد و خط سوم خروجی های M هستند که نام ندارند بلکه ترکیب خطی از خروجی زیر سیستم ها و ورودی های بیرونی هستند.

پس از طراحی کنترلر برای سیستم نامی به بررسی کارایی کنترلر طراحی شده می پردازیم. برای این کار سیستم حلقه بسته نامعین با کنترلر مقاوم را بدست می آوریم و شرط زیر را بررسی می کنیم:

$$T_{zw} = \text{LTF}(G(s), K(s)) \\ = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

$$\|T_{zw}\|_{\infty} \leq \gamma \quad (\gamma \geq \gamma_0)$$

برای رسیدن به کارایی مقاوم باید $\|T_{zw}\|_\infty$ کوچکتر از یک باشد. برای بررسی این موضوع و مقایسه ی مقدار تکین ساختار یافته در حالت نامی و بدترین شرایط دارای عدم قطعیت از دستورهای زیر استفاده می کنیم.

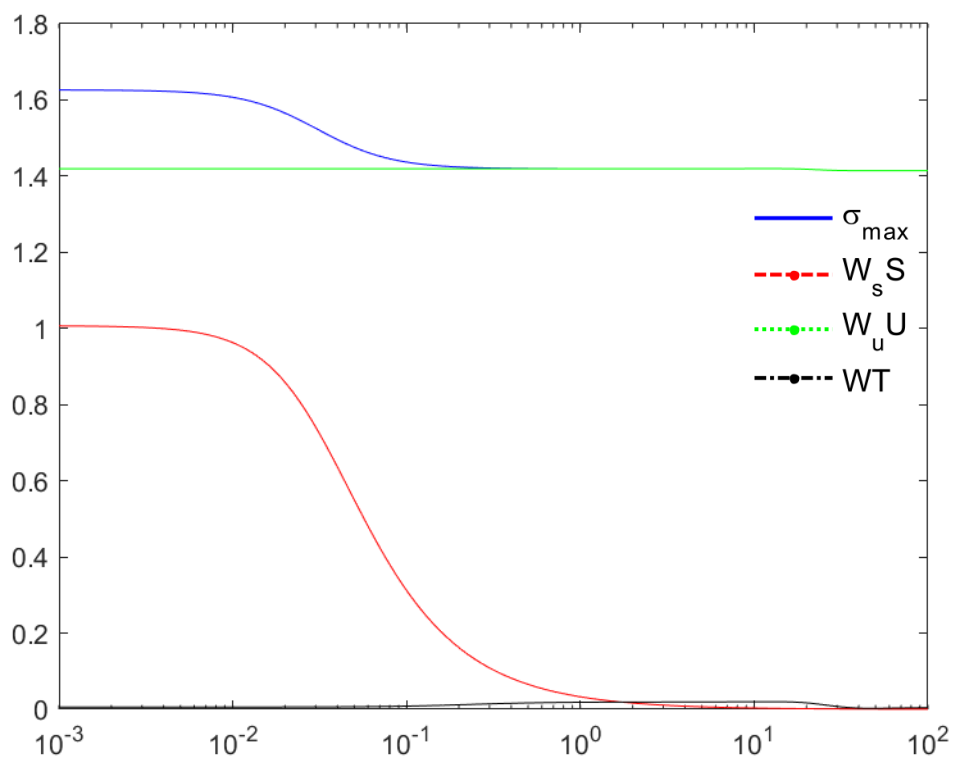
```
Tzw_inf=lift(truegencontobj,Kinf);
Tzw_two=lift(truegencontobj,Ktwo);
fmu=logspace(-2,4,200);
Tzw_inf_g=ufrd(Tzw_inf,fmu);
Tzw_two_g=ufrd(Tzw_two,fmu);
opt=wcgainoptions('MaxOverFrequency','off'); %options for WCGAIN
%compute worst-case gain (as a function of frequency) for K_inf
[mginf,wcuinf]=wcgain(Tzw_inf_g,opt);
%compute worst-case gain (as a function of frequency) for K_two
[mgtow,wcutow,infotwo]=wcgain(Tzw_two_g,opt);
clf
subplot(211)
semilogx(fnorm(Tzw_inf_g.Nominalvalue),'r',mginf.UpperBound,'-.b');
title('performance analysis for K_infinity')
xlabel('frequency (rad/sec)')
ylabel('closed_loop gain')
legend('Nominal plant', 'Worst_Case','Location','NorthWest');
subplot(212)
semilogx(fnorm(Tzw_two_g.Nominalvalue),'r',mgtwo.UpperBound,'-.b');
title('performance analysis for K_two')
xlabel('frequency (rad/sec)')
ylabel('closed_loop gain')
legend('Nominal plant', 'Worst_Case','Location','SouthWest');
```

تابع تبدیل کنترلر محاسبه شده به صورت زیر است:

```
>> zpk(tf(Kinf))  
  
ans =  
  
-6.9645e-14 (s+29.36) (s+0.4023) (s+0.0488) (s^2 + 22.54s + 497.6)^3 (s^2 + 961.5s + 6.357e05) (s^2 + 969.9s + 6.59e05)^3  
  
-----  
  
(s+0.4023) (s+0.04862) (s^2 + 22.54s + 497.6)^3 (s^2 + 91.35s + 4370) (s^2 + 959.4s + 6.535e05) (s^2 + 969.9s + 6.59e05)^3
```

همانطور که گفته شد $\gamma_{opt} = 1.62$ بدست آمده است. این یعنی خواسته های ما در رسیدن به پایداری و کیفیت در تقابل با یکدیگر، به مصالحه مناسب نرسیده اند. برخلاف سیستم های SISO که منحنی بودی اجزای سیستم حلقه بسته رسم می گردد، در این پروژه که نمونه ای از سیستم MIMO است لازم است مقدار تکین هر یک از اجزای سیستم حلقه بسته همانند شکل زیر ترسیم گردد. بدین منظور با اجرای برنامه زیر که در آن از خروجی CLinf دستور hinfsyn استفاده شده است، ماتریس های W_uU ، WT ، W_sS تشکیل و سپس مقادیر تکین هر یک در شکل زیر ترسیم می گردد:

```
omega = logspace(-3,2,200);  
g1 = tf(CLinf);  
sig_g1 = sigma(g1,omega);  
semilogx(omega,sig_g1(1,:), 'b')  
hold on  
Ws_S = [g1(1,1) g1(1,2) g1(1,3) g1(1,4) g1(1,5)];  
sig_Ws_S = sigma(Ws_S,omega);  
semilogx(omega,sig_Ws_S(1,:), 'r')  
hold on  
W_T = [g1(2,1) g1(2,2) g1(2,3) g1(2,4) g1(2,5)];  
sig_W_T = sigma(W_T,omega);  
semilogx(omega,sig_W_T(1,:), 'k')  
Wu_U = [g1(3,1) g1(3,2) g1(3,3) g1(3,4) g1(3,5)];  
sig_Wu_U = sigma(Wu_U,omega);  
semilogx(omega,sig_Wu_U(1,:), 'g')
```



نمودار ۳-۵ مقادیر تکین اجزای سیستم حلقه بسته

همانطور که مشخص است سهم اصلی مقدار تکین را $W_u U$ از آن خود ساخته است. که این نشان دهنده وجود محدودیت در اشباع عملگرهاست.