Chap 1 : Interpolation polynomiale.

On suppose qu'on a les pts $(x_0, f(x_0))$ ...... $(x_n, f(x_n))$

Cherchons $P \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ \cdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{cases}$

Existance ? Théorème de Wieistrass

f définie sur $[a, b]$, continue.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{P}(\mathbb{R}) \;/\; \forall x \in [a, b] \;/\; |f(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon$

Degré ? On prend P écrit ds la base canonique $(1, x, ..$

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ... a_n x^n$ tq

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_n + a_2 x_0^2 \; ... \; a_n x_0^n = f(x_0) \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 n_n^2 \; ... \; a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Mat Vandermond

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \prod_i \prod_j (x_i - x_j) \neq 0 \qquad \begin{matrix} x_i \neq x_j \\ \forall i \neq j \end{matrix}$

Rappel, x_0 racine de $P_n \Leftrightarrow P(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow P_n(x) = (x - x_0)\, q_{n-1}(x)$

x_0 racine simple de $P_n \Leftrightarrow P_n(x) = (x - x_0)\, q_{n-1}(x)$

x_0 racine multiple d'ordre $m \leq n$

$\Leftrightarrow P_n(x) = (x - x_0)^m \, q_{n-m}(x)$ avec $q_{n-m}(x_0) \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x_0) = P_n'(x_0) = \dots \; P^{(m-1)}(x_0) = 0 \\ P_n^{(m)}(x_n) \neq 0 \end{cases}$

Supposants que P_n admet n racines. $x_1 \dots x_n$

$$P_n(x) = C(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

! Si $P_{\underline{n}}$ admet $n+1$ racines $\Rightarrow P_n = 0$

! Le pôly qui interpole f aux pts $(x_0, f(x_0)), \dots (x_n, f(x_n))$ st unique

$\rightarrow$ Preuve, on suppose que P_n et q_n deux poly de $d°n$ qui interpole f.

i.e $\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ \dots \\ P_n(x_n) = f(x_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} q_n(x_0) = f(x_0) \\ \dots \\ q_n(x_n) = f(x_n) \end{cases}$

On pose $R(x) = P_n(x) - q_n(x)$; $d°R \leq n$

de plus $\begin{cases} R(x_0) = P_n(x_0) - q_n(x_0) = 0 \\ R(x_1) = 0 \\ \dots \\ R(x_n) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Alors R admet $n+1$ racines $\Rightarrow R = 0$

$\Rightarrow P_n = q_n$.

Méthode de Lagrange: Base / polynôme

on suppose qu'on a $(x_0, f(x_0)) \dots (x_n, f(x_n))$ P_n? $d°n$

La base de lagrange

tq $d°L_i = n$ et $L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Alors L_i admet n racines x_j $(j \neq i) \Rightarrow L_i = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$

C ? or $L_i(x_i) = 1 \Rightarrow C \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} (x_i - x_j) = 1$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\prod_{j\neq i} (x_i - x_j)}$$

$$\Rightarrow L_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i} (x - x_j)}{\prod_{j\neq i} (x_i - x_j)}$$

Alors : $\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)}$

Preuve : Il suffit de vérifier que $P_n(x_j) = f(x_j)$

$0 \leq j \leq n \quad P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x_j) = f(x_j)\, L_j(x_j) = f(x_j)$

Exemple : chercher le poly qui interpole f aux pt $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;9)$

disavantage : si on ajoute un autre pt, on doit répeter les calculs.

Méthode de Newton

on commance par un seul pt $(x_0, f(x_0))$

On ajoute $(x_1, f(x_1))$

on cherche P_1 de $d°1$ tq $\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) \\ P_1(x_1) = f(x_1) \end{cases}$

or $P_0(x_0) = f(x_0) = P_1(x_0)$

$\Rightarrow P_1(x_0) - P_0(x_0) = 0 \Rightarrow \underbrace{(P_1 - P_0)}_{d°1}(x_0) = 0 \Rightarrow (P_1 - P_0)(x) = C(x - x_0)$

$\Rightarrow P_1(x) = P_0(x) + C(x - x_0)$

or $P_1(x_1) = f(x_1) \Rightarrow P_0(x_1) + C(x_1 - x_0) = f(x_1)$

$$\Rightarrow f(x_0) + C(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$\Rightarrow C = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$\Rightarrow P_1(x) = P_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$
$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

on ajoute $(x_2, f(x_2))$ P_2? $d°2$ / $P_2(x_0) = f(x_0)$ ... $P_2(x_2) = f(x_2)$

or $P_1(x_0) = f(x_0)$ et $P_1(x_1) = f(x_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (P_2 - P_1)(x_0) = 0 \\ (P_2 - P_1)(x_1) = 0 \end{cases}$$

alors : $(P_2 - P_1)(x) = C(x - x_0)(x - x_1)$

$$\Rightarrow P_2(x) = P_1(x) + C(x - x_0)(x - x_1)$$

or $P_2(x_2) = f(x_2) \Rightarrow P_1(x_2) + C(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow f(x_0) + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + C(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow C = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\Rightarrow P_2(x) = P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

En général :

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$
$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots f[x_0 \dots x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

avec : $f[x_0, \dots, x_n] = \dfrac{f[x_1 \dots x_n] - f[x_0, \dots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

Exemple :

chercher le poly interpole f aux pts $(0,1), (1,2), (2,9)$

2/ Ajouter $(3, 28)$

1- $P_2(x) = f(0) + f[0,1](x - 0) + f[0,1,2](x - 0)(x - 1)$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	
0	1	$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 1$	$\frac{7-1}{2-0} = 1$	$\frac{6-3}{3-0} = 1$
1	2	$\frac{9-2}{2-1} = 7$	$\frac{19-7}{3-1} = 6$	
2	9	$\frac{28-9}{3-2} = 19$		
3	28			

alors $P_2(x) = \underline{1} + \underline{1} \times (x-0) + \underline{3}(x-0)(x-1)$

$$= 1 + x + 3x(x-1)$$

Pour comparer $P_2(x) = 1 + x + 3x(x-1)$

$$= 3x^2 - 2x + 1$$

avec Lagrange :

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - 2x(x-2) + \frac{9}{2}x(x-1)$$

$$= 3x^2 - 2x + 1$$

on ajoute $(3, 28)$

$$P_3(x) = P_2(x) + f[0, 1, 2, 3](x-0)(x-1)(x-2)$$

$$= 1 + x + 3x(x-1) + \underline{1}\, x(x-1)(x-2)$$

Démonstration par réccurrance.

- Mq $P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$

avec $f[x_0, \dots, x_n] = \dfrac{f[x_1 \dots x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

- hyp de rec

on suppose que l'écriture st V par tout poly de $d° \leq n-1$

Pour $x_0, \dots, x_{n-1}$

$$P_{n-1}(x) = \overbrace{f(x_0) + \dots}^{q_{n-2}} + f[x_0, \dots, x_n](x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$$

Pour $x_1, \ldots, x_n$:

$$q_{n-1}(x) = \underbrace{f(x_1) + \cdots}_{q_{n-2}} + f(x_1, \ldots, x_n](x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

On pose. $P_n(x) = \dfrac{(x_n - x) P_{n-1}(x) + (x - x_0) q_{n-1}(x)}{x_n - x_0}$

P_n interpole f aux pts $x_0, \ldots, x_n$, en effet :

$$P_n(x_0) = \frac{(x_n - x_0) P_{n-1}(x_0)}{x_n - x_0} = f(x_0)$$

$1 \leq i \leq n-1$ $\quad P_n(x_i) = \dfrac{(x_n - x_i) P_{n-1}(x_i) + (x_i - x_0) q_{n-1}(x_i)}{x_n - x_0} = f(x_i)$

$i = n$ $\quad P_n(x_n) = f(x_n)$

de plus : $P_n(x) - P_{n-1}(x) = \dfrac{(x_n - x) P_{n-1}(x) + (x - x_0) q_{n-1}(x)}{x_n - x_0} - P_{n-1}(x)$

$$= \frac{(x - x_0)(q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x))}{x_n - x_0}$$

on a $P_n(x_0) - P_{n-1}(x_0) = 0$

$1 \leq i \leq n-1$, $q_{n-1}(x_i) = P_{n-1}(x_i) \Rightarrow P_n(x_i) - P_{n-1}(x_i) = 0$

$P_n - P_{n-1}$ de $d°n$ et admet n racines.

alors $S_n(x) = C(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$.

$= Cx^2 + \cdots$ $d° \leq n$

et $S_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) = (x - x_0) \dfrac{[q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)]}{x_n - x_0}$

$$\Rightarrow C = \frac{f[x_1, \ldots x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$$= f[x_0, \ldots, x_n].$$

Erreur d'interpolation :

$$f(x) \simeq P_n(x) \Rightarrow f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

Th [Erreur analytique d'interpolation]

On suppose que f est dérivable à l'ordre $n+1$ sur $[a,b]$, $x_i \in [a,b]$

alors : $$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(S_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

Preuve : $x_0, \dots, x_n$ pt d'interpolat°

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ \vdots \\ P_n(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

- Pour $0 \leq i \leq n$ $\quad f(x_i) - P_n(x_i) = 0$

$\forall\, 0 \leq i \leq n \quad \frac{f^{(n+1)}(S_{x_i})}{(n+1)!}(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_i)\cdots(x_i - x_n) = 0$

Alors $E_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(S_{x_i})}{(n+1)!}(x_i - x_0)\cdots = 0$ (pour les pts d'inter.

- Pour $\bar{x} \neq x_i \quad 0 \leq i \leq n$

mq $f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(S_{\bar{x}})}{(n+1)!}(\bar{x} - x_0)\cdots(\bar{x} - x_n)$

$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[\dots](x \dots)$

$P_{n+1}(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}](\bar{x} - x_0)\cdots(\bar{x} - x_n)$

$\quad \| \quad f(\bar{x})$

On passe de P_n à P_{n+1} en ajoutant $\bar{x}$ alors P_{n+1} vérifie

$$\begin{cases} P_{n+1}(x_0) = f(x_0) \\ \vdots \\ P_{n+1}(x_n) = f(x_n) \\ P_{n+1}(\bar{x}) = f(\bar{x}) \end{cases}$$

on aura alors $P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots x_n, \bar{x}](x - x_0) \dots (x - x_n)$

de plus $E_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$

$= P_{n+1}(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$

$= f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}](\bar{x} - x_0) \dots (\bar{x} - x_n)$

Mq $f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}})}{(n+1)!}$

$\Leftrightarrow f^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}}) - f[x_0, x \dots x_n, \bar{x}] \cdot (n+1)! = 0$

on note : $R(x) = f(x) - P_{n+1}(x)$

on a f dérivable à l'ordre $n+1$

P_{n+1} C^∞

alors R dérivable à l'ordre $n+1$.

On a $R(x_i) = f(x_i) - P_{n+1}(x_i) = 0$

$R(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_{n+1}(\bar{x}) = 0$

Alors R admet $n+2$ racines

Alors d'après le Th de Rolle

R' admet $n+1$ zéros

R'' " n "

$R^{(n+1)}$ " un zéro noté $\xi_{\bar{x}}$

Alors $R^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}}) = 0$

$f^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}}) - P_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = 0$

or $P_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!\, f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}]$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}}) - (n+1)!\, f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] = 0$.

$\Rightarrow f[x_0, \dots x_n, \bar{x}] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}})}{(n+1)!}$

$\Rightarrow E_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = P_{n+1}(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$

$= \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_{\bar{x}})}{(n+1)!}(\bar{x} - x_0) \dots (\bar{x} - x_n)$

Ordre de l'erreur d'interpolat

On suppose $x_0 < x_1 < \dots\ x_n$

$0<h$
$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_0 + 2h$$
$$\vdots$$
$$x_i = x_0 + ih$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_0 + nh$$

$x \in [x_0, x_n]$ / $x = x_0 + sh$ $0<s<n$ $s \notin \mathbb{N}$.

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

or $x - x_0 = (x_0 + sh) - x_0 = sh$

$$x - x_i = (x_0 + sh) - (x_0 + ih) = (s-i)h$$

Alors $$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\, s(s-1)\dots(s-n)\, h^{n+1}.$$

Exercice :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
1975	72,8	0,28	-0,008	0,0008
1980	74,2	0,2	0,004	
1985	75,2	0,24		
1990	76,4			

$$P_3(x) = 72{,}8 + 0{,}28(x-1975) - 0{,}008(x-1975)(x-1980)$$
$$+ 0{,}0008(x-1975)(x-1980)(x-1985)$$

$$E(1977) \simeq P_3(1977)$$

Exercice 3 : Interpolation de Hermite.

1/ Supposons que ce pôly existe, montrons qu'il est unique

P vérifie $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$

$P(1) = f(1)$, $P'(1) = f'(1)$

Puisqu'il s'agit de 4 ég, alors $d°P = 3$

Supposons qu'on a 2 polynômes P_3 et q_3, tq :

$P_3(0) = f(0)$, $P_3'(0) = f'(0)$ et $q_3(0) = f(0)$, $q_3'(0) = f'(0)$

$P_3(1) = f(1)$, $P_3'(1) = f'(1)$ $q_3(1) = f(1)$, $q_3'(1) = f'(1)$

on pose $R(x) = P_3(x) - q_3(x)$, $d°R \leq 3$

or $R(0) = 0 = R'(0)$ et $R(1) = 0 = R'(1)$

Alors R admet 2 racines double $d°R \leq 3 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow q_3 = P_3$

2) A_0? $d°A_i = 3$ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $A_i(x_j) = 0$, $A_i($

On a : $\begin{cases} A_0(0) = 1 \\ A_0(1) = 0 \\ A_0'(0) = 0 \\ A_0'(1) = 0 \end{cases}$ $(x-1)^2(\alpha x + \beta)$

Or $A_0(0) = 1 \Rightarrow (0-1)^2(\beta) = 1 \Rightarrow \beta = 1$

$A_0'(0) = 0$ or $A_0'(x) = 2(x-1)(\alpha x + \beta) + (x-1)^2\alpha$

$A_0'(0) = 0 \Rightarrow -2\beta + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2\beta = 2$

$\Rightarrow A_0(x) = (x-1)^2(2x+1)$

$A_1(0) = 0$

$A_1(1) = 1$ $\Rightarrow x^2(\alpha x + \beta) = A_1(x)$

$A_1'(0) = 0$

$A_1'(1) = 0$

$A_1(1)=1 \Rightarrow x(\alpha+\beta)=1 \Rightarrow \alpha+\beta=1$

$A_1'(x) = 2x(\alpha x+\beta) + x^2 \cdot \alpha$

$= 2(\alpha+\beta)+\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = -2(\alpha+\beta) = -2$

Alors $\beta = 3$, d'où $A_1(x) = x^2(-2x+3)$

$d°B = 3$ $\quad \begin{cases} B_i(x_{ij}) = 0 \\ B_i'(x_{ij}) = \delta_{ij} \end{cases}$

$B_0(0) = 0$ — racine simple

$B_0(1) = 0$ — 1 est un racine double.

$B_0'(0) = 1$ — $B_0(x) = x(x-1)^2 \times C$

$B_0'(1) = 0$

→ Trouvons C : on a $B_0'(0) = 1$

$B_0'(x) = C(x-1)^2 + 2xC(x-1)$

$\Rightarrow B_0'(0) = \boxed{C = 1}$

Alors :

$B_0(x) = x(x-1)^2$

on a, $\begin{cases} B_1(0) = 0 \\ B_1(1) = 0 \\ B_1'(0) = 0 \\ B_1'(1) = 1 \end{cases}$ racine double, racine simple. $\Rightarrow B_1(x) = (x-0)^2(x-1)C = Cx^2(x-1)$

on a : $B_1'(1) = 1$

$\Rightarrow C \times 2(1) \times (1-1) + C(1)^2 \times 1 = 1$ $\quad$ ~~$3 \times C \times (1)^2 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$~~

$\Rightarrow \boxed{C = 1}$

$B_1(x) = x^2(x-1)$

$$P_3(x) = A_0(x) f_0(0) + A_1(x) f_1(1) + B_0(x) f'(0) + f'(1) B_1(x)$$

$$P_3(0) =$$

Chapitre 2 : Intégration Numérique.

Soit $I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq I(f) = \sum_{i=0}^{p} w_i f(x_i)$

Pour l'ordre, on commence par

q_0 de d°0 $\qquad q_0(x) = c \in \mathbb{R}$.

$$I = \int_a^b q_0(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c\int_a^b 1 \cdot dx = c[b-a]$$

$$I(q_0) = \sum_{i=0}^{p} w_i q_0(x_i) = c\sum_{i=0}^{p} w_i$$

Exacte par les poly cst si et ssi :

$$c[b-a] = c\sum_{i=0}^{p} w_i$$

si c'est vérifié, on passe a P_1

$$P_1(x) = dx + c$$

$$I = \int_a^b (dx + c)\,dx = d\int_a^b x\,dx + c\int_a^b 1\,dx$$

$$I(P_1) = d\sum_{i=0}^{p} w_i x_i + c\sum_{i=0}^{p} w_i$$

on a :
$$I = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Valeur exacte}} = \underbrace{\int_a^b P_n(x)\,dx}_{\text{Quadrature } J(f)} + \underbrace{\int_a^b E_n(x)\,dx}_{\text{Erreur d'intégrat}^{\circ}\ E(f)}$$

Méthode des rectangles :

la fct f à intégrer par une fct cst (d°0) au pt

$x_0 = a$ ou $x_0 = b$ ou $x_0 = \frac{a+b}{2}$

- Soit $(x_0, f(x_0))$ pt d'interpolat° :

$$I_R(f) = (b-a)\,f(x_0).$$

$x_0 = a$, $f(x) = P_0(x) + E_0(x)$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{I_{Rg}(f)} + \underbrace{\int_a^b \frac{f'(\xi_x)}{1!}(x-a)\,dx}_{E_{Rg}(f)}$$

$$I_{Rg}(f) = \int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a)$$

- Pour $x_0 = b$ $\quad I_{R,d}(f) = f(b)(b-a)$

et $\quad E_{R,d}(f) = \int_a^b f(\xi_x)(x-b)\,dx$

- Pour $x_0 = \frac{a+b}{2}$ $\quad I_{P.m}(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

et $\quad E_{R,m}(f) = \int_a^b f(\xi_x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx$

Pour l'erreur: $E_{R,g}(f) = \int_a^b f(\xi_x)(x-a)\,dx$

Th: On suppose que f continue

$x-a$ intégrable et ne change ps de signe. (≥ 0) car $x \in [a,b]$

Alors d'après le $2^{ème}$ th de la moyenne.

$\exists\, \eta \in [a,b]$

$$E_{R,g}(f) = \int_a^b f(\xi_x)(x-a)\,dx$$

$$= f'(\eta)\int_a^b (x-a)\,dx$$

$$E_{R,g}(f) = \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

de m: $\quad E_{R,d}(f) = \frac{-f'(\eta)}{2}(b-a)^2$

2/ Méthode des Trapezes

ici on prend $x_0 = a$ et $x_1 = b$.

$$f(x) = P_1(x) + E_1(x)$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b f(a) + f[a,b](x-a)\,dx}_{I_T(f)} + \underbrace{\int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}(x-a)(x-b)\,dx}_{E_T(f)}$$

$$I_T(f) = \int_a^b f(a) + f[a,b](x-a)\,dx$$

$$\boxed{I_T(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]}$$

- Pour l'ordre :

• Pour $q_0(x) = 1$, $I = \int_a^b 1\,dx = b-a$

$$I_T(q_0) = \frac{b-a}{2}[1+1] = b-a = I$$

• Pour $q_1(x) = x$, $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

$$= \frac{1}{2}(b-a)(b+a)$$

$$I(q_1) = \frac{b-a}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = I$$

• Pour $q_2(x) = x^2$ $\quad I = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$

$$I(q_2) = \frac{b-a}{2}[a^2+b^2] \neq I$$

- Pour l'erreur. $E_T(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)\,dx$

on suppose que f'' continue.

alors d'après 2° Th de la moy $\quad \eta \in [a,b]$

$$E_T(f) = \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$$E_T(f) = \frac{-f''(\eta)}{12}(b-a)^3$$

3) Méthode de Simpson :

On prend 3 pts

$x_0 = a \quad , x_1 = m = \frac{a+b}{2} \quad , x_2 = b$

$$f(x) = P_2(x) + E_2(x)$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a) + f[a,m](x-a) + f[a,m,b](x-a)(x-m)\,dx$$

$$+ \int_a^b \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x-a)(x-m)(x-b)$$

$I_s(f)$

$$I_s(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(m) + f(b)\right]$$

si on pose $h = \frac{b-a}{2}$, on aura $m = a+h$, $b = a+2h$

$$I_s(f) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(m) + f(b)\right]$$

Exemple : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1$

Calculer $I_{R,g}(\sin)$, $I_{R,d}(\sin)$, $I_{p.m}(\sin)$

$I_T(\sin)$, $I_s(\sin)$.

$$f(x) = P_2(x) + E_2(x)$$

$$f(x) = P_3(x) + E_3(x)$$

avec $P_3(x) = P_2(x) + f[a,m,b,x_3](x-a)(x-m)(x-b)$

or $\int f[a,m,b,x_3](x-a)(x-m)(x-b)\,dx = 0$

Alors : $\int P_3(x)\,dx = \int P_2(x)\,dx$

$\Rightarrow \int E_2 = \int E_3$ or $E_3 = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)(x-m)(x-b)(x-x_3)$

on prend alors $x_3 = m$

$\Rightarrow \int E_2 = \int E_3 = \int \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24}(x-a)(x-m)^2(x-b)\,dx$

$$= \frac{\ldots}{2880}(b-a)$$

II) Les méthodes composites.

On veut approcher $\int_a^b f(x)\,dx$

On prend $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{b-a}{n}$

on pose $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, ..., $x_i = x_0 + ih$, ..., $x_n = x_0 + nh = b$

$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Pour les rectangles à gauche : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = I_{R,g,i}(f) + E_{R,g,i}(f)$

$$= h f(x_i) + \frac{f'(\eta)h^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} I_{R,g,i}(f) + \sum_{i=0}^{n-1} E_{R,g}(f)$$

$$= h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\eta_i)$$

$$= I_{R,g,c}(f) + \frac{h^2}{2} \cdot n \cdot f'(\eta),\ \eta \in [a,b]$$

Alors : $I_{R,g,c}(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x)$

$$E_{R,g,c}(f) = \frac{h^2}{2} \cdot n \cdot f'(\eta)$$

$$= \frac{f'(\eta) \cdot (b-a)^2}{2n}$$

de m : $I_{R,d,c}(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$ $\qquad h = \frac{b-a}{n}$

$$E_{R,d,c}(f) = -\frac{f^{i}(\eta)(b-a)^{i+1}}{2n}$$

$$I_{p,m,c}(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

$$I_{P.M.C}(f) = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

$x_i \quad x_{i+1}$, $\frac{h}{2} \quad \frac{h}{2}$, $x_i + h$

$x_m = x_i + \frac{h}{2}$

Pour les trapezes :

$$I_{T.C}(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right)$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2\left(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right) + f(x_n) \right]$$

$$E_{T.C}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{T,i}(f)$$

$$= \frac{-h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) \quad , \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$= \frac{-h^3}{12} \cdot n \cdot f''(\eta) \quad , \eta \in [a,b]$$

$$= \frac{-f''(\eta)}{12 n^2} (b-a)^3$$

Pour Simpson composite :

On pose $h = \frac{b-a}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_0 = a \quad \dots \quad x_i = x_0 + ih \quad , \dots , \quad x_{2n} = x_0 + 2nh = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx$$

$$I_{S.C}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} I_{S,i}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{6} \left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right]$$

$$= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots \right.$$

$$\left. + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right]$$

$$E_{S.C}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{S,i} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-f^{(4)}(\eta_i)}{2880} (2h)^5 = \frac{-h^5}{90} \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_i)$$

$\eta_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$

$$= \frac{-h^5}{90} \cdot n \cdot f^{(4)}(\eta) , \quad \eta \in [a,b]$$

$$\Rightarrow E_{S.C}(f) = -\left(\frac{b-a}{2n}\right)^5 \cdot \frac{1}{90} \cdot n \cdot f^{(4)}(\eta)$$

$$E_{S.C}(f) = -\frac{\dots}{2880n^4}(b-a)$$

$$= -\frac{f^{(4)}(\eta)}{180}$$

Application,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 2$$

On prend $n = 2$

$h = \frac{\pi/2 - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$

$x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_n = \frac{\pi}{2}$

* $I_{R.g.c}(\sin) = \frac{\pi}{4}\left[\sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0,56.$

les bornes ne les multipliés pas.

* $I_{P.m.c}(\sin) = \frac{\pi}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = \underline{1,026}$

* $I_{T.c}(\sin) = \frac{\pi}{8}\left(\sin(0) + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \underline{0,91}$

* $I_S(\sin) = \frac{\pi}{24}\left(\sin(0) + 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \underline{1,000}$

III - Méthode de Gauss-Legendre.

G.L à un pt $x_0 ?, w_0$

On suppose que la méthode est exacte pour le d°0

$$q_0(x) = 1$$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = w_0 q_0(x_0) = w_0 = 2.$$

On suppose que la méthode est exacte pour $q_1(x) = x$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} x\,dx = w_0 q_1(x_0) = w_0 x_0 \Rightarrow w_0 x_0 = 0$$

alors $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_0 x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} w_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{matrix}$

Alors $I_{G.L}(f) = 2f(0)$

Sur $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

on pose $x = \alpha t + \beta$

Pour $t = 1$, $x = a \Rightarrow a = -\alpha + \beta$

Pour $t = -1$, $x = b \Rightarrow \alpha + \beta = b$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{a+b}{2} \\ \alpha = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{b-a}{2}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)}_{g(t)} dt$$

$$\simeq \frac{b-a}{2} I_{G.L}(g)$$

$$= \frac{b-a}{2}\, 2 \cdot g(\underbrace{0}_{x_0})$$

$$= (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Pour l'ordre :

on prend $q_2(x) = x^2$

$$\int_a^b x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

et $I_{G.L}(x^2) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \neq \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

donc la méthode est d'ordre 1

Gauss legende à 2 pts :

Cherchons x_0, x_1, w_0, w_1

$$I_{GL}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

On suppose qu'elle est exacte pour $d°0$: $q_0(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} dx = w_0 + w_1 = 2$$

On suppose qu'elle est exacte pour $d°1$: $q_1(x) = x$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = w_0 x_0 + w_1 x_1 = 0$$

On suppose - - - - $d°2$: $q_2(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \frac{2}{3}$$

On suppose — — — — $d°3$: $q_3(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = 0$$

Alors
$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 2 & (1) \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 = 0 & (2) \\ w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \frac{2}{3} & (3) \\ w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = 0 & (4) \end{cases}$$

$x_0^2 (2) - (4) \Rightarrow w_1 x_1 x_0^2 - x_1^3 w = 0$

$\Rightarrow w_1 x_1 (x_0^2 - x_1^2) = 0$

$\Rightarrow w_1 x_1 (x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$

$w_1 \neq 0$ car sinon méthode à un pt.

$x_1 \neq 0$ car sinon $(2) \Rightarrow w_0 x_0 = 0$

$\Rightarrow w_0 = 0$ imp

ou $x_0 = 0 = x_1$ imp

$x_0 - x_1 \neq 0$, sinon $x_0 = x_1$ imp (1pt)

Alors $x_0 + x_1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -x_1$

$$(-\omega_0+\omega_1)\cancel{\omega_1^{x_0}}=0$$

$$\Rightarrow -\omega_0+\omega_1=0 \Rightarrow \omega_1=\omega_0$$

Or d'après (1) $\omega_0+\omega_1=2$

$$\Rightarrow 2\omega_1=2 \Rightarrow \omega_1=1$$
$$\Rightarrow \omega_0=1$$

d'après (3) $\omega_0 x_0^2+\omega_1 x_1^2=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow 2x_1^2=\frac{2}{3} \Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{et } x_0=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Alors $I_{G.L}(f)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Pour l'ordre $q_4(x)=x^4$

$$\int_{-1}^{1}x^4\,dx=\frac{2}{5}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4\neq\frac{2}{5}$$

Alors d'ordre 3.. (la meilleur méthode (GL) nbr des pts + l'ordre).

• On passe a $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

on pose $x=\alpha t+\beta$

Pour $t=-1$, $x=a \Rightarrow a=\beta-\alpha$

Pour $t=1$, $x=b \Rightarrow b=\alpha+\beta$

$$\begin{cases}\beta-\alpha=a\\ \alpha+\beta=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{b-a}{2}\\ \beta=\frac{b+a}{2}\end{cases} \Rightarrow x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2} \text{ et } dx=\frac{b-a}{2}dt$$

Alors $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)}_{g(t)}dt$

$$\Rightarrow I_{G.L}(f)=\frac{b-a}{2}\left[g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow I_{G.L}(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(-\frac{b-a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{b+a}{2}\right)\right.$$
$$\left. + f\left(\frac{b-a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

TD

4) Mq $f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} x^2(x-1)^2$

Indicat° : on pose

$$R(t) = f(t) - P_3(t) - \frac{f(x) - P_3(x)}{x^2(x-1)^2} t^2(1-t)^2$$

Pour $x=0$ et $x=1$

$$f(0) - P_3(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{f^{(4)}(\xi_0)}{4!} 0^2(0-1)^2 = 0$$

$$f(1) - P_3(1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(\xi_1)}{4!} 1^2(1-1)^2 = 0$$

Pour $x \neq x_i$ $(x_i \in \{0, 1\})$

on posé $R(t) = f(t) - P_3(t) - \frac{f(x) - P_3(x)}{x^2(x-1)^2} t^2(t-1)^2$

on a f C^4 P_3 C^∞ $\Rightarrow R$ C^4

on a $\begin{cases} R(0)=0 \\ R(1)=0 \\ R(x)=0 \end{cases}$ $\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ R' admet 2 racines.

de plus $R'(0)=0$ $R'(1)=0$

Alors R' admet 4 racines

$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ R'' admet 3 racines

$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ $R^{(3)}$ " 2 racines

$\overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ $R^{(4)}$ " une racine.

Alors $R^{(4)}(\xi_x) = 0 \Rightarrow f^{(4)}(\xi_x) - 0 - \frac{f(x) - P_3(x)}{x^2(x-1)^2} 4! = 0$

$$\Rightarrow f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!} x^2(x-1)^2$$

5) $\int_0^1 f(x)\,dx \simeq I(f) = af(0) + bf(1) + cf'(0) + df'(1)$

On aura besoin de 4 éq, il suffit alors que la méthode soit exacte $1, x, x^2, x^3$

$$\begin{cases} \int_0^1 1\,dx = a.1 + b.1 + c.0 + d.0 \\ \int_0^1 x\,dx = a.0 + b.1 + c.1 + d.1 \\ \int_0^1 x^2\,dx = a.0 + b.1 + c.2\times 0 + d.2.1 \\ \int_0^1 x^3\,dx = a.0 + b.1 + c.0 + d.3.1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ b+c+d = \frac{1}{2} \\ b+2d = \frac{1}{3} \\ b+3d = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \\ b = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(f) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) + \frac{1}{12}\left(f'(0) - f'(1)\right)^{2+1}$$

Pour l'ordre :

$$\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5} \quad , \quad I(x^4) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{12}(-4) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{5}$$

Alors la méthode est d'ordre 3

6) Mq $I(f) = \int_0^1 P_3(x)\,dx$ (P_3 le poly de Hermite)

On a $d°P_3 = 3$ et la méthode est exacte pour les poly de $d°3$

$$\text{Alors } \int_0^1 P_3(x)\,dx = \frac{1}{2}[\overset{f(0)}{P_3(0)} + \overset{f(1)}{P_3(1)}] + \frac{1}{12}[\overset{f'(0)}{P_3'(0)} - \overset{f'(1)}{P_3'(1)}]$$

$$= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] + \frac{1}{12}[f'(0) - f'(1)] = I(f)$$

7) Donner une majoration de $\left|\int_0^1 f(x)\,dx . I(f)\right|$

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - I(f)\right| = \left|\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 P_3(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (f(x) - P_3(x))\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x) - P_3(x)|\,dx$$

$$\leq \int_0^1 \left|\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}\,x^2(x-1)^2\right|dx$$

$$\leq \max_{0\leq \eta\leq 1} \frac{|f^{(4)}(\eta)|}{4!}\int_0^1 x^2(x-1)^2\,dx$$

$$= \max_{0\leq \eta\leq 1} \frac{|f^{(4)}(\eta)|}{4!}\int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2\,dx$$

$$= \max_{0\leq \eta\leq 1} \frac{|f^{(4)}(\eta)|}{720}$$

8) En déduire la formule sur $[\alpha, \beta]$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$$

on pose $x = at + b$

- Pour $t = 1$ et $x = \beta$, on a : $\beta = a + b$
- Pour $t = 0$ et $x = \alpha$, on a : $\alpha = b$

Alors, $\begin{cases} a = \beta - \alpha \\ b = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = (\beta - \alpha)t + \alpha$

$\Rightarrow dx = (\beta - \alpha)\,dt$

d'où :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_0^1 f((\beta-\alpha)t + \alpha)\cdot(\beta-\alpha)\,dt$$

$$= (\beta - \alpha)\int_0^1 f((\beta-\alpha)t + \alpha)\,dt$$

$$= (\beta - \alpha)\int_0^1 g(t)\,dt$$

$$I(f) \simeq (\beta-\alpha)\left[\frac{1}{2}[g(0)+g(1)] + \frac{1}{12}(g'(0) - g'(1))\right]$$

$$\simeq (\beta-\alpha)\left[\frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\beta)] + \frac{1}{12}(\beta-\alpha)[f'(\alpha) - f'(\beta)\right.$$

CamScanner

9) $$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - I(f)\right| = (\beta-\alpha)\left|\int_0^1 g(t)\,dt - I(g)\right|$$

$$\leq (\beta-\alpha) \max_{0\leq \eta\leq 1} \frac{|g^{(4)}(\eta)|}{720}$$

$$= (\beta-\alpha)^5 \frac{\max_{\alpha\leq\xi\leq\beta}|f^{(4)}(\xi)|}{720}$$

10) En déduire une formule composée :

On prend $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{\beta-\alpha}{n}$

$x_0 = \alpha \qquad x_i = x_0 + ih = \alpha + ih$

$x_n = x_0 + nh = \alpha + nh = \beta$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\simeq \sum_{i=0}^{n-1} h\left[\frac{1}{2}\left(f(x_i) - f(x_{i+1})\right) + \frac{h}{12}\left(f'(x_i) - f'(x_{i+1})\right)\right]$$

$$\Rightarrow I_{[\alpha,\beta],c}(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\left(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right) + f(x_n)\right]$$

$$+ \frac{h^2}{12}\left[f'(x_0) - f'(x_n)\right]$$

11) Majoration de l'erreur composite

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - I_{[\alpha,\beta],c}(f)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - I_{[x_i,x_{i+1}]}(f)\right|$$

$$= \frac{h^5}{720}\sum_{i=0}^{n-1}\max_{x_i\leq\xi_i\leq x_{i+1}}|f^{(4)}(\xi_i)|$$

$$\leq \frac{\max_{\alpha\leq\xi\leq\beta}|f^{(4)}(\xi)|}{720\, n^4}(\beta-\alpha)^5$$

Chap : le méthode itératives pour.

On prend $N \in \mathbb{N}^*$

on pose $h = \frac{1-0}{N+1}$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = x_0 + h = h$$

$$x_i = 0 + ih = ih$$

$$\vdots$$

$$x_{N+1} = (N+1)h = 1$$

en chaque pt x_i $1 \leq i \leq N$

$$u''(x_i) \simeq ?$$

on ajoute

puis (3) s'a[illegible]

1 a 2

pas logique

$$u(x_i+h) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^{(3)}}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(+ O(h^5)$$

$+$

$$u(x_i-h) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \frac{h^3}{6} u^3(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(+ O(h^$$

$$+ O(h^4)$$