Kombinatorika

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al Azhar Indonesia

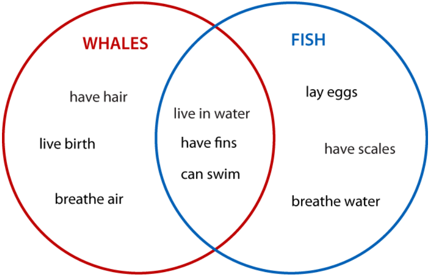
March 26, 2019

Ulasan

Prinsip Umum Pencacahan

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = \prod_i |A_i|$$

Prinsip Inklusi/Eksklusi



Total elemen dari dua himpunan adalah jumlah elemen kedua himpunan, dikurangi dengan jumlah elemen yang masuk ke dalam keduanya, i.e.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Permutasi

Permutasi

Jumlah cara untuk mengurutkan n objek yang dapat dibedakan

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Example

Ada berapa urutan cara untuk mengoreksi tugas dari 9 orang?

Example

Ada berapa urutan cara untuk mengoreksi tugas dari 9 orang?

Example

Ada berapa urutan cara untuk mengoreksi tugas dari 9 orang?

Jawab

Misalkan ada A, B, C, D, E, F, G, H, dan I.

Example

Ada berapa urutan cara untuk mengoreksi tugas dari 9 orang?

Jawab

Misalkan ada A, B, C, D, E, F, G, H, dan I.

1. Koreksi #1: A, B, C, D, E, F, G, H, I
   Asumsikan kita pilih A

Example

Ada berapa urutan cara untuk mengoreksi tugas dari 9 orang?

Jawab

Misalkan ada A, B, C, D, E, F, G, H, dan I.

1. Koreksi #1: A, B, C, D, E, F, G, H, I
   Asumsikan kita pilih A
2. Koreksi #2: B, C, D, E, F, G, H, I
   Asumsikan kita pilih B

Example

Ada berapa urutan cara untuk mengoreksi tugas dari 9 orang?

Jawab

Misalkan ada A, B, C, D, E, F, G, H, dan I.

1. Koreksi #1: A, B, C, D, E, F, G, H, I
   Asumsikan kita pilih A
2. Koreksi #2: B, C, D, E, F, G, H, I
   Asumsikan kita pilih B
3. Koreksi #3: C, D, E, F, G, H, I
   dst.

Example

Ada berapa urutan cara untuk mengoreksi tugas dari 9 orang?

Jawab

Misalkan ada A, B, C, D, E, F, G, H, dan I.

1. Koreksi #1: A, B, C, D, E, F, G, H, I
   Asumsikan kita pilih A
2. Koreksi #2: B, C, D, E, F, G, H, I
   Asumsikan kita pilih B
3. Koreksi #3: C, D, E, F, G, H, I
   dst.

Berarti ada $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362,880$ cara.

Example

Bagaimana kalau tugas dari mata kuliah yang sama harus dikoreksi bersamaan? Misalkan ada STAT-A, PROG-B, STAT-C, STAT-D, PROG-E, MAT-F, MAT-G, PROG-H, dan STAT-I.

Example

Bagaimana kalau tugas dari mata kuliah yang sama harus dikoreksi bersamaan? Misalkan ada STAT-A, PROG-B, STAT-C, STAT-D, PROG-E, MAT-F, MAT-G, PROG-H, dan STAT-I.

Example

Bagaimana kalau tugas dari mata kuliah yang sama harus dikoreksi bersamaan? Misalkan ada STAT-A, PROG-B, STAT-C, STAT-D, PROG-E, MAT-F, MAT-G, PROG-H, dan STAT-I.

Jawab

Example

Bagaimana kalau tugas dari mata kuliah yang sama harus dikoreksi bersamaan? Misalkan ada STAT-A, PROG-B, STAT-C, STAT-D, PROG-E, MAT-F, MAT-G, PROG-H, dan STAT-I.

Jawab

1. Kelompokkan: STAT-A, STAT-C, STAT-D, STAT-I, PROG-B, PROG-E, PROG-H, MAT-F, MAT-G

Example

Bagaimana kalau tugas dari mata kuliah yang sama harus dikoreksi bersamaan? Misalkan ada STAT-A, PROG-B, STAT-C, STAT-D, PROG-E, MAT-F, MAT-G, PROG-H, dan STAT-I.

Jawab

1. Kelompokkan: STAT-A, STAT-C, STAT-D, STAT-I, PROG-B, PROG-E, PROG-H, MAT-F, MAT-G
2. STAT $= 4!$
   PROG $= 3!$
   MAT $= 2!$

Example

Bagaimana kalau tugas dari mata kuliah yang sama harus dikoreksi bersamaan? Misalkan ada STAT-A, PROG-B, STAT-C, STAT-D, PROG-E, MAT-F, MAT-G, PROG-H, dan STAT-I.

Jawab

1. Kelompokkan: STAT-A, STAT-C, STAT-D, STAT-I, PROG-B, PROG-E, PROG-H, MAT-F, MAT-G
2. STAT $= 4!$
   PROG $= 3!$
   MAT $= 2!$
3. STAT, PROG, dan MAT dapat ditukar urutannya $= 3!$

Example

Bagaimana kalau tugas dari mata kuliah yang sama harus dikoreksi bersamaan? Misalkan ada STAT-A, PROG-B, STAT-C, STAT-D, PROG-E, MAT-F, MAT-G, PROG-H, dan STAT-I.

Jawab

1. Kelompokkan: STAT-A, STAT-C, STAT-D, STAT-I, PROG-B, PROG-E, PROG-H, MAT-F, MAT-G
2. STAT $= 4!$
   PROG $= 3!$
   MAT $= 2!$
3. STAT, PROG, dan MAT dapat ditukar urutannya $= 3!$

Berarti ada $4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3! = 1,728$ cara.

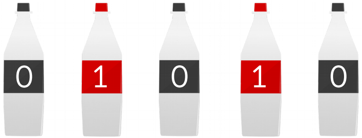
Permutasi dengan Elemen yang Serupa

Jumlah cara untuk mengurutkan n objek, dengan beberapa grup yang tidak dapat dibedakan

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$

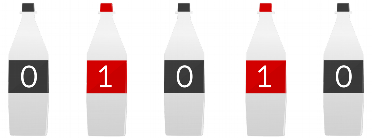
Return of the binary strings

How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



Return of the binary strings

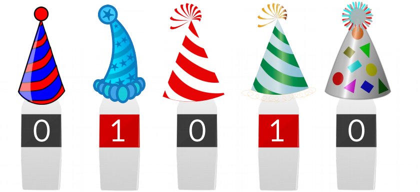
How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



$5! = 120$?

Return of the binary strings

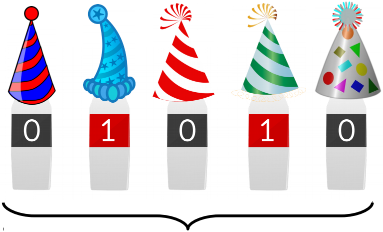
How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



$5! = 120$

Return of the binary strings

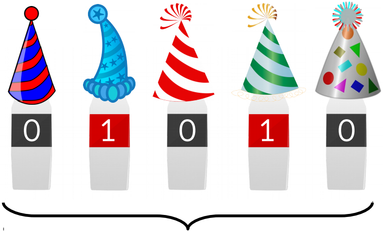
How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



$$\underbrace{01010}_{5!} =$$

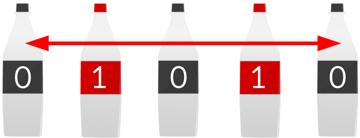
Return of the binary strings

How many **distinct** bit strings are there
consisting of **three** 0's and **two** 1's?



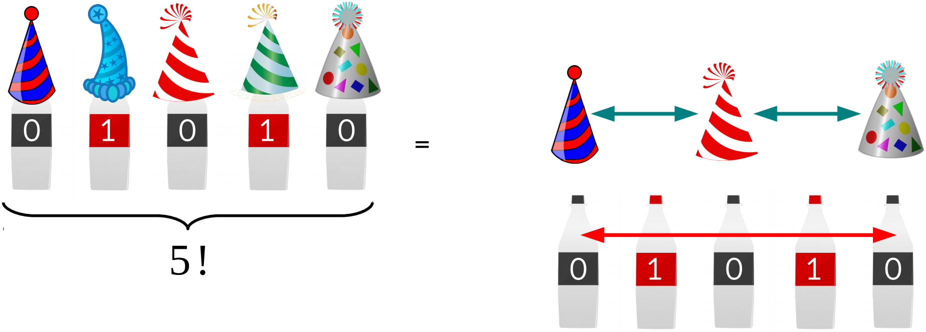
5!

=



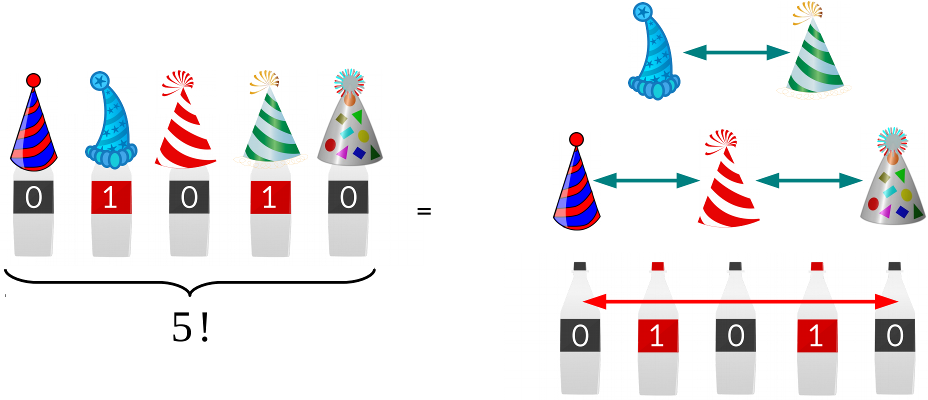
Return of the binary strings

How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



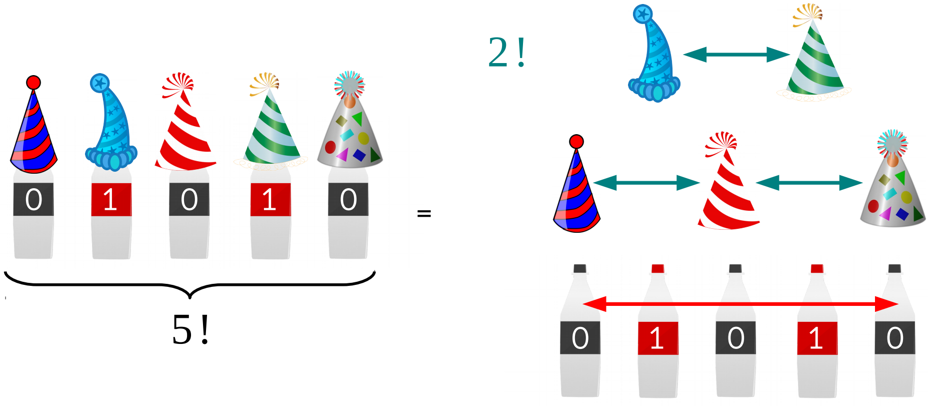
Return of the binary strings

How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



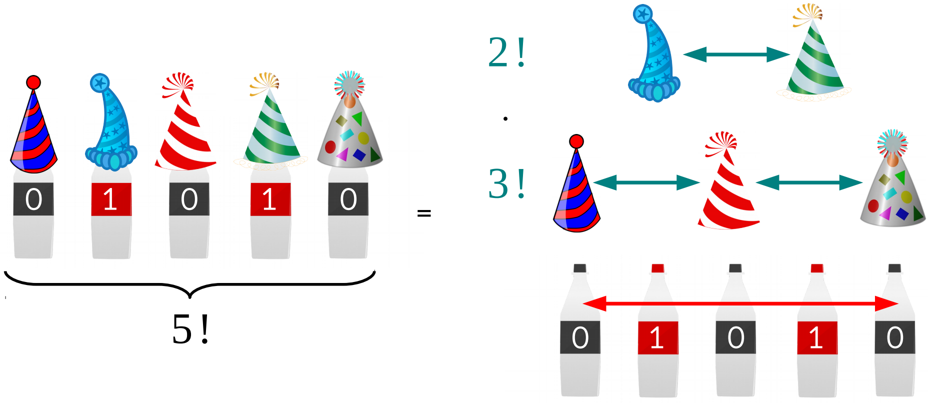
Return of the binary strings

How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



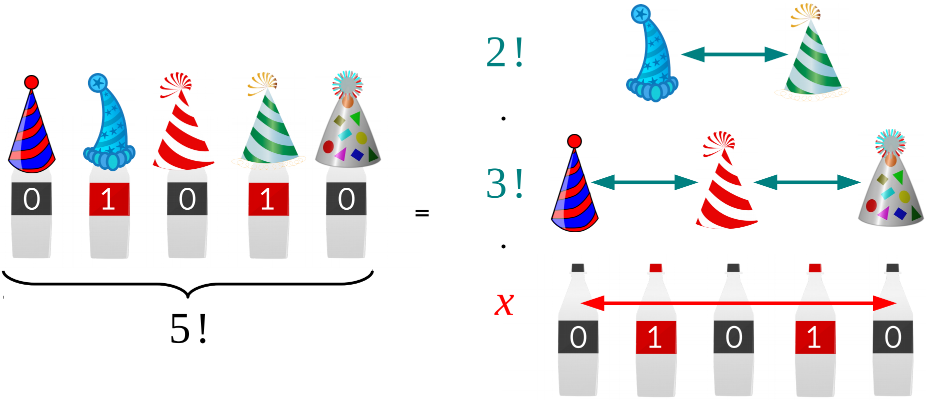
Return of the binary strings

How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



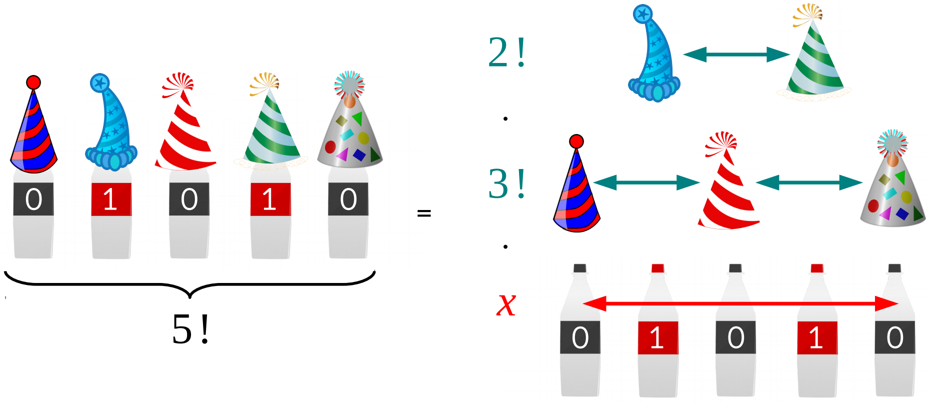
Return of the binary strings

How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



Return of the binary strings

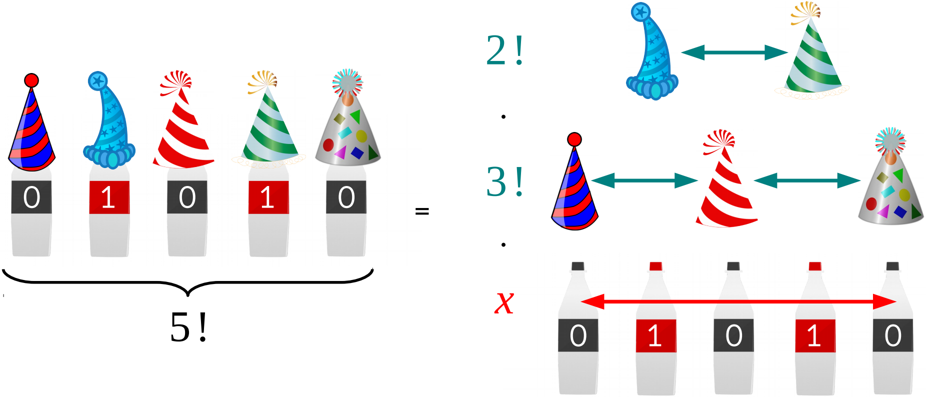
How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



$$5! = 2! \cdot 3! \cdot x$$

Return of the binary strings

How many **distinct** bit strings are there consisting of **three** 0's and **two** 1's?



$$x = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$$

Example: Passcode guessing

4-digit passcode on a phone.

How many possible codes?

https://bit.ly/1a2ki4G → https://b.socrative.com/login/student/
Room: CS109SUMMER17

Example: Passcode guessing

4-digit passcode on a phone.

How many possible codes?

$$10^4 = 10{,}000$$

https://bit.ly/1a2ki4G → https://b.socrative.com/login/student/
Room: CS109SUMMER17

Example: Passcode guessing

4 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

https://bit.ly/1a2ki4G → https://b.socrative.com/login/student/
Room: CS109SUMMER17

Example: Passcode guessing

4 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

$4! = 24$

https://bit.ly/1a2ki4G → https://b.socrative.com/login/student/
Room: CS109SUMMER17

Example: Passcode guessing

3 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

https://bit.ly/1a2ki4G → https://b.socrative.com/login/student/
Room: CS109SUMMER17

Example: Passcode guessing

3 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

3 smudges = (less, same, more) possibilities vs. 4 smudges?

A) less
B) same
C) more

https://bit.ly/1a2ki4G → https://b.socrative.com/login/student/
Room: CS109SUMMER17

Example: Passcode guessing

3 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

$$\frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

Example: Passcode guessing

3 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

$$3\cdot\frac{4!}{2!1!1!}=36$$

Example: Passcode guessing

2 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

Example: Passcode guessing

2 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

Two and two

Three and one

Example: Passcode guessing

2 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

Two and two

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

Three and one

Example: Passcode guessing

2 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

Two and two

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

Three and one

$$\frac{2 \cdot 4!}{3!1!} = 8$$

Example: Passcode guessing

2 smudges on phone for a 4-digit passcode.

How many possible codes?

Two and two

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$+$$

Three and one

$$\frac{2 \cdot 4!}{3!1!} = 8$$

$$= 14$$

Kombinasi

Kombinasi

Jumlah subhimpunan unik sejumlah k dari himpunan sejumlah n.

Objeknya dapat dibedakan dan tidak diurutkan.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Example

Ada berapa cara untuk mengambil 4 dari 6 tugas? Misalkan ada A, B, C, D, E, dan F.

Example

Ada berapa cara untuk mengambil 4 dari 6 tugas? Misalkan ada A, B, C, D, E, dan F.

Example

Ada berapa cara untuk mengambil 4 dari 6 tugas? Misalkan ada A, B, C, D, E, dan F.

Jawab

Example

Ada berapa cara untuk mengambil 4 dari 6 tugas? Misalkan ada A, B, C, D, E, dan F.

Jawab

1. Anggap saja ada 4 slot waktu untuk memeriksa tugas.

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Example

Ada berapa cara untuk mengambil 4 dari 6 tugas? Misalkan ada A, B, C, D, E, dan F.

Jawab

1. Anggap saja ada 4 slot waktu untuk memeriksa tugas.

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

2. Apa pun urutan dari 2 tugas tersisa, sama saja!

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = {}_nP_k = \binom{n}{k}$$

Example

Ada berapa cara untuk mengambil 4 dari 6 tugas? Misalkan ada A, B, C, D, E, dan F.

Jawab

1. Anggap saja ada 4 slot waktu untuk memeriksa tugas.

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

2. Apa pun urutan dari 2 tugas tersisa, sama saja!

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = {}_nP_k = \binom{n}{k}$$

3. Sebenarnya, urutan memeriksa 4 tugas di awal juga tidak berpengaruh $\rightarrow$ abaikan!

$$\frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = {}_nC_k$$

Referensi bagus:

Khan Academy

Materi kuliah ini diadaptasi dari:

CS109: Probability for Computer Scientists

2 - Combinatorics by Will Monroe

Pekan depan:

Probabilitas

Terima kasih