Probabilitas Bersyarat

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al Azhar Indonesia

April 9, 2019

Ulasan

Minggu lalu

- Ruang sampel S
- Kejadian $E \subseteq S$
- $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$

Interpretasi Probabilitas

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{\#(E)}{n}$$

Aksioma Probabilitas

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Jika $E \cap F = \varnothing$, maka $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Probabilitas Bersyarat

Definisi

Probabilitas bersyarat $P(E|F)$ adalah probabilitas E terjadi, jika diketahui bahwa F telah terjadi. Dengan kata lain, F menjadi ruang sampel yang baru.

$$P(E|F) = \frac{P(E,F)}{P(F)}$$

Equiprobable

Jika setiap nilai peluangnya sama, maka

$$P(E|F) = \frac{|E, F|}{|F|}$$

Bermain Kartu

Example

Anda diberikan satu pak kartu remi tanpa joker. Kartu tersebut dikocok, lalu dikeluarkan satu yang paling atas. Berapa peluangnya kartu tersebut berlambang sekop?

Bermain Kartu

Example

Anda diberikan satu pak kartu remi tanpa joker. Kartu tersebut dikocok, lalu dikeluarkan satu yang paling atas. Berapa peluangnya kartu tersebut berlambang sekop?

Solusi

$$S = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$$

$$E = \{\spadesuit\}$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Bermain Kartu (Lagi)

Example

Kita akan melakukan permainan yang sama. Namun, sebelum kartu paling atas dikeluarkan, saya akan mengintip terlebih dahulu kartunya dan memberitahukan Anda warnanya. Ternyata, warnanya hitam. Berapa peluangnya kartu tersebut berlambang sekop?

Bermain Kartu (Lagi)

Example

Kita akan melakukan permainan yang sama. Namun, sebelum kartu paling atas dikeluarkan, saya akan mengintip terlebih dahulu kartunya dan memberitahukan Anda warnanya. Ternyata, warnanya hitam. Berapa peluangnya kartu tersebut berlambang sekop?

Solusi

$$\begin{aligned} S &= \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \\ F &= \{\clubsuit, \spadesuit\} \\ E \cap F &= \{\spadesuit\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E|F) &= \frac{|E, F|}{|F|} \\ &= \frac{13}{26} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aturan Rantai Probabilitas

Probabilitas kedua kejadian terjadi adalah probabilitas salah satunya terjadi, dikali dengan probabilitas yang lainnya terjadi setelah diketahui kejadian yang pertama.

$$P(E, F) = P(F)P(E|F)$$

Berlaku juga sebaliknya!

Bentuk Umum Aturan Rantai

$$P(E, F, G, ...) = P(E)P(F|E)P(G|E, F)...$$

Four piles of cards

- Divide deck randomly into 4 piles of 13 cards each.
- What is P(one Ace in each pile)?

S: ways of labeling 52 cards with 4 types of labels
E: ways resulting in all Aces getting different labels

$$|E| = 4! \cdot \binom{48}{12,12,12,12}$$

$$|S| = \binom{52}{13,13,13,13}$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} \approx 0.105$$

Four piles of cards

- Divide deck randomly into 4 piles of 13 cards each.
- What is P(one Ace in each pile)?

E_1: Ace of Spades goes in any one pile

E_2: Ace of Clubs goes in different pile from Spades

E_3: Ace of Hearts goes in different pile from first two

E_4: Ace of Diamonds goes in different pile from first three

$$P(E) = P(E_1 E_2 E_3 E_4) = P(E_1) P(E_2|E_1) P(E_3|E_1 E_2) P(E_4|E_1 E_2 E_3)$$

$$= \frac{52}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \approx 0.105$$

Law of total probability

You can compute an overall probability by adding up the case when an event **happens** and when it **doesn't happen**.

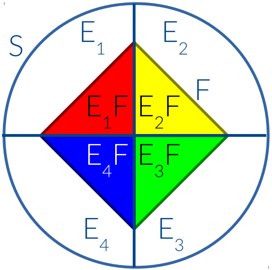
$$P(F) = P(EF) + P(E^C F)$$

$$= P(E)P(F|E) + P(E^C)P(F|E^C)$$

General law of total probability

You can compute an overall probability by summing over **mutually exclusive** and **exhaustive** sub-cases.

$$P(F) = \sum_i P(E_i F)$$
$$= \sum_i P(E_i) P(F|E_i)$$



Teorema Bayes

Ingat kembali tentang aturan rantai probabilitas

$$P(E, F) = P(F)P(E|F)$$

karena aturan ini berlaku sebaliknya juga

$$P(E, F) = P(F)P(E|F) = P(E)P(F|E)$$

sehingga

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}$$

Penarikan Kesimpulan

Example

Sebanyak 100 dari 10.000 wanita berusia 40 tahun yang berpartisipasi dalam penapisan rutin mengidap kanker payudara. 80 dari 100 wanita dengan kanker payudara akan mendapatkan hasil tes *mammography* positif. 950 dari 9.900 tanpa kanker payudara ternyata juga akan mendapatkan hasil tes *mammography* positif. Jika ada 10.000 wanita yang menjalani proses penapisan rutin ini, berapa banyak wanita dengan hasil tes *mammography* positif ternyata memang mengidap kanker payudara?

Penarikan Kesimpulan

Solusi

$$P(C) = 0.01$$
$$P(M|C) = 0.8$$
$$P(M|\neg C) = \frac{950}{9900} \approx 0.096$$

Berapa $P(C|M)$?

$$P(C|M) = \frac{P(M|C)P(C)}{P(M)}$$

Berapa nilai $P(M)$?

Penarikan Kesimpulan (lanjutan)

Ingat Law of Total Probability!

$$
\begin{aligned}
P(M) &= \sum_{C} P(M|C)P(C) \\
&= P(M|C)P(C) + P(M|\neg C)P(\neg C) \\
&= 0.8 \times 0.01 + 0.096 \times 0.99 \\
&= 0.9584 \\
P(C|M) &= \frac{0.8 \times 0.01}{0.9584} \approx 0.0083
\end{aligned}
$$

Jika ada 10,000 wanita dengan hasil tes positif, maka sekitar 83 orang akan didiagnosis mengidap kanker payudara.

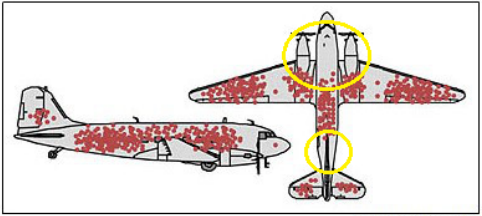
Terminologi

$$\underbrace{P(C|M)}_{\textit{posterior}} = \frac{\overbrace{P(M|C)}^{\textit{likelihood}}\ \overbrace{P(C)}^{\textit{prior}}}{\underbrace{P(M)}_{\textit{normalizing constant}}}$$

Contoh

Terdapat dua tim sepakbola, tim A dan tim B. Tim A memenangkan 65% pertandingan dalam pertemuan kedua tim tersebut, sedangkan tim B memenangkan sisanya. Dari semua kemenangan tim A, hanya 30% terjadi saat keduanya bertanding di kandang tim B. Di sisi lain, 75% kemenangan tim B terjadi saat mereka bermain di kandang.

Ingat ini?



Credit: Cameron Moll

Gentlemen, you need to put more armour-plate where the holes aren't because that's where the holes were on the airplanes that didn't return - Abraham Wald 1942.

Materi kuliah ini diadaptasi dari:

CS109: Probability for Computer Scientists

4 - Conditional Probability by Will Monroe

Pekan depan:

Independensi

Office hours minggu depan di
hari Senin, 08.00-09.00

Enroll ke e-learning

persidiaconis

Terima kasih