Distribusi Bernoulli dan Binomial

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al Azhar Indonesia

May 15, 2019

Ulasan

Peubah acak

$\neq$

Kejadian

$$P(\underbrace{\color{red}{Y}\color{black}{} = 1}_{\textit{kejadian}}) = \frac{3}{8}$$

Ekspektasi

Ekspektasi dari sebuah peubah acak adalah "rata-rata" dari nilai variabel dengan bobot probabilitasnya.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x:p(x)>0} p(x) \cdot x$$

Linearitas Ekspektasi

$$\mathbb{E}[aX + bY + c] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] + c$$

Variansi

Variansi adalah rata-rata kuadrat dari jarak sebuah variabel dari ekspektasinya. Variansi mengukur seberapa "tersebar" variabelnya.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \end{aligned}$$

Distribusi Bernoulli

Definisi

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1

Definisi

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1
- Nilai 1 dapat diartikan sebagai "sukses", e.g.
  - muncul "angka" dari koin
  - muncul muka 4 atau 5 dari dadu
  - ads akan diklik

Definisi

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1
- Nilai 1 dapat diartikan sebagai "sukses", e.g.
  - muncul "angka" dari koin
  - muncul muka 4 atau 5 dari dadu
  - ads akan diklik
- Jika $p(X = 1) = \theta$ dan mengakibatkan $p(X = 0) = 1 - \theta$, maka

Definisi

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1
- Nilai 1 dapat diartikan sebagai "sukses", e.g.
  - muncul "angka" dari koin
  - muncul muka 4 atau 5 dari dadu
  - ads akan diklik
- Jika $p(X = 1) = \theta$ dan mengakibatkan $p(X = 0) = 1 - \theta$, maka
- X mengikuti distribusi Bernoulli

Distribusi Bernoulli

PMF

$$X \sim \mathit{Bernoulli}(\theta)$$

$$p(x) = \begin{cases} \theta & \text{jika } x = 1 \\ 1 - \theta & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

dapat diringkas sebagai

$$p(x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

Ekspektasi

Jika $X \sim \textit{Bernoulli}(\theta)$, berapa nilai $\mathbb{E}[X]$?

Ekspektasi

Jika $X \sim \textit{Bernoulli}(\theta)$, berapa nilai $\mathbb{E}[X]$?

Jawab

$\mathbb{E}[X] = \theta$

Variansi

Jika $X \sim Bernoulli(\theta)$, berapa nilai $Var(X)$?

Variansi

Jika $X \sim \mathit{Bernoulli}(\theta)$, berapa nilai $\mathit{Var}(X)$?

Jawab

$$\mathit{Var}(X) = \theta(1 - \theta)$$

Distribusi Binomial

Distribusi Binomial

- Didapatkan dari n percobaan Bernoulli independen
- Distribusinya menunjukkan jumlah kemunculan 1
- X dapat bernilai $0, 1, 2, ..., n$
- Jika

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k},$$

maka X mengikuti distribusi Binomial

Distribusi Binomial

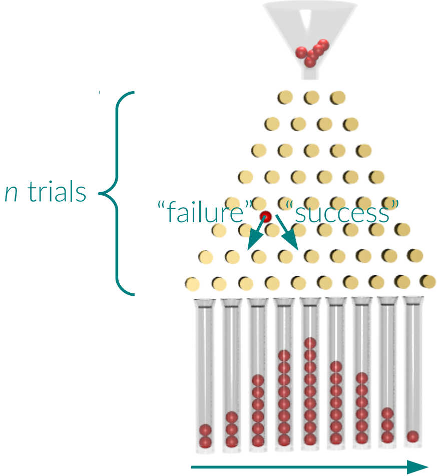
PMF

$$X \sim Bin(n, \theta)$$
$$p(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

n adalah jumlah percobaan atau eksperimen, θ adalah peluang "sukses"

Catatan: $Ber(\theta) = Bin(1, \theta)$

The Galton board



$X \sim \text{Bin}(n, 0.5)$

X = final position = number of "successes"

Contoh

1. Anda melempar koin setimbang sebanyak 20 kali. Berapa peluang muncul gambar 10 kali?

Contoh

1. Anda melempar koin setimbang sebanyak 20 kali. Berapa peluang muncul gambar 10 kali?
2. Anda melakukan 20 lemparan koin lagi, tetapi kali ini dengan koin yang bias dengan $\theta = 0.2$ dan kemunculan gambar sebagai "sukses". Berapa peluangnya muncul gambar 10 kali?

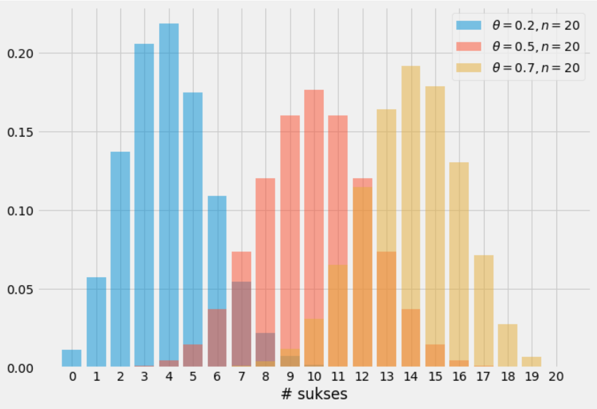
Contoh

1. Anda melempar koin setimbang sebanyak 20 kali. Berapa peluang muncul gambar 10 kali?
2. Anda melakukan 20 lemparan koin lagi, tetapi kali ini dengan koin yang bias dengan $\theta = 0.2$ dan kemunculan gambar sebagai "sukses". Berapa peluangnya muncul gambar 10 kali?
3. Berapa peluang minimal ada satu kemunculan gambar?

Contoh

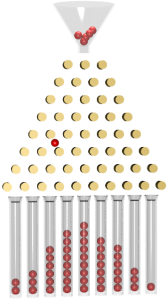
1. Anda melempar koin setimbang sebanyak 20 kali. Berapa peluang muncul gambar 10 kali?
2. Anda melakukan 20 lemparan koin lagi, tetapi kali ini dengan koin yang bias dengan $\theta = 0.2$ dan kemunculan gambar sebagai "sukses". Berapa peluangnya muncul gambar 10 kali?
3. Berapa peluang minimal ada satu kemunculan gambar?
4. Dengan kasus seperti sebelumnya. Berapa kali kemunculan gambar yang Anda harapkan?

Grafik PMF



Gambar: Probability mass function (PMF) dari distribusi Binomial

Expectation of a binomial



$$p_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{if } k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cdot k$$

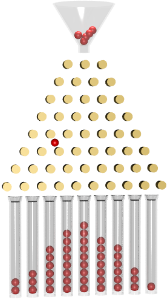
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = (p+1-p)^{n-1} = np$$

Expectation of a binomial



X = number of "successes"
X_i = indicator variable for success on i-th trial

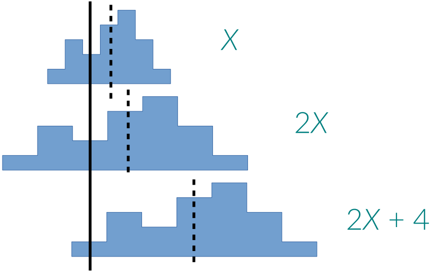
$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

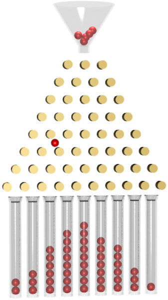
Review: Linearity of expectation

Adding random variables or constants? **Add** the expectations. Multiplying by a constant? **Multiply** the expectation by the constant.

$$E[aX+bY+c]=aE[X]+bE[Y]+c$$



Expectation of a binomial



X = number of "successes"
X_i = indicator variable for success on i-th trial

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p$$

$$= np$$

Binomial: Fact sheet

number of trials (flips, program runs, ...)

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

probability of "success" (heads, crash, ...)

PMF: $$p_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{if } k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

expectation: $$E[X] = np$$

variance: $$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

note: $$\mathrm{Ber}(p) = \mathrm{Bin}(1, p)$$

Pekan depan:

Distribusi Poisson

Terima kasih