Probabilitas

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al Azhar Indonesia

April 7, 2019

Ulasan

Permutasi

Jumlah cara untuk mengurutkan n objek yang dapat dibedakan

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Kombinasi

Jumlah subhimpunan unik sejumlah k dari himpunan sejumlah n.

Objeknya dapat dibedakan dan tidak diurutkan.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Probabilitas

Ruang Sampel

Apa itu?

$S =$ himpunan dari semua keluaran yang mungkin terjadi

Example

lambang kartu remi	$S = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$
lemparan dua koin	$S = \{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$
lemparan dadu	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
jumlah email dalam satu hari	$S = \mathbb{N}$
jam bermain Mobile Legends	$S = [0, 24]$

Kejadian

Apa itu?

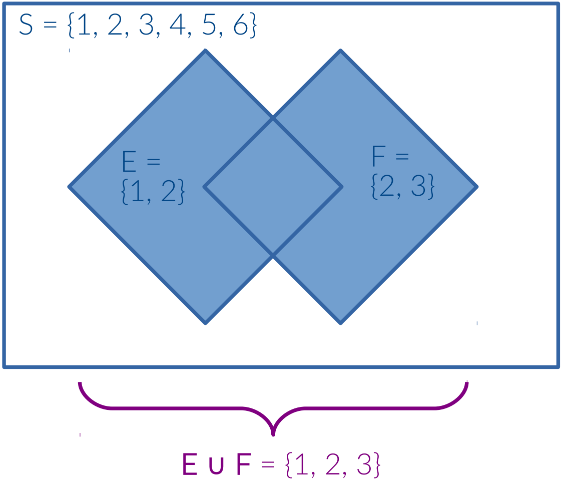
$E =$ subhimpunan/subset dari S ($E \subseteq S$)

Example

lambang kartu remi merah	$S = \{♥, ♦\}$
≥ 1 angka dari dua koin	$E = \{(A, A), (A, G), (G, A)\}$
lemparan dadu ≥ 3	$E = \{3, 4, 5, 6\}$
# email dalam sehari ≤ 5	$E = \{x \mid x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$
"hari-hari tidak produktif"	$E = [8, 24]$

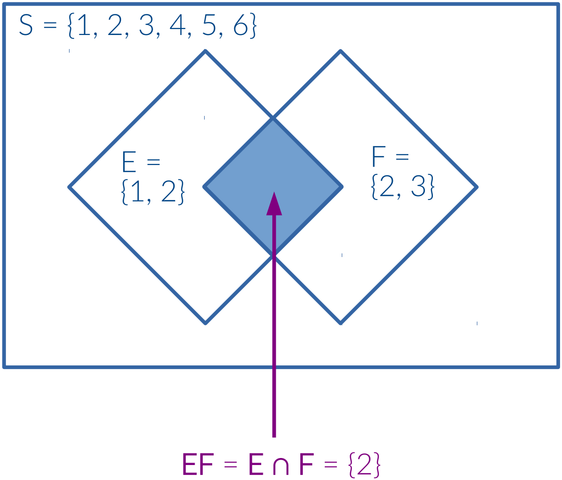
Set operations

Union: outcomes that are in E <u>or</u> F



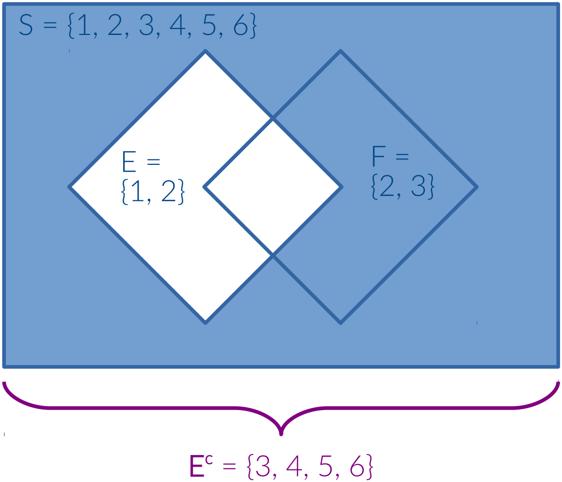
Set operations

Intersection: outcomes that are in E <u>and</u> F

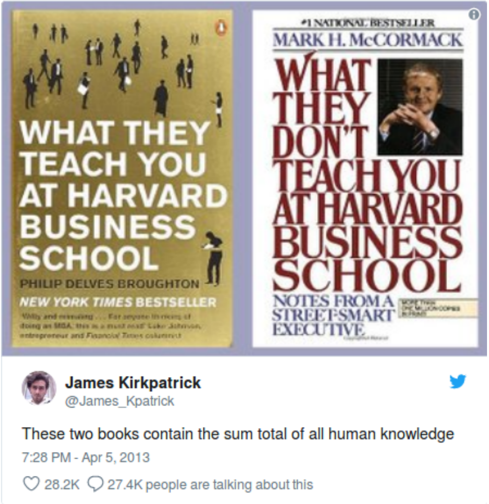


Set operations

Complement: outcomes that are <u>not</u> in E



Ilmu Sapu Jagat



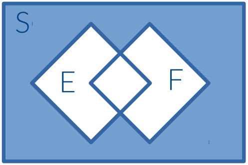
Mengapa?

$$E \cup E' = S$$

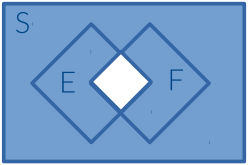
De Morgan's Laws

"distributive laws" for set complement

$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$



$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$



$$\left(\bigcup_i E_i\right)^c = \bigcap_i \left(E_i{}^c\right)$$

$$\left(\bigcap_i E_i\right)^c = \bigcup_i \left(E_i{}^c\right)$$

Jadi, apa itu peluang/probabilitas?

Probabilitas

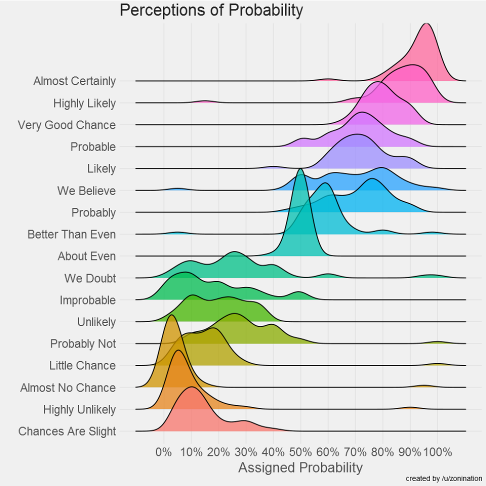
- Kuantifikasi dari ketidakpastian

Probabilitas

- Kuantifikasi dari ketidakpastian
- Nilai antara 0 dan 1 yang kita pautkan pada suatu kejadian

Probabilitas

- Kuantifikasi dari ketidakpastian
- Nilai antara 0 dan 1 yang kita pautkan pada suatu kejadian
- Faktanya, persepsi kita terhadap ketidakpastian bisa berbeda-beda



Gambar: Persepsi akan probabilitas — Sumber:
`https://github.com/zonination/perceptions`

Interpretasi Frequentist

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{\#(E)}{n}$$

Aksioma Probabilitas

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Jika $E \cap F = \varnothing$, maka $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Akibatnya...

1. $P(E') = 1 - P(E)$
2. Jika $E \subseteq F$, maka $P(E) \leq P(F)$
3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Contoh Kasus #1

Example

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?

Contoh Kasus #1

Example

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?

Pertanyaan

Apa yang harus didefinisikan terlebih dahulu?

Contoh Kasus #1

Example

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?

Pertanyaan

Apa yang harus didefinisikan terlebih dahulu?

Jawab

Apa yang menjadi ruang sampelnya? Apa pula kejadiannya?

Solusi

- $S = \{(1,1),(1,2),...,(6,5),(6,6)\}$

Solusi

- $S = \{(1,1),(1,2),...,(6,5),(6,6)\}$
- $E = \{(1,6),(2,5),...,(5,2),(6,1)\}$

Solusi

- $S = \{(1,1),(1,2),...,(6,5),(6,6)\}$
- $E = \{(1,6),(2,5),...,(5,2),(6,1)\}$
- $P(X_1 + X_2 = 7) = \ ?$

Solusi

- $S = \{(1,1),(1,2),...,(6,5),(6,6)\}$
- $E = \{(1,6),(2,5),...,(5,2),(6,1)\}$
- $P(X_1 + X_2 = 7) = \ ?$
- $P((X_1 = 1 \cap X_2 = 6) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 5) \cup ...) = \frac{6}{36}$

Contoh Kasus #2

Example

Ada 3,200 mahasiswa UAI, Anda berteman dengan 40 orang di antaranya. Jika Anda pergi ke suatu acara yang didatangi 20 orang mahasiswa UAI, berapa peluang Anda menemukan *paling tidak* satu orang teman Anda?

Contoh Kasus #2

Example

Ada 3,200 mahasiswa UAI, Anda berteman dengan 40 orang di antaranya. Jika Anda pergi ke suatu acara yang didatangi 20 orang mahasiswa UAI, berapa peluang Anda menemukan *paling tidak* satu orang teman Anda?

Definisikan

P(paling tidak ada satu teman dari 40 orang) $=$ ...

Berapa banyak yang harus dihitung?

Solusi

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e. $|E'|$.

Solusi

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e. $|E'|$.
- Maka nilainya dapat dihitung dengan

$$
\begin{aligned}
P(E) &= 1 - P(E') \\
&= 1 - \frac{\binom{3200-40}{20}}{\binom{3200}{20}} = 0.2230
\end{aligned}
$$

Solusi

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e. $|E'|$.
- Maka nilainya dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned} P(E) &= 1 - P(E') \\ &= 1 - \frac{\binom{3200-40}{20}}{\binom{3200}{20}} = 0.2230 \end{aligned}$$

- Coba lihat: `http://web.stanford.edu/class/cs109/demos/serendipity.html`

Contoh Kasus #3

Example

Terdapat n orang di dalam suatu ruangan. Berapa peluangnya paling tidak ada sepasang orang dengan tanggal ulang tahun yang sama?

Contoh Kasus #3

Example

Terdapat n orang di dalam suatu ruangan. Berapa peluangnya paling tidak ada sepasang orang dengan tanggal ulang tahun yang sama?

Definisikan

Kejadian? Ruang sampel?

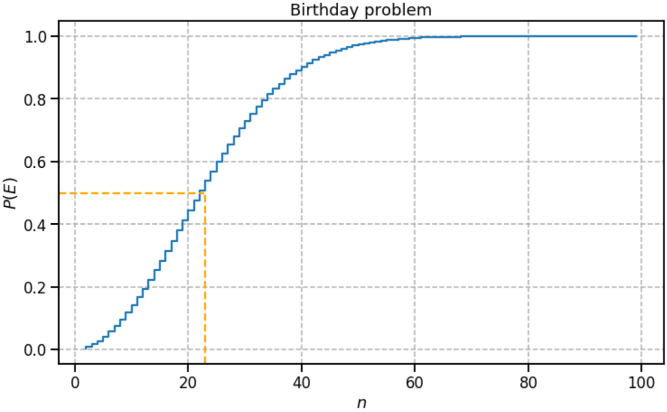
Solusi

- Anggap saja setiap orang ulang tahunnya berbeda, i.e.

$$|E'| = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365-n)!} = \binom{365}{n} \cdot n!$$

- Ruang sampel $|S| = 365^n$
- Maka

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{\binom{365}{n} \cdot n!}{365^n}$$



Gambar: Untuk mencapai $P(E) = 0.5$ hanya perlu 23 orang saja!

Materi kuliah ini diadaptasi dari:

CS109: Probability for Computer Scientists

3 - Probability by Will Monroe

Pekan depan:

Probabilitas Bersyarat

Terima kasih