Probabilitas Bersyarat

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al Azhar Indonesia

April 21, 2019

Ulasan

Probabilitas Bersyarat

Probabilitas bersyarat $P(E|F)$ adalah probabilitas E terjadi, jika diketahui bahwa F telah terjadi. Dengan kata lain, F menjadi ruang sampel yang baru.

$$P(E|F) = \frac{P(E,F)}{P(F)}$$

Aturan Rantai Probabilitas

$$P(E, F, G, ...) = P(E)P(F|E)P(G|E, F)...$$

Contoh

Linda is 31 years old, single, outspoken and very bright. She majored in philosophy. As a student, she was deeply concerned with issues of discrimination and social justice, and also participated in anti-nuclear demonstrations. (Tversky & Kahneman, 1993)

Which one is more probable?

1. Linda is active in the feminist movement.
2. Linda is a bank teller.
3. Linda is a bank teller and is active in the feminist movement.

Teorema Bayes

$$\underbrace{P(C|M)}_{posterior} = \frac{\overbrace{P(M|C)}^{likelihood}\ \overbrace{P(C)}^{prior}}{\underbrace{P(M)}_{normalizing\ \ constant}}$$

Independensi

Independensi

Dua kejadian dikatakan **independen** jika kita dapat mengalikan probabilitas keduanya untuk mendapatkan probabilitas keduanya terjadi.

$$P(E, F) = P(E)P(F) \Leftrightarrow E \perp F$$

Contoh Pelemparan Dua Dadu (1)

$$P(D_1 = 1, D_2 = 1) = ?$$

Contoh Pelemparan Dua Dadu (1)

$$P(D_1 = 1, D_2 = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Contoh Pelemparan Dua Dadu (2)

$$P(D_1 = 1, D_1 + D_2 = 4) = \ldots$$

Contoh Pelemparan Dua Dadu (2)

$$P(D_1 = 1, D_1 + D_2 = 4) = \ldots$$

Apakah perhitungan di bawah ini benar?

$$P(D_1 = 1) \cdot P(D_1 + D_2 = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{36}$$

Contoh Pelemparan Dua Dadu (2)

$$
\begin{aligned}
P(D_1 = 1, D_1 + D_2 = 4) &= P(D_1 = 1 | D_1 + D_2 = 4) P(D_1 + D_2 = 4) \\
&= P(D_1 + D_2 = 4 | D_1 = 1) P(D_1 = 1) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Independensi pada Probabilitas Bersyarat

$P(E|F) = P(E)$ jika dan hanya jika E, F independen.

Independensi pada Probabilitas Bersyarat

$P(E|F) = P(E)$ jika dan hanya jika E, F independen.

Dampaknya

Jika $E \perp F$, maka $P(E|F) = P(E|F')$.

Tiga Kejadian

E, F, G independen jika:

$$P(E, F, G) = P(E)P(F)P(G)$$

dan

$$P(E, F) = P(E)P(F)$$

dan

$$P(E, G) = P(E)P(G)$$

dan

$$P(F, G) = P(F)P(G)$$

Independendensi dan Hubungan Sebab-Akibat

Jika dua kejadian tidak saling memengaruhi, dan tidak ada faktor yang tidak diketahui yang dapat berdampak pada keduanya, maka dua kejadian tersebut kemungkinan besar independen.

Independendensi dan Hubungan Sebab-Akibat

Jika dua kejadian tidak saling memengaruhi, dan tidak ada faktor yang tidak diketahui yang dapat berdampak pada keduanya, maka dua kejadian tersebut kemungkinan besar independen.

Peringatan

Akan tetapi, jika dua kejadian bersifat independen, bukan berarti bahwa mereka tidak memengaruhi satu sama lain.
Artinya adalah setelah kita tahu suatu kejadian terjadi, tidak akan memberi informasi tambahan tentang kejadian yang lainnya.

Melempar Dadu (Lagi!)

E: Kejadian $D_1 = 1$
F: Kejadian $D_2 = 6$
G: Kejadian $D_1 + D_2 = 7$
Apakah ketiganya independen?

Melempar Koin (Bias)

Sebuah koin akan dilempar sebanyak n kali, dengan kemungkinan muncul angka adalah p dan kemungkinan muncul gambar adalah $(1-p)$. Berapa peluang munculnya:

1. n angka

Melempar Koin (Bias)

Sebuah koin akan dilempar sebanyak n kali, dengan kemungkinan muncul angka adalah p dan kemungkinan muncul gambar adalah $(1 - p)$. Berapa peluang munculnya:

1. n angka
2. n gambar

Melempar Koin (Bias)

Sebuah koin akan dilempar sebanyak n kali, dengan kemungkinan muncul angka adalah p dan kemungkinan muncul gambar adalah $(1 - p)$. Berapa peluang munculnya:

1. n angka
2. n gambar
3. k angka, lalu $n - k$ gambar

Melempar Koin (Bias)

Sebuah koin akan dilempar sebanyak n kali, dengan kemungkinan muncul angka adalah p dan kemungkinan muncul gambar adalah $(1 - p)$. Berapa peluang munculnya:

1. n angka
2. n gambar
3. k angka, lalu $n - k$ gambar
4. tepat k angka

Melempar Koin (Bias)

Sebuah koin akan dilempar sebanyak n kali, dengan kemungkinan muncul angka adalah p dan kemungkinan muncul gambar adalah $(1 - p)$. Berapa peluang munculnya:

1. n angka, $P(E) = p^n$
2. n gambar, $P(F) = (1 - p)^n$
3. k angka, lalu $n - k$ gambar, $P(G) = p^k(1 - p)^{n-k}$
4. tepat k angka, $P(H) = \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$

Independensi Bersyarat

Independensi Bersyarat

Dua kejadian dikatakan **independen bersyarat** jika kita dapat mengalikan probabilitas bersyarat keduanya untuk mendapatkan probabilitas bersyarat keduanya terjadi.

$$P(E, F|G) = P(E|G)P(F|G) \Leftrightarrow (E \perp F)|G$$

Catatan

Secara umum,

$$E \perp F$$

tidak berimplikasi pada

$$(E \perp F)|G$$

atau sebaliknya.

Melempar Dadu (Lagi!)

E: Kejadian $D_1 = 1$
F: Kejadian $D_2 = 6$
G: Kejadian $D_1 + D_2 = 7$
Bandingkan:

1. $P(E, F)$
2. $P(E, F|G)$

Menyiram Kebun

E: Kejadian bahwa hari ini hujan
F: Kejadian bahwa penyiram tanaman hidup
Katakanlah E dan F independen.
G: Kejadian bahwa rumput basah

Anda mengobservasi bahwa rumputnya basah. Peluang bahwa terjadi hujan atau penyiram tanaman hidup menjadi lebih tinggi!

$$P(E|G) > P(E)$$
$$P(F|G) > P(F)$$

Menyiram Kebun

E: Kejadian bahwa hari ini hujan
F: Kejadian bahwa penyiram tanaman hidup
Katakanlah E dan F independen.
G: Kejadian bahwa rumput basah

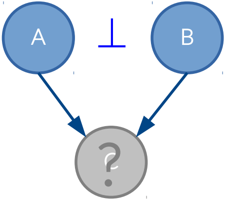
Kalau Anda tahu bahwa penyiram tanamannya menyala, apakah keyakinan Anda akan berubah?

$$P(E|F, G) < P(E|G)$$

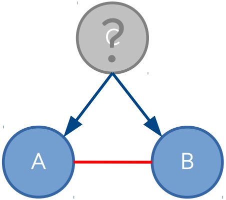
A graphical representation

C is unknown

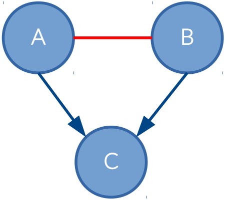
A, B independent!



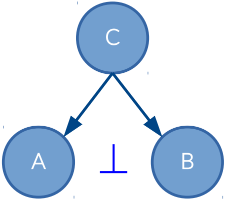
A, B **not** independent



Condition on C



A, B **not** conditionally independent



A, B conditionally independent!

Materi kuliah ini diadaptasi dari:

CS109: Probability for Computer Scientists

5 - Independence by Will Monroe

Pekan depan:

Peubah Acak

Terima kasih