Distribusi Poisson

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al-Azhar Indonesia

aliakbars@live.com

April 15, 2020

Selayang Pandang

Ulasan

$$X \sim Bin(n, \theta)$$

Distribusi Bernoulli

Untuk $X \sim Ber(\theta)$ dengan θ adalah peluang "sukses"

PMF

$$
\begin{aligned}
p(X = 1) &= \theta \\
p(X = 0) &= 1 - \theta
\end{aligned}
$$

Ekspektasi & Variansi

$E[X] = \theta$
$Var[X] = \theta(1 - \theta)$

Distribusi Binomial

Jika kita mencari **jumlah "sukses"** dari n percobaan Bernoulli, maka $X \sim Bin(n, \theta)$.

PMF

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}, \text{ jika } k \in \mathbb{N}, k \leq n$$

Ekspektasi & Variansi

$E[X] = n\theta$

$Var[X] = n\theta(1 - \theta)$

Catatan: $Ber(\theta) = Bin(1, \theta)$

Contoh Kasus

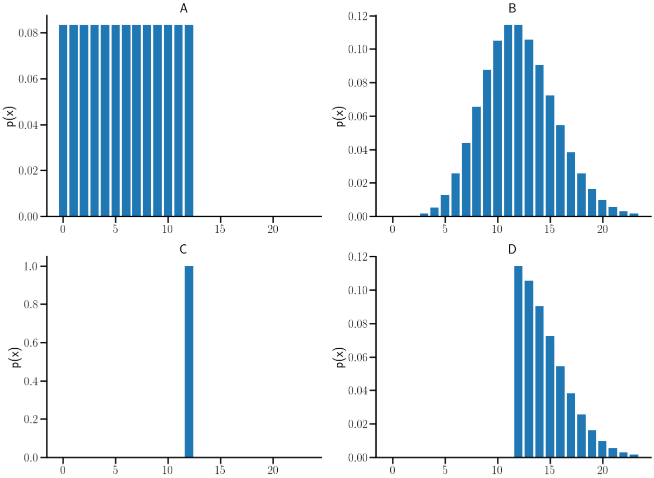
Memodelkan Ojek Online

Contoh

Seorang pengemudi ojek online rata-rata mendapatkan 12 penumpang per hari. Jika kita asumsikan variabel X adalah jumlah penumpang **hari ini**, grafik PMF mana yang menunjukkan distribusi dari X?

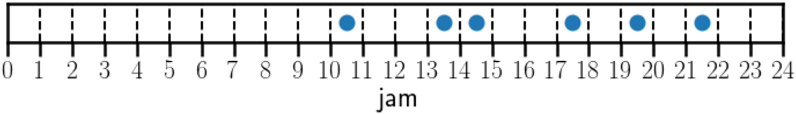
Peluang Jumlah Penumpang

Grafik PMF mana yang menunjukkan distribusi dari jumlah penumpang?



Peluang Jumlah Penumpang

Berapa $p(X = 6)$?



$X \sim Bin(24, \frac{12}{24})$
karena $E[X] = 24\theta = 12$ sehingga $\theta = \frac{12}{24}$.

Bagaimana kalau dilihat dalam satuan menit?

Peluang Jumlah Penumpang

Berapa $p(X = 6)$?

$X \sim Bin(1440, \frac{12}{1440})$
karena $E[X] = 1440\theta = 12$ sehingga $\theta = \frac{12}{1440}$.

Faktanya, ada ∞ nilai waktu dalam sehari.

$$X \sim Bin(\infty, \frac{12}{\infty})$$

Binomial dalam Limit

$$\begin{aligned}
p(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{12}{n}\right)^k \left(1-\frac{12}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{12^k}{n^k} \frac{(1-\frac{12}{n})^n}{(1-\frac{12}{n})^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \frac{12^k}{n^k} \frac{(1-\frac{12}{n})^n}{(1-\frac{12}{n})^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} ... \frac{n-k+1}{n} \frac{12^k}{k!} \frac{(1-\frac{12}{n})^n}{(1-\frac{12}{n})^k} \\
&= \frac{12^k}{k!} e^{-12}
\end{aligned}$$

Peluang Jumlah Penumpang

Berapa $p(X = 6)$?

$X \sim Bin(\infty, \frac{12}{\infty})$ dapat dilihat sebagai $X \sim Poi(12)$
sehingga $P(X = 6) = \frac{12^6}{6!} e^{-12} \approx 0.0255$

Peubah Acak Poisson

Distribusi Poisson

Jika kita mencari **jumlah kejadian** per satuan waktu (tahun, bulan, dsb.) atau jarak (km, m, dsb.), maka $X \sim Poi(\lambda)$.

PMF

$$p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \text{ jika } k \in \mathbb{N}$$

Ekspektasi dan Variansi dari Poisson

$$E[X] = \lambda$$
$$E[X^2] = \lambda(\lambda + 1)$$
$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

Distribusi Poisson

Jika kita mencari **jumlah kejadian** per satuan waktu (tahun, bulan, dsb.) atau jarak (km, m, dsb.), maka $X \sim Poi(\lambda)$.

PMF

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ jika } k \in \mathbb{N}$$

Ekspektasi & Variansi

$E[X] = \lambda$

$Var[X] = \lambda$

Break

Example

Web server Anda mendapatkan rata-rata 2 request per detik. Berapa peluangnya web server tersebut mendapatkan tepat 5 request di detik berikutnya?

Web Server

Example

Web server Anda mendapatkan rata-rata 2 request per detik. Berapa peluangnya web server tersebut mendapatkan tepat 5 request di detik berikutnya?

Solusi

X adalah jumlah request di detik berikutnya.

$$p(X = 5) = e^{-2}\frac{2^5}{5!} \approx 0.0361$$

Gempa Bumi

Example

Di seluruh dunia, rata-rata terjadi 2.8 gempa bumi besar setiap tahunnya. Berapa peluangnya terjadi lebih dari 1 gempa bumi besar di tahun depan?

Solusi

$p(X > 1) = 0.77$

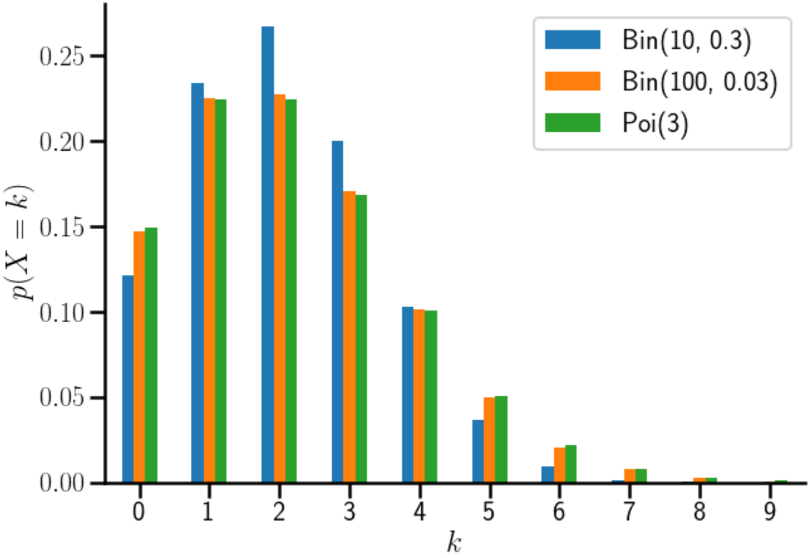
Aproksimasi Binomial dengan Poisson

Aproksimasi Binomial dengan Poisson

$$Bin(n, \theta) \approx Poi(\lambda = n\theta)$$

jika n besar dan θ kecil

Perbandingan Distribusi



Uptime

Example

Sebuah perusahaan penyedia layanan server pribadi virtual (VPS) dalam SLA-nya menjamin uptime hingga 99.99% dalam setahun. Berapa peluangnya dalam tahun ini ada paling banyak 1 hari downtime?

Uptime

Example

Sebuah perusahaan penyedia layanan server pribadi virtual (VPS) dalam SLA-nya menjamin uptime hingga 99.99% dalam setahun. Berapa peluangnya dalam tahun ini ada paling banyak 1 hari downtime?

Solusi

X adalah jumlah hari mengobservasi downtime.
$X \sim Bin(365, 0.0001) \approx Poi(365 \cdot 0.0001 = 0.0365)$.
$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$
Untuk asumsi binomial: $P(X \leq 1) = 0.9993515599126774$,
aproksimasi Poisson: $P(X \leq 1) = 0.99934986432354$

Terima kasih