Белорусский Государственный Университет

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ и ИНФОРМАТИКИ

Кафедра вычислительной математики

Касияник Алексей Леонидович

Методы установления для жестких задач: ускорение сходимости в процессе решения

Руководитель работы
Бондарь Иван Васильевич
ассистент кафедры выч. мат.

Понятие жесткой задачи

- *Если численный метод с ограниченной областью абсолютной устойчивости, примененный к системе с произвольными начальными условиями вынужден использовать на некотором интервале интегрирования величину шага, которая чрезмерно мала по отношению к гладкости точного решения на этом интервале, тогда говорят что система является жесткой на этом интервале.*

Итерационный процесс установления

Система линейных дифференциальных уравнений

$$y'(t) = Jy(t) + f(t)$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$t \in [t_0, t_0 + \tau],$$

$$y_0 \in \mathbb{R}^n, y: [t_0, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n,$$

$$J \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tau \in [0, +\infty).$$

Итерационный процесс установления

Базовый метод

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

$$y(t_0 + \tau) \approx y_1 = y_0 + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

$$k_i = J\left(y_0 + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) + f(t_0 + c_i \tau).$$

Итерационный процесс установления

Векторная форма

$$(\tau A \otimes J - I)k + g = 0,$$

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_s)^T, g_i = f(t_0 + c_i\tau) + Jy_0, i = 1, \dots, s,$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_s)^T,\ k_i \in \mathbb{R}^n.$$

Итерационный процесс установления

Уравнение установления

$$k' = (\tau A \otimes J - I)k + g = Gk + g = r(k)$$

Вспомогательный метод

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha_{21} & & & & \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \\
\alpha_{\sigma 1} & \alpha_{\sigma 2} & \cdots & \alpha_{\sigma \sigma -1} & \\
\hline
\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{\sigma -1} & \beta_\sigma
\end{array}
$$

Процесс установления

$$k^{l+1} = \Phi(k^l),$$

$$\Phi(k) = k + \omega \sum_{p=1}^{\sigma} \beta_p K_p(k),$$

$$K_p(k) = G\left(k + \sum_{q=1}^{p-1} \alpha_{pq} K_q(k)\right) + g.$$

Скорость сходимости

$$k^{l+1} = R_\sigma(\omega G)k^l + P(\omega, G)$$

$$\varepsilon^l = k^* - k^l.$$

$$\varepsilon^l = R_\sigma(\omega G)\varepsilon^{l-1}$$

$$\varepsilon^l = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^{l-1} R(\omega G)\eta^i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^{l-1} R(\omega v_i)\eta^i,$$

$$\varepsilon_i^l = R_\sigma(\omega v_i)\varepsilon_i^{l-1} = \left(R(\omega v_i)\right)^l \varepsilon_i^0.$$

Подавление ошибки

$$r^k = Ax^k - b = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^k \xi_i$$

$$r^{k+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^k R(\omega\lambda_i)\xi_i$$

$$\Rightarrow$$

$$r^k = \alpha_m^k \xi_m + \varepsilon^k,$$

$$r^{k+1} = \alpha_m^k R(\omega\lambda_m)\xi_m + \varepsilon^{k+1},$$

$$\Rightarrow$$

$$r^k \approx \alpha_m^k \xi_m,$$

$$r^{k+1} \approx \alpha_m^k R(\omega\lambda_m)\xi_m$$

$$\frac{r_j^{k+1}}{r_j^k} \approx R(\omega\lambda_m), \qquad j = \overline{1, N}.$$

Подавление ошибки

Пусть $\tilde{x}$ – точное решение, т.е.

$$\tilde{x} = x^{k+1} + \delta^{k+1}.$$

В предположении, что ε^{k+1} незначительно, получаем

$$\delta^{k+1} \approx -\frac{1}{\lambda_m} r^{k+1}$$

$$R_\sigma(\omega\lambda_m) \approx 1 + R'_\sigma(0)\omega\lambda_m \approx \frac{r_j^{k+1}}{r_j^k}, \qquad j = \overline{1, N}$$

$$\lambda_m \approx \left(\frac{r_j^{k+1}}{r_j^k} - 1\right) \Big/ \left(\omega R'_\sigma(0)\right), \qquad j = \overline{1, N}$$

Подавление ошибки

$$\tilde{x} \approx x^{k+1} + \frac{1}{\lambda_m} r^{k+1}.$$

Вычислительный эксперимент

HIRES

$$y_1' = -1.71y_1 + 0.43y_2 + 8.32y_3 + 0.0007,$$
$$y_2' = 1.71y_1 - 8.75y_2,$$
$$y_3' = -10.03y_3 + 0.43y_4 + 0.035y_5,$$
$$y_4' = 8.32y_2 + 1.71y_3 - 1.12y_4,$$
$$y_5' = -1.745y_5 + 0.43y_6 + 0.43y_7,$$
$$y_6' = -280y_6y_8 + 0.69y_4 + 1.71y_5 - 0.43y_6 + 0.69y_7,$$
$$y_7' = 280y_6y_8 - 1.81y_7,$$
$$y_8' = -280y_6y_8 + 1.81y_7.$$
$$y_1(0) = 1, y_2(0) = y_3(0) = \cdots = y_7(0) = 0,\ y_8(0) = 0.0057.$$

$$t_{out} = 321.8122$$

Вычислительный эксперимент

Методы РадоIIA

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Вычислительный эксперимент

Результаты

Точность	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
Количество итераций при решении без уточнения	5002	17507	46118	55719	47852	60144	75411
Количество итераций при решении с уточнением	2288	3766	5607	6950	10517	15834	27236
Ускорение решения	2,18	4,64	6,63	8,02	4,56	3,79	2,77

Заключение

На основании проведенного вычислительный эксперимент на тестовой задаче HIRES, можно заключить, что практическая реализация способа ускорения итерационного процесса, даёт ощутимое уменьшение вычислительных затрат при использовании методов, основанных на процессе установления. Однако стоит заметить, что с повышением требуемого порядка точности решения, выигрыш в трудоемкости несколько уменьшается, что хорошо видно при использовании метода РадоIIA 3-го порядка точности в приведенном вычислительном эксперименте.

Даже несмотря на то, что описанный в работе способ требует дальнейшего исследования и улучшения, полученые результаты вычислительного эксперимента позволяют значительно улучшить сходимость.

Спасибо за внимание!