



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

**Механико-математический факультет**

**КОНФЕРЕНЦИЯ  
молодых ученых**

*Труды XXVIII Конференции молодых ученых  
механико-математического факультета МГУ  
(9–21 апреля 2006 г.)*

**Москва 2006 год**

УДК 51 + 53

ББК 22.1 + 22.2

**Конференция молодых ученых.**

**Труды XXVIII Конференции молодых ученых  
механико-математического факультета МГУ  
(9–21 апреля 2006 г.)**

В настоящем сборнике представлены статьи по актуальным проблемам математики и механики, подготовленные участниками XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (19–22 апреля 2006 г.), проведённой совместно с XIII Международной научной конференцией студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ».

Традиционная конференция, проводившаяся на мехмате МГУ деканом, Советом молодых ученых и Студенческим советом факультета, собрала около сотни студентов, аспирантов, молодых преподавателей и научных сотрудников из различных университетов и научных центров России, а также Беларуси, Украины и Казахстана. Статьи публикуются в том виде, как они были представлены в оргкомитет авторами.

**Proceedings of the XXVIII Conference of Young Scientists,  
Department of Mechanics and Mathematics,  
Moscow State University  
(April 9–21, 2006)**

© Механико-математический факультет МГУ, 2006

---

# Оглавление

<b>В. А. Борисов.</b> Задача наискорейшего объезда заданной последовательности точек плоскости . . . . .	7
<b>Я. А. Бутко.</b> Поверхностные меры Смолянова для уравнения Шрёдингера на компактном римановом многообразии . . . . .	10
<b>И. В. Гердт.</b> Я-Малые абелевы группы . . . . .	15
<b>Д. С. Глызин.</b> Периодические решения системы трех связанных нелинейных телеграфных уравнений . . . . .	18
<b>С. А. Горшкова.</b> Об асимптотике собственного значения для оператора Лапласа в многомерной области с малым отверстием . . . . .	22
<b>Я. С. Гриншпон.</b> Счетная паракомпактность топологий раздельной непрерывности на произведении ординалов . . . . .	26
<b>Д. Б. Давлетов.</b> О сходимости собственных элементов возмущенной краевой задачи Дирихле для системы дифференциальных уравнений Ламэ . . . . .	31
<b>О. Ю. Данилкина.</b> Смешанная нелокальная задача для параболического уравнения . . . . .	35
<b>П. В. Деев, И. Ю. Воронина, С. В. Князева, Е. С. Фирсанов.</b> Моделирование напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых закрытым способом . . . . .	39
<b>А. В. Домбровская.</b> Анализ выживания популяции частиц для критического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	43
<b>О. С. Дудакова.</b> Семейства предполных классов монотонных функций в $P_k$ , не имеющих конечного базиса . . . . .	47
<b>Ю. Ю. Евсеева.</b> О количестве представлений чисел неодноклассными бинарными квадратичными формами . . . . .	51
<b>К. Н. Егоров, А. И. Тимофеев.</b> Применение анализа чувствительности в теории запасов . . . . .	53
<b>Т. В. Елисеева.</b> Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в кусочно-однородной области . . . . .	57
<b>С. В. Здобнова.</b> Функция вида $u(t) = U(t)x + (U * f)(t)$ как решение абстрактной задачи Коши с генератором полугруппы класса $(1, A)$ или $K$ -конволюционной полугруппы. . . . .	61
<b>Н. А. Земцов.</b> Мониторинг вычислительных процессов . . . . .	66
<b>Н. В. Карапетян, Д. А. Ярцева.</b> Асимптотическое поведение времени поглощения . . . . .	71
<b>В. Э. Ким.</b> Интерполяционная задача в пространствах целых периодических функций . . . . .	75

<b>В. В. Китов.</b> Построение оптимальной инвестиционной стратегии при наличии фиксированных и пропорциональных издержек . . .	79
<b>В. В. Колыбасова.</b> Двумерное уравнение Гельмгольца с заданием условий Дирихле и третьего рода на разрезах . . . . .	83
<b>А. С. Крамарский.</b> Вероятностная модель неоднородных по времени параллельных вычислений . . . . .	86
<b>В. В. Красильщиков, А. В. Шутов.</b> О распределении последовательности по переменному модулю . . . . .	90
<b>Н. Ю. Крыжановская.</b> Статистический вариант ЦПТ для векторных слабо зависимых полей . . . . .	93
<b>П. Н. Кузнецов.</b> Операторы дифференцирования и интегрирования в линейном пространстве . . . . .	97
<b>Е. В. Кучунова.</b> Вычислительный алгоритм для расчета упругих волн в блочной среде на многопроцессорных вычислительных системах . . . . .	100
<b>А. С. Ледков.</b> Изучение вращательного движения сегментально-конического аппарата при спуске в атмосфере . . . . .	104
<b>В. М. Лозинский, М. И. Кумсков, С. Ю. Сергунин.</b> Представление пространственных объектов облаком особых точек в задаче распознавания . . . . .	111
<b>А. Г. Малышкин.</b> Стохастическая многочастичная синхронизация на малых временах . . . . .	114
<b>М. Ю. Медведик.</b> Использование субиерархических параллельных вычислительных алгоритмов для решения электромагнитных задач дифракции на плоских экранах . . . . .	118
<b>С. В. Милютин.</b> Численная стабилизация уравнения Чафе-Инфанта с помощью граничных условий . . . . .	124
<b>М. В. Мосягина.</b> Асимптотическая нормальность взвешенных сумм зависимых случайных векторов . . . . .	128
<b>М. М. Мусин.</b> Закон повторного логарифма для последовательности объемов случайных множеств . . . . .	132
<b>Нгуен Ван Лой.</b> О числе доминирования одного класса графов . .	135
<b>А. Ю. Неклюдов.</b> Обращение теоремы Чернова . . . . .	141
<b>П. Н. Нестеров.</b> Асимптотическое интегрирование системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью . . . . .	143
<b>О. С. Ощепкова.</b> О выпуклости гиперпространств над банаховым пространством в семействе обобщенных метрик Помпею . . . .	148
<b>Л. А. Петров.</b> Асимптотические свойства синхронизованного набора частиц на прямой . . . . .	152
<b>А. С. Плещеник.</b> Конечно-кратные интегралы, аппроксимирующие в пространстве $S$ решение интегро-дифференциального уравнения . . . . .	156

<b>М. А. Прибыль.</b> Секториальность оператора линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости . . . . .	158
<b>Ю. Л. Притыкин.</b> Конечно-автоматные преобразования почти периодических последовательностей и алгоритмическая неразрешимость . . . . .	162
<b>М. А. Раскин.</b> Об оценке регулятора автоматного образа строго почти периодической последовательности . . . . .	166
<b>И. А. Родионова.</b> О фредгольмовости электромагнитной задачи о собственных колебаниях в экранированных слоях, связанных через отверстие в экране . . . . .	170
<b>А. В. Романов.</b> Допустимые правила конструктивной теории полей и некоторых ее расширений . . . . .	173
<b>Ю. В. Саватеев.</b> Несеквенциональное исчисление Ламбека с одним делением. . . . .	176
<b>Е. О. Салобутина.</b> Режимы учащающихся переключений в задаче оптимального управления колебаниями $n$ осцилляторов . . . . .	180
<b>А. В. Сильниченко.</b> О свойствах систем представлений . . . . .	184
<b>А. Г. Славин.</b> Гидродинамика невязкой тяжелой жидкости со свободной поверхностью над подстилающей поверхностью сложного профиля . . . . .	188
<b>В. Р. Тагирова.</b> Аналитическое и численное исследование автомодельного распространения трещины гидроразрыва . . . . .	192
<b>И. В. Телятников.</b> Представление решений задачи Коши для уравнения теплопроводности на римановых многообразиях с переменным коэффициентом диффузии . . . . .	197
<b>Б. В. Фалейчик.</b> Обобщение процесса Пикара и варианты его численной реализации . . . . .	201
<b>И. В. Федорова.</b> К вычислению LBB константы для треугольной области . . . . .	207
<b>О. Д. Фролкина.</b> Минимизация количества классов Нильсена в задаче прообраза . . . . .	212
<b>В. М. Харьков.</b> Об асимптотике решений одного класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	216
<b>Э. А. Хорошева.</b> Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой . . . . .	218
<b>А. А. Цупак.</b> Исследование трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на объемных диэлектрических телах методом сингулярных интегральных уравнений . . . . .	223
<b>А. А. Чернышов.</b> Особенности метода крупных вихрей в магнитогидродинамике сжимаемой жидкости . . . . .	227
<b>И. Шапировский.</b> О свойствах некоторых транзитивных логик с универсальной модальностью . . . . .	233

---

<b>Т. А. Шатров.</b> Бесконечная аксиоматизируемость информационных логик на открытых множествах . . . . .	236
<b>А. С. Шмелева.</b> Зависимости между корнями и коэффициентами многочленов . . . . .	241
<b>А. Д. Яшунский.</b> О булевых базисах с постоянной функцией вероятности . . . . .	243

## Задача наискорейшего объезда заданной последовательности точек плоскости

**В. А. Борисов**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**1. Постановка задачи.** Пусть на плоскости даны неподвижные точки:  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . В первой из них в состоянии покоя находится точечный объект, который может свободно двигаться в любом направлении под действием ограниченного по величине ускорения, являющегося управлением. Никаких других воздействий на подвижный объект нет. Требуется за минимальное время провести этот объект через все данные точки в заданном порядке и остановиться в последней.

Рассматриваемая задача является задачей оптимального управления с промежуточными ограничениями.

**2. Формализация задачи.** Задача формализуется как задача оптимального управления совокупностью динамических систем:

$$\sum_{i=1}^n (\tau_i^- - \tau_{i-1}^+) \rightarrow \inf,$$

$$\dot{x}^i = v_x^i, \quad \dot{y}^i = v_y^i, \quad \dot{v}_x^i = a_x^i, \quad \dot{v}_y^i = a_y^i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$x^i(\tau_{i-1}^+) = x_{i-1}, \quad y^i(\tau_{i-1}^+) = y_{i-1},$$

$$x^i(\tau_i^-) = x_i, \quad y^i(\tau_i^-) = y_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$v_x^1(\tau_0^+) = 0, \quad v_y^1(\tau_0^+) = 0, \quad -v_x^n(\tau_n^-) = 0, \quad -v_y^n(\tau_n^-) = 0;$$

$$v_x^{i+1}(\tau_i^+) - v_x^i(\tau_i^-) = 0, \quad v_y^{i+1}(\tau_i^+) - v_y^i(\tau_i^-) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1;$$

$$(a_x^i)^2 + (a_y^i)^2 \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n;$$

где  $\tau_i^-$  — момент прохождения через точку  $(x_i, y_i)$ , конец  $i$ -го участка,  $\tau_i^+$  — начало  $(i+1)$ -го участка,  $\tau_0^+ = 0$ ; координаты на  $i$ -м участке  $(x^i(\cdot), y^i(\cdot))$  и скорости  $(v_x^i(\cdot), v_y^i(\cdot))$  — фазовые переменные; ускорение  $(a_x^i(\cdot), a_y^i(\cdot))$  — управление.

**3. Условия принципа максимума.** Сформулированная выше задача на основе принципа максимума для задач оптимального управления совокупностью динамических систем [1] сводится к решению многоточечной краевой задачи.

$$\begin{aligned}
H_i &= p_x^i v_x^i + p_y^i v_y^i + p_{vx}^i a_x^i + p_{vy}^i a_y^i - \text{функции Понтрягина, } 1 \leq i \leq n; \\
\ell &= \lambda_0 \sum_{i=1}^n (\tau_i^- - \tau_{i-1}^+) + \sum_{i=1}^n \lambda_{x+}^i (x^i(\tau_{i-1}^+) - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \lambda_{x-}^i (x^i(\tau_i^-) - x_i) + \\
&+ \sum_{i=1}^n \lambda_{y+}^i (y^i(\tau_{i-1}^+) - y_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \lambda_{y-}^i (y^i(\tau_i^-) - y_i) + \lambda_{vx}^0 v_x^1(0) + \lambda_{vy}^0 v_y^1(0) + \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{vx}^i (v_x^{i+1}(\tau_i^+) - v_x^i(\tau_i^-)) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{vy}^i (v_y^{i+1}(\tau_i^+) - v_y^i(\tau_i^-)) + \\
&+ \lambda_{vx}^n (-v_x^n(\tau_n^-)) + \lambda_{vy}^n (-v_y^n(\tau_n^-)) - \text{терминант.}
\end{aligned}$$

Условия принципа максимума:

$$\text{а) } \dot{p}_x^i = 0, \quad \dot{p}_y^i = 0, \quad \dot{p}_{vx}^i = -p_x^i, \quad \dot{p}_{vy}^i = -p_y^i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$\text{б) } a_x^i = \frac{p_{vx}^i}{\rho_i}, \quad a_y^i = \frac{p_{vy}^i}{\rho_i}, \quad \rho_i := \sqrt{(p_{vx}^i)^2 + (p_{vy}^i)^2}, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$\begin{aligned}
\text{в) } p_x^i(\tau_{i-1}^+) &= \lambda_{x+}^i, & p_x^i(\tau_i^-) &= -\lambda_{x-}^i, \\
p_y^i(\tau_{i-1}^+) &= \lambda_{y+}^i, & p_y^i(\tau_i^-) &= -\lambda_{y-}^i, \\
p_{vx}^i(\tau_{i-1}^+) &= \lambda_{vx}^{i-1}, & p_{vx}^i(\tau_i^-) &= \lambda_{vx}^i, \\
p_{vy}^i(\tau_{i-1}^+) &= \lambda_{vy}^{i-1}, & p_{vy}^i(\tau_i^-) &= \lambda_{vy}^i;
\end{aligned}$$

$$\text{г) } H_i(\tau_{i-1}^+) = \lambda_0, \quad H_i(\tau_i^-) = \lambda_0, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$\text{д) } \lambda_0 \geq 0;$$

$$\text{е) } p_x^i, p_y^i, p_{vx}^i, p_{vy}^i, \lambda_0, \lambda_{x+}^i, \lambda_{x-}^i, \lambda_{y+}^i, \lambda_{y-}^i, \lambda_{vx}^0, \lambda_{vy}^0, \lambda_{vx}^i, \lambda_{vy}^i$$

НЕ Равны Одновременно Нулю.

Здесь (а) — сопряжённые системы, (б) — условия оптимальности по управлению, (в) — условия трансверсальности, (г) — условия стационарности, (д) — условие неотрицательности, (е) — условие НЕРОН. В качестве условия нормировки множителей Лагранжа выбирается условие  $\lambda_0 = 1$ .



**4. Решение краевой задачи принципа максимума.** После анализа и упрощения краевая задача принципа максимума решается численно методом стрельбы. Корень вектор-функции невязок находится модифицированным методом Ньютона с использованием в условии сходимости нормировки Федоренко [2, 3]. Задача Коши решается методом Рунге – Кутты 8-го порядка с автоматическим выбором шага (программа DOPRI8, [4]). Система линейных уравнений в алгоритме метода Ньютона решается методом отражений [5] с одним пересчётом. Численное дифференцирование в алгоритме метода Ньютона осуществляется по формуле центральной разности.

*Продолжение решения по параметру.* При  $n = 1$  и в случае, когда все точки  $(x_i, y_i), 0 \leq i \leq n$  лежат на одной прямой, задача имеет очевидное решение:

$$x(t) = \frac{t^2(x_n - x_0)}{2\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}} + x_0,$$

$$y(t) = \frac{t^2(y_n - y_0)}{2\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}} + y_0,$$

до момента переключения управления  $t^*$  в середине прямолинейной траектории, и с симметричным относительно этой точки вектором ускорения при  $t > t^*$ .

В общем случае задача решается с использованием метода продолжения решения по параметру. В качестве параметров продолжения используются координаты заданных точек. Добавление точек производится по следующему алгоритму. Пусть известно решение для  $n$  точек  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ . К ним добавляется ещё одна точка  $(x_{new}, y_{new})$ , лежащая на последнем участке траектории решения. Точки перенумеруются:  $(x_n, y_n) := (x_{n-1}, y_{n-1})$ , а  $(x_{n-1}, y_{n-1}) := (x_{new}, y_{new})$ , и продолжением решения по параметру находится решение для требуемых  $(n + 1)$  точек.

**5. Результаты.** В качестве примеров решены задачи для следующих упорядоченных наборов точек:

- 1)  $(0,0)-(1,1)-(2,0)$  ( $\tau_n \approx 4.132$ );
- 2)  $(0,0)-(1,1)-(2,1)$  ( $\tau_n \approx 3.285$ );
- 3)  $(0,0)-(-2,-1)-(3,1)$  ( $\tau_n \approx 7.629$ );
- 4)  $(0,0)-(1,1)-(2,0)-(2,2)$  ( $\tau_n \approx 6.931$ );
- 5)  $(0,0)-(1,2)-(2,0)-(3,1)-(0,1)$  ( $\tau_n \approx 10.832$ ).

Сначала была построена траектория (1), а затем из неё были получены остальные вышеизложенным методом.

[1] Григорьев И. С., Григорьев К. Г. Об условиях принципа максимума в задачах

оптимального управления совокупностью динамических систем и их применения к решению задач оптимального управления движением космических аппаратов. *Космические исследования* — 2003. — 41, № 3. — 307–331.

- [2] ИСАЕВ В. К., СОНИН В. В. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач. *Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики* — 1963. — 3, № 6. — 1114–1116.
- [3] ФЕДОРЕНКО Р. П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994.
- [4] ХАЙРЕР Э., НЁРСЕТТ С., ВАННЕР Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990.
- [5] БОГАЧЁВ К. Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 1998.

УДК 517.987.4

### **Поверхностные меры Смолянова для уравнения Шрёдингера на компактном римановом многообразии\***

**Я. А. Бутко**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Поверхностные меры Смолянова (ср. [1–4]) используются для получения представлений решения уравнения Шрёдингера на компактном римановом многообразии в виде функциональных интегралов. Представления решения найдены для случая аналитических на некоторых множествах потенциала и начального условия при некоторых ограничениях на геометрические характеристики многообразия. В доказательстве используется приём, восходящий к Доссу [5], и представления с помощью функциональных интегралов решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на компактном римановом многообразии [3, 7].

**1. Предварительные сведения.** Для всякого риманова многообразия  $K$  обозначим символом  $\text{vol}_K$  борелевскую меру на  $K$ , а символом  $\rho$  — расстояние в  $K$ , порождаемые римановой структурой  $K$ . По теореме Нэша [6] всякое компактное риманово многообразие может быть вложено в евклидово пространство достаточно большой размерности, поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что  $K$  — компактное риманово многообразие размерности  $m$ , изометрически вложенное в пространство  $\mathbb{R}^N$ . Пусть  $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}^N$  — гладкое отображение, осуществляющее

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-01-00761-а).

вложение. Пусть  $\text{scal}(x) \equiv \text{tr Ricci}(x)$  — скалярная кривизна многообразия  $K$  в точке  $x \in K$ . Символом  $r^2(x)$  обозначим квадрат нормы нормали средней кривизны в точке  $x$ , умноженной на размерность многообразия. Мы предполагаем, что  $\text{scal}(\cdot)$  и  $r^2(\cdot)$  — непрерывные функции на  $K$ . Обозначим  $\mathbf{B}([0, t], K)$  — множество функций из  $[0, t]$  в  $K$ , имеющих разрывы только первого рода. Для любого  $n \in \mathbf{N}$  символ  $\mathbf{C}^n(K)$  обозначает пространство  $n$  раз непрерывно дифференцируемых на  $K$  функций. Всюду далее число  $e^{\frac{4}{3}i}$  будет обозначаться  $\sqrt[3]{i}$ .

Для каждого  $n \in \mathbf{N}$  обозначим  $K^n = K \times K \times \dots \times K$ .

Пусть  $t \geq 0$  и  $\Pi = \{t_j : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$  — разбиение временного интервала, причём его диаметр  $|\Pi| = \max_j |t_j - t_{j-1}| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Положим для  $t \geq 0$ ,  $x, z \in K$   $p^I(t, x, z) = \frac{1}{(2\pi i)^{m/2}} \exp \left\{ -\frac{\rho^2(x, z)}{2t} \right\}$ ,  
 $q^I(t, x, z) = \frac{p^I(t, x, z)}{\int_K p^I(t, x, z) \text{vol}_K(dz)}$ .

Определение 1. Пусть  $t > 0$ ,  $x \in K$ ,  $f : \mathbf{B}([0, t], K) \rightarrow \mathbb{C}$  — ограниченная непрерывная функция. Интегралом от функции  $f$  по мере  $W_K^{x, I}$  называется

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \int_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) \times \\ q^I(t_1, x, x_1) q^I(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots q^I(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n),$$

где  $f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) = f(\varphi_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)(t))$ , а  $\varphi_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)(t)$  — отображение множества  $K^n$  в  $\mathbf{B}([0, t], K)$  такое, что  $\varphi_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)(t_0) = x$ ,  $\varphi_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)(s) = x_j$ , при  $s \in (t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Определим  $c_{\Pi}^I(t, n, x)$  как

$$\int_{K^n} p^I(t_1, x, x_1) p^I(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p^I(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n).$$

Определение 2. Пусть  $t > 0$ ,  $x \in K$ ,  $f : \mathbf{B}([0, t], K) \rightarrow \mathbb{C}$  — ограниченная непрерывная функция. Интегралом от функции  $f$  по мере  $S_K^{x, I}$  называется

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} (c_{\Pi}^I(t, n, x))^{-1} \int_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) \times \\ p^I(t_1, x, x_1) p^I(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p^I(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n),$$

где  $f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)$  определяется аналогично случаю меры  $W_K^{x, I}$ .

Положим для  $t \geq 0$ ,  $x, z \in K$   $p^E(t, x, z) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{\|\Phi(x) - \Phi(z)\|_{\mathbb{R}^N}^2}{2t}\right\}$ ,  
 $q^E(t, x, z) = \frac{p^E(t, x, z)}{\int_K p^E(t, x, z) \text{vol}_K(dz)}$ .

Определение 3. Пусть  $t > 0$ ,  $x \in K$ ,  $f : \mathbf{B}([0, t], K) \rightarrow \mathbb{C}$  — ограниченная непрерывная функция. Интегралом от функции  $f$  по мере  $W_K^{x,E}$  называется

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \int_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) \times$$

$$q^E(t_1, x, x_1) q^E(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots q^E(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n),$$

где  $f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)$  определяется аналогично случаю меры  $W_K^{x,I}$ .

Определим  $c_{\Pi}^E(t, n, x)$  как

$$\int_{K^n} p^E(t_1, x, x_1) p^E(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p^E(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n).$$

Определение 4. Пусть  $t > 0$ ,  $x \in K$ ,  $f : \mathbf{B}([0, t], K) \rightarrow \mathbb{C}$  — ограниченная непрерывная функция. Интегралом от функции  $f$  по мере  $S_K^{x,E}$  называется

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} (c_{\Pi}^E(t, n, x))^{-1} \int_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) \times$$

$$p^E(t_1, x, x_1) p^E(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p^E(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n),$$

где  $f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)$  определяется аналогично случаю меры  $W_K^{x,I}$ .

Как показано в работах [1–4], меры  $W_K^{x,I}$  и  $W_K^{x,E}$  совпадают с мерой Винера  $W_K^x$ , соответствующей броуновскому движению в многообразии. Меры  $S_K^{x,I}$  и  $S_K^{x,E}$  — это соответственно внутренняя и внешняя поверхностные меры Смолянова, порождённые мерой Винера на множестве траекторий в объемлющем пространстве.

**2. Уравнение Шрёдингера на римановом многообразии.** Пусть  $K$  — компактное риманово многообразие,  $\dim K = m$ . Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шрёдингера с потенциалом  $V : K \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\begin{cases} i \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = (\frac{1}{2} \Delta_K f)(t, x) + V(x) f(t, x) & t \geq 0, \quad x \in K \\ f(0, x) = f_0(x) & x \in K \end{cases} \quad (1)$$

$\Delta_K = -\text{tr} \nabla^2$  — оператор Лапласа–Бельтрами на множестве функций, заданных на многообразии  $K$ .

Предполагаем, что  $f_0 \in \mathbf{C}(K)$ ,  $f : [0, \infty) \times K \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(t, \cdot) \in \mathbf{C}(K)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Здесь  $\mathbf{C}(K)$  — банахово пространство комплекснозначных функций, непрерывных на  $K$  с нормой  $\|\cdot\|$ ,  $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$ .

Рассмотрим множество  $\mathbf{K} = \cup_{x \in K} \{x + \sqrt{i}(K - x)\}$ . Будем говорить, что функция  $g : K \rightarrow \mathbb{C}$  принадлежит классу  $A$ , если выполнены следующие условия:

- 1) существует область  $O_g$  некоторого комплексного многообразия, замыкание которой содержит  $\mathbf{K}$ ;
- 2) существует единственная аналитическая в  $O_g$ , непрерывная на  $O_g \cup \mathbf{K}$  функция  $\bar{g}$  такая, что её сужение на  $K$  совпадает с  $g$ .

Если в условии (2) функция  $\bar{g}$  является также дважды непрерывно дифференцируемой на  $O_g \cup \mathbf{K}$ , то мы будем говорить, что функция  $g$  принадлежит классу  $A_2$ .

**Теорема 1.** Пусть  $K$  — компактное риманово многообразие размерности  $m$ , изометрически вложенное в пространство  $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ . Пусть  $V$  и  $f_0$  — функции класса  $A$ . Пусть  $f(t, x)$  — решение задачи Коши (1) с начальным условием  $f_0$  и потенциалом  $V$ . Пусть  $f(t, x)$  является функцией класса  $A_2$  по переменной  $x$ . Тогда решение задачи Коши (1)  $f(t, x)$  может быть представлено с помощью функционального интеграла по мере Винера  $W_K^x$ :

$$1) \quad f(t, x) = \int_{\mathbf{C}([0, t], K)} e^{-i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) W_K^x(d\xi);$$

с помощью функционального интеграла по внешней поверхностной мере Смолянова  $S_K^{x, E}$ :

$$2) \quad f(t, x) = c^E(t, x) \times \int_{\mathbf{C}([0, t], K)} e^{\frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau} e^{-\frac{1}{8} \int_0^t r^2(\xi(\tau)) d\tau} e^{-i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) S_K^{x, E}(d\xi),$$

$$(c^E(t, x))^{-1} = \int_{\mathbf{C}([0, t], K)} e^{\frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau} e^{-\frac{1}{8} \int_0^t r^2(\xi(\tau)) d\tau} S_K^{x, E}(d\xi);$$

и с помощью функционального интеграла по внутренней поверхностной

мере Смолянова  $S_K^{x,I}$ :

$$\begin{aligned}
 3) \quad f(t, x) &= c^I(t, x) \times \\
 &\times \int_{\mathbf{C}([0,t], K)} e^{\frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau} e^{-i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) S_K^{x,I}(d\xi), \\
 (c^I(t, x))^{-1} &= \int_{\mathbf{C}([0,t], K)} e^{\frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau} S_K^{x,I}(d\xi).
 \end{aligned}$$

**Благодарности.** Автор выражает глубокую признательность профессору О. Г. Смолянову за постановку задачи и полезные дискуссии.

- [1] Х. фон ВАЙЦЕКЕР, О. Г. СМОЛЯНОВ, О. ВИТТИХ Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры, *Доклады Академии Наук*, **371** (2000), № 4, 442–447.
- [2] Х. фон ВАЙЦЕКЕР, О. Г. СМОЛЯНОВ, О. ВИТТИХ, Н. А. СИДОРОВА Поверхностные меры на траекториях в римановых многообразиях, порождаемые диффузиями, *Доклады Академии Наук*, **377** (2001), № 4, 441–446.
- [3] ВАЙЦЕКЕР Х. Ф., ВИТТИХ О., СМОЛЯНОВ О. Г., СИДОРОВА Н. А. Поверхностные меры Винера на траекториях в римановых многообразиях, *Доклады Академии Наук*, **383** (2002), № 4, 458–463.
- [4] SMOLYANOV O. G., WEIZSÄCKER H. V., WITTICH O. “Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions”. Canadian Math. Soc. Conference Proceedings. **vol. 29**. 2000. P. 589–602.
- [5] DOSS H. “Sur une Resolution Stochastique de l’Equation de Schroedinger a Coefficients Analytiques”. Communications in Math. Phys. V.73. N3. 1980. P. 247–264.
- [6] NASH J.F. The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. Math.*, **63**, (1956), 20–63.
- [7] BUTKO YA. A. “Representations of the solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a compact Riemannian manifold by functional integrals”. Rus. J. Math. Phys. V11. №2. 2004. P. 1–7.
- [8] Смолянов О. Г., Трумен А. «Интегралы Фейнмана по траекториям в римановых многообразиях». ДАН. 2003. Том 392. №2. С. 174–179.
- [9] Обрезков О. О. «Формула Фейнмана для решения задачи Коши–Дирихле, соответствующей уравнению Шрёдингера». Мат. Заметки. Т. 77. 2005.

**ℵ-Малые абелевы группы****И. В. Гердт***Томский государственный университет*

В [1] было введено понятие  $K$ -малых абелевых групп. Пусть  $K$  — некоторый класс абелевых групп. Абелеву группу  $A$  назовем  $K$ -малой, если для любых групп  $B_i \in K$  ( $i \in I$ ) и любого гомоморфизма  $\phi : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$  существует конечное подмножество  $J \subset I$  такое, что  $\phi(A) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$ .

Если класс  $K$  совпадает с классом всех абелевых групп, то  $K$ -малую группу  $A$  будем называть малой. В [3] получено полное описание малых и  $D$ -малых групп, где  $D$  — класс всех делимых абелевых групп [1].

Пусть  $\aleph$  — класс всех редуцированных абелевых групп.

Пусть  $P$  — множество всех простых чисел. Через  $G^1$  будем обозначать ульмовскую подгруппу группы  $G$ :  $G^1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nG = \bigcap_{p \in P} \bigcap_{k=1}^{\infty} p^k G$  ([2, с. 40]).

**Лемма.** Если при некотором натуральном  $n$  имеет место  $nG \subset G^1$ , то  $G^1$  — делимая группа.

**Доказательство.** Докажем, что  $G^1$  — делимая группа. Для этого достаточно показать, что  $G^1$  —  $p$ -делимая группа для каждого  $p \in P$ .

Пусть  $n = p^{k-1}q$ , где  $(p, q) = 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Если  $x \in G^1$ , то  $x = p^k u$  для некоторого элемента  $u \in G$ . Тогда  $qx = q(p^k u) = (qp^{k-1})pu = pnu$ . Так как  $(p, q) = 1$ , то существуют целые числа  $u$  и  $v$  такие, что  $uq + vp = 1$ . Следовательно,  $x = uqx + vpx = p(unu) + p(vx)$ . Так как  $unu \in G^1$  (учитывая, что  $nG \subset G^1$ ) и  $vx \in G^1$ , то  $p(unu) + p(vx) \in G^1$  и поэтому  $x \in G^1$ .

**Теорема 1.** Для группы  $A$  следующие условия эквивалентны:

- 1)  $A$  —  $\aleph$ -малая группа;
- 2) если  $M$  есть эпиморфный образ группы  $A$  и  $M$  — прямая сумма циклических групп конечного порядка, то  $M$  — ограниченная группа;
- 3) если  $M$  есть эпиморфный образ группы  $A$  и  $M$  — периодическая группа, то  $M$  — прямая сумма делимой и ограниченной групп;
- 4) для любых групп  $B_i$  ( $i \in I$ ) таких, что  $B_i^1 = 0$ , и любого гомоморфизма  $\phi : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$  существует конечное подмножество  $J \subset I$  такое, что  $\phi(A) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$ .

**Доказательство.** 1)  $\Rightarrow$  2). Пусть  $M = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ . Существует эпиморфизм  $\phi : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ . Так как  $A$  —  $\aleph$ -малая группа, то  $I$  — конечное множество и  $M$  — ограниченная группа.

2)  $\Rightarrow$  3). Пусть  $M$  — периодическая группа, являющаяся эпиморфным образом группы  $A$ . Тогда  $M$  представима в виде прямой суммы  $p$ -компонент  $T_p$ :  $M = \bigoplus_p T_p$ . Пусть  $B_p$  — базисная подгруппа группы  $T_p$ , тогда  $\bigoplus_p B_p$  — базисная подгруппа группы  $M$ . Тогда по теореме Селле ([2, с. 79]) группа  $\bigoplus_p B_p$  является эпиморфным образом группы  $M$ , а, следовательно, и группы  $A$ . Так как базисная подгруппа является прямой суммой циклических групп конечного порядка, то по условию 2) группа  $\bigoplus_p B_p$  ограниченная. Учитывая, что  $\bigoplus_p B_p$  — сервантная подгруппа группы  $M$ , получаем ([2, с. 140])  $M = (\bigoplus_p B_p) \oplus \tilde{B}$ .  $\tilde{B} = M / \bigoplus_p B_p$  и поэтому  $\tilde{B}$  — делимая группа. Получили, что группа  $M$  является прямой суммой делимой и ограниченной групп.

3)  $\Rightarrow$  4). Пусть  $\varphi : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$  — гомоморфизм, причем  $B_i^1 = 0$  для всех  $i \in I$ . Предположим, что не существует конечного подмножества  $J \subset I$  такого, что  $\varphi(A) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$ . Построим индукцией по  $n$  последовательность элементов  $a_n \in A$ , последовательность простых чисел  $p_n \in P$ , последовательность  $i_n \in I$  и возрастающую цепь подмножеств

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots \subset I$$

такие, что выполнены условия

- a)  $|I_n| < \aleph_0$ ;
- b)  $i_n \in I_n \setminus I_{n-1}$ ;  $\pi_{i_n} \varphi(a_n) \neq 0$ , где  $\pi_i : \bigoplus_{i \in I} B_i \rightarrow B_i$  — проекция;
- c)  $h_{p_n}(\pi_{i_n} \varphi(a_n)) < \infty$ ;
- d)  $a_n \in A$ ,  $\varphi(a_n) \in \bigoplus_{i \in I_n} B_i$ .

Пусть  $a_1$  — произвольный элемент группы  $A$ , для которого  $\varphi(a_1) \neq 0$ ,  $I_1 = \{i \in I \mid \pi_i \varphi(a_1) \neq 0\}$ . Пусть  $i_1 \in I_1$  — произвольный элемент,  $p_1 \in P$  — такое простое число, что  $h_{p_1}(\pi_{i_1} \varphi(a_1)) < \infty$ . Такое  $p_1$  существует, так как  $B_{i_1}^1 = 0$ .

Предположим, что элементы  $a_k$ ,  $i_k$ , числа  $p_k$  и подмножества  $I_k$  при  $k < n$  построены. Так как по предположению  $\varphi(A) \not\subset \bigoplus_{i \in I_{n-1}} B_i$ , то существует элемент  $0 \neq a_n \in A$ , для которого  $\varphi(a_n) \notin \bigoplus_{i \in I_{n-1}} B_i$ . Положим  $I_n = \{i \in I \mid \pi_i \varphi(a_n) \neq 0\} \cup I_{n-1}$ . Тогда согласно выбору элемента  $a_n$  имеем  $I_{n-1} \subset I_n$ . Ясно, что  $|I_n| < \aleph_0$ . Возьмем произвольное  $i_n \in I_n \setminus I_{n-1}$ . Тогда  $\pi_{i_n} \circ \varphi(a_n) \neq 0$  по определению  $I_n$ . Так как  $B_{i_n}^1 = 0$ , то найдется простое число  $p_n \in P$ , для которого  $h_{p_n}(\pi_{i_n} \varphi(a_n)) < \infty$ . Очевидно, что тогда условия а)–д) будут выполнены.

Положим

$$\tilde{B}_i = \begin{cases} B_i, & \text{если } i \neq i_n \text{ для всех } n, \\ p_n^{h_{p_n}(\pi_{i_n} \varphi(a_n)) + 1} B_{i_n}, & \text{если } i = i_n \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$



Тогда  $\bigoplus_{i \in I} B_i / \bigoplus_{i \in I} \tilde{B}_i \cong \bigoplus_{i \in I} (B_i / \tilde{B}_i)$  — прямая сумма циклических групп конечного порядка, так как  $B_i / \tilde{B}_i$  — ограниченные группы.

Пусть  $\pi : \bigoplus_{i \in I} B_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i / \bigoplus_{i \in I} \tilde{B}_i$  — естественный эпиморфизм. Имеем отображение  $\pi\phi : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i / \bigoplus_{i \in I} \tilde{B}_i$ . Здесь  $\pi\phi(A)$  — подгруппа в прямой сумме циклических групп конечного порядка, т.е.  $\pi\phi(A)$  — прямая сумма циклических групп конечного порядка. Далее, из определения  $\tilde{B}_i$  следует, что  $\pi_{i_n}\phi(a_n) \notin \tilde{B}_i$ , так как  $\tilde{B}_i = p_n^{h_{p_n}(\pi_{i_n}\phi(a_n))+1} B_{i_n}$ . Отсюда  $\pi_{i_n}\phi(a_n) \neq 0$ . Кроме того, из  $a_n \in A$  вытекает, что  $\pi\phi(a_n) \in \pi\phi(A)$ . Следовательно, высоты элементов из  $\pi\phi(A)$  не ограничены в совокупности, т.е.  $\pi\phi(A)$  — не ограниченная прямая сумма циклических групп, что противоречит условию 3).

4)  $\Rightarrow$  1). Пусть  $A$  удовлетворяет условию 4) и пусть  $\phi : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$  — гомоморфизм,  $B_i \in \mathfrak{X}$ . Пусть  $\pi_i : \bigoplus_{i \in I} B_i \rightarrow B_i$  — проекция. Тогда  $\pi_i\phi(A) \subset B_i$  и  $\phi(A) \subset \bigoplus_{i \in I} \pi_i\phi(A)$ . Поэтому без ограничения общности можно считать, что  $B_i = \pi_i\phi(A)$ .

Пусть  $\pi : \bigoplus_{i \in I} B_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i / \bigoplus_{i \in I} B_i^1$  — естественный эпиморфизм. Тогда  $\bigoplus_{i \in I} B_i / \bigoplus_{i \in I} B_i^1 \cong \bigoplus_{i \in I} (B_i / B_i^1)$  имеет нулевую первую ульмовскую подгруппу. Имеем отображение

$$\pi\phi : A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i / \bigoplus_{i \in I} B_i^1 = (\bigoplus_{i \in I} B_i + \bigoplus_{j \in I} B_j^1) / \bigoplus_{j \in I} B_j^1.$$

Поэтому существует конечное подмножество  $J \subset I$  такое, что  $\pi\phi(A) \subset (\bigoplus_{i \in J} B_i + \bigoplus_{j \in I} B_j^1) / \bigoplus_{j \in I} B_j^1$ . Следовательно,  $\phi(A) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i + \bigoplus_{j \in I} B_j^1$ . При  $i \in I \setminus J$  имеем

$$nB_i = \pi_i\phi(nA) \subset \pi_i\phi(A) \subset \pi_i(\bigoplus_{k \in J} B_k + \bigoplus_{j \in I} B_j^1) = B_i^1.$$

Итак,  $nB_i \subset B_i^1$ . Поэтому в силу леммы группа  $B_i^1$  является делимой. Так как  $B_i \in \mathfrak{X}$ , то  $B_i^1 = 0$  для всех  $i \in I \setminus J$ . Отсюда

$$\phi(A) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i + \bigoplus_{j \in I} B_j^1 = \bigoplus_{i \in J} B_i,$$

т.е.  $A$  —  $\mathfrak{X}$ -малая группа.

С помощью теоремы 1 получено полное описание  $\mathfrak{X}$ -малых периодических групп.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  — периодическая группа. Группа  $A$  является  $\mathfrak{X}$ -малой тогда и только тогда, когда  $A$  является прямой суммой делимой и ограниченной групп.

*Доказательство.* Пусть  $A$  — периодическая  $\mathfrak{X}$ -малая группа. Рассмотрим отображение  $i_A : A \rightarrow A$ . Рассматривая в качестве эпиморфного образа  $M$  в пункте 3 теоремы 1 саму группу  $A$  и используя эквивалентность

1) ~ 3) из теоремы 1 получаем, что  $A = C \oplus D$ , где  $C$  — ограниченная группа,  $D$  — делимая группа.

Пусть  $A$  — периодическая группа и  $A = C \oplus D$ , где  $C$  — ограниченная группа,  $D$  — делимая группа. Эпиморфный образ группы  $A$  также является прямой суммой делимой и ограниченной групп [3]. Следовательно, по теореме 1  $A$  —  $\aleph$ -малая группа

- [1] ГЕРДТ И. В. Малые абелевы группы. — *Фундам. и прикл. матем.* (в печати)
- [2] ФУКС Л. Бесконечные абелевы группы. Том 1. — М.: Мир, 1974.
- [3] BEAUMONT R. A., PIERCE R. S. Torsion-free rings. *Illinois. J. Math.* — 1961. — 5. — 61–98.

УДК 517.926

## Периодические решения системы трех связанных нелинейных телеграфных уравнений

**Д. С. Глызин**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*

Построена асимптотика периодического решения системы трех нелинейных телеграфных уравнений и показано существование и устойчивость решений системы с данной асимптотикой.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим краевую задачу, представляющую собой систему трех осцилляторов с малой связью и краевыми условиями Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j + \varepsilon \alpha u_{j-1} &= a^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + (bu_j - u_j^2) \frac{\partial u_j}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $j = 1, 2, 3$ ,  $u_0 = u_3$ ,  $\alpha > 0$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Фазовым пространством для  $(u_j(t, x), \frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t})$  считаем  $\mathring{W}_2^2(0, \pi) \times \mathring{W}_2^1(0, \pi)$ , где  $\mathring{W}_2^i(0, \pi)$  — соболевские пространства функций с нулевыми граничными условиями из (1).

Линеаризуем в нуле уравнение из (1) при  $\varepsilon = 0$ . Полученная задача допускает решения вида  $u(t, x) = e^{\pm i\omega_n t} \cos(nx)$ , с частотами  $\omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

В первую очередь построим приближение цикла задачи (1), бифурцирующего из нулевого решения на модах  $(1, 0, 0)^T \cos(nx)$ ,  $(0, 1, 0)^T \cos(nx)$ ,

$(0, 0, 1)^T \cos(nx)$  для некоторого фиксированного  $n$ , а затем покажем его существование и устойчивость.

**2. Алгоритмическая часть.** Действуя методом, изложенным, например, в [1], выполним в (1) подстановку

$$\begin{aligned} u_j(t, x) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_{j,1}(t, \tau, x) + \varepsilon u_{j,2}(t, \tau, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} u_{j,3}(t, \tau, x) + \\ &\quad + \varepsilon^2 u_{j,4}(t, \tau, x) + o(\varepsilon^2), \quad \tau = \varepsilon t, \\ u_{j,1} &= (z_j(\tau) e^{i\omega_n t} + \bar{z}_j(\tau) e^{-i\omega_n t}) \cos(nx), \end{aligned} \quad (2)$$

и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  получаем верное равенство, при  $\varepsilon$  имеем систему из трех несвязанных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t^2} + u_{j,2} - a^2 \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} &= i\omega_n b (z_j^2(\tau) e^{2i\omega_n t} - \bar{z}_j^2(\tau) e^{-2i\omega_n t}) \cos^2(nx), \\ \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение будем искать в том же виде, какой имеет правая часть уравнения (3):

$$u_{j,2}(t, \tau, x) = A_j(x) z_j^2(\tau) e^{2i\omega_n t} + \bar{A}_j(x) \bar{z}_j^2(\tau) e^{-2i\omega_n t}.$$

Задача на  $A_j(x)$  будет иметь вид:

$$(1 - 4\omega_n^2) A_j - a^2 \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^2} = \frac{i\omega_n b}{2} (1 + \cos(2nx)), \quad \frac{\partial A_j}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial A_j}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0.$$

Эта задача вырождена, если для некоторого натурального  $m > 2n$  выполнено  $2\omega_n = \omega_m$ , или, что то же самое:  $a = \sqrt{3/(m^2 - 4n^2)}$ . В случае невырожденности решение единственно:

$$A_j(x) = A_j^0(x) = -\frac{i\omega_n b}{2} \left( \frac{1}{4\omega_n^2 - 1} + \frac{\cos(2nx)}{3} \right).$$

В противном случае решения также существуют, и задаются в виде  $A_j(x) = A_j^0(x) + c_1 \cos(\sigma_n x)$ , где  $\sigma_n = \sqrt{4n^2 + 3/a^2}$ , а  $c_1$  — произвольная постоянная.

На следующем шаге проявляется влияние связи осцилляторов. Приравняв коэффициенты при  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial t^2} + u_{j,3} - a^2 \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} &= -\alpha u_{j-1,1} - 2 \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial \tau \partial t} - \frac{\partial u_{j,1}}{\partial t} + \\ &\quad + b(u_{j,2} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial t} + u_{j,1} \frac{\partial u_{j,2}}{\partial t}) - u_{j,1}^2 \frac{\partial u_{j,1}}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Правая часть представляет собой линейную комбинацию первой и третьей гармоник по  $t$ , поэтому решение ищем в виде

$$u_{j,3} = B(\tau, x)e^{i\omega_n t} + C(\tau, x)e^{3i\omega_n t} + \bar{B}(\tau, x)e^{-i\omega_n t} + \bar{C}(\tau, x)e^{-3i\omega_n t}.$$

Полученная таким образом задача на  $B$  всегда вырождена, соответствующее условие разрешимости дает систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{z}_j = -\frac{z_j}{2} + i\lambda z_{j-1} - \left(\frac{3}{8} + i\Omega\right)z_j^2 \bar{z}_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad z_0 = z_3, \quad (4)$$

где  $\lambda = \alpha/(2\omega_n)$ ,  $\Omega = b^2\omega_n(4\omega_n^2 + 5)/(24(\omega_n^2 - 1))$ . Можно найти решение уравнения (4) в виде автомодельного цикла:

$$z_j(\tau) = \rho e^{i\phi\tau + 2\pi i(j-1)/3}, \quad (5)$$

которое существует при  $\lambda > 1/\sqrt{3}$ . Задача на  $C$  разрешима всегда. Наконец, задача на  $u_4$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{j,4}}{\partial t^2} + u_{j,4} - a^2 \frac{\partial^2 u_{j,4}}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial t} - \alpha u_{j-1,2} + b u_{j,2} \frac{\partial u_{j,2}}{\partial t} + \\ &+ b u_{j,1} \frac{\partial u_{j,3}}{\partial t} + b u_{j,3} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial t} + b u_{j,1} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial \tau} - 2 u_{j,1} u_{j,2} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial t} - u_{j,1}^2 \frac{\partial u_{j,2}}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_{j,4}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u_{j,4}}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Разрешимость этой задачи гарантируется условием

$$a^2 \neq 1/(2n)^2. \quad (6)$$

Таким образом, считая выполненным условие (6) и подставив в (2) выражения для  $u_{j,2}$ ,  $u_{j,3}$ ,  $u_{j,4}$ , учитывая (5), мы можем построить приближенное (с точностью до  $\varepsilon^{5/2}$  по невязке) периодическое решение задачи (1).

**3. Линейный анализ.** Линеаризуем на построенном приближении цикла систему уравнений из (1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + h - a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \sqrt{\varepsilon}(A_1 h + A_2 \frac{\partial h}{\partial t}) + \varepsilon(-A_3 h + B_1 h + B_2 \frac{\partial h}{\partial t}), \\ \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  — диагональные матрицы с периодическими по  $t$ ,  $\tau$  элементами, а матрица  $A_3$  имеет вид  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ .

У данной задачи вычислим характеристические показатели следующим образом: для расчета показателей, отвечающих генерируемым модам, произведем подстановку

$$h = (V_0(t, \tau, x) + \sqrt{\epsilon} V_1(t, \tau, x) + \epsilon V_2(t, \tau, x)) \exp(\epsilon D t),$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} w_0 & \bar{w}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & \bar{w}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_0 & \bar{w}_0 \end{pmatrix}, \quad w_0 = e^{i(\omega_n t + \phi \tau)} \cos(nx),$$

где  $V_1$ ,  $V_2$  и  $D$  — матрицы размера 3 на 6 и 6 на 6 соответственно, элементы которых подлежат определению. Приравнявая одинаковые степени  $\epsilon$ , получим набор задач для определения  $V_1$  и  $V_2$ , а из условий разрешимости задач для элементов  $V_2$  однозначно определяется матрица  $D$ . Среди собственных чисел матрицы  $D$  имеется одно нулевое, а все действительные части оставшихся собственных значений отрицательны в области значений параметров  $\lambda > 1/\sqrt{3}$ ,  $0 < \Omega < l(\lambda)$ , где  $l(\lambda) > 0$ .

Расчет показателей, соответствующих модам  $\cos(mx)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $m \neq n$  произведем в одночастотном виде: подставим в (3) следующее выражение:

$$h = e^{i\omega_m t} (\cos(mx) I + \sqrt{\epsilon} V_{1,m}(t, \tau, x) + \epsilon V_{2,m}(t, \tau, x)) \exp(\epsilon D_m t),$$

в котором  $I$  — единичная, а  $V_{1,m}$ ,  $V_{2,m}$ ,  $D_m$  — подлежащие определению матрицы размером 3 на 3. После приравнивания соответствующих степеней  $\epsilon$  условия разрешимости соответствующих задач для элементов  $V_{1,m}$  приводят к неравенствам вида  $(\omega_m \pm \omega_n)^2 - \omega_{m \pm n}^2 \neq 0$ , справедливость которых проверяется непосредственно. Из условий разрешимости задачи на  $V_{2,m}$  определяются элементы матрицы  $D_m$ , действительные части собственных значений которой находятся в явном виде для любого  $m \neq n$  и стремятся к конечному отрицательному пределу при  $m \rightarrow \infty$ . Отметим, что имеется область значений параметров, когда одновременно в левой комплексной полуплоскости находятся как все собственные числа матриц  $D_m$  для любого  $m \neq n$ , так и ненулевые собственные числа матрицы  $D$ .

**4. Основной результат.** Теперь мы можем сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие (6), а собственные значения матриц  $D$  (за исключением нулевого),  $D_m$ ,  $m \neq n$  имеют отрицательные вещественные части. Тогда существует  $\epsilon_0 > 0$ , такое что задача (1) при любом  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл с асимптотикой (2), (5).

Обоснование данного утверждения производится по стандартной схеме, см. например, [2, 3] и заключается в сведении системы (1) к диффе-

ренциальному уравнению вида

$$\dot{\eta} = \varepsilon \Lambda_0 \eta + \varepsilon^2 \Lambda_1(\mu, t, x) \eta, \quad \Lambda_0 = \text{diag}(D, D_1, D_2, \dots)$$

на пространстве последовательностей, а также в проверке корректности соответствующих замен и ограниченности остаточных членов.

- [1] КОЛЕСОВ А. Ю., РОЗОВ Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [2] КОЛЕСОВ А. Ю., РОЗОВ Н. Х. Влияние квадратичной нелинейности на динамику периодических решений волнового уравнения // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 1. С. 93–118.
- [3] КАМБУЛОВ В. Ф., КОЛЕСОВ А. Ю., РОЗОВ Н. Х. Существование и устойчивость быстро осциллирующих циклов у нелинейного телеграфного уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1298–1300.

УДК 517.956

### Об асимптотике собственного значения для оператора Лапласа в многомерной области с малым отверстием\*

*С. А. Горшкова*

*Бакирский государственный педагогический университет*

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 3$ ,  $\Omega$  и  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченные области, содержащие начало координат, с гладкими границами  $\Gamma$  и  $\gamma$  соответственно. Введем зависящие от малого положительного параметра  $0 < \varepsilon \ll 1$  области:  $\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$ ,  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$ .  $\|\bullet\|$  — норма в  $L_2(\Omega)$ . В области  $\Omega_\varepsilon$  с малым отверстием  $\omega_\varepsilon$  рассматривается задача на собственные значения

$$-\Delta \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon \text{ при } x \in \Omega_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ при } x \in \partial \omega_\varepsilon, \quad (1)$$

где  $\nu$  — нормаль.

Известно [1], что, если  $\lambda_0$  — простое собственное значение краевой задачи

$$-\Delta \psi_0 = \lambda_0 \psi_0 \text{ при } x \in \Omega, \quad \psi_0 = 0 \text{ при } x \in \Gamma, \quad (2)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (05-01-97912-р\_агидель).

тогда существует единственное и простое собственное значение  $\lambda_\varepsilon$  краевой задачи (1), сходящееся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к  $\lambda_0$ , а для нормированных собственных функций имеет место сходимость  $\|\psi_\varepsilon - \psi_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$ .

Аналогично [2, 3], нетрудно показать, что существуют гармонические в  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\omega}$  функции  $V(\xi; \xi_i) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \omega)$ , удовлетворяющие однородным граничным условиям Неймана на  $\partial\omega$ , асимптотика которых при  $\rho \rightarrow \infty$  имеет вид

$$V(\xi; \xi_i) = \xi_i + \sum_{j=1}^n m_{ij} \frac{\xi_j}{\rho^{n-1}} + O(\rho^{-n}), \quad i = \overline{1, n},$$

причем,  $M(\omega) = (m_{ij})_{i,j=1}^n$  — симметрическая, положительно определенная матрица.

Основной результат работы представлен в следующем утверждении:

**Теорема.** Пусть  $\lambda_0$  — простое собственное значение краевой задачи (2). Тогда асимптотика собственного значения краевой задачи (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет вид

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^n \lambda_n + \dots, \quad (3)$$

$$\lambda_n = \lambda_0 \psi_0^2(0) |\omega| - \gamma_n \vec{\Phi}^T M(\omega) \vec{\Phi}. \quad (4)$$

Здесь  $|\omega|$  — объем  $\omega$ ,  $\gamma_n$  — площадь поверхности  $n$ -мерного шара единичного радиуса, а  $\vec{\Phi}$  — вектор-столбец с компонентами  $\Phi_j = \left. \frac{\partial \psi_0}{\partial x_j} \right|_{x=0}$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $r = |x|$ . Ряд Тейлора для функции  $\psi_0$  имеет вид:

$$\psi_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x), \quad r \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$P_0(x) \equiv \psi_0(0), \quad (6)$$

$$P_1(x) = \Phi_1 x_1 + \dots + \Phi_n x_n. \quad (7)$$

В окрестности  $\omega_\varepsilon$  введем внутреннее разложение, зависящее от  $\varepsilon$  и переменных  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , где  $\xi_i = x_i \varepsilon^{-1}$ . Обозначим  $\rho = |\xi|$ . Перепишывая (5) в переменных  $\xi$ , получаем

$$\psi_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j P_j(\xi), \quad \varepsilon \rho \rightarrow 0. \quad (8)$$

Следуя методу согласования асимптотических разложений [4, 5] и учитывая (8), будем искать собственную функцию в малой окрестности области

$\omega_\varepsilon$  в виде

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \widehat{v}_\varepsilon(\xi) = \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j v_j(\xi), \quad (9)$$

где

$$v_j(\xi) \sim P_j(\xi), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Подставляя (9), (3) в (1), переходя в полученном равенстве к переменным  $\xi$  и выписывая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем следующие краевые задачи:

$$\Delta_\xi v_0 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in \partial\omega, \quad (11)$$

$$\Delta_\xi v_1 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in \partial\omega, \quad (12)$$

$$-\Delta_\xi v_2 = \lambda_0 v_0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in \partial\omega. \quad (13)$$

Очевидно, что функция

$$v_0(\xi) \equiv \psi_0(0) \quad (14)$$

в силу (6) удовлетворяет краевой задаче (11) и условию в (10), а функция

$$v_1(\xi) = \sum_{i=1}^n \varphi_i V(\xi; \xi_i)$$

является решением краевой задачи (12) и имеет асимптотику

$$v_1(\xi) = P_1(\xi) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i m_{ij} \frac{x_j}{\rho^n} + O(\rho^{-n}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (15)$$

т. е. удовлетворяет (10).

Аналогично [2, 6] можно показать, что решение задачи (13) существует и имеет асимптотику

$$v_2(\xi) = P_2(\xi) + \tilde{C} \frac{1}{\rho^{n-2}} + O(\rho^{-n+1}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (16)$$

т. е. удовлетворяет (10). Здесь

$$\tilde{C} = \frac{\lambda_0 \psi_0(0) |\omega|}{(2-n) \gamma_n}.$$



Переписывая (9) в переменных  $x$ , в силу (14)–(16) получаем, что приближенное значение собственной функции имеет вид:

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \psi_0(x) + \varepsilon^n \psi_n(x), \quad (17)$$

$$\psi_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i m_{ij} \frac{x_j}{r^n} + \tilde{C} \frac{1}{r^{n-2}} + O(r^{3-n}), \quad r \rightarrow 0. \quad (18)$$

Подставляя (17) и (3) в (1), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем краевую задачу (2) и краевую задачу

$$-\Delta \psi_n = \lambda_0 \psi_n + \lambda_n \psi_0 \text{ при } x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad \psi_n = 0 \text{ при } x \in \Gamma. \quad (19)$$

Аналогично [5] можно показать, что существует  $\lambda_n$  при котором задача (19) имеет решение с асимптотикой (18).

Вычислим  $\lambda_n$ . Пусть  $S_\mu^n$  — поверхность  $n$ -мерного шара радиуса  $\mu$  с центром в начале координат. Умножим обе части равенства (19) на  $\psi_0$  и возьмем интеграл по  $\Omega \setminus S_\mu^n$  от обеих частей. Полученное равенство проинтегрируем по частям. Тогда

$$\lambda_n = \int_{\Omega \setminus S_\mu^n} \psi_0 \frac{\partial \psi_n}{\partial r} dx - \int_{\Omega \setminus S_\mu^n} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \psi_n dx.$$

Переходя к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , подставляя вместо  $\psi_0$  и  $\psi_n$  их асимптотики (5), (18), получаем (4).

Строгое обоснование построенных асимптотик проводится аналогично случаю  $n = 2$ , рассмотренному в [7].

В заключении заметим, что асимптотика (3), (4) для случая  $n = 3$  была построена в [2].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Р. Р. Гадылышину за постановку задачи и ценные советы по ее решению.

- [1] Гадылышин Р. Р. Спектр краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий. — Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. — 3–15.
- [2] Мазья В. Г., Назаров С. П., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями. — *Известия Академии Наук СССР*. — 1984. — **48**, № 2. — 347–371.
- [3] Планида М. Ю. Об асимптотике собственных значений лапласиана в области с граничным условием Неймана на вырезанной тонкой трубке. — *ЖВМиМФ*. 2004. — **44**, № 4. — 745–758.

- [4] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989. — 336.
- [5] Гадыйльшин Р. Р. Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии. — Дифференц. уравнения. — 1986. — 22. — 640–652.
- [6] Горшкова С. А. Об асимптотике собственных значений двумерного лапласиана в области с малым отверстием. — Ученые записки: Сб. науч. статей: Вып. 7 — Уфа: Изд-во БГПУ, 2005. — 93–99.
- [7] Горшкова С. А. Об асимптотике собственных значений двумерного лапласиана в области с малым отверстием. — В сб.: Международная зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых. Т. I. Математика — Уфа: РИО БашГУ, 2005.

УДК 515.122

# **Счетная паракомпактность топологий раздельной непрерывности на произведении ординалов**

**Я. С. Гриншпон**

*Томский государственный университет*

Для произвольных хаусдорфовых топологических пространств  $X$  и  $Y$  на их декартовом произведении  $X \times Y$  можно определить топологические пространства  $X \otimes Y$  ([3]) и  $X \tilde{\otimes} Y$  ([4]) со свойствами: а) пространство  $X \tilde{\otimes} Y$  вполне регулярно; б) для любого топологического (вполне регулярного) пространства  $Z$  отображение  $f : X \times Y \rightarrow Z$  раздельно непрерывно тогда и только тогда, когда отображение  $f : X \otimes Y \rightarrow Z$  ( $f : X \tilde{\otimes} Y \rightarrow Z$ ) непрерывно.

Топологическое пространство  $X$  называется счетно слабо паракомпактным, если для любой убывающей последовательности замкнутых в  $X$  множеств  $\{F_n\}_{n < \omega}$  с пустым пересечением существует последовательность открытых множеств  $\{U_n\}_{n < \omega}$ , удовлетворяющая условиям  $F_n \subset U_n$  и  $\bigcap_{n < \omega} U_n = \emptyset$ . Для нормальных пространств понятия счетной паракомпактности и счетной слабой паракомпактности эквивалентны.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda$  — ординал и  $\delta$  — счетный ординал. Тогда пространства  $[0; \lambda) \otimes [0; \delta)$  и  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \delta)$  являются наследственно счетно слабо паракомпактными.

**Доказательство.** Так как доказательства для обеих топологий совершенно аналогичны, то для определенности рассмотрим пространство

$[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \delta)$ . Предположим, что для всех  $\tilde{\delta} < \delta$  пространство  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \tilde{\delta})$  наследственно счетно слабо паракомпактно.

а) Пусть  $cf\delta = 1$ , т.е.  $\delta = \nu + 1$  и  $\{F_n\}_{n < \omega}$  — последовательность замкнутых в  $E \subset [0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \delta)$  множеств с пустым пересечением. По предположению индукции пространство  $([0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \nu)) \cap E$  счетно слабо паракомпактно, поэтому найдутся открытые множества  $U_n$  такие, что  $F_n \cap ([0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \nu)) \subset U_n$  и  $\bigcap_{n < \omega} U_n = \emptyset$ . Так как  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \nu)$  — открытое подпространство пространства  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \delta)$  ([4, 6.5]), то множества  $U_n$  будут открытыми и в  $E$ .

Заметим теперь, что  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} \{\nu\}$  гомеоморфно наследственно счетно слабо паракомпактному интервалу ординалов  $[0; \lambda)$  и замыкания в пространстве  $[0; \lambda)$  множеств  $B_n = \{\alpha < \lambda; \langle \alpha, \nu \rangle \in F_n\}$  замкнуты и имеют пустое пересечение в пространстве  $[0; \lambda) \setminus \bigcap_{n < \omega} \overline{B}_n$ . Поэтому существуют открытые в  $[0; \lambda) \setminus \bigcap_{n < \omega} \overline{B}_n$  множества  $V_n$  такие, что  $\overline{B}_n \subset V_n$  и  $\bigcap_{n < \omega} V_n = \emptyset$ .

Обозначим  $W_n = U_n \cup ((V_n \times [0; \delta)) \cap E)$ . Тогда  $F_n \subset W_n$ , множества  $W_n$  открыты в  $E$  и  $\bigcap_{n < \omega} W_n = \emptyset$ .

б) Пусть  $cf\delta = \omega$ . Зафиксируем возрастающую последовательность  $\{\delta_n\}_{n < \omega}$ , сходящуюся к  $\delta$ , и запишем, что  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \delta) = \bigoplus_{n < \omega} ([0; \lambda) \tilde{\otimes} [\delta_n, \delta_{n+1}))$ . Применяя предположение индукции, видим, что пространство  $E$  счетно слабо паракомпактно.

Так как при счетном  $\delta$  пространства  $[0; \lambda) \otimes [0; \delta)$  и  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \delta)$  нормальны [1], то получаем

Следствие 1. Пусть  $\lambda$  — ординал и  $\delta$  — счетный ординал. Тогда пространство  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \delta)$  является счетно паракомпактным.

Теорема 2. Пусть  $cf\lambda = \omega_1$  и  $\mu \geq \lambda$ . Тогда пространства  $[0; \lambda) \otimes [0; \mu)$  и  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \mu)$  не являются счетно слабо паракомпактными.

Доказательство. Зафиксируем последовательность  $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha < \omega}$ , сходящуюся к  $\lambda$ , и непересекающиеся стационарные в  $[0; \omega_1)$  множества  $S_n$ , где  $n < \omega$ . Тогда легко проверить, что множества  $F_n = \{\langle \lambda_\alpha, \lambda_\alpha \rangle; \alpha \in \bigcup_{m \geq n} S_m\}$  замкнуты в пространстве  $[0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \mu)$ . Рассмотрим открытые множества  $U_n \supset F_n$  и с помощью леммы о сдавливании найдем ординалы  $\xi_n$  и стационарные множества  $A_n \subset S_n$  такие, что для каждого  $\alpha \in A_n$  выполняется  $\{\alpha\} \times (\xi_n; \alpha] \subset U_n$ . Аналогично, при  $\beta > \xi_n$  существуют ординалы  $\eta_n(\beta)$  и стационарные множества  $A_n(\beta)$  такие, что для любого  $\alpha \in A_n(\beta)$  выполняется  $(\eta_n(\beta); \alpha] \times \{\beta\} \subset U_n$ . Получаем, что для любых  $\beta > \sup\{\xi_n; n < \omega\}$  и  $\gamma > \sup\{\eta_n(\beta); n < \omega\}$  выполняется  $\langle \gamma, \beta \rangle \in \bigcap_{n < \omega} U_n$ .

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 2. Для любых ординалов  $\lambda > \omega$  и  $\mu > \omega$  следующие условия эквивалентны:

- 1) любое подпространство  $E \subset [0; \lambda) \otimes [0; \mu)$  является нормальным и счетно паракомпактным;

- 2) любое подпространство  $E \subset [0; \lambda) \tilde{\otimes} [0; \mu)$  является нормальным и счетно паракомпактным;  
 3) ординалы  $\lambda$  и  $\mu$  счетны.

В частности, мы показали, что пространство  $[0; \omega_1) \tilde{\otimes} [0; \omega_1) = [0; \omega_1) \otimes [0; \omega_1)$  ([4, 7.2]) не является счетно слабо паракомпактным. Однако в этом пространстве существуют достаточно большое подпространство, обладающее свойством наследственной счетной слабой паракомпактности. При доказательстве этого факта мы будем следовать идеям работы [2].

Пусть  $\lambda$  и  $\mu$  — ординалы,  $\alpha < \lambda$  и  $E \subset [0; \lambda) \times [0; \mu)$ . Тогда обозначим

$$\begin{aligned} E^{\uparrow\alpha} &= \{\beta < \mu; \langle \alpha, \beta \rangle \in E\}, \\ \Gamma_{\uparrow E} &= \{\alpha < \lambda; E^{\uparrow\alpha} \text{ — неограниченно в } [0; \mu)\}, \\ \Delta_{\uparrow E} &= \{\alpha < \lambda; E^{\uparrow\alpha} \text{ — стационарно в } [0; \mu)\}. \end{aligned}$$

**Лемма 1.** Пусть  $\{F_n\}_{n < \omega}$  — убывающая последовательность замкнутых множеств в пространстве  $E \subset [0; \omega_1) \tilde{\otimes} [0; \omega_1)$ , причем множество  $\Delta_{\uparrow E}$  стационарно и  $\bigcap_{n < \omega} F_n = \emptyset$ . Тогда существует номер  $m < \omega$  такой, что множество  $\Delta_{\uparrow E} \setminus \Gamma_{\uparrow F_m}$  стационарно и для любого  $\alpha \in \Delta_{\uparrow E} \setminus \Gamma_{\uparrow F_m}$  множество  $\Gamma_{\uparrow F_m} \cap [0; \alpha)$  ограничено в  $[0; \alpha)$ .

*Доказательство.* Так как пересечение замкнутых в  $E^{\uparrow\alpha}$  множеств  $F_n^{\uparrow\alpha}$  пусто, то при  $\alpha \in \Delta_{\uparrow E}$  существует натуральный номер  $n_\alpha$  такой, что  $\alpha \notin \Gamma_{\uparrow F_{n_\alpha}}$ . Тогда при некотором натуральном  $m$  множество  $\{\alpha \in \Delta_{\uparrow E}; n_\alpha = m\}$  стационарно, а значит, и  $\Delta_{\uparrow E} \setminus \Gamma_{\uparrow F_m} \supset \Delta_m$  также стационарно.

Предположим, что для некоторого  $\alpha \in \Delta_{\uparrow E} \setminus \Gamma_{\uparrow F_m}$  множество  $\Gamma_{\uparrow F_m} \cap [0; \alpha)$  неограниченно в  $[0; \alpha)$  и обозначим  $B_\alpha = \bigcap_{\beta \in \Gamma_{\uparrow F_m} \cap [0; \alpha)} C_\beta$ , где  $C_\beta = \{\delta < \omega_1; \delta \text{ — предельная для } F_m^{\uparrow\beta}\}$ . При  $\beta \in \Gamma_{\uparrow F_m}$  множества  $C_\beta$  замкнуты и неограниченны в  $[0; \omega_1)$  и множество  $\Gamma_{\uparrow F_m} \cap [0; \alpha)$  счетно. Следовательно, множество  $B_\alpha$  также замкнуто и неограниченно в  $[0; \omega_1)$ .

Учитывая, что  $\alpha \in \Delta_{\uparrow E}$ , и значит, сечение  $E^{\uparrow\alpha}$  стационарно, а множество  $B_\alpha$  замкнуто и неограниченно, можно найти ординал  $\delta \in B_\alpha$  такой, что  $\delta \in E^{\uparrow\alpha}$ . Более того, так как  $\alpha \notin \Gamma_{\uparrow F_m}$ , то можно считать, что  $\delta > \sup F_m^{\uparrow\alpha}$ . Тогда точка  $\langle \alpha, \delta \rangle$  не принадлежит замкнутому в  $E$  множеству  $F_m$ , и значит, существуют ординалы  $\epsilon < \alpha$  и  $\zeta(\gamma) < \delta$  такие, что  $(\bigcup_{\epsilon < \gamma \leq \alpha} (\{\gamma\} \times (\zeta(\gamma), \delta])) \cap F_m = \emptyset$ . Возьмем точку  $\beta \in \Gamma_{\uparrow F_m} \cap [0; \alpha)$  со свойством  $\beta > \epsilon$ , и заметим, что по определению множеств  $B_\alpha$  и  $C_\beta$  ординал  $\delta$  является предельным для множества  $F_m^{\uparrow\beta}$ . С другой стороны, так как  $\beta \in (\epsilon, \alpha]$ , то  $(\zeta(\beta), \delta] \cap F_m^{\uparrow\beta} = \emptyset$ . Противоречие.

Лемма 2. Пусть  $\{F_n\}_{n<\omega}$  — убывающая последовательность замкнутых множеств в пространстве  $E \subset [0, \omega_1) \tilde{\otimes} [0, \omega_1)$ , причем  $\bigcap_{n<\omega} F_n = \emptyset$ . Тогда существует номер  $m < \omega$  такой, что множество  $\Delta_{\uparrow F_m}$  не является стационарным в  $[0, \omega_1)$ .

*Доказательство.* В случае, когда  $\Delta_{\uparrow E}$  нестационарно, любое множество вида  $\Delta_{\uparrow F_n}$  также нестационарно.

Пусть  $\Delta_{\uparrow E}$  — стационарное множество. Зафиксируем номер  $m$  из леммы 1. Тогда, для любого  $\alpha \in \Delta_{\uparrow E} \setminus \Gamma_{\uparrow F_m}$  найдется ординал  $\kappa(\alpha) < \alpha$  такой, что множества  $F_m^{\uparrow\beta}$  ограничены в  $[0, \omega_1)$  для всех  $\beta \in (\kappa(\alpha); \alpha)$ . По лемме о сдавливании существует ординал  $\kappa < \omega_1$  такой, что множество  $\{\alpha; \kappa(\alpha) = \kappa\}$  стационарно. Следовательно, для всех  $\beta \in (\kappa; \omega_1) = \bigcup_{\kappa(\alpha)=\kappa} (\kappa(\alpha); \alpha)$  множества  $F_m^{\uparrow\beta}$  ограничены. Таким образом,  $[\kappa + 1; \omega_1) \cap \Delta_{\uparrow F_m} = \emptyset$ .

Аналогично для любого множества  $E \subset [0, \lambda) \times [0, \mu)$  можно ввести обозначения  $E \leftrightarrow \alpha$ ,  $\Gamma_{\leftrightarrow E}$  и  $\Delta_{\leftrightarrow E}$  и доказать аналогичные леммы.

Лемма 3. Пусть каждому  $\alpha$  из замкнутого неограниченного множества  $K \subset [0, \omega_1)$  поставлено в соответствие замкнутое неограниченное множество  $K_\alpha$ . Тогда множество  $K' = \{\beta \in K; \beta \in \bigcap_{\alpha \in K \cap [0; \beta)} K_\alpha\}$  также замкнуто и неограниченно в  $[0, \omega_1)$ .

*Доказательство.* Для доказательства замкнутости множества  $K'$  рассмотрим последовательность  $\{\beta_\gamma\}_{\gamma < \epsilon f \beta} \subset K'$ , сходящуюся к  $\beta$ , и произвольный ординал  $\alpha \in K \cap [0; \beta)$ . Тогда найдется ординал  $\delta$  такой, что  $\alpha < \beta_\delta$ . Следовательно, для любого  $\gamma \geq \delta$  выполняется  $\alpha \in K \cap [0; \beta_\gamma)$ , а значит,  $\beta_\gamma \in K_\alpha$ . В силу замкнутости множества  $K_\alpha$  получаем, что  $\beta \in K_\alpha$ , откуда видно, что  $\beta \in K'$ .

Предположим теперь, что множество  $K'$  ограничено и возьмем ординал  $\beta(0) < \omega_1$  такой, что  $\beta(0) > \sup K'$ . По индукции для каждого натурального  $n$  определим ординалы  $\beta(n+1)$  такие, что  $\beta(n+1) > \beta(n)$  и  $\beta(n+1) \in \bigcap_{\alpha \in K \cap [0; \beta(n))} K_\alpha$ . Обозначим,  $\beta = \sup\{\beta(n); n < \omega\}$  и рассмотрим произвольный ординал  $\alpha \in K \cap [0; \beta)$ . Тогда для всех  $m$ , удовлетворяющих условию  $\beta(m) > \alpha$ , выполняется  $\beta(m+1) \in K_\alpha$ , а значит, и  $\beta \in K_\alpha$ . Таким образом, получили, что  $\beta \in K'$  и  $\beta > \sup K'$ . Противоречие.

Теорема 3. Пространство  $([0, \omega_1) \tilde{\otimes} [0, \omega_1)) \setminus \{(\alpha, \alpha); \alpha \in [0, \omega_1)\}$  является наследственно счетно слабо паракомпактным.

*Доказательство.* Пусть  $\{F_n\}_{n<\omega}$  — убывающая последовательность замкнутых множеств в пространстве  $E \subset ([0, \omega_1) \tilde{\otimes} [0, \omega_1)) \setminus \{(\alpha, \alpha); \alpha \in [0, \omega_1)\}$ , причем  $\bigcap_{n<\omega} F_n = \emptyset$ . По лемме 2 существует натуральный номер  $m$  и замкнутое неограниченное в  $[0, \omega_1)$  множество  $K$  такие, что  $K \cap \Delta_{\uparrow F_m} = \emptyset$  и  $K \cap \Delta_{\leftrightarrow F_m} = \emptyset$ . Так как для каждого  $\alpha \in K$  множества  $F_m^{\uparrow\alpha}$  и  $F_m^{\leftrightarrow\alpha}$  не стационарны в  $[0, \omega_1)$ , то существует замкнутое неограниченное множество  $K_\alpha$  такое, что  $K_\alpha \cap F_m^{\leftrightarrow\alpha} = \emptyset$  и  $K_\alpha \cap F_m^{\uparrow\alpha} = \emptyset$ .

Обозначим  $K' = \{\beta \in K; \beta \in \bigcap_{\alpha \in K \cap [0; \beta)} K_\alpha\}$ . По лемме 3 множество  $K'$  является замкнутым и неограниченным в  $[0; \omega_1)$ . Положим  $U = ([0; \omega_1) \setminus K') \times [0; \omega_1)$ ,  $V = [0; \omega_1) \times ([0; \omega_1) \setminus K')$  и  $W = (U \cup V) \cap E$ . Множества  $U$  и  $V$  открыты в  $[0; \omega_1) \hat{\otimes} [0; \omega_1)$ . Кроме того, если записать  $K' = \{\kappa_\alpha; \alpha < \omega_1\}$ , то множество  $[0; \omega_1) \setminus K'$  представимо в виде прямой суммы интервалов ординалов вида  $(\kappa_\alpha, \kappa_{\alpha+1})$ , каждый из которых порядково изоморфен счетному интервалу ординалов. По теореме 1 пространства  $U \cap E$  и  $V \cap E$  счетно слабо паракомпактны, а значит, и пространство  $W = (U \cap E) \cup (V \cap E)$  счетно слабо паракомпактно и открыто в  $E$ .

Покажем теперь, что  $F_m \subset W$ . Рассуждая от противного, предположим, что найдутся неравные ординалы  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что  $\langle \alpha, \beta \rangle \in F_m \setminus W$ . Получаем, что  $\langle \alpha, \beta \rangle \notin U$  и  $\langle \alpha, \beta \rangle \notin V$ , а это означает, что  $\{\alpha, \beta\} \subset K'$ .

Если теперь  $\alpha < \beta$ , то  $\alpha \in K \cap [0; \beta)$  и из определения множества  $K'$  вытекает, что  $\beta \in K_\alpha$ . С другой стороны, так как  $\langle \alpha, \beta \rangle \in F_m$ , то  $\beta \in F_m^{\uparrow \alpha}$ . Таким образом,  $\beta \in F_m^{\uparrow \alpha} \cap K_\alpha$ , что противоречит выбору множеств  $K_\alpha$ .

Если же  $\beta < \alpha$ , то аналогично предыдущему случаю,  $\beta \in K \cap [0; \alpha)$ , и значит,  $\alpha \in K_\beta$ . С другой стороны,  $\alpha \in F_m^{\leftrightarrow \beta}$ . Таким образом,  $\alpha \in F_m^{\leftrightarrow \beta} \cap K_\beta$ . Противоречие.

Для окончания доказательства осталось исходя из счетной слабой паракомпактности пространства  $W$  найти при  $n \geq m$  открытые в  $W$  множества  $G_n$ , удовлетворяющие условиям  $F_n \subset G_n$  и  $\bigcap_{n \geq m} G_n = \emptyset$ , и при  $n < m$  обозначить  $G_n = E$ . Полученные множества  $G_n$  будут искомыми окрестностями множеств  $F_n$  из определения счетной слабой паракомпактности.

- [1] Гриншпон Я. С. Нормальность топологий раздельной непрерывности на произведении ординалов *Бюллетень Томского гос. ун-та.* (в печати)
- [2] KEMOTO N., SMITH K. D. The product of of two ordinals is hereditarily countably metacompact. *Topol. and its Appl.* — 1996. — № 74. — 91–96.
- [3] KNIGHT C. J., MORAN W., PYM J. S. The topologies of separate continuity. I. *Proc. of Camb. Phil. Soc.* — 1970. — № 68. — 663–671.
- [4] KNIGHT C. J., MORAN W., PYM J. S. The topologies of separate continuity. II. *Proc. of Camb. Phil. Soc.* — 1972. — № 71. — 307–319.

**О сходимости собственных элементов  
возмущенной краевой задачи Дирихле  
для системы дифференциальных уравнений Ламэ\***

**Д. Б. Давлетов**

*Бакирский государственный педагогический университет*

**Постановка задачи и формулировка результатов.**

В работе рассматривается сингулярное возмущение задачи Дирихле для системы уравнений Ламэ.

Пусть  $\Omega$  и  $\omega$  — ограниченные области в  $\mathbb{R}^n$  с бесконечно дифференцируемыми границами  $\Gamma := \partial\Omega$  и  $\gamma := \partial\omega$ ,  $x := (x_1, \dots, x_n)$ . Не ограничивая общности будем считать, что начало координат лежит в  $\Omega$  и  $\omega$ . Обозначим  $\omega_\varepsilon := \{x : x\varepsilon^{-1} \in \omega\}$ ,  $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$ ,  $\gamma_\varepsilon := \partial\omega_\varepsilon$ ,  $\Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon$ . Через  $\mathbf{u}(x)$  обозначим вектор-функцию  $\mathbf{u}(x) := (u_1(x), \dots, u_n(x))$ . Рассматривается следующая возмущенная краевая задача

$$-(\Delta \mathbf{u}_\varepsilon + \alpha \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) = \lambda \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{f}_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \mathbf{u}_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{u}_\varepsilon$  и  $\mathbf{f}_\varepsilon$  —  $n$ -мерные вектор-функции с компонентами, определенными на  $\Omega_\varepsilon$ .

Для (1) назовем предельной краевую задачу

$$-(\Delta \mathbf{u}_0 + \alpha \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_0) = \lambda \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}_0, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u}_0 = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}_0$  и  $\mathbf{f}_0$  —  $n$ -мерные вектор-функции с компонентами, определенными на  $\Omega$ .

Пусть  $Q$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ . Далее под  $(L_2(Q))^n$  будем понимать пространство  $n$ -мерных вектор-функций, компоненты которых являются вещественными квадратично интегрируемыми по Лебегу функциями. Норма в  $(L_2(Q))^n$  определяется равенством:

$$\|\mathbf{u}\|_{(L_2(Q))^n} = \left( \int_Q |\mathbf{u}(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Под  $(H_0^1(Q))^n$  и  $(H^1(Q))^n$  будем понимать пополнения пространств  $n$ -мерных вектор-функций с компонентами из  $C_0^\infty(Q)$  и  $C^\infty(\overline{Q})$  соответственно по норме

$$\|\mathbf{u}\|_{(H^1(Q))^n} = \left( \|\mathbf{u}\|_{(L_2(Q))^n}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L_2(Q))^n}^2 \right)^{1/2},$$

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (05-01-97912-р.агидель).

где

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{(L_2(Q))^n}^2 = \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i\|_{L_2(Q)}^2.$$

Введем следующие обозначения. Пусть  $(\cdot, \cdot)_{(L_2(Q))^n}$  и  $(\cdot, \cdot)_{(H_0^1(Q))^n}$  — скалярные произведения в  $(L_2(Q))^n$  и  $(H_0^1(Q))^n$  соответственно.

Далее всюду будем рассматривать обобщенные решения краевых задач, понимаемые в смысле интегрального тождества (см. [1]). То есть, под решением краевой задачи (1) понимается вектор-функция  $\mathbf{u}_\varepsilon(x) \in (H_0^1(\Omega_\varepsilon))^n$  удовлетворяющая интегральному тождеству

$$(\nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{v})_{(L_2(\Omega_\varepsilon))^n} + \alpha (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon, \operatorname{div} \mathbf{v})_{(L_2(\Omega_\varepsilon))^n} = \lambda (\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v})_{(L_2(\Omega_\varepsilon))^n} + (\mathbf{f}_\varepsilon, \mathbf{v})_{(L_2(\Omega_\varepsilon))^n}, \quad (3)$$

для элемента  $\mathbf{f}_\varepsilon \in (L_2(\Omega_\varepsilon))^n$  и любой вектор-функции  $\mathbf{v}(x) \in (H_0^1(\Omega_\varepsilon))^n$ .

Так как, продолжив вектор-функции  $\mathbf{f}_\varepsilon \in (L_2(\Omega_\varepsilon))^n$  и  $\mathbf{u}_\varepsilon \in (H_0^1(\Omega_\varepsilon))^n$  нулем в  $\omega_\varepsilon$ , получим элементы из  $(L_2(\Omega))^n$  и  $(H_0^1(\Omega))^n$  соответственно, то за этими продолжениями будем сохранять их первоначальные обозначения.

Данная работа посвящена доказательству следующего утверждения.

**Теорема.** Пусть  $\lambda_0$  собственное значение предельной краевой задачи (2) кратности  $M$ . Тогда

- а) к нему сходится  $M$  собственных значений  $\lambda_{\varepsilon,i}$  возмущенной краевой задачи (1) с учетом их совокупной кратности;
- б) при  $\lambda$  близких к  $\lambda_0$  для решения возмущенной краевой задачи (1) справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \sum_{i=0}^M \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon, \mathbf{z}_{\varepsilon,i})_{(L_2(\Omega))^n}}{\lambda_{\varepsilon,i} - \lambda} \mathbf{z}_{\varepsilon,i} + \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \quad (4)$$

где  $\mathbf{z}_{\varepsilon,i}$  — ортонормированные в  $(L_2(\Omega))^n$  собственные функции краевой задачи (1) соответствующие  $\lambda_{\varepsilon,i}$  причем,

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \leq C \|\mathbf{f}_\varepsilon\|_{(L_2(\Omega))^n}, \quad (5)$$

где константа  $C$  не зависит от  $\lambda$  и  $\varepsilon$ .

**Доказательство теоремы.** Доказательство теоремы будет проводиться на основе схемы использованной при доказательстве аналогичных утверждений для сингулярно возмущенных скалярных краевых задач в [3]–[4].



Известно (см., например, [1]), что выражение

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{(L_2(\Omega))^n} + \alpha(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})_{(L_2(\Omega))^n} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{(L_2(\Omega))^n}$$

можно принять за новое скалярное произведение в  $(H_0^1(\Omega))^n$ . Обозначим его через  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})'_{(H_0^1(\Omega))^n}$ .

Упорядочим по возрастанию собственные значения краевой задачи (2)

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots,$$

причем каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Пусть  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i, \dots$  последовательность соответствующих ортонормированных в  $(L_2(\Omega))^n$  собственных вектор-функций.

Аналогично тому, как было показано в [2, гл. 4 § 1] можно показать, что вектор-функции

$$\frac{\mathbf{z}_i}{\sqrt{1 + \lambda_i}} \quad (6)$$

образуют ортонормированный базис в  $(H_0^1(\Omega))^n$ . Дальше также, как и в работе [2] решение  $\mathbf{u}_0$  краевой задачи (2) разложим в ряд Фурье по базису (6):

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{u}_0, \mathbf{z}_i)'_{(H_0^1(\Omega))^n} \frac{\mathbf{z}_i}{1 + \lambda_i}. \quad (7)$$

Умножим левую и правую часть уравнения в краевой задаче (2) на  $\mathbf{z}_i$  и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{z}_i)_{(L_2(\Omega))^n} + \alpha(\operatorname{div} \mathbf{u}_0, \operatorname{div} \mathbf{z}_i)_{(L_2(\Omega))^n} &= \\ &= \lambda(\mathbf{u}_0, \mathbf{z}_i)_{(L_2(\Omega))^n} + (\mathbf{f}_0, \mathbf{z}_i)_{(L_2(\Omega))^n}. \end{aligned}$$

Прибавив к левой и правой части последнего равенства  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{z}_i)_{(L_2(\Omega))^n}$  и учитывая представление (7), получим:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{f}_0, \mathbf{z}_i)_{(L_2(\Omega))^n}}{\lambda_i - \lambda} \mathbf{z}_i.$$

Аналогично показывается, что для решения возмущенной краевой задачи (1) справедливо разложение

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon, \mathbf{z}_{\varepsilon,i})_{(L_2(\Omega))^n}}{\lambda_{\varepsilon,i} - \lambda} \mathbf{z}_{\varepsilon,i}. \quad (8)$$

Обозначим через  $S(t, \lambda_0)$  открытый круг на комплексной плоскости радиуса  $t$  с центром в точке  $\lambda_0$ . Так как множество собственных значений предельной краевой задачи (2) не имеет конечных точек накопления,

то существует такое  $T > 0$ , что  $\overline{S(t, \lambda_0)}$  при  $t < T$  не содержит собственных значений предельной задачи кроме  $\lambda_0$ . Из теоремы 1 в [5] следует, что компакт  $\partial S(t, \lambda_0)$  не содержит собственных значений возмущенной краевой задачи и имеет место сходимость

$$\int_{\partial S(t, \lambda_0)} \mathbf{u}_\varepsilon(x, \lambda) d\lambda \rightarrow \int_{\partial S(t, \lambda_0)} \mathbf{u}_0(x, \lambda) d\lambda = 2\pi i (\mathbf{f}_0, \mathbf{z}_0)_{(L_2(\Omega))^n} \mathbf{z}_0$$

в норме  $(H^1(\Omega))^n$ . Положив  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{z}_0$ , а  $\mathbf{f}_\varepsilon = \mathbf{f}_0$  в  $\Omega_\varepsilon$  и  $\mathbf{f}_\varepsilon = 0$  в  $\omega_\varepsilon$ , получаем, что правая часть не равна нулю. Следовательно и левая часть не равна нулю. Поэтому в  $S(t, \lambda_0)$  лежит хотя бы одно собственное значение  $\lambda_\varepsilon$  возмущенной задачи. В силу произвола в выборе  $t$  это собственное значение сходится к  $\lambda_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Методом от противного легко показать, что совокупная кратность собственных значений возмущенной краевой задачи (1), сходящихся к  $\lambda_0$ , равна  $M$ . Из равенства (8), следует справедливость представления (4), где

$$\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon, \mathbf{z}_{\varepsilon,i})_{(L_2(\Omega))^n}}{\lambda_{\varepsilon,i} - \lambda} \mathbf{z}_{\varepsilon,i}. \quad (9)$$

Из (9) и равенства Стеклова–Парсеваля следует справедливость оценки (5).

- [1] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1974, С. 32.
- [2] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
- [3] Гадылышин Р. Р. Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.
- [4] Гадылышин Р. Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. I. Сходимость и оценки // Математические заметки. 1993. Т. 54, № 6. С. 10–21.
- [5] Давлетов Д. Б. Красная задача Дирихле на границе малого отверстия - В сб.: Международная зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых. Т. I. Математика - Уфа: РИО БашГУ, 2005.

# Смешанная нелокальная задача для параболического уравнения

**О. Ю. Данилкина**

*Самарская Государственная Академия Путей Сообщения*

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в пространстве  $R^n$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $Q_T$  — цилиндр  $\{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$ ,  $S_T = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, t \in (0, T)\}$  — боковая поверхность  $Q_T$ .

Рассмотрим в  $Q_T$  параболическое уравнение

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) u_{x_j}) + c(x, t) u = f(x, t). \quad (1)$$

Поставим для него задачу с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

и нелокальным условием

$$u(x, t)|_{S_T} = \int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx. \quad (3)$$

Определение. Под решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию  $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ , которая для любой функции  $\eta(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (u_t - (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} + cu) \eta(x, t) dx dt = \int_{Q_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt$$

и условиям (2), (3).

Теорема. Пусть выполняются условия:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) \in L_2(0, l), f(x, t) \in L_2(Q_T), \\ &0 < \rho \xi^2 \leq a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2, 0 < \rho_1 \xi^2 \leq (a_{ij})_t \xi_i \xi_j \leq \mu_1 \xi^2, |(a_{ij})_{x_i}| \leq a_2, \\ &0 < c_0 \leq c(x, t) \leq c_1, |c_t| \leq c_2 \text{ п.в. в } Q_T, K(x, 0) = 0, \forall x \in [0, l], \\ &\int_{\Omega} K^2(x, t) dx \leq K_0, \int_{\Omega} K_t^2(x, t) dx \leq K_1, 0 < t < T, \end{aligned}$$

где  $\rho, \mu, \rho_1, \mu_1, a_2, c_2, K_0, K_1$  — положительные константы. Тогда существует единственное решение задачи (1)–(2)–(3).

Для доказательства теоремы получим априорные оценки решения.  
Возьмем произвольное число  $\lambda$  из отрезка  $[0, 1]$ . Рассмотрим задачу (1)–(2) с нелокальным условием

$$u(x, t)|_{S_T} = \lambda \int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx. \quad (4)$$

Пронализируем равенства

$$\int_{Q_\tau} (u_t - (a_{ij}(x, t) u_{x_j})_{x_i} + c(x, t) u) \Delta u dx dt = \int_{Q_\tau} f(x, t) \Delta u dx dt, \quad (5)$$

$$\int_{Q_\tau} (u_t - (a_{ij}(x, t) u_{x_j})_{x_i} + c(x, t) u) u_t dx dt = \int_{Q_\tau} f(x, t) u_t dx dt. \quad (6)$$

Интегрируя (5) и (6) по частям получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{x_i} u_{x_j} dx + \int_{Q_\tau} a_{ij} u_{x_i x_j}^2 dx dt = - \int_{Q_\tau} f u_{x_i x_j} dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^l \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} dx - \int_{Q_\tau} (a_{ij})_{x_i} u_{x_i} u_{x_j} dx dt + \\ & + \int_{Q_\tau} c u u_{x_j} dx dt + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_{x_j} u_t \cos \nu x_i ds dt, \quad (7) \\ & \int_{Q_\tau} u_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c u^2 dx = \int_{Q_\tau} f u_t dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ij}(x, 0) \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} dx - \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} (a_{ij})_t u_{x_i} u_{x_j} dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} c_t u^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x, 0) \varphi^2 dx - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} a_{ij} u_{x_j} u_t \cos \nu x_i ds dt. \quad (8) \end{aligned}$$

Отметим, что для решения задачи (1), (2), (4) справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_t^2 ds dt \leq d K_1 \int_{Q_\tau} u^2 dx dt + d K_0 \int_{Q_\tau} u_t^2 dx dt, \quad (9)$$

$$\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u_x^2 ds dt \leq \int_0^\tau \left( \varepsilon \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx + b_\varepsilon \int_{\Omega} u_x^2 dx \right) dt, \quad (10)$$

где  $d = \int_{\partial\Omega} ds$ ,  $\varepsilon > 0$  — произвольное.

Применяя оценки (9), (10) к равенствам (7), (8), можно показать, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u^2 + u_x^2) dx + \int_{Q_\tau} (u_t^2 + u_{xx}^2) dx dt &\leq \\ &\leq mF(\tau) + m \int_{Q_\tau} (u^2 + u_x^2) dx dt, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } F(\tau) = \int_{Q_\tau} f^2 dx dt + \int_{\Omega} (\varphi^2 + \varphi_x^2) dx, m_1 = \min\{\rho, c_0\},$$

$$m_2 = \max\left\{2 + \frac{5}{\rho}; \mu + 1; c_1; c_2 + \frac{K_1}{2K_0} + \frac{5c_1^2}{\rho};\right.$$

$$\left. \mu_1 + 8K_0 dn(\mu^2 b_{\varepsilon_1} + b_{\varepsilon}) + \frac{5a_2^2}{\rho} \right\},$$

$$m = m_2/m_1.$$

Используя неравенство Гронуолла ([1, с. 152]), получим из (11), что

$$\int_{Q_T} (u^2 + u_x^2 + u_{xx}^2 + u_t^2) dx dt \leq M^2, \quad (12)$$

где величина  $M$  зависит от функций  $K(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $a_{ij}(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $T$ , области  $\Omega$  и не зависит от выбранного  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $M = 0$  при  $f(x, t) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$ .

*Доказательство.*

1. Единственность решения.

Предположим, что задача (1)–(3) имеет два решения  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ . Тогда функция  $u = u_1 - u_2$  является решением задачи (1)–(3) при  $f(x, t) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$ . Оценка (12) для функции  $u(x, t)$  показывает, что  $\|u\|_{W_2^{2,1}} \leq 0$ , а это означает, что  $u_1 = u_2$  п. в. в  $W_2^{2,1}(Q_T)$ .

2. Для доказательства существования решения используем метод продолжения по параметру.

Пусть  $\lambda$  — произвольное число из отрезка  $[0, 1]$ . Обозначим через  $\Lambda$  множество тех  $\lambda$ , для которых задача (1), (2) с нелокальным условием (4) имеет решение в пространстве  $W_2^{2,1}(Q_T)$ . Если такое множество  $\Lambda$  непусто, открыто и замкнуто одновременно, то оно совпадает с отрезком  $[0, 1]$  ([2, с. 139–140]), а тогда задача (1), (2), (4) разрешима при любом  $\lambda$ , в том числе при  $\lambda = 1$ . Заметим, что множество  $\Lambda$  не пусто, так как  $\lambda = 0 \in \Lambda$  ([3, с. 139–140]).

Покажем теперь, что множество  $\Lambda$  замкнуто. Для этого возьмем последовательность элементов  $\{\lambda_n\} \subset \Lambda : \lambda_n \rightarrow \lambda_0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Каждому  $\lambda_n$  соответствует функция  $u_n$ , являющаяся решением задачи (1), (2), (4) из

пространства  $W_2^{2,1}(Q_T)$ . Для таких функций  $u_n$  справедлива оценка (12):  $\|u_n\|_{W_2^{2,1}} \leq M$ , где константа  $M$  не зависит от номера  $n$ . Тогда из последовательности  $\{u_n\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{u_{n_k}\}$ , для которой существует функция  $u \in W_2^{2,1}(Q_T)$ :  $(u_{n_k})_{xx} \rightarrow u_{xx}$ ,  $u_{n_k} \rightarrow u$ ,  $(u_{n_k})_t \rightarrow u_t$  слабо в  $L_2(Q_T)$ ,  $u_{n_k}|_{S_T} \rightarrow u|_{S_T}$  п. в. на  $[0, T]$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Поэтому при переходе к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в следующих равенствах

$$\int_{Q_T} ((u_{n_k})_t - (a_{ij}(u_{n_k})_{x_j})_{x_i} + cu_{n_k}) \eta dxdt = \int_{Q_T} f \eta dxdt,$$

$$u_{n_k}(x, 0) = \varphi(x), \quad u_{n_k}|_{S_T} = \lambda_{n_k} \int_{\Omega} K(x, t) u_{n_k}(x, t) dx$$

получаем, что функция  $u(x, t)$  является решением задачи (1), (2), (4) из  $W_2^{2,1}(Q_T)$ , а значит  $\lambda_0 \in \Lambda$ ,  $\Lambda$  — замкнутое множество.

Покажем, что множество  $\Lambda$  открыто. Пусть  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Докажем, что если  $|\tilde{\lambda}|$  достаточно мало, то  $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda} \in \Lambda$ . Для этого введем оператор  $A : W_2^{2,1}(Q_T) \rightarrow W_2^{2,1}(Q_T)$  следующим образом.

Возьмем произвольную функцию  $v(x, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$  и определим функцию  $\eta(t)$  как  $\eta(t) = \tilde{\lambda} \int_{\Omega} K(x, t) v(x, t) dx$ , а функцию  $w(x, t)$  — как решение уравнения (1) с правой частью  $f_1 = f - c\eta - \eta_t$ , удовлетворяющее условиям (2), (4). Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2) и условию

$$u(x, t)|_{S_T} = \lambda_0 \int_{\Omega} K(x, t) u(x, t) dx + \tilde{\lambda} \int_{\Omega} K(x, t) v(x, t) dx.$$

Тогда функция  $u(x, t) = w(x, t) + \eta(t)$  является решением из пространства  $W_2^{2,1}(Q_T)$  и  $A(v) = u$ .

Можно показать, что при малых  $|\tilde{\lambda}|$  оператор  $A$  будет сжимающим. А в силу полноты пространства  $W_2^{2,1}(Q_T)$  существует единственная функция  $u(x, t)$ , удовлетворяющая (1), (2), (4). Таким образом, при достаточно малых  $\tilde{\lambda}$  элемент  $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda} \in \Lambda$ .

Следовательно,  $\Lambda = [0, 1]$ , а тогда задача (1), (2), (4) имеет решение из пространства  $W_2^{2,1}(Q_T)$  при любом  $\lambda$ , в том числе при  $\lambda = 1$ .

- [1] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
- [2] ТРЕНОГИН В. А. Функциональный анализ. — М., 1993.
- [3] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А., СОЛОННИКОВ В. А., УРАЛЫЦЕВА Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

## **Моделирование напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых закрытым способом**

***П. В. Деев, И. Ю. Воронина, С. В. Князева, Е. С. Фирсанов***

*Тульский государственный университет*

Долгое время для расчета подземных сооружений использовались методы строительной механики, в которых подземная конструкция моделировалась стержневой системой, а действие массива пород — заданными нагрузками и реакцией упругого основания. Главной проблемой такого подхода являлось определение нагрузок, действующих на конструкцию со стороны массива, которые при расчете принимались в качестве исходных данных. Однако интенсивность и распределение нагрузок на крепь подземного сооружения невозможно определить, не учитывая механические характеристики самой крепи, т. е. без совместного рассмотрения каждой конкретной подземной конструкции в конкретном массиве пород как элементов единой деформируемой системы [3].

Когда выработка уже подкреплена обделкой, совместные перемещения на линии контакта крепь-массив малы по величине, и в силу малости этих перемещений связь между напряжениями и деформациями на этой стадии деформирования можно принять линейной [2]. Это допущение позволяет выбрать в качестве модели обделки тоннеля, расположенного в массиве пород, упругое кольцо, подкрепляющее отверстие в линейно-деформируемой среде. При этом деформации, произошедшие в массиве до возведения обделки, могут быть учтены приближенно [1]. Результаты, полученные с использованием методов расчета, основанных на этих двух основных положениях механики подземных сооружений, имеют значительно более высокую степень согласования с экспериментальными данными по сравнению с традиционными методами расчета [3].

На кафедре механики материалов Тульского государственного университета в течение ряда лет разрабатываются теория и методы расчета подземных сооружений, основанных на указанном подходе. Разработанные методы широко применялись при проектировании крупных подземных сооружений, в том числе тоннелей Байкало-Амурской магистрали, гидроузла Мрича (Центральная Ява), ирригационных тоннелей водохранилищ в Сирии, железнодорожных тоннелей в Чехословакии, подземных сооружений Рогунской и Байпазинской ГЭС.

Авторами статьи разработаны методы расчета многослойных обделок круговых тоннелей, сооружаемых вблизи склонов, обделок параллельных

взаимодействующих тоннелей и обделок подводных тоннелей. В основу методов расчета положены аналитические решения соответствующих задач теории упругости — о напряженном состоянии многослойного кольца, подкрепляющего отверстие в весомой полуплоскости с границей, наклоненной под углом к горизонту (рис. 1а), о напряженном состоянии колец произвольной формы в весомой плоскости (рис. 1б) и о напряженном состоянии кольца произвольной формы в весомой полуплоскости (рис. 1в).

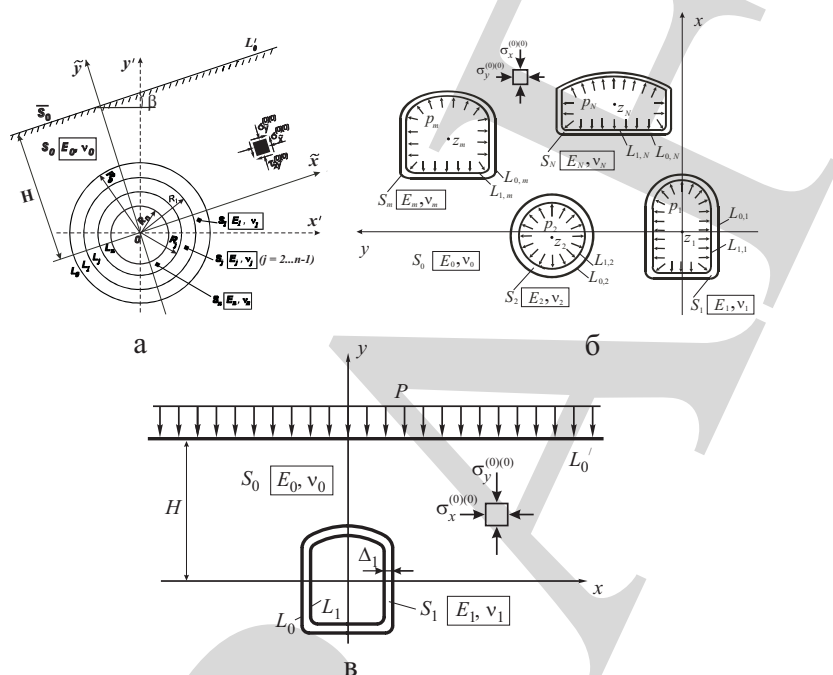


Рис. 1. Расчетные схемы рассматриваемых задач теории упругости

Граничные условия на линиях контакта отражают равенство векторов смещений и напряжений. Правомочность использования данного предположения обоснована в работе [3].

Решения задач получены с использованием комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили, связанных с напряжениями и смещениями в среде и кольцах известными формулами [4]. Комплексные потенциалы, характеризующие напряженное состояние среды и колец (слоев кольца)



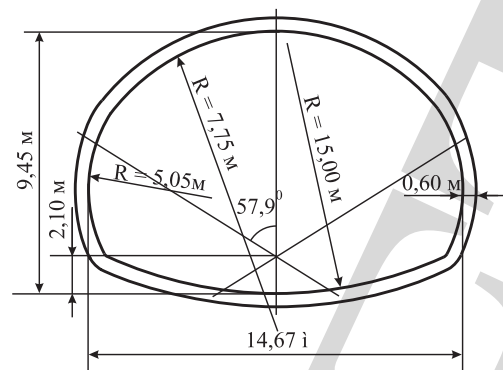


Рис. 2. Поперечное сечение обделки рассматриваемого тоннеля

отыскивались в виде рядов по степеням комплексного переменного. В задачах, расчетные схемы которых представлены на рис. 1а и 1в, используется аналитическое продолжение комплексных потенциалов, регулярных в среде вне отверстия, через границу полуплоскости. В задаче о напряженном состоянии нескольких подкрепленных отверстий используется метод Д. И. Шермана для многосвязных областей [5]. В задачах о напряженном состоянии некругового кольца в полуплоскости и нескольких колец в полной плоскости применяются конформные отображения.

Каждая из рассматриваемых задач была решена с использованием итерационного процесса [6], в каждом приближении которого решается задача для одного подкрепленного отверстия в полной плоскости, при граничных условиях, содержащих дополнительные слагаемые, отражающие влияние границы полуплоскости либо других подкрепленных отверстий. Дополнительные слагаемые представляются в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами, которые полагаются нулю на первой итерации, а на затем уточняются на основе предыдущих приближений.

Ниже приводится пример расчета одного из проектов подводного тоннеля Хиамен в Китае. Исходные данные для расчета принимались следующими: глубина заложения тоннеля  $H = 21 \text{ м}$ , глубина пролива  $H_w = 26 \text{ м}$ , объемный вес пород  $\gamma = 0,0265 \text{ МН/м}^3$ , деформационные характеристики массива пород  $E_0 = 1000 \text{ МПа}$ ,  $\nu_0 = 0,35$ , деформационные характеристики материала обделки тоннеля  $E_1 = 30000 \text{ МПа}$ ,  $\nu_1 = 0,2$ . Поперечное сечение тоннеля показано на рис. 2.

Результаты расчета — нормальные тангенциальные напряжения на внутреннем и внешнем контурах поперечного сечения тоннеля, нормаль-

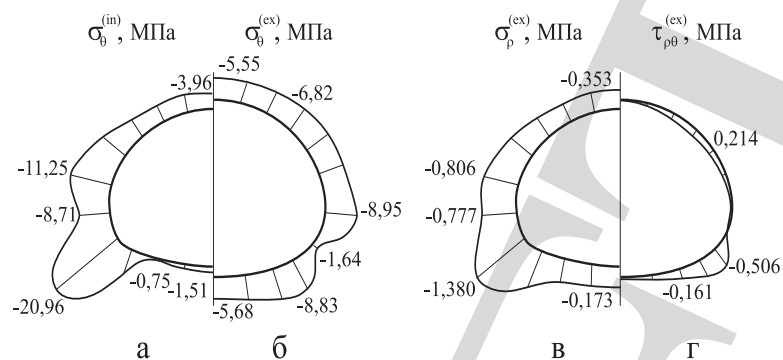


Рис. 3. Напряжения в обделке тоннеля: нормальные тангенциальные на внутреннем (а) и внешнем (б) контурах поперечного сечения, нормальные (в) и касательные (г) на линии контакта.

ные и касательные напряжения на линии контакта приведены на рис. 3.

Разработанные методы, реализованные в виде компьютерных программ, предназначены для использования в научных и проектных организациях.

- [1] Булычев Н. С. О расчете обделок тоннелей в очень слабых грунтах// Проблемы подземного строительства в XXI веке. Труды международной конференции. Тула, Россия 25–26 апреля 2002 г. — Тула: Изд. ТулГУ, 2002. — С. 3–37.
- [2] Булычев Н.С. Теория расчета подземных сооружений// Геомеханика. Механика подземных сооружений/ Сборник научных трудов. — Тула: Изд. ТулГУ, 2001.
- [3] Булычев Н.С., Фотиева Н.Н., Стрельцов Е.В. Проектирование и расчет крепи капитальных выработок. — М.: Недра. — 1986. — 288 с.
- [4] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966.
- [5] Шерман Д.И. О напряжениях в плоской весоной среде с двумя одинаковыми симметрично расположенными круговыми отверстиями. — Прикладная математика и механика, 1951, т. 15, № 6, с. 751–761.
- [6] FOTIEVA N.N., BULYCHEV N.S., SAMMAL A.S. Design of shallow tunnel linings/Prediction and Perfomance in Rock Engineering. EUROCK'96/ Torino/ Italy. — A.A.Balkema, Rotterdam, Brookfield/ P. 667–680.

# Анализ выживания популяции частиц для критического ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$

**А. В. Домбровская**

*Московский государственный университет*

Рассматривается симметричное ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем на решетке  $\mathbb{Z}^d$  ( $d \geq 1$ ) в предположении, что ветвление (т. е. рождение и гибель частиц) происходит в единственной точке (источнике). Пусть  $A := \|a(x, y)\|_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$  — матрица переходных интенсивностей случайного блуждания. Предполагается, что блуждание однородно ( $a(x, y) = a(0, y - x)$ ), симметрично ( $a(x, y) = a(y, x)$ ) и неприводимо (т. е. все точки  $y \in \mathbb{Z}^d$  достижимы), причем скачки имеют конечную дисперсию. Ветвящийся процесс в источнике  $x_0 = 0$  задается с помощью инфинитезимальной производящей функции  $f(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$ , где  $b_n \geq 0$  при  $n \neq 1$ ,  $b_1 < 0$  и  $\sum_n b_n = 0$ . Таким образом, частица, находящаяся в точке  $x$ , за малое время  $h$  с вероятностью  $a(x, y)h + o(h)$  переходит в точку  $y \neq x$  или с вероятностью  $\delta_0(x)b_1h + o(h)$  умирает, породив  $n \neq 1$  потомков. Как обычно, предполагается, что каждая из новых частиц эволюционирует по аналогичному закону, независимо от остальных частиц и от всей предыстории. Данная модель была введена в работе [1] и исследовалась, например, в работах [2]–[3].

Рассмотрим функцию Грина  $G_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt$ , где  $p(t, x, y)$  — переходная вероятность случайного блуждания. Как показано в предшествующих исследованиях  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{d/2} p(t, x, y) = \gamma_d$ , где  $\gamma_d > 0$  — некоторая константа. Поэтому  $G_\lambda(0, 0)|_{\lambda=0} < \infty$  при  $d \geq 3$  и, следовательно, случайное блуждание транзитивно, если  $d \geq 3$ , и возвратно, если  $d = 1, 2$ . Обозначим  $\beta_c := 1/G_0(0, 0)$ , тогда  $\beta_c = 0$  при  $d = 1, 2$  и  $\beta_c > 0$  при  $d \geq 3$ . Будем предполагать, что  $\beta := f'(u)|_{u=1} < \infty$ , тогда значение  $\beta_c$  является критическим в том смысле, что асимптотическое поведение популяции частиц на  $\mathbb{Z}^d$  существенно различается в надкритическом  $\beta > \beta_c$ , критическом  $\beta = \beta_c$  и докритическом  $\beta < \beta_c$  случаях.

Цель настоящей работы — анализ предельного ( $t \rightarrow \infty$ ) поведения вероятности выживания популяции на  $\mathbb{Z}^d$  в критическом случае при возможном делении частиц на двух потомков. В этом случае

$$f(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2.$$

Пусть  $\mu_t$  — общее число частиц на  $\mathbb{Z}^d$  в момент времени  $t \geq 0$ . Введем производящую функцию для случайной переменной  $\mu_t$  на решетке  $F_x(z, t) := E_x z^{\mu_t}$ , где  $E_x$  обозначает усреднение по мере  $P_x$  при старте процесса в начальный момент времени из точки  $x$ . Производящая функция  $F_x(z, t)$  удовлетворяет следующему многомерному аналогу обратного уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial F_x(z, t)}{\partial t} = AF_x(z, t) + \delta_0(x)f(F_x(z, t)), \quad (1)$$

с начальным условием  $F_x(z, 0) = z$ , где выражение  $AF_x(z, t)$  определяется как  $AF := \sum_{x'} a(x, x')F_{x'}(z, t)$ . Из уравнения (1) получаем интегральное уравнение для производящей функции

$$F_x(z, t) = \int_0^t p(t-s, x, 0)f(F_0(z, s))ds + z. \quad (2)$$

В силу соотношения (2) уравнение для вероятности выживания популяции частиц  $Q_x(t) := P_x(\mu_t > 0)$  примет следующий вид:

$$Q_x(t) = 1 - \int_0^t p(t-s, x, 0)f(1 - Q_0(s))ds. \quad (3)$$

С учетом условия критичности  $\beta = \beta_c$  интегральное уравнение (3) преобразуется к виду:

$$Q_x(t) = 1 - b_2 \int_0^t p(t-s, x, 0)Q_0^2(s)ds + \beta_c \int_0^t p(t-s, x, 0)Q_0(s)ds. \quad (4)$$

Теорема 1. Если  $\beta = \beta_c$ , то при  $t \rightarrow \infty$  для любого  $z \in [0, 1]$  при каждом  $x$  справедливы следующие асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} d = 1, \quad Q_x(t) &\sim (b_2 \gamma_1 \pi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{4}}; \\ d = 2, \quad Q_x(t) &\sim (b_2 \gamma_2)^{-\frac{1}{2}} (\ln t)^{-\frac{1}{2}}; \\ d \geq 3, \quad Q_x(t) &\sim 1 - \beta_c G_0(x, 0) \left( 1 - \sqrt{\frac{\beta_c}{b_2}} \right). \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы основано на тауберовой теореме для плотностей [4, т. 2, глава XIII], для применения которой требуется монотонность вероятности продолжения процесса  $Q_x(t)$  по  $t$  при каждом

фиксированном  $x$ . Данный факт является следствием свойства монотонности производящей функции  $F_x(z, t)$  по  $t$  при каждом фиксированном  $z$  и  $x$ . Отметим, что доказательство свойства монотонности  $F_x(z, t)$  вытекает напр., из теоремы о положительных решениях для дифференциальных уравнений в  $l^\infty(\mathbf{Z}^d)$  с внедиагонально положительной правой частью, см. [5]. При  $x = 0$  после применения преобразования Лапласа к обеим частям уравнения (4) получаем

$$1 - \widehat{Q_0}(\lambda) = b_2 G_\lambda(0, 0) \widehat{Q_0^2}(\lambda) + \beta_c G_\lambda(0, 0) \widehat{Q_0}(\lambda), \quad (5)$$

причем в левой части стоит преобразование Лапласа от вероятности вырождения процесса  $1 - Q_0(t)$ . По теореме 1, приведенной в работе [6], вероятность вырождения  $1 - Q_0(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к 1 при  $d = 1, 2$  и к некоторой константе при  $d \geq 3$ . Следовательно, при  $d = 1, 2$  и  $\lambda \rightarrow 0$  справедливо следующее асимптотическое равенство  $1 - \widehat{Q_0}(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}$ . Из асимптотического поведения  $p(t, 0, 0, \cdot)$  и теоремы 4 [4, т. 2, глава XIII, §5] определяем асимптотическое поведение функции Грина  $G_\lambda(0, 0)$  при  $\lambda \rightarrow 0$  в размерности  $d = 1$ :  $\gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2}) \lambda^{-\frac{1}{2}}$  и в размерности  $d = 2$ :  $\gamma_2 \ln(\frac{1}{\lambda})$ . Теперь восстановим асимптотическое поведение  $\widehat{Q_0^2}(\lambda)$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ) при  $d = 1$ :  $(b_2 \gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2}))^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}}$ ; при  $d = 2$ :  $(b_2 \gamma_2 \lambda)^{-1} \ln^{-1}(\frac{1}{\lambda})$ . В силу монотонности функции  $Q_0^2(t)$  и тауберовой теоремы 4 получаем при  $t \rightarrow \infty$  следующие асимптотические равенства для  $Q_0^2(t)$  при  $d = 1$ :  $(b_2 \gamma_1 \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}))^{-1} t^{-\frac{1}{2}}$ ; при  $d = 2$ :  $(b_2 \gamma_2)^{-1} \ln^{-1} t$ . Откуда сразу следует утверждение теоремы в размерностях  $d = 1, 2$  для  $Q_0(t)$ . Так как первый член асимптотического разложения функций Грина ( $\lambda \rightarrow 0$ ) при  $d = 1, 2$  не зависит от  $x$ , то отсюда вытекает, что асимптотика  $Q_x(t)$  не зависит от  $x$  и ведет себя как  $Q_0(t)$ . При  $d \geq 3$  уравнение (5) представим как

$$\frac{1}{\lambda} - (1 - \beta_c G_\lambda(0, 0)) \widehat{Q_0}(\lambda) = b_2 G_\lambda(0, 0) \widehat{Q_0^2}(\lambda). \quad (6)$$

Заметим, что  $(1 - G_\lambda(0, 0) \beta_c) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , поэтому  $b_2 G_\lambda(0, 0) \widehat{Q_0^2} = (1 + o(1)) \frac{1}{\lambda}$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . В силу свойства монотонности  $Q_0(t)$  и тауберовой теоремы 4 получаем, что  $Q_0^2(t) = (1 + o(1)) \frac{\beta_c}{b_2}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Пусть теперь  $x$  произвольно. Из уравнения 4 получаем преобразование Лапласа функции  $Q_x(t)$ :

$$\widehat{Q_x}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - G_\lambda(x, 0) b_2 \widehat{Q_0^2}(\lambda) + G_\lambda(x, 0) \beta_c \widehat{Q_0}(\lambda). \quad (7)$$

Из уравнения 7, восстановив асимптотическое поведение  $\widehat{Q_0}(\lambda)$  и  $\widehat{Q_0^2}(\lambda)$ , с помощью тауберовой теоремы сразу получаем утверждение теоремы 1 при  $d \geq 3$ .

Теорема 2. Если  $\beta = \beta_c$ , то при  $t \rightarrow \infty$  для любого  $z \in [0, 1]$  при каждом  $x$  справедливы следующие асимптотические соотношения при

$$d = 1 \quad 1 - F_x(z, t) \sim \sqrt{\frac{1-z}{\pi b_2 \gamma_1 t^{\frac{1}{2}}}};$$

$$d = 2 \quad 1 - F_x(z, t) \sim \sqrt{\frac{1-z}{b_2 \gamma_2 \ln t}};$$

$$d \geq 3 \quad 1 - F_x(z, t) \sim (1 - \beta_c G_0(x, 0))(1 - z) + \beta_c G_0(x, 0) \sqrt{\frac{\beta_c}{b_2}(1 - z)}.$$

Теорема 2 доказывается по той же схеме, что и теорема 1.

Теорема 3. Если  $\beta = \beta_c$ , то для любого  $z \in [0, 1]$  при каждом  $x$  справедливы соотношения в размерностях  $d = 1, 2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_x[z^{\mu_t} | \mu_t > 0] = 1 - \sqrt{1 - z};$$

в размерностях  $d \geq 3$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_x[z^{\mu_t} | \mu_t > 0] = \frac{z(1 - \beta_c G_0(x, 0)) + \beta_c G_0(x, 0) \sqrt{\frac{\beta_c}{b_2}(1 - \sqrt{1 - z})}}{1 - G_0(x, 0) \beta_c (1 - \sqrt{\frac{\beta_c}{b_2}})}.$$

Доказательство. Так как  $P_x\{\mu_t = 0 | \mu_t > 0\} = 0$ , то

$$\begin{aligned} E_x[z^{\mu_t} | \mu_t > 0] &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_x\{\mu_t = n | \mu_t > 0\} = \\ &= P_x^{-1}\{\mu_t > 0\} \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_x\{\mu_t = n\} = P_x^{-1}\{\mu_t > 0\} (F_x(z, t) - P_x\{\mu_t = 0\}). \end{aligned}$$

Откуда, используя определение  $Q_x(t) := P_x(\mu_t > 0)$ , получаем

$$E_x[e^{-z\mu_t} | \mu_t > 0] = \frac{F(z, t, x) - 1 + Q_x(t)}{Q_x(t)} = 1 - \frac{1 - F(z, t, x)}{Q(t, x)}.$$

В силу утверждений теорем 1 и 2 при стремлении  $t \rightarrow \infty$  сразу получаем утверждения теоремы 3.

- [1] ЯРОВАЯ Е. Б. Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве. *Теоретическая и математическая физика*. — 1991, т. 88, вып. 1, — 25–30.
- [2] БОГАЧЕВ Л. В., ЯРОВАЯ Е. Б. Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. *Доклады Академии наук*. — 1998, т. 363, № 4. — 439–442.

- 
- [3] ЯРОВАЯ Е. Б. Предельная теорема для критического ветвящегося случайного блуждания на  $\mathbb{Z}^d$  с одним источником. *Успехи математических наук*. — 2005, т. 60, вып. 1, — 175–176.
  - [4] ФЕЛЛЕР В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М., 1984.
  - [5] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М. А. Оператор сдвига по траекториям обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1966.
  - [6] ALBEVERIO S., BOGACHEV L. V., YAROVAYA E. B. C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1998. V. 326.

УДК 519.716

## Семейства предполных классов монотонных функций в $P_k$ , не имеющих конечного базиса\*

**О. С. Дудакова**

*Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова*

В работе исследуются предполные классы монотонных функций  $k$ -значной логики [3]. Известно [2], что при  $k \leq 7$  все предполные классы в  $P_k$  являются конечно-порожденными. В [4] приведен пример частично упорядоченного множества из восьми элементов, такого, что предполный класс всех функций, монотонных на этом множестве, не имеет конечного базиса. Полного описания всех конечно-порожденных предполных классов монотонных функций к настоящему времени не получено. В данной работе для семейств частично упорядоченных множеств  $\mathcal{P}$  специального вида получены необходимые условия конечной порожденности предполного класса  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  всех функций, монотонных на  $\mathcal{P}$  (см. также [1]). Показано также, что для некоторых семейств эти условия являются также и достаточными.

Пусть  $\mathcal{P}$  — некоторое частично упорядоченное множество с отношением порядка  $\leq$ . Пусть  $a_1, a_2 \in \mathcal{P}$ , элементы  $a_1$  и  $a_2$  несравнимы. Назовем  $b \in \mathcal{P}$  верхней гранью элементов  $a_1, a_2$ , если выполняются неравенства  $b \geq a_1$  и  $b \geq a_2$ . Верхнюю грань  $b$  элементов  $a_1, a_2$  назовем минимальной верхней гранью этих элементов, если ни для какой другой верхней

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00994), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-5400.2006.1) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

границы  $x$  этих элементов не выполняется неравенство  $b > x$ . Будем говорить, что элементы  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathcal{P}$  обладают  $p$ -свойством, если элементы  $a_1, a_2$  несравнимы,  $b_1, b_2$  несравнимы,  $c_1, c_2$  несравнимы,  $b_1, b_2$  — минимальные верхние границы элементов  $a_1, a_2$ , а элементы  $c_1, c_2$  — минимальные верхние границы элементов  $b_1, b_2$ .

Пусть  $\mathcal{P}$  — частично упорядоченное множество, обозначим через  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  — класс всех функций, монотонных на множестве  $\mathcal{P}$ . Обозначим через  $\mathbb{A}_0$  семейство всех частично упорядоченных множеств с наименьшим и наибольшим элементами (0 и 1 соответственно). Известно [3], что для любого множества  $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_0$  класс  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  является предполным. Обозначим через  $\mathbb{A}_1$  семейство всех множеств  $P$  из  $\mathbb{A}_0$  следующего вида:  $P = P_1 \cup \dots \cup P_m, m \geq 1, |P_1| = |P_m| = 1$ , для каждого  $i = 2, \dots, m-1$  выполняется неравенство  $|P_i| \geq 2$ , и любые два элемента  $a, b \in P_i$  несравнимы, а для любых  $i, j, 1 \leq i < j \leq m$ , для любых элементов  $a \in P_i$  и  $b \in P_j$  выполняется неравенство  $a < b$ . Отметим, что множества из семейства  $\mathbb{A}_1$  можно представить в виде объединения конечного числа полных двудольных графов.

Определим две операции над множествами с наименьшим и наибольшим элементами. Пусть  $R_1$  и  $R_2 \in \mathbb{A}_0$ . Наименьший и наибольший элементы множества  $R_i$ , обозначим через  $0_i$  и  $1_i$  соответственно, положим  $R'_i = R_i \setminus \{0_i, 1_i\}$ .

- (1) Будем говорить, что множество  $R$  получено в результате последовательного соединения множеств  $R_1$  и  $R_2$ , если  $R = \{0\} \cup R'_1 \cup \{\varepsilon\} \cup R'_2 \cup \{1\}$ , и для любых элементов  $a \in R'_1$  и  $b \in R'_2$  выполняются неравенства  $0 < a < \varepsilon < b < 1$ .
- (2) Будем говорить, что множество  $R$  получено в результате параллельного соединения множеств  $R_1$  и  $R_2$ , если  $R = \{0\} \cup R'_1 \cup R'_2 \cup \{1\}$ , любые два элемента  $a \in R'_1$  и  $b \in R'_2$  несравнимы, и выполняются неравенства  $0 < a, b < 1$ .

Обозначим через  $\mathbb{A}_2$  семейство частично упорядоченных множеств, содержащее все множества из семейства  $\mathbb{A}_1$ , а также все множества, полученные конечным числом применения операций (1) и (2) к некоторому конечному семейству множеств из  $\mathbb{A}_1$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{P}$  — множество из семейства  $\mathbb{A}_2$ , содержащее шестерку элементов, обладающих  $p$ -свойством. Тогда класс  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  всех монотонных функций на множестве  $\mathcal{P}$  не является конечно-порожденным.

Теорема 1 обобщает основной результат из [4] и доказывается на основе лемм 1–4.

**Лемма 1.** [4]. Пусть  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{Q}$  — частично упорядоченные множества,  $q_1, \dots, q_k \in \mathcal{Q}$ , пусть  $f_1, \dots, f_N$  — все монотонные отображения  $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ . Тогда множество  $\{(f_j(q_1), f_j(q_2), \dots, f_j(q_k)) \mid j = 1, \dots, N\} \subset \mathcal{R}^k$  сохраняется



всеми функциями из класса  $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ .

Пусть  $\mathcal{Q}$  — некоторое частично упорядоченное множество,  $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$ ,  $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{P}' = \{0, \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', 1\} \subseteq \mathcal{P}$ , элементы  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$  обладают  $p$ -свойством,  $f'$  — некоторое отображение  $\mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{P}'$ . Следуя [4], назовем последовательность  $X_m, \dots, X_{m'}$  различных элементов множества  $\mathcal{Q}$  зигзагом для  $f'$ , если выполняются следующие условия:

- 1)  $m \in \{0, 1\}$ ,  $m' \geq m + 2$ ;
- 2)  $X_m, X_{m'} \in \mathcal{Q}'$ ,  $X_i \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}'$  для всех  $i = m + 1, \dots, m' - 1$ ;
- 3)  $f'(X_m) = \beta$ ,  $f'(X_{m'}) = \beta'$ ;
- 4)  $X_{2i} > X_{2i-1}$  для всех  $i$ , таких, что  $m < 2i \leq m'$ ;  $X_{2i} > X_{2i+1}$  для всех  $i$ , таких, что  $m \leq 2i < m'$ ;
- 5) для каждого  $2i$ ,  $m < 2i < m'$ , найдутся  $Y, Y' \in \mathcal{Q}'$ , такие, что  $Y, Y' > X_{2i}$  и выполняются равенства  $f'(Y) = \gamma$ ,  $f'(Y') = \gamma'$ ; для каждого  $2i + 1$ ,  $m < 2i + 1 < m'$ , найдутся  $Z, Z' \in \mathcal{Q}'$ , такие, что  $Z, Z' < X_{2i+1}$  и выполняются равенства  $f'(Z) = \alpha$ ,  $f'(Z') = \alpha'$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\mathcal{Q}$  — некоторое частично упорядоченное множество,  $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$ ,  $\mathcal{P}' = \{0, \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', 1\} \subseteq \mathcal{P}$ , элементы  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$  обладают  $p$ -свойством,  $f'$  — некоторое отображение  $\mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{P}'$ . Монотонное доопределение  $f$  отображения  $f'$  на множество  $\mathcal{Q}$  существует тогда и только тогда, когда отображение  $f'$  монотонно, и в  $\mathcal{Q}$  не существует зигзага для  $f'$ .

Пусть  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{R} = \{A, A', B, B', C_1, \dots, C_n, C', D_1, \dots, D_{2n+1}\}$  — некоторое частично упорядоченное множество. Будем говорить, что  $\mathcal{R}$  — множество типа  $q_n$ , если элементы  $A$  и  $A'$  несравнимы, для каждого  $i = 0, \dots, n$   $A, A' < D_{2i+1}$ ;  $B > D_1$ , для каждого  $i = 2, \dots, 2n + 1$  элементы  $B$  и  $D_i$  несравнимы,  $B' > D_{2n+1}$ , для каждого  $i = 1, \dots, 2n$  элементы  $B'$  и  $D_i$  несравнимы; для каждого  $i = 1, \dots, n$   $D_{2i} > D_{2i+1}, D_{2i-1}$ ; для всех  $j \in \{1, \dots, 2n + 1\} \setminus \{2i - 1, 2i, 2i + 1\}$  элементы  $D_{2i}$  и  $D_j$  несравнимы; для каждого  $i = 1, \dots, n$   $C_i, C' > D_{2i}$ ; для всех  $j \in \{1, \dots, 2n + 1\} \setminus \{2i - 1, 2i, 2i + 1\}$  элементы  $C_i$  и  $D_j$  несравнимы; для каждого  $i = 1, \dots, n$  элементы  $C_i$  и  $B$ ,  $C_i$  и  $B'$ ,  $C_i$  и  $C'$  несравнимы; элементы  $C'$  и  $B$ ,  $C'$  и  $B'$  несравнимы.

Пусть  $\mathcal{R}_0$  — некоторое множество типа  $q_n$ ,  $n \geq 1$ , положим  $\mathcal{R}'_0 = \mathcal{R}_0 \setminus \{D_1, \dots, D_{2n+1}\}$ . ■

Пусть  $g'$  — монотонное отображение  $\mathcal{R}'_0 \rightarrow \mathcal{P}$ . Положим  $g'(A) = a$ ,  $g'(A') = a'$ ,  $g'(B) = b$ ,  $g'(B') = b'$ ,  $g'(C_1) = c_1, \dots, g'(C_n) = c_n$ ,  $g'(C') = c'$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$ ,  $g'$  — монотонное отображение  $\mathcal{R}'_0 \rightarrow \mathcal{P}$ , пусть отображения  $g' \upharpoonright_{\mathcal{R}'_0 \setminus \{B'\}}$  и  $g' \upharpoonright_{\mathcal{R}'_0 \setminus \{B\}}$  доопределяются на множество  $\mathcal{R}_0$  до монотонных. Монотонного доопределения отображения  $g'$  на  $\mathcal{R}_0$  не существует тогда и только тогда, когда для каждого  $i = 1, \dots, n$  элементы  $a, a', b, b', c_i, c'$  обладают  $p$ -свойством.

Пусть  $n \geq 4$ ,  $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$ ,  $\mathcal{Q}_0 = \{A, A', B, B', C_1, \dots, C_{n-2}, C', D_1, \dots, D_{2n-3}\}$  — множество типа  $q_{n-2}$ ,  $\mathcal{Q}'_0 = \{A, A', B, B', C_1, \dots, C_{n-2}, C'\}$ ,  $\mathcal{Q}'_1 = \mathcal{Q}'_0 \setminus \{B'\}$ ,

$\mathcal{Q}'_2 = \mathcal{Q}'_0 \setminus \{B\}$ . Обозначим через  $T$  набор элементов  $(a, a', b, b', c_1, \dots, c_n, c') \in \mathcal{P}^{n+5}$ . По этому набору определим  $n$  отображений  $\mathcal{Q}'_0 \rightarrow \mathcal{P}$ . Для каждого  $i = 1, \dots, n$  положим  $f'_i(A) = a$ ,  $f'_i(A') = a'$ ,  $f'_i(B) = b$ ,  $f'_i(B') = b'$ , для каждого  $j = 1, \dots, n-2$  положим  $f'_i(C_j) = c_{k_{ij}}$ , где  $k_{ij} \equiv i + j - 1 \pmod{n}$ , и, наконец,  $f'_i(C') = c'$ .

Обозначим через  $R_0$  множество всех таких наборов  $T \in \mathcal{P}^{n+5}$ , что для каждого  $i = 1, \dots, n$  отображения  $f'_i|_{\mathcal{Q}'_1}$  и  $f'_i|_{\mathcal{Q}'_2}$  можно монотонно доопределить на  $\mathcal{Q}_0$ . Далее, для каждого  $j = 1, \dots, n$  обозначим через  $R_j$  множество всех наборов из  $R_0$ , таких, что отображение  $f'_j$  можно монотонно доопределить на  $\mathcal{Q}_0$ . Наконец, обозначим через  $R_{\mathcal{P},n}$  множество таких наборов  $T$  из  $R_0$ , что  $T \in R_j$  для некоторого  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Для каждого набора  $T \in \mathcal{P}^{n+5}$  положим  $k_T = |\{i \mid 1 \leq i \leq n, T \in R_i\}|$ .

Лемма 4. Пусть  $T \in R_{\mathcal{P},n}$ ,  $n \geq 4$ . Тогда  $k_T \geq n - 2$ .

Доказательство теоремы 1. Пусть  $\mathcal{P} \in \mathbb{A}_2$ . Используя леммы 1, 3 и 4, можно показать, что для каждого  $n > 3$  множество  $R_{\mathcal{P},n}$  сохраняется всеми функциями из  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  от  $k$  переменных при  $k < \frac{n}{2}$ . Кроме того, используя лемму 2, можно показать, что существует функция  $f(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ , не сохраняющая множество  $R_{\mathcal{P},n}$ .

Далее, пусть  $\mathcal{F}$  — конечное множество функций из  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ . Найдется такое число  $k \geq 2$ , что все функции из  $\mathcal{F}$  будут существенно зависеть не более чем от  $k$  переменных. Выберем число  $n > 2k$  и рассмотрим множество  $R_{\mathcal{P},n}$ . Оно сохраняется всеми функциями из  $\mathcal{F}$ , но существует монотонная функция от  $2n$  переменных, не сохраняющая  $R_{\mathcal{P},n}$ . Таким образом, никакое конечное множество монотонных функций не порождает класс  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ . Теорема 1 доказана.

Пусть  $\mathcal{P}$  — частично упорядоченное множество. Положим  $w_{\mathcal{P}} = \max |J|$ , где максимум берется по всем антицепям  $J$  из  $\mathcal{P}$ .

Обозначим через  $\mathbb{P}_0$  семейство всех таких частично упорядоченных множеств  $\mathcal{P}$  с наименьшим и наибольшим элементами, для которых выполняется неравенство  $w_{\mathcal{P}} \leq 2$ . Отметим, что семейству  $\mathbb{P}_0$  принадлежит множество, приведенное в работе [4].

Теорема 2. Пусть  $\mathcal{P} \in \mathbb{P}_0$ . Класс  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  является конечно-порожденным тогда и только тогда, когда множество  $\mathcal{P}$  не содержит шестерку элементов, обладающих  $p$ -свойством.

Доказательство необходимости приводится в [1].

- [1] ДУДАКОВА О. С. Об одном семействе предполных классов функций  $k$ -значной логики, не имеющих конечного базиса. *Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика.* — 2006. — № 2. — 29–33.
- [2] LAU D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der  $k$ -wertigen Logik. *Z. math Log. und Grundl. Math.* — 1978. — 24. — 79–96.

- [3] ROSENBERG I.G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. *Rozpr. ČSAV. MPV.* —1970. — **80**. — 3–93.  
 [4] TARDOS G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations. *Order.* —1986. — **3**. — 211–218.

УДК 511

## О количестве представлений чисел неодноклассными бинарными квадратичными формами\*

**Ю. Ю. Евсеева**

*Владимирский государственный педагогический университет*

**1. Одноклассные формы.** Рассматривается задача о количестве представлений натуральных чисел бинарной квадратичной формой  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  с отрицательным дискриминантом  $D = b^2 - 4ac$ . Впервые эта задача была рассмотрена еще Гауссом. Подробная история изучения этого вопроса описана в известной монографии Диксона [1]. Данная задача решена полностью для одноклассных бинарных квадратичных форм [2] и количество представлений вычисляется по формуле

$$r(m) = e(D_1) \rho(m),$$

где  $e(D_1)$  — число автоморфизмов формы  $f(x, y)$ ,  $D_1$  — свободная от квадрата часть дискриминанта  $D = k^2 D_1$ , и  $\rho(m)$  — мультипликативная функция, определяемая на степенях простых чисел:

$$\begin{aligned} \rho(p^\alpha) &= \alpha + 1 \text{ для } \chi_1(p) = +1, \\ \rho(p^\alpha) &= \begin{cases} 1, & \text{если } 2 \mid \alpha, \\ 0, & \text{если } 2 \nmid \alpha, \end{cases} \text{ для } \chi_1(p) = -1, \\ \rho(p^\alpha) &= 1 \text{ для } \chi_1(p) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\chi_1(x) = \begin{cases} \left( \frac{x}{|d|} \right) & \text{для } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ (-1)^{\frac{x-1}{2}} \left( \frac{x}{|d|} \right) & \text{для } d \equiv 3 \pmod{4}, \\ (-1)^{\frac{x^2+1}{2} + \frac{x-1}{2} \cdot \frac{d'-1}{2}} \left( \frac{x}{d'} \right) & \text{для } d = 2 \cdot d' \end{cases}$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00435)

— характер мнимого квадратичного поля с дискриминантом  $D_1$  [2]. В [3] для некоторых конкретных форм найдены условия представимости чисел.

**2. Двуклассные формы.** Пусть  $f_0, f_1$  — квадратичные формы из различных классов  $C_0$  и  $C_1$  мнимого квадратичного поля дискриминанта  $D_1$  с числом классов  $h = 2$ . Классы  $C_0$  и  $C_1$  образуют группу относительно гауссовой композиции.

Определим характеры этой группы  $\kappa_0$  и  $\kappa_1$  условием  $\kappa_i(C_j) = (-1)^{i+j}$ . Формы класса  $C_0$  представляют 1. Обозначим через  $r(f_i, m)$  число решений уравнения  $f_i(x, y) = m$  в целых числах  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

Теорема 1. Для  $r(f_i, m)$  ( $i = 1, 2$ ) имеют место формулы

$$r(f_0, m) = (1 + \kappa_1(m))\rho(m), \quad r(f_1, m) = (1 - \kappa_1(m))\rho(m),$$

где  $\kappa_1(m)$  — вполне мультипликативная функция, которая на простых  $p$  с  $\chi_1(p) = +1$  или 0 задается равенствами

$$\kappa_1(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } r(f_0, p) > 0, \\ -1, & \text{если } r(f_1, p) > 0. \end{cases}$$

Данные формулы показывают, что если натуральное число  $m$  представимо квадратичной формой  $f_i(x, y)$ , то  $m$  непреставимо другой формой  $f_j$  ( $i \neq j$ ).

Например, для дискриминанта  $D = -20 = 4 \cdot (-5)$ ,  $D_1 = -5$ ,  $h = 2$ . Выберем из каждого класса по представителю:  $f_0(x, y) = x^2 + 5y^2$  и  $f_1(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$ , где форма  $f_0(x, y)$  представляет 1. Согласно теореме 1 количество представлений натуральных чисел вида  $m = 5^\alpha \cdot m'$  ( $5 \nmid m'$ ) для данных форм вычисляется по формулам

$$r(f_0, m) = \left(1 + \left(\frac{m'}{5}\right)\right)\rho(m), \quad r(f_1, m) = \left(1 - \left(\frac{m'}{5}\right)\right)\rho(m).$$

**3. Трехклассные формы.** Рассмотрим случай трех классов бинарных квадратичных форм  $C_0, C_1, C_2$ , где формы класса  $C_0$  представляют 1. Группа классов форм является циклической:  $C_i \cdot C_j = C_{i+j \pmod{3}}$ . Характеры  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$  этой группы имеют вид:  $\kappa_i(C_j) = \varepsilon^{i+j}$ , где  $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  — примитивный корень третьей степени из 1. Для дискриминанта  $D_1$  с числом классов  $h = 3$  на основе метода Журавлева В. Г. [4] получен следующий результат.

Теорема 2. Для  $r(f_i, m)$   $i = 0, 1, 2$  имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} r(f_0, m) &= \frac{2}{3}(\widehat{\kappa}_0(m) + 2\widehat{\kappa}_1(m)), \\ r(f_1, m) &= r(f_2, m) = \frac{2}{3}(\widehat{\kappa}_0(m) - \widehat{\kappa}_1(m)), \end{aligned}$$

где формы  $f_1$  и  $f_2$  несобственно эквивалентны,  $\widehat{\kappa}_i(m)$  — мультипликативные функции, определяемые формулами

$$\widehat{\kappa}_0(m) = \rho(m) = \sum_{\delta|m} \chi_1(\delta),$$

$$\widehat{\kappa}_1(p^\alpha) = \rho(p^\alpha) \text{ для } \chi_1(p) = -1, 0 \text{ или } \chi_1(p) = +1 \text{ и } \kappa_1(p) = +1,$$

$$\widehat{\kappa}_1(p^\alpha) = \varepsilon(\alpha) \text{ для } \chi_1(p) = +1 \text{ и } \kappa_1(p) \neq +1.$$

В последней формуле  $\varepsilon(\alpha)$  равно 1,  $-1$  или 0 для  $\alpha \equiv 0, 1$  или 2 (mod 3).

Наименьшим  $d$ , для которого  $h = 3$  является  $d = 23$ . Для него выберем формы из различных классов:  $f_0(x, y) = x^2 + 2xy + 6y^2$ ,  $f_1(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2$  и  $f_2(x, y) = 2x^2 - xy + 3y^2$ . Согласно теореме 2 количество представлений находится по формулам:

$$\begin{cases} r(f_0, p_0^\alpha q_0^\beta) = 2(\alpha + 1)(\beta + 1), \\ r(f_i, p_0^\alpha q_0^\beta) = 0 \quad (i = 1, 2); \\ \begin{cases} r(f_0, p_0^\alpha p_1^\beta) = \frac{2}{3}(\alpha + 1)(\beta + 1 + 2\varepsilon(\beta)), \\ r(f_i, p_0^\alpha p_1^\beta) = \frac{2}{3}(\alpha + 1)(\beta + 1 - \varepsilon(\beta)) \quad (i = 1, 2); \end{cases} \\ \begin{cases} r(f_0, p_1^\alpha q_1^\beta) = \frac{2}{3}((\alpha + 1)(\beta + 1) + 2\varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)), \\ r(f_i, p_1^\alpha q_1^\beta) = \frac{2}{3}(\alpha + 1)(\beta + 1 - \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)) \quad (i = 1, 2), \end{cases} \end{cases}$$

где  $p_0, q_0$  — простые числа, для которых характер Дирихле равен  $+1$  и уравнение  $f_0(x, y) = p$  разрешимо в целых  $x$  и  $y$ , для  $p_1, q_1$  это уравнение неразрешимо.

- [1] DICSON L. E. History of the theory of numbers vol.3, Quadratic and higher forms N.Y. 1992, p. 313
- [2] БОРЕВИЧ З. И., ШАФАРЕВИЧ И. Р. Теория чисел М.: Наука, 1984. с. 504.
- [3] BUEL D. A. Binary Quadratic Forms, Classical Theory and Modern Computations, N. Y., 1989, p. 247
- [4] ЖУРАВЛЕВ В. Г. Элементарная теория Гекке. Владимир: ВГПИ, 1988, с. 28.

УДК 519.2

## Применение анализа чувствительности в теории запасов

**К. Н. Егоров, А. И. Тимофеев**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**Введение.** Анализ чувствительности (Sensitivity Analysis) — это эф-

фактивный метод исследования математических моделей, который позволяет ответить на вопрос, как полученная модель зависит от входных параметров. Этот вопрос важен, поскольку параметры — величины, полученные в результате физических измерений и статистической обработки данных, в процессе которых возникают ошибки. Это означает, что реальное значение параметра содержится в некотором интервале. Можно было бы повысить точность при вычислении всех параметров, однако этот процесс потребует определенных затрат. Так вот, анализ чувствительности позволяет понять, какой параметр математической модели нам следует вычислить наиболее точно, чтобы минимизировать флуктуации итогового значения.

**1. Теория анализа чувствительности.** Пусть математическая модель описывается функцией  $Y = f(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор входных параметров, являющихся независимыми случайными величинами с функциями распределения  $F_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Справедлив следующий аналог теоремы Соболя [1]:

**Теорема 1.** Для любой интегрируемой в  $\mathbb{R}^n$  функции  $f(\mathbf{x})$  существует единственное разложение

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

где слагаемые обладают следующими свойствами:

$$1^0 \int_{-\infty}^{\infty} f_{i,j,\dots,k,\dots,m} dF_k = 0,$$

$$2^0 f_0 — постоянная, f_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) dF, \text{ где } dF = dF_1 \cdot \dots \cdot dF_n,$$

$$3^0 \text{ если } (i, j, \dots, m) \neq (k, l, \dots, p), \text{ то } \int_{\mathbb{R}^n} f_{i,j,\dots,m} f_{k,l,\dots,p} dF = 0.$$

Зададим для случайных величин  $f(\mathbf{x})$  и  $f_{i_1\dots i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$  дисперсии  $V[Y] = \int_{\mathbb{R}^n} f^2(\mathbf{x}) dF - f_0^2$  и  $V_{i_1,\dots,i_s} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{i_1\dots i_s}^2 dF_{i_1} \dots dF_{i_s}$ , соответственно называемые общей и частичной. Возведя в квадрат (1) и проинтегрировав по  $\mathbb{R}^n$ , получаем истинность следующего разложения

$$V[Y] = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{i,j} + \dots + V_{1,2,\dots,n}. \quad (2)$$

**Определение.** Коэффициентом чувствительности GI (Global Importance) параметра  $x_i$  называют отношение всех частичных дисперсий, содержащих  $i$ , к общей дисперсии

$$GI(x_i) = \frac{V_i + \sum_{j \neq i} V_{i,j} + \dots + V_{1,2,\dots,n}}{V[Y]}. \quad (3)$$

**2. Аналитический пример.** Рассмотрим формулу Уилсона–Харриса (Wilson–Harris Turnover Formula), с помощью которой можно производить расчет оптимального размера заказа:

$$Q^* = f(\mathbf{x}) = \sqrt{2}x_1^{p_1}x_2^{p_2}x_3^{p_3}, \quad p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad (4)$$

где  $x_1$  задает стоимость подачи заказа,  $x_2$  — интенсивность потребления продукции,  $x_3$  — стоимость единицы запаса.

В результате вычислений слагаемые разложения (2) равны

$$V[Q^*] = 2 \left( E[x_1^{2p_1}]E[x_2^{2p_2}]E[x_3^{2p_3}] - (E[x_1^{p_1}]E[x_2^{p_2}]E[x_3^{p_3}])^2 \right)$$

$$V_s = 2 \left( \prod_{j \neq s} E[x_j^{p_j}] \right)^2 V[x_s^{p_s}],$$

$$V_{s,r} = 2E[x_k^{p_k}]^2 V[x_r^{p_r}]V[x_s^{p_s}], \quad k \neq r, s$$

$$V_{1,2,3} = V_x[Q^*] - \sum_i^3 V_i - V_{1,2} - V_{1,3} - V_{2,3}.$$

Рассмотрим теперь два вида распределения  $x_i$ : равномерное и гамма.

**Теорема 2.** Пусть  $x_i \stackrel{d}{=} U[a_i(1-k), a_i(1+k)]$ , где  $k \in (0; 1)$ . Тогда

- 1) коэффициенты чувствительности зависят только от степени отклонения от среднего значения  $k$ ,
- 2)  $GI(x_1) = GI(x_2)$ ,
- 3) параметр  $x_3$  наиболее чувствительный.

Для иллюстрации приведём график (рис. 1) зависимости коэффициентов  $GI(x_i)$ ,  $i = 1, 3$ , от  $k$  ( $GI(x_1)$  изображён пунктирной линией, а  $GI(x_3)$  — сплошной).

**Теорема 3.** Пусть

$$x_i \stackrel{d}{=} \Gamma \left[ \frac{1}{k^2}, \frac{1}{a_i k^2} \right], k \in (0, 1),$$

тогда будет верно утверждение теоремы 2.

Параметры подобраны так, что  $E x_i = a_i$ ,  $V x_i = (a_i k)^2$ .

**3. Численный метод получения оценки чувствительности.** Во многих случаях невозможно подсчитать коэффициенты чувствительности аналитически. Для этого был специально разработан численный метод FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test). Он позволяет вычислять оценки для частичных дисперсий первого порядка. Подробнее об этом методе можно прочитать в [2] и [3].

В некоторых случаях мы можем воспользоваться упрощенным вариантом этого метода. Предположим, что каждое  $x_i(s) = G_i(\sin \omega_i s)$ , то

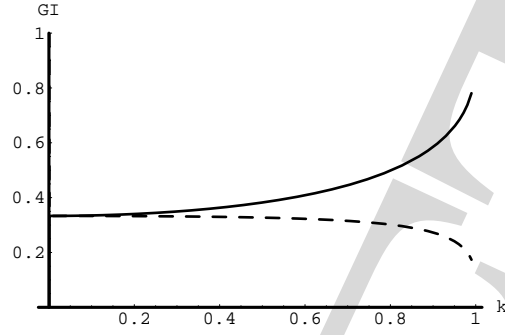


Рис. 1.

есть, что каждый параметр совершает колебания с некоторой своей частотой  $\omega_i$ . Функции  $G_i$  выбираются из предположения, что все параметры распределены равномерно в кубе  $K^n = \{x \mid 0 \leq x_i \leq 1; i = \overline{1, n}\}$ . Наиболее приемлемой для равномерно распределенных случайных величин является функция

$$x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin \omega_i s). \quad (5)$$

Подставив это представление  $x_i$  через  $s$  в функцию  $f(\mathbf{x})$  и построив график зависимости  $f(s)$ , мы увидим, что колебание с наибольшей амплитудой происходит на гармониках наиболее чувствительного параметра.

Используем теперь метод FAST в нашей модели и проверим, совпадет ли наш предыдущий аналитический вывод с тем, что даёт FAST.

*Лемма. При использовании метода FAST для определения наиболее чувствительного параметра в формуле Уилсона–Харриса, результат совпадает с результатом теоремы 2.*

*Доказательство.* Подставим в формулу (4) представление  $x_i$  в виде (5) и получим

$$Q^*(s) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin \omega_1 s))(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin \omega_2 s))}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin \omega_3 s)}}. \quad (6)$$

Откуда сразу видно, что при  $s = \frac{3\pi + 4\pi k}{2\omega_3}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  знаменатель обращается в нуль, и амплитуда стремится к бесконечности. Из этого можно сделать вывод, что параметр  $x_3$  наиболее чувствительный.

На графике (рис. 2) это будет выглядеть следующим образом



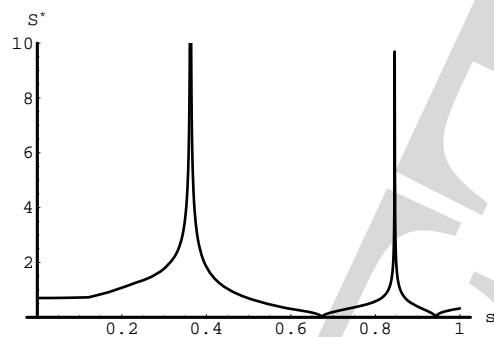


Рис. 2.

- [1] СОБОЛЬ И. М. Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей., *Математическое моделирование* — 1990. — **2**, № 1. — 112–118.
- [2] CUKIER R.I., LEVINE H.B., SHULER K.E. Nonlinear Sensitivity Analysis of Multiparameter Model Systems., *Journal of Computational Physics* — 1978. — **26**, № 1. — 1–42.
- [3] SALTELLI A., TARANTOLA S., CHAN K.P.-S. A Quantitative Model-Independent Method for Global Sensitivity Analysis of Model Output., *Technometrics* — 1999. — **41**, № 1. — 39–56.

УДК 517.44

### **Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в кусочно-однородной области**

**Т. В. Елисеева**

*Пензенский государственный университет*

В работе показано применение метода операторов преобразования и метода Винера–Хопфа для решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в кусочно-однородной полуплоскости.

Рассмотрим задачу нахождения ограниченного решения двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

в правой полуплоскости с линией сопряжения

$$D_1^+ = \{(x, y) : x \in (0, l) \cup (l, \infty); y \in (-\infty, \infty)\},$$

удовлетворяющего граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= e^{-ay} (a > 0) \quad \text{при } y > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= C e^{by} (b > 0) \quad \text{при } y < 0; \\ u(x, y) &\rightarrow 0, \quad \text{когда } x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u_-(l, y) &= u_+(l, y), \\ k \frac{\partial u_-}{\partial x}(l, y) &= \frac{\partial u_+}{\partial x}(l, y), \quad k > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u_-(l, y)$ ,  $u_+(l, y)$ ,  $\frac{\partial u_-}{\partial x}(l, y)$ ,  $\frac{\partial u_+}{\partial x}(l, y)$  — предельные значения функции  $u = u(x, y)$  и ее производных при  $x = l$  слева и справа соответственно.

Положим

$$u(0, y) = f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g(y),$$

где

$$f(y) = \begin{cases} e^{-ay} (y > 0), \\ f_-(y) (y < 0), \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} g_+(y) (y > 0), \\ C e^{by} (y < 0). \end{cases}$$

Представление для функции  $u = u(x, y)$  имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{1+k}{2k} \hat{u}(x, y) + \frac{k-1}{2k} \hat{u}(2l-x, y), & 0 < x < l, \\ \hat{u}(x, y), & x > l, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\hat{u} = \hat{u}(x, y)$  — решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в однородной полуплоскости:

требуется найти ограниченное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0$$

в правой полуплоскости  $D^+ = \{(x, y) : x \in (0, \infty); y \in (-\infty, \infty)\}$  по граничным условиям:

$$\begin{aligned} \hat{u}(0, y) + \frac{k-1}{k+1} \hat{u}(2l, y) &= \frac{2k}{k+1} f(y), \quad y > 0, \\ \hat{u}'_x(0, y) - \frac{k-1}{k+1} \hat{u}'_x(2l, y) &= \frac{2k}{k+1} g(y), \quad y < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решим сначала эту вспомогательную задачу. Применим преобразование Фурье по  $y$ .

$$\begin{aligned}\hat{U}(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda y} \hat{u}(x, y) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-i\lambda y} \hat{u}(x, y) dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-i\lambda y} \hat{u}(x, y) dy = \\ &= \hat{U}_-(x, \lambda) + \hat{U}_+(x, \lambda),\end{aligned}$$

где  $\hat{U}(x, \lambda)$  удовлетворяет уравнению

$$-\lambda^2 \hat{U}(x, \lambda) + \hat{U}_{xx}''(x, \lambda) = 0.$$

Решением уравнения является функция

$$\hat{U}(x, \lambda) = A(\lambda) e^{-|\lambda|x}.$$

Для того, чтобы продолжить функцию  $\hat{U}(x, \lambda)$  на комплексную плоскость  $\lambda$ , заменим для вещественных  $\lambda$  функцию  $|\lambda|$  на  $\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}$ . Корень определен как  $\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} \rightarrow +\lambda$  при  $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow +\infty$ . После вычисления устремим  $\alpha$  к нулю.  $\hat{U}_-(x, \lambda)$ ,  $\hat{U}_+(x, \lambda)$  — функции, аналитические в нижней и верхней полуплоскостях, соответственно.

Применим к функции  $\hat{U}(x, \lambda)$  обратное преобразование Фурье

$$\hat{u}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y} A(\lambda) e^{-x\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}} d\lambda. \quad (6)$$

Учитывая граничные условия (5), запишем равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{k+1}{2k} + \frac{k-1}{2k} e^{-2l\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}} \right) A(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = f(y), \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} e^{-2l\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}} \right) \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} A(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = -g(y). \quad (8)$$

Требуется найти функцию  $A(\lambda)$ , удовлетворяющую граничным условиям (7)–(8).

В образах Фурье равенства (7)–(8) примут вид

$$\left( \frac{k+1}{2k} + \frac{k-1}{2k} e^{-2l\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}} \right) A(\lambda) = F_-(\lambda) + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\lambda - ia}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\left( \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} e^{-2l\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}} \right) \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} A(\lambda) = \\ = -G_+(\lambda) + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{\lambda + ib},\end{aligned} \quad (10)$$

где  $F_-(\lambda)$  — образ Фурье функции  $f_-(y)$ , обращающейся в нуль при  $y > 0$ ,  $G_+(\lambda)$  — образ Фурье функции  $g_+(y)$ , обращающейся в нуль при  $y < 0$ . Из первого из этих равенств выразим  $A(\lambda)$  и подставим это выражение во второе равенство.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} e^{-2l\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}}{\frac{k+1}{2k} + \frac{k-1}{2k} e^{-2l\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}} \sqrt{\lambda^2+\alpha^2} \left( F_-(\lambda) + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\lambda-ia} \right) = \\ = -G_+(\lambda) + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{\lambda+ib}, \end{aligned}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) \sqrt{\lambda^2+\alpha^2} F_-(\lambda) + G_+(\lambda) = \\ = -\varphi(\lambda) \sqrt{\lambda^2+\alpha^2} \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\lambda-ia} + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{\lambda+ib}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\varphi(\lambda) = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} e^{-2l\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}}{1 + \frac{k-1}{k+1} e^{-2l\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}}.$$

Таким образом, получена краевая задача Римана [1].

Пусть  $F_-(\lambda)$  и  $G_+(\lambda)$  — решение краевой задачи (11). Учитывая равенства (9)–(10), найдем выражение для функции  $A(\lambda)$ .

$$A(\lambda) = \left( F_-(\lambda) + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\lambda-ia} \right) \frac{2k}{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1-k}{1+k} \right)^j e^{-2lj\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}, \quad (12)$$

$$A(\lambda) = \left( -G_+(\lambda) + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{\lambda+ib} \right) \frac{2k}{k+1} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{k-1}{k+1} \right)^j e^{-2lj\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}. \quad (13)$$

Подставим формулы (12), (13) в равенство (6).

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{k-1}{k+1} \right)^j \cdot \right. \\ \cdot \left( (-1)^j \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda y} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-i\lambda \xi} f_-(\xi) d\xi + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\lambda-ia} \right) e^{-(x+2lj)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}} d\lambda + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} e^{i\lambda y} \left( - \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda \xi} g_+(\xi) d\xi + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{\lambda+ib} \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}} e^{-(x+2lj)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}} d\lambda \right] \end{aligned}$$

В результате по формулам (4) найдем решение  $u = u(x, y)$  поставленной задачи (1)–(3).

9]

[1] ГАХОВ Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Физматгиз, 1977.

УДК 517. 983: 517. 987; 519. 21

**Функция вида  $u(t) = U(t)x + (U * f)(t)$   
как решение абстрактной задачи Коши  
с генератором полугруппы класса  $(1, A)$   
или  $K$ -конволюционной полугруппы.**

**С. В. Здобнова**

*Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова*

**1. Введение. Постановка задачи.** Рассмотрим в банаховом пространстве  $E$  неоднородную абстрактную задачу Коши:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), 0 < t < \tau \ (\tau \leq \infty), u(0) = x, \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t) - x\| = 0. \quad (1)$$

Если оператор  $A$  порождает полугруппу класса  $C_0$ ,  $x \in D(A)$ , функция  $f(t)$  непрерывно дифференцируема, то существует единственное решение  $u(t)$  задачи (1), как дифференцируемая на любом конечном промежутке в  $[0, +\infty)$ , функция, удовлетворяющая уравнению задачи на  $[0, +\infty)$  и условию  $u(0) = x$ ; при этом

$$u(t) = U(t)x + (U * f)(t), \quad (2)$$

здесь  $U(t)$  — оператор решения однородной задачи.

Далее, если нужно брать  $x = u(0)$  вне  $D(A)$  или не являющуюся гладкой функцию  $f(t)$ , то функция вида (2) рассматривается как решение в ином смысле, понятие решения расширяется.

В литературе встречаются следующие трактовки решения задачи Коши ( $x \in E$ ). Функция  $u(t)$ , удовлетворяющая уравнению

- $u'(t) = Au(t) + f(t)$  на  $(0, \tau)$ , непрерывная на  $[0, \tau)$  и непрерывно дифференцируемая на  $(0, \tau)$ , называется (ослабленным) решением;
- $\frac{d}{dt} \langle u(t), y \rangle = \langle u(t), A^* y \rangle + \langle f(t), y \rangle, y \in D(A^*), t \in (0, \tau)$ , если  $\lim_{t \rightarrow 0} \langle u(t), y \rangle = \langle x, y \rangle$ , называется слабым решением;

- $-\langle u, \varphi' \rangle - A\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle x$ ,  $\varphi \in \Phi$ ,  $\Phi$  — некоторое пространство основных функций, называется *обобщенным решением задачи Коши*;
- $\langle u(t), y \rangle = \langle x, y \rangle + \int_0^t \langle u(s), A^* y \rangle ds + \int_0^t \langle f(s), y \rangle ds$ ,  $y \in D(A^*)$ , на  $[0, \tau]$ , называется *слабым интегральным решением*;
- $u(t) = x + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds$ ,  $t \in [0, \tau]$ , называется *проинтегрированным решением*;
- $\langle u(t), y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \int_0^t u(s) ds, A^* y \rangle + \int_0^t \langle f(s) ds, y \rangle$ ,  $y \in D(A^*)$ , на  $[0, \tau]$ , называется *слабым проинтегрированным решением*.

Каждое, из перечисленных решений при определенных условиях на неоднородность может быть записано формулой (2). Для единственности решения на функцию  $u(t)$  накладывают дополнительные ограничения.

Мы «ухудшаем» свойства оператора  $A$  задачи (1): теперь оператор порождает полугруппу класса  $(1, A)$  или  $K$ -конволюционную полугруппу. Нас интересует трактовка функции (2) как решения задачи ( $x \in E$ ), в том числе и стохастической.

**2. Задача с генератором полугруппы класса  $(1, A)$ .** Пусть оператор  $A$  является генератором полугруппы  $S = \{S(t) | t \geq 0\}$  класса  $(1, A)$ . По свойствам таких полугрупп ([1]) для  $x \in E$ ,  $t \geq 0$ , справедливо равенство:  $A \int_0^t S(s)x ds = S(t)x - x$ , то есть операторы  $S(t)$  являются операторами проинтегрированного решения однородной задачи в смысле определений первого параграфа.

Пусть далее  $f \in C([0, +\infty); E)$ . Благодаря свойствам полугруппы класса  $(1, A)$  и ее генератора, удастся доказать, что свертка  $\int_0^t S(t-s)f(s) ds$  удовлетворяет уравнению  $u(t) = A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** Пусть оператор  $A$  является генератором полугруппы  $S$  класса  $(1, A)$ . Тогда функция

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s) ds,$$

где  $f \in C([0, +\infty); E)$ ,  $x \in E$ , является решением уравнения

$$u(t) = x + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Из теоремы следует, что функцией вида (2) задается проинтегрированное решение задачи Коши с генератором полугруппы класса  $(1, A)$ .

Теперь рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с заданной на нем фильтрацией  $\{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$ ,  $U, H$  — (сепарабельные) гильбертовы пространства. Чтобы придать стохастическому уравнению

$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BW(t)$ ,  $t > 0$ , точный смысл, интегрируем его формально, и считая белый шум  $W(t)$  обобщенной производной  $Q$ -винеровского процесса  $W(t)$ , запишем стохастическую задачу в виде уравнения

$$X(t) = \xi + \int_0^t AX(s) ds + BW(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ ,  $B \in L(U; H)$ ,  $W(t)$  —  $Q$ -винеровский процесс относительно фильтрации,  $\xi = X(0)$  —  $H$ -значная,  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина.

**Лемма 1.** Пусть  $S$  — полугруппа операторов в  $H$  класса  $(1, A)$  и  $\int_0^T \|S(r)B\|_{GS^0}^2 dr < \infty$ , где  $\|S(r)B\|_{GS^0}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|S(r)BQ^{\frac{1}{2}}e_j\|^2$ ,  $\{e_j\}$  — ортонормированный базис в  $U$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , тогда стохастическая свертка  $W_A = \{W_A(t) = \int_0^t S(t-s)B dW(s) | t \geq 0\}$  корректно определена.

Действительно, в условиях леммы процесс  $\{S(t-s)B | 0 \leq s \leq t\}$ ,  $t > 0$ , оказывается  $L(U; H)$ -значным предсказуемым, удовлетворяющим условию  $E \int_0^t \|S(t-s)B\|_{GS^0}^2 ds < \infty$ , откуда и следует ([?]) существование интеграла, определяющего свертку.

Кроме того, стохастическая свертка является среднеквадратически непрерывным процессом, имеющим предсказуемые версии. Убедившись, что свертка  $P_{п.н}$  удовлетворяет уравнению  $\langle X(t), y \rangle = \langle \int_0^t X(s) ds, A^*y \rangle + \langle BW(t), y \rangle$ ,  $y \in D(A^*)$ ,  $t \geq 0$ , получаем справедливость следующей теоремы.

**Теорема 2.** В условиях леммы 1 случайный процесс

$$X(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)B dW(s), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

для любого  $y \in D(A^*)$  потраекторно  $P_{п.н}$  удовлетворяет уравнению

$$\langle X(t), y \rangle = \langle \xi, y \rangle + \langle \int_0^t X(s) ds, A^*y \rangle + \langle BW(t), y \rangle, \quad t \geq 0.$$

Итак, функция вида (2) задает слабое проинтегрированное решение стохастической задачи (3) с генератором полугруппы класса  $(1, A)$ . Более того, процесс (4) предсказуем, и удалось доказать единственность предсказуемого слабого проинтегрированного решения в условиях леммы 1. Значит, функция вида (2) задает единственное предсказуемое слабое проинтегрированное решение стохастической задачи (3) с генератором полугруппы класса  $(1, A)$ .

**3. Задача с оператором, порождающим  $K$ -конволюционную полугруппу.** Пусть теперь оператор  $A$  порождает  $K$ -конволюционную полугруппу  $S_K = \{S_K(t) | t \in [0, \tau)\}$ ,  $\tau < \infty$ . По определению таких полугрупп ([2]) для каждого  $x \in E$  и  $t \in [0, \tau)$  верно равенство:

$$A \int_0^t S_K(s)x ds = S_K(t)x - \int_0^t K(s)x ds.$$

Таким образом, операторы  $S_K(t)$  являются операторами проинтегрированного решения следующей задачи:

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + K(t)x, \quad 0 < t < \tau, \quad v(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|v(t)\| = 0,$$

которую по отношению к задаче (1) с  $f(t) \equiv 0$  называют  $K$ -конволюционной.

Теорема 3. Пусть оператор  $A$  порождает  $K$ -конволюционную полугруппу  $S_K$ . Тогда функция

$$v(t) = S_K(t)x + \int_0^t S_K(t-s)f(s) ds,$$

где  $f \in C([0, \tau]; E)$ ,  $x \in E$ , является решением уравнения

$$v(t) = A \int_0^t v(s) ds + \int_0^t K(s)x ds + \int_0^t \int_0^{t-s} K(r) dr f(s) ds. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) будем называть *проинтегрированным  $K$ -конволюционным решением* задачи (1). Таким образом, для задачи с оператором  $A$ , порождающим  $K$ -конволюционную полугруппу, функция вида (2) является проинтегрированным  $K$ -конволюционным решением.

Теперь рассмотрим обобщенную функцию  $u(t)$ , являющуюся решением задачи в обобщенном смысле:

$$-\langle u, \varphi' \rangle - A\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle x, \quad \varphi \in \Phi, \quad (6)$$

где  $\Phi$  — пространство основных функций, а оператор  $A$  рассматривается в банаховом пространстве  $[D(A)]$ , это замыкание  $D(A)$  по граф-норме оператора  $A : \|x\|_A = \|x\|_E + \|Ax\|_E$ , с нормой  $\|x\|_{[D(A)]} = \|x\|_A$ , оператор в этом пространстве ограничен. С использованием функции  $G \in \Phi'(L([D(A)]; E))$ :  $\langle G, \varphi \rangle = \langle \delta', \varphi \rangle I - \langle \delta, \varphi \rangle A$ , где  $\delta \in \Phi'(\mathbb{R})$  — дельта-функция, уравнение (6) записывается в виде ([4, 5]):

$$\langle G * u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle x. \quad (7)$$

Операторами обобщенного решения однородной задачи в этом случае являются ([4, 5]) обобщенные операторы  $P(\frac{d}{dt})S_K(t)$  в соответствующем пространстве ультрараспределений  $\Phi'_{ult}$ , где  $P(\frac{d}{dt})$  — такой ультрадифференциальный оператор, что обобщенная функция  $K$  является решением обобщенного уравнения

$$\langle P(\frac{d}{dt})K, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \Phi'_{ult}, \quad \delta \in \Phi'_{ult}(\mathbb{R}).$$



Теорема 4. Пусть оператор  $A$  порождает  $K$ -конволюционную полу-  
группу  $S_K$ , тогда ультрараспределение

$$\mathbf{u} = P(d/dt)S_K x + P(d/dt)S_K * \mathbf{f}$$

является обобщенным решением задачи Коши в пространстве ультра-  
распределений.

*Доказательство.* Распределение  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{U}x$  удовлетворяет уравнению  $\langle G * \bar{\mathbf{u}}, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle x$ . Покажем, что распределение  $\mathbf{u}^* = \mathbf{U} * f = P(\frac{d}{dt})S_K * \mathbf{f}$  удовлетворяет уравнению  $\langle G * \mathbf{u}^*, \varphi \rangle = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle$ .

Свертка двух обобщенных функций корректно определена, так как функция  $\mathbf{U}$  является свертывателем в пространстве ультрадифференцируемых функций ([3]), при этом значения свертки на основных функциях принадлежат  $[D(A)]$ :

$$\mathbf{U} * \mathbf{f}: \Phi'(L(E; [D(A)])) \times \Phi'(E) \rightarrow [D(A)].$$

Далее, используя ассоциативность свертки, получаем:

$$\langle G * (\mathbf{U} * \mathbf{f}), \varphi \rangle = \langle (G * \mathbf{U}) * \mathbf{f}, \varphi \rangle = \langle \delta \otimes I * \mathbf{f}, \varphi \rangle = \langle \mathbf{f}, \delta \otimes I * \varphi \rangle = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle.$$

Таким образом, ультрараспределение  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^* = P(d/dt)S_K x + P(d/dt)S_K * \mathbf{f}$  является решением уравнения (7).

Итак, функция вида (2) задает обобщенное решение задачи с оператором, порождающим  $K$ -конволюционную полу-группу.

Вернемся к рассмотрению стохастической задачи (3).

Лемма 2. Пусть  $S_K$  —  $K$ -конволюционная полу-группа операторов в  $H$  и  $\int_0^T \|S_K(t)B\|_{GS^0}^2 dt < \infty$ , где  $\|S_K(t)B\|_{GS^0}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|S_K(t)BQ^{\frac{1}{2}}e_j\|^2$ ,  $\{e_j\}$  — ортонормированный базис в  $U$ ,  $T < \tau$ , тогда  $K$ -конволюционная стохастическая свертка  $W_K = \{W_K(t) = \int_0^t S_K(t-s)B dW(s) \mid t \in [0, \tau]\}$  корректно определена.

Свертка  $W_K$  также имеет предсказуемые версии.

Теорема 5. В условиях леммы 2 процесс

$$X(t) = S_K(t)\xi + \int_0^t S_K(t-s)B dW(s), \quad t \in [0, \tau],$$

для любого  $y \in D(A^*)$  потраекторно  $P_{\Pi, H}$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \langle X(t), y \rangle = & \langle \int_0^t K(s)\xi ds, y \rangle + \langle \int_0^t X(s) ds, A^* y \rangle + \\ & + \langle \int_0^t \int_0^{t-r} K(s)dsB dW(r), y \rangle, \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

---

Процесс, заданный формулой вида (2) является слабым проинтегрированным К-конволюционным решением задачи (3). Требуя от решения предсказуемость, получаем и единственность.

- [1] ХИЛЛЕ Э., ФИЛЛИПС Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: изд-во иностр. лит-ры, 1962.
- [2] CIORANESCU I. Local convoluted semigroups. *Lecture Notes in Pure and Applied Math. Evolution Equations (Baton Rouge, LA, 1992)*. — Marcel Dekker Inc., 1995. — **168**. — 107–122.
- [3] KOMATSU H. Ultradistributions, I. Structure theorems and characterization. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*. — 1973. — **20**, №1. — 25–106.
- [4] MELNIKOVA I. V. AND FILINKOV A. I. The Cauchy Problem: three approaches. — Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — London, New York: Chapman & Hall, 2001. — **120**.
- [5] MELNIKOVA I. V. Regularized Solutions to Cauchy Problems Well-Posed in the Extended Sense. *Integral Transforms and Special Functions* — Taylor & Francis Group, 2006. — №4. — 1–7.
- [6] DA PRATO G., ZABCZYK J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. — Encycl. Math. and Appl.— Pisa-Warsaw, 1992. — **44**.

УДК 510.5

## Мониторинг вычислительных процессов

**Н. А. Земцов**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

В данной работе рассматривается формальная модель мониторинга вычислительных процессов. Приводятся необходимые и достаточные условия полноты языка, получающегося при отображении траекторий вычислительного процесса в слова некоторого конечного алфавита. В конце работы приведен пример вычислительного процесса и проекции, дающих полный язык.

**1. Определения.** *Вычислительный процесс* — это пара  $\langle \Omega, \tau \rangle$ , где  $\Omega$  — непустое множество состояний,  $\tau \subset \Omega \times \Omega$  — отношение перехода. Везде ниже полагаем, что  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Однако, полученные результаты имеют место и для  $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^u \times \mathbb{R}^v \times \mathbb{F}^w$ , где  $\mathbb{F}$  — некоторое конечное множество.

*Состояние* вычислительного процесса — это некоторый элемент  $x \in \Omega$ . Состояние в момент времени  $t$  будем обозначать  $s_t$ .

Отношение перехода  $\tau$  связывает состояния в соседние моменты времени. Так, если возможен переход вычислительного процесса из состояния  $x$  в состояние  $y$  за один шаг, то пишем  $\tau(x, y)$ . Обозначим  $Dom(\tau)$  — множество всех  $x \in \Omega$ , для каждого из которых существует  $y \in \Omega$ , такой что  $\tau(x, y)$ .  $Im(\tau)$  — множество всех  $y \in \Omega$ , для каждого из которых существует  $x \in \Omega$ , такой что  $\tau(x, y)$ .

Вычислительный процесс называется *детерминированным*, если для каждого  $x \in Dom(\tau)$  существует единственный  $y \in \Omega$ , такой что  $\tau(x, y)$ . В этом случае будем пользоваться более наглядным обозначением  $\tau(x) = y$ .

Вычислительный процесс называется *недетерминированным*, если он не является детерминированным. То есть существует  $x \in Dom(\tau)$ , такой что множество  $\{y | \tau(x, y)\}$  состоит более, чем из одного элемента. Недетерминированный процесс отличается наличием состояний, из которых он может произвольно переходить в любое состояние из некоторого множества.

*Траекторией* вычислительного процесса  $\langle \Omega, \tau \rangle$  будем называть последовательность состояний  $s = (s_0, \dots, s_l)$ , где  $\tau(s_{t-1}, s_t)$  для  $t = 1, \dots, l$  (см. [3]).

Пусть дан вычислительный процесс  $\langle \Omega, \tau \rangle$  и некоторый непустой конечный алфавит  $A$ . Тогда любое отображение  $\pi : \Omega \rightarrow A$  задает язык  $L(\Omega, \tau, \pi)$ , состоящий из слов вида  $\pi(s) = \pi(s_0) \dots \pi(s_l)$ , где  $s$  пробегает все множество траекторий для  $\langle \Omega, \tau \rangle$ . Будем называть язык  $L(\Omega, \tau, \pi)$  *полным*, если выполняется равенство  $L(\Omega, \tau, \pi) = A^*$ .

Интуитивно  $A$  является множеством наблюдаемых состояний системы (значений индикаторов),  $\pi$  — соответствие между состояниями процесса и значениями индикаторов. Язык  $L(\Omega, \tau, \pi)$  описывает все варианты наблюдаемой динамики системы.

**2. Постановка задачи.** Пусть дан вычислительный процесс  $\langle \Omega, \tau \rangle$ , некоторый непустой конечный алфавит  $A = \{1, \dots, p\}$  и отображение  $\pi : \Omega \rightarrow A$ . Целью нашего исследования является изучение свойств языка  $L(\Omega, \tau, \pi)$  при различных значениях параметров  $\Omega, \tau$  и  $\pi$ .

Пусть  $A = \{1, \dots, p\}$  и  $A^*$  обозначает множество всех слов в алфавите  $A$ .

В данной работе наша цель состоит в том, чтобы найти естественные условия на  $\Omega, \tau$  и  $\pi$ , при которых порождаемый язык полный, т. е. выполняется равенство

$$L(\Omega, \tau, \pi) = A^*.$$

С интуитивной точки зрения этот случай соответствует монитору с максимальной информативностью, поскольку выполнение этого равенства

означает, что любая последовательность соответствует какому-то вычислению (см. также [1, 2, 4]).

### 3. Необходимые и достаточные условия полноты языка $L(\Omega, \tau, \pi)$ .

**Теорема 1.** Если существуют  $v_1, \dots, v_p \in \Omega$ , такие, что  $v_i \neq v_j$  при  $i \neq j$  и для каждой пары  $i, j \in A$  выполнено  $(v_i, v_j) \in \tau$ , тогда существует проекция  $\pi$ , при которой порождаемый язык полный.

*Доказательство.* Построим требуемую проекцию. Положим  $\pi(v_i) = i$  для  $i \in A$  и  $\pi(s) = 1$  для  $s \in \Omega \setminus \{v_1, \dots, v_p\}$ . Тогда для любого слова  $w \in A^*$  существует траектория  $c \in \langle \Omega, \tau \rangle$ , такая, что  $\pi(c) = w$ .

Докажем индукцией по длине слова.

**Базис индукции.** Для слов длины  $|w| = 1$  выполнено  $\exists i \in A : w = i$ . Тогда траектория  $c = (v_i)$  — искомая.

**Шаг индукции.** Пусть для слов длины  $k$  утверждение верно. Рассмотрим слово  $w$  длины  $k + 1$ . Тогда  $w = w'i$ , где  $|w'| = k$  и  $i \in A$ . Пусть  $c'$  — траектория, порождающая  $w'$ . Слово  $w'$  оканчивается на некоторую букву  $j \in A$ . Так как по условию пара  $(v_j, v_i) \in \tau$ , траектория  $c = c' + (i)$  — искомая.  $\square$

**Теорема 2.** Если  $\tau$  детерминированно и  $\Omega$  конечно, то порождаемый язык не полный.

*Доказательство.* Пусть  $|\Omega| = m$ , тогда различных слов длины  $m$ , порождаемых тройкой  $\langle \Omega, \tau, \pi \rangle$ , будет не более  $m$ . Всех слов длины  $m - p^m$ .  $\square$

**Теорема 3.** Если для всех  $i \in A$  множество  $\tau(\pi^{-1}(i))$  совпадает с  $\Omega$ , и для любого подмножества  $S \subseteq \Omega$  имеет место  $\tau^{-1}(S) \neq \emptyset$ , тогда  $L(\Omega, \tau, \pi) = A^*$ .

*Доказательство.* Индукция по длине слова.

**Базис индукции.** Для любого слова длины 1 существует множество  $\Omega_i = \pi^{-1}(i)$ , такое что  $x \in \Omega_i \Rightarrow \pi(x) = i$ .

**Шаг индукции.** Допустим, для  $n = k$  верно утверждение: для любого слова  $w$  длины  $k$  ( $w \in A^k$ ) существует множество  $J_w$ , т. ч. траектория процесса с любым элементом из этого множества в качестве начального, будет иметь начальный отрезок длины  $k$ , совпадающий с данным словом  $w$ :

$$x \in J_w \Rightarrow (\pi(x), \pi(\tau(x)), \dots, \pi(\tau^{k-1}(x))) = w.$$

Докажем, что утверждение верно для слов длины  $k + 1$ . Пусть  $w \in A^{k+1}$ . Тогда  $w = iw'$ , где  $i \in A$ ,  $w' \in A^k$ .

По предположению индукции, для  $w'$  существует множество  $J_{w'}$ :

$$x \in J_{w'} \Rightarrow (\pi(x), \pi(\tau(x)), \dots, \pi(\tau^{k-1}(x))) = w'.$$

По условию теоремы,  $J_{w'} \cap \tau(\Omega_i) = J_{w'} \neq \emptyset$ . Рассмотрим  $J = \tau^{-1}(J_{w'})$ . Тогда по условию  $J \cap \Omega \neq \emptyset$  — искомое множество.

Приведенные рассуждения верны для каждого слова  $w' \in A^k$  и  $i \in A$ , что делает верным индуктивный переход.  $\square$

Множество  $J \subseteq \Omega$  называется *порождающим* слово  $w \in A^k$ , если

- 1) для всех  $x \in J$  выполняется  $\pi(x)\pi(\tau(x)) \dots \pi(\tau^{k-1}(x)) = w$ ,
- 2) если для некоторого  $x \in \Omega$ , выполнено  $\pi(x)\pi(\tau(x)) \dots \pi(\tau^{k-1}(x)) = w$ , то  $x \in J$ .

**Теорема 4.** Пусть задана мера  $\mu$  на  $\Omega$ , причем  $\mu(\Omega) > 0$ . Если выполнено:

- 1) для всех  $i \in A$  множество  $\tau(\pi^{-1}(i))$  почти всюду совпадает с  $\Omega$ ,
- 2) для любого подмножества  $S \subseteq \Omega$ , такого, что  $\mu(S) > 0$ , имеет место  $\mu(\tau^{-1}(S)) > 0$ ,

тогда  $L(\Omega, \tau, \pi) = A^*$ .

*Доказательство.* Докажем, что для любого слова существует порождающее его множество положительной меры. Доказательство проводится индукцией по длине слова.

**Базис индукции.** Для любого слова длины 1 существует множество  $\Omega_i = \pi^{-1}(i)$ , такое что  $x \in \Omega_i \Rightarrow \pi(x) = i$ . По условию,  $\tau(\Omega_i)$  почти всюду совпадает с  $\Omega$ , следовательно,  $\mu(\tau(\Omega_i)) > 0$ . Тогда  $\mu(\Omega_i) > 0$ .

**Шаг индукции.** Допустим, для  $n = k$  верно утверждение: для любого слова  $w$  длины  $k$  ( $w \in A^k$ ) существует множество  $J_w$  положительной меры, т. ч. траектория процесса с любым элементом из этого множества в качестве начального, будет иметь начальный отрезок длины  $k$ , совпадающий с данным словом  $w$ :

$$x \in J_w \Rightarrow (\pi(x), \pi(\tau(x)), \dots, \pi(\tau^{k-1}(x))) = w.$$

Докажем, что утверждение верно для слов длины  $k + 1$ . Пусть  $w \in A^{k+1}$ . Тогда  $w = iw'$ , где  $i \in A$ ,  $w' \in A^k$ .

По предположению индукции, для  $w'$  существует множество  $J_{w'}$  положительной меры, такое что

$$x \in J_{w'} \Rightarrow (\pi(x), \pi(\tau(x)), \dots, \pi(\tau^{k-1}(x))) = w'.$$

По условию теоремы,  $\mu(J_{w'} \cap \tau(\Omega_i)) = \mu(J_{w'}) > 0$ . Рассмотрим  $J = \tau^{-1}(J_{w'} \cap \tau(\Omega_i))$ . Тогда получаем  $\mu(J) > 0$  и, следовательно,  $J$  — искомое множество положительной меры.

Приведенные рассуждения верны для каждого слова  $w' \in A^k$  и  $i \in A$ , что делает верным индуктивный переход.  $\square$

**4. Пример процесса и проекции, дающих полный язык.** Рассмотрим процесс, для которого  $\Omega = [0, 1)$ , а функция перехода имеет следую-

щий вид:

$$\tau(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Зададим проекцию

$$\pi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Тогда любое конечное слово из  $\{0, 1\}^*$  может быть порождено данным вычислительным процессом при правильном выборе начальной точки.

Введем следующие множества:  $I_1^0 = [0, \frac{1}{2})$ ,  $I_2^0 = [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ,  $I_3^0 = [0, \frac{1}{8}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \cup [\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$ , ... И аналогичные для 1.

Данные множества обладают следующими свойствами:

- если  $x \in I_k^i$ , то  $\pi(\tau^{k-1}(x)) = i$  для  $i \in \{0, 1\}$ ,
- $I_p^i \cap I_q^j \neq \emptyset$  для  $i, j \in \{0, 1\}$  и  $p \neq q$ .

Пусть дано слово  $w = 001011$ . Рассмотрим множество  $I = I_6^0 \cap I_5^0 \cap I_4^1 \cap I_3^0 \cap I_2^1 \cap I_1^1$ .

Оно непусто и любой элемент  $x \in I$  будет порождать слово  $w$ .

Заметим, что приведенный пример удовлетворяет условию Теоремы 3. А именно,  $\tau([0, \frac{1}{2})) = [0, 1)$  и  $\tau([\frac{1}{2}, 1)) = [0, 1)$ . А также, по построению функции перехода, множество  $\tau^{-1}(S)$  непусто для любого подмножества  $S \subseteq \Omega$ , т. к. любая точка  $x \in [0, 1)$  имеет два прообраза  $\frac{x}{2}$  и  $\frac{1+x}{2}$ , принадлежащих  $[0, 1)$ .

- [1] VLADIMIR FILATOV AND ROSTISLAV YAVORSKIY. Scenario based analysis of linear computations. Proceedings of 12th International Workshop on Abstract State Machines ASM'05, March 8–11, 2005, Laboratory of Algorithmics, Complexity and Logic, University Paris 12 — Val de Marne, Creteil, France, pp. 167–174.
- [2] VLADIMIR FILATOV, NIKOLAY ZEMTSOV, AND ROSTISLAV YAVORSKIY. *Clusters of computations for a linear transition system*. Proceedings of European Conference on Complex Systems. Paris, 14–18 November 2005. P. 84.
- [3] YURI GUREVICH. *Abstract State Machines: An Overview of the Project*. in “Foundations of Information and Knowledge Systems” editors Dietmar Seipel and Jose Maria Turull-Torres. Springer Lecture Notes in Computer Science volume 2942 (2004), pages 6–13.
- [4] NIKOLAY ZEMTSOV. *Analysis of short-term process dynamics*. Proceedings of Fifth Winter Symposium on Chemometrics “Modern Methods of Data Analysis”. Russia, Samara, February 18–23, 2006. P. 23.

## Асимптотическое поведение времени поглощения

**Н. В. Карапетян, Д. А. Ярцева**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**1. Постановка задачи.** Пусть  $\{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^\infty, n \geq 1$  — независимые одинаково распределенные в каждой последовательности случайные величины, принимающие значения 1, 0,  $-1$  с вероятностями  $p_n, r_n, q_n$  соответственно. При каждом  $n$  введем случайное блуждание  $\{S_k^{(n)}\}$  следующим образом:  $S_k^{(n)} = x_n + \sum_{i=1}^k \xi_i^{(n)}$ .

Пусть  $\eta_{x_n}^{(n)} = \inf\{k : S_k^{(n)} = n\}$  — время поглощения в точке  $n$  в предположении, что в 0 отражающий экран, а  $\hat{\eta}_{x_n}^{(n)} = \inf\{k : S_k^{(n)} = 0 \text{ или } n\}$  — аналогичная случайная величина при двух поглощающих экранах.

В работе изучается предельное поведение времени поглощения, нормированного своим математическим ожиданием, в случае

$n \rightarrow \infty, r_n \rightarrow 1, \frac{x_n}{n} \rightarrow k, 0 < k < 1$ .

**2. Асимптотика математического ожидания.** Обозначим  $m_{x_n}^{(n)} = E\eta_{x_n}^{(n)}$ ,  $\hat{m}_{x_n}^{(n)} = E\hat{\eta}_{x_n}^{(n)}$ , тогда по формуле полного математического ожидания справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} m_{x_n}^{(n)} &= 1 + p_n m_{x_n+1}^{(n)} + r_n m_{x_n}^{(n)} + q_n m_{x_n-1}^{(n)}, \text{ при } 0 < x_n < n, \\ \hat{m}_{x_n}^{(n)} &= 1 + p_n \hat{m}_{x_n+1}^{(n)} + r_n \hat{m}_{x_n}^{(n)} + q_n \hat{m}_{x_n-1}^{(n)}, \text{ при } 0 < x_n < n. \end{aligned}$$

Граничные условия:  $m_0^{(n)} = m_1^{(n)}, m_n^{(n)} = 0$  и  $\hat{m}_0^{(n)} = \hat{m}_n^{(n)} = 0$ .

Отсюда, при  $p_n \neq q_n$ , методом, описанным в [2], выводим:

$$\begin{aligned} m_{x_n}^{(n)} &= \frac{x_n - n}{q_n - p_n} - \frac{p_n}{(q_n - p_n)^2} \cdot \left( \left( \frac{q_n}{p_n} \right)^{x_n} - \left( \frac{q_n}{p_n} \right)^n \right), \\ \hat{m}_{x_n}^{(n)} &= \frac{1}{p_n - q_n} \left( \left( 1 - \left( \frac{q_n}{p_n} \right)^{x_n} \right) \left( 1 - \left( \frac{q_n}{p_n} \right)^n \right)^{-1} - n - x_n \right). \end{aligned}$$

Введем вспомогательные обозначения:  $s_n = \frac{q_n}{p_n}, k_n = \frac{x_n}{n}$ .

Лемма 1. При  $n \rightarrow \infty, k_n \rightarrow k, 0 < k < 1, q_n \rightarrow 0, p_n \rightarrow 0$ ,

$$E\eta_{x_n}^{(n)} \sim c_1 \frac{n}{p_n}, \text{ для } s_n \rightarrow a, 0 \leq a < 1,$$

$$E\eta_{x_n}^{(n)} \sim c_2 \frac{a^n}{p_n}, \text{ для } s_n \rightarrow a, a > 1,$$

$$E\eta_{x_n}^{(n)} \sim \frac{s_n^{n-2}}{p_n}, \text{ для } s_n \rightarrow \infty,$$

$$E\hat{\eta}_{x_n}^{(n)} \sim c_3 \frac{n}{p_n}, \text{ для } s_n \rightarrow a, 0 \leq a < 1,$$

$$E\hat{\eta}_{x_n}^{(n)} \sim c_4 \frac{n}{q_n}, \text{ для } s_n \rightarrow a, 1 < a \leq \infty,$$

где  $c_i, i = 1, \dots, 4$  — некоторые константы.

*Доказательство.* Для  $s_n \rightarrow a, 0 \leq a < 1, E\eta_{x_n}^{(n)} = m_{x_n}^{(n)} = \frac{n(k_n-1)}{p_n(s_n-1)} + \frac{1}{p_n(s_n-1)^2} (s_n^n - s_n^{k_n n}) = [n(k_n-1)(s_n-1) + s_n^n(1-s_n^{(k_n-1)n})]$

В остальных случаях, действуя аналогично, выводим  $c_2 = (a-1)^{-2}$ ,  
 $c_3 = (1-k)(1-a)^{-1}$ ,  $c_4 = ka(a-1)^{-1}$ .

**3. Вспомогательные рассуждения.** Обозначим через  $U_{x_n}^{(n)}(s)$  (соотв.  $\hat{U}_{x_n}^{(n)}(s)$ ) производящую функцию случайной величины  $\eta_{x_n}^{(n)}$  (соотв.  $\hat{\eta}_{x_n}^{(n)}$ ), для нее справедливо следующее соотношение:

$$U_{x_n}^{(n)}(s) = p_n s U_{x_n+1}^{(n)}(s) + r_n s U_{x_n}^{(n)}(s) + q_n s U_{x_n-1}^{(n)}(s), \text{ при } 0 < x_n < n.$$

Точно такое же уравнение получается для  $\hat{U}_{x_n}^{(n)}(s)$ .

Граничные условия:

$$U_0^{(n)}(s) = U_1^{(n)}(s), U_n^{(n)}(s) = 1 \text{ и } \hat{U}_0^{(n)}(s) = 1, \hat{U}_n^{(n)}(s) = 1.$$

Решениями этих разностных задач будут

$$U_{x_n}^{(n)}(s) = \frac{(\lambda_1^{(n)}(s))^{x_n} (1 - \lambda_2^{(n)}(s)) - (\lambda_2^{(n)}(s))^{x_n} (1 - \lambda_1^{(n)}(s))}{(\lambda_1^{(n)}(s))^n (1 - \lambda_2^{(n)}(s)) - (\lambda_2^{(n)}(s))^n (1 - \lambda_1^{(n)}(s))},$$

$$\hat{U}_{x_n}^{(n)}(s) = \frac{(\lambda_1^{(n)}(s))^{x_n} (1 - (\lambda_2^{(n)}(s))^n) - (\lambda_2^{(n)}(s))^{x_n} (1 - (\lambda_1^{(n)}(s))^n)}{(\lambda_1^{(n)}(s))^n - (\lambda_2^{(n)}(s))^n},$$

где

$$\lambda_{1,2}^{(n)}(s) = \frac{1 - r_n s \pm \sqrt{(1 - r_n s)^2 - 4s^2 p_n q_n}}{2p_n s}.$$

Для исследования асимптотического поведения  $\mu_{x_n}^{(n)} = \frac{\eta_{x_n}^{(n)}}{E\eta_{x_n}^{(n)}}$  и  $\hat{\mu}_{x_n}^{(n)} = \frac{\hat{\eta}_{x_n}^{(n)}}{E\hat{\eta}_{x_n}^{(n)}}$

используем преобразование Лапласа. Обозначим  $\Phi_n(t)$  (соотв.  $\hat{\Phi}_n(t)$ ) преобразование Лапласа  $\mu_{x_n}^{(n)}$  (соотв.  $\hat{\mu}_{x_n}^{(n)}$ ). Тогда, зная производящую функцию  $\eta_{x_n}^{(n)}$  (соотв.  $\hat{\eta}_{x_n}^{(n)}$ ), получаем  $\Phi_n(t) = U_{x_n} \left( e^{-t(m_{x_n}^{(n)})^{-1}} \right)$  (соотв.  $\hat{\Phi}_n(t) = \hat{U}_{x_n} \left( e^{-t(\hat{m}_{x_n}^{(n)})^{-1}} \right)$ ). ■



#### 4. Асимптотика нормированного времени поглощения.

Теорема 1.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n < 1$ , то  $\mu_{x_n}^{(n)} \xrightarrow{p} 1$ ,

если  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n > 1$ , то  $\mu_{x_n}^{(n)} \xrightarrow{d} \text{Exp}(1)$ ,

если  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \neq 1$ , то  $\hat{\mu}_{x_n}^{(n)} \xrightarrow{p} 1$ ,

где, как обычно,  $\xrightarrow{d}$  обозначает слабую сходимость, а  $\xrightarrow{p}$  — сходимость по вероятности.

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$ ,  $0 < a < 1$ .

По лемме 1,  $m_{x_n}^{(n)} = \frac{1-k}{1-a} \cdot \frac{n}{p_n} (1 + o(1))$ , следовательно  $e^{t(m_{x_n}^{(n)})^{-1}} = 1 + \frac{(1-a)t p_n}{(1-k)n} + o\left(\frac{p_n}{n}\right)$ .

Подставляя это выражение в формулу для  $\lambda_{1,2}\left(e^{-t(m_{x_n}^{(n)})^{-1}}\right)$  (далее для упрощения будем писать  $\lambda_{1,2}$ ), находим  $\lambda_1 = 1 + \frac{t}{(1-k)n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $\lambda_2 = a\left(1 - \frac{t}{(1-k)n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\rightarrow 1, \lambda_1^{k_n n} \rightarrow e^{kt(1-k)^{-1}}, \lambda_1^n \rightarrow e^{t(1-k)^{-1}}, n \rightarrow \infty; \\ \lambda_2 &\rightarrow a, \lambda_2^{k_n n} \rightarrow 0, \lambda_2^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Так как для непрерывных функций  $f(x)$  и  $g(x)$  выполнено  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x))$ , то  $\Phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t) = e^{-t}$ .

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем требуемое. Остальные случаи доказываются по такой же схеме.

**5. Дополнение.** В случае  $p_n = q_n$  результат окажется принципиально другим. Математические ожидания величин  $\eta_{x_n}^{(n)}$  и  $\hat{\eta}_{x_n}^{(n)}$  будут выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{x_n}^{(n)} &= \frac{-x_n^2 + x_n + n^2 - n}{2p_n}, \\ \hat{m}_{x_n}^{(n)} &= \frac{x_n(n - x_n)}{2p_n}. \end{aligned}$$

Лемма 2. При  $n \rightarrow \infty$ ,  $k_n \rightarrow k$ ,  $0 < k < 1$ ,  $p_n \rightarrow 0$ ,

$$E\eta_{x_n}^{(n)} \sim d_1 \frac{n^2}{p_n}, E\hat{\eta}_{x_n}^{(n)} \sim d_2 \frac{n^2}{p_n},$$

где  $d_1, d_2$  — некоторые константы.

Теорема 2.  $\mu_{x_n}^{(n)} \xrightarrow{d} \nu_1, \widehat{\mu}_{x_n}^{(n)} \xrightarrow{d} \nu_2$ , где плотности случайных величин  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — это функции

$$f_1(t) = (\pi t^3 2(1-k^2))^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} (2j+k-1) e^{-2(j+\frac{k-1}{2})^2((1-k^2)t)^{-1}},$$

$$f_2(t) = (\pi t^3 2k(1-k))^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{j+1} (j-k) e^{-(j-k)^2(2k(1-k)t)^{-1}}$$

соответственно.

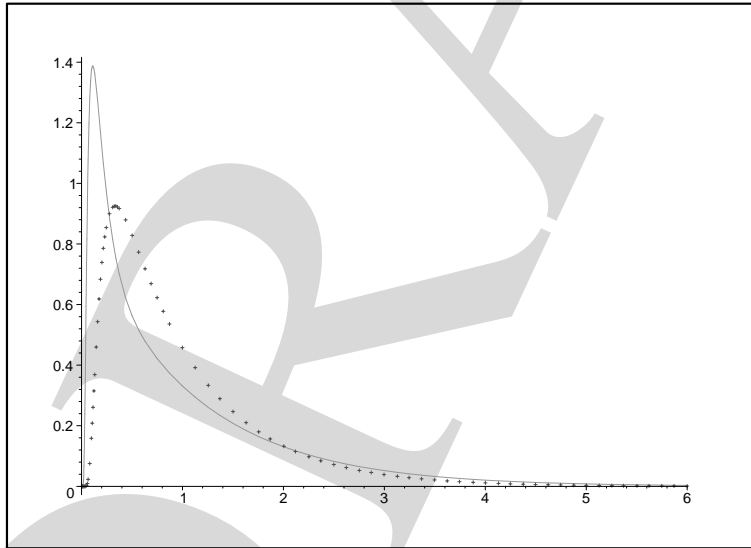
*Доказательство.* Аналогично теореме 1 вычисляем предел преобразования Лапласа:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t) = \frac{\text{ch} \sqrt{\frac{2tk^2}{1-k^2}}}{\text{ch} \sqrt{\frac{2t}{1-k^2}}}.$

Для того, чтобы найти обратное преобразование Лапласа, используем табличные данные из [1]:

$g(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	$f(t)$
$\frac{\text{ch}(x \cdot p^{1/2})}{\text{ch}(l \cdot p^{1/2})}, -l \leq x \leq l$	$\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \theta_1 \left( \frac{x}{2l} \middle  \frac{i \cdot \pi \cdot t}{l^2} \right)$

$$\theta_1(v|\tau) = (-i \cdot \tau)^{-1/2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-i \cdot \pi (v-1/2+n)^2 \cdot \tau^{-1}}$$

График плотности  $\nu_1$  (сплошная линия) и  $\nu_2$  (точечная линия) при  $k = 0.5$



- [1] БЕЙТМЕН Г., ЭРДЕЙИ А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — М.: Наука, 1969.  
 [2] ФЕЛЛЕР В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. — М.: Мир, 1984

УДК 517.5

## Интерполяционная задача в пространствах целых периодических функций\*

**В. Э. Ким**

*Институт математики с ВЦ Уфимского НЦ РАН*

Рассмотрим класс функций  $P^T(\mathbb{C}) = \{g \in H(\mathbb{C}) : g(\lambda) = g(\lambda + T), \forall \lambda \in \mathbb{C}\}$ , где  $H(\mathbb{C})$  — класс всех целых функций,  $T > 0$ . Пусть  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  такие, что  $\rho > 1$ ,  $\sigma > 0$ . Определим пространства:

$$P_{[\rho, \sigma]}^T = \{g \in P^T(\mathbb{C}) : \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|g(\lambda)|}{\exp(\alpha |\operatorname{Im} \lambda|^\rho)} < \infty, \exists \alpha < \sigma\};$$

$$P_{[\rho, \sigma]}^T = \{g \in P^T(\mathbb{C}) : \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|g(\lambda)|}{\exp(\alpha |\operatorname{Im} \lambda|^\rho)} < \infty, \forall \alpha > \sigma\};$$

Рассмотрим множество простых узлов интерполяции  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ . Будем предполагать, что  $0 \leq \operatorname{Re} \lambda_k < T, \forall k \in \mathbb{N}$ . Разобьем  $\Lambda$  на два подмножества:  $\{\lambda_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\lambda \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}, \operatorname{Im} \lambda_k^{(1)} \nearrow \infty; \{\lambda_k^{(2)}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\lambda \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda < 0\}, \operatorname{Im} \lambda_k^{(2)} \searrow -\infty$ .

В работе выясняется, при каких условиях (на множество  $\Lambda$ ) разрешимы следующий интерполяционные задачи:

**Q1:** для любой последовательности  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  такой, что

$$\exists \alpha < \sigma : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\exp(\alpha |\operatorname{Im} \lambda_k|^\rho)} < \infty, \quad (1)$$

найти функцию  $g \in P_{[\rho, \sigma]}^T$  такую, что  $g(\lambda_k) = t_k, \forall k$ ;

**Q2:** для любой последовательности  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  такой, что

$$\forall \alpha > \sigma : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\exp(\alpha |\operatorname{Im} \lambda_k|^\rho)} < \infty,$$

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00-417) и гранта Президента РФ НШ-10052.2006.1

найти функцию  $g \in P_{[\rho, \sigma]}^T$  такую, что  $g(\lambda_k) = t_k, \forall k$ ;

Отметим, что условия разрешимости аналогичных интерполяционных задач для пространств  $P_{[\rho, \infty)}^{2\pi}$  и  $P_{[\rho, 0]}^{2\pi}$  получены в работе [4].

Введем обозначения. Пусть  $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}, |v_k| \nearrow \infty$ . Через  $n_V(r)$  обозначим число точек из  $V$ , содержащихся в круге  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ ; через  $N_V(r)$  обозначим функцию

$$N_V(r) = \int_1^r \frac{n_V(x)}{x} dx.$$

Пусть  $f \in H(\mathbb{C})$ . Обозначим

$$\tau_f(\rho) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \max_{|z|=r} |f(z)|}{(\ln r)^\rho}.$$

Если  $\tau_f(\rho) < \infty$  и  $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  — нулевое множество  $f$ , то [1, теорема 4] выполняется

$$\tau_f(\rho) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_V(r)}{(\ln r)^\rho}.$$

Положим  $\delta = 2\pi/T$ . Обозначим  $\xi_k = e^{i\delta\lambda_k}$ ,  $\xi_k^{(1)} = e^{i\delta\lambda_k^{(1)}}$ ,  $\xi_k^{(2)} = e^{i\delta\lambda_k^{(2)}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Введем множества  $S_1 = \{1/\xi_k^{(1)}, k \in \mathbb{N}\}$ ,  $S_2 = \{\xi_k^{(2)}, k \in \mathbb{N}\}$ . Обозначим

$$\mu_j = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{S_j}(r)}{(\ln r)^\rho}, \quad j = 1, 2.$$

**Теорема 1.** Пусть множество  $\Lambda$  удовлетворяет условиям:

$$\mu_1 \delta^\rho < \sigma (\leq \sigma), \quad \mu_2 \delta^\rho < \sigma (\leq \sigma), \quad (2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda_k^{(1)}|^\rho} \ln \left| \prod_{n \neq k} \left( 1 - \exp(i\delta\lambda_n^{(1)} - i\delta\lambda_k^{(1)}) \right) \right| = \mu_1 \delta^\rho, \quad (3)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda_k^{(2)}|^\rho} \ln \left| \prod_{n \neq k} \left( 1 - \exp(i\delta\lambda_n^{(2)} - i\delta\lambda_k^{(2)}) \right) \right| = \mu_2 \delta^\rho. \quad (4)$$

Тогда разрешима интерполяционная задача **Q1** (**Q2**).

*Доказательство.* Приведем доказательство для задачи **Q1** (для задачи **Q2** доказательство аналогичное). Обозначим через  $H_0$  множество всех аналитических в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  функций. Положим  $\sigma_1 = \sigma/\delta^\rho$ . Определим пространство

$$H_{[\rho, \sigma_1]} = \left\{ f \in H_0 : \sup_{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \frac{|f(\xi)|}{\exp(\beta |\ln |\xi||^\rho)} < \infty, \exists \beta < \sigma_1 \right\}.$$

Рассмотрим интерполяционную задачу **Q3**: для любой последовательности  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  такой, что

$$\exists \beta < \sigma_1 : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k|}{\exp(\beta |\ln |\xi_k||^\rho)} < \infty, \quad (5)$$

найти функцию  $\omega \in H[\rho, \sigma_1)$  такую, что  $\omega(\xi_k) = t_k, \forall k$ ;

Заметим, что разрешимость задачи **Q3** эквивалентна разрешимости задачи **Q1**. Действительно, условия (1) и (5) суть одно и то же, функции  $\omega(\xi)$  и  $g(\lambda)$  получаются друг из друга при замене переменной  $\xi = \exp(i\delta\lambda)$ . Рассмотрим теперь интерполяционную задачу

**Q3a**: для любых  $\{t_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  и  $\{t_k^{(2)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  таких, что

$$\exists \beta < \sigma_1 : \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|t_k^{(1)}|}{\exp(\beta |\ln |\xi_k^{(1)}||^\rho)} < \infty, \frac{|t_k^{(2)}|}{\exp(\beta |\ln |\xi_k^{(2)}||^\rho)} < \infty, \quad (6)$$

найти  $\omega(\xi) \in H[\rho, \sigma_1)$  такую, что  $\omega(\xi_k^{(1)}) = t_k^{(1)}, \omega(\xi_k^{(2)}) = t_k^{(2)}, \forall k$ .

Очевидно, разрешимость **Q3a** эквивалентна разрешимости **Q3**. Выясним, при каких условиях разрешима **Q3a**. Возьмем произвольные последовательности  $\{t_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  и  $\{t_k^{(2)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , удовлетворяющие (6). Рассмотрим бесконечные произведения  $f_1(\xi) = \prod_k (1 - \xi \xi_k^{(1)})$ ,  $f_2(\xi) = \prod_k (1 - \xi / \xi_k^{(2)})$ ,  $\xi \in \mathbb{C}$ . Из условия (2) вытекает, что  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$  являются целыми функциями, причем  $\tau_{f_1}(\rho) < \sigma_1$ ,  $\tau_{f_2}(\rho) < \sigma_1$ . Их нулевыми множествами являются соответственно  $S_1, S_2$ . Положим  $\check{f}_1(\xi) \equiv f_1(1/\xi)$ . Положим  $v_k^{(1)} = t_k^{(1)} / f_2(\xi_k^{(1)})$ ;  $v_k^{(2)} = t_k^{(2)} / \check{f}_1(\xi_k^{(2)})$ . Из теоремы об оценке снизу аналитической функции, не обращающейся в нуль [3, с. 31], следует, что найдутся некоторые положительные константы  $C_1, C_2$ , при которых выполняются равномерные по  $k$  оценки:  $|v_k^{(1)}| \leq C_2 |t_k^{(1)}|$ ,  $|v_k^{(2)}| \leq C_1 |t_k^{(2)}|$ . Следовательно, последовательности  $\{v_k^{(1)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  и  $\{v_k^{(2)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  удовлетворяют условиям (6). Предположим, что выполняется условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\ln |\xi_k^{(1)}||^\rho} \ln \left| f_1' \left( \frac{1}{\xi_k^{(1)}} \right) \cdot \frac{1}{\xi_k^{(1)}} \right| = \mu_1. \quad (7)$$

Тогда, согласно [2, теорема 10], существует  $\gamma(\xi) \in H(\mathbb{C})$ , такая что  $\tau_\gamma(\rho) < \sigma_1$ ,  $\gamma(1/\xi_k^{(1)}) = v_k^{(1)}, \forall k$ . Положим  $\omega_1(\xi) = \gamma(1/\xi)$ . Тогда  $\omega_1(\xi_k^{(1)}) = v_k^{(1)}$ . Аналогично, если выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\ln |\xi_k^{(2)}||^\rho} \ln |f_2'(\xi_k^{(2)}) \cdot \xi_k^{(2)}| = \mu_2, \quad (8)$$

то существует целая функция  $\omega_2(\xi)$ , такая что  $\tau_{\omega_2}(\rho) < \sigma_1$ ,  $\omega_2(\xi_k^{(2)}) = v_k^{(2)}$ ,  $\forall k$ . Определим функцию  $\omega(\xi) = \omega_1(\xi)f_2(\xi) + \omega_2(\xi)\check{f}_1(\xi)$ . Очевидно,  $\omega(\xi) \in H_0$ . Заметим, что функции  $\check{f}_1(\xi)$ ,  $\omega_1(\xi)$ , ограничены при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , а функции  $f_2(\xi)$ ,  $\omega_2(\xi)$ , ограничены при  $|\xi| \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\omega(\xi) \in H_{[\rho, \sigma_1]}$ .

Кроме того,  $\omega(\xi_k^{(1)}) = t_k^{(1)}$ ,  $\omega(\xi_k^{(2)}) = t_k^{(2)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Таким образом, при выполнении условий (7) и (8) разрешима задача **Q3a**, а значит и **Q1**. Нетрудно видеть, что условия (7), (8) равносильны соответственно условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\ln |\xi_k^{(1)}||^\rho} \ln \left| \prod_{n \neq k} \left( 1 - \frac{\xi_n^{(1)}}{\xi_k^{(1)}} \right) \right| = \mu_1, \quad (9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\ln |\xi_k^{(2)}||^\rho} \ln \left| \prod_{n \neq k} \left( 1 - \frac{\xi_k^{(2)}}{\xi_n^{(2)}} \right) \right| = \mu_2. \quad (10)$$

Заметим, что условия (9), (10) равносильны соответственно условиям (3), (4). Теорема доказана.

Приведем пример множества  $\Lambda$ , удовлетворяющего условиям теоремы 1 для случая  $T = 2\pi$ ,  $\rho = 2$ ,  $\sigma > 1/2$ . Пусть  $\lambda_k^{(1)} = ik$ ,  $\lambda_k^{(2)} = -ik$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $S_1 = S_2 = \{e^k, k \in \mathbb{N}\}$ . Нетрудно вычислить, что  $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$ . Заметим, что выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \ln \left| \prod_{n \neq k} (1 - e^{k-n}) \right| = 1/2.$$

Действительно,  $\ln \left| \prod_{n \neq k} (1 - e^{k-n}) \right| = \sum_{n=1}^{k-1} \ln(e^{k-n} - 1) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \ln(1 - e^{k-n})$ .

Нетрудно показать, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{k-1} \ln(e^{k-n} - 1) = 1/2$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=k+1}^{\infty} \ln(1 - e^{k-n}) = 0$ . Следовательно, условия (3) и (4) выполняются.

- [1] БРАТИЩЕВ А. В., КОРОБЕЙНИК Ю. Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат. сб. 1978. Т. 106. № 1. С. 44–65.
- [2] БРАТИЩЕВ А. В. Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1984. Т. 48. № 3. С. 451–475.
- [3] ЛЕВИН Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
- [4] ШАГАПОВ И. А. Инвариантные подпространства в пространствах числовых последовательностей. Дисс. ... к.ф.-м.н. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 1999.

## Построение оптимальной инвестиционной стратегии при наличии фиксированных и пропорциональных издержек

**В. В. Китов**

*Московский государственный университет*

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу оптимального управления уровнем капиталовложений  $X$  в некоторый актив, стоимость которого изменяется согласно геометрическому броуновскому движению:

$$dX_t = X_t(\mu t + \sigma dW_t)$$

Полезность от наличия актива стоимостью  $X$  будем считать равной  $R(X)$ . Относительно функции  $R(\cdot)$  будет предполагаться вогнутость при  $X > 0$ , а также условия  $\lim_{X \rightarrow 0} R'(X) = +\infty$  и  $\lim_{X \rightarrow \infty} R'(X) = 0$ . Условие вогнутости обеспечит свойство управления, состоящее в том, что если при достаточно малом значении  $X = \tilde{X}$  оптимальным является увеличение  $X$ , то оптимальным будет увеличение  $X$  и при  $X < \tilde{X}$ . Аналогично, если оптимальным является уменьшение  $X$  при достаточно большом  $X = \hat{X}$ , то при  $X > \hat{X}$  уменьшение  $X$  будет также оптимальным управлением.

При перераспределении средств из наличных денег в акции и обратно возникают издержки следующего вида:

$$C(\Delta X) = \begin{cases} K^+ + k^+ \Delta X, & \Delta X > 0 \\ K^- + k^- \Delta X, & \Delta X < 0 \end{cases}$$

Поскольку при каждом перераспределении средств инвестор несет издержки, превосходящие некоторую положительную константу, то, очевидно, что оптимальное управление будет носить не непрерывный, а импульсный характер. Управлением будет множество пар  $(\tau_i^+, \Delta X_i^+)$  и  $(\tau_i^-, \Delta X_i^-)$  определяющие моменты времени и размер дополнительных инвестиций в актив и, соответственно, моменты времени и размер (по абсолютной величине) продаж актива. На управление и динамику системы накладываются условия регулярности, аналогичные условиям в статье Cadenillas, Zapatero „Optimal Central Bank Intervention“, 1999. Динамика стоимости рискованного актива опишется в виде:

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t) + \sum_{i: \tau_i^+ = t} \Delta X_i^+ - \sum_{j: \tau_j^- = t} \Delta X_j^-$$

Выигрышем от отдельной стратегии инвестора будет

$$J_t(X) = \mathbb{E}\left\{\int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-t)} R(X_s) ds + \sum_i e^{-\beta(\tau_i^- - t)} (-K^- - k^- \Delta X_i^-) + \sum_j e^{-\beta(\tau_j^+ - t)} (-K_j^+ - k_j^+ \Delta X_j^+)\right\}$$

Учитывая  $\int_0^\infty x e^{-\beta t} dt = \frac{x}{\beta}$ , параметры  $K^+, K^-$  и  $k^+, k^-$  можно определить равенствами

$$\begin{cases} K^+ = C^+/\beta & k^+ = (c^+ + 1)/\beta \\ K^- = C^-/\beta & k^- = (c^- - 1)/\beta \end{cases} \quad (1)$$

где  $C^+, C^-$  и  $c^+, c^-$  — величины фактических фиксированных и пропорциональных издержек на рынке.

Определим функцию ожидаемого выигрыша как выигрыш, отвечающий наилучшей стратегии среди всех возможных:

$$U_t(X) = \max_{\tau_i^+, \Delta X_i^+, \tau_j^-, \Delta X_j^-} J_t(X) \quad (2)$$

Оптимальное управление несколькими активами  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с различными функциями полезности  $R_1(\cdot), R_2(\cdot), \dots, R_n(\cdot)$  и различными издержками определяется независимым решением максимизационной задачи (2) для каждого актива.

**2. Построение решения.** На участке пассивного управления (когда оптимальным является не изменять уровень  $X$  и не нести издержки управления) функция выигрыша удовлетворяет следующему равенству

$$U_t(X) = \mathbb{E}\left\{\int_t^{t+\Delta t} e^{-\beta(s-t)} R(X_s) ds + e^{-\beta\Delta t} U_{t+\Delta t}(X_t + \Delta X)\right\}$$

После применения формулы Ито к  $dU$ , отбрасывания слагаемых более высокого порядка малости и взятия математического ожидания, получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial U}{\partial x} - \beta U + R(x) = 0 \quad (3)$$

В случае активного управления, условие увеличения  $X$  будет

$$U(x) \leq \max_y \{-K^+ - k^+(y - x) + U(y)\} = -K^+ - k^+(y - x) + U(y) \quad (4)$$

Условие уменьшения  $X$ :

$$U(x) \leq \max_y \{-K^- - k^-(x - y) + U(y)\} = -K^- - k^-(x - \bar{y}) + U(\bar{y}) \quad (5)$$



Заметим, что  $\underline{y}$  и  $\bar{y}$ , доставляющие максимум в (4) и (5), не зависят от  $x$ . Следовательно, при применении данной стратегии инвестору всегда оптимально покупать акции до уровня  $\underline{y}$  (если величина  $x$  меньше некоторого уровня  $\underline{x}$ ) и продавать акции пока их уровень не опустится до уровня  $\bar{y}$  (начиная с некоторого уровня  $\bar{x}$ ). Поскольку задача не зависит от текущего момента  $t$  рассматриваемые уровни  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}$  будут постоянными во времени. В случае дифференцируемой функции  $U(\cdot)$  уравнения (4) и (5) дают условия первого порядка

$$U'(\underline{y}) = k^+ \quad U'(\bar{y}) = -k^- \quad (6)$$

Уровни  $\underline{x}$  и  $\bar{x}$ , начиная с которых необходимо увеличивать и, соответственно уменьшать  $X$  определяются из уравнений:

$$U(\underline{x}) = -K^+ - k^+(\underline{y} - \underline{x}) + U(\underline{y}) \quad (7)$$

$$U(\bar{x}) = -K^- - k^-(\bar{x} - \bar{y}) + U(\bar{y}) \quad (8)$$

Для получения еще двух уравнений, продифференцируем (7) и (8) по  $\underline{x}$  и  $\bar{x}$  соответственно:

$$U'(\underline{x}) = k^+ \quad U'(\bar{x}) = -k^- \quad (9)$$

Таким образом, имеются шесть уравнений (6), (7), (8), (9) для отыскания шести неизвестных параметров  $c_1$ ,  $c_2$  (неизвестные константы в общем решении уравнения (3)) и  $\underline{x}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$ . Если величина  $X$  принадлежит отрезку  $[\underline{x}, \bar{x}]$ , то оптимальной стратегией будет пассивное управление. Оптимально увеличение  $X$  до уровня  $\underline{y}$ , если его значение опустилось до  $\underline{x}$ , и уменьшение  $X$  до уровня  $\bar{y}$ , если его значение поднялось выше  $\bar{x}$ .

Заметим, что условия (6) и условия (9) определяют несовпадающие между собой  $\underline{x}$  и  $\underline{y}$ , а также  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  в силу того, что в уравнениях (7), (8) присутствуют положительные слагаемые  $K^+$  и  $K^-$ . Если же  $K^+ \rightarrow 0$ ,  $K^- \rightarrow 0$ , то в силу полученных уравнений  $\underline{x} \rightarrow \underline{y}$ ,  $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ . При нулевых фиксированных издержках данные величины совпадут и оптимальным управлением станет производить бесконечно малое увеличение  $X$ , если  $X = \underline{x}$ , и бесконечно малое уменьшение, если  $X = \bar{x}$ .

Из (6) и (1) следует, что при уменьшающихся пропорциональных издержках ( $c^- \rightarrow 0$ ,  $c^+ \rightarrow 0$ )  $U'(\underline{y}) \rightarrow \frac{1}{\beta}$ ,  $U'(\bar{y}) \rightarrow \frac{1}{\beta}$ , следовательно при вогнутой функции  $U(\cdot)$  на  $[\underline{y}, \bar{y}]$  значения  $\underline{y}$  и  $\bar{y}$  будут сближаться. В предельном случае, когда  $c^- = c^+ = 0$ , они сойдутся к одинаковому значению  $y = \bar{y}$ .

**3. Обобщение задачи на случай с задержкой.** Рассмотрим теперь случай, когда осуществление операций покупки и продажи будет происходить не сразу, а по прошествии некоторого периода времени  $T$  после

оплаты операции. В этом случае функция полезности  $U(\cdot)$  будет уже зависеть не только от фактической стоимости акций, но и от потока ранее осуществленных, но пока не исполненных заявок на продажу и покупку:

$$U_t(\cdot) = U_t(x, \Psi) \quad \text{где} \quad \Psi = (\tau_1, x_1, \tau_2, x_2, \dots, \tau_k, x_k), \tau_i \in (t - T, t]$$

Упростить решение задачи позволяет тот факт, что оптимальное управление  $(\tau_i, \Delta x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  зависит лишь от величины  $X = x + \sum_i x_i$ , где  $x_i$  — поток еще не исполнившихся покупок и продаж актива, а  $x$  — его реально располагаемое количество. Из этого следует простое выражение для функции  $U(x, \Psi)$ :

$$U(x, \Psi) = U(X, \emptyset) + \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (R(x, \Psi) - R(X, \emptyset)) dt \right\} \quad (10)$$

Далее будем обозначать  $U(X, \emptyset) = U(X)$ .

Запишем уравнения для однопараметрической функции выигрыша, используя равенства (10). В случае, когда оптимально не предпринимать никаких действий, уравнение (3) останется прежним. Если является оптимальным изменение  $X$ , то должны быть выполнены неравенства

$$U(x) \leq \max_y \{ -K^+ - k^+(y - x) + U(y, \Psi) \}, \text{ условие увеличения } X \quad (11)$$

$$U(x) \leq \max_y \{ -K^- - k^-(x - y) + U(y, \Psi) \}, \text{ условие уменьшения } X \quad (12)$$

где  $\Psi = (t, y - x)$  для текущего момента времени  $t$ . В точках применения управления данные неравенства обратятся в равенства. Используя представление (10), и обозначив  $\Phi(x, y) = \mathbb{E} \{ \int_0^T e^{-\beta t} (R(x) - R(y)) dt \}$ , аналогично случаю без задержки получим следующие шесть нелинейных уравнений для определения шести неизвестных параметров управления:

$$\begin{aligned} U(\underline{x}) &= -K^+ - k^+(\underline{y} - \underline{x}) + U(\underline{y}) + \Phi(\underline{x}, \underline{y}) \\ U(\bar{x}) &= -K^- - k^-(\bar{x} - \bar{y}) + U(\bar{y}) + \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \\ U'(\underline{x}) &= k^+ + \Phi'_x(\underline{x}, \underline{y}) & U'(\bar{x}) &= -k^- + \Phi'_x(\bar{x}, \bar{y}) \\ U'(\underline{y}) &= k^+ - \Phi'_y(\underline{x}, \underline{y}) & U'(\bar{y}) &= -k^- - \Phi'_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

## Двумерное уравнение Гельмгольца с заданием условий Дирихле и третьего рода на разрезах

**В. В. Колыбасова**

*Московский государственный университет*

На плоскости  $x \in \mathbb{R}^2$  рассмотрим совокупность простых разомкнутых кривых  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in C^{2,\lambda}$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , не имеющих общих точек, в том числе и концов. Положим  $\Gamma = \bigcup_{n=1}^N \Gamma_n$ . Предположим, что каждая кривая  $\Gamma_n$  параметризована длиной дуги  $s$ :  $\Gamma_n = \{x: x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [a_n, b_n]\}$ ,  $n = 1, \dots, N$ , так, что  $a_1 < b_1 < \dots < a_N < b_N$ . Совокупность отрезков оси  $Ox$   $\bigcup_{n=1}^N [a_n, b_n]$  далее также будем обозначать  $\Gamma$ . Пусть  $\tau_x = (x'_1(s), x'_2(s))$  и  $\mathbf{n}_x = (x'_2(s), -x'_1(s))$  — векторы касательной и нормали к  $\Gamma$  в точке  $x(s)$ . Будем рассматривать  $\Gamma$  как совокупность разрезов. Через  $\Gamma^+$  обозначим ту сторону контура  $\Gamma$ , которая остаётся слева при возрастании параметра  $s$ , а через  $\Gamma^-$  — противоположную сторону.

Определение 1. Будем говорить, что функция  $u(x)$  принадлежит классу гладкости  $\mathbf{K}$ , если

- 1)  $u \in C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma}) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  и  $u(x)$  непрерывна на концах разрезов  $\Gamma$ ;
- 2)  $\nabla u \in C^0(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \setminus X})$ , где  $X$  — множество точек плоскости, состоящее из концов  $\Gamma$ :  $X = \bigcup_{n=1}^N (x(a_n) \cup x(b_n))$ ;
- 3) в окрестности любой точки  $x(d) \in X$  для некоторых констант  $\mathcal{C} > 0$ ,  $\varepsilon > -1$  выполняется неравенство

$$|\nabla u| \leq \mathcal{C}|x - x(d)|^\varepsilon, \quad (1)$$

где  $x \rightarrow x(d)$  и  $d = a_n$  или  $d = b_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

В определении 1  $u(x)$  и  $\nabla u(x)$  непрерывно продолжимы на разрезы  $\Gamma \setminus X$  слева и справа, но могут иметь скачок при переходе через  $\Gamma \setminus X$ .

Задача **У**. Найти функцию  $u(x)$  из класса  $\mathbf{K}$ , которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца  $u_{x_1 x_1}(x) + u_{x_2 x_2}(x) + k^2 u(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ,  $k = \text{const} \neq 0$ ,  $0 \leq \arg k < \pi$ , граничным условиям

$$u(x)|_{x(s) \in \Gamma^+} = f^+(s), \quad (2)$$

$$\left[ \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} - \beta(s)u(x) \right] \Big|_{x(s) \in \Gamma^-} = f(s) \quad (3)$$

и условиям на бесконечности. Если  $\arg k = 0$ , то на бесконечности потребуем выполнение условий излучения Зоммерфельда  $u = O(|x|^{-1/2})$ ,  $\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o(|x|^{-1/2})$ ,  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ . Если  $0 < \arg k < \pi$ , то на бесконечности потребуем выполнения условий  $u = o(|x|^{-1/2})$ ,  $|\nabla u(x)| = o(|x|^{-1/2})$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ . Считаем, что  $\beta(s) \in C^0(\Gamma)$  удовлетворяет одному из дополнительных условий:

- 1) если  $\arg k = 0$ , то  $\operatorname{Im} \beta(s) \leq 0$  для любого  $s \in \Gamma$ ;
- 2) если  $\arg k = \pi/2$ , то  $\beta(s) = \operatorname{Re} \beta(s) \geq 0$  для любого  $s \in \Gamma$ ;
- 3) если  $\operatorname{Re} k \neq 0$ ,  $\operatorname{Im} k > 0$ , то  $(\operatorname{Re} k) \cdot \operatorname{Im} \beta(s) \leq 0$  для любого  $s \in \Gamma$ .

Частным случаем задачи **U** при  $\beta(s) \equiv 0$  является задача Дирихле–Неймана, рассмотренная в [3]. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости были изучены в [1, 2].

Замечание. С учётом (2) условие (3) можно заменить эквивалентным условием

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x(s) \in \Gamma^-} + \beta(s) [u(x)|_{x(s) \in \Gamma^+} - u(x)|_{x(s) \in \Gamma^-}] = f^-(s), \quad (4)$$

где  $f^-(s) = f(s) + \beta(s)f^+(s)$ .

С помощью энергетических тождеств и леммы Реллиха можно доказать, что задача **U** имеет не более одного решения.

Ниже будем считать, что

$$f^+(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma), \quad f(s), \beta(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (5)$$

Тогда  $f^-(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$ .

Под  $\int_{\Gamma} \dots d\sigma$  будем понимать  $\sum_{n=1}^N \int_{a_n}^{b_n} \dots d\sigma$ .

Вместо граничного условия (2) запишем эквивалентное

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial \tau_x} \right|_{x(s) \in \Gamma^+} = (f^+)'(s), \quad (6)$$

$$u(x(a_n)) = f^+(a_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Будем искать решение задачи **U** в виде

$$u[\mu, \nu](x) = T[\mu](x) + W[\nu](x), \quad (8)$$

где  $T[\mu](x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) V(x, \sigma) d\sigma$ ,  $V(x, \sigma) = \int_{a_n}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \mathcal{H}_0^{(1)}(k|x - y(\xi)|) d\xi$ ,  $\sigma \in [a_n, b_n]$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $W[\nu](x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \nu(\sigma) \mathcal{H}_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|) d\sigma$ ,  $H_0^{(1)}(z)$  — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Будем искать  $\mu(s)$ ,  $v(s)$  в пространстве  $C_q^\omega(\Gamma)$ ,  $\omega \in (0, 1]$ ,  $q \in [0, 1]$ .

Определение 2. Будем говорить, что  $\mathcal{F}(s) \in C_q^\omega(\Gamma)$ , если  $\mathcal{F}_0(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$ , где  $\mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}(s) \prod_{n=1}^N |s - a_n|^q |s - b_n|^q$ , и  $\|\mathcal{F}(\cdot)\|_{C_q^\omega(\Gamma)} = \|\mathcal{F}_0(\cdot)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma)}$ .

Кроме того, функция  $\mu(s)$  должна удовлетворять условиям

$$\int_{a_n}^{b_n} \mu(\sigma) d\sigma = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Используя результаты [1], можно проверить, что функция (8) удовлетворяет всем условиям задачи, кроме граничных. Чтобы удовлетворить граничным условиям, подставим (8) в (4), (6) и получим интегральные уравнения для  $\mu(s)$  и  $v(s)$  на  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \mu(s) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} v(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) v_1(s, \sigma) d\sigma + \\ + \int_{\Gamma} v(\sigma) v_2(s, \sigma) d\sigma = 2(f^+)'(s), \quad s \in \Gamma, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -v(s) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \int_{\Gamma} v(\sigma) v_3(s, \sigma) d\sigma - \\ - \int_{\Gamma} \mu(\sigma) v_4(s, \sigma) d\sigma + 2\beta(s)\rho[\mu](s) = 2f^-(s), \quad s \in \Gamma, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} v_1(s, \sigma) &= \frac{1}{\pi} \frac{\cos \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} V_0(x(s), \sigma), \\ v_2(s, \sigma) &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s} \right) + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} h(|x(s) - y(\sigma)|), \\ v_3(s, \sigma) &= \frac{1}{\pi} \frac{\cos \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} h(|x(s) - y(\sigma)|), \\ v_4(s, \sigma) &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s} \right) - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} V_0(x(s), \sigma), \end{aligned}$$

$$V_0(x, \sigma) = \int_{a_n}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} h(k|x - y(\xi)|) d\xi, \quad \rho[\mu](s) = \int_{a_n}^s \mu(\sigma) d\sigma, \quad \sigma \in [a_n, b_n], \quad n = 1, \dots, N,$$

$h(z) = \mathcal{H}_0^{(1)}(z) - \frac{2i}{\pi} \ln \frac{z}{k}$ . Через  $\varphi_0(x, y)$  обозначен угол между вектором  $\vec{x}y$  и направлением нормали  $\mathbf{n}_x$ . Угол  $\varphi_0(x, y)$  считается положительным, если он отложен от  $\mathbf{n}_x$  против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Кроме того,  $\varphi_0(x, y)$  непрерывен при  $x, y \in \Gamma$ , если  $x \neq y$ . Согласно [1, 2]  $v_3(s, \sigma) \in C^{0,\lambda}(\Gamma \times \Gamma)$  и  $v_j(s, \sigma) \in C^{0,p_0}(\Gamma \times \Gamma)$  при  $j = 1, 2$ ,

4. Здесь  $p_0 = \lambda$ , если  $0 < \lambda < 1$ , и  $p_0 = 1 - \varepsilon_0$  для любого  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ , если  $\lambda = 1$ .

Подставляя функцию (8) в условия (7), получим дополнительные уравнения для  $\mu(s)$ ,  $v(s)$

$$T[\mu](x(a_n)) + W[v](x(a_n)) = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Далее производится замена неизвестных функций  $\mu(s)$ ,  $v(s)$ , после которой характеристическая часть каждого из двух сингулярных интегральных уравнений (10), (11) содержит только одну неизвестную функцию. Регуляризируя полученную систему с учётом условий (9), (12), приходим к векторному интегральному уравнению второго рода и доказываем, что это уравнение фредгольмово, показываем, что однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а значит, неоднородное уравнение однозначно разрешимо. Таким образом, система (9)–(12) однозначно разрешима.

**Теорема.** Если выполнены условия (5), то решение задачи **U** существует, единственно и даётся формулой (8), где  $\mu(s)$ ,  $v(s)$  — единственное решение системы (9)–(12) в  $C_{3/4}^p(\Gamma)$ ,  $p = \min\{1/4, \lambda\}$ .

Решение задачи **U** удовлетворяет условию (1) с  $\varepsilon = -3/4$ .

- [1] Крутицкий П. А. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. *ЖВМ и МФ.* — 1994. — **34**, № 8–9. — 1237–1257.
- [2] Крутицкий П. А. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. *ЖВМ и МФ.* — 1994. — **34**, № 11. — 1652–1665.
- [3] Крутицкий П. А., Прозоров К. В. Задача Дирихле–Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. *ДАН.* — 2004. — **398**, № 5. — 602–606.

УДК 519.217

## Вероятностная модель неоднородных по времени параллельных вычислений

**А. С. Крамарский**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**1. Описание модели.** Два процессора параллельно решают общую задачу. Каждому из них для проведения вычислений требуются актуальные

данные от другого процессора, при отсутствии которых будут использованы данные по умолчанию. После получения актуальных данных, процессор определяет, насколько долго он использовал некорректную информацию и при необходимости синхронизируется с другим процессором, повторяя вычисления с нужного места. Будем также считать, что помимо основной задачи, требующей параллельных вычислений, каждому процессору периодически требуется решать некоторые другие задачи, что делает его работоспособность зависящей от времени.

Для моделирования данной системы процессоров с помощью случайных процессов предположим, что работа выполняется равными дискретными частями в непрерывном времени. Прогресс каждого из процессоров считаем случайным. Таким образом, можно ввести два случайных процесса  $X(t)$  и  $Y(t)$  со значениями в  $\mathbb{Z}_+$ , отражающих состояние процессоров в момент  $t$ . Прогресс процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  подчинен интенсивностям  $\lambda_x(t)$  и  $\lambda_y(t)$  соответственно (см. [1, гл. 2, §1]), которые предполагаются непрерывными положительными функциями, зависящими от времени периодически с периодом  $T$ .

Синхронизация моделируется следующим образом. В любой момент времени  $t_0$  процессор  $Y$  с интенсивностью  $\alpha$  может послать процессору  $X$  сообщение, в котором указано текущее состояние  $Y$ , т. е.  $Y(t_0)$ . Если  $Y(t_0) \geq X(t_0)$ , то ничего не происходит. Если же  $Y(t_0) < X(t_0)$ , то  $X$  откатывается в состояние  $Y(t_0)$ . Аналогично, но уже с интенсивностью  $\beta$ , может осуществляться откат процессора  $Y$  назад к процессору  $X$ . Интенсивности отправки сообщений предполагаются независимыми от времени, а само событие отправки сообщения — независимым от текущего состояния процессоров.

Итак, модель полностью описана. Задача состоит в исследовании свойств системы при  $t \rightarrow \infty$ .

**2. Переход от абсолютного прогресса процессоров к относительному.** Обозначим  $Z(t) = X(t) - Y(t)$  — взаимное расположение процессоров.  $Z(t)$  — марковский процесс с пространством состояний  $\mathbb{Z}$ . Основным результатом относительно процесса  $Z(t)$  является следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\pi(t)$  — распределение процесса  $Z(t)$  в момент  $t$ . Тогда существует  $T$ -периодическая функция  $\varphi(t) = \{\varphi_k(t), k \in \mathbb{Z}\}$  со значениями в классе вероятностных распределений на  $\mathbb{Z}$ , такая, что  $|\pi_k(t) - \varphi_k(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , для любого  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим вложенную цепь процесса  $Z(t)$ :  $\xi_k = Z(t_0 + kT)$  для некоторого начального момента  $t_0$ .  $\{\xi_k\}$  — цепь Маркова, однородная по времени. Докажем, что цепь  $\{\xi_k\}$  эргодична. Для этого воспользуемся условием Деблина (см. [2, гл. 1]) и покажем, что существует  $\varepsilon > 0$  и  $j$  — целое, такие, что  $P(\xi_j = 0 | \xi_0 = l) > \varepsilon$  для любого целого  $l$ .

Будем оценивать указанную вероятность снизу. Перейдем вначале от процесса  $Z(t)$  к процессу  $\hat{Z}(t)$ , запретив переходы в ноль не через синхронизацию. Для него также рассмотрим вложенную цепь Маркова:  $\hat{\xi}_k = \hat{Z}(t_0 + kT)$ . В цепи  $\hat{\xi}_k$  все положительные состояния будут эквивалентными в том смысле, что вероятность  $P(\hat{\xi}_j = 0 | \hat{\xi}_0 = l)$  не зависит от  $l > 0$ . То же самое верно для отрицательных состояний. К тому же  $P(\xi_j = 0 | \xi_0 = l) \geq P(\hat{\xi}_j = 0 | \hat{\xi}_0 = l)$  для всех  $j, l$ .

Введем, наконец, в рассмотрение процесс  $\tilde{Z}(t)$  с тремя состояниями  $\{-1, 0, +1\}$ , получающийся из  $\hat{Z}(t)$  путем объединения всех положительных состояний в состояние  $(+1)$ , а всех отрицательных — в состояние  $(-1)$ .  $\tilde{Z}(t)$  переходит из 0 в  $(+1)$  с интенсивностью  $\lambda_x(t)$ , из 0 в  $(-1)$  с интенсивностью  $\lambda_y(t)$ , из  $(+1)$  в 0 с интенсивностью  $\alpha$ , из  $(-1)$  в 0 с интенсивностью  $\beta$ . Для вложенной цепи процесса  $\tilde{Z}(t)$ ,  $\eta_k = \tilde{Z}(t_0 + kT)$ , имеем  $P(\hat{\xi}_j = 0 | \hat{\xi}_0 = l) = P(\eta_j = 0 | \eta_0 = \text{sgn } l)$ .

Таким образом,  $P(\xi_j = 0 | \xi_0 = l) \geq P(\eta_j = 0 | \eta_0 = \text{sgn } l)$ . Но цепь  $\{\eta_k\}$  неприводима и эргодична (по Теореме 2, см. след. раздел), значит вероятности, стоящие в правой части неравенства, отделены от нуля при достаточно больших  $j$ . Следовательно цепь  $\{\xi_k\}$  удовлетворяет условию Деблина и сходится к стационарному распределению. Другими словами, существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} \pi(t_0 + kT) = \phi(t_0)$ , где  $\phi(t_0)$  — некоторая функция периода  $T$ , определенная при  $t \geq 0$ . Предел понимается в покомпонентном смысле. Из ограниченности и непрерывности  $\pi(t)$  следует, что  $|\pi(t) - \phi(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Теорема 1 доказана. ■

**3. Достаточное условие эргодичности вложенной цепи Марковского процесса.** Рассмотрим марковский процесс  $W(t)$  с конечным пространством состояний  $\{1, \dots, N\}$  и интенсивностями переходов  $\lambda_{ij}(t)$ ,  $i \neq j$ . Предположим, что  $\lambda_{ij}(t)$  — непрерывные  $T$ -периодические функции. Фиксируем начальный момент  $t_0$  и перейдем к вложенной цепи процесса  $W(t)$ :  $\omega_k = W(t_0 + kT)$ .

Теорема 2. Пусть для любых двух состояний  $a$  и  $b$  процесса  $W(t)$  существует конечная цепочка состояний  $a = i_0, i_1, \dots, i_m = b$  и набор моментов времени  $t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1}$ , таких, что  $\lambda_{i_l i_{l+1}}(t_l) > 0, \forall l$ . Тогда для любого начального момента  $T_0$  цепь  $\omega_k$  эргодична.

**4. Исследование поведения процессов  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .** Выразим характеристики поведения процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  через величину  $Z(t)$ . Для начала введем обозначения:

$$\begin{aligned} Z_+(t) &= Z(t) \cdot I_{Z(t) \geq 0}, & Z_-(t) &= Z(t) \cdot I_{Z(t) \leq 0}, \\ EX(t) &= f(t), & EY(t) &= g(t), \\ EZ(t) &= h(t), & EZ_+(t) &= h_+(t), & EZ_-(t) &= h_-(t). \end{aligned}$$



Теорема 3. В приведенных выше обозначениях справедливы следующие дифференциальные уравнения:

$$f'(t) = \lambda_x(t) - \alpha h_+(t); \quad (1)$$

$$g'(t) = \lambda_y(t) + \beta h_-(t); \quad (2)$$

$$h'(t) = \lambda_x(t) - \lambda_y(t) - \alpha h_+(t) - \beta h_-(t); \quad (3)$$

$$h'_+(t) = \lambda_x(t) \cdot P(Z(t) \geq 0) + \lambda_y(t) \cdot P(Z(t) > 0) - \alpha h_+(t); \quad (4)$$

$$h'_-(t) = \lambda_x(t) \cdot P(Z(t) < 0) + \lambda_y(t) \cdot P(Z(t) \leq 0) - \beta h_-(t). \quad (5)$$

*Доказательство.* Справедливость всех уравнений доказывается одинаково. Для того, чтобы доказать, например, уравнение (1) необходимо расписать математическое ожидание величины  $\Delta X = X(t+h) - X(t)$  по формуле полной вероятности, группируя в отдельное слагаемое условные математические ожидания относительно событий вероятности  $\bar{d}(h)$ . Затем следует разделить равенство на  $h$  и перейти к пределу при  $h \rightarrow 0$ . Теорема доказана. ■

**5. Свойства решений выведенных уравнений.** Введем обозначения:

$$a(t) = P(Z(t) > 0), \quad b(t) = P(Z(t) < 0), \quad c(t) = P(Z(t) = 0).$$

По теореме 1 существуют такие функции  $a_\pi(t)$ ,  $b_\pi(t)$ ,  $c_\pi(t)$  периода  $T$ , что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |a(t) - a_\pi(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |b(t) - b_\pi(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |c(t) - c_\pi(t)| = 0.$$

Уравнения (5) и (4) — линейные уравнения первого порядка, можно найти их общее решение. Добавляя начальные условия  $h_+(0) = 0$  и  $h_-(0) = 0$ , и преобразуя интегралы, входящие в выражения для  $h_+(t)$  и  $h_-(t)$ , получаем асимптотическое поведение  $EZ_+(t)$  и  $EZ_-(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$EZ_+(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha T} - 1} \int_t^{t+T} [\lambda_x(\tau)(a_\pi(\tau) + c_\pi(\tau)) - \lambda_y(\tau)a_\pi(\tau)] e^{\alpha \tau} d\tau, \quad (6)$$

$$EZ_-(t) \approx \frac{e^{\beta t}}{e^{\beta T} - 1} \int_t^{t+T} [\lambda_x(\tau)b_\pi(\tau) - \lambda_y(\tau)(b_\pi(\tau) + c_\pi(\tau))] e^{\beta \tau} d\tau. \quad (7)$$

Запись  $I(t) \approx J(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  означает, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} |I(t) - J(t)| = 0$ .

**6. Вычисление средней скорости процессоров.** Перейдем от мгновенных скоростей процессоров, равных, соответственно,  $f'(t)$  и  $g'(t)$ , к средним скоростям. В качестве этих величин у нас будут выступать  $\frac{f(t)}{t} = \frac{EX(t)}{t}$  и  $\frac{g(t)}{t} = \frac{EY(t)}{t}$ . Будем интересоваться асимптотическим поведением средних скоростей при  $t \rightarrow \infty$ . С использованием уравнений (1)

и (2) средние скорости выражаются через  $h_+(t)$  и  $h_-(t)$ . Преобразуя эти выражения, получаем асимптотическое равенство средних скоростей:

$$\frac{EX(t_0)}{t_0} \approx \frac{EY(t_0)}{t_0} \approx \frac{\int_0^{t_0} [\lambda_x b_\pi + \lambda_y a_\pi] dt}{t_0} \approx \frac{\int_0^T [\lambda_x b_\pi + \lambda_y a_\pi] dt}{T}. \quad (8)$$

**7. Частные случаи.** Рассмотрим два частных случая.

- 1) Положим  $\alpha = \beta = \gamma$ . Равенства (6) и (7) дают явное асимптотическое выражение для  $EZ(t)$ :

$$EZ(t) \approx \frac{e^{\gamma t}}{e^{\gamma T} - 1} \int_t^{t+T} [\lambda_x(\tau) - \lambda_y(\tau)] e^{\gamma \tau} d\tau. \quad (9)$$

- 2) Пусть теперь  $\lambda_x(t) = \lambda_y(t)$ . Тогда, так как  $a_\pi(t) + b_\pi(t) < 1$ , из формулы для средней скорости (8) можно заключить, что, несмотря на равенство интенсивностей, средняя скорость каждого процессора будет все равно ниже его скорости без синхронизации.

- [1] ГНЕДЕНКО Б. В., КОВАЛЕНКО И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.
- [2] FAYOLLE, MALYSHEV, MENSNIKOV. Constructive Theory of Countable Markov Chains.

УДК 511

## О распределении последовательности по переменному модулю\*

**В. В. Красильщиков, А. В. Шутов**

*Владимирский государственный педагогический университет*

**1. Бесконечные разбиения Фибоначчи.** Классическим примером одномерной квазипериодической структуры являются разбиения Фибоначчи  $Til_\infty(\alpha)$ . Эти разбиения можно определить различными способами [1, 3], например, с помощью пересечения луча  $y = \alpha x$  и целочисленной решетки  $\mathbb{Z}^2$ , где  $\alpha$  — иррациональный угол наклона [2]. В результате получают бесконечное слово из нулей и единиц по правилу: 0, если луч  $y = \alpha x$  пересекает вертикальную линию решетки; 1, если луч  $y = \alpha x$  пересекает

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00435).

горизонтальную линию решетки. Если поставить в соответствие нулю из этого слова интервал длины  $l_1$ , а единице —  $l_2$ , то получим разбиение  $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ .

Эта конструкция может быть обобщена следующим образом.

Множество вершин  $\{x_n\}$  бесконечного разбиения Фибоначчи  $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$  определяется по правилу

$$x_{-1} = 0,$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [0; 1 - \alpha), \\ x_n + l_2, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [1 - \alpha; 1), \end{cases}$$

где  $\langle \cdot \rangle$  — дробная доля.

Рассмотрим множество  $\{x_n\}$  по модулю  $h$  такому, что

$$h = m \frac{l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha}{l\alpha + k}, \quad \text{где } m, l, k \in \mathbb{Z}, k^2 + l^2 \neq 0. \quad (1)$$

Определим символ  $\langle x \rangle_h$ , как единственное число  $y$ , удовлетворяющее условиям  $0 \leq y < h$ ,

$$y \equiv x \pmod{h}.$$

Определим множество  $\{y_n\}$  равенством  $y_n = \langle x_n \rangle_h$ .

Рассмотрим множество  $Y(h)$  такое, что  $Y(h) = \overline{\{y_n\}}$ , где  $\overline{Y}$  — замыкание множества  $Y$ . Очевидно, что  $Y(h) \subseteq [0; h)$ .

Определение 1. Будем говорить, что  $h \in S$ , если выполняется условие  $Y(h) \neq [0; h)$ .

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть  $\alpha$  — иррационально,  $h$  представимо в виде

$$h = m \frac{l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha}{l\alpha + k}, \quad \text{где } m, l, k \in \mathbb{Z}, k^2 + l^2 \neq 0. \quad (2)$$

$h \in S$  тогда и только тогда, когда выполняется дополнительное условие

$$\Delta = |l_1(l + k) - l_2k| < l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha.$$

Заметим, что если  $\alpha$  — квадратичная иррациональность, то любое число вида  $a + b\alpha$  с рациональными  $a$  и  $b$  представимо в виде (2).

Гипотеза 1. Пусть  $h$  нельзя представить в виде (2), тогда  $h \notin S$ .

**2. Распределение по переменному модулю  $h$ .** Ограничимся теперь значениями  $h$  вида

$$h = \frac{l_1(1 - \alpha) + l_2\alpha}{l\alpha + k}, \quad \text{где } l, k \in \mathbb{Z}, k^2 + l^2 \neq 0. \quad (3)$$

Для описания неравномерности распределения множества вершин разбиения по модулю  $h$  введем функцию  $v(\varepsilon)$

$$v(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k : 0 \leq k < n, \langle x_k \rangle_h \in [0; \varepsilon]\}}{n}. \quad (4)$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть  $h_0 > 0$ .

Если  $h_0 < h$ , тогда

$$v(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{h_0}, & \text{если } \varepsilon \in [0; h_0), \\ 1, & \text{если } \varepsilon \in [h_0; h). \end{cases}$$

Если  $h_0 > h$ , тогда

$$v(\varepsilon) = \begin{cases} c\varepsilon(\lceil \frac{h_0}{h} \rceil + 1), & \text{если } \varepsilon \in [0; \langle h_0 \rangle_h), \\ c(\varepsilon \lceil \frac{h_0}{h} \rceil + \langle h_0 \rangle_h), & \text{если } \varepsilon \in [\langle h_0 \rangle_h; h). \end{cases}$$

Если  $h_0 = h$ , тогда

$$v(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{h}.$$

Здесь  $c = \frac{1}{h\lceil \frac{h_0}{h} \rceil + \langle h_0 \rangle_h}$  и  $h_0 = \frac{l_1(l+k) - l_2k}{l\alpha + k}$ .

Теорема 3. Пусть  $h_0 < 0$ .

Если  $|h_0| < h$ , тогда

$$v(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon \in [0; h - |h_0|), \\ \frac{\varepsilon - h}{|h_0|} + 1, & \text{если } \varepsilon \in [h - |h_0|; h). \end{cases}$$

Если  $|h_0| > h$ , тогда

$$v(\varepsilon) = \begin{cases} c\varepsilon\lceil \frac{|h_0|}{h} \rceil, & \text{если } \varepsilon \in [0; h - \langle |h_0| \rangle_h), \\ c(\varepsilon(\lceil \frac{|h_0|}{h} \rceil + 1) - h + \langle |h_0| \rangle_h), & \text{если } \varepsilon \in [h - \langle |h_0| \rangle_h; h). \end{cases}$$

Если  $|h_0| = h$ , тогда

$$v(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{h}.$$

Здесь  $c = \frac{1}{h\lceil \frac{|h_0|}{h} \rceil + \langle |h_0| \rangle_h}$  и  $h_0 = \frac{l_1(l+k) - l_2k}{l\alpha + k}$ .

- [1] ARNOUX P., BERTHE V., EI H., ITO S. Tilings, quasicrystals, discrete planes, generalized substitutions and multidimensional continued fractions *Discrete models: combinatorics, computation and geometry*. — Paris. — 2001. — 59–78.

- 
- [2] N. PYTHEAS FOGG. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. *Springer*, 2002.
- [3] ZHURAVLEV V.G. One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle. *Max-Planck-Institut für Mathematik. Preprint Series.* — 2004. — 59. — 1–43.

УДК 519.21

## Статистический вариант ЦПТ для векторных слабо зависимых полей

**Н. Ю. Крыжановская**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

В данной работе устанавливается центральная предельная теорема (ЦПТ) с использованием случайной матричной нормировки для строго стационарных случайных полей, определенных на решетке  $\mathbb{Z}^d$  и принимающих значения в пространстве  $\mathbb{R}^k$ . Структура зависимости рассматриваемых полей описывается в терминах  $(BL, \theta)$ -зависимости.

Определение 1 ([6]). Случайное поле  $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$  называется  $(BL, \theta)$ -зависимым, если существует монотонно стремящаяся к нулю при  $r \rightarrow \infty$  положительная последовательность  $\{\theta_r\}_{r \in \mathbb{N}}$  такая, что для любых конечных непересекающихся множеств  $I, J \subset \mathbb{Z}^d$  и любых ограниченных липшицевых функций  $f: \mathbb{R}^{k|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R}^{k|J|} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет место неравенство

$$|\text{cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) (|I| \wedge |J|) \theta_{\text{dist}(I, J)}, \quad (1)$$

где  $|I|$  — число точек множества  $I$ ,  $\text{Lip}(f)$  — липшицева константа функции  $f$ ,  $\text{dist}(I, J) = \max\{\|x - y\|, x \in I, y \in J\}$ ,  $\|x\| = \max_{1 \leq p \leq d} |x_p|$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ .

Имеется ряд важных стохастических моделей, обладающих свойством  $(BL, \theta)$ -зависимости. Достаточно упомянуть положительно или отрицательно ассоциированные, квази-ассоциированные и др. системы случайных величин ([1, 3, 6, 7]).

Суммирование мультииндексированных векторов ведется по конечным множествам  $U_n \subset \mathbb{Z}^d$ , в определенном смысле растущим при  $n \rightarrow \infty$ . Для  $U \subset \mathbb{Z}^d$  положим  $\partial U = \{s \in U : \inf_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus U} \|s - t\| = 1\}$ .

Определение 2. Говорят, что последовательность  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  конечных подмножеств  $\mathbb{Z}^d$  стремится к бесконечности *регулярным образом*, если

$$\frac{|\partial U_n|}{|U_n|} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Это понятие является дискретным аналогом понятия регулярного роста множеств в смысле Ван Хова. Введем обозначение:

$$S(U_n) = \sum_{j \in U_n} X_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1 ([5]). Пусть  $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$  — строго стационарное  $(BL, \theta)$ -зависимое случайное поле со значениями в  $\mathbb{R}^k$ . Предположим, что  $\sigma_{r,q} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\text{cov}(X_{0,r}, X_{j,q})| < \infty$  при всех  $r, q = 1, \dots, k$ . Тогда для любых конечных множеств  $U_n \subset \mathbb{Z}^d$ , удовлетворяющих условию (2), справедливо соотношение

$$|U_n|^{-1/2}(S(U_n) - |U_n| \mathbb{E} X_0) \xrightarrow{D} N(0, C) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Здесь  $C$  — матрица с элементами

$$c_{r,q} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \text{cov}(X_{0,r}, X_{j,q}), \quad r, q = 1, \dots, k,$$

и « $\xrightarrow{D}$ » обозначает слабую сходимость распределений векторов в  $\mathbb{R}^k$ .

Если  $C$  — невырожденная матрица, то (3) влечет следующее соотношение:

$$(|U_n|C)^{-1/2}(S(U_n) - |U_n| \mathbb{E} X_0) \xrightarrow{D} N(0, \mathbf{I}), \quad (4)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица порядка  $k$ . Таким образом, если имеется последовательность состоятельных оценок  $\hat{C}_n = \hat{C}(U_n) = (\hat{c}_{r,q}(U_n))_{r,q=1}^k$  матрицы  $C$ , т. е. таких, что при всех  $r, q = 1, \dots, k$

$$\hat{c}_{r,q}(U_n) \xrightarrow{P} c_{r,q} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

то в силу (4) и (5) приходим к формуле

$$(|U_n| \hat{C}_n)^{-1/2}(S(U_n) - |U_n| \mathbb{E} X_0) \xrightarrow{D} N(0, \mathbf{I}). \quad (6)$$

Для  $j \in U \subset \mathbb{Z}^d$  ( $1 \leq |U| < \infty$ ),  $b = b(U) > 0$  и  $r, q = 1, \dots, k$  положим

$$K_j(b) = \{t \in \mathbb{Z}^d : \|j - t\| \leq b\}, \quad Q_j = Q_j(U, b) = U \cap K_j(b),$$

$$\hat{c}_{r,q}(U) = \frac{1}{|U|} \sum_{j \in U} |Q_j| \left( \frac{S_r(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S_r(U)}{|U|} \right) \left( \frac{S_q(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S_q(U)}{|U|} \right).$$

Эти статистики были введены в [2] для случая скалярно-значных полей ( $k = 1$ ), а для векторно-значных полей впервые были использованы в [1].

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любой последовательности положительных чисел  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  такой, что

$$b_n \rightarrow \infty, \quad \frac{b_n^d |\partial U_n|}{|U_n|} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

справедливо соотношение (5). Кроме того, если матрица  $C$  невырождена, то имеет место (6).

Тем самым расширяется область действия ЦПТ, установленной в [1]. Кроме того, ослаблено ограничение на выбор последовательности  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Следующая теорема дает оценку скорости сходимости в соотношении (5) при некоторых дополнительных ограничениях. Далее будем считать, что верны следующие условия:

1°.  $U_n = [-n, n]^d$  ( $d$ -мерные кубы в  $\mathbb{Z}^d$ ),  $n \in \mathbb{N}$ .

2°.  $D_s := \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} |X_j|^s < \infty$  для некоторого  $s > 2$ .

3°.  $X$  является  $(BL, \theta)$ -зависимым случайным полем, удовлетворяющим (1) с  $\theta_r = O(r^{-\lambda})$  при  $r \rightarrow \infty$  для некоторого  $\lambda$  такого, что

$$\lambda > d\psi(s),$$

где  $s$  — это число из условия 2°, а функция  $\psi(s)$  имеет вид

$$\psi(s) = \begin{cases} (s-1)/(s-2), & 2 < s \leq 4, \\ (3-\sqrt{s})(\sqrt{s}+1)/2, & 4 < s \leq t_0^2, \\ ((s-1)\sqrt{(s-2)^2-3}-s^2+6s-11)/(3s-12), & s > t_0^2, \end{cases}$$

здесь  $t_0 \approx 2.1413$  — наибольший корень уравнения  $t^3 + 2t^2 - 7t - 4 = 0$ .

В [4] доказывается, что при выполнении условий 1°–3° для некоторых  $\delta$  и  $B$ , зависящих только от  $d$ ,  $s$ ,  $D_s$  и  $\lambda$ , верна оценка

$$\mathbb{E} |S(U_n)|^{2+\delta} \leq B |U_n|^{1+\delta/2}. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть выполнены предположения теоремы 1 и условия 1°–3°. Обозначим  $a = 2 + \frac{4}{\delta}$ , где  $\delta$  из оценки (7). Тогда

$$\|\hat{c}_{r,q}(U_n) - c_{r,q}\|_{L^1} = O(n^{-\mu}),$$

где

$$\mu = \begin{cases} \frac{d\lambda}{a(\lambda+d)}, & \text{при } \lambda+1 < a \text{ и } d \leq a, \\ \frac{\lambda}{2\lambda+1}, & \text{при } \lambda+1 \geq a \text{ и } d > a, \\ \frac{d\lambda}{(a+d)\lambda+d}, & \text{при } \lambda+1 \geq a \text{ и } d \leq a. \end{cases}$$

Замечание. В теореме 3 случай  $\lambda + 1 < a$  и  $d > a$  невозможен. Действительно, предположим, что эти неравенства выполняются одновременно, тогда  $a - 1 > \lambda > d\psi(s) > d > a$ , что неверно.

Используя результат теоремы 3, установлена следующая

Теорема 4. Пусть выполнены предположения теоремы 3. Пусть также для  $s$ , определенного в 2°, верно, что  $s \in (2, 3]$  и

$$\lambda > d \frac{s}{s-2}.$$

Тогда

$$\sup_{\mathbf{x}} |P\{(|U_n|\hat{C}_n)^{-1/2}S(U_n) \leq \mathbf{x}\} - \Phi(\mathbf{x})| = O(n^{-\min\{\frac{2}{3}\mu, v/3\}}),$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\Phi(\mathbf{x})$  — функция распределения многомерного стандартного нормального вектора,  $\mu$  — число, определенное в теореме 3, а

$$v = \frac{d\lambda(s-2) - d^2s}{d(2s\lambda + s + 1) + 2\lambda(1-d)}.$$

Таким образом, теорема 4 дает оценку скорости сходимости функций распределения векторных статистик  $(|U_n|\hat{C}_n)^{-1/2}S(U_n)$  к функции распределения нормального закона.

- [1] Булинский А. В. Статистический вариант центральной предельной теоремы для векторных случайных полей *Мат. заметки*. — 2004. — **76** — В.4. — 490–501.
- [2] Булинский А. В., Вронский М. А. Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей *Фундамент. и прикл. матем.* — 1996. — **2** — №4. — 999–1018.
- [3] Булинский А. В., Шабанович Э. Асимптотическое поведение некоторых функционалов от положительно и отрицательно зависимых случайных полей *Фундамент. и прикл. матем.* — 1998. — **4** — 479–492.
- [4] BULINSKI A. V., SHASHKIN A. P. Strong Invariance Principle for Dependent Random Fields *Lect. Notes Math.* — 2005.
- [5] BULINSKI A., SHASHKIN A. Limit Theorems for Associated and Related Random Fields — 2006, 350pp. (to appear).
- [6] BULINSKI A., SUQUET C. Normal approximation for quasi-associated random fields *Statist. Probability Lett.* — 2001. — **54** — 215–226.
- [7] SHASHKIN A. P. A weak dependence property of a spin system. *Transactions of XXIV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. Yurmala, Latvia*. — 2004. — 30–35.



## Операторы дифференцирования и интегрирования в линейном пространстве

**П. Н. Кузнецов**

*Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева*

**1. Введение оператора дифференцирования.** В работе предлагается способ дифференцирования и интегрирования финитных векторов бесконечномерного векторного пространства. При этом векторное пространство отображается в некоторое функциональное пространство, в котором находится производная, первообразная от функции, которая соответствует данному вектору. По этой производной, первообразной с помощью обратного отображения определяется производная, первообразная данного вектора. В качестве функциональных пространств можно брать пространства многочленов, показательных функций, тригонометрических полиномов и некоторые другие пространства.

Основные результаты работы опубликованы в статьях [1, 2].

Возьмем в качестве функционального пространства пространство многочленов.

Пусть вектор  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in V_\infty^{(0)}$ , где  $V_\infty^{(0)}$  — линейное пространство финитных последовательностей действительных чисел. Поставим в соответствие вектору  $\vec{a}$  многочлен от вещественной переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} H : \vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) &\rightarrow \\ \rightarrow f_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \end{aligned}$$

Найдем производную по  $x$  от этого многочлена:

$$\begin{aligned} G : f_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n &\rightarrow \\ \rightarrow f'_a(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вектор  $\vec{a}' \in V_\infty^{(0)}$ , соответствующий многочлену  $f'_a(x)$ :

$$H^{-1} : f'_a(x) \rightarrow \vec{a}' = (a_1, 2a_2, \dots, na_n, 0, 0, \dots).$$

Дадим следующие определения.

Определение 1. Вектор  $\vec{a}'$  назовем производным от вектора  $\vec{a}$ .

Определение 2. Правило, по которому определяется производная вектора  $\vec{a}$ , назовем дифференцированием вектора  $\vec{a}$  и будем обозначать:

$$D(\vec{a}) = \vec{a}'. \quad (1)$$

**2. Основные свойства оператора дифференцирования.** Оператор дифференцирования  $D : V_{\infty}^{(0)} \rightarrow V_{\infty}^{(0)}$  обладает следующими свойствами.

Теорема 1. Оператор дифференцирования в линейном пространстве финитных последовательностей  $V_{\infty}^{(0)}$  является линейным оператором.

Теорема 2. Матрица линейного оператора относительно канонического базиса  $\{\vec{e}_i\}_0^{\infty}$  имеет вид:

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Теорема 3. Оператор  $D : V_{\infty}^{(0)} \rightarrow V_{\infty}^{(0)}$  имеет одно собственное значение, равное нулю, а соответствующий собственный вектор имеет вид:

$$\vec{a} = (c, 0, 0, \dots, 0, \dots), \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Теорема 4.

$$\begin{aligned} \text{Ker } D &= \{\vec{a}(c, 0, 0, \dots), c = \text{const}\}, \quad \text{def } D = 1, \\ \text{Im } D &= R[x], \quad \text{rg } D = \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 5. Оператор  $D : V_{\infty}^{(0)} \rightarrow V_{\infty}^{(0)}$  сюръективен и не инъективен. Дадим определения произведения и делимости двух векторов. Пусть

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in V_{\infty}^{(0)}, \\ \vec{b} &= (b_0, b_1, \dots, b_m, 0, 0, \dots) \in V_{\infty}^{(0)}. \end{aligned}$$

Определение 3. Произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  назовем вектор

$$\vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, \sum_{i+j=0}^{n+m} a_i b_j, 0, 0, \dots), \quad \vec{d} \in V_{\infty}^{(0)}. \quad (5)$$

Определение 4. Будем говорить, что вектор  $\vec{a}$  делится на вектор  $\vec{b}$ , если существует такой вектор  $\vec{c} \in V_{\infty}^{(0)}$ , что  $\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ .

Теорема 6. Для любых двух векторов  $\vec{a}, \vec{b} \in V_{\infty}^{(0)}$  справедливы равенства:

$$D(\vec{a}\vec{b}) = \vec{b} \cdot D(\vec{a}) + \vec{a} \cdot D(\vec{b}); \quad (6)$$

$$D(\lambda\vec{a}) = \lambda D(\vec{a}), \quad \text{где } \lambda = \text{const}, \lambda \in \mathbb{R}; \quad (7)$$

$$D(\vec{a}^n) = n\vec{a}^{n-1}D(\vec{a}); \quad (8)$$

$$D\left(\frac{\vec{a}}{\vec{b}}\right) = \frac{\vec{b} \cdot D(\vec{a}) - \vec{a} \cdot D(\vec{b})}{\vec{b}^2}, \quad (9)$$

где вектор  $\vec{a}$  делится на  $\vec{b}$ .

**3. Решение некоторых дифференциальных уравнений. Решение задачи Коши.** Справедливы следующие теоремы.

Теорема 7. Общим решением уравнения  $D(\vec{a}) = \vec{b}$ , где вектор

$$\vec{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, 0, 0, \dots) \in V_{\infty}^{(0)},$$

является семейство векторов вида

$$\vec{a} = \left( c, b_0, \frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{3}, \dots, \frac{b_{n-1}}{n}, 0, 0, \dots \right),$$

где  $c$  — произвольная постоянная.

Теорема 8. Решением задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} D(\vec{a}) = \vec{b}, & \text{где } \vec{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, 0, 0, \dots), \vec{a}, \vec{b} \in V_{\infty}^{(0)}, \\ f_a(x_0) = f_{a_0}, \end{cases}$$

где  $f_{a_0}$  — значение функции  $f_a(x)$  в некоторой действительной точке  $x_0$ , есть вектор  $\vec{a}$  с координатами

$$\vec{a} = \left( f_{a_0} - b_0 x_0 - \frac{b_1}{2} x_0^2 - \frac{b_2}{3} x_0^3 - \dots - \frac{b_{n-1}}{n} x_0^n, \right. \\ \left. b_0, \frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{3}, \dots, \frac{b_{n-1}}{n}, 0, 0, \dots \right).$$

**4. Определение первообразной, неопределенного и определенного интегралов.** Пусть дан вектор

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in V_{\infty}^{(0)}.$$

Дадим следующие определения.

Определение 5. Первообразным вектором для вектора  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$  будем называть семейство векторов вида  $\vec{A} = (c, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_n}{n+1}, 0, 0, \dots)$ , где  $c = \text{const}$ , таких, что  $\vec{A}' = \vec{a}, \vec{A} \in V_{\infty}^{(0)}$ .

Определение 6. Вектор вида  $\vec{A} = (c, c_1, c_2, \dots, c_n, 0, 0, \dots)$ , где  $c = \text{const}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $\vec{A}$  — первообразный вектор для вектора  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in V_{\infty}^{(0)}$ , называется неопределенным интегралом от вектора  $\vec{a}$  и обозначается

$$\begin{aligned} \int \vec{a} dx &= \int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) dx = \\ &= c + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \end{aligned}$$

где  $c = \text{const}$ ,  $a_0 = c_1$ ,  $\frac{a_1}{2} = c_2$ ,  $\frac{a_2}{3} = c_3$ ,  $\dots$ ,  $\frac{a_n}{n+1} = c_{n+1}$ .

Определение 7. Определенным интегралом от вектора  $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in V_{\infty}^{(0)}$  называется выражение вида

$$\int_a^b \vec{a} dx = \int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) dx.$$

- [1] КОПЫЛОВ В. И., КУЗНЕЦОВ П. Н. Оператор дифференцирования в линейном пространстве // *Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*. — 2005. — № 2(6). — 18–21.
- [2] КОПЫЛОВ В. И., КУЗНЕЦОВ П. Н. Определение оператора дифференцирования с помощью семейства показательных функций // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*. — 2005. — № 4(47). — 3–11.

УДК 519.633

## Вычислительный алгоритм для расчета упругих волн в блочной среде на многопроцессорных вычислительных системах

**Е. В. Кучунова**

*Красноярский государственный университет*

Настоящая работа посвящена исследованию методами численного моделирования процессов распространения упругих сред в разноблочных средах. Для данной задачи разработан параллельный алгоритм сквозного

счета, в котором используется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным в сочетании с явной монотонной ENO-схемой решения одномерных задач. Алгоритм предназначен для численного решения трехмерных динамических задач на многопроцессорных вычислительных системах.

Математической моделью распространения упругих волн в среде является нестационарная гиперболическая система уравнений в матричной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{u} = (v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$  — вектор-функция:  $v_i$  — проекции вектора скорости частиц упругой среды и  $\sigma_{ij}$  — компоненты симметричного тензора напряжения. Коэффициенты матриц  $A_i$  зависят от механических параметров материала [1].

Предполагается, что исходная область  $\Omega$  имеет сложную структуру — содержит внутренние поверхности раздела материала с существенно различающимися механическими свойствами, жесткие включения небольшого размера и т.п. Массив среды представляем в виде набора разнородных блоков с криволинейными границами:  $\Omega = \bigcup \Omega_{ijk}$ ;  $i = 1, \dots, n_1$ ;  $j = 1, \dots, n_2$ ;  $k = 1, \dots, n_3$ , где  $n_1$  — число слоев,  $n_2$  — число полос в слое,  $n_3$  — число блоков в полосе. В более общем случае несогласованных границ такое разбиения можно ввести при помощи фиктивных границ блоков.

На внутренних границах векторы перемещения, скорости и напряжения предполагаются непрерывными, что соответствует условиям жесткой склейки блоков. На внешней границы массива допускается постановка основных типов граничных условий в напряжениях и скоростях, а также неотражающих условий, моделирующих беспрепятственное прохождение волн.

Для построения сетки во всех вершинах блоков вычисляем касательные векторы к граничным поверхностям (поверхностям раздела материалов). Затем в каждом блоке строится криволинейная регулярная сетка на основе эрмитовых кубических сплайнов. Выбирается алгебраический метод, заключающийся в нахождении взаимно-однозначного отображения вычислительной области  $\Omega_{comp}$  в виде единичного куба с равномерной сеткой в физическую. Функция, осуществляющая отображение, ищется в виде кубического сплайна:

$$x(\xi) = \sum_{i,j,k=0}^3 c_{ijk} (\xi_1)^i (\xi_2)^j (\xi_3)^k,$$

векторные коэффициенты которого находятся в явном виде из условий сопряжения в вершинах блоков: заданы положения вершин и направления выхода координатных линий в вершинах. В результате в соседних блоках возможно построение сеток с разными размерами ячеек. В этом случае применяется процедура склейки решения на поверхностях раздела.

В основе алгоритма численного решения исходной системы лежит метод двуциклического расщепления по пространственным переменным [2] в параметрическом пространстве  $\Omega_{comp}$ . Для этого преобразуем исходную систему к следующему виду:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \tilde{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_1} + \tilde{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_2} + \tilde{A}_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_3}; \quad \tilde{A}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} A_j. \quad (1)$$

Таким образом, на каждом временном шаге  $[t_n, t_n + \tau]$  последовательно решается серия шести одномерных задач:

$$\begin{aligned} (t_n, t_n + \frac{\tau}{2}) : \quad & \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\xi_1} = \tilde{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \xi_1}, \quad \mathbf{u}^{(1)}(t_n) = \mathbf{u}(t_n); \\ (t_n, t_n + \frac{\tau}{2}) : \quad & \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\xi_1} = \tilde{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \xi_2}, \quad \mathbf{u}^{(2)}(t_n) = \mathbf{u}^{(1)}(t_n + \frac{\tau}{2}); \\ (t_n, t_n + \frac{\tau}{2}) : \quad & \frac{\partial \mathbf{u}^{(3)}}{\xi_1} = \tilde{A}_3 \frac{\partial \mathbf{u}^{(3)}}{\partial \xi_3}, \quad \mathbf{u}^{(3)}(t_n) = \mathbf{u}^{(2)}(t_n + \frac{\tau}{2}); \\ (t_n + \frac{\tau}{2}, t_n + \tau) : \quad & \frac{\partial \mathbf{u}^{(4)}}{\xi_3} = \tilde{A}_3 \frac{\partial \mathbf{u}^{(4)}}{\partial \xi_3}, \quad \mathbf{u}^{(4)}(t_n) = \mathbf{u}^{(3)}(t_n + \frac{\tau}{2}); \\ (t_n + \frac{\tau}{2}, t_n + \tau) : \quad & \frac{\partial \mathbf{u}^{(5)}}{\xi_2} = \tilde{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}^{(5)}}{\partial \xi_2}, \quad \mathbf{u}^{(5)}(t_n) = \mathbf{u}^{(4)}(t_n + \tau); \\ (t_n + \frac{\tau}{2}, t_n + \tau) : \quad & \frac{\partial \mathbf{u}^{(6)}}{\xi_1} = \tilde{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}^{(6)}}{\partial \xi_1}, \quad \mathbf{u}^{(6)}(t_n) = \mathbf{u}^{(5)}(t_n + \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Значение  $\mathbf{u}^{(6)}(t_n + \tau)$  будет представлять собой искомое  $\mathbf{u}(t_n + \tau)$ .

К каждой из задач применяется явная монотонная разностная ENO- (Essentially Non-Oscillatory) схема предиктор-корректор с предельной реконструкцией решения (см. [3]), которая представляет собой обобщение схемы Годунова с кусочно-линейными распределениями скоростей и напряжений в ячейках, является вариантом сеточно-характеристической схемы и имеет второй порядок точности. Следует заметить, что рассматриваемый метод двуциклического расщепления сохраняет второй порядок точности при использовании на его этапах любой одномерной схемы

---

второго порядка [3]. Кроме того, двойной пересчет одной и той же системы уравнений на третьем и четвертом этапах расщепления гарантирует устойчивость метода при выполнении одномерного условия Куранта–Фридрихса–Леви.

Технология распараллеливания вычислений основана на разделении исходной области  $\Omega$  по узлам в вычислительной системе исходя из требования равномерной загрузки узлов. При этом разделение области по процессорам происходит строго по блокам. Если размерность сетки в блоке больше средней размерности в расчете на один узел кластера, то этот блок обслуживается несколькими процессорами, и, наоборот, один и тот же узел обслуживает несколько соседних блоков, если их суммарная размерность не превышает средней.

Изложенный выше алгоритм численного решения задачи реализован комплексом программ на алгоритмическом языке Fortran-90 с использованием библиотеки обмена сообщениями MPI (Message Passing Interface). Построенные параллельные алгоритмы протестированы на кластере МВС-1000/16 Института вычислительного моделирования г. Красноярск.

На рис. 1 приведены результаты численного исследования упругих волн в полупространстве, генерируемых периодическим источником возмущений на его поверхности. Исходная область состоит из двух разнородных слоев с выпуклой поверхностью раздела. Верхняя грань блока за исключением зоны приложения импульсной нагрузки считается свободной от напряжений. На остальных гранях поставлены неотражающие условия, которые соответствуют бесконечной протяженности массива и формулируются для одномерных систем. В расчетах область решения разбивалась на восемь криволинейных блоков. Вертикальные границы раздела вводились фиктивно для упрощения анализа результатов с помощью графических программ. Расчеты демонстрируют адекватную работу неотражающих граничных условий: искажения симметрии поверхностных волн Релея, которым на рисунке соответствует система концентрических колец, при переходе через фиктивные границы блока не происходит. Из-за выпуклости разделяющей поверхности происходит фокусировка волн в нижнем слое, напротив, отраженные волны в верхнем слое расфокусируются.

[1] Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 2002. 200 с.

[2] Марчук С. К. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988.

[3] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.

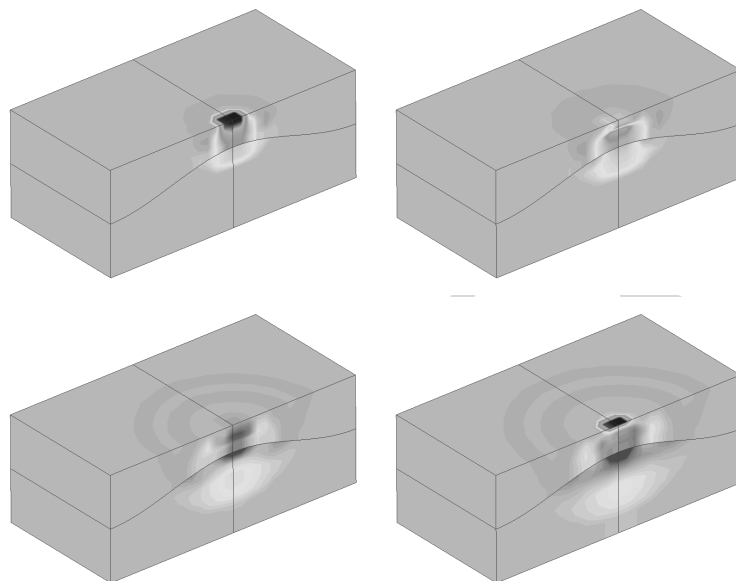


Рис. 1. Прохождение волн через выпуклую границу раздела

УДК 629.7

# **Изучение вращательного движения сегментально-конического аппарата при спуске в атмосфере\***

***А. С. Ледков***

*Самарский государственный аэрокосмический  
университет им. академика С. П. Королева*

В настоящее время актуальными остаются задачи, связанные с изучением неуправляемого движения аппарата при спуске в атмосфере. Такое движение реализуется при доставке грузов с орбиты на поверхность планеты, а также при аварийных спусках космических аппаратов.

Для спуска в разреженной атмосфере, например, в атмосфере Марса, широко используются сегментально-конические тела малого удлинения затупленной формы. Применение данной конфигурации обусловлено

\*научный руководитель д. т. н., профессор В. С. Асланов



тем, что для обеспечения эффективного торможения в разреженной атмосфере требуется большая площадь миделя. У аппаратов такого типа существует особенность аэродинамической природы — три балансирующих положения равновесия по пространственному углу атаки (углу нутации). Учесть эту особенность позволяет аппроксимация восстанавливающего момента двумя первыми гармониками нечетного ряда Фурье

$$m_\alpha = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha. \quad (1)$$

Запишем уравнения пространственного движения осесимметричного тела при спуске в атмосфере в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + F(\alpha, z) &= \varepsilon m_z(z) \dot{\alpha}, \\ F(\alpha, z) &= \frac{(G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} - M_\alpha(\alpha, z), \\ \dot{G} &= -\varepsilon (m_y(z)G + (m_x(z) - m_y(z))R \cos \alpha), \\ \dot{R} &= -\varepsilon m_x(z)R, \quad \dot{V} = -c_{x\alpha}(\alpha) \cdot \frac{qS}{m} - g \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\cos \theta}{V} \left( g - \frac{V^2}{R_\Pi + H} \right), \quad \dot{H} = V \sin \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $z = (R, G, V, \theta, H)$  — вектор медленно меняющихся параметров;  $\alpha$  — пространственный угол атаки,  $\varepsilon$  — малый параметр,  $R$  и  $G$  — с точностью до множителя проекции вектора кинетического момента на продольную ось и на направление скорости;  $V$  — скорость движения аппарата,  $\theta$  — угол наклона траектории,  $H$  — высота полета,  $g$  — ускорение свободного падения,  $c_{x\alpha}(\alpha)$  — коэффициент силы лобового сопротивления,  $q = \rho V^2/2$  — скоростной напор,  $\rho$  — плотность атмосферы,  $S$  — площадь миделевого сечения,  $m$  — масса тела,  $M_\alpha = m_\alpha qSL/I$  — с точностью до множителя восстанавливающий момент ( $I$  — поперечный момент инерции тела,  $L$  — характерный размер),  $R_\Pi$  — радиус планеты;  $\varepsilon m_x(z)$ ,  $\varepsilon m_y(z)$ ,  $\varepsilon m_z(z)$  — проекции малого демпфирующего момента на оси правой системы координат  $Oxuz$  выбранной так, что  $Ox$  направлена по оси симметрии аппарата,  $Oy$  — лежит в плоскости, образуемой  $Ox$  и вектором скорости  $V$ .

Наличие третьего положения равновесия определяет возможность существования на фазовом портрете трех областей, разделенных сепаратрисой [3].

Под действием возмущений, к которым можно отнести, например, изменение скоростного напора при спуске космического аппарата в атмосфере, области движения на фазовом портрете деформируются. В результате изображающая точка может «погружаться» или «выталкиваться»

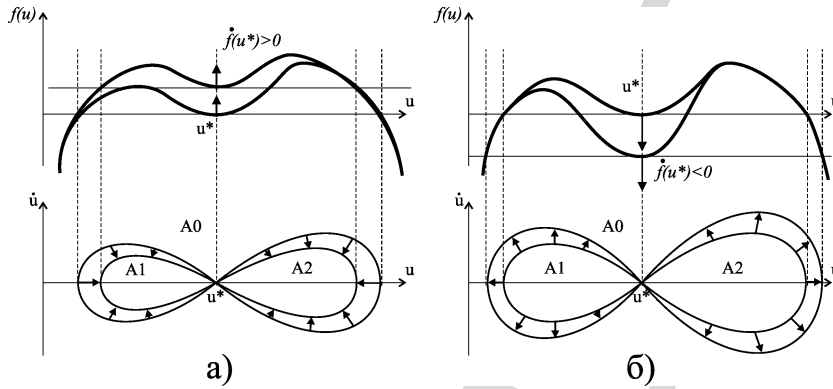


Рис. 1. Деформация областей движения фазового портрета системы

из своей области. В соответствии с этим будем говорить об устойчивости и неустойчивости областей. Очевидно, что могут наблюдаться две ситуации: A1, A2 — неустойчивы, A0 — устойчива (рис. 1.а); и A1, A2 — устойчивы, а A0 — неустойчива (рис. 1.б) [4]. В последнем случае попадание в ту или иную область движения определяется фазой угла атаки в момент пересечения фазовой траекторией сепаратрисы. Если фаза не определена, то попадание в область носит случайный характер. Оценить вероятность попадания изображающей точки в ту или иную область можно рассчитав их площади [5].

Вероятностный характер переходного процесса приводит к тому, что единичное численное интегрирование полной системы уравнений возмущенного движения (2) не дает достоверных результатов.

Для исследования возмущенного движения целесообразно использовать приближенную усредненную систему уравнений [6]

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{max} = & \frac{2\varepsilon}{TF(\alpha_{max})} \left( m_z(\tau) + (R^2 m_x(\tau) + G^2 m_y(\tau)) I_2 - 2RG m_y(\tau) I_3 \right. \\ & - R^2 (m_x(\tau) - m_y(\tau)) I_4 - \frac{G - R \cos \alpha_{max}}{\sin^2 \alpha_{max}} (m_x(\tau) - m_y(\tau)) R I_5 + \\ & + \frac{da}{dq} \dot{q} I_5 + \frac{db}{dq} \dot{q} I_6 \left. \right) - \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{max})} \cdot \left( \frac{R - G \cos \alpha_{max}}{\sin^2 \alpha_{max}} \cdot m_x(\tau) R + \right. \\ & + \frac{G - R \cos \alpha_{max}}{\sin^2 \alpha_{max}} \cdot m_y(\tau) G + \frac{da}{dq} \dot{q} \cos \alpha_{max} + \frac{db}{dq} \dot{q} \cos^2 \alpha_{max} \left. \right), \end{aligned}$$

$$\dot{G} = \varepsilon m_y(\tau)G + \frac{2\varepsilon}{T}(m_x(\tau) - m_y(\tau))RI_5, \quad \dot{R} = -\varepsilon m_x(\tau)R, \quad (3)$$

$$\dot{V} = -\frac{2qS}{mT} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{c_{x\alpha}(\alpha)d\alpha}{\dot{\alpha}},$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\cos\theta}{V} \left( g - \frac{V^2}{R_{\Pi} + H} \right), \quad \dot{H} = V \sin\theta.$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \dot{\alpha} d\alpha, & I_2 &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha} \sin^2 \alpha}, & I_3 &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\dot{\alpha} \sin^2 \alpha}, \\ I_4 &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha}{\dot{\alpha} \sin^2 \alpha}, & I_5 &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\dot{\alpha}}, & I_6 &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha}{\dot{\alpha}}, \\ T &= 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}, \quad \tau = \varepsilon t. \end{aligned}$$

Интегралы  $I_i$  могут быть сведены к полным нормальным эллиптическим интегралам Лежандра первого, второго и третьего рода [7]. Для этого в зависимости от вида и расположения корней полинома (табл. 1) следует воспользоваться одной из замен переменных [4].

$$\cos(\alpha) = u = \frac{u_1(u_2 - u_3) + u_3(u_1 - u_2)\cos^2\gamma}{(u_2 - u_3) + (u_1 - u_2)\cos^2\gamma}. \quad (4)$$

или

$$\cos(\alpha) = u = \frac{(u_2 + u_1\xi) - (u_2 - u_1\xi)\cos\gamma}{(1 + \xi) - (1 - \xi)\cos\gamma}, \quad (5)$$

где  $\xi = \cos\chi_1/\cos\chi_2$ ,  $tg\chi_1 = (u_1 - u_3)/v$ ,  $tg\chi_2 = (u_2 - u_3)/v$ . Здесь  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ ,  $u_{34} \pm iv$  — корни полинома

$$f(u) = 3bu^4 + 2au^3 - 2(b+E)u^2 + 2(RG-a)u + (2E-G^2-R^2). \quad (6)$$

Здесь  $E$  — энергия системы. Полином (6) входит в состав интеграла энергии, который после замены  $u = \cos\alpha$  принимает вид:

$$\dot{u}^2 - f(u) = 0. \quad (7)$$

В случае, когда все корни действительные, применяется замена (4), если есть комплексно-сопряженные корни — замена (5).

Число характерных вариантов расположения корней полинома (6) ограничено (табл. 1) [2]. Таким образом, выбор способа нумерации кор-

Вар.	Обл.	$u_1, u_2$	$u_3, u_4$	Тип корней
R1	A2	$u_1 < 1$	$u_4 < u_3 < -1$	$u_1, u_2, u_3, u_4$ - действительные корни
R2	A1	$u_2 > -1$	$u_3 > u_4 > 1$	
R3	A2	$u_2 < u_1$	$-1 < u_4 < u_3 < u_2 < u_1 < 1$	
R4	A1		$-1 < u_2 < u_1 < u_4 < u_3 < 1$	
C0	A0		$u_2 < u_{34} < u_1$	$u_1, u_2$ , - действ. корни, $u_{3,4} = u_{34} + i\nu$ - компл. сопр.
C1	A2		$u_{34} < u_2 > 1$	
C2	A1		$u_{34} > u_1 < u_2 < u_1 < 1$	

Таблица 1. Расположение корней полинома  $f(u)$

ней полинома определяет то, какую из областей движения описывает система (3). Возможность осознанного выбора расчетной области позволяет предложить алгоритм моделирования, с помощью которого можно получить все возможные варианты движения системы:

- 1) Инициализируем алгоритм численного интегрирования с автоматическим выбором шага и начинаем процесс интегрирования.
- 2) Проверяем, не достигнуто ли конечное время интегрирования. Если конечное время достигнуто, то записываем результаты и переходим к расчету следующего варианта движения, в противном случае переходим к 4.
- 3) Если все варианты движения исчерпаны, завершаем расчет.
- 4) Делаем очередной шаг интегрирования.
- 5) Проверяем, произошёл ли на текущем шаге переход через сепаратрису. Это можно сделать, например, наблюдая за вариантом расположения корней полинома (6). Если перехода не было, возвращаемся к 2.
- 6) Если фазовая траектория покинула область A0, переходим к пункту 7, иначе — выбираем в качестве рабочей область A0 и переходим к 2.
- 7) Возвращаемся назад на один шаг интегрирования.
- 8) Если величина шага удовлетворяет заданной точности, переходим к пункту 12, иначе — к пункту 9.
- 9) Уменьшаем в два раза шаг интегрирования.
- 10) Выполняем шаг интегрирования.
- 11) Проверяем, произошёл ли переход через сепаратрису. Если произошёл — переходим к пункту 7. Если нет — к пункту 8.
- 12) В зависимости от текущего варианта движения выбираем в каче-

стве рабочей область A1 или A2.  
13) Переходим к пункту 1.

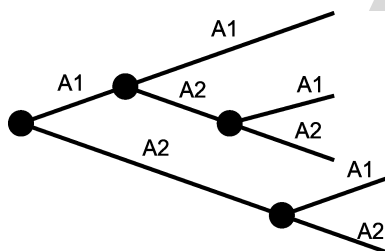


Рис. 2. Схема движения

На втором шаге алгоритма происходит выбор следующего варианта движения. Схематично движение можно представить в виде дерева, названия ветвей которого соответствуют выбранному при переходе через сепаратрису варианту (рис. 2). Организация последовательного обхода такого дерева не представляет сложности.

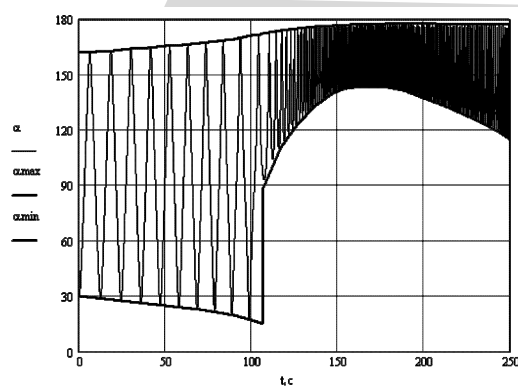


Рис. 3. Сравнение результатов интегрирования полной и усредненной систем

В качестве примера рассмотрим неуправляемый спуск в атмосфере Марса гипотетического аппарата, масса которого составляет 69 кг, а коэффициенты  $a = 0.023$ ,  $b = -0.168$ . Демпфирующий момент учитывать не будем:  $m_x = m_y = m_z = 0$ . Спуск осуществляется при следующих на-

чальных условиях:  $\alpha_0 = \pi/6$ ,  $R_0 = 0.2 \text{ c}^{-1}$ ,  $G_0 = 0.7 \text{ c}^{-1}$ ,  $V_0 = 1000 \text{ м/с}$ ,  $\theta_0 = -\pi/12$ ,  $H_0 = 1.2 \cdot 10^5 \text{ м}$ ,  $E_0 = 0.122 \text{ Дж}$ .

На рисунке 3 показано сравнение результатов интегрирования полной (2) и усредненной (3) систем.

На рисунке 4 показаны варианты движения системы. Видно, что на сто седьмой секунде происходит первый переход через сепаратрису. Движение может продолжаться как в области A1, так и в области A2. В первом случае на 318 секунде фазовая траектория вновь пересекает сепаратрису и попадает в A0; во втором случае это происходит на 331 секунде.

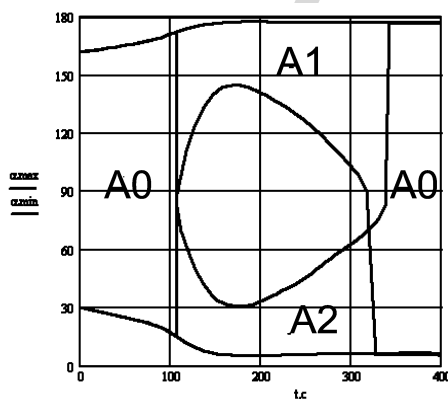


Рис. 4. Варианты движения системы

Таким образом, с помощью предложенной усредненной системы (3) и алгоритма моделирования можно получить все возможные варианты движения системы. При этом время, затраченное на работу алгоритма, на порядок меньше времени численного интегрирования исходной системы (1).

- [1] ЯРОШЕВСКИЙ В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. — М.: Машиностроение, 1978.
- [2] АСЛАНОВ В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. — М.: Физматлит, 2004.
- [3] АСЛАНОВ В. С., МЯСНИКОВ С. В. Анализ нелинейных резонансов при спуске космического аппарата в атмосферу *Космич. исслед.* — 1997. — **35** № 6. — 659–665.
- [4] АСЛАНОВ В. С., СЕРОВ В. М. Вращательное движение осесимметричного твердого тела с бигармонической характеристикой восстанавливающего момента *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1995. — № 3. — 19.

- 
- [5] Нейштадт А.И. Вопросы теории возмущений нелинейных резонансных систем // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — М.: ВИНТИ, 1988. С. 362.
- [6] Ледков А.С. Построение усредненной системы дифференциальных уравнений, описывающих свободное движение космического аппарата с бигармонической моментной характеристикой в атмосфере. *Сборник трудов студентов и аспирантов факультета летательных аппаратов «Студенческая наука аэрокосмическому комплексу»*, — 2004. — выпуск 7. — 55–60.
- [7] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Физматгиз, 1963.

УДК 681.32

## **Представление пространственных объектов облаком особых точек в задаче распознавания**

***В. М. Лозинский, М. И. Кумсков, С. Ю. Сергунин***

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.*

**1. Введение.** В задаче распознавания трехмерных объектов одним из возможных подходов является ее сведение к задаче сравнения геометрических форм этих объектов. Этот подход и будет нами рассмотрен.

**2. Постановка задачи.** Дано: – Трехмерная модель объекта [1], который мы называем эталонным. – Набор трехмерных моделей объектов. Требуется: – Найти объект, самый близкий по форме к эталонному.

**3. Этапы решения задачи распознавания..** Перечислим все этапы решения задачи:

- Рассмотрение трехмерной модели каждого объекта [1].
- Идентификация на каждой модели особых точек (далее ОТ) [2, 3].
- Маркировка ОТ на каждом объекте [2, 3].
- Сравнение облаков ОТ как маркированных графов [1–3].

Рассмотрим этап идентификации ОТ.

Пусть мы имеем некоторую трехмерную модель объекта. Рассмотрим некоторую совокупность его двумерных проекций. Выделим уже разработанным способом особые точки (далее ОТ) на этих проекциях, а потом нанесем их на модель объекта. Предъявим этот способ: Функция выделения особых точек.

Аргументы функции: filename — имя файла, из которого читается изображение. Pr — аргумент для функции фильтрации (будет указано ниже). Значение: f — имя файла, в который записывается результат работы: изображение с выделенными особыми точками.

---

Алгоритм функции:

1. Начальный этап. Изображение считывается и преобразуется в одинарное.

2. «Горизонтально-вертикальное» выделение контуров.

Выделяются контуры по методу Собеля в горизонтальном направлении. Полученное изображение переводится в двоичный формат и снова методом Собеля выделяются контуры в вертикальном направлении.

3. «Вертикально-горизонтальное» выделение контуров.

Выделяются контуры по методу Собеля в вертикальном направлении. Полученное изображение переводится в двоичный формат и снова методом Собеля выделяются контуры в горизонтальном направлении.

4. Выделение особых точек через пересечение контуров.

Формируется пересечение «горизонтально-вертикальных» и «вертикально-горизонтальных» контуров. Если точка принадлежит такому пересечению, то она (если ее рассматривать вместе с ее окрестностью) является особой, и наоборот. Сама точка выделяется черным цветом, точки ее ближайшей окрестности — белым (если они сами не принадлежат пересечению). (Такое выделение применяется для того, чтобы особые точки были более заметны на изображении.) Так формируется итоговое изображение.

При этом необходимо регулировать количество особых точек. (Чем меньше их количество, тем меньше информации о форме объекта. Чем больше их количество, тем больше времени будет потом затрачено на сравнение.) Чтобы их количество не было слишком малым, нужно брать такой способ выделения, который дает достаточно много ОТ. А чтобы их не было слишком много, можно создать функцию фильтрации. Например, при рассматриваемом при тестах способе оказалась уместной следующая фильтрация:

- Рассматриваются квадратичные моменты строк и столбцов матрицы изображения

- Находятся их попарные произведения (пара=строка+столбец).

- Ищется максимум таких произведений  $\max_{\text{mot}}$ .

- Сравнение с порогом фильтрации.

(Аргументом функции фильтрации является некоторое число  $pr$ ,  $0 \leq pr \leq 100$ , называемое порогом фильтрации. Если значение произведения моментов  $k$ -й строки и  $l$ -го столбца меньше, чем  $pr$  процентов от  $\max_{\text{mot}}$ , то  $OT(k,l)$  отсеивается. (Функция проверяет так все ОТ).

Рассмотрим шесть проекций для заданной трехмерной системы координат: спереди, сзади, сверху, снизу, справа и слева. На каждой из них выделим ОТ.



Теперь наносим полученные ОТ на трехмерный объект, беря их двумерные координаты и подбирая третью координату так, чтобы точка лежала на объекте. ОТ имеет смысл рассматривать только вместе с некоторой окрестностью, хотя эта окрестность должна быть достаточно малой. Поэтому рациональным является нанесение каждой ОТ в виде сферы с заданным центром и радиусом 1. После проведения этой процедуры имеем нужное нам облако ОТ. А в дальнейшем, для распознавания других объектов, применяем тот же алгоритм выделения облака ОТ.

Теперь перейдем к третьему этапу (маркировке облака ОТ): Предлагается следующая маркировка: берется некоторая точка А и рассматриваются все ее пары с другими ОТ. Рассматриваются вектора признаков из четырех элементов:

- точки А,
- другой точки пары В,
- интервала расстояния между точками А и В (полагается, что третий

элемент вектора  $d_1$ , если расстояние  $d \leq D_1$ ,  $d_2$ , если  $D_1 < d \leq D_2, \dots, d_n$ , если  $d > D(n-1)$  и третий эл-т вектора может принимать  $n$  значений. В практических опытах полагалось  $n = 3$ .)

–принадлежности к определенной части пространства (пространство рассекается на равные части плоскостями, пересекающимися по одной прямой, проходящей через точку А. Все эти прямые пересечения плоскостей должны быть параллельны. (В практических опытах использовались четыре четверти.) Эти части нумеруются в произвольном порядке:  $U_1, \dots, U_n$ . Если В принадлежит  $U_k$ , то  $U_k$  – 4-й эл-т вектора.) В итоге получаем массив таких векторов, который также можно рассматривать как маркированный граф.

После маркировки мы можем рассмотреть заключительный этап решения задачи: сравнение облаков ОТ как маркированных графов. Пусть в одном облаке ОТ  $n$  ОТ, в другом –  $p$  ОТ. Из указанного выше задания графа получаем, что в первом графе  $n*(n-1)$  ребер, во втором –  $p*(p-1)$ . Для простоты положим, что  $n \geq p$ . Сравнение двух ребер сведем к сравнению векторов признаков пар концов ребер с помощью некоторой метрики. Посчитаем теперь вычислительную сложность сравнения двух графов. Пронумеруем все ребра в графах. Имеем: число операций одного сравнения графов равно  $4*p*(p-1)$ . Значит, из комбинаторных соображений (одна выборка упорядоченных  $p*(p-1)$  элементов из  $n(n-1)$  - одно возможное сравнение) суммарное число операций всех возможных сравнений равно  $\frac{4 * p * (p - 1) [n * (n - 1)]!}{[p * (p - 1)]!}$ .

Примеры метрик сравнения:

$$-dI(X, Y) = \sum |x_i - y_i|, \text{ где } X = (x_1, \dots, x_{4*n*(n-1)}) = (A_1^1, B_1^1, d_1^1, U_1^1, \dots, U_{n*(n-1)}^1),$$

а  $Y = (y_1, \dots, y_{4*n*(n-1)}) = (A_1^2, B_1^2, d_1^2, U_1^2, \dots, U_{n*(n-1)}^2)$

(Недостающие параметры в  $Y$  заменяются нулями. Нижние индексы — номера ребер графа, параметры сравнения которых берутся.)

Такая метрика называется  $L_1$  — метрикой.

—  $d2(X, Y) = (\sum |x_i - y_i|^p)^{1/p}$  ( $L_p$  — метрика).

—  $d3(X, Y) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum (x_i - \bar{x}) \sum (y_i - \bar{y})]^{1/2}}$ ,  $\bar{x} = 1/n * \sum (x_i)$ ,  $\bar{y} = 1/n * \sum (y_i)$ .

(Коэффициент корреляции.)

—  $d4(X, Y) = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2 + \sum y_i^2 - \sum x_i y_i}$  (Коэффициент Танимото.)

**4. Заключение.** Итак, сводя задачу распознавания трехмерных объектов к задаче сравнения геометрических форм, мы предъявляем один из способов ее решения. Принципиально новым является предложенный подход к сравнению облаков МОТ как маркированных графов.

- [1] СЕРГУНИН С.Ю., КВАШНИН К.М., КУМСКОВ М.И. Схема динамического построения многоуровневого описания изображений // Доклады конференции «Математические методы распознавания образов (ММРО-12-2005)», стр. 436–439
- [2] KVASHNIN K., SERGUNIN S., KUMSKOV M. Construction of the Marked Graph of an Image and Its Invariants in the Classification Problem. // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 13, No. 1, 2003, pp. 135–137.
- [3] SERGUNIN S., KVASHNIN K., KUMSKOV M. Using Image Representation Families for Recognition Based on Symbol Marking of Singular Points. // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 13, No. 3, 2003, pp. 531–538.

УДК 519.217

## Стохастическая многочастичная синхронизация на малых временах\*

*А. Г. Малышкин*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**1. Введение.** Рассматривается система из  $N$  частиц на  $\mathbb{Z}$ . Частицы могут мгновенно перемещаться в дискретные моменты времени  $t \in \mathbb{Z}_+$  по следующему правилу: с вероятностью  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  происходит взаимодействие: случайно выбирается тройка частиц, и в этой тройке все

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 06-01-00662).

три частицы перемещаются на место средней частицы; а с вероятностью  $(1 - \alpha)$  каждая частица независимо от других делает скачок согласно распределению некоторой ограниченной целочисленной случайной величины  $\eta$ .

Как характер взаимодействия, так и характер свободной динамики могут меняться от задачи к задаче (см., например, [1, 2]). Взаимодействия типа, рассматриваемого в данной работе, встречаются, например, при моделировании процесса параллельного и распределенного вычисления.

**2. Модель и результаты.** Обозначим через  $x_k(t)$  положение  $k$ -ой частицы в момент времени  $t$ . Последовательность  $\{x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))\}_{t \in \mathbb{Z}_+}$  образует цепь Маркова с пространством состояний  $\mathbb{Z}^N$ . Переходные вероятности задаются вероятностью взаимодействия  $\alpha$  и распределением случайной величины  $\eta$ .

Введем стандартные обозначения

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t) \quad \text{и} \quad S^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k(t) - \bar{x}(t))^2$$

для центра масс и «эмпирической дисперсии» частиц в момент времени  $t$ . В работе доказаны следующие оценки (второе неравенство асимптотическое при  $N \rightarrow \infty$ ):

Лемма 1.  $\mathbf{E}[S^2(t+1) | S^2(t)] \leq S^2(t) + (1 - \alpha)\mathbf{D}\eta$ ,

Лемма 2.  $\mathbf{E}[S^2(t+1) | S^2(t)] \gtrsim (1 - \frac{3\alpha}{N}) S^2(t) + (1 - \alpha)\mathbf{D}\eta$ .

Из этих неравенств выводится следующий результат:

Теорема. В пределе  $t(N)/N \rightarrow 0$  при условии  $S^2(0) = 0$  имеем

$$\mathbf{E}S^2(t) \sim (1 - \alpha)t(N)\mathbf{D}\eta.$$

Подобные, но более полные результаты, правда, для других видов взаимодействия и свободной динамики были получены в [1].

**3. Доказательство.** Пусть время  $t$  фиксировано. Обозначим через  $(i_1, i_2, i_3)$  случайный вектор, равномерно распределенный на множестве числовых троек  $(j, k, l)$ ,  $1 \leq j < k < l \leq N$ , а через  $(i_{(1)}, i_{(2)}, i_{(3)})$  — такое переупорядочение  $(i_1, i_2, i_3)$ , что  $x_{i_{(1)}}(t) \leq x_{i_{(2)}}(t) \leq x_{i_{(3)}}(t)$ . Введем также обозначения

$$\Delta_t = 2x_{i_{(2)}}(t) - x_{i_{(1)}}(t) - x_{i_{(3)}}(t) \quad \text{и} \quad \Delta_t^2 = 2x_{i_{(2)}}^2(t) - x_{i_{(1)}}^2(t) - x_{i_{(3)}}^2(t).$$

Тогда для условного математического ожидания  $\mathbf{E}[S^2(t+1) | x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))]$  нетрудно получить следующую формулу

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S^2(t+1) | x(t)] &= S^2(t) + (1 - \alpha) \frac{N-1}{N} \mathbf{D}\eta + \frac{\alpha}{N} \mathbf{E}[\Delta_t^2 | x(t)] - \\ &\quad - \frac{2\alpha\bar{x}(t)}{N} \mathbf{E}[\Delta_t | x(t)] - \frac{\alpha}{N^2} \mathbf{E}[(\Delta_t)^2 | x(t)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Достаточно просто показать, что при  $N \rightarrow \infty$  верно

Предложение 1.  $\mathbf{E}[(\Delta_t)^2 | x(t)] = O(S^2(t))$ .

Это предложение дает оценку последнего слагаемого в (1). Для оценки третьего и четвертого слагаемого нам понадобится следующее утверждение:

Предложение 2. Обозначим через  $x_{(1)}(t) \leq \dots \leq x_{(N)}(t)$  вариационный ряд координат частиц в момент времени  $t$ . Тогда

$$\mathbf{E}[\Delta_t | x(t)] = \sum_{k=1}^N C_k(N) x_{(k)}(t), \quad \mathbf{E}[\Delta_t^2 | x(t)] = \sum_{k=1}^N C_k(N) x_{(k)}^2(t),$$

где  $C_k(N) = \frac{1}{C_N^3} \left[ 3k(N-k+1) - \frac{(N+1)(N+2)}{2} \right]$ .

Это предложение доказывается комбинаторным вычислением  $\mathbf{E}[x_{i(k)} | x(t)]$  и  $\mathbf{E}[x_{i(k)}^2 | x(t)]$  для  $k = \overline{1, 3}$ .

Далее нам понадобятся следующие свойства коэффициентов  $C_k(N)$ :

- 1)  $\sum_{k=1}^N C_k(N) = 0$ ,
- 2)  $\min_k C_k(N) = C_1(N) = C_N(N) = -\frac{3}{N}$ ,

которые проверяются достаточно просто.

В силу свойства 1)

$$\sum_{k=1}^N C_k(N) [x_{(k)}^2 - 2\bar{x}x_{(k)}] = \sum_{k=1}^N C_k(N) [x_{(k)} - \bar{x}]^2,$$

и формулу (1) с учетом предложений 1, 2 можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S^2(t+1) | x(t)] &= S^2(t) + (1-\alpha) \frac{N-1}{N} \mathbf{D}\eta + \\ &+ \frac{\alpha}{N} \sum_{k=1}^N C_k(N) [x_{(k)}(t) - \bar{x}(t)]^2 + O(S^2(t)/N^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, в силу свойства 2)

$$\sum_{k=1}^N C_k(N) [x_{(k)} - \bar{x}]^2 \geq -\frac{3}{N} \sum_{k=1}^N [x_{(k)} - \bar{x}]^2 = -3S^2(t), \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует асимптотическое неравенство леммы 2. Для доказательства леммы 1 нам потребуется следующая оценка:

Предложение 3.

$$\sum_{k=1}^N C_k(N)[x_{(k)} - \bar{x}]^2 \leq 0. \quad (4)$$

Идея доказательства предложения 3 основывается на том, что в сумме  $\sum_{k=1}^N C_k(N)[x_{(k)} - \bar{x}]^2$  отрицательные коэффициенты  $C_k(N)$  домножаются, в основном, на большие значения  $[x_{(k)} - \bar{x}]^2$ , чем положительные  $C_k(N)$ .

Неравенство леммы 1 следует из (2), (4) и того, что последнее слагаемое в (1) заведомо не превосходит нуля.

Докажем теперь основную теорему. Из лемм 1, 2 следует (при  $N \rightarrow \infty$ )

$$\left(1 - \frac{3\alpha}{N}\right) \mathbf{E}S^2(t-1) + (1-\alpha)\mathbf{D}\eta \lesssim \mathbf{E}S^2(t) \leq \mathbf{E}S^2(t-1) + (1-\alpha)\mathbf{D}\eta.$$

Откуда, при условии  $S^2(0) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}S^2(t) &\leq (1-\alpha)t\mathbf{D}\eta, \\ \mathbf{E}S^2(t) &\gtrsim \frac{1 - \left(1 - \frac{3\alpha}{N}\right)^t}{\frac{3\alpha}{N}} (1-\alpha)\mathbf{D}\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

На малых временах, то есть в пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $t(N)/N \rightarrow 0$  имеем

$$\left(1 - \frac{3\alpha}{N}\right)^{t(N)} = e^{t(N)\ln\left(1 - \frac{3\alpha}{N}\right)} \sim e^{-\frac{3\alpha t(N)}{N}} \sim 1 - \frac{3\alpha t(N)}{N},$$

и, следовательно,  $\mathbf{E}S^2(t) \sim (1-\alpha)t(N)\mathbf{D}\eta$ . Теорема доказана.

Замечание 1. В силу неравенства (5)  $\mathbf{E}S^2(t) = O(t)$  при любом стремлении  $t$  и  $N$  в бесконечность.

Замечание 2. Оценки, полученные в (3), (4), нельзя улучшить без дополнительных ограничений на конфигурацию частиц  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ . Действительно, в случае

$$x_{(1)} < x_{(2)} = \dots = x_{(N-1)} < x_{(N)}, \quad x_{(2)} - x_{(1)} = x_{(N)} - x_{(N-1)}$$

обращается в равенство неравенство (3), а в случае (при четном  $N$ )

$$\bar{x} - x_{(1)} = \dots = \bar{x} - x_{(\frac{N}{2})} = x_{(\frac{N}{2}+1)} - \bar{x} = \dots = x_{(N)} - \bar{x}$$

обращается в равенство неравенство (4). Следовательно, нельзя улучшить оценки в леммах 1, 2.

Таким образом, вопрос об асимптотике  $\mathbf{E}S^2(t(N))$  на средних временах (когда  $t(N)/N \rightarrow s$  при  $N \rightarrow \infty$  для некоторого  $s > 0$ ) и больших

временах  $(t(N)/N \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ ) не может быть полностью решен при помощи рекуррентных оценок  $\mathbf{E}[S^2(t+1)|S^2(t)]$  через  $S^2(t)$ .

Замечание 3. Утверждение теоремы означает, что в пределе  $t \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $t/N \rightarrow 0$  выполняется асимптотическое равенство  $\mathbf{E}S^2(t) = (1-\alpha)t\mathbf{D}\eta + o(t)$ .  
На самом деле доказано следующее более сильное утверждение

$$\mathbf{E}S^2(t) = (1-\alpha)t\mathbf{D}\eta + o(1).$$

Замечание 4. Для центра тяжести системы частиц имеем

$$\mathbf{E}\bar{x}(t+1) = \mathbf{E}\bar{x}(t) + (1-\alpha)\mathbf{E}\eta + \frac{\alpha}{N}\mathbf{E}\Delta_t.$$

$\mathbf{E}\Delta_t$  можно оценить как  $O(\sqrt{\mathbf{E}S^2(t)}) = O(\sqrt{t})$ , поэтому на малых временах при условии  $\bar{x}(0) = 0$  получаем

$$\mathbf{E}\bar{x}(t) = (1-\alpha)t\mathbf{E}\eta + O(t\sqrt{t}/N) = (1-\alpha)t\mathbf{E}\eta + o(\sqrt{t}).$$

Следовательно,  $\mathbf{E}\bar{x}(t) \sim (1-\alpha)t\mathbf{E}\eta$ .

- [1] МАЛЫШЕВ В.А., МАНИТА А.Д. Фазовые переходы в модели синхронизации времени. *Теор. вероятн. и ее прим.* — 2005. — **50**, № 1. — 150-158.  
[2] MANITA A., SHCHERBAKOV V. Asymptotic analysis of a particle system with mean-field interaction, *Markov Processes Relat. Fields* — 2005. — **11**, № 3. — 489-518.

УДК 517.6

# **Использование субиерархических параллельных вычислительных алгоритмов для решения электромагнитных задач дифракции на плоских экранах\***

**М. Ю. Медведик**

*Пензенский государственный университет*

**Введение.** Данная статья посвящена численному исследованию векторной задачи дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля на бесконечно тонких, идеально проводящих тонких, ограниченных экранах. В общей постановке задача состоит в нахождении

\*Работа выполнена при поддержке гранта 06-07-89063-а

решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих определенным краевым условиям и условиям излучения на бесконечности. Она принадлежит к числу классических в электродинамике. Наиболее естественный подход к решению этой задачи — сведение ее к векторному интегродифференциальному уравнению на экране. Такой подход часто называют методом поверхностных токов. Идея метода поверхностных токов принадлежит А. Пуанкаре. В акустических (скалярных) задачах этот метод разрабатывался Релеем (1897). Впервые интегродифференциальное уравнение на экране было получено А. Мауэ в 1949 году. В наших обозначениях это уравнение имеет вид:

$$Lu := \text{Grad}_\tau A (\text{Div} u) + k^2 A_\tau u = f, \quad x \in \Omega,$$

где  $\text{Div}$  — операция поверхностной дивергенции,  $A$  — интегральный оператор

$$Au = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) ds,$$

$u$  касательное к поверхности экрана  $\Omega$  векторное поле (плотность поверхностного тока). Индекс  $\tau$  показывает взятие касательных компонент к  $\Omega$  соответствующего векторного поля. Центральной проблемой при исследовании разрешимости представленных выше уравнений является выбор пространств для решений и для правых частей таким образом, чтобы обеспечить фредгольмовость (и, если удастся, однозначную разрешимость) этого уравнения в выбранных пространствах. Кроме того, пространство решений должно быть достаточно широким и содержать все возможно допустимые поля.

Изучение этих уравнений было начато в работе А. Мауэ. После выхода в 1968 году монографии Harrington R. F. *Field Computation by Moment Methods*, Macmillan Co., 1961 стали активно применяться численные методы (метод моментов, метод Галеркина [2]) для решения задач дифракции на экранах различной формы. Однако при всем многообразии исследований до сих пор остались открытыми вопросы об аппроксимации решений и сходимости применяемых методов, не получены оценки скорости сходимости методов. Одной из важнейших является задача построения эффективных, высокоскоростных алгоритмов расчета поверхностных токов на экране, использующих современные кластерные технологии.

В данной работе предлагается подход, названный нами субиерархическим, позволяющий существенно ускорить вычисления поверхностных токов на экранах произвольной формы. Субиерархический метод используется совместно с параллельными вычислительными алгоритмами

в связи с большой вычислительной сложностью формирования матрицы СЛАУ на первом шаге.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \subset R^2 = \{x_3 = 0\} \subset R^3$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля  $E^0, H^0$  на бесконечно тонком идеально проводящем экране  $\Omega$ , расположенном в свободном пространстве с волновым числом  $Imk \geq 0$  ( $k \neq 0$ ) состоит в определении рассеянного электромагнитного поля

$$E, H \in C^2(R^3 \setminus \bar{\Omega}) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{R}_+^3 \setminus \Gamma_\delta) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{R}_-^3 \setminus \Gamma_\delta), \quad (1)$$

$$\Gamma|_\delta := \{x : dist(x, \partial\Gamma) < \delta\},$$

удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} Rot H &= -ikE, \\ Rot E &= ikH, \quad x \in R^3 \setminus \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (2)$$

С краевыми условиями для касательной составляющей электрического поля на поверхности экрана

$$E_\tau|_\Omega = -E_\tau^0|_\Omega \quad (3)$$

условиями конечности энергии в любом ограниченном объеме

$$E, H \in L_{loc}^2(R^3) \quad (4)$$

и условиями излучения на бесконечности

$$\begin{aligned} r \left( \frac{\partial E}{\partial r} - ikE \right) &\rightarrow 0, \quad r \left( \frac{\partial H}{\partial r} - ikH \right) \rightarrow 0, \\ \text{при } r := |x| &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

и условиям на бесконечности (условия Зоммерфельда). Будем предполагать, что все источники падающего поля находятся вне экрана  $\bar{\Omega}$

$$E, H \in C^2(R^3 \setminus \bar{\Omega}), \quad E_t \in C(R^3 \setminus \partial\bar{\Omega}). \quad (6)$$

Обычно падающее поле — это либо плоская волна, либо электрический или магнитный диполь, расположенный вне  $\bar{\Omega}$ . В этих случаях наши условия выполнены. Поле  $E^0, H^0$  является решением системы уравнений Максвелла в свободном пространстве без экрана.

**Утверждение 1.** Если задача (1)–(5) при  $Imk \geq 0$ ,  $k \neq 0$  имеет решение, то оно единственно.



Поставленная задача может быть сведена к векторному псевдодифференциальному уравнению на  $\Omega$  [1]

$$Lu := (\text{grad } A(\text{Div } u) + k^2 Au)|_t = f, \quad (7)$$

где  $A$  является интегральным оператором

$$Au = \int_{\Omega} \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} u(y) ds, \quad f := 4\pi k E_t^0|_{\Omega} \quad (8)$$

Здесь вектор  $u$  — так называемая поверхностная плотность тока,  $\text{Div}$  — это тангенциальная дивергенция на  $\Omega$ .

Определим пространство  $W$  как замыкание  $C_0^\infty(\Omega)$  в норме

$$\|u\|_w^2 = \|u\|_{-1/2}^2 + \|\text{Div } u\|_{-1/2}^2.$$

Можно показать, что

$$W = \left\{ u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) : \text{Div } u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \right\},$$

где пространство Соболева  $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$  определяем обычным образом.

Через  $W'$  обозначено антидвойственное пространство для  $W$  относительно полуторалинейной формы  $(f, v) = \int_{\Omega} f \cdot \bar{v} dx$ .

$$W' = \{ u|_{\Omega} : u \in H^{-1/2}(M), \text{Rot } u \in H^{-1/2}(M) \},$$

где  $M$  — замкнутая поверхность, такая, что  $\bar{\Omega} \in M$ . Пространство  $W$  имеет следующее важное свойство. Пусть  $W_1$  и  $W_2$  — подпространства пространства  $W$ , такие, что

$$W_1 := \{ u \in W; \text{Div } u = 0 \}, \quad W_2 := \{ u \in W; \text{Rot } u = 0 \},$$

(здесь  $\text{Div}$  и  $\text{Rot}$  — касательные дивергенция и ротор на  $\Omega$ ).

Утверждение 2. Пространство  $W$  может быть разложено в виде прямой суммы подпространств  $W_1$  и  $W_2$ :  $W = W_1 \oplus W_2$ . Аналогично  $W' = (W_1)' \oplus (W_2)'$ .

Утверждение 3. Для  $\text{Im } k \geq 0$  и  $k \neq 0$  существует единственное решение следующего уравнения:

$$L(k)u = f, \quad u \in W, \quad f \in W$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} W_1' \\ W_2' \end{pmatrix} \quad (9)$$

Здесь  $L_1 = k^2(1 - \Delta)^{-1/2} + K_{11}$ ,  $L_2 = -(1 - \Delta)^{1/2} + K_{22}$ ;  $K_{ij}$  — компактные операторы;  $\Delta$  — оператор Лапласа. Таким образом, оператор  $Lu$  является эллиптическим при вещественных  $k \neq 0$ .

Определение 1. Оператор  $T : W \rightarrow W'$  будем называть коэрцитивным на подпространствах, если существуют константы  $C_1, \dots, C_m$  ( $> 0$ ), такие, что

$$|(Tu, u)| \geq C_j \|u\|_W^2 \quad \text{для любого } u \in W_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Определение 2. Оператор  $T : W \rightarrow W'$  будем называть эллиптическим на подпространствах, если существует линейный компактный оператор  $K : W \rightarrow W'$ , такой, что оператор  $T + K$  — коэрцитивный на подпространствах.

Теорема 1. Коэрцитивный на подпространствах оператор  $T$  имеет ограниченный обратный  $T^{-1} : W' \rightarrow W$ .

**2. Метод Галеркина.** Рассмотрим уравнение  $Lu = f$  и  $n$ -мерные пространства  $V_n \subset W$ . Будем проводить аппроксимации  $u$  элементами  $u_n \in V_n$ . Методом Галеркина находим  $u_n$  из системы уравнений

$$(Lu_n, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_n. \quad (10)$$

Эти уравнения определяют конечномерный оператор  $L_n : V_n \rightarrow V_n'$ , где  $V_n'$  есть антидвойственное пространство к  $V_n$ . Основная трудность для уравнений электрического поля (9) состоит в том, что оператор  $L$  не является сильно эллиптическим и традиционные теоремы о сходимости метода Галеркина не применимы. Результаты о сходимости метода Галеркина удается обобщить на уравнения с операторами, эллиптическими на подпространствах, в том числе на уравнение электрического поля (9), так как оператор  $L$  является эллиптическим на подпространствах.

Теорема 2. Пусть  $n$ -мерные подпространства  $V_n$  обладают аппроксимационными свойствами в  $W$ . Тогда метод Галеркина (10) на подпространстве  $V_n$  сходится для уравнения (9).

Рассмотрим вопрос об аппроксимации непрерывно-дифференцируемой (векторной) функции  $f$  в прямоугольнике  $\Pi = [0, a] \times [0, b]$  базисными функциями  $\phi_j(x, y)$  по методу RWG.

$$\phi_j(x, y) = \begin{cases} \left( x - x_1^{(j)}, y - y_1^{(j)} \right) \frac{l_j}{2s_j^+} & \text{в } T_j^+ \\ \left( x_2^{(j)} - x, y_2^{(j)} - y \right) \frac{l_j}{2s_j^-} & \text{в } T_j^- \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть в прямоугольнике  $\Pi$  выбрана равномерная прямоугольная сетка с шагом  $h_1$  по переменной  $x$  и шагом  $h_2$  по переменной  $y$ . Рассмотрим

конечномерное подпространство  $X_N = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ , являющееся линейной оболочкой базисных функций  $\varphi_j$ ,  $1, \dots, N$ , где  $N$  — количество внутренних ребер сетки. Нетрудно проверить, что  $\varphi_j \in W(\Pi)$ ,  $X_N \subset W$ . Имеет место следующий результат.

**Теорема 3.** Пусть  $\frac{h_1}{h_2} \leq M$ ,  $\frac{h_2}{h_1} \leq M$  для некоторого  $M$ . Тогда для любого  $\varphi \in W$   $\inf_{\psi \in X_N} \|\psi - \varphi\|_W \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  и, верна оценка  $\inf_{\psi \in X_N} \|\psi - \varphi\|_W \leq C_0 (h_1 + h_2) \|\varphi\|_{C^2(\bar{\Pi})}$ , где  $C_0$  не зависит от  $h_1$  и  $h_2$ , если  $\varphi \in W \cap C^2(\bar{\Pi})$ .

Из теорем 2 и 3 получаем сходимость метода Галеркина с базисными функциями RWG с квазиоптимальной оценкой скорости сходимости.

**Теорема 4.** Пусть  $\frac{h_1}{h_2} \leq M$ ,  $\frac{h_2}{h_1} \leq M$  для некоторого  $M$ . Тогда метод Галеркина (10) для уравнения электрического поля (9) сходится с выбором базисных функций RWG и справедлива оценка скорости сходимости

$$\|u - u_N\|_W \leq C_0 \inf_{\psi \in X_N} \|\psi - u\|_W,$$

где  $u$ ,  $u_N$  — точное и приближенные решения, а константа  $C_0$  не зависит от  $h_1$  и  $h_2$ .

Теорема 4 полностью теоретически обосновывает применимость метода RWG для решения задачи дифракции.

**3. Численный метод.** В данной работе предлагается подход, названный субиерархическим. В нем на первом шаге (уровне) один раз наиболее точно решается задача дифракции на экране простейшей прямоугольной формы. Далее, используя результаты решения задачи на первом шаге, «вырезаем» из него другой экран произвольной формы и, не производя повторных вычислений в матрице СЛАУ, определяем значение поверхностных токов на новом экране. Таким образом, можно создать базу данных матричных элементов и решить серию задач дифракции на экранах различной формы. Субиерархический метод используется совместно с параллельными вычислительными алгоритмами в связи с большой вычислительной сложностью формирования матрицы СЛАУ на первом этапе. Наиболее удобно рассчитывать подобные задачи на кластере. Предложенный метод позволяет решать задачи дифракции, для экранов произвольной формы, используя результаты решения только одной задачи. Это возможно в том случае если «новый» экран произвольной формы целиком помещается в «старом» прямоугольном экране. Разумеется, эффект от использования субиерархического метода будет проявляться только при решении большой серии задач дифракции.

[1] Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. — М.: Радиотехника, 1996.

- 
- [2] S.M. RAO, D.R. WILTON, AND A.W. GLISSON. *Electromagnetic Scattering by Surface of Arbitrary Shape. IEEE Transactions on antennas and propagation*, **Ap-30**, — 409–417, May 1982.

УДК 519.633

## Численная стабилизация уравнения Чафе-Инфанта с помощью граничных условий

**С. В. Милютин**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**1. Введение.** Будем рассматривать квазилинейное параболическое уравнение относительно функции  $u(t, x)$  на области  $[0; \infty) \times \Omega_0$ . Пусть нам заданы некоторые граничные условия, тогда скажем, что решение искомого уравнения стабилизируется со скоростью  $\delta$ , если выполнено следующее условие:

$$\|u(t, x)\|_{L_2(\Omega_0)} \leq e^{-\delta t} \quad (1)$$

В данной работе будут исследованы численные методы, позволяющие по начальной функции  $u_0(x)$  и по заранее заданной скорости стабилизации  $\delta$  найти такие граничные условия, чтобы выполнялось условие (1). В качестве исходного параболического уравнения будем рассматривать уравнение Чафе-Инфанта:  $u_t = u_{xx} + a \cdot u - b \cdot u^3$ .

В работе [1] был предложен и обоснован на дифференциальном уравнении метод стабилизации квазилинейных параболических уравнений. Основная идея предложенного метода заключалась в рассмотрении исходного уравнения на более широкой области  $\Omega$  ( $\Omega_0 \subset \Omega$ ) с граничными условиями первого рода и начальной функцией  $v_0(x)$ , удовлетворяющей следующим условиям: во-первых,  $v_0(x)$  совпадает с  $u_0(x)$  на  $\Omega_0$ , а во-вторых, решение новой задачи на области  $\Omega$  удовлетворяет условию  $\|u(t, x)\|_{L_2(\Omega)} \leq e^{-\delta t}$ . Таким образом, для получения искомым граничных условий нам остается проинтегрировать получившуюся задачу в области  $[0; \infty) \times \Omega$ . Центральным моментом предложенного метода является процесс перехода от  $u_0(x)$  к  $v_0(x)$ , который представляет собой проектирование  $u_0(x)$  на т. н. устойчивое инвариантное многообразие [1]  $M_-$ , построенное для рассматриваемой на  $\Omega$  задачи. Отметим однако, что для нелинейного случая ( $b \neq 0$ ) процесс построения  $M_-$  является крайне трудоемким, поэтому есть необходимость модернизации существующего алгоритма.

**2. Метод нулевого приближения.** Метод нулевого приближения для нелинейного случая заключается в рассмотрении (как и ранее) исходного уравнения на более широкой области  $\Omega$  с граничными условиями первого рода, и построении  $v_0(x)$  путем проектирования  $u_0(x)$  не на  $M_-$ , построенного для нелинейной задачи, а на  $M_-$ , построенного для линейной задачи на  $\Omega$ , полученной из исходной путем отбрасывания нелинейной части (т. е.  $-b \cdot u^3$ ). Безусловно, такой подход не позволит нам достичь искомой скорости стабилизации на большом временном интервале, поэтому в тот момент, когда скорость стабилизации начнет падать, нам придется заново сделать перепроектирование. Приведем результаты численных экспериментов стабилизации уравнения Чафе-Инфанта методом нулевого приближения беря в качестве  $\Omega_0$  интервал  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , а в качестве  $\Omega$   $(-\pi; \pi)$ . Для наглядной демонстрации эффекта стабилизации будем рассматривать величину  $\Psi(t) = \ln(\|u(t, x)\|_{L_{2,h}(\Omega)})$ , вычисленную для решения задачи на  $\Omega$ , которая при правильной стабилизации должна быть близка к  $-\delta \cdot t + c$ . В приведенных ниже численных экспериментах в качестве начальной функции будем брать  $u_0(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{100}$ .

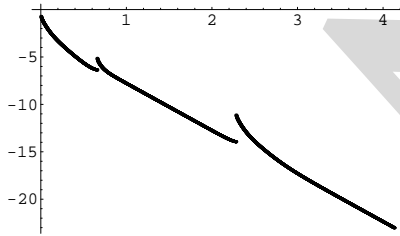


Рис. 1.

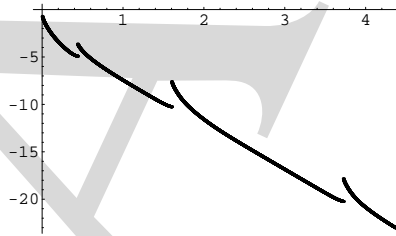


Рис. 2.

На рисунке 1 изображена величина  $\Psi(t)$  для параметров  $a = 4$ ,  $b = 4$  и  $\delta = 4$ . Соответственно на рисунке 2 изображена  $\Psi(t)$  при  $a = 4$ ,  $b = 10$  и  $\delta = 4$ . Критерием остановки стабилизации было выполнение условия  $\|u(t, x)\|_{L_2(\Omega)} \leq 10^{-9}$ .

**3. Метод линеаризации.** Итак, в предыдущем пункте мы построили алгоритм для стабилизации уравнения Чафе-Инфанта с заданной скоростью. Теперь нашей целью является нахождение более эффективного с точки зрения времени стабилизации метода. Опять будем рассматривать исходное уравнение на более широкой области  $\Omega$  с граничными услови-

ями первого рода. Преобразуем правую часть уравнения Чафе-Инфанта:

$$u_{xx} + a \cdot u_x - b \cdot u^3 = u_{xx} + a \cdot u - b \cdot w_0^3 - 3 \cdot b \cdot w_0^2 \cdot (u - w_0) - 3 \cdot b \cdot w_0 \cdot (u - w_0)^2 - b \cdot (u - w_0)^3. \quad (2)$$

Тогда, в случае, если начальная функция  $v_0$  близка к функции  $w_0$ , то существует  $\varepsilon$  такое, что при  $t \in B_\varepsilon(0)$  в разложении (2) членами порядка 2 и 3 можно пренебречь. Таким образом, при  $t \in B_\varepsilon(0)$  наша нелинейная задача превращается в линейную. Однако из-за наличия в разложении (2) члена нулевого порядка ( $2 \cdot b \cdot v_0^3$ ), стационарная точка получившегося линейного уравнения будет отлична от 0, а стабилизировать мы по-прежнему хотим к 0. Более того, как уже отмечалось выше, отбрасывать члены порядка 2 и 3 в разложении (2) можно только в случае близости  $v_0$  и  $w_0$ . Приведем два возможных пути преодоления изложенных выше проблем.

Первый путь (в дальнейшем мы будем называть данную модификацию первым методом линеаризации) основывается на идее, что в случае, если функция  $w_0$  мала, членом нулевого порядка уравнения (2) можно пренебречь. Этим предположением мы избавляемся от проблемы отличия от 0 стационарной точки линеаризованной задачи. Для обеспечения близости  $w_0$  и  $v_0$  введем т. н. итерацию по начальной функции: на первом шаге в качестве  $w_0$  берем  $u_0$ , продолженную нулем на  $\Omega \setminus \Omega_0$ , а в качестве  $v_0^1$  — проекцию  $u_0$  на  $M_-$ , построенного для линеаризованной в  $w_0$  задачи на области  $\Omega$ . На втором шаге в качестве  $w_0$  берем  $v_0^1$  и, как на предыдущем шаге, строим  $v_0^2$  и т. д. до тех пор, пока не будет выполнено  $\|v_0^n - w_0\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon$ .

**Утверждение.** Существует  $\varepsilon > 0$  такое, что в случае, если  $\|u_0(x)\|_{L_2(\Omega_0)} \leq \varepsilon$ , то описанный итерационный процесс сходиться.

Второй путь (в дальнейшем мы будем называть этот метод вторым методом линеаризации) предполагает учитывание члена нулевого порядка в разложении (2). Таким образом, хотя стационарная точка линеаризованной задачи отлична от 0, но после каждого перепроектирования начальной функции, стационарная точка все ближе к 0, что позволяет надеяться на выполнение рано или поздно критерия окончания стабилизации (т. е.  $\|u(t, x)\|_{L_2(\Omega)} \leq 10^{-9}$ ). Приведем результаты численных экспериментов. На рисунках 3 и 4 изображена величина  $\Psi(t)$ , построенная для первого и второго методов линеаризации соответственно, для параметров  $a = 4$ ,  $b = 4$  и  $\delta = 4$  и начальной функции  $u_0(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{100}$ .

#### 4. Сравнение методов стабилизации уравнения Чафе-Инфанта.

Выше было предложено три метода, позволяющих произвести искомую стабилизацию уравнения Чафе-Инфанта с заданной скоростью. Интерес

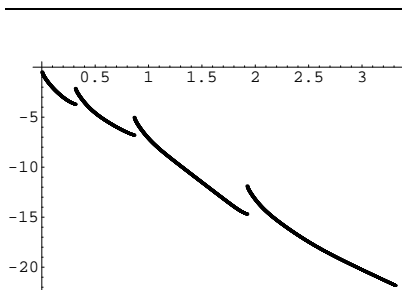


Рис. 3.

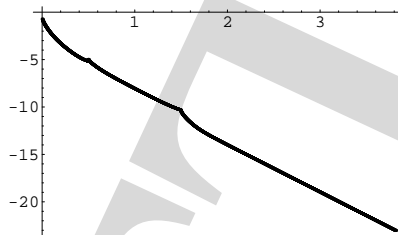


Рис. 4.

представляет сравнение этих методов. Во-первых, следует отметить, что области их применимости различаются. Метод нулевого приближения является наиболее универсальным, так как работает практически для всех параметров  $a$ ,  $b$  и начальных функций, правда это достигается за счет большего времени стабилизации и возможно большого количества перепроектирований. Как уже отмечалось выше, все модификации метода линеаризации применимы только в случае, если величина  $\|u_0\|_{L_2(\Omega_0)}$  невелика, а конкретнее численные эксперименты показали, что  $\|u_0\|_{L_2(\Omega_0)}$  должна быть порядка  $10^{-2}$ . В свете выше сказанного, представляет интерес сравнение между собой областей применимости предложенных модификаций метода линеаризации. Первый метод линеаризации имеет большую область применимости по сравнению со вторым методом. Так например, первый метод линеаризации работает и дает ускорение процесса стабилизации по сравнению с методом нулевого приближения при  $a = 4$ ,  $b = 4$ ,  $\delta = 4$  и начальной функции  $u_0(x) = \frac{\sin(x)}{10}$ , в то время как второй метод стабилизации не работает для данного набора начальных данных. Отметим также, что первый метод линеаризации стабилизирует искомую задачу быстрее, чем второй метод линеаризации, однако платой за это является резкое увеличение вычислительных затрат.

Автор выражает благодарность Е. В. Чижонкову за постановку задачи и внимание к работе.

- [1] Фурсиков А. В. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью. Матем. Сборник. 2001. Т. 192, No. 4. С. 115–160.
- [2] Чижонков Е. В. Численная стабилизация квазилинейных параболических уравнений и уравнений типа Навье-Стокса с помощью граничных условий. Тр. Матем. Центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 26. Численные методы решения задач математической физики. — Казань: Изд-во Казанского математического

УДК 519.21

**Асимптотическая нормальность взвешенных сумм  
зависимых случайных векторов**

***М. В. Мосягина***

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**1. Введение.** В работе доказывается центральная предельная теорема (ЦПТ) для взвешенных сумм зависимых случайных векторов со значениями в  $\mathbb{R}^r$ . Суммирование ведется по точкам, лежащим внутри определенным образом растущих областей из  $\mathbb{R}^d$ . При этом точки лежат на решетке, шаг которой уменьшается с ростом  $n$ .

При обобщении ЦПТ на случай величин с индексами из пространства  $\mathbb{R}^d$  обычно рассматривается суммирование по определенным образом растущим подмножествам решетки  $\mathbb{Z}^d$  (см., например, [1, 3]).

Другой способ — суммирование по точкам, лежащим внутри ограниченной области из  $\mathbb{R}^d$  на решетке с шагом, стремящимся к нулю при росте  $n$ . В этом случае ЦПТ для взвешенных сумм может не иметь места. В работе [7] для определенной регрессионной модели рассмотрена оценка наименьших квадратов, которая имеет вид взвешенных сумм, и показано, что она сходится в  $L^2$  к невырожденной случайной величине. Таким образом, оценка оказывается несостоятельной, и ЦПТ не может иметь места. Это связано с тем, что накопление точек внутри ограниченной области приводит к усилению зависимости между рассматриваемыми случайными величинами.

В связи с этим, в некоторых работах рассматривается смешанный способ роста числа точек суммирования: объем области неограниченно растет, и в то же время происходит уменьшение шага решетки. С использованием такого подхода в работе [8] доказана ЦПТ для взвешенных сумм действительных случайных величин по определенным образом растущим множествам. Смешанный способ роста применяется в [6] для невзвешенных сумм случайных векторов, причем суммирование ведется по растущим параллелепипедам из  $\mathbb{R}^d$ . Стоит отметить, что в случае смешанного роста множеств происходит изменение нормировки в ЦПТ.



В данной работе также использован смешанный подход к росту числа точек. Основным результатом работы является теорема 1. Эта теорема обобщает результаты работ [6] и [8], поскольку нами рассматриваются векторнозначные случайные величины и, кроме того, используется более широкий класс множеств, по которым ведется суммирование.

**2. Определения и основные результаты.** Пусть  $\{Z(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  — центрированное строго стационарное случайное поле со значениями в  $\mathbb{R}^r$  и с матрицей ковариаций  $\Sigma(s) = \text{cov}(Z(t), Z(t+s))$ . Будем рассматривать суммы вида  $S_n = \sum_{i=1}^{N_n} w_n(t_i) Z(t_i)$ , где  $V_n$  — определенным образом растущие множества из  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{t_i\}_{i=1}^{N_n}$  — набор точек из  $V_n$ , а  $w_n$  — действительнoзначные функции на  $V_n$ .

Для векторов  $x, y \in \mathbb{R}^d$  положим  $|x - y| = \max_{i=1, \dots, d} |x_i - y_i|$ . Пусть  $Q_j = (j, j+1] \subset \mathbb{R}^d$  — единичный куб с вершиной в точке  $j \in \mathbb{R}^d$ .

Введем связанное борелевское множество  $V_0 \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ . Пусть  $D_n = \text{diag}(r_n(1), \dots, r_n(d))$  — диагональная матрица с положительными элементами, причем все  $r_n(i) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Будем рассматривать области  $V_n = D_n V_0 = \{D_n s, s \in V_0\}$ . Положим  $r_n = \min_i r_n(i)$ ,  $R_n = \max_i r_n(i)$ ,  $\lambda_n = (r_n(1) \dots r_n(d))^{1/d}$ . Будем предполагать, что для любой последовательности  $0 < a_n \rightarrow \infty$ , такой, что  $a_n/r_n \rightarrow 0$ , число кубов  $a_n Q_j, j \in \mathbb{Z}^d$ , пересекающихся как с  $V_n$ , так и с  $\mathbb{R}^d \setminus V_n$ , будет  $O(\lambda_n^d r_n^{-1} a_n^{-(d-1)})$ . Такое граничное условие аналогично используемому в [8], где рассматриваются только множества, растущие равномерно по всем направлениям. В работе [8] приводятся примеры как выпуклых множеств, удовлетворяющих граничному условию (в частности, параллелепипеды, эллипсоиды), так и невыпуклых областей.

Пусть  $\{\eta_n\}$  — невозрастающая последовательность положительных чисел,  $\eta_n \rightarrow 0$ . Будем рассматривать точки  $\{t_1, \dots, t_{N_n}\} = V_n \cap (\eta_n \mathbb{Z}^d)$ . Таким образом, получаем увеличивающуюся плотность точек внутри растущей области  $V_n$ . Число точек, по которым проводится суммирование, будет  $N_n \sim C(V_0)(\lambda_n^d \eta_n^{-d})$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\mathcal{F}(B) = \sigma\{Z(t), t \in B\}$  для множества  $B \subset \mathbb{R}^d$ . Рассмотрим коэффициенты  $\alpha_{u,v}(r) = \sup\{\alpha(\mathcal{F}(B_1), \mathcal{F}(B_2)), B_1, B_2 : \text{diam}(B_1) \leq u, \text{diam}(B_2) \leq v, \text{dist}(B_1, B_2) \geq r\}$ , где  $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  — коэффициент сильного перемешивания ([1, 4]),  $\text{diam}(B) = \max\{|x - y|, x, y \in B\}$  — диаметр множества  $B \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\text{dist}(B, C) = \min\{|x - y|, x \in B, y \in C\}$  — расстояние между множествами. Предположим, что существуют невозрастающая функция  $f$ ,  $f(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , и неубывающая функция  $g$  такие, что

$$\alpha_{u,v}(r) \leq f(r)g(\max\{u, v\}). \quad (1)$$

Пусть  $M_n = \sup\{|w_n(x)|, x \in V_n\} < \infty$ . Положим

$$s_n^2 = \sum_{t_i \in V_n} w_n^2(t_i), \quad \gamma_n^2 = s_n^{-2} M_n^2 \lambda_n^d \eta_n^{-d}.$$

Для того, чтобы сформулировать основной результат, введем несколько условий:

1. Существует функция  $q: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что для любого  $k \in \mathbb{Z}^d$

$$\sup_{h \in \eta_n Q_k} \left| s_n^{-2} \sum_{i: \eta_n i, \eta_n(i+k) \in V_n} w_n(\eta_n i) w_n(\eta_n(i+k)) - q(h) \right| \leq \Delta(n),$$

где  $\Delta(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

2.  $\int_1^\infty y^{d-1} f(y) dy < \infty$ , где функция  $f$  определена в (1).

3. Существуют последовательности чисел  $p_n, q_n$ , стремящиеся к бесконечности, такие, что при  $n \rightarrow \infty$

- а)  $\gamma_n^2 (r_n^{-1} p_n + p_n^{-1} q_n) \rightarrow 0$ ,
- б)  $\gamma_n^4 \lambda_n^{-d} p_n^d \sum_{k=1}^{p_n} k^{2d-1} f(k) \rightarrow 0$ ,
- с)  $p_n^{-d} \lambda_n^d f(q_n) g(R_n) \rightarrow 0$ .

Условие 1 представляет собой многомерный вариант так называемого условия Гренандера ([5, 8]). Для невзвешенных сумм (т. е. при  $w_n(x) \equiv 1$ ) условие 1 выполняется с  $q(h) \equiv 1$ .

Условие 3 используется для применения в доказательстве техники Бернштейна. Выбор последовательностей  $\{p_n\}$  и  $\{q_n\}$  зависит как от коэффициентов перемешивания (через функции  $f$  и  $g$ ), так и от функций  $w_n$  (через величины  $\gamma_n$ ). Приведем пример, когда условие 3 имеет место.

Предложение 1. Пусть  $r_n \sim \lambda_n^\varepsilon$  для некоторого  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $R_n \sim \lambda_n^c$  при  $c \geq 1$ . Пусть также  $f(t) = t^{-\tau} L(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $\tau > d$ , а  $L(t)$  — медленно меняющаяся функция ([2, с. 501]). Предположим, что  $\gamma_n^2 = o(\lambda_n^{(\varepsilon(\tau+d)-2d)/4\tau})$ ,  $g(t) = o(t^{(\varepsilon(\tau+d)-2d)/4c} / L(t^{(\varepsilon(\tau-d)+2d)/4c\tau}))$ . Тогда условие 3 выполняется.

При доказательстве Предложения 1 рассматриваются  $p_n = \lambda_n^\alpha$  и  $q_n = \lambda_n^\beta$ , где  $0 < \beta < \alpha < \varepsilon$ .

Теорема 1. Пусть  $\{Z(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  — стационарное центрированное случайное поле, причем  $|Z(t)| < C_0$  п.н. для некоторого  $C_0 > 0$  и любого  $t$ . Пусть также выполнены условия 1–3. Тогда для любого выпуклого ограниченного множества  $B \subset \mathbb{R}^r$  верно соотношение

$$P\left((s_n^2 \eta_n^{-d})^{-1/2} S_n \in B\right) \rightarrow P(Y \in B), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где  $Y$  является  $r$ -мерным нормальным вектором с нулевым средним и матрицей ковариаций  $A = \int_{\mathbb{R}^d} q(x) \Sigma(x) dx$ .

Чтобы объяснить появление множителя  $\eta_n^{d/2}$ , связанного с уплотнением точек внутри области, рассмотрим функции  $w_n(t) \equiv 1$ . Тогда  $s_n^2 \eta_n^{-d} \sim N_n \eta_n^{-d}$ , и  $\sum_{i=1}^{N_n} Z(t_i) = O_P(N_n^{1/2} \eta_n^{-d/2})$ , а не  $O_P(N_n^{1/2})$ , как в классическом случае. Это связано с тем, что уплотнение точек приводит к увеличению числа близко расположенных зависимых случайных векторов, и дисперсии рассматриваемых сумм растут быстрее, чем  $O(N_n)$ .

Теорема 1 является обобщением теоремы 4.1 из [8] на случайные векторы и при более общем росте областей суммирования, и теоремы 2.1 из работы [6], в которой рассматривается суммирование по растущим параллелепипедам. Теорема 1 допускает обобщение на неограниченные случайные величины.

Теорема 2. Пусть  $\{Z(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  — стационарное центрированное случайное поле, и  $\sup_t E \|Z(t)\|_2^{2+\delta} < \infty$  для некоторого  $\delta > 0$ . Тогда при выполнении условий 1, 3 и  $\int_1^\infty y^{d-1} f^{\delta/2+\delta}(y) dy < \infty$  справедливо соотношение (2).

- [1] БУЛИНСКИЙ А. В. Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. — Москва: изд-во МГУ, 1989.
- [2] ИБРАГИМОВ И. А., ЛИННИК Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. — Москва: Наука, 1965.
- [3] BOLTHAUSEN E. On the central limit theorem on stationary mixing random fields. *Ann. Probab.* — 1982. — №10. — 1047–1050.
- [4] DOUKHAN P. Mixing. Properties and examples. *Lecture Notes in Statistics.* — Springer Verlag, New York, 1994.
- [5] GRENNANDER U. On estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. *Ann. Math. Stat.* — 1954. — 25. — 252–272.
- [6] FAZEKAS I., CHUPRUNOV A. A central limit theorem for random fields. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregiházienzis.* — 2004. — №20. — 93–104.
- [7] LAHIRI S. N. On inconsistency of estimators under infill asymptotics for spatial data. *Sankhyā Ser.* — 1996. — А, **58**. — 403–417.
- [8] LAHIRI S. N. Central limit theorems for weighted sums of a spatial process under a class of stochastic and fixed designs. *Sankhyā Ser.* — 2003. — **65**, №2. — 356–388.

## Закон повторного логарифма для последовательности объемов случайных множеств

**М. М. Мусин**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**1. Введение.** Рассмотрим пуассоновский поток точек  $\Lambda$  интенсивности 1 в пространстве  $\mathbb{R}^d$ . Имеется множество интересных стохастических моделей, использующих конфигурации точек упомянутого потока. (граф  $k$ -того ближайшего соседа, мозаика Вороного и др.) В работе [2] доказана центральная предельная теорема для суммарных длин ребер некоторых графов на плоскости и предложен общий метод доказательства предельных теорем для подобных структур. Этот метод основан на локализации зависимости при наступлении последовательности событий большой вероятности. Различные варианты указанных комбинаторных конструкций были исследованы также в работах [1, 6–8]. В частности, в [6] был установлен закон повторного логарифма для общей длины ребер части графа ближайших соседей, попавшей в растущий куб. Мы рассмотрели множество  $D$ , получающееся объединением окрестностей случайного радиуса ребер графа ближайших соседей, множество вершин которого совпадает с  $\Lambda$ . Положим  $D_n = D \cap [-n, n]^d$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Для последовательности объемов этих случайных множеств доказан закон повторного логарифма. Подробные сведения по анализу случайных множеств можно найти в книгах [4, 5, 9].

**2. Формулировка основных результатов.** Опишем подробнее изучаемую модель. Пусть точка  $x_k$  пуассоновского потока  $\Lambda$  имеет ближайшего соседа  $x_i \in \Lambda$ ,  $l_k$  — ребро графа, соединяющее  $x_k$  и  $x_i$ . Ребро  $l_k$  определено однозначно (на множестве вероятности 1), поскольку две точки пуассоновского потока лежат на одном и том же расстоянии от третьей с вероятностью 0. Определим

$$D(l_k) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \rho(y, l_k) \leq \xi_{q(k)}\},$$

где  $\rho(\cdot, \cdot)$  это евклидово расстояние между точкой и множеством, а размер случайной окрестности задается массивом  $\{\xi_q\}_{q \in \mathbb{Q}^d}$  независимых одинаково распределенных случайных величин, не зависящих от  $\Lambda$ . Потребуем чтобы  $v \leq \xi_q \leq \mu$  п. н. для некоторых  $v, \mu > 0$ . Возьмем  $D = \bigcup_{x_k \in \Lambda} D(l_k)$ .

Введем случайные величины  $S_n = |D \cap [-n, n]^d|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $|\cdot|$  обозначает меру Лебега борелевского множества в  $\mathbb{R}^d$  (кроме того  $|\cdot|$  будет обозначать мощность конечного множества).

При доказательстве предельных теорем рассматривается случайное поле  $V = \{V_i = |D \cap Q_i|, i \in \mathbb{Z}^d\}$ , где  $Q_i = [0, 1)^d + i$  обозначает единичный куб. Положим

$$\sigma^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{cov}(V_0, V_i). \quad (1)$$

Для описываемой модели нетрудно убедиться, что  $\sigma^2 \in (0, \infty)$ .

Основным результатом является закон повторного логарифма.

Теорема 1. Для введенной модели справедливы соотношения

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (S_n - \mathbb{E}S_n)/\gamma_n = 1 \quad \text{п. н.}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (S_n - \mathbb{E}S_n)/\gamma_n = -1 \quad \text{п. н.},$$

где  $\gamma_n = \sigma \sqrt{2^{d+1} n^d \log \log n}$ .

Для доказательства нам потребовалась центральная предельная теорема с оценкой скорости сходимости. Положим  $U_n = [-n, n]^d$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Теорема 2. В условиях теоремы 1 имеем при  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left( \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sigma |U_n|^{1/2}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| = O(n^{-d/4} \log n) + O(n^{-1+\delta}),$$

где  $\Phi(x)$  — функция распределения стандартной нормальной случайной величины,  $\delta > 0$ .

**3. Доказательства.** Наметим схему доказательства основных результатов.

В целях локализации зависимости разобьем множество

$$K_n = [-n - C(\log n)^{1/d}, n + C(\log n)^{1/d}]^d$$

на кубические элементы  $L_{u,n} \subset \mathbb{R}^d$ ,  $u \in \Gamma_n$ , со стороны порядка  $b(\log n)^{1/d}$ . Область  $\Gamma_n$  изменения параметра  $u$ , как и величину константы  $C$  мы не описываем в целях краткости. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  введем событие

$$G_n = \{\text{В каждый элемент } L_{u,n} \text{ попала хотя бы одна точка потока } \Lambda\}.$$

Вероятность того, что хотя бы в один элемент разбиения  $K_n$  не попадет точка пуассоновского потока  $\Lambda$  подчиняется соотношению

$$\mathbb{P}(\overline{G_n}) \sim \frac{2^d n^d}{b^d \log n} \exp\{-b^d \log n\} = o(n^{d-b^d}), \quad n \rightarrow \infty.$$

При  $b$  достаточно большом можем получить степенную скорость убывания с любым показателем, в частности  $\mathbb{P}(\overline{G_n}) = o(n^{-5d})$ .

Случайное поле  $V$  аппроксимируем конечно зависимыми случайными полями  $W^n = \{W_u^n, u \in \Gamma_n\}$  такими, что  $W_u^n = \sum_{i \in L_{u,n} \cap \mathbb{Z}^d} V_i$  на событии  $G_n$ ,  $u \in \Gamma_n$ .

Используя центральную предельную теорему со скоростью сходимости [3] для поля  $W^n$  получаем нормальную аппроксимацию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left( \frac{T_n - ET_n}{\sqrt{\text{Var } T_n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| = O \left( n^{-d/4} \log n \right), \quad (2)$$

где  $T_n = \sum_{u \in \Gamma_n} W_u^n$ . Отсюда можно получить, учитывая требуемые приближения, утверждение теоремы 2.

Далее, имея степенную скорость сходимости к нормальному закону, можем получить следующие оценки, для любого  $\varepsilon \in (0, 1)$

$$P(S_n - ES_n \geq (1 + \varepsilon)\alpha_n) \leq C_1 (\log n)^{-(1+\varepsilon)}, \quad (3)$$

$$P(S_n - ES_n \geq (1 - \varepsilon)\alpha_n) \geq C_2 (\log n)^{-(1-\varepsilon)}, \quad (4)$$

где  $\alpha_n \sim \gamma_n$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые положительные константы.

Получим максимальное неравенство. Для этого рассмотрим события

$$A_{jn} = \left\{ \max_{1 \leq m < j} (S_m - ES_m) < (1 + \varepsilon)\gamma_n, \quad S_j - ES_j \geq (1 + \varepsilon)\gamma_n \right\}.$$

Учитывая конечную зависимость полей  $W^n$ , можно найти события  $B_{jn}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , такие что

- 1)  $B_{jn} \supseteq A_{jn} \cap G_n \cap \{S_n - ES_n < (1 + \varepsilon)\gamma_n - \beta n^{d/2}\} \cap H_{jn}$ , где  $\beta > 0$  достаточно большая фиксированная константа,  $H_{jn}$  некоторые события такие что  $P(\overline{H_{jn}}) = o(n^{-1+\delta})$ ,  $n \rightarrow \infty$  для некоторого  $\delta > 0$ .
  - 2) Существуют такие события  $A'_{jn}$  что  $A'_{jn} G_n = A_{jn} G_n$ ; события  $B_{jn}$  и  $A'_{jn}$  независимы.
  - 3)  $P(B_{jn}) \leq 1/2$  при всех достаточно больших  $n$ .
- Тогда, полагая  $\alpha_n = \gamma_n - \beta n^{d/2}/(1 + \varepsilon)$ , получаем

$$\begin{aligned} P \left( \max_{1 \leq m \leq n} (S_m - ES_m) \geq (1 + \varepsilon)\gamma_n \right) &\leq \\ &\leq 2 \left[ P(S_n - ES_n \geq (1 + \varepsilon)\alpha_n) + \sum_{j=1}^n P(\overline{H_{jn}}) + 2P(\overline{G_n}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Это максимальное неравенство позволяет, в силу (3), получить верхнюю оценку, возникающую при стандартном доказательстве закона повторного логарифма.

Для доказательства нижней оценки используются неравенства, аналогичные (3) и (4) для полей  $W^n$ , с учетом структуры зависимости этих случайных полей. Кроме того применяется равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (T_n - ET_n)/\gamma_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (S_n - ES_n)/\gamma_n \quad \text{п. н.}$$

Заметим в заключение, что аналогичный результат можно (с минимальными изменениями в деталях) получить для таких моделей, как, например, случайное заполнение ячеек мозаики Вороного, построенных на точках пуассоновского потока  $\Lambda$ . Основным моментом доказательства будет являться аналогичная локализация зависимости.

- [1] ALEXANDER K. S. (1996) The RSW theorem for continuum percolation and the CLT for Euclidean minimal spanning trees. *Ann. Appl. Probab.* **6**, 466–494
- [2] AVRAM F. AND BERTSIMAS D. (1993) On central limit theorems in geometric probability. *Ann. Appl. Probab.* **3**, 1033–1046.
- [3] BALDI P. AND RINOTT Y. (1989) On normal approximations of distributions in terms of dependency graphs. *Ann. Probab.* **17**, 1646–1650
- [4] DALEY D. J., VERE-JONES D. (1988) An Introduction to the Theory of Point Process. Springer.
- [5] KALLENBERG O. (1986) Random Measures, 4th ed. Academic Press, New York.
- [6] KIM Y., LEE S., LIN Z. (2004) The law of the Iterated Logarithm for the total length of Nearest Neighbor Graph. *J. Theoretical Prob.* **17**, 245–260
- [7] LEE S. (1997) The central limit theorem for Euclidean minimal spanning trees I. *Ann. Appl. Probab.* **7**, 996–1020
- [8] LEE S. (1999) The central limit theorem for Euclidean minimal spanning trees II. *Adv. Appl. Probab.* **31**, 969–984 *Ann. Probab.* **9**, 365–376.
- [9] MOLCHANOV I. (2005) Theory of Random Sets. Springer-Verlag.

УДК ???

## О числе доминирования одного класса графов

*Нгуен Ван Лой*

*Воронежский государственный педагогический университет*

В данной работе рассматривается класс графов, так называемых компактных. Было доказано, что число доминирования таких графов равно единице, а так же изучается их применение для решения логических задач.

**Введение.** Благодаря своему широкому применению теория графов в настоящее время интенсивно развивается. В большой мере этому способствует так же прогресс в области развития больших быстродействующих вычислительных машин.

Пусть граф  $G$  задан множеством вершин  $X_0$  и множеством ребер  $A$ . Довольно часто возникает задача поиска таких подмножеств множества  $X_0$ , которые обладают определенным, наперед заданным свойством. В том числе, задача о нахождении минимально возможной мощности таких подмножеств  $S$  множества  $X_0$ , что любая вершина из  $X_0 \setminus S$  достижима из  $S$  с помощью путей единичной длины. Решение этой задачи дается так называемым числом доминирования графа  $G$ . Однако, при изучении графа с большим числом вершин возникает трудность в создании множества ребер  $A$ . Чтобы преодолеть трудности, часто бывает полезно задавать граф некоторыми его свойствами. Целью настоящей работы явились изучение таких графов, называемых компактными, и открытие ряда их применений.

**Определения и Теоремы.** Сначала познакомимся с некоторыми определениями и обозначениями, которые используются в дальнейшем.

1. Две вершины  $x_i$  и  $x_j$  неориентированного графа  $G$  называются связанными и обозначаются через  $x_i \sim x_j$ , если ребро  $(x_i, x_j) \in G$ . В противном случае эти вершины называются несвязанными и обозначаются через  $x_i \approx x_j$ .

2. Множество некоторых вершин  $M$  неориентированного графа  $G$  называется связанным с некоторой вершиной  $x_\alpha$  ( $x_\alpha \in G$ ) и обозначается через  $M \sim x_\alpha$ , если  $x_\alpha \sim x_i, \forall x_i \in M$ . В противном случае будем обозначать через  $M \approx x_\alpha$ , т. е.

$$M \approx x_\alpha \Leftrightarrow \exists x_k \in M \mid x_k \approx x_\alpha$$

3. Пусть неориентированный граф  $G$  с множеством вершин  $X_0$ . Возьмем произвольную вершину  $x \in X_0$  и подмножество  $X^* \subset X_0$ . Под  $L_x^{X^*}$  понимается множество всех вершин из  $X^* \setminus \{x\}$ , которые не связаны с  $x$ , т. е.

$$L_x^{X^*} = \{x_\beta \in X^* \setminus \{x\} \mid x_\beta \approx x\}.$$

4. Пусть неориентированный граф  $G$  с заданным множеством вершин  $X_0$ . Возьмем произвольную вершину  $x_0 \in X_0$  и найдем  $L_{x_0}^{X_0}$ . Имеем  $x_0 \approx L_{x_0}^{X_0}$  (в случае  $L_{x_0}^{X_0} = \emptyset$  пишем  $x_0 \approx L_{x_0}^{X_0} = \emptyset$ ). Обозначим через  $L_0 = L_{x_0}^{X_0} \cup \{x_0\}$  и рассмотрим множество  $X_1 = X_0 \setminus L_0$ . Если  $X_1 = \emptyset$  или  $L_{x_1}^{X_1} = \emptyset, \forall x_1 \in X_1$ , то остановим и выпишем результат в следующем виде:

$$x_0 \approx L_{x_0}^{X_0}, L_0 = L_{x_0}^{X_0} \cup \{x_0\}$$



$$X_1 = X_0 \setminus L_0.$$

Если же существует такая вершина, допустим  $x_1 \in X_1$ , что  $L_{x_1}^{X_1} \neq \emptyset$ , то имеем право писать:

$$x_0 \approx L_{x_0}^{X_0}, L_0 = L_{x_0}^{X_0} \cup \{x_0\}$$

$$x_1 \approx L_{x_1}^{X_1}, L_1 = L_{x_1}^{X_1} \cup \{x_1\}$$

Продолжаем этот процесс. Так как множество вершин  $X_0$  конечно, то через несколько шагов мы получим:

$$x_0 \approx L_{x_0}^{X_0}, L_0 = L_{x_0}^{X_0} \cup \{x_0\}$$

$$x_1 \approx L_{x_1}^{X_1}, L_1 = L_{x_1}^{X_1} \cup \{x_1\}$$

.....

$$x_s \approx L_{x_s}^{X_s}, L_s = L_{x_s}^{X_s} \cup \{x_s\}$$

$$X_{s+1} = X_s \setminus L_s.$$

При этом заметим, что

$x_i \sim x_j, \forall i \neq j, \forall x_i, x_j \in X_{s+1} \cup \{x_0\} \cup \dots \cup \{x_s\}$  и  $L_y^{X_{s+1}} = \emptyset, \forall y \in X_{s+1}$  ( $X_{s+1}$  может быть пустым). Таким образом начальное множество вершин  $X_0$  можно представить в виде объединения непересекающихся подмножеств:

$$X_0 = L_0 \cup \dots \cup L_s \cup X_{s+1}.$$

Разбиение такого вида будем называть  $L$ -разбиением графа  $G$  по базису  $Y = \{x_0, x_1, \dots, x_s\}$ . Длина такого разбиения зависит от выбора элементов множества  $Y$ .

**5.** Неориентированный граф  $G$  с заданным множеством  $N$ -вершин  $X_0$  ( $N \geq 2, N \in \mathbb{N}$ ) называется компактным, если он обладает следующим компактным свойством: для любого взятия из  $X_0$   $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  вершин, то существует по крайней мере одна вершина из остальных, которая связана с каждой взятой вершиной, т.е.  $\forall M \in X_0, \|M\| = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ , то  $\exists x^* \in X_0 \setminus M \mid x^* \sim M$ . Класс всех компактных графов при заданном множестве  $N$ -вершин  $X_0$  обозначим через  $K(G, N)$ .

**Теорема 1.** Для любого графа  $G \in K(G, N)$  и любого его  $L$ -разбиения по некоторому базису  $Y \subset X$  справедливо следующее неравенство:

$$\left\| \bigcup_{x_k \in Y} L_{x_k}^{X_k} \right\| \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$$

*Доказательство.* Неограничение общности, предположим, что базис состоит из следующих элементов  $Y = \{x_0, x_1, \dots, x_s\}$ , где  $x_i \in X_0$ ,  $\forall i = \overline{0 \dots s}$ . Имеем

$$x_0 \approx L_{x_0}^{X_0}, L_0 = L_{x_0}^{X_0} \cup x_0$$

$$x_1 \approx L_{x_1}^{X_1}, L_1 = L_{x_1}^{X_1} \cup x_1$$

.....

$$x_s \approx L_{x_s}^{X_s}, L_s = L_{x_s}^{X_s} \cup x_s$$

$$X_{s+1} = X_s \setminus L_s.$$

Обозначим через  $X = X_{s+1} \cup Y$ , тогда  $X_0 = X \cup L_{x_0}^{X_0} \cup \dots \cup L_{x_s}^{X_s}$ . При этом заметим, что

$$L_{x_i}^{X_i} \cap L_{x_j}^{X_j} = \emptyset, L_{x_i}^{X_i} \cap X = \emptyset, \forall x_i, x_j \in Y.$$

Предположим, что

$$\|L_{x_0}^{X_0} \cup \dots \cup L_{x_s}^{X_s}\| > \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$$

отсюда вытекает

$$\|X\| = \|X_0\| - \|L_{x_0}^{X_0} \cup \dots \cup L_{x_s}^{X_s}\| < N - \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \Rightarrow \|X\| \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor.$$

Если  $\|X\| = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ , то в силу компактности графа  $G$  следует, что

$$\exists x_\alpha \in X_0 \setminus X \mid x_\alpha \sim X$$

так как  $x_\alpha \in X_0 \setminus X$ , следовательно  $x_\alpha \in L_{x_0}^{X_0} \cup \dots \cup L_{x_s}^{X_s} \Rightarrow \exists x_{i_0} \in Y \mid x_\alpha \in L_{x_{i_0}}^{X_{i_0}}$ .

Тогда из определения  $L_{x_{i_0}}^{X_{i_0}}$  получим  $x_\alpha \approx x_{i_0} \Rightarrow x_\alpha \approx X$  (так как  $x_{i_0} \in X$ ). Что приводит к противоречию.

Если же  $\|X\| < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ , то рассмотрим множество  $B = X \cup \{x_{t_1}, \dots, x_{t_{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - \|X\|}}\}$ ,

где  $x_{t_n} \in L_{x_0}^{X_0} \cup \dots \cup L_{x_s}^{X_s}, \forall n = \{1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - \|X\|\}$ . Легко видеть, что  $\|B\| = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ . В силу компактности графа  $G$  следует, что  $\exists x_\beta \in X_0 \setminus B \mid x_\beta \sim B$ . С другой стороны

$$X_0 \setminus B \subset L_{x_0}^{X_0} \cup \dots \cup L_{x_s}^{X_s} \Rightarrow x_\beta \in L_{x_0}^{X_0} \cup \dots \cup L_{x_s}^{X_s}$$

Рассуждая аналогично выше опять получим противоречие. Тем самым доказана теорема 1 ■

Используя теорему 1, докажем следующую теорему о числе доминирования компактных графов

Теорема 2. Число доминирования любого компактного графа с любым количеством вершин  $N(N \geq 2)$  равно единице, т. е.

$$\forall N \in \mathbb{N}, N \geq 2, \forall G \in K(G, N), \text{ то } \beta[G] = 1.$$

*Доказательство.* Предположим противное, т. е.  $\beta[G] \geq 2$ . Из определения доминирующего множества [1] вытекает, что  $\|L_{x_i}^{X_0}\| \geq 1, \forall x_i \in X_0$ . Возьмем из  $X_0$  произвольную вершину, допустим  $x_0$ , и построим  $L$ -разбиения графа  $G$ . Неограничение общности предположим, что базис  $Y$  этого разбиения состоит из следующих элементов  $Y = \{x_0, \dots, x_s\} (s \in \mathbb{N}, 0 \leq s < N)$ .  
Имеем

$$x_0 \approx L_{x_0}^{X_0}, L_0 = L_{x_0}^{X_0} \cup x_0$$

$$x_1 \approx L_{x_1}^{X_1}, L_1 = L_{x_1}^{X_1} \cup x_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_s \approx L_{x_s}^{X_s}, L_s = L_{x_s}^{X_s} \cup x_s$$

$$X_{s+1} = X_s \setminus L_s.$$

Обозначим через  $X = Y \cup X_{s+1}$ . Из построения  $L$ -разбиения получим

$$x \sim y, \forall x, y \in X \text{ и } X_0 = X \cup L_{x_0}^{X_0} \cup \dots \cup L_{x_s}^{X_s}.$$

Следовательно,

$$L_x^X = \emptyset, \forall x \in X.$$

С другой стороны

$$L_{\tilde{x}}^{X_0} \neq \emptyset, \forall \tilde{x} \in X_0.$$

Поэтому

$$L_x^{X_0} \subset \bigcup_{x_i \in Y} L_{x_i}^{X_i}, \forall x \in X.$$

В силу теоремы 1 имеем

$$\left\| \bigcup_{x_i \in Y} L_{x_i}^{X_i} \right\| \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$$

Если  $\left\| \bigcup_{x_i \in Y} L_{x_i}^{X_i} \right\| = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$ , то из свойства компактности графа  $G$  вытекает, что

$$\exists x^* \in X_0 \setminus \bigcup_{x_i \in Y} L_{x_i}^{X_i} \text{ такая, что } x^* \sim L, \text{ где } L = \bigcup_{x_i \in Y} L_{x_i}^{X_i}.$$

Так как  $x^* \in X_0 \setminus L \Rightarrow x^* \in X$ . Но согласно выше  $L_{x^*}^{X_0} \subset L$  и  $L_{x^*}^{X_0} \neq \emptyset$ . Отсюда следует, что

$$\exists x^{**} \in L \mid x^{**} \approx x^*.$$

Следовательно  $x^* \approx L$ , что приводит к противоречию.

Если же

$$\left\| \bigcup_{x_i \in Y} L_{x_i}^{X_0} \right\| < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$$

то рассмотрим множество  $\tilde{L} = L \cup y_1 \cup \dots \cup y_k$ , где  $k = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - \|L\|$ ,  $y_j \in X$ ,  $\forall j = \overline{1..k}$ . Легко видеть, что  $\|\tilde{L}\| = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ . Рассуждая аналогично как и выше, получим так же противоречие. Тем самым доказана теорема ■

**Применение в решении задач.** Одноэлементность наименьшего доминирующего множества компактного графа  $G$  означает, что в  $G$  существует вершина, связанная со всеми остальными вершинами. Это свойство будем применять для решения следующей логической задачи:

**Задача.** Дано множество  $N$  ( $N \geq 2$ ) произвольных элементов  $X_0$ . Пусть на  $X_0$  задано некоторое отношение  $\Phi$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- +  $\Phi$  симметрично, т.е.  $x\Phi y \Rightarrow y\Phi x$
- +  $\forall M \subset X_0, \|M\| = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ , то  $\exists \tilde{x} \in X_0 \setminus M$  такое, что  $\tilde{x}\Phi y, \forall y \in M$ .

Доказать, что

$$\exists x_* \in X_0 \mid x_*\Phi x, \forall x \in X_0 \setminus \{x_*\}$$

*Доказательство.* Возьмем любой элемент  $x \in X_0$ , к множеству  $\{x\}$  добавляем еще  $(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1)$  элементов из  $X_0 \setminus \{x\}$ . Из второго условия вытекает, что существует из остальных элемент  $y$ , имеющий отношение к каждому взятому, в частности к элементу  $x$ , т.е.

$$\forall x \in X_0, \exists y \in X_0 \setminus \{x\} \mid y\Phi x$$

это свойство обеспечивает возможность построения графа с множеством вершин  $X_0$  и множеством ребер  $A$ , где ребро  $(x_i, x_j) \in A$  понимается тем, что  $x_i\Phi x_j$ . Итак построим граф  $G = (X_0, A)$ . Первое заданное условие обеспечивает неориентированность графа  $G$ , а второе условие обеспечивает компактность графа  $G$ , т.е.  $G \in K(G, N)$ . Тогда наша задача доказана в силу теоремы 2 ■

В качестве иллюстрации рассмотрим следующие примеры:

**Пример 1.** Отношение «взаимно-простые».

Даны  $2n$  натуральных чисел. Известно, что для любого взятия  $n$  чисел из них, всегда можно найти по крайней мере одно число из остальных,

---

взаимно-простое с каждым взятым. Докажите, что из данных чисел существует число, взаимно-простое с каждым остальным.

Пример 2. *Отношение «знакомы».*

Приходят к собранию 40 студентов. Известно, что для любого взятия 20 студентов, найдется студента из остальных, который знаком со всеми взятыми. Тогда можно найти студента, который знаком со всеми остальными.

Пример 3. *Отношение «передача».*

$2n$  территорий на земле имеют свойство: для любых  $n$  территорий всегда можно найти из остальных территорию, в которой можно построить общую телебашню для этих территорий. Тогда можно найти территорию, в которой можно построить общую телебашню для всех.

**Заключение.** Таким образом, мы познакомились с компактным графом и изучили его применение для решения одного класса логических задач. Класс таких задач весьма широк и интересен для изучения логики.

[1] КРИСТОФИДЕС Н. *Теория графов*. «Мир» — М., 1978. 427 с.

[2] БЕРЖ К. *Теория графов и её применения*. М., ИЛ, 1962.

[3] ХАРАРИ Ф., *Теория графов*. «Мир» — М., 1973.

УДК 517.986.7

## Обращение теоремы Чернова

*А. Ю. Неклюдов*

???

**Введение.** Теоремой Чернова ([2, 3]) называют следующее:

Утверждение. Пусть  $F$  — отображение из  $[0, \infty)$  в пространство непрерывных линейных операторов  $\mathcal{L}(X)$  в банаховом пространстве  $X$  такое, что  $F(0) = I$ ,  $\|F(t)\| \leq \exp(at)$  для некоторого  $a \in \mathbb{R}$ . Пусть  $D$  — существенная область определения для генератора  $C$  полугруппы  $\exp(tC)$  и ограничение  $F'(0)$  на  $D$  совпадает с ограничением  $C$  на  $D$ . Тогда  $F(t/n)^n$  сходится к  $\exp(tC)$  при  $n \rightarrow \infty$  в сильной операторной топологии равномерно относительно  $t \in [0, T]$  для каждого  $T > 0$ .

В работе формулируется теорема, представляющая собой обращение теоремы Чернова (являющейся обобщением теоремы Троттера). Эта теорема устанавливает существование генератора  $C$  некоторой полугруппы  $\exp(tC)$  в предположении существования пределов некоторых последовательностей вида  $\{F^n(t/n)\}$ , так что выполняется равенство  $F'(0) = C$  на

функциях принадлежащих области определения оператора  $F'(0)$ . Основная теорема работы имеет различные приложения. Одно из них связано с теорией Фейнмановских интегралов ([1, 4]). В этой теории рассматриваются представления решений уравнений типа Шрёдингера с помощью интегралов по псевдомерам Фейнмана. При этом в частности доказывалось, что из существования решений уравнений типа Шрёдингера следует представимость этих решений в виде Фейнмановских интегралов (некоторых пределов конечнократных интегралов, кратность которых стремится к бесконечности). С помощью теоремы, формулируемой в настоящей работе, это утверждение можно обратить. А именно, из существования Фейнмановских интегралов можно вывести существование решений соответствующих уравнений типа Шрёдингера. Из основной теоремы работы также следует необходимое условие справедливости формулы Троттера.

**Терминология и основные результаты.** Всюду далее  $\mathbf{X}$  — банахово пространство;  $\mathcal{L}(\mathbf{X})$  — пространство всех ограниченных линейных операторов в  $\mathbf{X}$  снабжённых (если иначе не оговаривается) топологией поточечной сходимости (сильной операторной топологией);  $I$  — тождественный оператор в  $\mathbf{X}$ . Положим  $\mathbb{Q}_+ = \{x \geq 0 | x \in \mathbb{Q}\}$ . Имеет место следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть зафиксированно  $t \in \mathbb{R}$  и  $\{n_k\}$  подпоследовательность последовательности  $\{n!\}$ . Пусть далее отображение  $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{X})$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $F(0) = I, \|F(s)\| \leq \exp(as)$ , где  $a \in \mathbb{R}$
- 2)  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \{F(t/n_k)\}^{n_k p} f$  для каждого  $f \in \mathbf{A}$  и  $p \in \mathbb{Q}_+$ , где  $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{X}$ .
- 3)  $\exists \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{F(s)f - f\}$  (1) для каждого  $f \in \mathbf{B}$ , где  $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{X}$

Тогда существует генератор  $Z$  непрерывной полугруппы  $T_s$  т. ч.

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{F(s)f - f\} = Zf \quad (2) \quad \text{для } \forall f \in \mathbf{B} \text{ и}$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \{F(t/n_k)\}^{n_k p} f = T_{tp} f \quad \text{для } \forall f \in \mathbf{X} \text{ и } p \in \mathbb{Q}_+.$$

**Следствие 1.** Пусть отображение  $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{X})$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $F(0) = I, \|F(s)\| \leq \exp(as)$  для  $\forall s \geq 0$ , где  $a \in \mathbb{R}$ .
- 2)  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(s/n)\}^n f$  для каждого  $s \geq 0$  и  $f \in \mathbf{A}$ , где  $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{X}$ .
- 3)  $\exists \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{F(s)f - f\}$  для каждого  $f \in \mathbf{B}$ , где  $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{X}$ .

Тогда существует генератор  $Z$  непрерывной полугруппы  $T_s$  т. ч.  $\lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{F(s)f - f\} = Zf$  для  $\forall f \in \mathbf{B}$ . Более того для каждого фиксированного  $t > 0$  можно  $Z$  выбрать так, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(x/n)\}^n f = T_x f$  при  $f \in \mathbf{X}$  для  $\forall x \in \{y | y \geq 0 \text{ и } y \in t \cdot \mathbb{Q}\}$ . Причём, если  $S(s)f = \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(s/n)\}^n f$  непрерывно зависит

от  $s \in [0, \infty)$  при каждом фиксированном  $f \in \mathbf{A}$ , то можно выбрать  $Z$  так, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(s/n)\}^n f = T_s f$  для  $\forall f \in \mathbf{X}$  и  $s \geq 0$ .

Следствие 2. Пусть  $\mathbf{X}$  — сепарабельно и зафиксировано  $t \geq 0$ . Пусть отображение  $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{X})$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $F(0) = I, \|F(s)\| \leq \exp(as)$  для  $\forall s \geq 0$ , где  $a \in \mathbb{R}$ .
- 2) Множество  $\{x \in \mathbf{X} | \exists n \in \mathbb{N} \text{ т. ч. } x = \{F(t/n)\}^n f\}$  секвенциально предкомпактно для каждого  $f \in \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{C} = \mathbf{X}$ .
- 3)  $\exists \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{F(s)f - f\}$  для каждого  $f \in \mathbf{B}$ , где  $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{X}$ .

Тогда выполняются утверждения теоремы 1 (для некоторой последовательности  $\{n_k\}$ ).

Из теоремы 1 легко выводится следующее следствие представляющее собой обращение теоремы Троттера (о продакт-формуле Троттера):

Следствие 3. Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  являются генераторами полугрупп на  $\mathbf{X}$ . Пусть  $\mathcal{D}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{B})$  плотно в  $\mathbf{X}$  и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(td/n\mathbf{A}) \exp(td/n\mathbf{B}))^n f$  для фиксированного  $t > 0$ ,  $\forall d \in \mathbb{Q}_+$  и  $\forall f \in \mathbf{C}$  т. ч.  $\mathbf{C} = \mathbf{X}$ . Тогда существует генератор  $Z$  непрерывной полугруппы  $T_s$  т. ч. выполнены следующие условия:

- 1)  $\mathcal{D}(Z) \supset \mathcal{D}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{B})$
- 2)  $Z|_{\mathcal{D}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{B})} = \mathbf{A}|_{\mathcal{D}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{B})} + \mathbf{B}|_{\mathcal{D}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{B})}$
- 3)  $T_{td} f = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(td/n\mathbf{A}) \exp(td/n\mathbf{B}))^n f$  для  $\forall f \in \mathbf{X}$  и  $d \in \mathbb{Q}_+$ .

- [1] СМОЛЯНОВ О. Г., ШАВГУЛИДЗЕ Е. Т. Континуальные интегралы.
- [2] P. R. CHERNOV. J. Funct. Anal. 84, 238 (1968).
- [3] E. B. DAVIES. One-Parameter Semigroups, St. John's College, Oxford, England (1980).
- [4] O. G. SMOLYANOV, A. G. TOKAREV, A. TRUMAN. Hamiltonian Feynman path integral via the Chernoff formula, J. Math. Phys., Vol. 43, №. 10, October 2002.

УДК 517.928

## Асимптотическое интегрирование системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью\*

**П. Н. Нестеров**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*

В работе строится асимптотическое представление решений при

\*Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (грант 04.01.452).

$t \rightarrow +\infty$  следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a \sin \omega t}{t^\alpha} x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b \sin \omega t}{t^\beta} x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\omega > 0$ ,  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$ ,  $a$  и  $b$  — произвольные (ненулевые) действительные параметры,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Систему (1) впервые рассмотрели Самохин и Фомин [4] при резонансе  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  в случае  $\alpha = \beta = 1$ . Нами получены асимптотические формулы для решений системы (1), когда  $\alpha + \beta > 1$ . Для так называемого нерезонансного случая ( $\omega \neq \omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega \neq \omega_2 - \omega_1$ ,  $\omega \neq \omega_1 - \omega_2$ ) построена асимптотика решений во втором приближении ( $2\alpha + \beta > 1$ ,  $2\beta + \alpha > 1$  и  $\alpha + \beta \leq 1$ ).

Метод построения асимптотики решений системы уравнений (1) включает в себя три основных этапа:

- 1) Представление исходной системы уравнений (1) в виде системы уравнений первого порядка с колебательно убывающими коэффициентами.
- 2) Усреднение системы с колебательно убывающими коэффициентами.
- 3) Приведение усредненной системы к  $L$ -диагональному виду и использование теоремы Левинсона.

Особенно отметим ту роль, которую играет второй этап в процессе построения асимптотики. На этом этапе нам удастся избавиться от осциллирующих величин, что существенно облегчает основную задачу третьего этапа.

Заменой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t & 0 & 0 \\ -\omega_1 \sin \omega_1 t & \omega_1 \cos \omega_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ 0 & 0 & -\omega_2 \sin \omega_2 t & \omega_2 \cos \omega_2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

от системы (1) мы переходим к следующей системе:

$$\dot{x} = [A_1(t)t^{-\alpha} + A_2(t)t^{-\beta}]x, \quad x = (c_1, c_2, d_1, d_2). \quad (2)$$

Здесь

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \hat{A}_1(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{A}_2(t) & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$



где  $\mathbf{0}$  — нулевая матрица порядка  $2 \times 2$ , а  $\hat{A}_1(t)$  и  $\hat{A}_2(t)$  имеют следующий вид:

$$\hat{A}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\omega_1} \sin \omega t \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t & \frac{a}{\omega_1} \sin \omega t \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \\ -\frac{a}{\omega_1} \sin \omega t \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t & -\frac{a}{\omega_1} \sin \omega t \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{b}{\omega_2} \sin \omega t \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t & \frac{b}{\omega_2} \sin \omega t \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \\ -\frac{b}{\omega_2} \sin \omega t \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t & -\frac{b}{\omega_2} \sin \omega t \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нам следует построить асимптотику решений системы (2). Система (2) представляет собой систему с колебательно убывающими коэффициентами. Для упрощения процесса построения асимптотики решений подобных систем в работе [1] был разработан вариант метода усреднения. Впоследствии в работе [3] соответствующим идеям была придана более общая форма. Опишем вкратце суть метода.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \left( A_0 + \sum_{i=1}^n A_i(t) v_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} A_{i_1 i_2}(t) v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} A_{i_1 \dots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) + R(t) \right) x. \quad (3)$$

Здесь  $x$  —  $m$ -мерный комплекснозначный вектор;  $A_0, A_{i_1 \dots i_l}(t), R(t)$  — квадратные матрицы размера  $m \times m$ ;  $v_1(t), \dots, v_n(t)$  — скалярные функции. Пусть

1.  $A_0$  — постоянная матрица с вещественными собственными значениями.
2.  $v_1(t) \rightarrow 0, v_2(t) \rightarrow 0, \dots, v_n(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .
3.  $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \dots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$ .
4. Произведение  $v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) \dots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$  для любого набора  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq n$ .
5. Элементами матриц  $A_{i_1 \dots i_l}(t)$  являются тригонометрические многочлены.
6. Матрица  $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$ . (Запись  $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$  означает, что  $\|R(t)\| \in L_1[t_0, \infty)$ , где  $\|\cdot\|$  — некоторая матричная норма.)

Теорема 1. Система (3) при достаточно больших  $t$  заменой

$$x = \left[ I + \sum_{i=1}^n Y_i(t) v_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} Y_{i_1 i_2}(t) v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} Y_{i_1 \dots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) \right] y,$$

где  $I$  — единичная матрица, а элементами матриц  $Y_{i_1 \dots i_l}(t)$  являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = \left( A_0 + \sum_{i=1}^n A_i v_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} A_{i_1 i_2} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \dots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} A_{i_1 \dots i_k} v_{i_1}(t) \cdot \dots \cdot v_{i_k}(t) + R_1(t) \right) y$$

с постоянными матрицами  $A_{i_1 \dots i_l}$  и матрицей  $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$ .

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [3].

Матрицы  $A_i$  и  $A_{ij}$  называют соответственно матрицами первого и второго приближений. Они определяются следующим образом:

$$A_i = M[A_i(t)], \quad i = 1, \dots, n. \quad \left( M[F(t)] := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s) ds. \right)$$

Далее,

$$A_{ij} = M[A_{ij}(t) + A_i(t)Y_j(t) + A_j(t)Y_i(t)], \quad 1 \leq i < j \leq n$$

и

$$A_{ii} = M[A_{ii}(t) + A_i(t)Y_i(t)], \quad i = 1, \dots, n.$$

Матрицы  $Y_i(t)$ , в свою очередь, определяются как решения матричных уравнений

$$\frac{dY_i}{dt} + Y_i A_0 - A_0 Y_i = A_i(t) - A_i, \quad i = 1, \dots, n$$

с нулевым средним значением.

На завершающей стадии для построения асимптотики используется фундаментальная теорема Левинсона (см., например, [2]). Для того, чтобы воспользоваться этой теоремой, требуется привести усредненную систему к специальному ( $L$ -диагональному) виду:

$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t) + R(t))x,$$

где  $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t))$  — диагональная матрица, а  $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$ . ■

В завершении остановимся на результатах, которые нам удалось получить. С помощью теоремы 1 удастся обнаружить главные резонансные соотношения:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \omega = \omega_1 - \omega_2.$$

Если не одно из этих соотношений не выполнено (нерезонансный случай), то все решения системы уравнений (1) в первом приближении ограничены и при  $t \rightarrow +\infty$  приближаются к решениям гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + o(1), \\ x_2(t) &= C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + o(1). \end{aligned}$$

В случае, когда для параметров  $\omega$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  справедливо одно из таких соотношений, то в системе (1), вообще говоря, наблюдается явление параметрического резонанса, т. е. существуют неограниченно возрастающие по абсолютной величине решения. Исключение составляют следующие ситуации, в которых все решения оказываются ограниченными:

- Связь между уравнениями системы (1) достаточно быстро убывает (принадлежит классу  $L_1[t_0, \infty)$ ). Этот случай имеет место, когда  $\alpha > 1$  и  $\beta > 1$ .
- Уравнения системы (1) имеют одинаковый порядок убывания связи, т. е.  $\alpha = \beta$ . В этом случае все решения ограничены, если  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  и  $ab < 0$  или  $\omega = \omega_2 - \omega_1$  ( $\omega = \omega_1 - \omega_2$ ) и  $ab > 0$ .

Во втором приближении ( $2\alpha + \beta > 1$ ,  $2\beta + \alpha > 1$  и  $\alpha + \beta \leq 1$ ) появляются новые резонансные соотношения. В отсутствии главных резонансов в первом приближении эти новые резонансы определяют характер поведения решений системы (1) во втором приближении. Именно, если  $\omega \neq \omega_1$  и  $\omega \neq \omega_2$ , то решения остаются ограниченными. Если же  $\omega = \omega_1$  или  $\omega = \omega_2$ , то у системы (1) могут быть неограниченные решения.

Асимптотические формулы для решений системы (1) в рассматриваемых случаях могут быть найдены в работе [3].

Автор выражает огромную признательность В. Ш. Бурду за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

- [1] Бурд В. Ш., КАРАКУЛИН В. А. Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Матем. заметки. 1998. Т. 64. №5. С. 658–666.
- [2] КОДДИНГТОН Э. А., ЛЕВИНСОН Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

- [3] НЕСТЕРОВ П. Н. Асимптотическое интегрирование системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью. Рук. деп. в ВИНТИ РАН 21.02.2006, №171-В 2006.
- [4] САМОХИН Ю. А., ФОМИН В. Н. Метод исследования устойчивости решений линейных систем, подверженных действию параметрических нагрузок с непрерывным спектром // Сибирский Матем. журнал. 1976. Т. 17. №4. С. 926–931.

УДК 515.124

# **О выпуклости гиперпространств над банаховым пространством в семействе обобщенных метрик Помпею\***

**О. С. Ощепкова**

*Горно-Алтайский государственный университет*

Пусть  $X$  — банахово пространство. Обозначим через  $exp(X)$ ,  $cont(X)$ ,  $conv(X)$  пространства соответственно всех компактных, связных компактных и замкнутых, ограниченных выпуклых подмножеств в  $X$ . Как было показано в [1], если  $M$  — метрический континуум, содержащий изометрический контур квадрата, то гиперпространство  $cont(M)$ , наделенное Хаусдорфовой метрикой, невыпукло. Там же [1] доказано, что, если  $M$  — метрический континуум, то  $exp(M)$  выпукло в Хаусдорфовой метрике тогда и только тогда, когда  $M$  выпукло.

В работе [2] на гиперпространстве  $exp(X)$  над метрическим пространством  $(X, \rho)$  было введено семейство обобщенных метрик Помпею:

$$dist_{\alpha}(A, B) = \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} (sup \rho(a, B)^{\alpha} + sup \rho(b, A)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$$

при  $1 < \alpha < +\infty$

В работе [2] для широкого класса метрических пространств  $X$ , было показано, что каждое из пространств  $exp(X)$ ,  $cont(X)$ ,  $conv(X)$  является выпуклым в метрике Хаусдорфа. В то же время, построенный нами пример показывает, что не существует геодезического отрезка соединяющий множества  $A = \{z - 2\} = 2\}$  и  $B = \{(1, 0)\}$  в пространстве  $cont(R^2)$ , поэтому нельзя утверждать выпуклость гиперпространств  $exp(X)$  и  $cont(X)$ .

\*Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент А. В. Тетенов.

Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Расстояние между точкой  $a$  множества  $A$  и множеством  $B$  определим как  $\rho(a, B) = \inf_{b \in B} \rho(a, b)$ .

Обозначим через  $d_{AB} = \sup_{a \in A} \rho(a, B)$ ; и  $d_{BA} = \sup_{b \in B} \rho(b, A)$ . Расстояние между множествами  $A$  и  $B$  в семействе обобщенных метрик Помпею обозначим как:  $dist_\alpha(A, B) = \frac{1}{2^\alpha} (\sup_{a \in A} \rho(a, B)^\alpha + \sup_{b \in B} \rho(b, A)^\alpha)^\frac{1}{\alpha}$

Определение 1. Говорят, что точка  $x_2$  лежит между  $x_1$  и  $x_3$ , если  $\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) = \rho(x_1, x_3)$

Определение 2. Подмножество  $I$  метрического пространства  $X$  называется отрезком, если для любой тройки точек  $x_1, x_2, x_3$  одна из них лежит между двумя другими.

Определение 3. Множество  $X$  назовем выпуклым, если вместе с любыми двумя точками оно содержит и отрезок, соединяющий данные точки.

*Доказательство теоремы.* Чтобы доказать утверждение теоремы нам достаточно показать, что найдется такое семейство множеств  $C = \{C_h, h \in (0, 1)\} \subset conv(x), h < h_1$ , чтобы отображение  $\phi: C \rightarrow [0, d_2(A, B)]$  являлось изометрией, то есть выполнялись равенства  $dist_\alpha(A, C_h) = h dist_\alpha(A, B)$ ,  $dist_\alpha(C_h, B) = (1 - h) dist_\alpha(A, B)$  и  $dist_\alpha(C_{h_1}, C_{h_2}) = (h_1 - h) dist_\alpha(A, B)$ .

Рассмотрим два выпуклых компактных ограниченных множества  $A$  и  $B$  с окрестностями  $V_r(A) = \{x: \rho(x, A) < r\}$  и  $V_s(B) = \{y: \rho(y, B) < s\}$  соответственно.

Лемма 1. Пусть  $A$  — выпуклое компактное ограниченное множество в  $X$ ,  $V_r(A)$  — его окрестность. Тогда расстояние в обобщенной метрике Помпею между множеством  $A$  и его окрестностью  $V_r(A)$  равно  $r$ .

Лемма 2. Пусть  $A$  — выпуклое компактное ограниченное множество в  $X$ ,  $V_r(A)$  — его окрестность. Для любой точки  $x$  на границе  $A$  расстояние  $\rho(x, \partial V_r(A)) = r$ .

Лемма 3. Пусть  $A$  — выпуклое компактное ограниченное множество и  $x_0$  и  $x_1$  — пара точек в  $X$ , а  $x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$ , тогда  $\rho(x_\lambda, A) \leq (1 - \lambda)\rho(x_0, A) + \lambda\rho(x_1, A)$ .

*Доказательство.* Пусть  $A$  — выпуклое множество и  $x_0$  и  $x_1$  — пара точек в  $X$ , а  $x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$ , тогда  $\rho(x_\lambda, A) \leq (1 - \lambda)\rho(x_0, A) + \lambda\rho(x_1, A)$ . В самом деле, возьмем в множестве  $A$  точки  $a_0$  и  $a_1$  такие, что  $\rho(x_0, a_0) < \rho(x_0, A) + \varepsilon$  и  $\rho(x_1, a_1) < \rho(x_1, A) + \varepsilon$ . Пусть  $a_\lambda = (1 - \lambda)a_0 + \lambda a_1$ . Так как множество  $A$  выпукло,  $a_\lambda \in A$ . В силу выпуклости нормы в  $X$  получим, что  $\|(1 - \lambda)(x_0 - a_1) + \lambda(x_1 - a_2)\| \leq (1 - \lambda)\|x_0 - a_1\| + \lambda\|x_1 - a_2\|$ , поэтому  $\rho(x_\lambda, a_0) \leq (1 - \lambda)(\rho(x_0, A) + \varepsilon) + \lambda(\rho(x_1, A) + \varepsilon) \leq (1 - \lambda)\rho(x_0, A) + \lambda(\rho(x_1, A) + \varepsilon)$ . В то же время, так как  $a_\lambda \in A$ ,  $\rho(x_\lambda, A) \leq \rho(x_\lambda, a_\lambda) \leq (1 - \lambda)\rho(x_0, A) + \lambda\rho(x_1, A) + \varepsilon$ . Устремив  $\varepsilon$  к нулю, получим, что  $\rho(x_\lambda, A) \leq (1 - \lambda)\rho(x_0, A) + \lambda\rho(x_1, A)$ .  $\square$

Лемма 4. Пусть  $A$  — выпуклое компактное ограниченное множество с окрестностью  $V_r(A)$ ,  $b$  — точка вне множества  $V_r(A)$ . Пусть  $a \in A$ . Тогда  $[b, a]$  пересекает  $\partial V_{hdAB}(A)$  в единственной точке  $a_\lambda$ .

Доказательство. Допустим  $[b, a]$  пересекает  $\partial V_{hdAB}(A)$  в двух точках  $a_\lambda$  и  $a'_\lambda$ . Обозначим  $\rho(a, a_\lambda) = d$ ,  $\rho(a_\lambda, a'_\lambda) = e$ ,  $\rho(a_\lambda, b) = f$ , тогда из Леммы 3 следует, что  $\frac{d}{d+e+f} = \frac{d+e}{d+e+f}$ . Откуда  $\rho(a, a_\lambda) = \rho(a, a'_\lambda)$  то есть точка  $a_\lambda$  совпадает с точкой  $a'_\lambda$ .  $\square$ .

Лемма 5. Пусть  $A$  — выпуклое компактное ограниченное множество с окрестностью  $V_r(A)$ ,  $b_0$  — точка вне множества  $V_r(A)$ . Пусть  $a_n$  — последовательность точек из множества  $A$  такая, что  $\rho(b_0, a_n) \rightarrow \Delta = \rho(b_0, A)$ ,  $a'_n \in (b_0, a_n) \cap \partial V_r(A)$ . Тогда

a)  $\rho(b_0, a'_n) \rightarrow \Delta - r$

b)  $\rho(b_0, V_r(A)) = \Delta - r$

Доказательство. Пусть  $\rho(b_0, a_n) \rightarrow \Delta$ . Так как  $\Delta = \inf_{a \in A} \rho(b_0, a)$ , то для любого  $\varepsilon \geq 0$  существует  $N$  такое, что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $\rho(b_0, a_n) < \Delta + \varepsilon$ . Покажем, что  $\rho(a'_n, a_n) < r + \varepsilon$ . Допустим, что  $\rho(a'_n, a_n) \geq r + \varepsilon$ . Из того, что  $\rho(b_0, a_n) = \rho(b_0, a'_n) + \rho(a'_n, a_n) < \Delta + \varepsilon$  следует  $\rho(b_0, a'_n) < \Delta + \varepsilon - r - \varepsilon < \Delta - r$ . Пусть  $\varepsilon'$  таково, что выполняется неравенство  $\rho(b_0, a'_n) + \varepsilon' < \Delta - r$ . Найдем такое  $a''_n$ , что  $\rho(a'_n, a''_n) < r + \varepsilon'$ . Тогда  $\rho(b_0, a''_n) < \rho(b_0, a'_n) + \rho(a'_n, a''_n) < \Delta - r - \varepsilon' + r + \varepsilon' < \Delta$ . Это противоречит тому, что  $\Delta = \inf_{a \in A} \rho(b_0, a)$ . Таким образом если  $\rho(b_0, a_n) \rightarrow \Delta$ , то  $\rho(b_0, a'_n) \rightarrow \Delta - r$ .

Покажем, что  $\rho(b_0, V_r(A)) = \Delta - r$ . Так как  $\rho(b_0, a'_n) \rightarrow \Delta - r$  получим, что  $\rho(b_0, V_r(A)) \leq \Delta - r$ . Допустим, что  $\rho(b_0, V_r(A)) < \Delta - r$ . Тогда существует  $\varepsilon'$  такая, что  $\rho(b_0, a'_n) < \Delta - r - \varepsilon'$  и существует точка  $a''_n \in V_r(A)$  такая, что  $\rho(b_0, a''_n) < \Delta - r - \varepsilon'$ . Так как  $\rho(a''_n, A) = r$ , то существует точка  $a'''_n \in A$  такая, что  $\rho(a''_n, a'''_n) < r + \frac{\varepsilon'}{2}$ . Тогда  $\rho(b_0, a'''_n) < \Delta - \frac{\varepsilon'}{2}$ . Получили противоречие, доказывающее, что  $\rho(b_0, V_r(A)) = \Delta - r$ .  $\square$ .

Лемма 6. Пусть  $A$  и  $B$  — выпуклые компактные ограниченные множества и  $V_r(A) \not\supset B$ . Пусть  $\{b_n\}$  — последовательность точек из  $B \setminus V_r(A)$ .  $\rho(b_n, V_r(A)) \rightarrow \sup_{b \in B} \rho(b, V_r(A))$  тогда и только тогда, когда  $\rho(b_n, A) \rightarrow \sup_{b \in B} \rho(b, A)$ .

Доказательство. Пусть  $\Delta_n = \rho(b_n, A)$ . Тогда  $\rho(b_n, V_r(A)) = \Delta_n - r$ .

Пусть для некоторого  $\Delta'$   $\rho(b_n, V_r(A)) \rightarrow \Delta'$ . Тогда для любого  $\varepsilon \geq 0$  существует  $N$  такое, что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $\Delta' - \varepsilon \leq \rho(b_n, V_r(A)) \leq \Delta'$ . Тогда  $\rho(b_n, A) > \Delta' + r - \varepsilon$ . Значит  $\Delta' + r - \varepsilon \leq \Delta_n$ . Устремим  $\varepsilon'$  к нулю. Получим, что  $\Delta' + r \leq \Delta_n$ .

Пусть  $\rho(b_n, A) \rightarrow \Delta$  тогда для любого  $\varepsilon \geq 0$  существует  $N$  такое, что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $\Delta - \varepsilon \leq \rho(b_n, A) \leq \Delta$ . Значит  $\Delta - r - \varepsilon < \rho(b_n, V_r(A)) < \Delta - r$ . Получим, что  $\Delta' \geq \Delta_n - r$ .

В результате  $\Delta' = \Delta_n - r$ .  $\square$ .

Рассмотрим множества  $A$  и  $B$  и найдем, каким условиям может удовлетворять множество  $C_h$ , для которого

$$\text{dist}_\alpha(A, C_h) + \text{dist}_\alpha(C_h, B) = \text{dist}_\alpha(A, B) \quad (1)$$

Возьмем  $C_h$  такое, что  $d_{AC_h} = r$ ;  $d_{C_h B} = d_{AB} - r$ ;  $d_{BC_h} = \delta$ ;  $d_{C_h A} = d_{BA} - \delta$ ;  
Подставляя в (1), получим равенство

$$\sqrt[\alpha]{(d_{AB} - \delta)^\alpha + r^\alpha} + \sqrt[\alpha]{(d_{BA} - r)^\alpha + \delta^\alpha} = \sqrt[\alpha]{d_{AB}^\alpha + d_{BA}^\alpha} \quad (2)$$

из этого следует, что  $d_{AC_h} = h d_{AB}$ ;  $d_{C_h B} = (1 - h) d_{BA}$ , где  $h = 1 - \frac{\delta}{d_1} < 1$ .

Поэтому будем искать множество  $C_h$  в виде:  $C_h = V_{hd_{AB}}(A) \cap V_{(1-h)d_{BA}}(B)$ .  $\blacksquare$

Лемма 7. Пусть  $A$  и  $B$  — выпуклые множества в пространстве  $X$  и  $V_{hd_{AB}}(A)$  и  $V_{(1-h)d_{BA}}(B)$  — их окрестности соответственно. Пусть  $C_h = V_{hd_{AB}}(A) \cap V_{(1-h)d_{BA}}(B)$ . Тогда  $d(B, V_{hd_{AB}}(A)) = d(B, C_h)$ .

*Доказательство.* Пусть  $A$  и  $B$  — выпуклые компактные ограниченные множества в пространстве  $X$  и  $V_{hd_{AB}}(A)$  и  $V_{(1-h)d_{BA}}(B)$  — их окрестности соответственно. Пусть  $[b, a]$  пересекает  $\partial V_{hd_{AB}}(A)$  в точке  $a_\lambda = \lambda b + (1 - \lambda)a$  и  $\rho(b, A) = d$ , а  $\rho(b, a) = (1 + \epsilon)d$ . Оценим расстояние  $\rho(b, a_\lambda)$ . Расстояние  $\rho(a_\lambda, A) = h d_{AB} = f$ . Тогда из равенства  $a_\lambda = \lambda b + (1 - \lambda)a$  по Лемме 3 следует, что  $\rho(a_\lambda, A) \leq \lambda \rho(b, A) + (1 - \lambda)\rho(b, a) = (1 - \lambda)d$ .  $\blacksquare$   
Откуда  $\lambda \leq \frac{d-f}{d}$ ,  $1 - \lambda \geq \frac{f}{d}$ . Рассмотрим расстояние  $\rho(a, a_\lambda) = (1 - \lambda)\rho(b, a) \geq \frac{f}{d}(1 + \epsilon)d = f(1 + \epsilon)$ .  $\blacksquare$   
Тогда  $\rho(b, a_\lambda) = \rho(b, a) - \rho(a, a_\lambda) \leq d(1 + \epsilon) - f(1 + \epsilon) = (d - f)(1 + \epsilon)$ .  
Поэтому  $\frac{\rho(b, a_\lambda)}{\rho(b, a)} < \frac{d-f}{d}$ . Так как  $d \leq d_{BA}$ , тогда  $\frac{f}{d} \geq \frac{f}{d_{BA}}$  следовательно  $1 - \frac{f}{d} \leq 1 - \frac{f}{d_{BA}}$ , то есть  $\frac{\rho(b, a_\lambda)}{\rho(b, a)} \leq \frac{d-f}{d} \leq \frac{d_{BA}-f}{d_{BA}}$ . Из равенства  $a_\lambda = \lambda b + (1 - \lambda)a$ ,  $\blacksquare$   
используя Лемму 3, следует, что  $\rho(a, b) \leq \lambda \rho(b, B) + (1 - \lambda)\rho(a, B) = (1 - \lambda)\rho(a, B) \leq f = h d_{AB}$ .  $\blacksquare$   
Поэтому точка  $a_\lambda$  принадлежит пересечению множеств  $V_{hd_{AB}}(A)$  и  $V_{(1-h)d_{BA}}(B)$ .  $\blacksquare$   
Получили, что пересечение отрезка  $[b, a]$  и множества  $\partial V_{hd_{AB}}(A)$  содержится в  $V_{(1-h)d_{BA}}(B)$ . Поэтому  $d(b, C_h) = d(b, V_{hd_{AB}}(A))$ , а значит  $d(B, C_h) = d(B, V_{hd_{AB}}(A))$ .  $\square$ .

Так как расстояние  $\rho(b, C_h) = d(b, V_{hd_{AB}}(A)) = \rho(b, A) - h d_{AB} = d_{BA} - h d_{BA} = (1 - h) d_{BA}$ .  $\blacksquare$   
Поэтому  $\text{dist}_\alpha(B, C_h) = (1 - h) \text{dist}_\alpha(A, B)$ . Аналогично доказывается, что  $\text{dist}_\alpha(A, C_h) = h \text{dist}_\alpha(A, B)$ .

Лемма 8. Пусть  $A$  и  $B$  выпуклые множества в пространстве  $X$  и  $V_{h_1 d_{AB}}(A)$ ,  $V_{h_2 d_{AB}}(A)$  окрестности множества  $A$ , а  $V_{(1-h_1)d_{BA}}(B)$ ,  $V_{(1-h_2)d_{BA}}(B)$  окрестности множества  $B$ , где  $h_2 > h_1$ . Пусть множество  $V_{h_1 d_{AB}}(A)$  в пересечении с множеством  $V_{(1-h_1)d_{BA}}(B)$  дает нам множество  $C_{h_1}$ , а пересечение множества  $V_{h_2 d_{AB}}(A)$  с множеством  $V_{(1-h_2)d_{BA}}(B)$  дает нам множество  $C_{h_2}$ . Тогда  $\text{dist}_\alpha(C_{h_1}, C_{h_2}) = (h_2 - h_1) \text{dist}_\alpha(A, B)$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in A$ ,  $c \in \partial V_{h_2 d_{AB}}(A)$ . Пусть  $[c, a]$  пересекает  $\partial V_{h_2 d_{AB}}(A)$  в точке  $a_\lambda = \lambda c + (1 - \lambda)a$  и  $\rho(c, A) = d$ , а  $\rho(c, a) = (1 + \varepsilon)d$ . Оценим расстояние  $\rho(c, a_\lambda)$ . Расстояние  $\rho(a_\lambda, A) = h_1 d_{AB} = f$ . Тогда из равенства  $a_\lambda = \lambda c + (1 - \lambda)a$  по Лемме 3 следует, что  $\rho(a_\lambda, A) \leq \lambda \rho(c, A) + (1 - \lambda)\rho(c, a) = (1 - \lambda)d$ . Откуда  $\lambda \leq \frac{d-f}{d}$ ,  $1 - \lambda \geq \frac{f}{d}$ . Рассмотрим расстояние  $\rho(a, a_\lambda) = (1 - \lambda)\rho(c, a) \geq \frac{f}{d}(1 + \varepsilon)d = f(1 + \varepsilon)$ . Тогда  $\rho(c, a_\lambda) = \rho(c, a) - \rho(a, a_\lambda) \leq d(1 + \varepsilon) - f(1 + \varepsilon) = (d - f)(1 + \varepsilon)$ . Поэтому  $\frac{\rho(c, a_\lambda)}{\rho(c, a)} < \frac{d-f}{d}$ . Так как  $d \leq d_{BA}$ , тогда  $\frac{f}{d} \geq \frac{f}{d_{BA}}$  следовательно  $1 - \frac{f}{d} \leq 1 - \frac{f}{d_{BA}}$ , то есть  $\frac{\rho(c, a_\lambda)}{\rho(b, a)} \leq \frac{d-f}{d} \leq \frac{d_{BA}-f}{d_{BA}}$ . Из равенства  $a_\lambda = \lambda c + (1 - \lambda)a$  используя Лемму 3 следует, что  $\rho(a, c) \leq \lambda \rho(c, C_{h_2}) + (1 - \lambda)\rho(a, C_{h_2}) = (1 - \lambda)\rho(a, C_{h_2}) \leq f = h d_{AB}$ . Поэтому точка  $a_\lambda$  принадлежит  $C_{h_2}$ . Получили, что пересечение отрезка  $[c, a]$  и множества  $\partial V_{h_1 d_{AB}}(A)$  содержится в  $V_{(1-h_1)d_{BA}}(B)$ . Поэтому  $d(c, C_{h_1}) = d(c, V_{h_1 d_{AB}}(A))$ , а значит  $d(B, C_{h_1}) = d(C_{h_2}, V_{h_1 d_{AB}}(A))$ . Поэтому  $\text{dist}_\alpha(C_{h_1}, C_{h_2}) = (h_2 - h_1)\text{dist}_\alpha(A, B)$ .  $\square$ .

[1] АСЕЕВ В. В., ТЕТЕНОВ А. В., МАКСИМОВА А. П. «Обобщенная метрика Помпею в проблеме изометрии гиперпространств.»// Мат. Заметки, т. 78, № 2, 2005, стр. 163–170

[2] R. DUDA “On convex metric spaces III”// Fund. Math., 51(1962) pp. 23–33.

УДК 519.217

## Асимптотические свойства синхронизованного набора частиц на прямой

**Л. А. Петров**

*Московский государственный университет*

**1. Описание модели.** На прямой находится  $n \geq 2$  частиц с заданным начальным распределением ( $n$  фиксировано). В каждый момент времени  $t = 0, 1, \dots$  самая левая из частиц мгновенно перемещается на случайное расстояние  $\xi(t)$  вправо (и после этого скачка на  $\xi(t)$  наступает момент  $t + 1$ ). Считаем скачки  $(\xi(0), \xi(1), \dots)$  неотрицательными независимыми одинаково распределенными случайными величинами, не зависящими от начального расположения частиц. Исследуются свойства этой системы частиц при  $t \rightarrow \infty$ .

Данная постановка задачи возникла при анализе модели синхронизации времени, описанной в [3].



**2. Основные результаты.** Пусть частицы пронумерованы, обозначим их координаты  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ . Упорядочим эти числа, получим порядковые статистики  $X_{(1)}(t) \leq \dots \leq X_{(n)}(t)$ . Положим  $Y_j = X_{(j)} - X_{(1)}$ ,  $\vec{Y} = (Y_2, \dots, Y_n)$ . Тогда случайные векторы  $\{\vec{Y}(t)\}_{t=0,1,\dots}$  образуют марковскую цепь, согласованную с естественной фильтрацией последовательности  $(\vec{Y}(0), \xi(0), \xi(1), \dots)$ .

Пусть величина  $\xi$  распределена так же, как  $\xi(0)$ . Если  $E\xi < \infty$ , то существует предельная скорость движения для каждой из частиц, равная  $(E\xi)/n$  то есть для  $k = 1, \dots, n$   $X_k(t)/t \xrightarrow{P} (E\xi)/n$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Также отдельно рассмотрены частные случаи, когда  $n = 2$  или  $3$  и распределение  $\xi$  показательное. В этих предположениях доказано существование стационарного распределения цепи  $\{\vec{Y}(t)\}_{t=0,1,\dots}$ , найдено это распределение, и при  $n = 2$  сделана оценка скорости сходимости к нему. Выдвинута гипотеза о виде стационарного распределения в экспоненциальном случае при  $n = 4, 5, \dots$ .

**3. Марковское свойство.** Для доказательства марковости векторов  $\{\vec{Y}(t)\}_{t=0,1,\dots}$  выведем закон изменения  $\vec{Y}(t)$  при переходе от момента времени  $t$  в момент  $t + 1$ .

Положим  $S_{(k)} = \sum_{i=k}^n X_{(i)}$  и найдем  $\Delta S_{(k)}(t) = S_{(k)}(t+1) - S_{(k)}(t)$ . Рассмотрим два случая. Если  $\xi(t) \leq Y_k(t) = X_{(k)}(t) - X_{(1)}(t)$ , то левая частица не допрыгивает до  $k$ -й по порядку, и значение  $S_{(k)}$  не изменяется. Если же  $\xi(t) > Y_k(t)$ , то частицы меняют свой порядок, и значение  $S_{(k)}$  увеличивается ровно настолько, насколько левая частица перепрыгнула  $k$ -ю, то есть на  $\xi(t) - Y_k(t)$ . Окончательно имеем

$$\Delta S_{(k)}(t) = (\xi(t) - X_{(k)}(t))I_{\{\xi(t) > Y_k(t)\}} = (\xi(t) - Y_k(t))^+, \quad (1)$$

где  $\eta^+ = \max\{\eta, 0\}$ . Далее, так как  $X_{(k)} = S_{(k)} - S_{(k+1)}$  (полагаем для удобства  $S_{(n+1)} \equiv 0$ ), то  $\Delta X_{(k)}(t) = (\xi(t) - Y_k(t))^+ - (\xi(t) - Y_{k+1}(t))^+$  для  $k < n$ , и  $\Delta Y_n(t) = (\xi(t) - Y_n(t))^+$ . Тогда легко видеть, что  $\Delta X_{(1)}(t) = \xi(t) - (\xi(t) - Y_2(t))^+ = \min\{\xi(t), Y_2(t)\}$ . ■

Отсюда получаем формулы изменения компонент вектора  $\vec{Y}(t)$ :

$$\Delta Y_k(t) = (\xi(t) - Y_k(t))^+ - (\xi(t) - Y_{k+1}(t))^+ - \xi(t) \wedge Y_2(t),$$

$$k = 2, \dots, n-1; \quad (2)$$

$$\Delta Y_n(t) = (\xi(t) - Y_n(t))^+ - \xi(t) \wedge Y_2(t).$$

Из этих формул сразу следует

Утверждение 1 (марковское свойство). Последовательность векторов  $\{\vec{Y}(t)\}_{t=0,1,\dots}$  образуют марковскую цепь с дискретным временем и пространством состояний  $R_+^{n-1}$ , согласованную с естественной фильтрацией случайной последовательности  $(\vec{Y}(0), \xi(0), \xi(1), \dots)$ .

**4. Центр масс и диаметр системы.** Опишем движение центра масс  $X_c = (X_1 + \dots + X_n)/n$ . Обозначим  $S(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$ . Тогда понятно, что  $S(t+1) - S(t) = \xi(t)$ . Запишем

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{1}{t}(S(t) - S(t-1) + \dots + S(0)) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \xi(i) + \frac{S(0)}{t}. \quad (3)$$

Так как  $E\xi < \infty$  и  $S(0)/t \xrightarrow{P} 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (потому что распределение  $S(0)$  задано и не зависит от  $t$ ), то по ЗБЧ  $S(t)/t \xrightarrow{P} E\xi$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Значит, для центра масс существует предельная скорость, то есть  $X_c(t)/t \xrightarrow{P} E\xi/n$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим движение диаметра системы  $Y_n \equiv D = X_{(n)} - X_{(1)}$ .

**Утверждение 2.** Если  $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$ , то существует предельная скорость для каждой из частиц, равная  $E\xi/n$ .

*Доказательство.* Фиксируем  $k$  от 1 до  $n$ . Если  $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$ , то для любого  $j \neq k$  выполнено  $(X_k(t) - X_j(t))/t \xrightarrow{P} 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Теперь сложим эти  $n-1$  соотношений с  $(X_1(t) + \dots + X_n(t))/t \xrightarrow{P} E\xi$ , и получим  $X_k(t)/t \xrightarrow{P} E\xi/n$ ,  $t \rightarrow \infty$ , что и требовалось.

**5. Оценка с помощью максимумов.** Докажем, что из существования  $E\xi < \infty$  следует сходимость  $D(t)$  к нулю. Введем максимумы  $M(t) = \max\{\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(t-1)\}$ .

**Лемма.** Для  $t = 0, 1, \dots$  выполнено  $D(t) \leq \max\{D(0), M(t)\}$ . Если  $M(t)/t \xrightarrow{P} 0$ , то  $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Запишем формулы преобразования (2):

$$D(t+1) = D(t) + (\xi(t) - D(t))^+ - \xi(t) \wedge Y_2(t).$$

Понятно, что всегда  $Y_2(t) \leq D(t)$ . Рассмотрим два случая.

1) Если  $\xi(t) \leq D(t)$ , то  $D(t+1) = D(t) - \xi(t) \wedge Y_2(t) \leq D(t)$ .

2) Если  $\xi(t) > D(t)$ , то  $D(t+1) = \xi(t) - Y_2(t) \leq \xi(t)$ .

Таким образом,  $D(t+1) \leq \max\{D(t), \xi(t)\}$ , и первое утверждение леммы следует отсюда по индукции. Так как  $D(0)$  — заданное распределение, не зависящее от  $t$ , то  $D(0)/t \xrightarrow{P} 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Значит, для стремления  $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$  достаточно, чтобы  $M(t)/t \xrightarrow{P} 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

**6. Существование предельной скорости.** Докажем импликацию  $E\xi < \infty \Rightarrow M(t)/t \xrightarrow{P} 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Понятно, что

$$M(t)/t \xrightarrow{P} 0, t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(M(t) \leq \varepsilon t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Пусть  $F(x)$  — функция распределения величины  $\xi$ ,  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ . Нам понадобится теорема:

Теорема 1 [1, стр. 23]. Пусть  $0 \leq \tau \leq \infty$ . Для последовательности  $\{u_t\}$  выполнение  $P(M(t) \leq u_t) \rightarrow e^{-\tau}$  равносильно  $t\bar{F}(t) \rightarrow \tau$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

Фиксируем  $\forall \varepsilon > 0$ , возьмем  $u_t = \varepsilon t$  и докажем  $t\bar{F}(\varepsilon t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Для этого достаточно показать, что  $x\bar{F}(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ , потому что тогда для  $\forall \varepsilon > 0$   $\varepsilon t\bar{F}(\varepsilon t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Воспользуемся утверждением:

Утверждение 3 [2, стр. 266]. Пусть  $\xi \geq 0$ ,  $E\xi < \infty$ . Тогда

$$E\xi = \int_0^\infty P(\xi > x)dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx. \quad (5)$$

Возьмем  $x > 0$ . Запишем:  $\int_0^x \bar{F}(y)dy = x\bar{F}(x) + \int_0^x ydF(y)$  (проинтегрировали по частям). При  $x \rightarrow \infty$  оба интеграла стремятся к  $E\xi$ , поэтому  $x\bar{F}(x) \rightarrow 0$ .

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть  $E\xi < \infty$ . Тогда существует предельная скорость частиц  $X_1, \dots, X_n$ , равная  $E\xi/n$ , то есть  $X_k(t)/t \xrightarrow{P} E\xi/n$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

**7. Частные случаи.** Пусть  $n = 2$  и величина скачка  $\xi$  распределена показательным с параметром  $\lambda$ ,  $E\xi = 1/\lambda$ . Ясно, что

$$\Delta(X_1(t) - X_2(t)) = \xi(t)I_{\{X_1(t) < X_2(t)\}} - \xi(t)I_{\{X_1(t) \geq X_2(t)\}},$$

где  $\Delta(X_1(t) - X_2(t)) = (X_1(t+1) - X_2(t+1)) - (X_1(t) - X_2(t))$ . Тогда  $E[\Delta(X_1(t) - X_2(t)) | X_1(t) - X_2(t) = z] = (I_{z < 0} - I_{z \geq 0})E\xi$ . Значит, «в среднем» величина  $(X_1(t) - X_2(t))$  «стремится» вернуться в 0, и по критерию Фостера [4] марковская цепь  $\{X_1(t) - X_2(t)\}$  эргодична, то есть существует предельное распределение  $Z$ , такое что  $X_1(t) - X_2(t) \xrightarrow{d} Z$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Можно показать, что распределение  $Z$  двустороннее экспоненциальное с плотностью  $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ ,  $x \in R$ .

Значит,  $D(t) = X_{(2)}(t) - X_{(1)}(t) = |X_1(t) - X_2(t)| \xrightarrow{d} |Z|$ , и  $|Z| \stackrel{d}{=} \xi$ , то есть стационарное распределение диаметра системы — показательное с тем же параметром  $\lambda$ .

Пусть начальное расстояние между частицами постоянно и равно  $D(0)$ . Оказывается, что распределение величины  $|X_1(t) - X_2(t)|$  уже становится показательным, если левая частица хоть один раз перепрыгнет правую. На этом строится оценка скорости сходимости  $D(t) \xrightarrow{d} |Z|$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Эта оценка такова: для  $\forall s \geq 0$

$$\left| P(D(t) > s) - e^{-\lambda s} \right| \leq 2 \cdot \frac{\lambda^t (D(0))^t}{t!}.$$

Для случая, когда движутся три частицы и скачки распределены показательно с параметром  $\lambda$ , также существует стационарное распределение марковской цепи  $(X_{(2)}(t) - X_{(1)}(t), X_{(3)}(t) - X_{(2)}(t))$ , то есть существуют величины  $Z_1$  и  $Z_2$  такие, что при  $t \rightarrow \infty$

$$(X_{(2)}(t) - X_{(1)}(t), X_{(3)}(t) - X_{(2)}(t)) \xrightarrow{d} (Z_1, Z_2),$$

причем  $Z_1 \sim \exp(2\lambda)$ ,  $Z_2 \sim \exp(\lambda)$ , и величины  $Z_1$  и  $Z_2$  независимы.

По аналогии, для  $n = 4, 5, \dots$  возникает предположение:

Гипотеза. Существует стационарное распределение марковской цепи  $\vec{Y}(t)$ , то есть существует случайный вектор  $\vec{Z} = (Z_2, \dots, Z_n)$  с независимыми компонентами, такой что  $\vec{Y}(t) \xrightarrow{d} \vec{Z}, t \rightarrow \infty$ , причем  $Z_j \sim \exp((n-j+1)\lambda)$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$ .

- [1] ЛИТБЕТТЕР М., ЛИНДГРЕН Г., РОТСЕН Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов, пер. с англ. — М.: Мир, 1989.
- [2] ШИРЯЕВ А. Н. Вероятность — М.: МЦНМО, 2004.
- [3] ANURAG GUPTA, IAN F. AKYILDIZ, RICHARD M. FUJIMOTO. Performance Analysis of Time Warp With Multiple Homogeneous Processors — IEEE Transactions on Software Engineering, v. 17, №. 10, October 1991.
- [4] FAYOLLE G., MALYSHEV V., MENSHIKOV M. Topics on constructive countable Markov chains — Cambridge University Press, 1995.

УДК 517.98

## Конечно-кратные интегралы, аппроксимирующие в пространстве S решение интегро-дифференциального уравнения

**А. С. Пляшечник**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Для решения различных задач математической физики используется теорема Троттера [2], позволяющая определять некоторые линейные операторы как пределы более простых операторов. Эта теорема состоит в следующем. Пусть  $E$  — банахово пространство;  $A, B$  — линейные операторы на  $E$ . Тогда при некоторых условиях на  $A$  и  $B$  справедливо

$$\forall f \in E \quad (e^{tA/n} e^{tB/n})^n f \rightarrow e^{t(A+B)} f, \quad n \rightarrow \infty$$

Теорема Троттера справедлива для банаховых пространств. В данной работе для пространства  $S$  — пространства бесконечно дифференцируемых, убывающих быстрее любого полинома функций на  $\mathbb{R}^n$ , эта формула доказана для конкретных операторов  $A$  и  $B$ . Пространство  $S$  представляет собой метрическое, полное, локально выпуклое пространство [1,3] (пространство Фреше), но не является банаховым пространством, поэтому теорема Троттера в данном случае не применима. Контрпример к теореме Троттера для пространства Фреше можно найти в [5].

В работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть  $\mu, \nu \in S$ . Обозначим  $\mu^*$  — оператор свертки с функцией  $\mu$ , а  $\nu \cdot$  — оператор умножения на функцию  $\nu$ . Тогда

$$\forall f \in S \quad (e^{t\mu^*/n} e^{t\nu \cdot/n})^n f \rightarrow e^{t(\mu^* + \nu \cdot)} f, \quad n \rightarrow \infty$$

Тем самым, для операторов  $\mu^*$  и  $\nu \cdot$  в пространстве  $S$  верна теорема Троттера.

Теорема 2. Пусть  $\mu, \nu, f \in S$ . Тогда для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \mu(x) * \psi(x, t) + \nu(x) \cdot \psi(x, t)$$

$t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , с начальным условием  $\psi(x, 0) = f(x)$  функция  $e^{t(\mu^* + \nu \cdot)} f$  является решением.

Уравнения такого типа рассматриваются в [4, 6]. Т.к. функции  $e^{t\mu^*}$  и  $e^{t\nu \cdot}$  вычисляются в явном виде при помощи интегралов, то решение данного уравнения может быть представлено в виде предела последовательности конечно-кратных интегралов.

- [1] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
- [2] Рид М., Саймон В. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. — М.: Мир. 1977.
- [3] РОБЕРТСОН А.П., РОБЕРТСОН В.Дж. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.
- [4] СМОЛЯНОВ О.Г., ШАВГУЛИДЗЕ Е.Т. Псевдодифференциальные операторы в суперанализе. — *Успехи математических наук*. — 1986. — **41**, № 4. — 164–165.
- [5] ТОКАРЕВ А.Г. Контрпримеры к формуле Троттера в локально выпуклых пространствах. — *Математические заметки*. — 1996. — **59**, № 6. — 947–950.
- [6] ШАМАРОВ Н.Н. Функциональный интеграл по счетно-аддитивной мере, представляющий решение уравнения Дирака. — *Труды Московского Математического Общества* — **66**. — 2005.

**Секториальность оператора  
линеаризованных стационарных уравнений  
вязкой сжимаемой жидкости**

**М. А. Прибыль**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Пусть  $(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \bar{v}(x))$  — решение стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости, где  $\bar{u}(x) = (\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x))$  — скорость жидкости,  $\bar{v}(x) > 0$  — удельный объем. Рассмотрим линеаризацию этих уравнений на указанном решении и для полученной системы исследуем следующую спектральную задачу:

$$\frac{1}{\bar{v}(x)} \Delta u_i(x) + a_{i1}(x) \partial_{x_1} v(x) + a_{i2}(x) \partial_{x_2} v(x) - \lambda u_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u(x) - \lambda v(x) = 0, \quad (2)$$

$$(3)$$

где  $a_{ii}(x) = \frac{1}{\bar{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i(x)}{\partial x_i} + p'(\bar{v})$ ,  $a_{ij}(x) = \frac{1}{\bar{v}^2(x)} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i(x)}{\partial x_j}$ ,

$p(v) \in C^1(0, \infty)$  — давление,  $x = (x_1, x_2)$  — лагранжевы координаты. Все функции заданы на торе  $T = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  и удовлетворяют периодическим краевым условиям.

Перепишем заданную систему уравнений в абстрактной форме

$$(A(x, D) - \lambda E)U(x) = 0, \quad (4)$$

где  $U(x) = (u_1(x), u_2(x), v(x))$ ,  $x \in T$ ,  $A(x, D) : \mathbb{L}_2(T) \times \mathbb{L}_2(T) \times \mathbb{L}_2(T) \rightarrow \mathbb{L}_2(T) \times \mathbb{L}_2(T) \times \mathbb{L}_2(T)$  — матрица операторов, определяемая уравнениями (1), (2),  $E$  — единичная матрица. Область определения  $D(A(x, D))$  и область значений  $R(A(x, D))$  оператора  $A(x, D)$  определяются соотношениями

$$D(A(x, D)) = \mathbb{H}^2(T) \times \mathbb{H}^2(T) \times \mathbb{H}^1(T),$$

$$R(A(x, D)) \subset \mathbb{L}_2(T) \times \mathbb{L}_2(T) \times \mathbb{H}^1(T).$$

Для  $\lambda$  из резольвентного множества оператор  $(A(x, D) - \lambda E)^{-1}$  определен на  $R(A(x, D))$ .

Определение. [4] Замкнутый оператор  $A(x, D)$  называется секториальным, если существует  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  и  $M \geq 1$  такие, что для некоторого

$a \in \mathbb{R}$  сектор  $S_{a,\varphi} = \{\lambda : 0 \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \varphi, \lambda \neq a\}$  лежит в резольвентном множестве оператора  $A(x, D)$  и  $\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$  при  $\lambda \in S_{a,\varphi}$ .

Основным результатом работы является следующее утверждение.

**Теорема.** Оператор  $A(x, D)$  секториален.

**Доказательство.** Рассмотрим систему (4) с «замороженными» коэффициентами

$$(A(x_0, D) - \lambda E)U(x) = 0, \quad (5)$$

и найдем собственные значения. Применяя к (5) преобразование Фурье

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad (x, \xi) = (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2),$$

получим систему уравнений

$$\left(-\frac{\xi^2}{\bar{v}} - \lambda\right) u_1(\xi) - i(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2)v(\xi) = 0, \quad (6)$$

$$\left(-\frac{\xi^2}{\bar{v}} - \lambda\right) u_2(\xi) - i(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2)v(\xi) = 0, \quad (7)$$

$$-i\xi_1 u_1(\xi) - i\xi_2 u_2(\xi) - \lambda v(\xi) = 0, \quad (8)$$

где  $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ ,  $a_{ij} = a_{ij}(x_0)$ ,  $\bar{v} = \bar{v}(x_0)$ . Определитель системы (6)–(8)

обращается в нуль, если выполнено одно из равенств:  $-\frac{\xi^2}{\bar{v}} - \lambda = 0$ ,

$\lambda^2 + \lambda \frac{\xi^2}{\bar{v}} + \xi_1(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) + \xi_2(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) = 0$ . Из первого урав-

нения  $\lambda(\xi) = -\frac{\xi^2}{\bar{v}} \in \mathbb{R}_-$  для любых  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ . Из второго уравнения

$\lambda(\xi) = -\frac{\xi^2}{2\bar{v}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{a}(\xi_1, \xi_2)}$ , где  $\tilde{a}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi^4}{\bar{v}^2} - 4\xi_1(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) - 4\xi_2(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2)$ .

Если  $\tilde{a}(\xi_1, \xi_2) > 0$ , то  $\lambda(\xi) \in \mathbb{R}_-$ . Если  $\tilde{a}(\xi_1, \xi_2) < 0$ , то  $\operatorname{Re} \lambda(\xi) \in \mathbb{R}_-$ ,

причем  $|\operatorname{Im} \lambda(\xi)| \leq C_0 \xi^2$  для некоторой константы  $C_0 \in \mathbb{R}_+$ . Пусть

$M = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det A(x_0, D) = 0\}$ . Сектор  $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq |\arg(\lambda)| < \pi - \arctg 2vC_0, \lambda \neq 0\}$

не содержит множество  $M$ .

Найдем оператор, обратный к  $A(x_0, \xi) - \lambda E$ :

$$(A(x_0, \xi) - \lambda E)^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_1(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) - d(\xi, \lambda) & \xi_2(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) & i(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) \\ \frac{d(\xi, \lambda)(\frac{\xi^2}{\bar{v}} + \lambda)}{\xi_1(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2)} & \frac{d(\xi, \lambda)(\frac{\xi^2}{\bar{v}} + \lambda)}{\xi_2(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) - d(\xi, \lambda)} & \frac{d(\xi, \lambda)}{i(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2)} \\ \frac{d(\xi, \lambda)(\frac{\xi^2}{\bar{v}} + \lambda)}{i\xi_1} & \frac{d(\xi, \lambda)(\frac{\xi^2}{\bar{v}} + \lambda)}{i\xi_2} & -\frac{\frac{\xi^2}{\bar{v}} + \lambda}{d(\xi, \lambda)} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $d(\xi, \lambda) = d(x_0, \xi, \lambda) = \lambda(\frac{\xi^2}{v} + \lambda) + \xi_1(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) + \xi_2(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2)$ . Матрица (9) определена для  $\lambda \in S$ . С помощью обратного преобразования Фурье и равенства Парсеваля доказываем, что оператор  $A(x_0, D)$  секториален.

Теперь «разморозим» коэффициенты  $x_0 \rightarrow x$  оператора  $A(x, D) - \lambda E$  и найдем обратный. Так как  $U(x) = (u_1(x), u_2(x), v(x))$  удовлетворяет периодическим краевым условиям на  $T$ , то решение уравнения

$$(A(x, D) - \lambda E)U(x) = f \quad (10)$$

будем искать в виде:

$$U(x) = \sum_{\xi_1, \xi_2=1}^{\infty} (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} (E - B(x, \xi, \lambda)) e^{i(x, \xi)} g(\xi), \quad (11)$$

где  $(A(x, \xi) - \lambda E)^{-1}$  это оператор (9) с  $x = x_0$ , матрицу  $B(x, \xi, \lambda)$  определим следующим образом:

$$B(x, \xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1(x, \xi, \lambda) \\ 0 & 0 & b_2(x, \xi, \lambda) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_i(x, \xi, \lambda) = \left( a_{i1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{i2}(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left( -\frac{\xi^2}{v} + \lambda \right) + \frac{(2\xi_1 + 2\xi_2)}{v(x)} \Delta \left( \frac{a_{i1}(x)\xi_1 + a_{i2}(x)\xi_2}{d(x, \xi, \lambda)} \right), \quad i = 1, 2.$$

Элементы матрицы  $B(x, \xi, \lambda)$  ограничены по  $\xi_1, \xi_2$  и определены для  $\lambda$  вне множества  $\bar{M} = \bigcap_{x_0 \in T} M$ . Подставляя (11) в (10) и используя формулу коммутации псевдодифференциальных операторов [5], получим:

$$\begin{aligned} (A(x, D) - \lambda E) \sum_{\xi_1, \xi_2=1}^{\infty} (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} (E - B(x, \xi, \lambda)) e^{i(x, \xi)} g(\xi) = \\ = \sum_{\xi_1, \xi_2=1}^{\infty} (E + K(x, \xi, \lambda) + B(x, \xi, \lambda)) (E - B(x, \xi, \lambda)) e^{i(x, \xi)} g(\xi) = \\ = \sum_{\xi_1, \xi_2=1}^{\infty} E + K(x, \xi, \lambda) (E - B(x, \xi, \lambda)) e^{i(x, \xi)} g(\xi) = \sum_{\xi_1, \xi_2=1}^{\infty} f(\xi) e^{i(x, \xi)}, \quad (12) \end{aligned}$$



Оператор  $K(x, \xi, \lambda)$  при  $\lambda \notin \overline{M}$  вполне непрерывен для любого  $\xi$ , что влечет вполне непрерывность оператора  $\overline{K}(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi, \lambda)(E - B(x, \xi, \lambda))$ . По теореме Гохберга [1] оператор  $(E + \overline{K}(x, \xi, \lambda))^{-1}$  определен всюду за исключением дискретного множества точек и множества  $\overline{M}$ . Из (12) следует, что  $g(\xi) = (E + \overline{K}(x, \xi, \lambda))^{-1} f(\xi) e^{i(x, \xi)}$  для любого  $\xi$ . Подставляем  $g(\xi)$  в (11)

$$U(x) = \sum_{\xi_1, \xi_2=1}^{\infty} (A(x, \xi) - \lambda E)^{-1} (E - B(\lambda, x, \xi)) \times \\ \times (E + \overline{K}(\lambda, x, \xi))^{-1} e^{i(x, \xi)} f(\xi) = (A(x, D) - \lambda E)^{-1} f(x).$$

Существуют числа  $a \in \mathbb{R}_+$  и  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  такие, что сектор  $S_{a, \varphi}$  лежит в резольвентном множестве оператора  $A(x, D)$ , т. е. не содержит множество  $\overline{M}$  и дискретное множество точек, в которых оператор  $E + \overline{K}(x, \xi, \lambda)$  не имеет ограниченного обратного. Оценка  $\|(A(x, D) - \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$  легко следует из доказанных утверждений.

Исходя из аналогии с методом стабилизации для параболических уравнений [2] и системы Навье-Стокса [3], секториальность оператора  $A(x, D)$  может быть использована, например, для построения метода стабилизации решения нестационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости.

- [1] ГОХБЕРГ И. Ц., КРЕЙН М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
- [2] ФУРСИКОВ А. В. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью. *Матем. Сб.* — 2001. — **192**, № 4.
- [3] ФУРСИКОВ А. В. Стабилизация с границы решений системы Навье-Стокса: разрешимость и обоснование возможности численного моделирования. *Дальневосточный Мат. Ж.* — 2003. — **4**, № 1.
- [4] ХЕНРИ Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
- [5] ХЕРМАНДЕР Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 3. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1987.

# Конечно-автоматные преобразования почти периодических последовательностей и алгоритмическая неразрешимость\*

Ю. Л. Притыкин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

**1. Введение.** Понятие почти периодичности обобщает понятие периодичности. Строго почти периодические последовательности (под другим названием) изучались в работах Морса и Хедлунда [1], а также ряда других авторов (например, см. [3,4]). Это понятие возникло в символической динамике, но впоследствии оказалось продуктивным как в математической логике, так и в теории алгоритмов.

Мы будем рассматривать расширения класса периодических последовательностей  $\mathcal{P} = \{\omega : \exists T \forall i \in \mathbb{N} \omega(i) = \omega(i + T)\}$ : класс  $\mathcal{AP}$  почти периодических последовательностей, таких, что для каждого слова  $x$ , входящего в неё бесконечное число раз, найдётся такое натуральное  $l$ , что на каждом её отрезке длины  $l$  найдётся вхождение слова  $x$ ; класс  $\mathcal{SAP}$  строго почти периодических (=равномерно рекуррентных) последовательностей, таких что для каждого слова  $x$ , входящего в неё хотя бы один раз, найдётся такое натуральное  $l$ , что на каждом её отрезке длины  $l$  найдётся вхождение слова  $x$ ; а также класс  $\mathcal{EAP}$  существенно строго почти периодических последовательностей вида  $a\omega$ , где  $a$  — конечный префикс,  $\omega \in \mathcal{SAP}$ . Если  $\omega \in \mathcal{EAP}$ , то обозначим через  $\text{pr}(\omega)$  минимальное такое  $n$ , что  $\omega(n)\omega(n+1)\omega(n+2)\dots \in \mathcal{SAP}$ . Ясно, что  $\mathcal{P} \subset \mathcal{SAP} \subset \mathcal{EAP} \subset \mathcal{AP}$ . Оказывается, все включения строгие. Про самое интересное из них — третье — это доказано в [5]. Про второе это очевидно, а строгость первого следует из следующего примера.

Определим последовательность слов  $a_n \in \mathbb{B}^*$ . Положим  $a_0 = 0$ , и далее по следующему правилу:  $a_{n+1} = a_n \bar{a}_n$ , где  $\bar{x}$  обозначает слово, полученное из  $x$  заменой всех символов 1 на 0 и 0 на 1. Последовательность  $\omega_T = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0110100110010110\dots$  называется стандартной последовательностью Туэ–Морса и обладает огромным количеством интересных свойств (подробнее см. [2]), в частности, является строго почти периодической (таким образом,  $\omega \in \mathcal{SAP} \setminus \mathcal{P}$ ).

**2. Автоматные преобразования.** Интересно проследить, как себя ведёт свойство почти периодичности под действием различных преобразо-

\*Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00122, грантом Научных Школ 358.2003.1 и Колмогоровским грантом Института Новых Технологий.

ваний. Самыми простыми можно считать конечно-автоматные. Автомат действует на последовательностях так: считывает символ последовательности, применяет к нему и текущему состоянию функцию переходов, на основании этого выдаёт символ выходного алфавита и меняет состояние, после чего переходит к следующему символу, и так далее.

В [4] была получена теорема о том, что для любого конечного автомата  $F$  если  $\omega \in \mathcal{AP}$ , то  $F(\omega) \in \mathcal{AP}$ . Оказывается, можно доказать аналогичное утверждение про существенно строго почти периодические последовательности.

**Теорема 1.** Пусть  $F$  — конечный автомат. Тогда если  $\omega \in \mathcal{EAP}$ , то  $F(\omega) \in \mathcal{EAP}$ .

Доказательство см. в [5]. Его особенность — существенная неэффективность. Этот недостаток преодолевается в теореме 7.

В одном частном случае утверждение теоремы 1 можно усилить. Автомат  $F$  называется *возвратным*, если каждая буква входного алфавита осуществляет перестановку множества его состояний. Находясь в некотором состоянии и зная последовательность предыдущих входных символов, можно восстановить последовательность пройденных состояний (в этом и заключается свойство возвратности).

**Теорема 2.** Пусть  $F$  — возвратный конечный автомат. Тогда если  $\omega \in \mathcal{SAP}$ , то  $F(\omega) \in \mathcal{SAP}$ .

Доказательство можно найти в [6].

Если  $\omega$  — последовательность над алфавитом  $\Sigma$ ,  $v$  — последовательность над алфавитом  $\Delta$ , определим последовательность  $\omega \times v$  над алфавитом  $\Sigma \times \Delta$  исходя из равенства  $(\omega \times v)(i) = \langle \omega(i), v(i) \rangle$ .

**Следствие 1.** Если  $\omega \in \mathcal{SAP}$  и  $v \in \mathcal{P}$ , то  $\omega \times v \in \mathcal{SAP}$ .

Вопрос о том, когда для  $\omega, v \in \mathcal{SAP}$  имеем  $\omega \times v \in \mathcal{SAP}$ , остаётся открытым. Для  $\omega, v \in \mathcal{AP}$  не всегда  $\omega \times v \in \mathcal{AP}$  (см. [4]).

**3. Алгоритмическая неразрешимость.** В связи с почти периодическими последовательностями возникает много интересных алгоритмических вопросов. Мы доказываем алгоритмическую неразрешимость некоторых из них.

Формально, мы рассматриваем алгоритмы, которым на вход подаётся оракул для последовательности. Алгоритм должен завершать работу на любом оракуле и выдавать ответ в виде конечного бинарного слова. Основное свойство такого алгоритма — непрерывность: перед тем, как выдать ответ, он может прочитать лишь конечное количество элементов последовательности. Таким образом, для доказательства алгоритмической неразрешимости некоторого свойства таким алгоритмом достаточно показать его разрывность.

Почти никакие осмысленные свойства нельзя распознать, имея на

входе только саму последовательность. Например, про последовательность из 0 и 1 нельзя даже сказать за конечное время, входит ли в неё символ 1: если алгоритм проверил некоторое конечное количество символов, и все они оказались 0, он не может гарантировать, что далее не встретится 1.

Регулятором почти периодичности последовательности  $\omega \in \mathcal{AP}$  назовём функцию  $R_\omega: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — на числе  $n$  она равна минимальному такому  $l$ , что каждое слово длины  $n$ , входящее в  $\omega$  бесконечно много раз, встретится на любом отрезке длины  $l$  последовательности  $\omega$ , а также любое слово длины  $n$ , входящее в  $\omega$  конечное количество раз, не входит правее  $l$ . Можно ограничиться только рассмотрением оценок сверху на регулятор. Будем писать  $f \geq R_\omega$ , если  $f(n) \geq R_\omega(n)$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ .

Теперь мы можем рассматривать алгоритмы, получающие на вход почти периодическую последовательность  $\omega$  и оценку сверху её регулятора  $f$ . При таком подходе упомянутая выше задача разрешима: прочитав первые  $f(1)$  символов последовательности, можно понять, входит ли в неё 1, а прочитав следующие  $f(1)$  символов, можно сказать даже, входит ли в неё 1 бесконечно много раз. Заметим, что по  $\omega$  и  $f$  всегда можно вычислить точные значения  $R_\omega$ .

Под сходимостью  $f_n \rightarrow f$ , где  $f_n, f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , будем понимать условие  $\forall i \exists n \forall m > n f_m(i) = f(i)$ .

Теорема 3. По  $\omega \in \mathcal{EAP}$  и  $f \geq R_\omega$  невозможно алгоритмически определять какое-либо  $l \geq \text{rg}(\omega)$ .

Для доказательства достаточно построить  $\omega_n \in \mathcal{EAP}$ ,  $\omega \in \mathcal{SAP}$  и  $f_n \geq R_{\omega_n}$ ,  $f \geq R_\omega$ , такие что  $\omega_n \rightarrow \omega$ ,  $f_n \rightarrow f$ , но  $\text{rg}(\omega_n) \rightarrow \infty$ . Действительно, предположим, указанный в условии теоремы алгоритм существует. Пусть, получив на вход  $\langle \omega, f \rangle$ , он выдаёт число  $l \geq 0$ . Во время вычисления  $l$  алгоритм прочитал лишь конечное количество символов  $\omega$  и значений  $f$ , то есть для некоторого  $N > l$  он не знает  $\omega(k)$  и  $f(k)$  для  $k > N$ . Поскольку  $\text{rg}(\omega_n) \rightarrow \infty$ , найдётся  $n$ , для которого  $\text{rg}(\omega_n) > N$ . Ясно тогда, что на входе  $\langle \omega_n, f_n \rangle$  алгоритм будет работать так же, как и на  $\langle \omega, f \rangle$ , и значит, выдаст  $l$ , но  $\text{rg}(\omega_n) > N > l$ . Оказывается, можно положить  $\omega = \omega_T$ ,  $\omega_n = a_n a_n a_n \omega$ . Полные доказательства этой и ниже-следующих теорем можно найти в [6].

Как уже было замечено, класс  $\mathcal{EAP}$  строго вложен в класс  $\mathcal{AP}$ . Доказательство можно найти в [5]. Используя ту же конструкцию, можно показать, что эти классы невозможно эффективно разделять.

Теорема 4. По  $\omega \in \mathcal{AP}$  и  $f \geq R_\omega$  невозможно алгоритмически определять, верно ли, что  $\omega \in \mathcal{EAP}$ .

Следующая теорема показывает, что невозможно эффективно разделять даже классы  $\mathcal{SAP}$  и  $\mathcal{P}$ .

---

Теорема 5. По  $\omega \in \mathcal{SAP}$  и  $f \geq R_\omega$  невозможно алгоритмически определять, верно ли, что  $\omega \in \mathcal{P}$ .

Из конструкции в доказательстве теоремы 5 следует существование бесконечного количества периодических последовательностей с общим регулятором (априори не очевидное, так как самая естественная оценка на регулятор — период последовательности — не ограничен). Эта конструкция используется в следующей теореме.

Теорема 6. По  $\omega \in \mathcal{EAP}$ ,  $f \geq R_\omega$  и некоторому  $l \geq \text{pr}(\omega)$  невозможно алгоритмически находить  $\text{pr}(\omega)$ .

Самый интересный из возникающих здесь вопросов — эффективизация теоремы 1 — долгое время оставался открытым. В самое последнее время удалось получить на него ответ.

Теорема 7. По конечному автомату  $F$ , последовательности  $\omega \in \mathcal{SAP}$  и  $f \geq R_\omega$  можно алгоритмически находить  $\text{pr}(F(\omega))$ .

**4. Благодарности.** Автор благодарен А. Л. Семёнову и Ан. А. Мучнику за помощь в работе и привлечение моего внимания к этой теме, а также М. Раскину и остальным участникам Колмогоровского семинара за интересные и полезные обсуждения.

- [1] M. MORSE, G. A. HEDLUND. Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, **60**, pp. 815–866, 1938.
- [2] J.-P. ALLOUCHE, J. SHALLIT. The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence. *Sequences and their applications*, Proceedings of SETA'98, Springer Verlag, pp. 1–16, 1999.
- [3] J. CASSAIGNE. Recurrence in infinite words. *Proceedings of the 18th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2001)*, Springer Verlag, pp. 1–11, 2001.
- [4] AN. MUCHNIK, A. SEMENOV, M. USHAKOV. Almost periodic sequences. *Theoretical Computer Science*, **304**, pp. 1–33, 2003.
- [5] Ю. Л. ПРИТЫКИН. Конечно-автоматные преобразования строго почти периодических последовательностей. *Математические заметки*, готовится к публикации, 2006.
- [6] YU. PRITYKIN. Strongly Almost Periodic Sequences, Finite Automata and Algorithmic Undecidability. *Proceedings of Workshop on Words and Automata (student session)*, St. Petersburg (Russia), June 7th, 2006 (satellite to CSR'06), to appear.

## Об оценке регулятора автоматного образа строго почти периодической последовательности\*

**М. А. Раскин**

*Московский государственный университет*

Определение 1. Последовательность символов  $a$  из конечного алфавита  $\Sigma$  называется *строго почти периодической*, если существует функция  $l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , такая что для любого  $u$  и каждого слова длины  $u$  из алфавита  $\Sigma$  либо не входит в  $a$ , либо входит в каждый её отрезок длины  $l(u)$ . Функция  $l$  называется *регулятором*. Последовательность  $a$  называется *существенно почти периодической*, если существует число  $p$ , такое что для любого  $u$  и каждого слова длины  $u$  из алфавита  $\Sigma$  либо не входит в  $a$  правее позиции  $p$ , либо входит в каждый её отрезок длины  $l(u)$ .

Будем обозначать за  $l^{on}(\cdot)$  функцию, являющуюся  $n$ -кратной композицией функции  $l(\cdot)$ .

В [3] доказано, что под действием конечного автомата строго почти периодическая последовательность переходит в существенно почти периодическую. При этом для регулятора образа последовательности с регулятором  $l$  под действием автомата с  $n$  состояниями в [2, 3] была фактически доказана верхняя оценка на регулятор, равная  $l^{on}$ . При этом не было известно, насколько точна эта оценка. В данной работе построен пример, в котором происходит линейное от  $n$  число итераций регулятора.

Определение 2. Автоматом  $Ladder_n$  назовём автомат с  $n$  состояниями  $(0 \dots n-1)$ , со входами из множества  $\{0, 1\}$ , всегда выдающий пару из своего состояния и входного бита с переходами по следующим правилам:

0 увеличивает номер состояния на 1 в нечётных состояниях и уменьшает на 1 в чётных состояниях

1 уменьшает номер состояния на 1 в нечётных состояниях и увеличивает на 1 в чётных состояниях

если состояния с получившимся номером не существует, то автомат остаётся в текущем состоянии.

Начальное состояние автомата — 0.

На рис. 1, 2 дан пример действия автомата для нечётного  $n = 5$ , показаны переходы под действием нуля и единицы.

Определение 3. Пусть дана последовательность положительных целых чисел  $k_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Пусть  $A_0 = 0$ ,  $A_n = A_{n-1} \overline{A_{n-1}} \dots \overline{A_{n-1}}$ , где  $\overline{A_{n-1}}$

\*Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00122 и НШ 358.2003.1, а также Колмогоровским грантом.

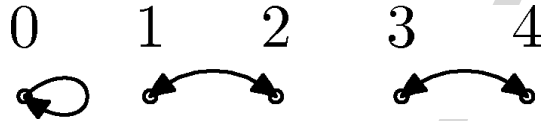


Рис. 1.

повторяется  $k_n$  раз. Все  $A_n$  являются началами друг друга, поэтому существует предельная последовательность  $A$ , началами которой они все являются. Будем называть  $A$  *обобщённой последовательностью Туэ-Морса* (с последовательностью параметров  $k_n$ ),  $A_n$  макронулём глубины  $n$ ,  $\overline{A_n}$  макроединицей глубины  $n$ .

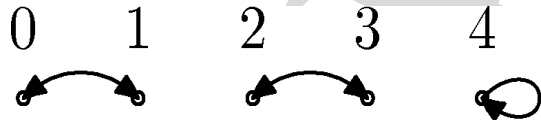


Рис. 2.

Пример 1. При  $k_n \equiv 2$  получаем последовательность 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1...

При  $k_n \equiv 1$  получаем известную последовательность Туэ-Морса. В общем случае, аналогично ей,  $A$  совпадает с последовательностью, полученной из последовательности со сдвинутой на  $t$  последовательностью параметров заменой 0 на макронулём глубины  $t$  и 1 на макроединицу глубины  $t$ .

Назовём вхождение слова  $w$  в последовательность  $A$  *корректным*, если оно начинается с позиции, кратной  $|w|$ .

Теорема 1.  $A_m$  и  $\overline{A_m}$  встречаются как подпоследовательности  $A$  только корректно, если  $\forall i k_i \geq 2$ .

*Доказательство.* Для  $t = 0$  утверждение верно. Для  $t = 1$  заметим, что некорректное вхождение должно пересекаться ровно с двумя корректными вхождениями некоторых макросимволов. Рассмотрим  $A_1$  (его отрицание рассматривается аналогично). Его последние  $k_1$  единиц подряд встречаются только в конце  $A_1$  или как первый символ  $\overline{A_1}$  и последние  $k - 1$  символов  $A_1$ . В первом случае вхождение корректно, во втором предшествующий символ будет 1, а не 0. Для произвольного  $t$   $A_m = A_{m-1} \overline{A_{m-1}} \dots \overline{A_{m-1}}$ , причём  $A_{m-1}$  должно входить корректно, поэтому заменим макронулём глубины  $t - 1$  на 0, макроединицу глубины  $t - 1$

на 1 и сведём к  $m = 1$ .

Обобщённая последовательность Туэ-Морса является частным случаем рассмотренного в [1] блочного произведения (в качестве сомножителя  $n$  надо брать  $01 \dots 1$ , где единиц  $k_n$ ). Поэтому она является строго почти периодической. Её регулятор можно оценить сверху по формуле  $l_0(u) \leq 2|A_m|$  при  $u \leq |A_{m-2}|$  в силу того, что любое подслово  $A$  длины  $u$  встречается, пересекаясь не более, чем с двумя макросимволами большей длины (глубины  $m-2$ ), входящими корректно, а их конкатенация входит в  $A_{m-1}$  или  $\overline{A_{m-1}}$ , которое, в свою очередь, встречается в обоих макросимволах глубины  $m$ . Также имеется оценка снизу  $l_0(|A_{m-1}|) \geq |A_m|$ , так как  $A_{m-1}$  не встречается в  $A_m$  без первого символа.

Рассмотрим теперь образ обобщённой последовательности Туэ-Морса с чётными параметрами под действием  $Ladder_n$ . Под действием двух повторов одного символа  $Ladder_n$  не меняет своё состояние, поэтому по индукции показывается, что изменение состояния  $Ladder_n$ , вызванное подачей на вход  $A_m$  или  $\overline{A_m}$ , совпадает с изменением от подачи 0 или 1 соответственно.

Замечание 1. Пусть  $Ladder_n$  находится в состоянии  $i$  и получает на вход слово  $A_1$  или  $\overline{A_1}$ . Если после этого состояние окажется  $i+1$ , то за время подачи слова на вход автомат побывал в состоянии  $i+2$  (если  $i+2 < n$ ), но не в большем (см. рисунок 3); если состояние в конце окажется  $i-1$ , то в состояниях больше  $i$  автомат не побывал; если же состояние не изменилось (то есть равняется 0 или  $n+1$ ), то состояние больше  $i+1$  заведомо встретиться не могло.

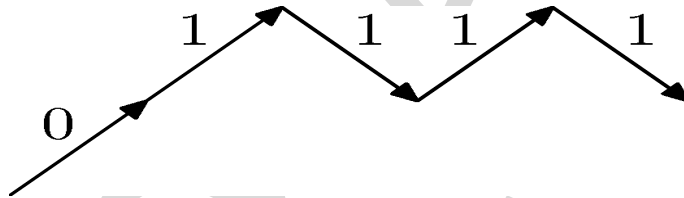


Рис. 3.

Рассмотрим выход  $Ladder_n$ , когда он находится в состоянии  $i$  и ему на вход подают  $\overline{A_m}$  или  $A_m$ , где  $m < n$ . Если после подачи всего слова состояние уменьшилось на 1, то максимальное состояние, встретившееся за время подачи слова не более  $\min(n-1, m+i)$ , если же оно увеличилось на 1, то максимальное состояние равно  $\min(n-1, m+i+1)$ . Для  $m = 0, 1$  это очевидно из замечания, для больших же  $m$  рассмотрим  $A_m$ , как об-



раз  $A_1$  при замене 0 и 1 на  $A_{m-1}$  и  $\overline{A_{m-1}}$ , после чего по предыдущему замечанию проведём очевидную индукцию.

Усилим утверждение. Рассмотрим выход  $Ladder_n$ , когда он находится в состоянии 0 и ему на вход подаются  $\overline{A_{m+n}}$ .

Лемма 1. Максимальное состояние, встречающееся перед позицией, делящейся на  $|A_{m+n-t}|$ , где  $0 \leq t \leq n$  равно  $t$ .

*Доказательство.* Для  $t = 0$  это очевидно. Пусть это проверено для некоторого  $t$ . Воспользуемся замечанием о максимуме состояния под действием  $A_1$  и тем, что  $A_{m+n-t}$  действует как 0, а  $\overline{A_{m+n-t}}$  как 1, и получим требуемое, рассмотрев максимум из максимумов по отрезкам длины  $|A_{m+n-t+1}|$ .

Теорема 2. В образе  $Ladder_n$   $l(|A_m|) \geq l_0(|A_{m+n-1}|)$ .

Замечание 2. По приведённой оценке на регулятор, это при больших  $n$  больше  $l_0^{\frac{n}{3}}(|A_m|)$ .

*Доказательство.* Для доказательства теоремы достаточно сказать, что в образе не встречается  $A_m$ , у которого последнему элементу сопоставлено состояние  $n$ , так как все его вхождения могут быть только корректны, а максимальное состояние сразу после его корректного вхождения в данное подслово равно  $n - 1$ .

Следствие 1. В образе обобщённой последовательности Туэ-Морса с чётными параметрами под действием  $Ladder_n$  есть бесконечно много отрезков длины  $|A_{m+n-1}|$ , свободных от вхождения слова из пар, вторые компоненты которых образуют  $A_m$ , а первая компонента последнего символа в слове равна  $n$ . При этом одно из таких слов встречается бесконечно много раз, в том числе в каждом отрезке длины  $2|A_{m+n+1}|$ .

*Доказательство.* Рассмотрим большое натуральное число  $N$ . Рассмотрим образ слова  $A_{m+N}\overline{A_{m+N}}$ , стоящего в начале обобщённой последовательности Туэ-Морса. Первая компонента последнего символа образа  $A_{m+N}$  равна 0. Первый макросимвол глубины  $m + n - 1$  в  $\overline{A_{m+N}}$  равен макроединице. Это макроединица, находящаяся правее позиции  $N$  и перед которой состояние было 0. В ней указанное слово не встречается по лемме 1. Но по той же лемме слово с указанным свойством должно встречаться в образе макроединицы глубины  $m + n$ , тоже идущей после состояния ноль. Заметим, что это слово всегда одно и то же, так как оно является образом  $\overline{A_m}$  под действием  $Ladder_n$ .

- [1] M. KEANE. *Generalised Morse sequences*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., Bd 22, S. 335–353, 1968.
- [2] AN. MUCHNIK, A. SEMENOV, M. USHAKOV. *Almost periodic sequences*. Theoretical Computer Science, vol. 304, pp. 1–33, 2003.

- [3] Ю. Л. Притыкин *Конечно-автоматные преобразования строго почти периодических последовательностей*. Курсовая работа, 2005.

УДК 517.6

# **О фредгольмовости электромагнитной задачи о собственных колебаниях в экранированных слоях, связанных через отверстие в экране\***

**И. А. Родионова**

*Пензенский государственный университет*

**1. Введение.** В работе рассматривается трехмерная векторная задача математической теории распространения волн в неограниченных областях: определение собственных частот волновода, сформированного плоскопараллельными слоями, связанными отверстием произвольной формы. Слои сформированы тремя идеально проводящими и бесконечно тонкими параллельными плоскостями. Электромагнитные параметры в разных областях могут быть различны.

**2. Постановка задачи.** Задача на собственные значения на отверстии  $\Omega \subset R^2$  ( $\Omega$  — ограниченная область), соединяющем два параллельных слоя,

$$U^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_3 < 1\} \quad \text{и} \quad U^- = \{x : -1 < x_3 < 0\},$$

состоит в определении рассеянного электромагнитного поля  $E, H$

$$E, H \in C^2(U) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{U^+} \setminus \Gamma_\delta) \bigcap_{\delta > 0} C(\overline{U^-} \setminus \Gamma_\delta), \quad (1)$$

где  $U = U^+ \cup U^-$ , удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} H = -i\omega \varepsilon E, \quad \operatorname{rot} E = i\omega \mu H, \quad x \in U, \quad (2)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_1, \mu = \mu_1$  в  $U^+$  и  $\varepsilon = \varepsilon_2, \mu = \mu_2$  в  $U^-$ , краевым условиям

$$E_\tau|_\Sigma = 0 \quad (3)$$

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-07-89063-а

для касательных к поверхности  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$  составляющих электрического поля, где

$$\Sigma_0 = \{x : x_3 = 0, x \in R^2 \setminus \bar{\Omega}\}, \quad \Sigma_{\pm} = \{x : x_3 = \pm 1\}$$

(выполняются только на гладких частях поверхности  $\Sigma$ ), условиям сопряжения на границе раздела сред

$$[E_\tau]_\Omega = 0, \quad [H_\tau]_\Omega = 0 \quad (4)$$

и условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме

$$E, H \in L^2_{loc}(U). \quad (5)$$

Здесь

$$\Gamma_\delta := \{x : |x - y| < \delta, y \in \Gamma = \partial\Omega\}.$$

Сформулируем условие излучения в соответствии с ([2, стр. 146])

Решение (нетривиальное) поставленной задачи будем называть квазиклассическим решением задачи на собственные значения.

Из уравнений Максвелла (2) следует, что

$$\Delta u + k_j^2 u = 0, \quad x \in U^+ (j = 1), x \in U^- (j = 2), \quad (6)$$

для  $u = H^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 1} = 0, \quad (7)$$

$$[\epsilon u]_\Omega = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial x_3} \right] \Big|_\Omega = 0, \quad (8)$$

$$u \in C^2(U) \bigcap_{\delta>0} C(\bar{U}^+ \setminus \Gamma_\delta) \bigcap_{\delta>0} C(\bar{U}^- \setminus \Gamma_\delta), \quad (9)$$

$$u(x') \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega}), \quad x' = (x_1, x_2), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} \sim O(|x - y|^{-1/2}), \quad x \rightarrow y, y \in \Gamma = \partial\Omega, x \in \Omega. \quad (11)$$

**3. Функция Грина для слоя.** Рассмотрим функцию Грина  $G^U$  для уравнения Гельмгольца для слоя  $U^- = \{x = (x_1, x_2, x_3) : -1 < x_3 < 0\}$ . Относительно волнового числа  $k$  считаем, что  $\text{Im} k \geq 0$  и  $k \neq 0$ . Функция Грина  $G^U$  содержится в [3].

В дальнейшем потребуются свойства следа функции  $G^U$  при  $x_3 = 0$  и  $y_3 = 0$ . Выделим особенность при  $|x' - y'| \rightarrow 0$  функции  $G^U(x', y')$ , здесь  $x' := (x_1, x_2)$  и  $y' := (y_1, y_2)$ :

$$G^U|_{x_3=y_3=0} = L(x' - y') - P(k) + B(x', y'), \quad (12)$$

где

$$L(x' - y') = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik|x' - y'|}}{|x' - y'|}, \quad P(k) = \frac{1}{2\pi} \ln(1 - e^{2ik}). \quad (13)$$

Здесь  $\ln z$  обозначает аналитическое продолжение вещественной функции  $\ln t, t > 0$  на множество  $C \setminus (-i\infty, 0]$  и

$$B(x', y') := \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\exp(ik(|x' - y'|^2 + 4j^2))}{(|x' - y'|^2 + 4j^2)^{1/2}} - \frac{e^{2ikj}}{2j} \right).$$

Для коэффициентов  $b_j(x', y')$  ряда  $B(x', y')$  и их производных любого порядка  $\alpha$  по  $x_j$  и  $y_j$  верны оценки [3]

$$|D^\alpha b_j(x', y')| \leq C_\alpha j^{-2}, \quad x, y \in \bar{\Omega}, \quad (14)$$

равномерные на каждом компакте  $\bar{\Omega} \subset R^2$ . Следовательно, мы доказали, что  $B \in C^\infty(R^2 \times R^2)$ .

Функция  $G^U = G^U(x, y; k)$  аналитична по  $k$  в  $C_+ = \{k : \text{Im} k > 0\}$  [3]. Обозначим через  $\Lambda(U)$  множество значений  $k$ , при которых функция Грина  $G^U$  не определена:

$$\Lambda(U) := \{k : k = \pi n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда, как показано в [3],  $G^U(x, y; k)$  непрерывно дифференцируема по  $x_i$  и  $y_i$  любое число раз в  $\bar{U} \times \bar{U} \setminus \{(x, x) : x \in \partial U\}$  и непрерывна по  $k$  в  $\Lambda_0(U) = \overline{C_+} \setminus \Lambda(U)$ .

Используя условия сопряжения и условия излучения, сводим задачу (6)–(11) к интегральному уравнению:

$$G(k)\psi \equiv \int_{\Omega} G^U(x', y') \psi(y') ds'_y = 0, \quad x' \in \Omega, \quad (15)$$

$$\psi(y') = \frac{du}{dx_3}(y') \quad (y' \in \Omega).$$

Мы рассматриваем (15) как задачу на собственные значения для интегральной оператор-функции  $G(k)$  комплексного спектрального параметра  $k$ .

Используя (12), представляем  $G(k)$  в следующем виде:

$$G(k) = L(k) - P(k) + B(k), \quad (16)$$

где  $L$ ,  $P$  и  $B$  обозначают интегральные операторы.

Введем пространство распределений Соболева. Положим для любого  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$H^s(\Omega) := \{u|_{\Omega} : u \in H^s(\mathbb{R}^2)\}, \quad \tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^2) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega}\}.$$

Лемма 1.  $L(k) : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$  является фредгольмовым оператором и  $B(k) : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$  — компактный оператор для всех комплексных  $k$ .

Так как оператор  $B(x', y') \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ , то  $B(k)$  — компактен. Фредгольмовость и обратимость оператора  $L(k)$  доказана в [2].

Теорема 1.  $G(k) : \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\Omega)$  — фредгольмов оператор для всех  $k \notin \Lambda(U)$ . Спектр оператор-функции  $G(k)$  дискретен в области  $\Lambda_0(U) = \overline{C_+} \setminus \Lambda(U)$ .

Так как оператор  $P(k)$  одномерный, то из Леммы 1 следует, что оператор  $G(k)$  — фредгольмов. Следовательно [1], спектр оператор-функции  $G(k)$  дискретен в области  $\Lambda_0(U) = \overline{C_+} \setminus \Lambda(U)$ .

- [1] ГОХБЕРГ И. Ц., КРЕЙН М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
- [2] ИЛЬИНСКИЙ А. С., СМИРНОВ Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. — М.: ИПРЖ «Радиотехника», 1998.
- [3] MORGENTHAU K., WERNER P. On the instability of resonances in parallelplane waveguides. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* — 1989, **11** — 279–315.

УДК 510.6

## Допустимые правила конструктивной теории полей и некоторых ее расширений

**А. В. Романов**

*Московский государственный университет*

В настоящей работе рассматриваются допустимые правила конструктивной теории полей. Показано, что это в точности допустимые правила

исчисления высказываний. Этот результат сохраняется для многих расширений теории полей.

**1. Допустимые правила.** В этой статье теорией называется исчисление высказываний или интуиционистская теория первого порядка.

Определение 1. Подстановкой в теорию  $T$  называется отображение из множества переменных  $p_1, p_2, \dots$  во множество замкнутых формул теории  $T$ .

Всякая подстановка естественным образом расширяется на все формулы исчисления высказываний.

Определение 2. Правилom называется пара формул исчисления высказываний. Правило  $(\varphi, \psi)$  называется допустимым в  $T$ , если для всякой подстановки в  $T^*$ , для которой доказуемо  $\varphi^*$ , доказуемо и  $\psi^*$ .

Определение 3. Логикой теории  $T$  называется  $\{\varphi \mid \text{правило } (\top, \varphi) \text{ допустимо}\}$ .

Определение 4. Теория  $T$  обладает свойством расширяемости, если к любой ее модели Крипке  $M$  можно добавить корень так, чтобы в нем выполнялись все аксиомы  $T$ .

О допустимых правилах исчисления высказываний известно довольно много (например, [1, 3]).

Основной результат о допустимых правилах теорий первого порядка получен Виссером в [5]:

*Лемма 1. Если теория обладает свойством расширяемости и ее логика суть интуиционистское исчисление высказываний, то правила, допустимые в  $T$  — в точности допустимые правила интуиционистского исчисления высказываний.*

Отметим, что доказательство допустимости невыводимых правил исчисления высказываний использует свойство расширяемости. В силу этого доказательства их допустимости в теориях первого порядка обычно также используют свойство расширяемости.

**2. Конструктивная теория полей.** Конструктивная теория полей основана на интуиционистском исчислении предикатов с неполными операциями в сигнатуре  $(=, \#, +, \cdot, ^{-1}; 0, 1)$ . Ее нелогические аксиомы:

$$\forall xy \downarrow (x + y) \wedge \downarrow (x \cdot y), \quad \text{где } \downarrow \text{ означает «определено»};$$

Классические универсальные аксиомы коммутативного ассоциативного кольца с единицей;

Аксиомы отделимости:

$$\forall x \neg x \# x,$$

$$\forall xyz \ x \# y \rightarrow x \# z \vee z \# y,$$

$$\forall xy \ x \# y \rightarrow y \# x,$$

---

$\forall xy \neg x \# y \leftrightarrow x = y,$   
 $\forall xyx'y' x \circ y \# x' \circ y' \rightarrow x \# x' \vee y \# y', \quad \text{где } \circ \in \{+, \cdot\},$   
 $\forall xx' x^{-1} \# x'^{-1} \rightarrow x \# x';$

Существование обратного элемента:  $\forall x (x \# 0 \rightarrow (\downarrow x^{-1} \wedge x \cdot x^{-1} = 1));$

$0 \# 1.$

Эта теория исследуется, например, в [2] и [4].

Отметим, что она не обладает свойством расширяемости. Например, мы можем рассмотреть модель Крипке с двумя несравнимыми мирами, в одном из которых находится  $\mathbb{Z}_2$ , а во втором —  $\mathbb{Z}_3$ . Если бы мы могли добавить к этой модели корень, там бы вынуждалось  $0 \# 1$ , а значит,  $2 \# 3$  и  $2 \# 0 \vee 0 \# 3$ . Но в то же время не может вынуждаться ни  $2 \# 0$ , ни  $0 \# 3$  и мы приходим к противоречию. Поэтому вопрос о допустимых правилах этой теории, поставленный в [5], представляет значительный интерес.

**Теорема 1.** *Правило допустимо в теории полей тогда и только тогда, когда оно допустимо в исчислении высказываний.*

Более того, эта теорема сохраняется при добавлении к теории полей аксиомы разрешимости равенства ( $\forall xy x = y \vee x \# y$ ) и/или одной из аксиом характеристики ( $1 + \dots + 1$  ( $p$  раз)  $= 0$  для простого  $p$ ; или  $1 + \dots + 1$  ( $p$  раз)  $\# 0$  для всех простых  $p$ ).

Идея доказательства состоит в представлении теории полей (с разрешимым равенством или без одного) в виде пересечения теорий, удовлетворяющих условиям леммы Виссера.

- [1] IEMHOFF R. On the Admissible Rules of Intuitionistic Propositional Logic. *Journal of Symbolic Logic* — 2001. — **66**, № 1. — 281–294.
- [2] MINES R., RICHMAN F., RUITENBURG W. A Course in Constructive Algebra. — Universitext (Springer-Verlag) 1988.
- [3] RYBAKOV V.V. Admissibility of Logical Inference Rules. — NorthHolland, Amsterdam, 1997.
- [4] TROELSTRA A.S., VAN DALEN D. Constructivism in Mathematics, vol. 2 — NorthHolland, Amsterdam, 1988.
- [5] VISSER A. Rules and arithmetics. *Notre Dame Journal of Formal Logic* — 1999. — **90**, № 2. — 116–140.

## Несеквенциональное исчисление Ламбека с одним делением.

**Ю. В. Саватеев**

*Московский государственный университет*

Исчисление Ламбека с одним делением  $L \setminus$  (полное исчисление Ламбека было введено в [1]) строится следующим образом. Пусть задано счетное множество *примитивных типов*  $\mathbf{P} = \{p_0, p_1, \dots\}$ . Определим множество  $Tr$   $L$ -типов (также называемых  $L$ -термами): (1)  $\mathbf{P} \subset Tr$ ; (2) если  $A, B \in Tr$ , то  $(A/B) \in Tr$ . Примитивные типы будем обозначать маленькими латинскими буквами ( $p, q, r, \dots$ ).  $L$ -типы будем обозначать прописными латинскими буквами ( $A, B, C, \dots$ ). Большими греческими буквами ( $\Pi, \Gamma, \Delta, \dots$ ) будем обозначать последовательности (возможно пустые)  $L$ -типов. Выражения вида  $\Pi \rightarrow A$ , где  $\Pi$  непусто, называются  $L$ -формулами или секвенциями.

Аксиомы и правила вывода в  $L$  таковы:

$$\begin{aligned}
 & A \rightarrow A \\
 & (\rightarrow \setminus) \frac{A \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B} \\
 & (\setminus \rightarrow) \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma B \Delta \rightarrow C}{\Gamma \Pi(A \setminus B) \Delta \rightarrow C}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим исчисление  $R \setminus$ : его формулы — это  $L \setminus$ -термы, а аксиомы и правила таковы:

$$\begin{array}{ll}
 \text{R1.} & A \setminus A \\
 \text{R2.} & \frac{A \setminus B \quad C \setminus D}{(B \setminus C) \setminus (A \setminus D)} \\
 \text{R3.} & \frac{A \setminus (B \setminus C) \quad D \setminus E}{A \setminus ((E \setminus B) \setminus (D \setminus C))} \\
 \text{R4.} & \frac{A \setminus (B \setminus C) \quad D \setminus E}{(C \setminus D) \setminus (A \setminus (B \setminus E))} \\
 \text{R5.} & \frac{A \setminus (B \setminus C) \quad C \setminus D}{A \setminus (B \setminus D)}
 \end{array}$$

Мы докажем, что для любого  $n \geq 1$  для любых  $A_1, A_2, \dots, A_n, B$



$$L^{\setminus} \vdash A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B \iff R^{\setminus} \vdash A_n \setminus (A_{n-1} \setminus (\dots \setminus (A_1 \setminus B) \dots)).$$

Лемма 1. Если  $L^{\setminus} \vdash \Pi \rightarrow A \setminus B$ , то  $L^{\setminus} \vdash A, \Pi \rightarrow B$ .

*Доказательство.* Можно доказать, что исчисление  $L^{\setminus}$  не расширится, если добавить новое правило

$$(CUT) \quad \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow B}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow B}.$$

Пусть  $L^{\setminus} \vdash \Pi \rightarrow A \setminus B$ . Тогда

$$(CUT) \quad \frac{\Pi \rightarrow A \setminus B \quad (\setminus \rightarrow) \quad \frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{A, A \setminus B \rightarrow B}}{A, \Pi \rightarrow B}$$

Следовательно,  $L^{\setminus} \vdash A, \Pi \rightarrow B$ .

Докажем теперь, что если формула  $A \setminus B$  выводится в  $R^{\setminus}$ , то в  $L^{\setminus}$  доказывается формула  $A \rightarrow B$ . В сочетании с леммой 1 это даст нам доказательство равносильности в одну сторону.

Индукция по правилам  $R^{\setminus}$ .

Аксиома R1. Если  $R^{\setminus} \vdash A \setminus A$ , то  $L^{\setminus} \vdash A \rightarrow A$  (это аксиома L1).

Правило R2. Пусть  $L^{\setminus} \vdash A \rightarrow B$  и  $L^{\setminus} \vdash C \rightarrow D$ , тогда

$$\begin{array}{l} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D}{A, B \setminus C \rightarrow D} \\ (\rightarrow \setminus) \quad \frac{A, B \setminus C \rightarrow D}{B \setminus C \rightarrow A \setminus D}. \end{array}$$

Следовательно,  $L^{\setminus} \vdash B \setminus C \rightarrow A \setminus D$ .

Правило R3. Пусть  $L^{\setminus} \vdash A \rightarrow B \setminus C$  и  $L^{\setminus} \vdash D \rightarrow E$ . Тогда, по лемме 1,  $L^{\setminus} \vdash B, A \rightarrow C$ . Тогда

$$\begin{array}{l} (\setminus \rightarrow) \quad \frac{D \rightarrow E \quad B, A \rightarrow C}{D, E \setminus B, A \rightarrow C} \\ (\rightarrow \setminus) \quad \frac{D, E \setminus B, A \rightarrow C}{E \setminus B, A \rightarrow D \setminus C} \\ (\rightarrow \setminus) \quad \frac{E \setminus B, A \rightarrow D \setminus C}{A \rightarrow (E \setminus B) \setminus (D \setminus C)} \end{array}$$

Следовательно,  $L^{\setminus} \vdash A \rightarrow (E \setminus B) \setminus (D \setminus C)$ .

Правило R4. Пусть  $L \setminus \vdash A \rightarrow B \setminus C$  и  $L \setminus \vdash D \rightarrow E$ . Тогда, по лемме 1,  $L \setminus \vdash B, A \rightarrow C$ . Тогда

$$\begin{array}{c} \frac{B, A \rightarrow C \quad D \rightarrow E}{(\setminus \rightarrow) \quad B, A, C \setminus D \rightarrow E} \\ \frac{(\rightarrow \setminus) \quad A, C \setminus D \rightarrow B \setminus E}{(\rightarrow \setminus) \quad C \setminus D \rightarrow A \setminus (B \setminus E)}. \end{array}$$

Следовательно,  $L \setminus \vdash C \setminus D \rightarrow A \setminus (B \setminus E)$ .

Правило R5. Пусть  $L \setminus \vdash A \rightarrow B \setminus C$  и  $L \setminus \vdash C \rightarrow D$ . Тогда, по лемме 1,  $L \setminus \vdash B, A \rightarrow C$ . Поэтому  $L \vdash B, A \rightarrow C$  и  $L \vdash C \rightarrow D$ . Тогда

$$\begin{array}{c} \frac{B, A \rightarrow C \quad C \rightarrow D}{(\text{CUT}) \quad B, A \rightarrow D} \\ \frac{(\rightarrow \setminus) \quad A \rightarrow B \setminus D.}{(\rightarrow \setminus)} \end{array}$$

Следовательно,  $L \setminus \vdash A \rightarrow B \setminus D$ .

Доказательство закончено.

Теперь будем доказывать, что если  $L \setminus \vdash A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B$ , то  $R \setminus \vdash A_n \setminus (A_{n-1} \setminus (\dots \setminus (A_1 \setminus B) \dots))$ . ■

Лемма 2. Если в формуле, доказуемой в  $L \setminus (R \setminus)$ , заменить все вхождения  $p_0$  на  $p$ , то полученная формула также будет доказываться в  $L \setminus (R \setminus)$ .

Сделаем так, чтобы примитивные типы, использующиеся в разных применениях аксиом были различны. Таким образом мы получим формулу с такой же структурой, что и  $A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B$ , но в которой все примитивные типы встречаются ровно два раза. В следующих леммах мы будем рассматривать только такие  $L \setminus$ -формулы.

Лемма 3. Если  $L \setminus \vdash \Pi, A \setminus B \rightarrow p$ , то существуют  $\Pi'$  и  $\Pi''$ , такие что  $\Pi'', \Pi' = \Pi$ ,  $L \setminus \vdash \Pi' \rightarrow A$  и  $L \setminus \vdash \Pi'', B \rightarrow p$ .

Лемма доказывается индукцией по правилам  $L \setminus$ .

Лемма 4. Любая доказуемая в  $L \setminus$  формула вида  $\Pi, A \rightarrow B$  имеет вид

$$\Pi, A_1 \setminus (A_2 \setminus (\dots \setminus (A_n \setminus A') \dots)) \rightarrow B_1 \setminus (B_2 \setminus (\dots \setminus (B_k \setminus B') \dots))$$

причем  $L \setminus \vdash A' \rightarrow B'$ .

Эта лемма также доказывается индукцией по правилам  $L \setminus$ .

Лемма 5. Пусть  $L \setminus \vdash \Pi, A, B \rightarrow D$ . Тогда существует  $F$  —  $L \setminus$ -терм, такой что  $L \setminus \vdash A, B \rightarrow F$  и  $L \setminus \vdash \Pi, F \rightarrow D$ , причем в записи  $F$  используется меньше знаков  $\setminus$ , чем в записи  $AB$ .

Этот тип строится явно, если известен вывод формулы  $\Pi, A, B \rightarrow D$ .

Теорема 1. Пусть  $A_1, \dots, A_n, B$  — такие  $L \setminus$ -термы, что  $L \setminus \vdash A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ . ■

Тогда  $R \setminus \vdash A_n \setminus (A_{n-1} \setminus (\dots (A_1 \setminus B) \dots))$ .

*Доказательство.* Сделаем так, чтобы в этой формуле все примитивные типы встречались ровно по два раза.

Индукция по длине доказательства формулы  $L \setminus \vdash A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ .

Если она —  $p \rightarrow p$ , то  $R \setminus \vdash p \setminus p$  (это аксиома R1). Иначе, применяя по необходимости лемму 1, мы можем получить формулу, у которой слева находятся хотя бы два терма. Обозначим ее  $\Pi, \tilde{A}, \tilde{B} \rightarrow C$ . Тогда по лемме 5 существует  $F$ , такой что  $L \setminus \vdash \tilde{A}, \tilde{B} \rightarrow F$  и  $L \setminus \vdash \Pi, F \rightarrow C$ . Так как длина доказательства совпадает с общим числом знаков  $\setminus$  в формуле, формулы  $\tilde{A}, \tilde{B} \rightarrow F$  и  $\Pi, F \rightarrow C$  в общем случае имеют меньшую длину доказательства чем  $\Pi, \tilde{A}, \tilde{B} \rightarrow C$ . А значит, по предположению индукции,  $R \setminus \vdash \tilde{B} \setminus (\tilde{A} \setminus F)$  и  $R \setminus \vdash F \setminus (\dots \setminus C)$ . Тогда

$$(R5) \quad \frac{\tilde{B} \setminus (\tilde{A} \setminus F) \quad F \setminus (\dots \setminus C)}{\tilde{B} \setminus (\tilde{A} \setminus (\dots \setminus C))}$$

Следовательно,  $R \setminus \vdash A_n \setminus (A_{n-1} \setminus (\dots (A_1 \setminus B) \dots))$ .

Единственный случай, когда длина доказательства у  $\tilde{A}, \tilde{B} \rightarrow F$  или  $\Pi, F \rightarrow C$  будет не меньше, чем у  $\Pi, \tilde{A}, \tilde{B} \rightarrow C$ , это если  $\tilde{B} \setminus (\tilde{A} \setminus F)$  совпадает с  $A_n \setminus (A_{n-1} \setminus (\dots (A_1 \setminus B) \dots))$ . В этом случае можно явно построить доказательство для  $\tilde{B} \setminus (\tilde{A} \setminus F)$ , используя правила R1–R4.

Таким образом мы получим доказательство  $A_n \setminus (A_{n-1} \setminus (\dots (A_1 \setminus B) \dots))$  в  $R \setminus$  для формулы, где все примитивные типы встречаются ровно по два раза. Теперь сделаем замены, обратные сделанным в начале. Тогда мы получим доказательство  $A_n \setminus (A_{n-1} \setminus (\dots (A_1 \setminus B) \dots))$  в  $R \setminus$  для произвольных  $A_1, \dots, A_n, B$ , таких что  $L \setminus \vdash A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ .

- [1] JOACHIM LAMBEK. The mathematics of sentence structure. *American Mathematical Monthly*. №65: 363–386, 1958. Русский перевод: Ламбек И. Математическое исследование структуры предложения // Математическая лингвистика: Сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. М.: Мир, 1964. С. 47–68.

# Режимы участвующих переключений в задаче оптимального управления колебаниями $n$ осцилляторов

**Е. О. Салобутина**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Рассматривается управляемая система из  $n$  осцилляторов, совершающих вынужденные колебания под действием общей для всех осцилляторов ограниченной по модулю скалярной управляющей силы. Доказано существование оптимального особого режима и утверждение о том, что оптимальное управление имеет по крайней мере счетное число переключений, накапливающихся к точке сопряжения особого и неособого участков траектории.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\int_0^\infty \sum_{j=1}^n x_j^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\ddot{x}_j(t) + \lambda_j^2 x_j(t) = u, \quad j = 1, \dots, n, \quad |u| \leq 1, \quad (2)$$

$$x_j(0) = x_j^0, \quad \dot{x}_j(0) = y_j^0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где каждое уравнение системы (2) есть уравнение колебаний осциллятора под действием ограниченной по модулю скалярной силы  $u$ . Особенность задачи состоит в том, что одна и та же сила воздействует на каждый из осцилляторов. С целью исключить случай неуправляемой системы предполагается  $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$  для  $i \neq j$ . Задача состоит в минимизации средне-квадратичного отклонения всех  $n$  осцилляторов от начала координат.

С помощью замены переменных  $\dot{x}_j = y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  перепишем (2), (3) в виде

$$\dot{x}_j = y_j, \quad \dot{y}_j = -\lambda_j^2 x_j + u, \quad j = 1, \dots, n, \quad |u| \leq 1, \quad (4)$$

$$x_j(0) = x_j^0, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Обозначим через  $H$  функцию Понтрягина задачи (1), (4), (5):

$$H = \sum_{j=1}^n \psi_j y_j + \sum_{j=1}^n \varphi_j (-\lambda_j^2 x_j + u) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

Пусть  $(x_j(t), y_j(t))_{j=1}^n$  — решение задачи (1), (4), (5) с управлением  $u(t)$ . Тогда система уравнений принципа максимума Понтрягина для этой задачи запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= y_j, \quad \dot{y}_j = -\lambda_j^2 x_j + u, \quad j = 1, \dots, n, \\ \dot{\psi}_j &= \lambda_j^2 \phi_j + x_j, \quad \phi_j = -\psi_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ u &= \operatorname{sgn} \sum_{j=1}^n \phi_j. \end{aligned} \quad (6)$$

Утверждение 1. *Особые экстремали задачи (6) имеют второй существенный порядок.*

*Доказательство.* Продифференцировав  $H_1 = \sum_{j=1}^n \phi_j = 0$  в силу уравнений принципа максимума Понтрягина до появления управления с ненулевым коэффициентом,

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{j=1}^n \phi_j = 0, \quad \frac{dH_1}{dt} = -\sum_{j=1}^n \psi_j = 0, \\ \frac{d^2 H_1}{dt^2} &= -\sum_{j=1}^n (\lambda_j^2 \phi_j + x_j) = 0, \quad \frac{d^3 H_1}{dt^3} = \sum_{j=1}^n (\lambda_j^2 \psi_j - y_j) = 0, \\ \frac{d^4 H_1}{dt^4} &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j^4 \phi_j + 2\lambda_j^2 x_j) - nu = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

видим, что параметр  $u$  появился на четвертом шаге дифференцирования с коэффициентом  $-n < 0$ .  $\square$

Из утверждения 1 и теоремы Келли–Коппа–Мойера [1] следует, что если происходит соединение особого и неособого участков траекторий, то неособый участок должен содержать по крайней мере счетное число точек переключения управления, учащающихся к точке сопряжения с особым участком.

Выразив из последнего уравнения системы (7) управление

$$u = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\lambda_j^4 \phi_j + 2\lambda_j^2 x_j) \quad (8)$$

и подставив его в (6), с учетом (7) получим систему дифференциальных уравнений для определения особых экстремалей задачи (6)

$$\begin{cases} \dot{x}_j = y_j, \\ \dot{y}_j = -\lambda_j^2 x_j + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2(\lambda_k^2 - \lambda_n^2) x_k + (\lambda_k^2 - \lambda_n^2)^2 \phi_k, \\ \dot{\psi}_j = \lambda_j^2 \phi_j + x_j, \\ \phi_j = -\psi_j, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (9)$$

Утверждение 2. *Характеристический многочлен матрицы линейной*

системы (9) имеет вид

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\lambda^2 + \lambda_j^2)^2. \quad (10)$$

*Доказательство.* Доказательство сводится к элементарным преобразованиям соответствующего определителя.  $\square$

Утверждение 3. Корни многочлена (10) комплексные, с вещественной частью, отличной от нуля и образуют множество, симметричное относительно осей координат.

*Доказательство.* Очевидно, что многочлен (10) не имеет вещественных корней. Отсутствие мнимых следует из того факта, что  $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$  для  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Все коэффициенты многочлена действительные, следовательно, если  $\lambda$  — корень кратности  $k$ , то  $\bar{\lambda}$  также является корнем кратности  $k$ . А так как в (10) неизвестное присутствует только в четной степени, то наряду с  $\lambda$  корнем многочлена является и  $-\lambda$ .  $\square$

В окрестности особого решения второго порядка систему (6) можно привести к полуканонической форме [2]. Введем переменные

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{i=1}^n \Phi_i, \quad z_2 = -\sum_{i=1}^n \Psi_i, \quad z_3 = -\sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 \Phi_i + x_i), \quad z_4 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 \Psi_i - y_i), \\ w_i &= \lambda_{\frac{i+1}{2}}^2 \Phi_{\frac{i+1}{2}}, \quad i = 1, 3, \dots, 2n-3, \quad w_i = -\lambda_{\frac{i}{2}}^2 \Psi_{\frac{i}{2}}, \quad i = 2, 4, \dots, 2n-2, \\ w_{2n+i} &= x_{\frac{i+3}{2}}, \quad i = -1, 1, \dots, 2n-5, \quad w_{2n+i} = y_{\frac{i+2}{2}}, \quad i = 0, 2, \dots, 2n-4. \end{aligned}$$

Легко показать, что якобиан замены отличен от нуля.

В координатах  $(z, w)$  система (6) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \\ \dot{z}_4 &= -\lambda_n^4 z_1 - 2\lambda_n^2 z_3 + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{(\lambda_i^2 - \lambda_n^2)^2}{\lambda_i^2} w_{2i-1} + 2(\lambda_i^2 - \lambda_n^2) w_{2n+2i-3} \right) - nu, \\ \dot{w}_i &= w_{i+1}, \quad \dot{w}_{i+1} = -\lambda_{\frac{i+1}{2}}^2 (w_i + w_{2n+i-2}), \quad i = 1, 3, \dots, 2n-3, \\ \dot{w}_{2n+i} &= w_{2n+i+1}, \quad \dot{w}_{2n+i+1} = -\lambda_{\frac{i+3}{2}}^2 w_{2n+i} + u, \quad i = -1, 1, \dots, 2n-5, \\ u &= \operatorname{sgn} z_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (11) удовлетворяет всем условиям теоремы о расслоении [2]. Таким образом, в окрестности  $\mathcal{O}$  начала координат особого многообразия существует устойчивое расслоение  $\Sigma^+$  траекторий с накоплением переключений.

Пусть  $\pi: \Sigma^+ \rightarrow \mathcal{O}$  обозначает проекцию расслоения на базу, сопоставляющую всем точкам двумерного слоя точку  $(0, w)$ .

Утверждение 4. Экстремали с накоплением переключений и особые экстремали в задаче (6) локально оптимальны.

*Доказательство.* Пусть  $N^*$  —  $(2n-2)$ -мерное подмногообразие поверхности  $z=0$ , заполненное особыми решениями, которые приходят в начало координат в прямом времени. Согласно теореме об интегральном инварианте Пуанкаре–Картана [3], многообразие  $N^*$  является лагранжевым.

Чтобы убедиться в регулярной проектируемости на фазовое пространство многообразия  $\Sigma^* = \pi^{-1}(N^*)$ , достаточно проверить, что проекции векторов  $\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}, \frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_{2n-2}}$  на пространство  $(x_j, y_j)_{j=1}^n$ , определяют линейно независимую систему [2]. В базисе  $\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial}{\partial \psi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial \psi_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}, \frac{\partial}{\partial \psi_n}$  векторы  $\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\partial}{\partial z_4}, \frac{\partial}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_{2n-2}}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_3} &= (-1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0), \\ \frac{\partial}{\partial z_4} &= (0, -1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0) \\ \frac{\partial}{\partial w_1} &= \left( \frac{\lambda_n^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2}, 0, \frac{1}{\lambda_1^2}, 0, \dots, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, -\frac{1}{\lambda_1^2}, 0 \right), \\ \frac{\partial}{\partial w_2} &= \left( 0, \frac{\lambda_n^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2}, 0, -\frac{1}{\lambda_1^2}, \dots, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \frac{1}{\lambda_1^2} \right), \\ &\dots \\ \frac{\partial}{\partial w_{2n-3}} &= \left( \frac{\lambda_n^2 - \lambda_{n-1}^2}{\lambda_{n-1}^2}, 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}^2}, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, -\frac{1}{\lambda_{n-1}^2}, 0 \right), \\ \frac{\partial}{\partial w_{2n-2}} &= \left( 0, \frac{\lambda_n^2 - \lambda_{n-1}^2}{\lambda_{n-1}^2}, 0, 0, \dots, 0, -\frac{1}{\lambda_{n-1}^2}, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \frac{1}{\lambda_{n-1}^2} \right). \end{aligned}$$

Легко заметить, что ранг соответствующей матрицы равен  $2n$ .  $\square$

Благодарю научного руководителя М. И. Зеликина за постановку задачи и помощь в работе, профессора В. Ф. Борисова за обсуждения; благодарю Л. А. Маниту за ценное замечание, благодаря которому доказательство утверждения 3 оказалось столь простым.

- [1] KELLEY H. J., KOPP R. E., MOYER H. G. Singular extremals. Topics in optimization. J. Leitmann, ed. — New York: Academic Press, 1967. — 63–103.
- [2] ЗЕЛИКИН М. И., БОРИСОВ В. Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики. Современная математика и ее приложения. — **11**. Оптимальное управление. — Тбилиси, 2003.
- [3] КАРТАН Э. Интегральные инварианты. — ГИТТЛ. Москва — Ленинград, 1940.

## О свойствах систем представлений

А. В. Сильниченко

???

В данной работе будут рассмотрены системы представлений в  $L_p$ , состоящие из двоичных сжатий и целых сдвигов некоторой заданной функции. Мы введем понятие порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма (далее ПСЖА), в терминах которого мы получим простые условия, достаточные для того, чтобы система функций являлась системой представлений. В последнее время жадные алгоритмы нашли широкое применение в теории приближений (см. [1]) и в алгоритмах сжатия данных.

Пусть  $X$  — квазинормированное пространство (нарушается свойство однородности меры, например,  $L_p$  при  $p < 1$ ). Система  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется системой представления в  $X$ , если для любого  $f \in X$  существует набор чисел  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  такой, что  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$  (в отличие от базиса набор коэффициентов может не быть единственным). В некоторых работах под системой представлений понимают последовательность замкнутых подпространств  $X_n$  такую, что для любого элемента  $f \in X$  существует разложение  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ , где  $\varphi_n \in X_n$  для всех  $n$ .

Пусть  $\{\varphi_{k,i}\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i = 0, \dots, l_k - 1$  — набор элементов из  $X$ ,  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$  — набор чисел. Определим индуктивно ПСЖА. Пусть  $f_0 = 0$ ,  $r_0 = f$ . Если определены  $f_n$  и  $r_n$ , то выберем  $k_{n+1}$  и набор коэффициентов  $c_{k_{n+1},i}$  так, чтобы

$$\left\| r_n - \sum_{i=0}^{l_{k_{n+1}}-1} c_{k_{n+1},i} \varphi_{k_{n+1},i} \right\| \leq \inf_{k > k_n, c_{k,i}} \left\| r_n - \sum_{i=0}^{l_k-1} c_{k,i} \varphi_{k,i} \right\| + \alpha_n$$

Далее определим  $f_{n+1} = f_n + \sum_{i=0}^{l_{k_{n+1}}-1} c_{k_{n+1},i} \varphi_{k_{n+1},i}$  и  $r_{n+1} = f - f_n$ .

Эта конструкция оказалась удобной при описании систем представлений в  $L_p[0, 1]$ . Пусть  $\varphi \in L_p[0, 1]$ ,  $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$ . Рассмотрим систему сжатий и сдвигов  $\varphi_{k,i}(x) = \varphi(2^k x - i)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, 2^k - 1$ . Возникает вопрос: при каких условиях система  $\{\varphi_{k,i}\}$  является системой представлений в  $L_p$ ?

В [2] доказана теорема:

1) при  $p \geq 1$ ,  $\int_0^1 \varphi(x) dx \neq 0$ ,  $\varphi \in L_p$  система  $\{\varphi_{k,i}\}$  является системой представления в  $L_p$ .



2) при  $p < 1$ ,  $\varphi \neq 0$ ,  $\varphi \in L_2$  система  $\varphi_{k,i}$  является системой представления в  $L_p$ .

Позже Назаров Ф.П. показал (устное сообщение), что для любого  $p < 1$  существует число  $q(p) < 2$  такое, что при  $\varphi \in L_q$  система  $\varphi_{k,i}$  является системой представления в  $L_p$ .

В данной работе мы уточняем данный результат и получаем верхнюю границу на  $q(p)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $p \in (0, 1)$  и  $\varphi$  — действительная функция с носителем на отрезке  $[0, 1]$ ,  $\varphi \neq 0$ . Если  $\varphi \in L_{p+1}[0, 1]$ , то для любой  $\{e_n\} \rightarrow 0$  ПСЖА по системе функций  $\varphi_{k,i}(x) = \varphi(2^k x - i)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, 2^k - 1$  сходится для любой функции  $f \in L_p[0, 1]$ .

**Замечание 1.** Так как носители функций  $\varphi_{k,i}$  не пересекаются при любом фиксированном  $k$  и  $i = 0, \dots, 2^k - 1$ , то из сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма следует сходимость порожденного им ряда, и, следовательно,  $\varphi_{k,i}$  является системой представления в  $L_p$ .

**Замечание 2.** Теорема 1 не улучшаема в данных терминах. А именно: для любого  $q < p + 1$  существуют функции  $\varphi \in L_q$  и  $f \in L_p$  такие, что ПСЖА для  $f$  по системе двоичных сжатий и целых сдвигов функции  $\varphi$  не сходится к  $f$  для любой последовательности  $e_n$ .

**Пример 1.** Возьмем  $f(x) = 1$  для любого  $x$ ,  $\varphi(x) = x^{-(p+1)}$ ,  $x \in [0, 0.5]$  и  $\varphi(x) = -(1-x)^{-(p+1)}$ ,  $x \in (0.5, 1]$ . Легко проверить, что  $\|1 - \lambda\varphi\|_p \geq 1$  для любого  $\lambda$ . Следовательно на каждом шаге алгоритма может быть взято нулевое приближение и алгоритм сойдется к тождественному нулю.

Доказательству теоремы предпошлим лемму.

**Лемма 1.** В условиях теоремы существует  $\lambda$  такое, что

$$\|1 - \lambda\varphi\|_p \leq \alpha(p, \varphi) < 1.$$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$\int_0^1 \left( \int_0^{+\infty} (|1 + \lambda\varphi(x)|^p + |1 - \lambda\varphi(x)|^p - 2)\lambda^{-(p+2)} d\lambda \right) dx. \quad (1)$$

Очевидно, что этот интеграл сходится абсолютно. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^{+\infty} (|1 + \lambda\varphi(x)|^p + |1 - \lambda\varphi(x)|^p - 2)\lambda^{-(p+2)} d\lambda \right) dx = \\ = \int_0^1 \left( \int_0^{+\infty} (|1 + \lambda|\varphi(x)||^p + |1 - \lambda|\varphi(x)||^p - 2)\lambda^{-(p+2)} d\lambda \right) dx. \end{aligned}$$

Сделав замену  $\mu = \lambda|\varphi(x)|$  (так как в точках  $\varphi(x) = 0$  исходный и полученный после замены интегралы равны 0, то такая замена возможна), получим интеграл:

$$\int_0^{+\infty} (|1 + \mu|^p + |1 - \mu|^p - 2)\mu^{-(p+2)} d\mu \int_0^1 |\varphi(x)|^{p+1} dx.$$

Докажем, что это произведение равно 0. Сделав замену  $t = 1/\mu$  в первом интеграле произведения получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (|1 + t|^p + |1 - t|^p - 2t^p) dt &= \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M (|1 + t|^p + |1 - t|^p - 2t^p) dt = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} ((1+M)^{p+1} + (M-1)^{p+1} - 2M^{p+1}) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} M^{p+1} (1 + 1/M)^{p+1} + (1 - 1/M)^{p+1} - 2 = 0. \end{aligned}$$

Переписав интеграл (1) в виде:

$$0 = \int_0^{+\infty} \lambda^{-(p+2)} d\lambda \left( \left( \int_0^1 |1 - \lambda\varphi(x)|^p dx - 1 \right) + \left( \int_0^1 |1 + \lambda\varphi(x)|^p dx - 1 \right) \right),$$

получим: или существует  $\lambda$ , при котором  $\int_0^1 |1 + \lambda\varphi(x)|^p dx < 1$ , или при

любом  $\lambda$  интеграл  $\int_0^1 |1 + \lambda\varphi(x)|^p dx = 1$ . Но второй случай не может вы-

полняться, так как при достаточно больших  $\lambda$  имеем  $\int_0^1 |1 + \lambda\varphi(x)|^p dx > 1$ .

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть функция  $\varphi(x) \in L_p$ ,  $\varphi(x) \neq 0$  удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда для любой  $f \in L_p$  и для любого  $N$  существует  $n > N$  и набор чисел  $\{c_{n,i}\}$  такой, что  $\|f - \sum_{i=0}^{2^n-1} c_{n,i} \varphi_{n,i}\| < \sigma \|f\|$ , где  $\sigma < 1$ .

Доказательство леммы 2 содержится в работе [2].

**Доказательство теоремы 1.** Из леммы 2 следует оценка:

$$\|r_n\| \leq \sigma^n \|f\| + \sum_{i=1}^n \sigma^{n-i} \alpha_i. \quad (2)$$

Докажем, что  $\|r_n\| \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ . Возьмем произвольно  $\varepsilon > 0$ . Существует  $N$  такое, что для любого  $n > N$  выполнено:  $|\alpha_n| < \varepsilon$  и  $\sigma^n \|f\| < \varepsilon$ . Существует  $K$  такое, что  $\sum_{i=1}^N \sigma^{K+N-i} \alpha_i < \varepsilon$ . Тогда для любого  $n > N + K$  имеем:

$$\begin{aligned} \|r_n\| &\leq \sigma^n \|f\| + \sum_{i=1}^n \sigma^{n-i} \alpha_i \leq \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^N \sigma^{K+N-i} \alpha_i + \sum_{i=N+1}^n \sigma^{n-i} \alpha_i \leq \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{1-\sigma} \varepsilon = (2 + \frac{1}{1-\sigma}) \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно  $\|r_n\| \rightarrow 0$  и ПСЖА сходится. Теорема доказана.

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 ПСЖА сходится почти всюду на  $[0, 1]$ , если  $\sum_{n=0}^{\infty} e_n < \infty$ .

*Доказательство.* Воспользуемся следующей простой леммой.

**Лемма 3.** Пусть  $\Omega$  — пространство с мерой  $\mu$ ,  $\mu(\Omega) < \infty$ ,  $f_n$  — последовательность функций из  $L_p(\Omega)$ , сходящаяся к некоторой функции  $f$ . Если  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f - f_n\| < \infty$ , то последовательность  $f_n$  сходится к  $f$  почти всюду на  $\Omega$ .

**Замечание 3.** Условие леммы 2 не может быть усилено в данных терминах, а именно: для любой последовательности  $r_n \rightarrow 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$  существует последовательность функций  $f_n$ , сходящаяся к функции  $f$  по норме  $L_p$ ,  $\|f - f_n\| \leq r_n$ , и расходящаяся всюду на  $\Omega$ .

**Пример 2.**  $\Omega = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = 1$  при  $x \in [\max\{0, \sum_{k=0}^n r_k - [\sum_{k=0}^n r_k] - r_n\}, \sum_{k=0}^n r_k - [\sum_{k=0}^n r_k]]$ , и  $f_n(x) = 0$  при других  $x$ .

*Доказательство леммы 3.* Обозначим  $r_n = \|f - f_n\|$ . Пусть  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Рассмотрим множества  $E_n = \{x : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$ . Очевидно, что  $\mu(E_n) \leq \varepsilon^{-p} r_n$ . Так как  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ . Следовательно для любого  $\delta > 0$  существует  $N$  и множество  $Q$ ,  $\mu(Q) < \delta$ , такие, что для любого  $x \in [0, 1] \setminus Q$  и  $n > N$  верно  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ . Возьмем последовательность  $\varepsilon_n = 1/n$  и найдем по ней множества  $Q_n$ ,  $\mu(Q_n) < \delta/2^n$ . Рассмотрим множество  $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ . Его мера меньше  $\delta$ , и для любого  $x \in [0, 1] \setminus Q$  последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$ . Из условия произвольности  $\delta$  получим утверждение леммы.

Утверждение теоремы 2 очевидно следует из леммы 3 и оценки (2).

В заключение хочу поблагодарить Конягина С. В. и Протасова В. Ю. за ценные советы в процессе написания данной работы.

- [1] KONYAGIN S. V. TEMLYAKOV V. N. East Journal Approximation 1999. V. 5. № 4 P. 493–499.  
[2] FILIPOV V. I., OSWALD P., Representation in  $L_p$  by Series of Translates and Dilates of One Function, Journal of Approximation Theory, n. 82(1995), p. 15–29.

УДК 532.5:53.072

## Гидродинамика невязкой тяжелой жидкости со свободной поверхностью над подстилающей поверхностью сложного профиля

*А. Г. Славин*

*Московский Физико-Технический Институт  
Институт Космических Исследований РАН*

**Введение.** В данной работе предложена модель описания течений невязкой тяжелой жидкости над подстилающей поверхностью сложного профиля. В основе модели лежит аппроксимация произвольной подстилающей поверхности системой уступов и решение задачи обтекания ступенчатой границы в рамках приближений мелкой воды [1]. Уравнения «мелкой воды» (УМВ) представляют собой упрощенную модель, описывающую течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести. Эти уравнения широко используются для описания таких физических явлений, как распространение тяжелых газов и примесей в планетных атмосферах, для моделирования приливных волн и течений в океане, трансформаций паводковых волн в искусственных и естественных потоках жидкости. В двумерном случае неоднородной подстилающей поверхности, когда профиль дна задается функцией  $b$ , УМВ записываются системой уравнений Сен-Венана:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -gh \frac{db}{dx} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(hv^2 + gh^2/2)}{\partial y} + \frac{\partial(hvu)}{\partial x} = -gh \frac{db}{dy} \end{cases} \quad (1)$$

---

где  $g$  — гравитационная постоянная,  $h(x, y, t)$  — глубина жидкости,  $u(x, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная скорость в направлении  $x$ ,  $v(y, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная скорость в направлении  $y$ ,  $b(x, y)$  — функция задающая рельеф дна.



Рис. 1. Глубина потока жидкости  $t = 3$  с.

**1. Квазидвухслойная модель.** Для решения УМВ разработаны методы высокого порядка точности Годуновского типа, основанные на решении одномерной задачи Римана для расчета потоков на границах ячеек расчетной области. Математически УМВ представляют собой нелинейную гиперболическую систему уравнений в частных производных, во многом аналогичную системе уравнений газовой динамики. Указанная аналогия позволила, адаптируя газодинамические результаты, разрешить аналитически задачу Римана для случая распада произвольного разрыва на склоне [2, 3]. В то же время актуальной задачей является развитие газодинамических аналогий на случай комплексных подстилающих поверхностей, описываемых недифференцируемыми функциями как альтернативы решений полной системы гидродинамики.

Основная сложность реализации методов типа Годунова для УМВ на границах включающих резкое изменение уровня дна состоит в неприменимости модели мелкой воды вблизи ступеньки, вследствие нарушений условий гидростатического приближения. Для преодоления этих трудностей в данной работе была использована квазидвухслойная модель [1], позволяющая учитывать особенности течения вблизи ступеньки. Модель основана на разбиении потока на два слоя жидкости: нижний, для кото-

рого ступенька является непротекаемой границей и верхнего, для которого отсутствует прямое влияние ступеньки. Такое разбиение позволило свести задачу к решению классических уравнений мелкой воды на плоскости.

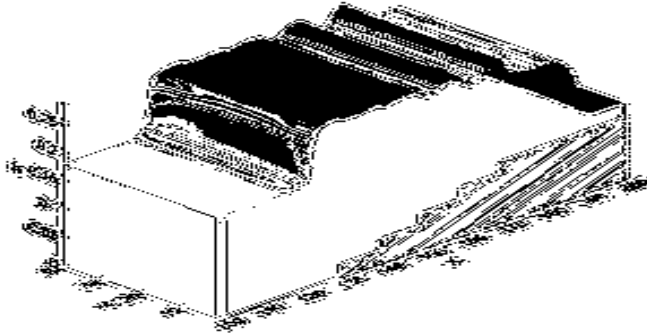


Рис. 2. Результат натекания ударной волны на наклонный берег, аппроксимированный пятью ступеньками.

**2. Разностная схема.** Для произвольной подстилающей поверхности решение получено путем аппроксимации поверхности системой уступов и решение задачи обтекания ступенчатой границы в рамках приближений мелкой воды [1]. Была разработана конечно-разностная схема для УМВ в двумерном случае (которая описывает реальное трехмерное течение):

$$H_x^{t+1} = H_x^t + \tau \times \left( \frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^t - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t}{X} + \frac{H_{y-1/2}^t V_{y-1/2}^t - H_{y+1/2}^t V_{y+1/2}^t}{Y} \right), \quad (2)$$

$$U_x^{t+1} = \left( \frac{H_x^t U_x^t}{H_x^{t+1}} + \tau \times \left( \frac{g(H_{x-1/2}^t)^2}{2} + H_{x-1/2}^t (U_{x-1/2}^t)^2 - \frac{g(H_{x+1/2}^t + i \times a)^2}{2} - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t \right) / X H_x^{t+1} + \tau \times (H_{y-1/2}^t U_{y-1/2}^t V_{y-1/2}^t - H_{y+1/2}^t U_{y+1/2}^t V_{y+1/2}^t) / Y H_x^{t+1} \right)$$

$$V_y^{t+1} = \left( \frac{H_y^t V_y^t}{H_y^{t+1}} + \tau \times \left( \frac{g(H_{y-1/2}^t)^2}{2} + H_{y-1/2}^t (U_{y-1/2}^t)^2 - \frac{g(H_{y+1/2}^t + i \times a)^2}{2} - H_{y+1/2}^t U_{y+1/2}^t \right) / Y H_y^{t+1} + \tau \times \left( H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^t V_{x-1/2}^t - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t V_{x+1/2}^t \right) / X H_y^{t+1} \right)$$

где  $\tau$  — шаг по времени,  $X$  и  $Y$  — шаги по пространству.  $H$  — глубина жидкости,  $U$  — скорость в направлении  $x$ ,  $V$  — скорость в направлении  $y$ . Нижние индексы  $x, y$  обозначают значения функции, отнесенные к центру масс ячейки с номером  $(x, y)$ . Полунижние индексы  $x \pm 1/2, y \pm 1/2$  обозначают значения функции на границе между ячейками с номерами  $x$  и  $x \pm 1$ , и  $y$  и  $y \pm 1$  соответственно. Верхний индекс  $t$  обозначает номер шага по времени,  $a$  — высоту ступеньки. В случае повышения уровня дна на границе ячейки  $i$  принимает значение 1, в остальных случаях  $i = 0$ . Когда на границе ячейки есть повышение уровня дна, значения величин  $H_{x \pm 1/2}^t, U_{x \pm 1/2}^t, V_{x \pm 1/2}^t, H_{y \pm 1/2}^t, U_{y \pm 1/2}^t, V_{y \pm 1/2}^t$  вычисляются, квазидвухслойным методом [1], в противном случае используется решение стандартной задачи Римана.



Рис. 3. Глубина потока жидкости над наклонной поверхностью  $t = 1$  с.

**3. Результаты расчетов.** Ниже представлены результаты численных расчетов, основанных на предложенной модели. Показан двумерный расчет падения столба жидкости над плоской подстилающей поверхностью с углублением квадратной формы в центре расчетной области. Размер расчетной области  $60 \times 60$  м, используется регулярная сетка  $60 \times 60$ . В центре расчетной области углубление глубиной 1 м и размером  $20 \times 20$  м. Начальные условия: глубина жидкости равна 1 м по

всему размеру расчетной области, кроме центра, где расположен столб жидкости высоты 4 м; жидкость покоится во всей расчетной области. На рисунке 1 представлена глубина потока жидкости через 3 секунды.

Также смоделировано натекание ударной волны на наклонный берег, аппроксимируемый пятью ступеньками. Высота натекающей волны равна 0,04 м, скорость 1,57 м/с. Результат натекания ударной волны на береговую линию представлен на рис. 2.

Результат падения столба жидкости высоты 2 м и продольными размерами  $3 \times 3$  м над наклонной плоскостью (величина наклона 1 : 20), наполненной жидкостью глубины 0.5 м через 1 с показан на рис. 3.

- [1] КАРЕЛЬСКИЙ К. В., ПЕТРОСЯН А. С., СЛАВИН А. Г. Трансформация разрыва для потоков мелкой воды на скачке. *Сборник трудов международной конференции МСС-04. Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность*, — 2004.
- [2] KARELSKY K. V., PAKOV V. V., PETROSYAN A. S. Particular solutions of shallow water equations over non-flat surface. *J. Phys.Let.*, № 271. — 341–348. 2000.
- [3] KARELSKY K. V., PAKOV V. V., PETROSYAN A. S., TSYGANKOV D. V. The initial discontinuity decay problem for shallow water equations on slopes. *J. Phys.Let.*, № 271. — 349–357. 2000.

УДК 539.3

### **Аналитическое и численное исследование автомодельного распространения трещины гидроразрыва**

**В.Р. Тагирова**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

**Введение.** В работе исследуется задача о формировании трещины гидроразрыва в пористой среде в приближении малого раскрытия трещины и безынерционного течения несжимаемой ньютоновской жидкости гидроразрыва внутри трещины. Рассматриваются случаи асимптотически малого либо большого просачивания жидкости через стенки трещины в окружающий пласт, а также общий случай умеренного просачивания. Построено семейство автомодельных решений для определения эволюции ширины и длины трещины, скорости жидкости в трещине и глубины пропитки в случаях, когда на входе в трещину задан расход жидкости либо давление как известная функция времени. Показано, что существуют



только степенные либо экспоненциальные автомодельные решения. Для ряда примеров найдены численные решения полученных автомодельных уравнений.

*Ключевые слова:* автомодельность, трещина гидроразрыва, вязкая жидкость, фильтрация.

**Постановка задачи.** Рассмотрим процесс формирования трещины в проницаемой пористой среде в рамках модели [4], основанной на следующих предположениях: характерный масштаб ширины трещины  $\delta$  много меньше её высоты  $h$ , а высота трещины много меньше её характерной длины  $L$ :  $\delta \ll h \ll L$ . Это предположение позволяет принять гипотезу Перкинса [1], согласно которой напряженные состояния двух сечений, перпендикулярных линии распространения трещины, можно считать независимыми. Считаем, что высота трещины постоянна  $h = \text{const}$ , сжимаемостью и инерцией жидкости пренебрегаем. Будем предполагать, что направление фильтрации жидкости из трещины в пористую среду перпендикулярно плоскости  $xOz$ .

Движение жидкости в трещине и фильтрация в пласте описываются следующими уравнениями [4] в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} u &= -\delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \\ \frac{\partial y^2}{\partial t} &= 2\delta \\ \frac{1}{G} \frac{\partial \delta}{\partial x} &= 3\delta^2 \left( \frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 + \delta^3 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - \frac{2}{B} \frac{\delta}{y} \end{aligned}$$

где безразмерные функции  $u$ ,  $\delta$ ,  $y$  — соответствуют скорости течения жидкости в трещине, ширине трещины и глубине просачивания жидкости в грунт. Граничное условие на входе трещины заданно либо в качестве расхода жидкости, либо в качестве давления жидкости. Постановка задачи в безразмерной форме содержит два параметра подобия  $G = u^* t^* / L^* = Sh^{-1}$  и  $B = \mu y^* u^* / (kbL^*)$ , где  $u^*$ ,  $y^*$ ,  $L^*$ ,  $t^*$  — характерные масштабы скорости жидкости вдоль трещины, просачивания жидкости в грунт, длины трещины и времени процесса,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $k$  — проницаемость грунта,  $b$  — коэффициент пропорциональности между шириной трещины и давлением жидкости в трещине. В зависимости от порядка безразмерных параметров  $G$  и  $B$  задача разбивается на три случая: два предельных случая, соответствующие малому и большому просачиванию жидкости в грунт, и общий случай умеренного просачивания.

I. Малое просачивание жидкости в грунт  $B \gg 1$ ,  $G \sim 1$ . Тогда в по-

Рис. 1. Зависимость ширины трещины от продольной координаты в автомодельных переменных  $D(\xi)$  при значениях параметра  $\alpha = -1/4, 0, 1/4$ . Случай малого просачивания жидкости в грунт при степенной автомодельной замене и заданном расходе на входе в трещину

следнем уравнении системы слагаемое с  $B$  в знаменателе отсутствует. Однако при этом глубина просачивания остается конечной и определяется из второго уравнения.

II. Интенсивное просачивание жидкости в грунт  $B \sim 1$ ,  $G \gg 1$ . В этом случае последнее уравнение системы не содержит слагаемого с  $G$  в знаменателе.

III. Умеренное просачивание  $B \sim 1$ ,  $G \sim 1$ . В этом наиболее общем случае все члены уравнений системы имеют порядок единицы.

В представленной работе эти три случая рассматриваются отдельно друг от друга.

**Автомодельные решения.** В работе доказано, что система уравнений имеет автомодельные решения только двух видов: со степенной зависимостью от времени и с экспоненциальной зависимостью от времени. В общем случае III возможно только одно степенное автомодельное решение. Получены два точных решения по одному для различных граничных условий в начале трещины. В предельных случаях I и II помимо степенных решений имеют место и экспоненциальные автомодельные решения. Для каждого граничного условия на входе в трещину существует однопараметрическое семейство степенных (либо экспоненциальных) автомодельных решений. Параметр — показатель в степенном (или экспоненциальном) законе изменения расхода (или давления) со временем на входе в трещину.

**Построение автомодельных решений.** В каждом из указанных приближений исходная система дифференциальных уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложен численный метод решения полученной краевой задачи.

*Предельные случаи.* Система уравнений в автомодельных переменных  $\xi = x/t^m$ ,  $u(t, x) = t^r U(\xi)$ ,  $y(t, x) = t^s Y(\xi)$ ,  $\delta(t, x) = t^n D(\xi)$  примет вид

$$\begin{aligned} U &= -D^2 \frac{dD}{d\xi} \\ m\xi \frac{dY^2}{d\xi} - 2sY^2 + D &= 0 \\ D^3 \frac{d^2 D}{d\xi^2} + 3D^2 \left( \frac{dD}{d\xi} \right)^2 + m\xi \frac{dD}{d\xi} - nD &= 0 \end{aligned}$$

Граничные условия в конце трещины  $\xi = \xi_0$ :  $Y(\xi_0) = 0$ ,  $D(\xi_0) = 0$ ,  $(dD/d\xi|_{\xi=\xi_0})^{-1} = -0$  В работе рассмотрены два типа граничных условий на входе в трещину  $\xi = 0$ : на расход жидкости и на давление жидкости. Не теряя общности, в работе рассмотрен первый случай: задан расход

жидкости  $Q(t) = t^\alpha Q_0$ , где  $\alpha$  и  $Q_0$  известные константы. Таким образом на входе в трещину выполняются условия

$$D(0) \frac{dD}{d\xi}(0) = -1$$

$$n = \frac{2\alpha + 1}{5}, r = \frac{3\alpha - 1}{5}, m = \frac{3\alpha + 4}{5}, s = \frac{\alpha + 3}{5}$$

В качестве примера получено численное решение для случая мало-го просачивания при степенной зависимости расхода жидкости на входе в трещину от времени. Для численного расчета системы обыкновенных уравнений в автомодельных переменных применим метод сведения краевой задачи к задаче Коши. Получены графики зависимости основных характеристик трещины от продольной координаты в автомодельных переменных; например, для ширины трещины (рис. 48)

*Общий случай.* В общем случае умеренного просачивания жидкости в грунт существуют только степенные автомодельные решения. В случае, когда на входе в трещину задано давление как степенная функция времени, показано, что автомодельное решение существует в единственном случае, когда давление растет линейно со временем. В случае, когда на входе в трещину задан расход, автомодельное решение существует только в том случае, когда расход растет со временем по квадратичному закону.

- [1] PERKINS T.K., KERN L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol., Paper SPE 89. 1961. V. 222. P. 937–949.
- [2] NORDGREN R. Propagation of vertical hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1972. V. 253. P. 306–314.
- [3] KHRISTIANOVICH S. A., ZHELTOV Y. P. Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid// Proc. Fourth World Petrol. Congress, Rome. 1955. V. 2. P. 579–586.
- [4] ИВАШИНЕВ О. Е., СМЕРНОВ Н. Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. № 6. С. 28–36.
- [5] HU J., GARAGASH D.I. Plane-strain fluid-driven fracture propagation in a permeable rock of finite toughness. In Proceedings of ASCE Engineering Mechanics Conference (on CDROM), Delaware, June 2004, pages 1–8.
- [6] БАРЕНБЛАТТ Г. И. Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат. 1978.

# Представление решений задачи Коши для уравнения теплопроводности на римановых многообразиях с переменным коэффициентом диффузии

**И. В. Телятников**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

В работе строятся представления решений задачи Коши для уравнения теплопроводности на римановых многообразиях в виде функциональных интегралов по некоторым мерам гауссовского типа на траекториях в многообразии. Основной целью работы является исследование уравнения теплопроводности с потенциалом и переменным коэффициентом диффузии:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = B(x)f(t, x) + V(x)f(t, x) \quad (1)$$

с начальным условием  $f(0, x) = f_0(x) \in C(M)$ , где  $(M, g)$  — компактное замкнутое гладкое риманово многообразие размерности  $d$  с метрикой  $g$ ,  $V(x) \in C(M)$ ,  $B(x)$  — эллиптический дифференциальный оператор на многообразии, задаваемый в локальных координатах формулой:

$$B(x) = \frac{1}{2} b^{ij}(x) \nabla_i^g \nabla_j^g \quad (2)$$

$b(x)$  — положительно определенное симметрическое тензорное поле типа  $(2, 0)$  (коэффициент диффузии),  $\nabla_i^g$  — ковариантная производная вдоль базисного вектора касательного пространства, задаваемая римановой связностью многообразия  $(M, g)$ . Здесь и далее используется правило Эйнштейна суммирования индексов.

Известно [2], что решение задачи Коши для уравнения (1) на многообразии можно представить с помощью формулы Фейнмана — Каца:

$$f(t, x) = \int_{C([0, t], M)} e^{\int_0^t V(\xi(s)) ds} f_0(\xi(t)) P^x(d\xi), \quad (3)$$

где  $P^x$  — диффузионная мера, задаваемая диффузионным процессом на многообразии  $M$  с генератором  $B$  и началом в точке  $x \in M$ .

В работе получена формула типа Фейнмана — Каца по внутренней поверхностной мере Смолянова на траекториях в многообразии (ср. [1, 4–6]), эквивалентной мере  $P^x$ .

**1. Построение поверхностной меры, соответствующей диффузионному процессу.** Поскольку  $b(x)$  — положительно определенное симметрическое тензорное поле типа  $(2,0)$ , функция  $b^{-1}(x)$  определяет риманову метрику на многообразии  $M$ . Пусть  $d_{(M,b^{-1})}^2(x,y)$  — квадрат длины минимальной геодезической на  $M$ , соединяющей точки  $x$  и  $y$ , относительно метрики  $b^{-1}$ . Обозначим  $p : \mathbb{R} \times M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$p(t,x,z) = \frac{\sqrt{\det b^{-1}(x)}}{\sqrt{2\pi t}^d} \exp\left(-\frac{d_{(M,b^{-1})}^2(x,z)}{2t}\right). \quad (4)$$

Замечание 1. Функция  $p(t,x,z)$  не является плотностью переходной вероятности и не удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена.

Будем обозначать  $b^{ij}(y)$  и  $R_{ij}(y)$  компоненты тензорного поля диффузии и тензора Риччи (относительно метрики  $g$ ) в локальных координатах многообразия в точке  $y \in M$ .

Для построения поверхностной меры, соответствующей диффузионному процессу с генератором  $B$  и началом в точке  $x \in M$  нам понадобится следующая

Лемма 1. Пусть  $M$  —  $d$ -мерное компактное риманово многообразие,  $u \in M$ . Тогда  $\exists \lambda$ , что  $\forall u \in C^3(M)$  верна следующая оценка:

$$\left| \int_M p(t,y,z)u(z)vol_{(M,g)}(z) - u(y)\left(1 - \frac{t}{6}b^{ij}(y)R_{ij}(y)\right) - \frac{t}{2}b^{ij}(y)\nabla_i^g\nabla_j^g u(y) \right| \leq \lambda \|u\|_3 t^{3/2}. \quad (5)$$

Кроме того, если  $Q(t)$  — полугруппа сжимающих отображений в  $C^3(M)$ , задаваемая следующим равенством:

$$Q(t)u(y) = \int_M q(t,y,z)u(z)vol_{(M,g)}(z), \quad (6)$$

где

$$q(t,y,z) = \frac{p(t,y,z)}{\int_M p(t,y,z)vol_{(M,g)}(z)},$$

то  $\exists \gamma$ , что верна также следующая оценка  $\forall u \in C^3(M)$ :

$$\left| Q(t)u(y) - u(y) - \frac{t}{2}b^{ij}(y)\nabla_i^g\nabla_j^g u(y) \right| \leq \gamma \|u\|_3 t^{3/2}. \quad (7)$$

Следствие 1. При  $t \rightarrow 0$  имеем:

$$\int_M p(t,y,z)vol_{(M,g)}(z) = 1 - \frac{t}{6}b^{ij}(y)R_{ij}(y) + O(t^{3/2}), \quad (8)$$

причем данная сходимость равномерна по  $y$ .

Замечание 2. Функция  $b^{ij}(y)R_{ij}(y)$  не зависит от локальных координат.

Применяя теорему Чернова (см. предложение 3 работы [6]) к найденным выше асимптотическим оценкам, получаем следующие теоремы (доказательство теорем 1 и 2 аналогично доказательству теоремы 3 работы [6]):

Теорема 1. Пусть  $0 = t_0 < t_1 \dots t_N = t$  — разбиение  $\pi$  отрезка  $[0, t]$ ,  $d(\pi)$  — диаметр разбиения. Для каждой ограниченной непрерывной функции  $f$  на  $C([0, t], M)$  определим измеримую функцию

$$f_\pi^x(z_1, z_2, \dots, z_N) = f(\varphi_\pi^{x, z_1, z_2, \dots, z_N})$$

где  $\varphi_\pi^{x, z_1, z_2, \dots, z_N} \in C([0, t], M)$ ,  $\varphi_\pi^{x, z_1, z_2, \dots, z_N}(t_j) = z_j$  (здесь  $z_0 = x$ ), и если  $s \in (t_j, t_{j+1})$ , то  $\varphi_\pi^{x, z_1, z_2, \dots, z_N}(s) = \gamma(s)$ , где  $\gamma$  — функция на  $[t_j, t_{j+1}]$ , такая что  $\gamma([t_j, t_{j+1}])$  — какая-либо минимальная геодезическая, соединяющая  $z_j$  и  $z_{j+1}$ , и  $|\dot{\gamma}(s)| = 1$  для  $s \in (t_j, t_{j+1})$ .

Для любого  $x \in M$  существует такая вероятностная мера  $\eta_M^{x, S}$  на  $C([0, t], M)$ , что для любой ограниченной непрерывной функции  $f$  на  $C([0, t], M)$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_{C([0, t], M)} f(\xi) \eta_M^{x, S}(d\xi) &= \\ &= \lim_{d(\pi) \rightarrow 0} c_N^{-1}(x, t) \int_{M \times \dots \times M} f_\pi^x(z_1, z_2, \dots, z_N) p(t_1, x, z_1) \times \\ &\quad \times p(t_2 - t_1, z_1, z_2) \dots p(t_N - t_{N-1}, z_{N-1}, z_N) dz_1 dz_2 \dots dz_N \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_N(x, t) &= \int_{M \times \dots \times M} p(t_1, x, z_1) p(t_2 - t_1, z_1, z_2) \times \dots \\ &\quad \dots \times p(t_N - t_{N-1}, z_{N-1}, z_N) dz_1 dz_2 \dots dz_N \end{aligned}$$

и  $dz_i$  — обозначение меры объема на многообразии  $(M, g)$ .

Аналогично работам [1, 3, 5], где дано определение поверхностной меры на многообразии для случая  $b = g^{-1}$ , введем следующее

Определение 1. Мету  $\eta_M^{x, S}$  на  $C([0, t], M)$  будем называть внутренней поверхностной мерой, порожденной диффузионным процессом с генератором  $B$  и началом в точке  $x \in M$  (или внутренней поверхностной мерой Смолянова).

Теорема 2. Пусть для  $\xi \in C([0, t], M)$ :

$$s(\xi) = \int_0^t b^{ij}(\xi(\tau)) R_{ij}(\xi(\tau)) d\tau. \quad (9)$$

Мера  $\eta_M^{x,S}$  абсолютно непрерывна относительно диффузионной меры  $P^x$  процесса на многообразии  $M$  с генератором  $B$  и началом в точке  $x \in M$ , причем плотность Радона — Никодима задается следующим равенством:

$$\frac{d\eta_M^{x,S}}{dP^x}(\xi) = \frac{e^{-\frac{1}{6}s(\xi)}}{\int_{C([0,t],M)} e^{-\frac{1}{6}s(\zeta)} P^x(d\zeta)}. \quad (10)$$

**2. Представления решений задачи Коши.** Применяя теорему 2, получаем основной результат:

Теорема 3. Пусть  $f(t, x)$  — решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием  $f_0 \in C(M)$ . Тогда  $f(t, x)$  может быть представлено в виде функционального интеграла по внутренней поверхностной мере Смолянова  $\eta_M^{x,S}$ :

$$f(t, x) = c(t, x)^{-1} \int_{C([0,t],M)} e^{\frac{1}{6} \int_0^t b^{ij}(\xi(s)) R_{ij}(\xi(s)) ds} \frac{\int_0^t V(\xi(s)) ds}{e^{\frac{1}{6} \int_0^t b^{ij}(\xi(s)) R_{ij}(\xi(s)) ds}} f_0(\xi(t)) \eta_M^{x,S}(d\xi), \quad (11)$$

где

$$c(t, x) = \int_{C([0,t],M)} e^{\frac{1}{6} \int_0^t b^{ij}(\zeta(s)) R_{ij}(\zeta(s)) ds} \eta_M^{x,S}(d\zeta). \quad (12)$$

Замечание 3. Для случая  $b = g^{-1}$  соответствующее представление решения задачи Коши было найдено в работе [4]. В этом случае  $B(x) = -\Delta_M$ , где  $\Delta_M$  — оператор Бельтрами — Лапласа, а подынтегральная функция в (9) является скалярной кривизной многообразия.

Автор выражает глубокую благодарность профессору О. Г. Смолянову за постановку и обсуждение задачи.

- [1] Бутко Я. А. Функциональные интегралы для уравнения Шрёдингера в компактном римановом многообразии. *Математические Заметки*. — 2006. — **79**, №2 — 194–200.



- 
- [2] БАТАНАБЭЗ С., ИКЭДА Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. — М.: Наука, 1986. — 259–260.
  - [3] СМОЛЯНОВ О. Г., ВАЙЦЕКЕР Х. ФОН, ВИТТИХ О. Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры. *ДАН.* — 2000. — 371, №4 — 442–447.
  - [4] OBREZKOV O. O. The Proof of the Feynman-Kac Formula for Heat Equation on a Compact Riemannian Manifold. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* — 2003. — 6, №2 — 311–320.
  - [5] SIDOROVA N. A. The Smolyanov surface measure on trajectories in a Riemannian manifold. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.* — 2004. — 7, №3 — 461–471.
  - [6] SMOLYANOV O. G., WEIZSÄCKER H. V., WITTICH O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions. *Can. Math. Soc. Conference Proceedings.* — 2000. — 29. — 589–602.

УДК 519.62

## Обобщение процесса Пикара и варианты его численной реализации

**Б. В. Фалейчик**

*Белорусский государственный университет*

**Введение.** Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную в форме интегрального уравнения Вольтерра

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(z, u(z)) dz, \quad x \in I = [x_0, x_0 + h], \quad (1)$$

где  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу. Как известно, для такой задачи метод последовательных приближений Пикара равномерно сходится к решению при любом  $x$ . Но при этом сходимость может быть очень медленной и немонотонной<sup>1</sup>, даже если начальное приближение близко к точному решению.

Отправной точкой для описанных в данной работе исследований стало стремление построить *непрерывный* процесс, описывающий, образно говоря, «плавный» переход к решению дифференциального уравнения.

---

<sup>1</sup>Под монотонностью здесь понимается невозрастание нормы погрешности.

Предлагаемый нами процесс подобного рода построен на основе идеи решения стационарных задач путем установления, изложенной в [1, сс. 345–353]. Он описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x, t) = -y(x, t) + u_0 + \int_{x_0}^x f(z, y(z, t)) dz, \quad (2)$$

которое в дальнейшем будем иногда называть уравнением установления. Изложим сначала теоретические результаты, доказывающие обоснованность применения (2) для описания процесса установления к решению (1).

**1. Обоснование.** Пусть  $\mathbb{Y}$  — множество непрерывных вектор-функций, определенных на области  $I \times [0, +\infty)$ ,  $\mathbb{U}$  — множество всех непрерывных на  $I$  вектор-функций.

**Теорема 1 (существование и единственность).** Для любой функции  $y_0 \in \mathbb{U}$  существует единственное решение уравнения установления такое, что  $y(x, 0) = y_0(x)$ ,  $y \in \mathbb{Y}$ .

Для произвольной функции  $\varphi \in \mathbb{Y}$  условимся под  $\varphi_t$  в дальнейшем понимать такую функцию из  $\mathbb{U}$ , что  $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ . В пространстве  $\mathbb{U}$  рассмотрим две согласованные нормы: обычную максимум-норму  $\|\cdot\|_C$  и норму  $\|\cdot\|_L$ :

$$\|\psi\|_C := \max_{x \in I} \|\psi(x)\|, \quad \|\psi\|_L := \max_{x \in I} \|e^{-L(x-x_0)} \psi(x)\|,$$

где  $L$  — константа Липшица по второму аргументу для  $f$ .

**Теорема 2.** Пусть  $y, v \in \mathbb{Y}$  — два произвольных решения уравнения установления. Тогда

$$\|y_t - v_t\|_L \leq \|y_0 - v_0\|_L \exp(-\exp(-Lh)t).$$

Это означает, что любые два решения (2) сближаются при  $t \rightarrow \infty$ .

**Следствие (согласованность).** Пусть  $u$  — решение исходной задачи (1),  $y$  — произвольное решение уравнения установления. Тогда  $\|y_t - u\|_C \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , а именно

$$\|y_t - v_t\|_C \leq \|y_0 - v_0\|_L \exp(Lh - \exp(-Lh)t).$$

**2. Дискретизация по фиктивному времени.** Для дискретизации по  $t$  к (2) можно применить любой из известных методов численного решения дифференциальных уравнений, но в рамках данной статьи мы ограничимся лишь одношаговыми методами. Итак, пусть известно  $Y_0 = Y(t)$ , задан шаг  $\tau$ , и нужно перейти к  $Y_1 \approx Y(t + \tau)$ .

Рассмотрим семейство явных методов Рунге–Кутты (ЯРК). Применение  $s$ -стадийного метода ЯРК к (2) описывается формулами

$$K_1 = \mathcal{F}(Y_0), \quad K_i = \mathcal{F}(Y_0 + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j), \quad i = \overline{2, s}; \quad (3a)$$

$$Y_1 = Y_0 + \tau \sum_{i=1}^s b_i K_i. \quad (3b)$$

Здесь  $Y_0$ ,  $Y_1$  и  $K_i$  — непрерывные функции из пространства  $\mathbb{U}$ ,

$$\mathcal{F}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}, \quad (\mathcal{F}(\psi))(x) = -\psi(x) + u_0 + \int_{x_0}^x f(z, \psi(z)) dz, \quad (4)$$

$b_i$  и  $a_{ij}$  — вещественные коэффициенты метода. Нетрудно заметить, что явный метод Эйлера при  $\tau = 1$  в этом случае приведет к процессу Пикара.

*Эксперимент.* Итак, теперь, подставляя в (3) коэффициенты любого метода ЯРК и выбирая  $\tau$ , мы получим какой-то процесс последовательных приближений к решению исходной задачи Коши. Прежде, чем приступить к экспериментам с такими процессами, обсудим вопрос о том, какие методы ЯРК целесообразно применять. Ведь, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, при решении (2) нас интересует не само решение, а лишь положение равновесия, на которое, как было показано, выходят все решения этой задачи. Поэтому, вероятнее всего, не стоит надеяться на большой выигрыш при использовании методов высокого порядка точности. Гораздо более важными могут оказаться свойства устойчивости и согласованности. В связи с этим для проведения вычислительного эксперимента были выбраны следующие четыре метода.

ЕЕУ — явный метод Эйлера ( $s = 1$ ,  $b_1 = 1$ ). При  $\tau = 1$  получаем классический метод Пикара (PCD).

КБМ $\frac{1}{4}$  — 2-стадийный метод типа ЯРК первого порядка точности ( $s = 2$ ,  $a_{21} = \frac{1}{4}$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$ ). Этот метод приведен в [3, стр. 33]. Его свойство заключается в максимальной для методов этого класса области согласованности<sup>2</sup>.

КБМ $\frac{1}{8}$  — 2-стадийный метод типа ЯРК первого порядка точности ( $s = 2$ ,  $a_{21} = \frac{1}{8}$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$ ). Этот метод имеет максимальную среди методов этого класса область устойчивости.

ЕРК4 — классический 4-стадийный метод ЯРК четвертого порядка. Обладает меньшими, чем у предыдущих двух методов, областями устойчивости и согласованности.

<sup>2</sup>Область согласованности (по монотонности) в данном случае — множество точек вещественной оси, на котором функция устойчивости метода принимает значения между 0 и 1 ([3, сс. 64–73]).

Процессы последовательных приближений, соответствующие этим методам, применялись к тестовой линейной задаче

$$u'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ 0 & -100 \end{pmatrix} u(x), \quad u(0) = (1, 1)^T, \quad x \in I = [0, \frac{1}{10}]. \quad (5)$$

Для такой задачи интегралы, возникающие при вычислении значений  $\mathcal{F}$  по (4), берутся аналитически. Таким образом мы можем отследить точное поведение приближений с ростом числа итераций  $k$ . В таблице 1 для соответствующего метода и шага  $\tau$  приведены значения относительной погрешности  $k$ -го приближения. Норма вектор-функции вычислялась как максимум евклидовых норм значений в десяти равноотстоящих промежуточных точках отрезка  $I$ . Начальное приближение во всех случаях равно  $u_0$ . Вычисления были запрограммированы в системе *Mathematica*. Для метода ERK4 указаны только первые 5 итераций, так как при  $k > 5$  объем работы слишком велик.

$k$	$\tau = 1$				$\tau = 0.5$			
	PCD	КБМ $\frac{1}{4}$	КБМ $\frac{1}{8}$	ERK4	ЕЕУ	КБМ $\frac{1}{4}$	КБМ $\frac{1}{8}$	ERK4
0	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
1	6.6	4.447	1.53	14.66	3.0	0.42	1.61	0.36
2	30.4	0.3715	2.98	15.88	4.44	0.28	1.58	0.23
3	93.4	0.1182	5.65	9.37	2.67	0.084	0.44	0.08
4	216.4	0.0450	8.79	4.34	0.37	0.083	0.28	0.02
5	403.4	0.0098	10.5	1.77	0.50	0.035	0.06	0.01
6	629.6	0.0014	9.97	-	0.11	0.014	0.07	-
7	846.1	0.0006	7.72	-	0.08	0.010	0.02	-
8	998.6	0.00008	4.96	-	0.04	0.004	0.01	-
9	1051.1	0.00003	2.67	-	0.011	0.0019	0.009	-
10	998.6	$4 \cdot 10^{-6}$	1.21	-	0.009	0.0014	0.003	-

Таблица 1. Относительная погрешность на  $k$ -й итерации.  
Задача (5), аналитическая реализация.

Кратко прокомментируем полученные результаты. Во-первых, видно, что новые процессы могут работать существенно лучше процесса Пикара. Во-вторых, свойство согласованности оказалось действительно важнее порядка метода, особенно при большом  $\tau$ . В-третьих, видно, что скорость и качество сходимости можно существенно улучшить за счет хорошего выбора временного шага.

**3. Аппроксимация по  $x$ .** Зададим на  $I$  сетку узлов  $x_l, l = \overline{1, m}$ , и соответствующий ей базис Лагранжа  $\Phi_l \in \mathbb{U}$ :  $\Phi_l(x_p) = \delta_{lp}$ . Определим также  $\Psi_l(x) = \int_{x_0}^x \Phi_l(z) dz$ . Если представить  $Y_0$  в виде  $u_0 + \sum_{l=1}^m \eta_l \Psi_l$ , то наша задача сведется к получению из (3) коэффициентов  $\hat{\eta}_l$ , определяющих

$Y_1 \approx u_0 + \sum_{l=1}^m \hat{\eta}_l \Psi_l$ . Вычисление  $K_i \approx \sum_{l=1}^m \kappa_{il} \Psi_l$  и  $Y_1$  приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \gamma_{il} &= \eta_l + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \kappa_{jl} \quad (\gamma_{1l} = \eta_l), \\ \kappa_{il} &= f(x_l, u_0 + \sum_{p=1}^m \gamma_{ip} \Psi_p(x_l)) - \gamma_{il}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} i &= \overline{1, s}, \\ l &= \overline{1, m}; \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\hat{\eta}_l = \eta_l + \tau \sum_{i=1}^s b_i \kappa_{il}, \quad l = \overline{1, m}. \quad (6b)$$

Формулы (6) описывают один шаг процесса приближения к решению на отрезке  $I$ . Их вид определяется выбором метода ЯРК и базиса  $\Phi_l$ . Обратим внимание на то, что если метод сходится, то в пределе получается функция  $Y_* = u_0 + \sum_{l=1}^m \eta_l^* \Psi_l$ , такая, что  $Y'_*(x_l) = f(x_l, Y_*(x_l))$ . Это означает, что в случае, когда  $\Phi_l$  — полиномиальный базис Лагранжа, метод (6) эквивалентен какому-то коллокационному методу<sup>3</sup> (неявному методу РК, [2, сс. 220–224]).

В связи с этим необходимо указать на преимущества, которые имеют процессы вида (6). Во-первых, они обладают полностью явной структурой, в отличие от коллокационных методов, сложность реализации которых является их основным недостатком. Во-вторых, предлагаемые методы допускают многосеточную реализацию, с помощью которой можно достигать требуемой точности приближенного решения на всем отрезке  $I$ , не уменьшая его длину  $h$ . Более подробно мы остановимся на этом при обсуждении результатов следующего вычислительного эксперимента.

*Эксперимент.* Цель эксперимента — выяснить, насколько хорошо аппроксимация (6) отражает свойства аналитического процесса (3). Аппроксимацию по  $x$  осуществим следующим образом: выберем  $m = 7$ ,  $x_l = x_0 + \xi_l h$ , где  $\xi_l$  — корни правого полинома Радо 7-й степени  $(x^6(x-1)^7)^{(6)}$  ([4, сс. 88–91]). Такой выбор узлов обусловлен тем, что соответствующий ему коллокационный метод обладает хорошими свойствами устойчивости. В качестве  $\Phi_l$  возьмем полиномиальный базис Лагранжа для узлов  $x_l$ . Применяя построенный метод с различными вариантами дискретизации по времени к задаче (5), получаем аналог таблицы 1.

<sup>3</sup>Другими словами, метод (6) и соответствующий ему коллокационный метод сходятся к одному и тому же приближенному решению (1).

$k$	$\tau = 1$				$\tau = 0.5$			
	PCD	КБМ $\frac{1}{4}$	КБМ $\frac{1}{8}$	ERK4	EEU	КБМ $\frac{1}{4}$	КБМ $\frac{1}{8}$	ERK4
0	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
1	6.69	4.44	1.53	14.6	3.00	0.42	1.61	0.36
2	30.49	0.37	2.98	15.88	4.44	0.28	1.58	0.23
3	93.47	0.11	5.65	9.37	2.67	0.08	0.44	0.08
4	216.4	0.04	8.79	4.34	0.37	0.08	0.28	0.02
5	403.4	0.009	10.5	1.77	0.50	0.03	0.06	0.016
6	629.6	0.0014	9.97	0.67	0.11	0.014	0.077	0.01
7	846.1	0.0013	7.72	0.24	0.08	0.01	0.024	0.006
8	998.6	0.0013	4.96	0.08	0.04	0.0043	0.01	0.003
9	1051.1	0.0013	2.67	0.03	0.011	0.0025	0.009	0.002
10	998.6	0.0013	1.21	0.011	0.009	0.0016	0.003	0.0019

Таблица 2. Относительная погрешность на  $k$ -й итерации.  
Задача (5), численная реализация.

Как видно из таблицы 2, в рамках точности, с которой приведены данные, для большинства методов результаты практически не отличаются от полученных при аналитической реализации. Есть, однако, одно естественное отличие, которое видно на примере метода КБМ  $\frac{1}{4}$  при  $\tau = 1$ . Начиная с 7-й итерации погрешность приближенного решения перестает уменьшаться — метод достиг того уровня точности, который обеспечивает выбранная аппроксимация по  $x$ . Если такая точность нас не устраивает, возможно два варианта действий. Первый, традиционный, заключается в отбрасывании полученного приближения и повторении вычислений с меньшим шагом  $h$ . Второй вариант более рационален: квазианалитический вид метода (6) позволяет «на лету» увеличивать число  $m$  базисных функций  $\Phi_l$ , повышая тем самым уровень аппроксимации, до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута. Вычислительные алгоритмы, воплощающие эту стратегию, мы планируем реализовать в ближайшее время.

**Заключение.** Процесс установления к решению задачи Коши, предложенный в данной работе, не только позволил построить новые аналитические и численные методы последовательных приближений, но и открыл широкое поле для исследований. Помимо уже упомянутой многосеточной реализации, на данный момент важными нам представляются вопросы выбора оптимального метода дискретизации по фиктивному времени и адаптивного выбора временного шага  $\tau$ .

- [1] БАХВАЛОВ Н. С., ЖИДКОВ Н. П., КОБЕЛЬКОВ Г. М.. Численные методы. — 3-е изд., доп. и перераб. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. — 636 с., илл.
- [2] ХАЙРЕР Э., НЁРСЕТТ С., ВАННЕР Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 512 с.

- [3] КРЫЛОВ В. И., БОБКОВ В. В., МОНАСТЫРНЫЙ П. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения. — Мн.: Наука и техника, 1982. — 286 с.
- [4] ХАЙРЕР Э., ВАННЕР Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

УДК 519.614

## К вычислению LBB константы для треугольной области

**И. В. Федорова**

*Московский государственный университет*

Рассмотрение многих задач гидродинамики приводит к краевой задаче Стокса

$$\begin{cases} -\Delta u + \operatorname{grad} p = f & \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где  $\Omega$  — ограниченная связная область,  $f = (f^{(1)}(x_1, x_2), f^{(2)}(x_1, x_2))$  — заданная вектор-функция,  $u = (v(x_1, x_2), w(x_1, x_2))$  — вектор-функция скорости,  $p = p(x_1, x_2)$  — скалярная функция давления, определенная с точностью до аддитивной константы. Для однозначности  $p$  предполагают  $\int_{\Omega} p d\Omega = 0$ .

Численный анализ этой задачи подразумевает дискретизацию по пространственным переменным, то есть переход в конечномерные пространства  $U_h$  и  $P_h$ . При этом важной характеристикой используемых конечномерных пространств является выполнение для них inf-sup неравенства: существование такого  $\delta^h$ , что

$$\sup_{u_h \in U_h} \frac{(p_h, \operatorname{div} u_h)}{\|u_h\|_U} \geq \delta^h \|p_h\|_P \quad \forall p_h \in P_h, \quad (1)$$

где  $\|u\|_U = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u)^{1/2}$ ,  $\|p\|_P = (p, p)^{1/2}$ ,  $(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \psi d\Omega$ .

(1) называют LBB-условием или неравенством Ладыженской–Бабушки–Бреucci. Его выполнение, т. е. существование сеточно-независимой нижней границы  $\delta(\Omega)$  для  $\delta^h$ , гарантирует устойчивость дискретного аналога задачи Стокса, существование и единственность его решения (см. [3]).

Поэтому поиску таких конечномерных пространств  $U_h$  и  $P_h$ , что  $\delta^h$  равномерно по  $h$  ограничена снизу константой  $\delta(\Omega)$ , посвящено большое количество работ (см. [6] и справочник [8]).

Для конечномерных пространств обобщенную задачу можно переписать в матричной форме

$$\begin{cases} Au + Bp = f, \\ B^T u = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $u, p, f$  — векторы коэффициентов, полученные разложениями функций  $u_h, p_h, f$  по базисам пространств  $U_h$  и  $P_h$ ,  $A = A^T > 0$  квадратная  $N_u \times N_u$  матрица — аналог оператора Лапласа  $-\Delta$ ,  $B$  — матрица размера  $N_u \times N_p$  — аналог  $grad$ ,  $B^T$  — аналог  $div$ .

Тогда inf-sup неравенство эквивалентно (см. [6]) существованию не зависящей от шага сетки нижней границы спектра дополнения по Шуру  $S_0 = -B^T A^{-1} B$  исходной системы (2):  $\delta^2(p, Cp) \leq (p, S_0 p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^{N_p}$ .

Таким образом, оценка LBB константы сводится к решению спектральной задачи

$$S_0 p = \lambda p. \quad (3)$$

В данной работе в качестве области  $\Omega$  взят треугольник, заданный отношением двух сторон и углом между ними. Для дискретизации задачи используется метод конечных элементов с кусочно-линейным полем скоростей, непрерывным на  $\overline{\Omega}$ , и давлением, кусочно-постоянным над  $\Omega$ :

$$U_h = \left\{ u \mid u \in S_1(\Delta), \Delta \in T_{h/2}, u \in C(\Omega), u = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\},$$

$$P_h = \left\{ p \mid p|_{\Delta} = \text{const}, \Delta \in T_h, \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \right\}.$$

$T_h$  — триангуляция с шагом  $h$ , полученная последовательным разбиением треугольника средними линиями,  $T_{h/2}$  — треугольники со сторонами вдвое меньшего размера.

В работе построены операторы  $A$ ,  $B$  и  $B^T$ , реализовано обращение оператора  $A$  с использованием пакета BLAS фронтальным методом с разреженными матрицами [7].

Для решения краевой задачи Стокса используется метод Удзавы-сопряженных градиентов [2].

Проведено тестирование правильности построения операторов и реализаций алгоритмов. Основные этапы проверки заключаются в следующем.

Во-первых, построенный оператор  $B^T$  можно воспринимать как оператор проектирования с мелкой сетки  $U_h$  по  $u$  на грубую сетку  $P_h$  по  $p$ ,



а  $B$  — оператор продолжения с  $P_h$  на  $U_h$ . При этом для рассматриваемых пространств справедливо, что шаг мелкой сетки равен половине шага крупной, поэтому должно выполняться  $(B^T)^T = \frac{1}{2}B$  [4].

Во-вторых, т. к. реализованный метод сопряженных градиентов позволяет решать краевую задачу Стокса в том числе для несоленоидальных функций  $u$ , то можно проверить сходимость численного решения  $u^h$  к проекции на сетку аналитического решения  $u$  со скоростью  $O(h^2)$  [5].

При понимании операторов  $grad$  и  $div$  в слабом (обобщенном) смысле значение скалярного произведения  $2(p, B^T u) = (Bp, u)$  должно сходиться к значению интеграла  $\int_{\Omega} grad p \cdot u \, d\Omega = - \int_{\Omega} p \cdot div u \, d\Omega$  как  $O(h^2)$  [5], что подтверждается численными экспериментами.

Для решения спектральной задачи (3), а именно — оценки пяти младших собственных значений и соответствующих собственных векторов, был использован метод Ланцоша, реализованный в программном пакете ARPACK [?, ?].

Полученные приближения к младшим собственным значениям для равностороннего треугольника представлены в таблице 1, для прямоугольного в таблице 2, для тупоугольного с углом  $150^\circ$  в таблице 3.  $h$  — шаг сетки. Приближение  $\lambda_1$  не указано в таблицах, т. к. оно соответствует нулевому собственному значению оператора  $S_0$ , имеющего ядро из констант. Для всех приведенных значений норма невязки для нормированного на единицу приближения к соответствующему собственному вектору  $\|S_0 x_i - \lambda_i x_i\|_2$  не превышает  $10^{-6}$ . Указанные значения согласуются с теоретическими оценками зависимости LBB констант от параметров области для плоских областей типа криволинейных многоугольников [6], из которых следует, что LBB константа с уменьшением угла  $\phi$  должна убывать как  $\phi^2$ . При этом показатель особенности собственной функции тем больше, чем меньше значения угла и LBB константы. Т. е. для тупого угла особенность менее выражена и должна быть самая лучшая сходимость решения дискретной задачи по  $h$ .

Кроме того, были проведены тестовые расчеты для двух схем на прямоугольной области, одна из которых удовлетворяет LBB условию [1], а другая нет, т. к. дискретный оператор  $B$  имеет двумерное ядро. Первая схема задается сеточными областями

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_1 &= \{x_{ij} = ((i+1/2)h_1, jh_2) : i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2\}, \\ \bar{\Omega}_2 &= \{x_{ij} = (ih_1, (j+1/2)h_2) : i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2 - 1\}, \\ \Omega_3 &= \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) : i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1\},\end{aligned}$$

---

h	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1/8	0.282240	0.282240	0.376632	0.728994
1/16	0.247014	0.247014	0.292462	0.518270
1/32	0.227434	0.227434	0.254245	0.411297
1/64	0.215037	0.215037	0.232564	0.349831

Таблица 1.

h	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1/8	0.197699	0.256224	0.500844	0.576776
1/16	0.164628	0.196640	0.369036	0.423263
1/32	0.146202	0.166052	0.281546	0.334037
1/64	0.134621	0.147849	0.233661	0.269993

Таблица 2.

h	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1/8	0.089049	0.170328	0.282093	0.410631
1/16	0.044635	0.082455	0.147422	0.214766
1/32	0.027750	0.046264	0.084190	0.124382
1/64	0.020465	0.031467	0.054225	0.079538

Таблица 3.

и конечномерными пространствами

$$\begin{aligned}
 U_h &= V_{1,h} \times V_{2,h}, \\
 V_{1,h} &= \{v_{ij} = v(x_{ij}) : x_{ij} \in \overline{\Omega}_1, v_{0,j} = v_{N_1-1,j} = v_{i,0} = v_{i,N_2} = 0\}, \\
 V_{2,h} &= \{w_{ij} = w(x_{ij}) : x_{ij} \in \overline{\Omega}_2, w_{0,j} = w_{N_1,j} = w_{i,0} = w_{i,N_2-1} = 0\}, \\
 P_h &= \{p_{ij} = p(x_{ij}) : x_{ij} \in \Omega_3, \sum_{ij} h_1 h_2 p_{ij} = 0\}.
 \end{aligned}$$

Оценки младших собственных значений для этой схемы согласуются с результатами из [6], что подтверждает правильность методики расчетов. Для второй схемы

$$\begin{aligned}
 \overline{\Omega}_1 &= \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) : i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2\}, \\
 \Omega_2 &= \{x_{ij} = (ih_1/2, jh_2/2) : i = 1, \dots, N_1, j = 1, \dots, N_2\}. \\
 V_{1,h} &= \{v_{ij} = v(x_{ij}) : x_{ij} \in \overline{\Omega}_1, v_{0,j} = v_{N_1,j} = v_{i,0} = v_{i,N_2} = 0\}, \\
 V_{2,h} &= \{w_{ij} = w(x_{ij}) : x_{ij} \in \overline{\Omega}_1, w_{0,j} = w_{N_1,j} = w_{i,0} = w_{i,N_2} = 0\}, \\
 P_h &= \{p_{ij} = p(x_{ij}) : x_{ij} \in \Omega_2, \sum_{ij} h_1 h_2 p_{ij} = 0\}.
 \end{aligned}$$

В этом случае последовательность из нескольких ненулевых младших собственных значений убывает как  $O(h^2)$ , то есть эта схема крайне плоха для расчетов.

Автор выражает благодарность Е. В. Чижонкову и Ю. В. Василевскому за постановку задачи и полезные обсуждения.

- [1] Дьяконов Е. Г. Оценки вычислительной работы для краевых задач с оператором Стокса // Известия вузов. Математика. 1983. № 7. С. 46–58.
- [2] Иванчиков А. А. Численное решение некоторых спектральных задач для уравнения Стокса. // Вычислительные методы и программирование. 2003. Т. 4.
- [3] Михлин С. Г. Спектр пучка операторов теории упругости. // Успехи матем. наук. 1973. Т. 28, № 3(171). С. 43–82.
- [4] Олышанский М. А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. — М.: Физматлит, 2005.
- [5] СТЕНГ Г., ФИКС ДЖ. Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977.
- [6] ЧИЖОНКОВ Е. В. Релаксационные методы решения седловых задач. — М.: ИВМ РАН, 2002.
- [7] DUFF I. S. AND SCOTT J. A. The design of a new frontal code for solving sparse unsymmetric systems. ACM Trans. Math. Software, 22:30–45, 1996.
- [8] GUNZBURGER M. Finite element methods for viscous incompressible flow: a guide to theory, practice and algorithms. — Boston: Academic Press, 1989.

- [9] ARPACK software. <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>  
 [10] ARPACK Users' Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen, C. Yang. 1997. <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/UG/ug.html>

УДК 515.126

## Минимизация количества классов Нильсена в задаче прообраза

**О. Д. Фролкина**

*Московский государственный университет и. М. В. Ломоносова*

**Введение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение топологических пространств,  $B \subset Y$  — собственное подпространство. Задача минимизации числа точек прообраза состоит в вычислении или нахождении возможно более точной (нижней) оценки величины  $MP_p(f, B) = \min_{g \sim f} |g^{-1}(B)|$ ,

где  $g^{-1}(B) = \{x \in X | g(x) \in B\}$  — множество точек прообраза,  $|g^{-1}(B)|$  — его мощность, а минимум берется по всем отображениям  $g$ , гомотопным  $f$ . Следуя идеям решения аналогичной задачи теории неподвижных точек [9], Р. Добренъко и З. Кухарский [6] разбили множество точек прообраза  $f^{-1}(B)$  на классы эквивалентности — классы Нильсена, ввели понятия (топологически) существенных классов и (топологического) числа Нильсена  $N_t(f, B)$ . Число Нильсена — это количество существенных классов, оно является гомотопическим инвариантом. Определим

$$MP_{cl}(f, B) = \min_{g \sim f} |\{\text{классы Нильсена множества } g^{-1}(B)\}|.$$

Из сказанного вытекает, что  $N_t(f, B) \leq MP_{cl}(f, B) \leq MP_p(f, B)$ . В случае многообразий  $X, Y, B$  известны достаточные условия для равенства  $N_t(f, B) = MP_p(f, B)$ , см. [6, Theorem (3.4)], [8, Theorem (3.2)], [1, Замечание (е)], а также [2, Теорема] для отображений пар. Это равенство означает, что существует отображение  $g \sim f$ , имеющее ровно  $N_t(f, B)$  классов Нильсена, причем каждый из этих классов содержит лишь одну точку. В случае общих топологических пространств можно поставить более простой вопрос: когда существует отображение  $g \sim f$ , имеющее ровно  $N_t(f, B)$  классов Нильсена (необязательно одноточечных), т. е. справедливо ли равенство  $N_t(f, B) = MP_{cl}(f, B)$ ? Для задач корней и совпадения этот вопрос был рассмотрен Р. Бруксом [4]. В докладе получена теорема

существования такого отображения для задачи прообраза, объединяющая и обобщающая результаты Брукса. Формулировке теоремы предшествует обсуждение классов и числа Нильсена. Доказательства приводимых результатов автора будут опубликованы в другом месте.

**1. Соглашения и обозначения.** На протяжении всей работы пространства  $X, Y$  связны, локально линейно связны; более того,  $Y$  локально односвязно;  $B$  — собственное подмножество  $Y$ ; то же предполагается для пространств  $X', Y', B'$  (см. раздел 2). Все отображения непрерывны;  $fg$  — композиция отображений  $f, g$ ;  $I = [0, 1]$ ; символом  $\sim$  обозначается гомотопия отображений и путей (относительно концов).

## 2. Классы Нильсена.

Определение 1 [6, Definition (1.2)]. Точки  $x_0, x_1 \in f^{-1}(B)$  эквивалентны (по Нильсену), если существуют такие пути  $\alpha : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$  и  $\beta : (I, 0, 1) \rightarrow (Y, f(x_0), f(x_1))$ , что  $\beta(I) \subset B$  и  $f\alpha \sim \beta$ . Классы эквивалентности называются классами Нильсена.

Определение 2. Пусть  $\{f_i\} : X \rightarrow Y$  — гомотопия. Точка  $x_0 \in f_0^{-1}(B)$  называется  $\{f_i\}$ -соответствующей (по Нильсену) точке  $x_1 \in f_1^{-1}(B)$ , если существуют такие пути  $\alpha : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$  и  $\beta : (I, 0, 1) \rightarrow (Y, f_0(x_0), f_1(x_1))$ , что  $\beta(I) \subset B$  и  $\{f_i\alpha(t)\} \sim \beta$ .

(Другое равносильное определение — [6, Definition (1.6)], см. п. (3) теоремы 1.)

Отметим, что эквивалентность по Нильсену — частный случай  $\{f_i\}$ -соответствия, при постоянной гомотопии  $\{f_i = f\}$ .

Для описания классов Нильсена нам понадобится следующее

Определение 3. Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Накрытием и поднятием Хопфа называются такие, соответственно, накрытие  $p : \hat{Y} \rightarrow Y$  и поднятие  $\hat{f} : X \rightarrow \hat{Y}$  отображения  $f$ , что  $p_{\#}(\pi_1(\hat{Y}, \hat{f}(x))) = f_{\#}(\pi_1(X, x))$  для каждой точки  $x \in X$ .

Несложно проверить, что такие отображения  $p, \hat{f}$  всегда существуют.

Следующий результат является обобщением [5, Theorem (3.4)]:

Теорема 1. Пусть  $(\hat{Y}, p)$  и  $\hat{f}$  — накрытие и поднятие Хопфа для отображения  $f : X \rightarrow Y$ . Пусть  $\{f_i\} : X \rightarrow Y$  — гомотопия от  $f = f_0$  к  $f_1$  и  $\{\hat{f}_i\} : X \rightarrow \hat{Y}$  — ее поднятие в накрытие Хопфа, начинающееся в  $\hat{f}_0 = \hat{f}$ . Тогда:

- (1) точка  $x_0 \in f_0^{-1}(B)$  является  $\{f_i\}$ -соответствующей точке  $x_1 \in f_1^{-1}(B)$  тогда и только тогда, когда точки  $\hat{f}_0(x_0), \hat{f}_1(x_1)$  содержатся в одной и той же компоненте линейной связности множества  $p^{-1}(B)$ ;
- (2)  $\{f_i\}$ -соответствие точек множеств  $f_0^{-1}(B)$  и  $f_1^{-1}(B)$  индуцирует соответствие на множествах классов прообраза отображения  $f_0$  и  $f_1$ . Именно, класс  $A_0 \subset f_0^{-1}(B)$   $\{f_i\}$ -соответствует классу

$A_1 \subset f_1^{-1}(B)$ , если хотя бы одна (и, значит, любая) точка  $x_0 \in A_0$   $\{f_i\}$ -соответствует некоторой (и, значит, любой) точке  $x_1 \in A_1$ ; равносильно, множества  $\hat{f}_0(A_0)$  и  $\hat{f}_1(A_1)$  содержатся в одной компоненте линейной связности  $p^{-1}(B)$ ;

- (3) [6, Definition (1.6)] класс  $A_0 \subset f_0^{-1}(B)$  является  $\{f_i\}$ -соответствующим классу  $A_1 \subset f_1^{-1}(B)$  тогда и только тогда, когда  $A_0, A_1$  являются 0- и 1-сечениями некоторого класса прообраза отображения  $F : X \times I \rightarrow Y \supset B$ , где  $F(x, t) = f_t(x)$ .

Следствие 1. В обозначениях теоремы 1 имеем:

- (1) точки  $x_0, x_1 \in f^{-1}(B)$  эквивалентны по Нильсену тогда и только тогда, когда точки  $\hat{f}(x_0), \hat{f}(x_1)$  лежат в одной компоненте линейной связности множества  $p^{-1}(B)$ ;
- (2) классы Нильсена отображения  $f : X \rightarrow Y \supset B$  суть непустые множества вида  $\hat{f}^{-1}(C)$ , где  $C$  — компонента линейной связности множества  $p^{-1}(B)$ .

### 3. Число Нильсена.

Определение 4 [6, Definition (1.8)]. Класс  $A_0$  прообраза отображения  $f : X \rightarrow Y \supset B$  называется (топологически) существенным, если для каждой гомотопии  $\{f_t\} : X \rightarrow Y$  с началом  $f_0 = f$  существует класс Нильсена  $A_1$  отображения  $f_1 : X \rightarrow Y \supset B$ ,  $\{f_t\}$ -соответствующий  $A_0$  (см. п. (2) теоремы 1); иными словами, класс  $A_0$  не может исчезнуть при гомотопии. Количество существенных классов называется (топологическим) числом Нильсена данной задачи прообраза или отображения  $f$  относительно  $B$  и обозначается  $N_t(f : X \rightarrow Y \supset B)$  или кратко  $N_t(f, B)$ .

Следующая теорема показывает, что число Нильсена является гомотопическим инвариантом не только отображения, но и пространств.

Теорема 2. Пусть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & (Y, Y - B, B) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ X' & \xrightarrow{f'} & (Y', Y' - B', B') \end{array}$$

гомотопически коммутативна и  $\Phi, \Psi$  — гомотопические эквивалентности. Тогда  $N_t(f : X \rightarrow Y \supset B) = N_t(f' : X' \rightarrow Y' \supset B')$ .

**4. Основная теорема.** Согласно определению, каждый несущественный класс по отдельности можно уничтожить некоторой гомотопией. В следующей теореме даны условия, при которых можно удалить все несущественные классы одновременно.

Теорема 3. Пусть  $f : X \rightarrow Y \supset B$  — непрерывное отображение, причем, дополнительно к сформулированным в разделе 1 требованиям, про-

пространство  $B$  связно, локально линейно связно и замкнуто в  $Y$ , а  $Y - B$  линейно связно. Пусть для некоторого целого  $n \geq 3$  пространство  $X$  доминируется полиэдром размерности не выше  $n$  и  $\pi_m(Y, Y - B) = 0$  для всех  $1 \leq m \leq n - 1$ . Тогда  $N_t(f, B) = MP_{cl}(f, B)$ , т. е. существует такое отображение  $g \sim f$ , что  $g : X \rightarrow Y \supset B$  имеет ровно  $N_t(f, B)$  классов прообраза.

Запись  $\pi_1(Y, Y - B) = 0$  означает, что индуцированный включением гомоморфизм  $\pi_1(Y - B) \rightarrow \pi_1(Y)$  сюръективен.

Как и в [5, р. 382–383], укажем на следующие известные результаты. Если  $n$ -мерное паракомпактное пространство доминируется полиэдром, то оно доминируется и полиэдром размерности не выше  $n$  [7, Theorem 17.7.16(c), р. 483]. Каждое ANR-пространство доминируется полиэдром [3, Глава I, упражнение R].

**5. Следствия.** Напомним более общую постановку из [2].

Пусть  $f_1, \dots, f_r : X \rightarrow Y \supset B$  — непрерывные отображения. Множество общего прообраза — это

$$Pr(f_1, \dots, f_r, B) = \{x \in X \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) \in B\}.$$

В частности, если  $B$  одноточечно, получаем множество общих корней набора отображений, или просто корней, если набор состоит из одного отображения. При  $r \geq 2$  имеет смысл и случай  $B = Y$ ; тогда это множество точек совпадения  $f_1, \dots, f_r$ . Ясно, что множество общего прообраза  $Pr(f_1, \dots, f_r, B)$  данного набора отображений совпадает с множеством прообраза диагонального произведения  $\Delta\{f_k\}_{k=1}^r : X \rightarrow Y^r \supset \Delta B$ , а замена отображений  $f_i$  на гомотопные равносильна гомотопии отображения  $\Delta\{f_k\}_{k=1}^r$  (для  $B = Y$  эта редукция указана в [6, 11]; см. также [10]). Это позволяет перенести понятия классов и числа Нильсена и приведенные выше результаты на случай общего прообраза, в частности, получить теоремы Брукса [4, Theorems 1, 2] в качестве следствий теоремы 3.

- [1] БОГАТЫЙ С. А., ГОНСАЛВЕС Д. Л., КУДРЯВЦЕВА Е. А., ЦИШАНГ Х. Минимальное число прообразов при отображениях поверхностей. *Матем. Заметки*. — 2004. — **75**, № 1. — 13–19.
- [2] ФРОЛКИНА О. Д. Относительная задача прообраза. *Матем. Заметки* (принято к публикации).
- [3] ХУ СЫ-ЦЗЯН Теория гомотопий. — М.: Мир, 1964.
- [4] BROOKS R. On the sharpness of the  $\Delta_1$  and  $\Delta_2$  Nielsen numbers. *J. Reine Angew. Math.* — 1973. — **259**. — 101–108.
- [5] BROOKS R. Nielsen root theory. — Brown R. F. (ed.) et al., Handbook of Topological Fixed Point Theory. Springer-Verlag, Berlin, 2005. — 375–431.
- [6] DOBREŃKO R., KUCHARSKI Z. On the generalization of the Nielsen number. *Fund. Math.* — 1990. — **134**. — 1–14.

- [7] GRANAS A., DUGUNDJI J. Fixed Point Theory. — Springer-Verlag, New York, 2003.
- [8] JEZIERSKI J. The Nielsen coincidence theory on topological manifolds. *Fund. Math.* — 1993. — **143**, № 2. — 167–178.
- [9] JIANG B. Lectures on Nielsen Fixed Point Theory. — Contemporary Mathematics, Vol.14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [10] MCCORD C.K. The three faces of Nielsen: Coincidences, intersections and preimages. *Topol. and Appl.* — 2000. **103**, № 2. — 155–177.
- [11] SCHIRMER H. Bemerkungen zur Homotopietheorie der Koinzidenzen mehrerer Abbildungen. *Arch. Math.* — 1960. — **11**. — 56–64.

УДК 517.925.44

## Об асимптотике решений одного класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

**В. М. Харьков**

*Одесский национальный университет*

В настоящей заметке рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$y'' = \alpha p(t)\varphi(y), \quad (1)$$

где  $\alpha \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$  ( $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ) — непрерывная функция,  $\varphi : I \rightarrow (0, +\infty)$  ( $I$  — левая или правая окрестность  $y_0$ ,  $|y_0| \leq +\infty$ ) — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi'(y) \neq 0, \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \varphi_0, \varphi_0 \in \{0, \infty\}, \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, 1 \neq 0, \quad (2)$$

для которого исследуется вопрос о существовании и асимптотическом поведении решений в левой окрестности точки  $\omega$ .

В случае, когда функция  $\varphi(y)$  «близка» к степенной, либо равна  $e^{\sigma y}$ , данная задача была подробно изучена в [1–3]. Нашей целью было получение необходимых и достаточных условий существования правильных и сингулярных  $\tilde{P}_\omega(\lambda)$ -решений уравнения (1) в случае нелинейности более общего вида



Определение 1. Решение  $y$  уравнения (1), заданное на промежутке  $[t_y, \omega) \subseteq [a, \omega)$ , будем называть  $\tilde{P}_\omega(\lambda)$ -решением, если функция  $z(t) = \varphi(y(t))$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t \uparrow \omega} z(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty; \end{cases} \quad \lim_{t \uparrow \omega} z'(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty; \end{cases} \quad \text{и } \lim_{t \uparrow \omega} \frac{z''(t)z(t)}{z'^2(t)} = \lambda.$$

Замечание 1. В силу (2) для любого решения  $y(t)$  уравнения (1), определенного на некоторой левой окрестности  $\omega$ , существует промежуток  $[t_y, \omega)$ , где  $y(t)$  и  $y'(t)$  строго монотонны, а поэтому имеют конечный или равный  $\pm\infty$  предел при  $t \uparrow \omega$ . Наибольший интерес среди таких решений, очевидно, представляют те, для которых  $\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = y_0$ .

Итак, пусть  $z_0 \in (0, +\infty)$  и  $\rho = \text{sign } \varphi'(y)$ . Положим

$$A = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega \sqrt{p(\tau)} d\tau = \infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega \sqrt{p(\tau)} d\tau < \infty; \end{cases} \quad B = \begin{cases} z_0, & \text{если } \left| \int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s \sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))|}} \right| = \infty, \\ \varphi_0, & \text{если } \left| \int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s \sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))|}} \right| < \infty; \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = \infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p(\tau) d\tau < \infty; \end{cases} \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = \infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < \infty. \end{cases}$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. Для существования у уравнения (1)  $\tilde{P}_\omega(\lambda)$ -решений, где  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 1, 21 - 1\}$ , необходимо и достаточно выполнения следующих условий

$$\alpha\rho(\lambda - 1) > 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \sqrt{p(t)}}{\int_A^t \sqrt{p(\tau)} d\tau} = \frac{1}{2(\lambda - 1)},$$

интегралы

$$\int_a^\omega \sqrt{p(\tau)} d\tau \quad \text{и} \quad \int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s \sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))|}}$$

сходятся или расходятся одновременно. Более того, каждое такое решение при  $t \uparrow \omega$  допускает асимптотические представления

$$\varphi'(y(t)) = \frac{\lambda - 1}{\alpha} \frac{1}{(1 - \lambda)^2 \pi_\omega^2(t) p(t)} [1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\alpha}{\lambda - 1} (1 - \lambda) \pi_{\omega}(t) p(t) [1 + o(1)].$$

Замечание 2. Как отмечалось выше, уравнения вида (1) были подробно изучены в случаях, когда  $\varphi(y)$  «близка» в некотором смысле к степенной функции, либо равна  $e^{\sigma y}$ . Результат настоящей заметки позволяет обобщить результаты, полученные в [1–3] на более широкие классы уравнений вида (1), в частности, на случаи, когда  $\varphi(y)$  имеет экспоненциальный характер, например,  $\varphi(y) = e^{\sigma y |y|^k}$ ,  $\varphi(y) = e^{e^{\sigma y}}$  и т. д.

- [1] Евтухов В. М., Кирилова Л. А. // *Дифференц. уравнения*. — 2005. — **41**, № 8. — 1053–1061.
- [2] Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н. // *Nonlinear oscillations*. — 2002. — **5**, № 3. — 306–325.
- [3] Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1990.

УДК 517.6

# **Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой\***

**Э. А. Хорошева**

*Пензенский государственный университет*

**1. Введение.** Распространение светового луча в однородной нелинейной среде или в волноведущей структуре с нелинейной средой, описываемой по закону Керра, активно исследуется в течение последних двух десятилетий [1, 3]. Эффекты самофокусировки и «самоканализации» луча в лазерах и оптоэлектронных устройствах также изучаются и применяются на практике [2]. При распространении резко неоднородной волны — «луча» лазера, в определенных условиях волновому процессу сопутствует образование канала, направляющего его энергию. В этом случае процесс распространения волны происходит подобно распространению волны в диэлектрическом волноводе с нелинейной средой, описываемой по закону Керра. Распространение ТЕ — поляризованных волн в диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой, подробно исследовано в [1]. В этих работах были получены аналитические

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 06-07-89063-а.

решения соответствующих дифференциальных уравнений, выраженные с помощью эллиптических функций, а также представлены численные результаты расчетов. Однако при изучении других структур, например круглого диэлектрического волновода, уже не удастся получить аналитические решения, но возможно применение численных методов. Кроме того, для анализа вопроса о существовании и единственности решений краевой задачи приходится привлекать методы функционального анализа исследования нелинейных операторов.

В этой статье изучаются электромагнитные волны, распространяющиеся в диэлектрическом волноводе кругового сечения, заполненного средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Проблема сводится к нелинейной системе дифференциальных уравнений.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода. Пусть все трехмерное пространство  $R^3$  заполнено изотропной средой без источников с  $\epsilon_1 = const$ . В эту среду помещен цилиндрический диэлектрический волновод однородного заполнения с образующей, параллельной оси  $Oz$ , и поперечным сечением  $W = \{x: x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ . Пусть диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  внутри цилиндра определяется по закону Керра:

$$\epsilon = (\epsilon_2 + a|E|^2)\epsilon_0,$$

где  $a$  и  $\epsilon_2$  — вещественные положительные константы. Здесь  $\epsilon_2$  — постоянная составляющая проницаемости  $\epsilon$ ;  $a$  — коэффициент нелинейности. Требуется отыскать поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода, т. е. собственные волны структуры. Электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \end{cases} \quad (1)$$

условиям непрерывности касательных составляющих поля  $H_\tau$  и  $E_\tau$  при переходе через границу волновода и условиям затухания поля на бесконечности.

В цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$  в случае ТМ-поляризации предположим, что  $\mathbf{E} = (E_\rho, 0, E_z)$ ,  $\mathbf{H} = (0, H_\varphi, 0)$ . Из уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат следует, что  $E_z = E_z(\rho, z)$  и  $E_\rho = E_\rho(\rho, z)$  не зависят от  $\varphi$ .

Решение задачи будем искать в форме осесимметричных волн

$$E_\rho(\rho, z) = v(\rho)e^{i\gamma z}, E_z(\rho, z) = u(\rho)e^{i\gamma z}, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — вещественная постоянная распространения волны.

Внутри волновода  $\mu = \mu_0$ ,  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства,  $k_0^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2$ , где  $k_0$  — волновое число свободного пространства.

**3. Нелинейное интегральное уравнение..** Из уравнений Максвелла, учитывая ТМ-поляризацию, получим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\gamma E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu_0 H_\varphi \\ \gamma H_\varphi = \omega\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_\rho \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\varphi) = -i\omega\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_z \end{cases} \quad (3)$$

Выражая из первого уравнения системы  $H_\varphi$  и подставляя его во второе уравнение, приходим к системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} \gamma^2 E_\rho + i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = k_0^2 \tilde{\varepsilon} E_\rho \\ i\gamma \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) = k_0^2 \tilde{\varepsilon} E_z \end{cases} \quad (4)$$

Обозначая  $E_\rho = V$ ,  $iE_z = U$ ,  $k_2^2 = k_0^2\varepsilon_2 - \gamma^2$ , получим систему:

$$\begin{cases} -k_2^2 V + \gamma U' = f_1 \\ -\gamma \cdot \frac{1}{\rho} (\rho V)' - \frac{1}{\rho} (\rho U')' - k_0^2 \varepsilon_2 U = f_2 \end{cases} \quad (5)$$

где  $f_1 = k_0^2 a |E|^2 V$ ,  $f_2 = k_0^2 a |E|^2 U$ ,  $|E|^2 = V^2 + U^2$ .

Из первого уравнения системы выражаем и подставляем во второе уравнение, которое и будем решать. После преобразований получим:

$$(\rho U')' + k_2^2 \rho U = \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \cdot \left( \frac{\gamma}{k_2^2} (\rho f_1)' - \rho f_2 \right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \frac{k_2^2}{k_0^2 \varepsilon_2} \cdot \left( \frac{\gamma}{k_2^2} (\rho f_1)' - \rho f_2 \right) \\ (\rho U')' + k_2^2 \rho U &= F, 0 < \rho < R \end{aligned} \quad (7)$$

Построим функцию Грина для краевой задачи

$$\begin{cases} LG = -\delta(\rho - r), \\ G|_{\rho=0} = 0, G|_{\rho=R} = 0 \end{cases}$$

где  $L = \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} + k_2^2 \rho$  в виде

$$G(r, \rho) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{1}{J_0(k_2 R)} (J_0(k_2 \rho) N_0(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) N_0(k_2 R)), \rho \leq r \leq R \\ \frac{1}{J_0(k_2 R)} (N_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) J_0(k_2 R) - J_0(k_2 \rho) J_0(k_2 r) N_0(k_2 R)), r \leq \rho \leq R \end{cases} \quad (8)$$

Функция Грина существует при таких значениях параметров, что  $J_0(k_2 R) \neq 0$ .

Используя вторую формулу Грина, получаем

$$U(r) = \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho + RU(R-0) \frac{\partial G}{\partial \rho}(r, R) \quad (9)$$

$$V(r) = \frac{\gamma}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho - \frac{f_1(r)}{k_2^2} + \frac{\gamma R}{k_2^2} U(R-0) \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial r}(r, R) \quad (10)$$

Вне волновода решение имеет вид:

$$U \equiv E_z = CK_0(k_1 \rho) \quad (11)$$

$$V \equiv E_\rho = -\frac{\gamma}{k_1} CK_0'(k_1 \rho), \quad (12)$$

где  $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_1$ ,  $C = const$ ,  $K_0$  — функция Макдональда.

Условия сопряжения на границе раздела сред:

$$[U] = 0, \quad [\tilde{\varepsilon} V] = 0 \quad (13)$$

Выберем условия нормировки в виде:

$$\varepsilon_2 V|_{r=R-0} + aV|E|^2|_{r=R-0} = 1, \quad (14)$$

следовательно,  $\varepsilon_1 V|_{r=R+0} = 1$  и  $C = -\frac{k_1}{\varepsilon_1 \gamma K_0'(kR)}$ .

$$U(R+0) = -\frac{k_1}{\varepsilon_1 \gamma} \cdot \frac{K_0(k_1 R)}{K_0'(k_1 R)} \quad (15)$$

Дисперсионное соотношение можно записать в виде:

$$V(R-0) = \frac{1}{\varepsilon_2 + a|U(R-0)|^2} \quad (16)$$

Применяя условие  $U(R+0) = U(R-0)$ , получим систему

$$\begin{cases} V(r) = \frac{\gamma}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho - \frac{f_1(r)}{k_2^2} + \frac{\gamma R}{k_2^2} U(R+0) \frac{\partial^2 G}{\partial \rho \partial r}(r, R) \\ U(r) = \int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho + RU(R+0) \frac{\partial G}{\partial \rho}(r, R) \end{cases}, \quad (17)$$

где  $\int_0^R G(r, \rho) F(\rho) d\rho = \frac{k_2^2}{k_0^2 \epsilon_2} \left[ -\frac{\gamma}{k_2^2} \int_0^R \frac{\partial G}{\partial \rho} \rho f_1 d\rho - \int_0^R G \rho f_2 d\rho \right]$ .

После преобразований получим окончательный вид системы:

$$\begin{cases} U(r) = -\frac{\gamma}{k_0^2 \epsilon_2} \int_0^R \frac{\partial G}{\partial \rho} \rho f_1 d\rho - \frac{k_2^2}{k_0^2 \epsilon_2} \int_0^R G \rho f_2 d\rho - R \frac{\partial G}{\partial \rho}(r, R) \frac{k_2}{\epsilon_1 \gamma} \frac{K_0(k_1 R)}{K_0'(k_1 R)}, \\ V(r) = -\frac{\gamma^2}{k_0^2 \epsilon_2 k_2^2} \int_0^R \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \rho} \rho f_1 d\rho - \frac{\gamma}{k_0^2 \epsilon_2} \int_0^R \frac{\partial G}{\partial r} \rho f_2 d\rho - \frac{1}{k_0^2 \epsilon_2} f_1(r) - \frac{R k_2}{k_2^2 \epsilon_1} \frac{\partial^2 G(r, R)}{\partial \rho \partial r} \frac{K_0(k_1 R)}{K_0'(k_1 R)} \end{cases} \quad (18)$$

Утверждение 1. Краевая задача на собственные значения (1), (2), (11)–(14) эквивалентна системе интегральных уравнений (18) с дисперсионным соотношением (16).

Система (18) решается методом сжимающих отображений, аналогично работе [1].

- [1] Смирнов Ю.Г., Куприянова С.Н. Численный метод в задаче о распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой. *Естественные науки. Математика*, — 2003, **6**.
- [2] Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1978.
- [3] ELEONSKIИ V.M., OGANES'YANTS L.G. , AND SILIN V.P. Cylindrical Nonlinear Waveguides, *Soviet physics JETP*, — 1972, **35**, №1. — 44-47

**Исследование трехмерных задач  
дифракции электромагнитных волн  
на объемных диэлектрических телах  
методом сингулярных интегральных уравнений\***

**А. А. Цупак**

*Пензенский государственный университет*

**Введение.** Работа посвящена исследованию задачи о возбуждении прямоугольного резонатора с неоднородным анизотропным заполнением. Задача сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению. Доказана теорема о существовании и единственности его решения в  $L_2$ . Предложен численный метод Галеркина для решения интегрального уравнения, доказана его сходимость.

**1. Краевая задача для системы уравнений Максвелла.** Рассматривается следующая задача о возбуждении резонатора. Пусть  $P := \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < c\}$  — резонатор с идеально проводящей поверхностью  $\partial P$ . В резонаторе расположено объемное тело  $Q$ , характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и положительной  $(3 \times 3)$ -тензором диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}(x)$ . Компоненты  $\hat{\epsilon}$  являются ограниченными функциями в области  $\bar{Q}$ ,  $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$ , а также  $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ .

Граница  $\partial Q$  области  $Q$  кусочно-гладкая.

Будем также предполагать, что тело  $Q$  не касается стенок резонатора,  $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$ . В  $P \setminus \bar{Q}$  среда изотропна и однородна с постоянными  $\epsilon_0(>0)$ ,  $\mu_0(>0)$ .

Требуется определить электромагнитное поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(P)$ , возбуждаемое в резонаторе сторонним полем с временной зависимостью вида  $e^{-i\omega t}$ . Источник стороннего поля — электрический ток  $\mathbf{j}_E^0 \in L_2(P)$ .

Будем искать «слабые» решения (см. [1]) системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Сформулируем согласно [1] обобщенные краевые условия на границе  $\partial P$ . Если  $u$  — достаточно гладкое векторное поле в  $P$ , то через  $\gamma_\nu u$ ,  $\gamma_\tau u$  будем обозначать нормальную и касательную составляющие поля  $u$  на  $\partial P$ . В негладком случае дадим определение для равенств  $\gamma_\nu u = 0$ ,

\*Работа выполнена при поддержке гранта 06-07-89063-а.

$\gamma_\tau u = 0$ . Пусть  $u \in L_2(P; C^3)$ . Тогда, если  $\operatorname{div} u \in L_2(P)$ , то  $\gamma_\nu u = 0$  означает, что

$$(u, \nabla v) = -(\operatorname{div} u, v) \quad \forall v \in H^1(P);$$

если  $\operatorname{rot} u \in L_2(P)$ , то  $\gamma_\tau u = 0$  означает, что

$$(u, \operatorname{rot} w) = (\operatorname{rot} u, w) \quad \forall w \in L_2(P) : \operatorname{rot} w \in L_2(P),$$

где  $H^1(P)$  пространство Соболева. Обозначим

$$u_\tau|_{\partial P} := \gamma_\tau u, \quad u_\nu|_{\partial P} := \gamma_\nu u.$$

Для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  должны выполняться краевые условия

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0. \quad (2)$$

Пусть также  $\mathbf{E}^0$  и  $\mathbf{H}^0$  — решения рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела  $Q$ .

Утверждение 1. [1] При  $\omega \notin \sigma(\mathcal{M}_I)$  (спектр оператора Максвелла краевая задача для системы уравнений Максвелла (1), (2)) имеет единственное решение  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2(P)$  при любом  $\mathbf{j}_E^0 \in L_2(P)$ .

**2. Тензорная функция Грина прямоугольного резонатора.** Построим диагональный тензор Грина  $\hat{G}_E$ , компоненты которого являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца в  $P$  с коэффициентом  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$  и удовлетворяют краевым условиям первого или второго рода на  $\partial P$ .

Первая его компонента имеет вид

$$G_E^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(1 + \delta_{0n})}{ab\gamma_{nm} \operatorname{sh} \gamma_{nm} c} \cos\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \cos\left(\frac{\pi n}{a} y_1\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi m}{b} y_2\right) \begin{cases} \operatorname{sh} \gamma_{nm} x_3 \operatorname{sh} \gamma_{nm} (c - y_3), & x_3 < y_3 \\ \operatorname{sh} \gamma_{nm} y_3 \operatorname{sh} \gamma_{nm} (c - x_3), & x_3 > y_3 \end{cases}$$

где  $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$ .

Утверждение 2. Тензор Грина  $\hat{G}_E$  допускает представление

$$\hat{G}_E = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} \hat{I} + \hat{g}(x, y), \quad x, y \in P,$$

где тензор  $\hat{g} \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$  и  $\hat{g} \in C^\infty(\bar{P} \times \bar{Q})$ .

В работе [4] подробно изложен конструктивный метод выделения особенности, позволяющий корректно вычислять значения функции Грина



вблизи особых точек; проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенного метода.

**3. Объемное сингулярное интегральное уравнение.** Пусть  $\omega \notin \sigma(\mathcal{M}_I)$ . Тогда решение краевой задачи (1), (2) существует и единственно. Перепишем (1) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{j}_E \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu_0\mathbf{H}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_E^0 + \mathbf{j}_E^p.$$

В последнем равенстве  $\mathbf{j}_E^p = -i\omega(\hat{\epsilon}(x) - \epsilon_0\hat{I})\mathbf{E}$  — ток поляризации.

Такая постановка задачи позволяет, используя представление решения через векторный потенциал, прийти к интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E \left[ \frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ &\operatorname{grad} \operatorname{div} \int_Q \hat{G}_E \left[ \frac{\hat{\epsilon}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя теорему о дифференцировании слабосингулярных интегралов [2], перейдем к векторному сингулярному интегральному уравнению (см. [3]).

**Теорема 1.** [3] Пусть тело  $Q$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$  характеризуется положительным тензором диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$  и  $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ . Пусть  $\omega \notin \sigma(\mathcal{M}_I) \cup \{0\}$ , а  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  ( $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ ) — решения неоднородной (однородной) краевых задач. Тогда существует и единственно решение  $\mathbf{E} \in L_2(Q)$  интегрального уравнения. Верно и обратное.

**4. Метод Галеркина.** Для уравнения  $A\phi = f$ ,  $(\phi, f \in X)$  в гильбертовом пространстве  $X$  метод формулируется следующим образом. Приближенное решение  $\phi_n \in X_n$  определяется из уравнения  $P_n A \phi_n = P_n f$ . Здесь  $\phi_n \in X_n$  ( $X_n$  есть  $n$ -мерное подпространство пространства  $X$ ),  $P_n : X \rightarrow X_n$  — оператор ортогонального проектирования на конечномерное подпространство. Если подпространства  $X_n$  являются линейными оболочками базисных функций:  $X_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ , то уравнение  $P_n A \phi_n = P_n f$  эквивалентно следующему:

$$(A\phi_n, v_l)_X = (f, v_l)_X \quad (l = 1, \dots, n),$$

где  $(\cdot, \cdot)_X$  — скалярное произведение в  $X$ .

Представляя приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций:  $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$ , получим систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов  $c_k$ :

$$\sum_k c_k (Av_k, v_l)_X = (f, v_l)_X, \quad l = 1, \dots, n.$$

Будем формулировать метод не для сингулярного интегрального уравнения, а для интегро-дифференциального уравнения (3). Этот подход оказывается эффективным в силу более удобного представления скалярных произведений. Будем предполагать, что матрица  $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right)$  обратима в  $\bar{Q}$ ,  $\left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right)^{-1} \in L_\infty(Q)$ ,  $\hat{I}$  — единичная матрица.

Введя обозначения:

$$\hat{\xi} := \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right)^{-1}, \quad \mathbf{J} := \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right) \mathbf{E}$$

перейдем от (3) к следующему уравнению:

$$A\mathbf{J} := \hat{\xi}\mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E \mathbf{J}(y) dy - \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x).$$

Определим компоненты приближенного решения  $\bar{\mathbf{J}}$ :

$$\bar{J}^1 = \sum_{k=1}^N a_k f_k^1(x), \quad \bar{J}^2 = \sum_{k=1}^N b_k f_k^2(x), \quad \bar{J}^3 = \sum_{k=1}^N c_k f_k^3(x).$$

Здесь  $f_k^i$  — базисные функции-«крышки», существенно зависящие лишь от переменной  $x_i$ :

$$f_{klm}^i = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^i} |x_i - x_{i,k}| & x \in \overline{\Pi_{klm}^i}, \\ 0, & x \notin \overline{\Pi_{klm}^i}, \end{cases}$$

где  $h^i := |x_{i,k} - x_{i,k-1}|$ ;  $\overline{\Pi_{klm}^i}$  — система носителей, покрывающих  $Q$ .

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов  $a_k, b_k, c_k$  удобно представить в блочной форме:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right)$$

элементы колонок  $B_k$  и матриц  $A_{kl}$  определяются из соотношений:

$$B_k^i = (E_0^k, f_i^k);$$

$$A_{kl}^{ij} = (\xi_{kl} f_j^l, f_i^k) - \delta_{kl} k_0^2 \left( \int_Q G_E^k(x, y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \right) -$$

$$- \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G_E^l(x, y) f_j^l(y) dy, f_i^k(x) \right),$$

$k = 1, 2, 3; i = 1, \dots, N$ .

Теорема 2. [4] Пусть тензор  $\hat{\varepsilon}$ , что

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in Q} \left[ \sum_{l,n=1}^3 \left| \frac{\varepsilon_{ln}(x)}{\varepsilon_0} - \delta_{ln} \right|^2 \right]^{1/2} < \left( \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{17}{6}} \right)^{-1}.$$

Тогда интегральное уравнение однозначно разрешимо для любой правой части  $\mathbf{E}^0 \in L_2(Q)$  и метод Галеркина сходится для него.

- [1] БИРМАН М. Ш., СОЛОМЯК М. З.  $L_2$ -теория оператора Максвелла в произвольных областях. // Успехи математических наук. 1987. **42**. Вып.6. — 61–75.
- [2] МИХЛИН С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
- [3] СМЕРНОВ Ю. Г., ЦУПАК А. А. Существование и единственность решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче дифракции. // Дифференциальные уравнения, 2005, **41**, № 9, — 1190–1197.
- [4] СМЕРНОВ Ю. Г., ЦУПАК А. А. Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле методом объемного сингулярного интегрального уравнения. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, **44**, № 12, — 2264–2279.

УДК 533.95: 537.84

## Особенности метода крупных вихрей в магнитогидродинамике сжимаемой жидкости

**А. А. Чернышов**

*Институт Космических Исследований РАН*

**Введение.** Полную информацию о турбулентном течении жидкости можно получить с помощью прямого численного моделирования (DNS — direct numerical simulation), которое заключается в численном решении полной нестационарной системы магнитогидродинамических (МГД) уравнений. При таком подходе разрешаются все масштабы движения заряженной жидкости. DNS не требует специальных замыканий для уравнений МГД. Прямое численное моделирование МГД турбулентности сталкивается с трудностями, связанными с большими гидродинамическими и магнитными числами Рейнольдса, так как в этом случае число степеней свободы турбулентного движения велико и минимальное количество узлов на численной сетке должно быть столь большим, что ограничивает применение DNS. Для разрешения данной проблемы в настоящей работе впервые разрабатывается метод крупных вихрей (LES — large eddy simulation) для изучения сжимаемой МГД турбулентности. Метод крупных вихрей базируется на двух основных предположениях. Первое состоит в возможности разложения характеристик турбулентного движения на крупномасштабную и мелкомасштабную части. Второе предположение — в возможности замыкания уравнений крупномасштабного течения с использованием подсеточных моделей (SGS — subgrid scale). Таким образом, крупномасштабная часть турбулентного потока высчитывается непосредственно, а мелкомасштабная — моделируется. LES является методом для моделирования течений с большими числами Рейнольдса, так как в методе крупных вихрей предполагается, что перенос энергии происходит только внутри инерционного интервала, благодаря чему осуществляется сокращение степеней свободы и значительно увеличивается вычислительная эффективность по сравнению с DNS.

**1. Отфильтрованные уравнения.** Для упрощения уравнений, описывающих турбулентное МГД-движение с переменной плотностью, удобно воспользоваться средневзвешенной фильтрацией, для того чтобы избежать появления дополнительных SGS-членов. Средневзвешенная фильтрация применяется для всех параметров движения заряженной жидкости, кроме давления и магнитного поля. Средневзвешенная фильтрация определяется как:  $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$ . Для обозначения фильтрации в используются два символа, а именно, черта сверху обозначает обычную фильтрацию, в то время как тильда — средневзвешенную фильтрацию.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \frac{1}{Re} \tilde{\sigma}_{ij} \right) + \left( \frac{\bar{B}^2}{2M_a^2} \delta_{ij} - \frac{1}{2M_a^2} \bar{B}_j \bar{B}_i \right) = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{B}_i - \tilde{u}_i \bar{B}_j) - \frac{1}{Re_m} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j} \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $u_j$  — скорость в направлении  $x_j$ ;  $\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu S_{kk}\delta_{ij}$  — вязкий тензор напряжений;  $S_{ij} = 1/2 (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$  — тензор скорости деформации;  $\mu$  — вязкость;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\eta$  — магнитная диффузия;  $B$  — магнитное поле;  $Re$  — число Рейнольдса;  $Re_m$  — магнитное число Рейнольдса;  $M_s$  — число Маха;  $M_a$  — магнитное число Маха.

Для того чтобы замкнуть систему уравнений используется политропное соотношение между плотностью и давлением, а именно:  $p = \rho^\gamma$ , где  $\gamma$  — показатель политропы.

В правой части уравнений (2)–(3) слагаемые обозначают влияние подсеточных членов на отфильтрованную часть:

$$\tau_{ij}^u = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - \frac{1}{M_a^2} (\overline{B_i B_j} - \bar{B}_i \bar{B}_j) \quad (4)$$

$$\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \tilde{u}_i \bar{B}_j) - (\overline{B_i u_j} - \bar{B}_i \tilde{u}_j) \quad (5)$$

Таким образом, в отфильтрованной системе МГД уравнений содержатся неизвестные турбулентные тензоры:  $\tau_{ij}^u$  и  $\tau_{ij}^b$ . Для того чтобы их определить, необходимо использовать специальные турбулентные замыкания (параметризации).

**2. Подсеточное моделирование.** Будем считать, что турбулентный тензор  $\tau_{ij}^u$  связан с тензором скоростей деформации и вязкостью (модель вихревой вязкости), а  $\tau_{ij}^b$  — с диссипацией из-за сопротивления (то есть эта диссипация выражается через обобщенный закон Ома и равна  $\eta j$ , где  $j$  — плотность электрического тока):

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2\nu_t (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) \quad (6)$$

$$\tau_{ij}^b - \frac{1}{3} \tau_{kk}^b \delta_{ij} = -2\eta_t \tilde{J}_{ij} \quad (7)$$

где  $\tilde{J}_{ij} = 1/2 (\partial \tilde{B}_i/\partial x_j - \partial \tilde{B}_j/\partial x_i)$  — крупномасштабный тензор магнитной ротации;  $\nu_t$  и  $\eta_t$  — скалярные турбулентные функции, зависящие от пространственных координат и от времени.

2.1. *Модель Смагоринского для МГД-турбулентности.* Модель Смагоринского является моделью вихревой вязкости, где подсеточные масштабы предполагаются изотропными и находятся в равновесии с крупномасштабным течением:

$$\nu_t = C_s \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|, \quad (8)$$

$$\eta_t = D \bar{\Delta}^2 |j|. \quad (9)$$

Здесь,  $|\tilde{S}^u| = \left(2\tilde{S}_{ij}^u \tilde{S}_{ij}^u\right)^{1/2}$  и  $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_x \bar{\Delta}_y \bar{\Delta}_z)^{1/3}$ . Условия реализуемости позволяют найти подсеточную модель для турбулентной кинетической энергии, соответствующую модели вихревой вязкости [2]. Отсюда получим подсеточное замыкание для изотропного слагаемого:

$$\tau_{kk}^u = 2C_I \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|^2 \quad (10)$$

Для других подсеточных моделей, которые будут представлены ниже, изотропные члены определяются аналогично. Константы  $C_s$ ,  $C_I$  и  $D$  определяются с помощью динамической процедуры для всех SGS моделей в данной работе.

2.2. *Модель Колмогорова для МГД-турбулентности.* Если длина фильтра находится в инерциальном интервале полностью развитой турбулентности, то предполагают, что нелинейное взаимодействие между крупномасштабной кинетической и магнитной энергией намного меньше, чем энергия диссипации, поэтому можно считать, что подсеточная кинетическая и магнитная энергия зависят только от времени. Эти параметризации основываются на колмогоровском скейлинге:

$$\nu_t = C_s \bar{\rho} \bar{\Delta}^{4/3} \quad (11)$$

$$\eta_t = D \bar{\Delta}^{4/3} \quad (12)$$

2.3. *Модель, основанная на перекрестной спиральности.* Определим перекрестную спиральность следующим образом:  $H^c = \int_V (u \cdot B) dV$ . В МГД-турбулентности находят характерные значения турбулентной скорости и магнитного поля, и перекрестная спиральность связана с обменом между кинетической и магнитной энергиями, вызванным силой Лоренца [1]. Поэтому спиральность позволяет найти энергетический обмен между крупными масштабами и мелкими в методе LES:

$$\nu_t = C_s \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}_{ij}^u \tilde{S}_{ij}^b|^{1/2}, \quad (13)$$

$$\eta_t = D \bar{\Delta}^2 \text{sgn}(\bar{j} \cdot \bar{\omega}) |\bar{j} \cdot \bar{\omega}|^{1/2}. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{S}_{ij}^b = (\partial \bar{B}_i / \partial x_j + \partial \bar{B}_j / \partial x_i) / 2$ ,  $\tilde{S}_{ij} = (\partial \tilde{u}_i / \partial x_j + \partial \tilde{u}_j / \partial x_i) / 2$ ,  $\tilde{\omega} = \nabla \times \tilde{u}$ .

В данной модели только магнитная диффузия  $\eta_t$  может менять знак (в (14) функция  $sgn(\cdot)$  определяет знак аргумента), так как в МГД турбулентности только магнитная энергия отвечает за процесс переноса от мелких к крупным масштабам [1].

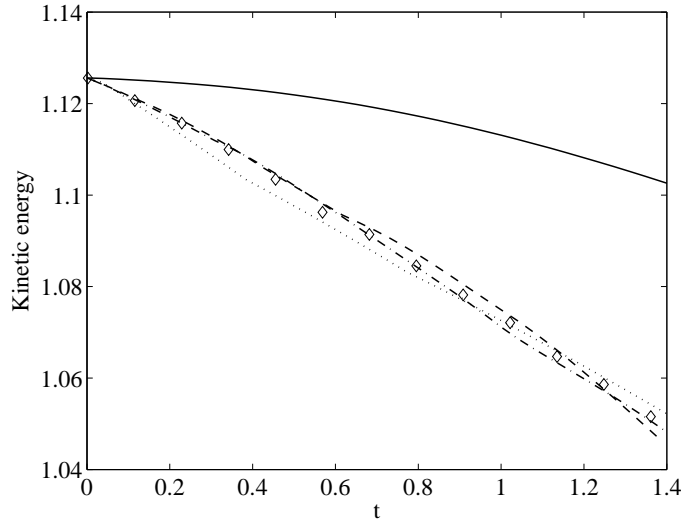


Рис. 1. Временная эволюция кинетической энергии

**3. Результаты расчетов.** На рис. 1 и рис. 2 продемонстрированы результаты расчетов и произведено сравнение представленных в работе подсеточных моделей. Эволюция отфильтрованной кинетической энергии — на рис. 1 и эволюция отфильтрованной магнитной энергии — на рис. 2. Штриховая линия представляет собой DNS результаты, с которыми и производятся сравнение различных SGS параметризаций. Сплошная линия — это LES без каких-либо замыканий, то есть в отфильтрованных уравнениях магнитной гидродинамики тензоры  $\tau_{ij}^u$  и  $\tau_{ij}^b$  опущены. Линия с двойным пунктиром представляет модель Колмогорова, штрихпунктирная — модель спиральности и линия, составленная из точек, демонстрирует результаты модели Смагоринского. Результаты модели LES без подсеточной параметризации демонстрируют самые большие отклонения от DNS результатов. Применение подсеточных моделей заметно улучшают точность расчетов. Несмотря на то, что использование подсе-

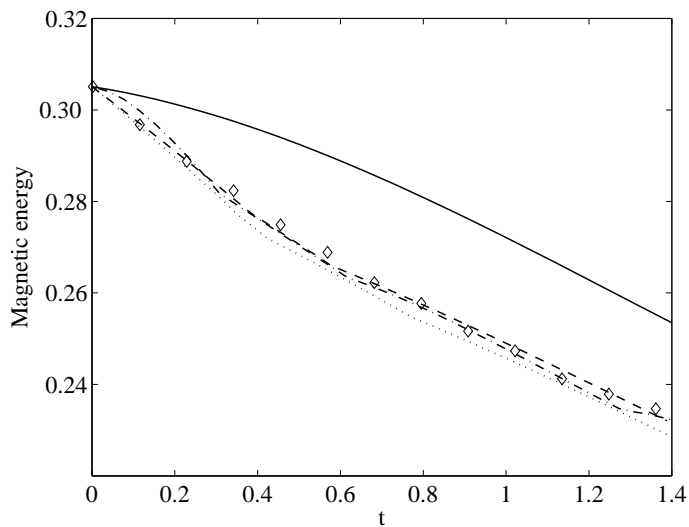


Рис. 2. Временная эволюция магнитной энергии

точных модели достигают хорошее согласование с данными DNS, сделать окончательный вывод о том, какая модель самая эффективная, однозначно трудно. Модель спиральности показывает самые лучшие результаты, однако модель Колмогорова (хоть и демонстрирует менее точные результаты по сравнению с моделью Смагоринского и моделью спиральности) является самой выгодной с точки зрения вычислительных затрат.

- [1] MÜLLER W.C., CARATI D., "Dynamic gradient-diffusion subgrid models for incompressible magnetohydrodynamics turbulence" *Phys. of Plasmas*, **9**, №3, pp. 824-834, 2002.
- [2] VREMAN B., "Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer" Ph.D. thesis, University of Twente, 1995.



## О свойствах некоторых транзитивных логик с универсальной модальностью

**И. Шапировский**

ИППИ РАН

В работе описывается способ обогащения расширений **S4** универсальной модальностью, сохраняющий Крипке-полноту, финитную аппроксимируемость и алгоритмическую сложность.

**1. Предварительные сведения.** Мы рассматриваем нормальные пропозициональные модальные логики.  $FM(\Diamond)$  обозначает множество всех формул, построенных с использованием счетного множества пропозициональных переменных  $PV$ , константы  $\perp$  (ложь), и связок  $\rightarrow, \Diamond$ . При построении множества формул  $FM(\Diamond, \exists)$  используется также модальная связка  $\exists$ . Стандартным образом определяются  $\Box, \forall, \neg, \vee, \wedge, \top$ , в частности,  $\Box A := \neg \Diamond \neg A$ ,  $\forall A := \neg \exists \neg A$ . Для логики  $L$  и формулы  $A$ ,  $L \vdash A$  означает  $A \in L$ .  $Sub(A)$  обозначает множество всех подформул  $A$ ;  $Sub_{\exists}(A) := \{\exists A \mid \exists A \in Sub(A)\}$ . Минимальная одномодальная нормальная логика обозначается **K**; **S4** := **K** +  $p \rightarrow \Diamond p + \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ .

*Шкала (Крипке)* это кортеж  $(W, R_1, \dots, R_n)$ , где  $W \neq \emptyset, n \geq 1, R_i \subseteq W \times W$ . В данной работе мы рассматриваем только случаи  $n = 1, 2$ . Как обычно, *модель (Крипке)* — это шкала с оценкой:  $M = (F, \theta)$ , где  $\theta: PV \rightarrow 2^W$ . Знак  $\models$  используется для обозначения истинности формулы в точке модели, а также для обозначения общезначимости формулы в шкале (эти понятия определяются стандартным образом, см., например, [1]). Логика класса шкал  $\mathfrak{F}$ , т.е. множество всех формул, общезначимых во всех шкалах класса, мы обозначаем  $L(\mathfrak{F})$ .

$F$  —  $L$ -шкала, если  $L(\{F\}) \supseteq L$ .  $A$  выполнима в шкале  $F$ , если  $(F, \theta)$ ,  $x \models A$  для некоторых  $x, \theta$ .  $A$   $L$ -выполнима, если  $A$  выполнима в некоторой  $L$ -шкале. Напомним, что  $L$  Крипке-полна, если  $L = L(\mathfrak{F})$  для некоторого класса  $\mathfrak{F}$ ; в частности, **K** — логика класса всех одномодальных шкал, **S4** — логика класса всех одномодальных транзитивных рефлексивных шкал.

Рассмотрим одномодальную шкалу  $F = (W, R)$ . Для  $x \in W, V \subseteq W$  полагаем  $R(x) := \{y \mid xRy\}$ ,  $R|V := R \cap (V \times V)$ ,  $F \langle x \rangle := (R(x), R|_{R(x)})$ . Если  $F = F \langle x \rangle$ , то говорим, что  $F$  — шкала с корнем и  $x$  — корень  $F$ . Полагаем  $F^U := (W, R, W \times W)$ ; для модели  $M = (F, \theta)$  пусть  $M^U := (F^U, \theta)$ . Заметим, что если формула  $C \in FM(\Diamond)$  истинна в некоторой точке  $M$ , то  $\exists C$  истинна во всех точках  $M^U$ ; в этом случае мы пишем  $M^U \models \exists C$ . Для класса одномодальных шкал  $\mathfrak{F}$  полагаем  $\mathfrak{F}^U := \{F^U \mid F \in \mathfrak{F}\}$ .

Следующий способ введения универсальной модальности был предложен в [2]. Пусть  $L$  — непротиворечивая одномодальная логика. Рассмотрим логику  $LU$  — минимальную нормальную логику, содержащую  $L$  и аксиомы

$$A4_{\exists} = \exists\exists p \rightarrow \exists p, AT_{\exists} = p \rightarrow \exists p, AB_{\exists} = p \rightarrow \forall\exists p; A_{\subseteq} = \Diamond p \rightarrow \exists p.$$

Несложно видеть, что если  $LU$  Крипке-полна, то  $LU = L(\mathfrak{F}^U)$ , где  $\mathfrak{F}$  обозначает класс всех  $L$ -шкал. В [2] было показано, что ряд свойств  $L$  (таких как компактность или сильная Крипке-полнота, определения можно найти в [1]) переносятся на случай логики  $LU$ . Вместе с тем, многие «хорошие» свойства могут быть потеряны: в [3] был дан пример такой разрешимой логики  $L$ , что  $LU$  — неразрешима; в [4] была приведена финитно аппроксимируемая логика  $L$ , такая что  $LU$  не является финитно аппроксимируемой. Мы покажем, что добавление специальной аксиомы к  $LU$  позволяет сохранить эти свойства в случае  $L \supseteq S4$ .

**2. Перевод.** Если  $F$  — одномодальная  $S4$ -шкала с корнем, то выполнимость в  $F^U$  сводится к выполнимости в  $F$ . Чтобы показать это, мы используем конструкцию, предложенную в [3].

Рассмотрим формулу  $A \in FM(\Diamond, \exists)$ . Будем полагать, что  $PV(A) \subseteq \{p_1, \dots, p_m\}$ ,  $Sub(A) = \{A_1, \dots, A_n\}$ , и  $Sub_{\exists}(A) = \{\exists A_{i_1}, \dots, \exists A_{i_l}\}$ . Для всех  $B \in Sub(A)$  определим  $[B]$ :

$$[p] := p, [\perp] := \perp, [B_1 \rightarrow B_2] := [B_1] \rightarrow [B_2], [\Diamond B] := \Diamond[B], [\exists A_{i_j}] := q_j.$$

Индукцией по длине формулы легко проверяется следующая

Лемма 1. Пусть даны формула  $A \in FM(\Diamond, \exists)$  и модель  $M = ((W, R), \theta)$ , такие, что:

$$\text{если } M^U \models \exists A_{i_j} \text{ то } \theta(q_j) = W, \text{ иначе } \theta(q_j) = \emptyset. \quad (1)$$

Тогда для всех  $y \in W$ ,  $B \in Sub(A)$  имеем:  $M^U, y \models B \iff M, y \models [B]$ .

Положим

$$A_{\exists} := \bigwedge_{j=1}^l ((\exists[A_{i_j}] \rightarrow \forall q_j) \wedge (\neg\exists[A_{i_j}] \rightarrow \forall\neg q_j)) \wedge [A]$$

Лемма 2 [3].  $A$  выполнима в  $F^U \iff A_{\exists}$  выполнима в  $F^U$ .

Определим формулу  $A_{\Diamond} \in FM(\Diamond)$  следующим образом:

$$A_{\Diamond} := \bigwedge_{j=1}^l ((\Diamond[A_{i_j}] \rightarrow \Box q_j) \wedge (\neg\Diamond[A_{i_j}] \rightarrow \Box\neg q_j)) \wedge \Diamond[A]$$

Рассмотрим **S4**-шкалу с корнем  $F = F\langle x \rangle$ . Для любой модели  $M = (F, \theta)$  и формулы  $B \in FM(\Diamond)$  имеем:  $M^U \models \exists B \iff M, x \models \Diamond B$ . Тем самым, справедлива следующая

Лемма 3. Пусть  $F$  — **S4**-шкала с корнем,  $A \in FM(\Diamond, \exists)$ . Тогда  $A$  выполнима в  $F^U \iff A_\Diamond$  выполнима в корне  $F$ .

**3. Основные результаты.** Рассмотрим следующую аксиому:

$$AxCP := \exists p \wedge \exists q \rightarrow \exists(\Diamond p \wedge \Diamond q)$$

Легко видеть, что для всякой **S4**-шкалы  $F = (W, R)$ ,  $F^U \models AxCP \iff F$  обладает свойством  $\forall x \forall y \exists z (zRx \wedge zRy)$ . Кроме того, если  $F = F\langle x \rangle$  то  $F^U \models AxCP$ . С другой стороны, если  $x$  — минимальна в  $F$  (то есть для всех  $y \in W$  из  $yRx$  следует  $xRy$ ), то  $F^U \models AxCP$  влечет  $F = F\langle x \rangle$ .

Для одномодальной логики  $L$  положим

$$LU^\downarrow := LU + AxCP.$$

Пусть  $N$  — бимодальная логика. Рассмотрим её каноническую шкалу  $F^N = (W^N, R^N, U^N)$  и каноническую модель  $M^N$ . Заметим, что если  $N \supseteq KU$ , то  $R^N \subseteq U^N$  и  $U^N$  является отношением эквивалентности на  $W^N$  [2].  $AxCP$  является формулой Салквиста, следовательно если  $N \supseteq KU^\downarrow$ , то  $F^N \models AxCP$ . Если  $N \supseteq S4U^\downarrow$ , то легко показать, что для всех  $n \geq 1$ ,

$$N \vdash \exists p_1 \wedge \dots \wedge \exists p_n \rightarrow \exists(\Diamond p_1 \wedge \dots \wedge \Diamond p_n).$$

Лемма 4. Рассмотрим непротиворечивую бимодальную логику  $N \supseteq S4U^\downarrow$ . Пусть  $W \in W^N/U^N$ ,  $R := R^N|W$ ,  $F := (W, R)$ . Тогда  $F$  — шкала с корнем.

*Доказательство.* Пусть  $\Psi = \{\Diamond B \mid \text{для некоторого } y \in W \ B \in y\}$ . Поскольку  $N \vdash \exists p_1 \wedge \dots \wedge \exists p_n \rightarrow \exists(\Diamond p_1 \wedge \dots \wedge \Diamond p_n)$ , всякое конечное подмножество  $\Psi$   $N$ -непротиворечиво, и, следовательно,  $\Psi$   $N$ -непротиворечиво. Тем самым для некоторого  $x \in W$   $x \supseteq \Psi$ . В силу построения  $W = R(x)$ . Q.E.D

Для формулы  $A$  пусть  $A^0 := \neg A$ ,  $A^1 := A$ .

Теорема 1. Рассмотрим класс **S4**-шкал с корнем  $\mathfrak{F}$ , такой что если  $F \in \mathfrak{F}$ ,  $x \in F$ , то  $F\langle x \rangle \in \mathfrak{F}$ . Тогда  $L(\mathfrak{F}^U) = L(\mathfrak{F})U^\downarrow$ .

*Доказательство.* Положим  $L := L(\mathfrak{F})$ ,  $N := LU^\downarrow$ . Тривиально,  $L(\mathfrak{F}^U) \supseteq N$ .

Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим  $N$ -непротиворечивую формулу  $A$ . Тогда  $A \in y_0$  для некоторого  $y_0 \in W^N$ . Пусть  $Sub_E(A) = \{B_1, \dots, B_l\}$ . Положим  $B := A \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq l} B_j^{v_j}$ , где  $v_1, \dots, v_l$  определены следующим образом: если  $B_j \in y_0$  то  $v_j := 1$ , иначе  $v_j := 0$ . Тогда  $B \in y_0$ . Следовательно  $C := B \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq l} \forall q_j^{v_j}$  также  $N$ -непротиворечиво, и для некоторого  $y \in W^N$  имеем  $C \in y$ .

Пусть  $M^U = ((W, R, U), \theta)$  — ограничение  $M^N|U^N(y)$ , то есть  $W := U^N(y)$ ,  $R := R^N(y)|W$ ,  $U := U^N(y)|W = W \times W$ , и для всех  $p \in PV$ ,  $\theta(p) := \{x \in W \mid x \ni p\}$ . Заметим, что как и в канонической модели  $M^N$ , в  $M^U$  справедливо следующее: для всяких  $z \in W$ ,  $D \in FM(\Diamond, \exists)$  имеем:  $D \in x \iff M^U, x \models D$ .

Пусть  $F := (W, R)$ . Поскольку  $M$  удовлетворяет условию (1) из леммы 1, имеем  $A \exists \in y$ . По лемме 4,  $F = F\langle x \rangle$  для некоторого  $x \in W$ . Тогда  $A \Diamond \in x$ , следовательно  $A \Diamond$  L-непротиворечива, и значит  $A \Diamond$  выполнима в некоторой точке  $z \in G$ ,  $G \in \mathfrak{F}$ . Тем самым  $A \Diamond$  выполнима в корне шкалы  $H = G\langle z \rangle$ , и по лемме 3,  $A$  выполнима в  $H^U$ . Поскольку  $H \in \mathfrak{F}$ , то и  $H^U \in \mathfrak{F}^U$ . Имеем:  $L(\mathfrak{F}^U) \subseteq N$ . Q.E.D

Заметим, что если  $L = L(\mathfrak{F})$ , то  $L = L(\{F\langle x \rangle \mid F \in \mathfrak{F}, x \in F\})$ . Приведённые выше рассуждения показывают, что для всякой полной по Крипке одномодальной логики  $L \supseteq S4$  и формулы  $A \in FM(\Diamond, \exists)$  имеет место следующее:  $A \text{ LU}^\downarrow\text{-выполнима} \iff A \Diamond \text{ L-выполнима}$ . С другой стороны, очевидно, что для всякой  $B \in FM(\Diamond)$  имеем:  $B \text{ L-выполнима} \iff B \text{ LU}^\downarrow\text{-выполнима}$ . Тем самым, доказана

Теорема 2. Пусть  $L \supseteq S4$  — одномодальная полная по Крипке логика. Тогда:

- $\text{LU}^\downarrow$  полна по Крипке;
- если  $L$  финитно аппроксимируема, то и  $\text{LU}^\downarrow$  финитно аппроксимируема;
- $L$  и  $\text{LU}^\downarrow$  полиномиально эквивалентны.

- [1] P. BLACKBURN, M. DE RIJKE AND Y. VENEMA. Modal logic. Cambridge University Press, 2001.
- [2] V. GORANKO, S. PASSY. Using the Universal Modality: Gains and Questions. Journal of Logic and Computation. 1992; 2: 5–30.
- [3] EDITH HEMASPAANDRA. The Price of Universality. Notre Dame Journal of Formal Logic 37(2): 174–203 (1996).
- [4] F. WOLTER. Solution to a Problem of Goranko and Passy. Journal of Logic and Computation. 1994 4(1):21–22.

УДК 510.643

## Бесконечная аксиоматизируемость информационных логик на открытых множествах

**Т. А. Шатров**

Московский государственный университет

Пусть  $X$  — произвольное метрическое пространство. Обозначим

$O(\mathbf{X})$  — структуру его непустых открытых подмножеств с частичным порядком  $A \leq B \iff B \subseteq A$ .  $O(\mathbf{X})$  является шкалой Крипке и множество пропозициональных формул, верных на этой шкале образует суперинтуиционистскую логику  $LM_{O(\mathbf{X})}$ , которая и является объектом исследования данной статьи.

Суперинтуиционистские логики, строящиеся подобным образом известны достаточно давно. Наиболее известная из них — *логика финитных задач Медведева*  $LM$  ([2]). Ее можно определить как множество формул, верных на шкалах вида  $P(D)$ , где  $D$  — конечное множество. Здесь  $P(D)$  — это структура всех непустых подмножеств  $D$ , упорядоченная по обратному включению (так же, как и  $O(X)$ ). Множество формул, верных на шкале  $P(\omega)$ , где  $\omega$  — счетное множество образуют *логику бесконечных задач*  $LM_1$  (Скворцов, [3]). Известно, что  $LM_1 \subseteq LM$ . Совпадают ли эти логики является открытой проблемой.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{X}$  — бесконечное метрическое пространство. Тогда  $LM_{O(\mathbf{X})} \subseteq LM_1$ .

Доказательство состоит в построении  $p$ -морфизма шкалы  $O(\mathbf{X})$  на  $P(\omega)$ .  $p$ -морфизм шкалы  $X$  на шкалу  $Y$  — это сюръективное отображение  $f : X \rightarrow Y$ , сохраняющее частичный порядок (монотонность) и если  $f(x) \leq y$ , то  $\exists x' \geq x : f(x') = y$ . Существование  $p$ -морфизма шкал Крипке влечет вложение соответствующих логик.

Для изучения свойств логики  $LM_{O(\mathbf{X})}$  рассмотрим  $p$ -морфизм  $h : O(\mathbf{X}) \rightarrow F$ , где  $F$  — некоторая конечная шкала. Пусть  $A$  — произвольное непустое подмножество  $\mathbf{X}$  (не обязательно открытое). Пусть также существует хотя бы одна последовательность открытых подмножеств  $A_i$ , т. ч.  $A_{i+1} \subseteq A_i$  и  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$ . Тогда обозначим  $\bar{h}(A) = \sup_{\{A_i\}} \lim_i h(A_i)$ . Предел существует для любой такой последовательности  $A_i$ , в силу конечности  $F$  и монотонности  $h$ . Пусть  $A_i$  и  $B_i$  — последовательности, по которым получаются разные пределы. Тогда  $A_i \cap B_i$  также сходится к  $A$  и ее предел больше или равен исходным пределам. Поэтому супремум тоже всегда существует. Таким образом,  $\bar{h}$  продолжает  $h$  на более широкий класс множеств, например на конечные подмножества  $\mathbf{X}$ .

Далее, будем считать, что для каждого элемента  $F$ , количество элементов, идущих строго за ним не равно 1.

**Лемма 1.**  $u \in F$  и  $d(u)$  — длина наибольшей цепи, исходящей из  $u$ . Тогда существует конечное  $E \subset \mathbf{X}$ , т. ч.  $\bar{h}(E) = u$  и  $|E| < 2^{d(u)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $d(u) = 1$ . Тогда  $\exists G \in O(\mathbf{X}) : h(G) = u$ , причем  $\forall G' \subset G \ h(G') \neq u$ . Поэтому взяв  $E = \{g\}, g \in G$  получим, что  $\bar{h}(E) = u$ , так как есть последовательность окрестностей  $g$ , по которой предел равен  $u$ , а  $u$  — наибольший элемент  $F$ .

Пусть  $d(u) = n > 1$  и для всех меньших  $n$  утверждение доказано (для

всех  $\mathbf{X}$  и  $F$  удовлетворяющих условию). Возьмем  $G \in O(\mathbf{X}) : h(G) = u$ . Существует как минимум 2 элемента  $F$ , следующих строго за  $u$ . Обозначим их  $v_1$  и  $v_2$ .  $\exists G_1, G_2 : G' = G_1 \cup G_2 \subset G$ ,  $\bar{h}(G_1) = v_1$ ,  $\bar{h}(G_2) = v_2$ ,  $|G_1| < 2^{d(u)-1}$ ,  $|G_2| < 2^{d(u)-1}$ . Существование этих множеств следует из предположения индукции при  $\mathbf{X} := \mathbf{X}^G, F := F^u$ , а  $h$  и  $\bar{h}$  ограничены на соответствующие подмножества  $G$ . Тогда  $|G'| < 2^{d(u)}$  и  $\bar{h}(G') = u$ . Это доказывает индукционный переход.

**Определение 1.** Назовем конечное множество  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  устойчивым относительно отображения  $\bar{h}$ , если  $\exists \varepsilon \forall A' = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\} : \rho(a_i, a'_i) < \varepsilon$  верно, что  $\bar{h}(A') = \bar{h}(A)$ . Если любое непустое подмножество  $A$  также устойчиво, то назовем  $A$  вполне устойчивым.

**Утверждение 1.** Пусть множество  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  построено по предыдущей лемме. Тогда  $E$  устойчиво относительно  $\bar{h}$ .

**Доказательство.** Заметим, что точки из которых состоит  $E$  были выбраны по базе индукции как произвольные элементы неких открытых множеств. Поскольку число этих точек конечно, то существует такой  $\varepsilon$ , что при любом сдвиге каждой точки не более чем на  $\varepsilon$  они остаются в своих открытых множествах. Отсюда следует доказываемое утверждение.

**Лемма 2.** Пусть конечное множество  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  устойчиво относительно  $\bar{h}$ . Тогда  $\forall \varepsilon \exists E' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\} : \rho(e_i, e'_i) < \varepsilon, \bar{h}(A') = \bar{h}(A)$ , такое что  $E'$  вполне устойчиво.

**Доказательство.** Точку  $x \in \mathbf{X}^n$  можно рассматривать как  $n$ -элементное подмножество  $\mathbf{X}$ .  $x_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  будет соответствовать множеству  $E$ , а точки из  $\varepsilon$ -окрестности  $x_0$  — возможным множествам  $E'$ . Пусть  $k = 2^n - 1$  — число непустых подмножеств  $E$ . Определим отображение  $H : \mathbf{X}^n \rightarrow F^k$  следующим образом:  $H_i(x) = \bar{h}(E_i(x))$ ,  $i = 1, \dots, k$ , где  $E_i(x)$  —  $i$ -е подмножество множества, соответствующего  $x$ . На  $F^k$  вводится порядок  $(f_1, \dots, f_k) < (g_1, \dots, g_k) \Leftrightarrow f_1 < g_1 \& \dots \& f_k < g_k$ . Докажем, что  $H$  имеет локальный минимум в любой точке  $x$  из окрестности  $x_0$ . Действительно, если  $H_i(x) = u$ , то существует окрестность  $G \supset E_i(x) : h(G) = u$  и  $\forall x' : E_i(x') \subset G$  по определению  $\bar{h}$   $H_i(x') = \bar{h}(E_i(x')) \geq h(G) = u$ . Заметим, что вполне устойчивости множества соответствует постоянство  $H$  в некоторой окрестности соответствующей точки. Если  $H$  не постоянно в любой окрестности  $x_0$ , то  $\exists x_1 : H(x_1) > H(x_0)$ . Далее, если  $H$  непостоянно в любой окрестности  $x_1$ , то аналогично строится  $x_2$  и так далее. Так как шкала  $F^k$  конечна, то в ней нет бесконечно возрастающей последовательности, поэтому  $H$  постоянно в окрестности некоторой точки  $x_l$ . Ей соответствует искомое множество  $E'$ .

Обозначим  $br(u)$  множество элементов, следующих строго за  $u$ .

**Лемма 3.** В условиях Леммы 1  $\forall u \in F \quad |br(u)| < 2^{d(u)}$ .

*Доказательство.* Выберем множество  $E$ , построенное по лемме 1. Оно устойчиво, поэтому по лемме 2 можно построить множество  $E'$ , которое вполне устойчиво. Пусть  $E_0 \subseteq E'$  такое, что  $\bar{h}(E) = u$  и  $\forall E_1 \subset E_0 \bar{h}(E_1) > u$ . Занумеруем элементы множества  $E_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $|E_0| = n$ . Определим множества  $A_{ij} = \{x \in \mathbf{X} : \rho(x, e_j) < 1/i\}$ ,  $A_i = \bigcup_{j=1}^n A_{ij}$ ,  $\lim h(A_i) = u$ .

Пусть  $v \in br(u)$ . По лемме 1 в каждом  $A_i$  есть  $G_i : |G_i| < 2^{d(u)-1}$ ,  $\bar{h}(G_i) = v$ . Будем рассматривать  $i > i_0$ , т. ч.  $A_{ij}$  не пересекаются. Определим последовательность  $K_i = \{j : G_i \cap A_{ij} \neq \emptyset\}$ . Значения этой последовательности — подмножества набора натуральных чисел от 1 до  $n$ , и их конечное число. Поэтому существует такое  $K$ , что  $K = K_{i_m}, m \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим множества  $A'_m = \bigcup_{j \in K} A_{i_m j}$ ,  $E_1 = \{e_j | j \in K\}$ .

Предположим, что  $E_1 = E_0$ . Тогда  $G_{i_m} \subseteq A'_m = A_{i_m}$ , причем  $\forall j \ G_{i_m} \cap A_{i_m j} \neq \emptyset$ . В силу вполне устойчивости  $E'$  множество  $E_0$  устойчиво. Пусть  $m$  настолько велико, что  $1/i_m < \epsilon$  из определения устойчивости. Возьмем  $E^* = \{e_j^* | e_j^* \in G_{i_m} \cap A_{i_m j}, j = 1, \dots, n\}$ . В силу устойчивости  $\bar{h}(E^*) = \bar{h}(E_0) = u$ . С другой стороны  $E^* \subset G_{i_m}$ , поэтому  $\bar{h}(E^*) \geq v$ . Противоречие, т. к.  $u < v$ .

Значит  $E_1 \subset E_0$ . Тогда  $\bar{h}(E_1) > u$  (по выбору  $E_0$ ) и  $\bar{h}(E_1) \leq v$ , так как любое  $A'_m$  содержит  $G_{i_m}$  и  $h(G_{i_m}) = v$ . Поэтому  $h(E_1) = v$ . Теперь можно взять  $E_2 : E_1 \subseteq E_2 \subset E_0, |E_2| = n - 1$ . В силу минимальности  $E_0$   $\bar{h}(E_2) = v$ . Всего различных подмножеств  $E_2$  с такой мощностью ровно  $n$ , поэтому число возможных  $v$ , т. е.  $|br(u)| \leq n \leq |E'| = |E| < 2^{d(u)}$ , что и требовалось доказать.

*Замечание 1.* Из доказательства этой леммы легко следует, что  $\bar{h}|_{P(E')}$  является  $p$ -морфизмом. Действительно, если  $A \subseteq E'$ ,  $\bar{h}(A) = u$  и  $v > u$ , то взяв цепочку  $u \leq v_1 < \dots < v_n = v$ , где каждый следующий элемент следует строго за предыдущим, можно построить  $A_i$ , такие что  $\bar{h}(A_i) = v_i$ . Отсюда же следует и сюръективность. Монотонность очевидна.

Результат, полученный в последней лемме накладывает условие на “ветвистость” шкалы  $F$  и аналогичен соответствующему результату из [1, 5], полученному для логик  $LM_n$ . В частности не существует  $p$ -морфизма из  $O(\mathbf{X})$  на шкалу

$$\Phi(k, m) = \{(i, j) \in \omega^2 | (0 \leq i \leq k \& 0 \leq j \leq 1) \vee$$

$$\vee (i = (k+1) \& 1 \leq j \leq m) \vee (i = (k+2) \& j = 0)\}$$

$$(i, j) \leq (i', j') \iff (i = i' \& j = j') \vee (i > i')$$

при  $m = 2^{k+3}$ .

Теорема 2.  $LM_{O(\mathbf{X})}$  не является конечно аксиоматизируемой.

Доказательство аналогично [1, 5]. Рассматриваются формулы характеристических формулы Янкова  $X(F)$  [4] шкал  $\Phi(k, m)$  и похожей на нее шкалы  $\Phi^i(k, m)$ .

Лемма 4. Пусть  $F$  — конечная шкала, а  $G$  — произвольная. Тогда

$$G \not\models X(F) \iff \exists u \in G : G'' \twoheadrightarrow F$$

Лемма 5. Если формула  $A$  содержит только  $k$  пропозициональных переменных и  $X(\Phi(k, m)) \in (H + A)$ , то  $X(\Phi^i(k, m)) \in (H + A)$  для некоторого  $i \leq k$ .

Поскольку  $X(\Phi(k, m)) \in LM_{O(X)}$  (по свойству характеристической формулы), но  $X(\Phi^i(k, m)) \notin LM([1])$ , то  $LM_{O(X)} \neq H + A$ , т. е. ее нельзя аксиоматизировать одной, а значит и конечным числом формул.

Другой результат, который можно получить с применением характеристических формул состоит в следующем:

Теорема 3. Пусть  $F$  — конечная шкала с корнем и у каждого не максимального элемента есть как минимум два непосредственных потомка. Тогда

$$X(F) \in LM_{O(X)} \iff X(F) \in LM$$

*Доказательство.* Пусть  $X(F) \notin LM_{O(X)}$ . Это равносильно тому, что  $\exists U \subseteq X : O(U) \twoheadrightarrow F$ . По этому  $p$ -морфизму можно построить соответствующее отображение  $\bar{h}$ . Найдем конечное множество  $E \subset U$  из Леммы 1 и соответствующее вполне устойчивое множество  $E'$ . По замечанию к Лемме 3  $\bar{h} : E' \rightarrow F$  является  $p$ -морфизмом, значит  $X(F)$  не лежит в  $L(P_1(E'))$ , а значит и в  $LM$ .

В другую сторону утверждение вытекает из того, что  $LM_{O(X)} \subseteq LM$ .

Отсюда следует, что на достаточно большом классе формул логики  $LM$ ,  $LM_{O(X)}$  и промежуточная логика  $LM_1$  совпадают.

- [1] МАКСИМОВА Л. Л., СКВОРЦОВ Д. П., ШЕХТМАН В. Б. Невозможность конечной аксиоматизации логики финитных задач Медведева. *Доклады Академии Наук СССР* — 1979. — **245** № 5. — 1051–1054.
- [2] МЕДВЕДЕВ Ю. Т. Финитные задачи. *Доклады Академии Наук СССР* — 1962. — **143** № 5. — 1015–1018
- [3] СКВОРЦОВ Д. П. Логика бесконечных задач и модели Крипке на атомных полурешетках множеств. *Советские Математические Доклады* — 1981. — **20** — 360–363
- [4] ЯНКОВ В. А. О связи между выводимостью в интуиционистском исчислении высказываний и конечными импликативными структурами. *Доклады Академии Наук СССР* — 1968. — **151** № 6. — 1293–1294.
- [5] SHEHTMAN V. A., SKVORTSOV D. P. Logics of Some Kripke Frames Connected with Medvedev Notion of Informational Types. *Studia Logica* — 1986. — **45** — 101–118.



Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева

Для исследования зависимостей при некоторых дополнительных предположениях относительно корней или коэффициентов рассматриваются многочлены 3-й степени, полученные результаты обобщаются на многочлены 4-й, 5-й степеней. Затем формулируются соответствующие теоремы для многочленов произвольной степени.

Рассмотрим многочлен  $n$ -й степени  $f(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_nx + \lambda$ .

$$\lambda = \frac{b^{n-2}c}{a_1^{n-2}} + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \frac{a_1^k a_{k+3} b^{n-(k+1)}}{a_1^{n-2}},$$

В полученной зависимости свободный член выражается через  $n-1$  корень и все коэффициенты перед неизвестными.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = \frac{n_{k-1}}{n_k} = -\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2 + \dots + x_{k-1}x_k = \frac{n_{k-2}}{n_k} = \frac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3 + \dots + x_{k-2}x_{k-1}x_k = \frac{n_{k-3}}{n_k} = -\frac{a_3}{a_0}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1x_2\dots x_k = \frac{1}{n_k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}, \end{cases}$$
$$a_1 = -\frac{n_{k-1}}{n_k}a_0, a_2 = \frac{n_{k-2}}{n_k}a_0, \dots a_k = (-1)^k \frac{1}{n_k}a_0.$$

При рассмотрении полиномов четных степеней были выявлены следующие зависимости.

Теорема 3. Если  $x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ , где  $n$  — четное и  $x_1 + x_2 = \dots = x_{n-1} + x_n = 0$ , то  $p_1 = p_3 = \dots = p_{n-1} = 0$ .

Теорема 4. Если корни уравнения  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$  связаны соотношением  $x_1x_2 = x_3x_4$ , то существует зависимость  $p^2s = r$ .

Теорема 5. Если корни уравнения  $x^{2n} + p_1x^{2n-1} + \dots + p_{2n-1}x + p_{2n} = 0$  связаны соотношением  $x_1x_2 = x_3x_4 = \dots = x_{2n-1}x_{2n}$ , то существует зависимость  $(\sqrt[n]{p_{2n}})^2 p_1 = p_{2n-1}$ .

Теорема 6. Если  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — корни многочлена  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ , то многочлен, имеющий корни:

- 1)  $\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_4, \dots, (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}, (-1)^n\alpha_n$ , имеет вид  $f(x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 - a_{n-1}x + a_n$ ;
- 2)  $\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3, -\alpha_4, \dots, (-1)^n\alpha_{n-1}, (-1)^{n+1}\alpha_n$ , имеет вид  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ;
- 3)  $\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2}, \dots, \frac{\alpha_n}{2}$ , имеет вид  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}/2 + \dots + a_n/2^n$ ;
- 4)  $\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ , имеет вид  $f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ .

Теорема 7. Корни многочлена  $f(x) = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$  образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда  $a_3^5 = a_5a_2^5$ .

Теорема 8. Корни многочлена  $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$  образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда  $a_3^2 = a_4a_1^2$ .

Теорема 9. Корни многочлена  $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда  $a_1^3a_3 = a_2^3$ .

Теорема 10. Существуют такие многочлены  $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $n \geq 2$ , что их корни образуют арифметическую прогрессию.

В ходе доказательства этой теоремы были получены формулы нахождения корней полинома произвольной степени при условии, что они образуют арифметическую прогрессию:

$$x_k = -\frac{a_1}{n} + \frac{2k - n - 1}{2}d,$$

$$\text{где } d = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{3(n-1)a_1^2 - 6na_2}{n^2 - 1}}.$$

Мы рассмотрели многочлены произвольной степени над полем комплексных чисел. С помощью теоремы Виета исследовано влияние некоторых зависимостей между корнями на его коэффициенты и наоборот — влияние зависимостей между коэффициентами многочлена на корни. Отметим, что теорема Виета оказалась эффективным и универсальным инструментом исследования и доказательства полученных теорем.

## О булевых базисах с постоянной функцией вероятности\*

А. Д. Яшинский

МИРЭА (ТУ), Москва

**Введение.** В работе рассматриваются булевы выражения, составленные из символов функций некоторого булева базиса и констант 1 и 0. *Базисом* будем называть конечную систему булевых функций, возможно, с повторениями<sup>4</sup>. Базис  $B$  представляется в виде  $B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_r$ , где  $B_k$  есть множество функций от  $k$  переменных в базисе  $B$ . Число  $r$  будем называть *порядком* базиса. *Булево выражение* над базисом  $B$  определяется индуктивно: во-первых, 0 и 1 являются булевыми выражениями; во-вторых, если  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  — булевы выражения и  $f \in B_k$ , то  $f(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$  есть булево выражение над базисом  $B$ . *Сложностью* выражения  $\Phi$ , обозначаемой  $|\Phi|$ , называется число символов функций в выражении  $\Phi$ .

Зададим распределение вероятности на множестве выражений фиксированной сложности  $n$  над базисом  $B$  следующим образом. Каждое выражение естественным образом получается из неповторной булевой формулы подстановкой констант 0 и 1 вместо переменных. Считаем, что формула выбирается случайно равновероятно среди всех неповторных формул сложности  $n$  над базисом  $B$  (неповторные формулы рассматриваем с точностью до переименования переменных). Число таких формул обозначим через  $s_n$ . Подстановка констант 0 и 1 вместо каждой из переменных осуществляется случайно и независимо: 1 подставляется с вероятностью  $p$ , а 0 — с вероятностью  $1 - p$ .

Для выражения  $\Phi$  обозначим через  $\pi(\Phi)$  произведение вероятностей констант, входящих в  $\Phi$ . Положим *вероятность выражения*  $\Phi$  сложности  $n$  равной  $P(\Phi) = \frac{1}{s_n} \pi(\Phi)$ .

Рассмотрим булевы выражения со значением 1. Пусть  $P_{1,n}(p) = \sum_{\Phi=1, |\Phi|=n} P(\Phi)$ ,

т.е.  $P_{1,n}(p)$  равна вероятности того, что выражение сложности  $n$  имеет значение 1. Значением *функции вероятности* базиса  $B$  в точке  $p$  будем называть предел  $P_1(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,n}(p)$ , если он существует. В противном случае будем говорить, что значение функции вероятности  $P_1(p)$  не определено.

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00994), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-5400.2006.1) и Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.

<sup>4</sup>То есть мультимножество булевых функций.

При изучении свойств случайных булевых выражений возникает задача нахождения функции вероятности по заданному базису  $B$ . Решение этой задачи для произвольного базиса при любом заданном  $p$ ,  $0 < p < 1$ , дается теоремой 1. Кроме этой прямой задачи возможны различные постановки обратной задачи. В частности, задача о «черном ящике», рассмотренная для случая бинарных базисов в [2], заключается в определении величины  $p = p_0$  по заданному значению функции вероятности  $q_0$ ,  $q_0 = P_1(p_0)$ . Особый интерес представляют базисы с постоянной функцией вероятности, поскольку для таких базисов задача о «черном ящике» неразрешима.

Функция вероятности произвольного базиса  $B$  выражается через два многочлена: базисный  $B(S) = \sum_{k=0}^r |B_k| S^k$  и характеристический  $A(T, F) = \sum_{k=0}^r \sum_{i=0}^k a_{ki} T^i F^{k-i}$ , где  $a_{ki}$  — число единиц среди значений функций из  $B_k$  на наборах с ровно  $i$  единицами.

Теорема 1 [2]. Пусть  $B$  — некоторый базис с базисным многочленом  $B(S)$  и характеристическим многочленом  $A(T, F)$ . Тогда для любого фиксированного  $p$ ,  $0 < p < 1$ , значение  $P_1(p)$  определено и имеет место равенство:

$$P_1(p) = \frac{A'_F(\tau, \sigma - \tau)}{\omega^{-1} - A'_T(\tau, \sigma - \tau) + A'_F(\tau, \sigma - \tau)},$$

где  $\omega$  и  $\sigma$  — положительные действительные числа, образующие решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \sigma = 1 + \omega B(\sigma), \\ 1 = \omega B'(\sigma), \end{cases} \quad (1)$$

с минимальным значением  $|\omega|$  (среди всех решений системы (1)),  $A'_T$  и  $A'_F$  — частные производные многочлена  $A(T, F)$ , а  $\tau = \tau(p)$  — однозначно определенная монотонно возрастающая алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению  $\tau(p) = p + \omega A(\tau(p), \sigma - \tau(p))$  и условиям  $0 \leq \tau(p) \leq \sigma$ .

#### 1. Общие свойства базисов с постоянной функцией вероятности.

Из теоремы 1 следует, что функция  $P_1(p)$  является композицией некоторой дробно-рациональной функции  $\hat{P}(\tau)$  и монотонно возрастающей алгебраической функции  $\tau(p)$ . Постоянство функции  $P_1(p)$ , таким образом, равносильно постоянству функции  $\hat{P}(\tau)$ . Из теоремы 1 следует, что равенство  $\hat{P}(\tau) = C$ , где  $C$  — некоторая постоянная, равносильно равенству:

$$(1 - C)A'_F(\tau, \sigma - \tau) - C(\omega^{-1} - A'_T(\tau, \sigma - \tau)) = 0. \quad (2)$$

Введем многочлены  $\psi_{k,i}(\tau) = \tau^i(\sigma - \tau)^{k-i}$ . Система  $\{\psi_{r-1,j}\}_{j=0}^{r-1}$  является базисом в пространстве многочленов степени не выше  $r-1$ . Для произвольного многочлена  $M = M(\tau)$  степени не выше  $r-1$  будем обозначать через  $[\psi_{r-1,j}]M$  коэффициент при  $\psi_{r-1,j}$  в разложении  $M$  по системе многочленов  $\{\psi_{r-1,j}\}_{j=0}^{r-1}$ .

Легко проверяется выполнение при  $k, j = 0, \dots, r-1$ ,  $i = 0, \dots, k$  равенств  $[\psi_{r-1,j}]\psi_{k,i} = \binom{r-k-1}{j-i} \sigma^{k-r+1}$ . В частности, при  $i = k = 0$  имеет место равенство  $[\psi_{r-1,j}]1 = \binom{r-1}{j} \sigma^{1-r}$ .

Выполнение равенства (2) для всех значений  $\tau \in (0, \sigma)$ , рассмотренное как обращение в ноль многочлена от переменной  $\tau$  на интервале  $(0, \sigma)$ , влечет тождественное равенство нулю этого многочлена. В частности, при его разложении по базису из многочленов  $\psi_{r-1,j}$  все коэффициенты должны быть нулевыми:

$$(1 - C)[\psi_{r-1,j}]A'_F - C\omega^{-1}[\psi_{r-1,j}]1 + C[\psi_{r-1,j}]A'_T = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (3)$$

После умножения на  $\sigma^r$ , подстановки  $\omega^{-1} = \sum_{k=0}^r k|B_k|\sigma^{k-1}$  и разложения многочленов  $A_T(\tau, \sigma - \tau)$  и  $A_F(\tau, \sigma - \tau)$  по многочленам  $\psi_{r-1,j}$  равенства (3) приводятся к виду:

$$\sum_{k=0}^r \sigma^k \left( \sum_{i=0}^k ((1-C)(k-i)a_{ki} + C(i+1)a_{k,i+1}) \binom{r-k}{j-i} - Ck|B_k| \binom{r-1}{j} \right) = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (4)$$

Введем обозначения  $d_{ki} = \frac{a_{ki}}{|B_k|\binom{k}{i}}$  для доли единиц среди значений функций из  $B_k$  на наборах веса  $i$ . С использованием свертки Вандермонда [1] для преобразования коэффициента  $\binom{r-1}{j}$  и обозначений  $d_{ki}$  равенства (4) приводятся к виду:

$$\sum_{k=0}^r \sum_{i=0}^k \sigma^k k|B_k| \binom{k-1}{i} \binom{r-k}{j-i} ((1-C)d_{ki} + Cd_{k,i+1} - C) = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (5)$$

**2. Однородные базисы с постоянной функцией вероятности.** Базис  $B$  будем называть *однородным*, если  $B = B_r$ . Для однородного базиса соотношения (5) принимают вид:

$$(1 - C)d_{rj} - C + Cd_{r,j+1} = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (6)$$

Рассмотрим отдельно случаи  $C = 0$  и  $C = 1$ . Из равенств (6) при подстановке  $C = 0$  следует, что  $d_{rj} = 0$  при  $j = 0, \dots, r-1$ , т.е. базис  $B$  состоит только из функций, являющихся либо тождественным нулем, либо конъюнкцией переменных. Аналогично,  $C = 1$  влечет  $d_{rj} = 1$  при  $j = 1, \dots, r$ , что соответствует базису  $B$ , состоящему только из функций, являющихся либо тождественной единицей, либо дизъюнкцией переменных.

Пусть далее  $0 < C < 1$ . Тогда соотношения (6) эквивалентны равенствам  $\frac{1-C}{C} = \frac{1-d_{rj+1}}{d_{rj}}$  при всех  $j = 0, \dots, r-1$ , из которых следует, что функция вероятности однородного базиса тождественно равна постоянной  $C$ ,  $0 < C < 1$ , тогда и только тогда, когда  $d_{rj}$  при всех  $j = 0, \dots, r-1$  удовлетворяют равенствам:

$$d_{rj+1} - C = \frac{C-1}{C}(d_{rj} - C). \quad (7)$$

Из соотношений (7) при  $j = 0, 1$  вытекает

**Теорема 2.** Пусть  $B$  — однородный базис, такой что  $P_1(p) = C$  при всех  $p \in (0, 1)$ . Тогда число  $C$  рационально.

С помощью соотношений (7) также легко проверяется следующая теорема:

**Теорема 3.** Пусть  $B^{(1)}$  и  $B^{(2)}$  — два однородных базиса порядка  $r$ , такие что для каждого из них выполняется равенство  $P_1(p) = C$  при всех  $p \in (0, 1)$ . Тогда для базиса<sup>5</sup>  $B = B^{(1)} \cup B^{(2)}$  также выполнено равенство  $P_1(p) = C$  при всех  $p \in (0, 1)$ .

### 3. Неоднородные базисы с постоянной функцией вероятности.

Обращение в ноль выражений  $(1-C)d_{ki} + Cd_{ki+1} - C$  при всех  $k$  и  $i$  гарантирует выполнение равенств (5). При этом, выполнение равенств  $(1-C)d_{ki} + Cd_{ki+1} - C = 0$  при всех  $k$  и  $i$  эквивалентно тому, что каждое из множеств  $B_k$  является базисом, функция вероятности которого постоянна и равна  $C$  (в силу равенств (6)). С учетом теоремы 3 получаем

**Теорема 4.** Любое конечное объединение однородных базисов с постоянными функциями вероятности, равными некоторой величине  $C$ , одной и той же для всех базисов, есть базис с постоянной функцией вероятности, равной  $C$ .

Итак, представление базиса  $B$  в виде объединения однородных базисов с постоянной функцией вероятности, равной  $C$ , является достаточным условием постоянства функции вероятности базиса  $B$ .

По теореме 2 постоянная функция вероятности однородного базиса может быть только рациональным числом. Вообще говоря, среди неоднородных базисов существуют базисы с иррациональной постоянной функ-

<sup>5</sup>Базисы объединяются как мультимножества.

цией вероятности<sup>6</sup>. Однако, в классе базисов с постоянной рациональной функцией вероятности при указанных ниже дополнительных предположениях условия постоянства, приведенные в теореме 4, являются не только достаточными, но и необходимыми.

Рассмотрим базис вида  $B = B_q \cup B_{q+1} \cup \dots \cup B_r$ , где  $q > 0$ ,  $B_q \neq \emptyset$  и  $B_r \neq \emptyset$ . Базисный многочлен  $B(S)$  этого базиса делится на  $S^q$ . Из системы уравнений (1) получаем, что для базиса  $B$  число  $\sigma$  является ненулевым решением уравнения  $\sigma B'(\sigma) = B'(\sigma) + B(\sigma)$ . Следовательно, алгебраическая степень числа  $\sigma$  не превышает  $r - q + 1$ . Заметим, что для рассматриваемого базиса  $B$  каждое из равенств (5) является многочленом от  $\sigma$  степени не выше  $r - q$ . Если алгебраическая степень числа  $\sigma$  в точности равна  $r - q + 1$ , то равенства (5) выполняются тогда и только тогда, когда коэффициенты при всех степенях  $\sigma$  равны нулю. Отсюда непосредственно вытекает

**Теорема 5.** Пусть базис  $B$  имеет вид  $B_q \cup B_{q+1} \cup \dots \cup B_{r-1} \cup B_r$ , где  $q > 0$ ,  $B_q \neq \emptyset$  и  $B_r \neq \emptyset$ . Пусть число  $\sigma$ , соответствующее базису  $B$ , является алгебраическим числом степени  $r - q + 1$ . Пусть функция вероятности базиса  $B$  постоянна и равна некоторому рациональному числу  $C$ . Тогда каждое из множеств  $B_k$  для  $k = q, \dots, r$  является базисом с постоянной функцией вероятности, равной  $C$ .

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, О.М. Касим-Заде, за постановку задачи и полезные советы на протяжении всего исследования.

- [1] ГРЭХЕМ Р., КНУТ Д., ПАТАШНИК О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.
- [2] YASHUNSKY A. D. On the properties of asymptotic probability for random Boolean expression values in binary bases// Proc. of the third International Symposium "Stochastic Algorithms: Foundations and Applications" (SAGA 2005), Moscow, October 20–22, 2005. Lecture Notes on Computer Science. **3777**. Berlin: Springer, 2005. — 202–212.

---

<sup>6</sup>Например, функция вероятности базиса  $\{\&, \downarrow, \oplus, \neg\}$  равна  $\frac{6-\sqrt{3}}{12}$ .

---

Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. — 400 стр.

*Компьютерная верстка:  
К. В. Просветов*

*Оригинал-макет подготовлен  
при помощи программы MiKTeX  
и шрифтов пакета PSCyr*

Подписано в печать 10.06.2006

Формат 60 × 90 1/16

Объем 25 п. л.

Заказ №

Тираж 50 экз.

---

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ,  
г. Москва, Воробьевы горы.

---

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001 г.

---

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ.