# ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ УСТАНОВЛЕНИЯ ДЛЯ ЖЕСТКИХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

**И. В. Бондарь**

В приложениях достаточно часто встречаются жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) большой размерности. Для решения таких систем целесообразно применять неявные методы. Но, как известно, реализация неявных методов требует существенных вычислительных затрат. В [1] описан способ реализации неявных методов типа Рунге-Кутты, не требующий хранения матриц и их обращения – так называемые итерационные процессы установления или обобщенные итерации Пикара. Данная работа посвящена развитию указанного подхода.

Рассмотрим неоднородную линейную систему ОДУ

$$y'(t) = Jy(t) + f(t),\ y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

где $y_0 \in R^N$, $y : R \to R^N$, $J \in R^N \times R^N$. Будем считать, что все собственные значения $\lambda_i$ матрицы $J$ находятся в левой комплексной полуплоскости и система является жесткой, то есть $\rho(J) >> 1$. Здесь и далее $\rho(\cdot)$ обозначает спектральный радиус матрицы.

Для приближенного вычисления решения в точке $t_0 + \tau$, $\tau > 0$, воспользуемся произвольным $s$-стадийным неявным методом типа Рунге-Кутты (базовым методом), представленным коэфициентами $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{s}$, $\{b_i\}_{i=1}^{s}$, $\{c_i\}_{i=1}^{s}$. В результате применения получим $y(t_0 + \tau) \approx y_1 = y_0 + \tau \sum\limits_{i=1}^{s} b_i k_i$, где $k_i$ удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$k = (\tau A \otimes J)k + g. \tag{2}$$

Здесь $k = (k_1, k_2, .., k_s)^T$, $k_i \in R^N$, $g = (g_1, g_2, .., g_s)^T$, $g_i = f(t_0 + c_i\tau) + Jy_0$, $i = 1, .., s$, $\otimes$ – кронекеровское произведение матриц.

Для решения (2) воспользуемся принципом установления [1]: рассмотрим систему дифференциальных уравнений (уравнение установления):

$$k'(\theta) = (\tau A \otimes J - I)k(\theta) + g, \tag{3}$$

стационарное решение которой совпадает с точным решением системы (2) и является при этом асимптотически устойчивым. Учитывая это, можно надеяться отыскать приближение к решению (2) интегрируя уравнение установления некоторым явным методом типа Рунге-Кутты (вспомогательным методом). Получаемый в результате итерационный процесс установления выглядит следующим образом:

$$k^{l+1} = \Phi(k^l),$$

$$\Phi(k) = k + \omega \sum_{p=1}^{\sigma} \beta_p K_p(k), \tag{4}$$

$$K_p(k) = G(k + \omega \sum_{q=1}^{p-1} \alpha_{pq} K_q(k)) + g,$$

$$G = \tau A \otimes J - I. \tag{5}$$

Здесь $\omega$, $\sigma$, $\{\beta_i\}_{i=1}^{\sigma}$, $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{\sigma}$ – коэффициенты, подлежащие определению. Отметим, что процесс (4) можно представить в виде

$$k^{l+1} = R_\sigma(\omega G) k^l + P(\omega, G), \tag{6}$$

где $R_\sigma$ – многочлен устойчивости вспомогательного метода. Сходимость итерационного процесса (4), очевидно, определяется условием $\rho(R_\sigma(\omega G)) < 1$, то есть собственные значения матрицы $\omega G$ должны находиться в области устойчивости вспомогательного метода. Эти собственные значения равны $\omega \nu_{ij}$, где $\nu_{ij}$ – собственные значения матрицы $G$, которые согласно свойствам кронекеровского произведения [2] равны

$$\nu_{ij} = \tau \mu_j \lambda_i - 1, \; j = \overline{1,s}, \; i = \overline{1,N}. \tag{7}$$

Здесь $\mu_j$ – собственные значения матрицы $A$, которые для всех используемых нами методов обладают положительными действительными частями.

В силу вышеизложенного, в [1] предлагается следующая схема построения вспомогательных методов: сначала строится многочлен устойчивости исходя из условий $\iint_\Omega |R_\sigma(z)|^2 dz \to \min$, где $\Omega$ – некоторый сектор единичной окружности на комплексной плоскости. Затем по многочлену устойчивости восстанавливаем вспомогательный метод [3, 4]. Параметр $\omega$ выбираем таким образом, чтобы уместить спектр матрицы $G$ в области $\Omega$, то есть $\omega = 1/\rho(G)$.

Нетрудно заметить, что в результате преобразования (7) возможен «выход» спектра матрицы $G$ за пределы левой комплексной полуплоскости, что в силу конструкции вспомогательного метода негативно сказывается на сходимости. Чтобы этого избежать, можно обе части системы (2) умножить на матрицу $A^{-1} \otimes I$ (здесь $I \in R^N \times R^N$):

$$(A^{-1} \otimes I)k = (\tau I \otimes J)k + (A^{-1} \otimes I)g .$$

Соответствующее уравнение установления примет вид

$$k'(\theta) = (\tau I \otimes J - A^{-1} \otimes I)k(\theta) + (A^{-1} \otimes I)g .$$

Собственные значения матрицы $\widetilde{G} = \tau I \otimes J - A^{-1} \otimes I$ находятся по правилу $\widetilde{\nu}_{ij} = \tau\lambda_i - \mu_j^{-1}$, [2, с. 112], то есть исключен выход за пределы левой комплексной полуплоскости. Операция умножения на $A^{-1} \otimes I$ в литературе носит название «переобусловливание». Таким образом, полученные с помощью этой операции итерационные процессы установления сходятся при любой величине шага $\tau$ на всех линейных задачах со спектром из левой комплексной полуплоскости.

В силу конструкции предлагаемых итерационных процессов основным параметром, влияющим на скорость сходимости, является величина

$$\delta = \min_{i,j} | \tau\lambda_i - \mu_j^{-1} | / \max_{i,j} | \tau\lambda_i - \mu_j^{-1} |,$$

равная модулю наименьшего собственного значения матрицы $\omega \widetilde{G}$. Чем ближе $\delta$ к 0, тем медленнее сходимость. Отсюда следует важное свойство: скорость сходимости процесса при $\tau >> 1$ зависит, вообще говоря, не от $\rho(J)$, а от «спектрального числа обусловленности» $|\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$.

Приведем краткие результаты численного эксперимента. В качестве тестовой мы взяли систему (1) со спектром, равномерно распределенным в полукольце левой комплексной полуплоскости с внешним радиусом $\rho_1 = 300$ и внутренним радиусом $\rho_2 = 1$ и $N$=660 (рис.1). Учитывая это, использовать процесс установления для решения задачи без применения переобусловливателя не представляется возможным. В качестве базового использовался 3-х стадийный метод Радо IIA 5-го порядка, $\tau = 10$. В таблице приведено сравнение скорости решения системы (2) при помощи итерационных процессов установления и известных методов GMRES и BICGSTAB взятых из библиотеки deal.II [5].

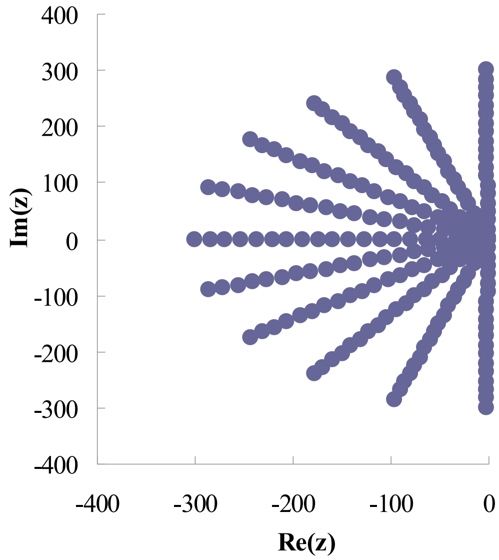


*Рис. 1.* Спектр тестовой матрицы *J*

*Таблица 1*

**Сравнение времени работы метода на основе процесса установления с GMRES и BICGSTAB**

| | ПУ | GMRES | BICGSTAB |
|---|---|---|---|
| Время работы, секунд | 23 | 34 | 402 |

Отметим, что описанные выше методы не требуют обращения матриц и применимы в нелинейном случае.

## Литература

1. *Faliechik B. V.* Explicit Implementation of Collocation Methods for Stiff Systems with Complex Spectrum // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics. Vol. 5
2. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
3. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи./ Пер. с англ. М.: Мир, 1999.
4. *Фалейчик Б. В.* Реализация неявных методов для жестких задач с использованием обобщенных итераций Пикара // Тр. 6-й междунар. конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах. Т.1 Математический анализ. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. С. 131–135.
5. Интернет-адрес: http://www.dealii.org