БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра вычислительной математики

Ускорение сходимости процессов установления. Переобуславливание и подавление ошибки.

Касияник Алексей,
ФПМИ, 5 курс, 5 группа

Жесткая задача

- Если численный метод с ограниченной областью абсолютной устойчивости, примененный к системе с произвольными начальными условиями вынужден использовать на некотором интервале интегрирования величину шага, которая чрезмерно мала по отношению к гладкости точного решения на этом интервале, тогда говорят что система является жесткой на этом интервале.

Система линейных ДУ

$$y'(t) = Jy(t) + f(t)$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$t \in [t_0, t_0 + \tau],$$

$$y_0 \in \mathbb{R}^n, y: [t_0, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n,$$

$$J \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tau \in [0, +\infty).$$

Базовый метод

$$
\begin{array}{c|ccc}
c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & \cdots & b_s
\end{array}
$$

$$y(t_0+\tau) \approx y_1 = y_0 + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

$$k_i = J\left(y_0 + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right) + f(t_0 + c_i \tau).$$

Векторная форма

$$(\tau A \otimes J - I)k + g = 0,$$

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_s)^T, g_i = f(t_0 + c_i\tau) + Jy_0, i = 1, \dots, s,$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_s)^T,\ k_i \in \mathbb{R}^n.$$

Уравнение установления

$$k' = (\tau A \otimes J - I)k + g = Gk + g = r(k)$$

Вспомогательный метод

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha_{21} & & & & \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & & & \\
\dots & \dots & \dots & & \\
\alpha_{\sigma 1} & a_{\sigma 2} & \cdots & \alpha_{\sigma \sigma -1} & \\
\hline
\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{\sigma-1} & \beta_\sigma
\end{array}
$$

Процесс установления

$$k^{l+1} = \Phi(k^l),$$

$$\Phi(k) = k + \omega \sum_{p=1}^{\sigma} \beta_p K_p(k),$$

$$K_p(k) = G\left(k + \sum_{q=1}^{p-1} \alpha_{pq} K_q(k)\right) + g.$$

Скорость сходимости

$$k^{l+1} = R_\sigma(\omega G)k^l + P(\omega, G)$$

$$\varepsilon^l = k^* - k^l.$$

$$\varepsilon^l = R_\sigma(\omega G)\varepsilon^{l-1}$$

$$\varepsilon^l = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^{l-1} R(\omega G)\eta^i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^{l-1} R(\omega v_i)\eta^i,$$

$$\varepsilon_i^l = R_\sigma(\omega v_i)\varepsilon_i^{l-1} = \left(R(\omega v_i)\right)^l \varepsilon_i^0.$$

Подавление ошибки

$$r^k = Ax^k - b = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^k \xi_i$$
$$r^{k+1} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^k R(\omega\lambda_i)\xi_i$$

$$r^k = \alpha_m^k \xi_m + \varepsilon^k,$$
$$r^{k+1} = \alpha_m^k R(\omega\lambda_m)\xi_m + \varepsilon^{k+1},$$

$$r^k \approx \alpha_m^k \xi_m,$$
$$r^{k+1} \approx \alpha_m^k R(\omega\lambda_m)\xi_m$$

$$\frac{r_j^{k+1}}{r_j^k} \approx R(\omega\lambda_m), \qquad j = \overline{1, N}.$$

Подавление ошибки

Пусть $\tilde{x}$ – точное решение, т.е.

$$\tilde{x} = x^{k+1} + \delta^{k+1}.$$

В предположении, что ε^{k+1} мало, получаем

$$\delta^{k+1} \approx -\frac{1}{\lambda_m} r^{k+1}$$

$$R_\sigma(\omega\lambda_m) \approx 1 + R'_\sigma(0)\omega\lambda_m \approx \frac{r_j^{k+1}}{r_j^k}, \qquad j = \overline{1,N}$$

$$\lambda_m \approx \left(\frac{r_j^{k+1}}{r_j^k} - 1\right) \Big/ \left(\omega R'_\sigma(0)\right), \qquad j = \overline{1,N}$$

Подавление ошибки

$$\tilde{x} \approx x^{k+1} + \frac{1}{\lambda_m} r^{k+1}.$$

Переобуславливание

$$P^{-1}Ax = P^{-1}B$$

$$P^{-1}(Ax - B) = 0$$

$$P = A \Rightarrow P^{-1}A = AP^{-1} = I$$

Переобуславливание

$$F_{s-1}(t) = -\frac{2\alpha^{\frac{s}{2}}}{(1-\alpha)^2}\frac{1}{\gamma - t}\left[T_s(t) - 2\sqrt{\alpha}\,T_{s-1}(t) + \alpha T_{s-2}(t)\right] + \frac{1}{\gamma - t},$$

где

$$\alpha = \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)^2, \quad T_s(t) = \cos s \arccos t.$$

$$t \in (-1, 1)$$

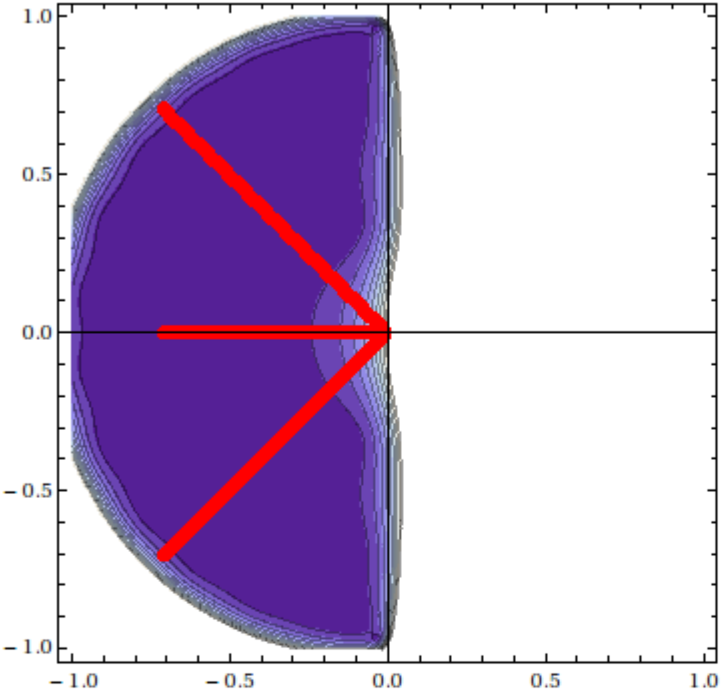
Переобуславливание

$$f(t) = \gamma F(\gamma t),$$

$$f_{s-1}(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{2\alpha^{\frac{s}{2}}}{(1-\alpha)^2} \frac{1}{1-t} \left[T_s(\gamma t) - 2\sqrt{\alpha}\, T_{s-1}(\gamma t) + \alpha T_{s-2}(\gamma t)\right].$$

$$t \in \left(-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right)$$

Переобуславливание



$$h(t) = -f_{s-1}(t-1)$$

$$t \in (-2, 0)$$

$$h(t) \sim \frac{1}{t}$$

Переобуславливание

$$k' = (\tau A \otimes J - I)k + g = Gk + g = r(k)$$

$$h(G)r(k) = h(G)(Gk + g) = 0$$

Переобуславливание

$$h(A) = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i A^i$$

$$h(A)r = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i A^i r = \alpha_0 Er + \alpha_1 Ar + \alpha_2 A^2 r + \cdots$$

Пусть s = 3

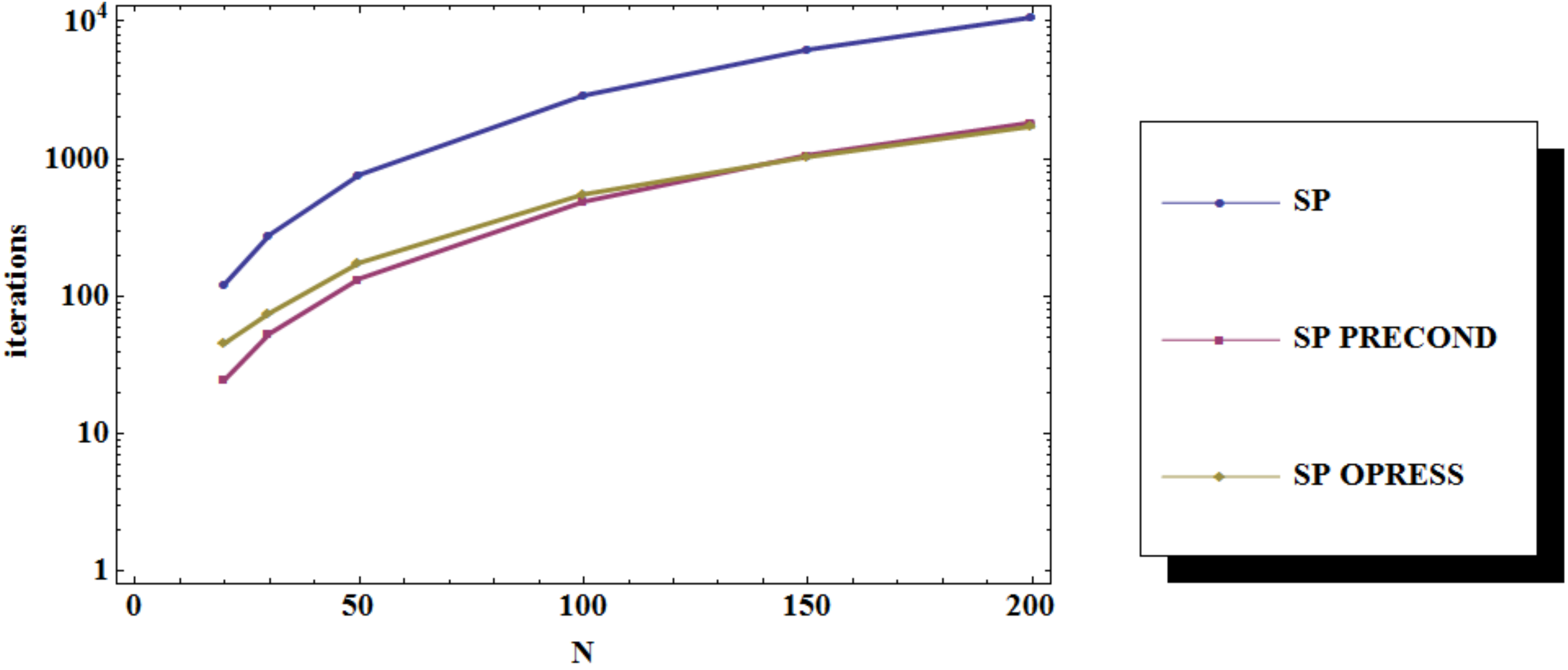
$$\begin{aligned} h(A)r &= \alpha_0 Er + \alpha_1 Ar + \alpha_2 A^2 r + \alpha_3 A^3 r \\ &= \alpha_0 Er + A(\alpha_1 r + A(\alpha_2 r + \alpha_3 Ar)) \end{aligned}$$

Численный эксперимент

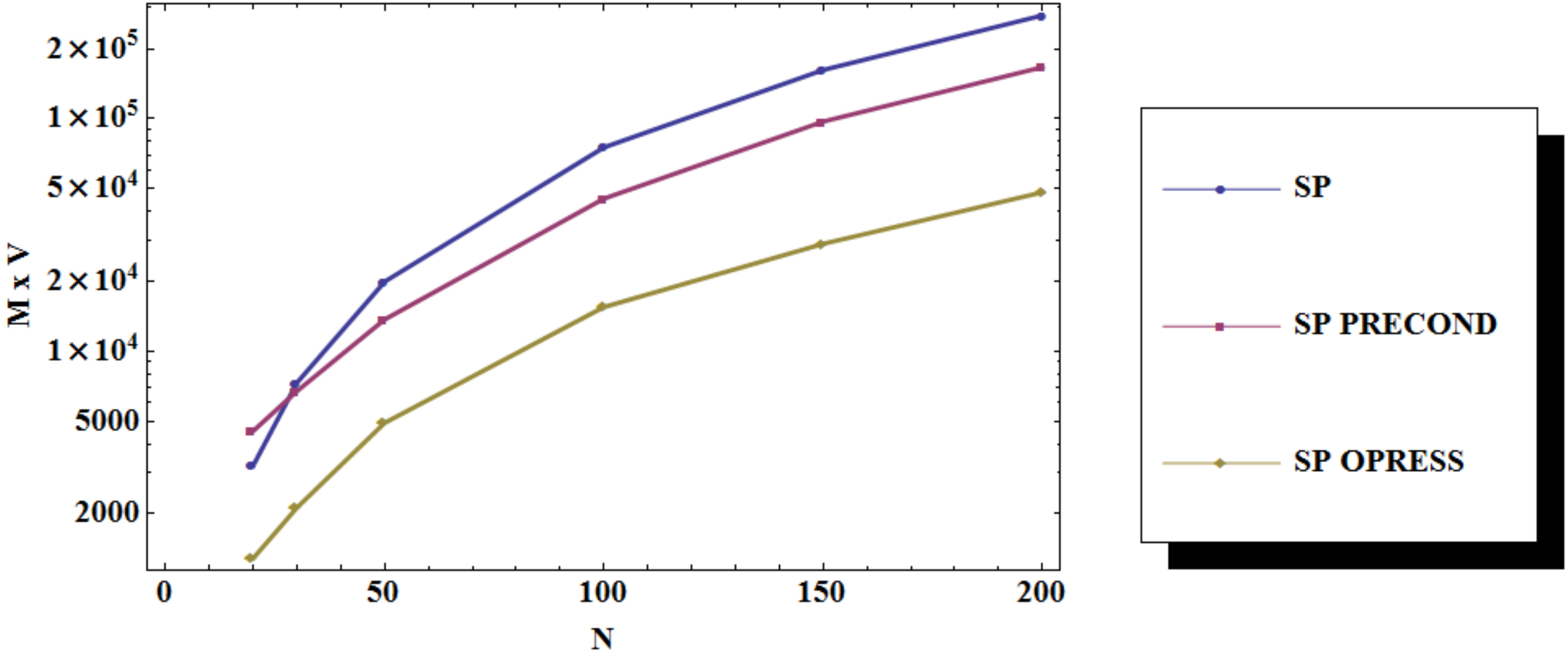
- В качестве тестовой задачи взяли двумерное уравнение теплопроводности, дискретизация которого привела к системе со следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} -2n^2 & n^2 & 0 & & & & \\ n^2 & -2n^2 & n^2 & \cdots & & 0 & \\ 0 & n^2 & -2n^2 & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & -2n^2 & n^2 & 0 \\ & 0 & & \cdots & n^2 & -2n^2 & n^2 \\ & & & & 0 & n^2 & -2n^2 \end{pmatrix}$$

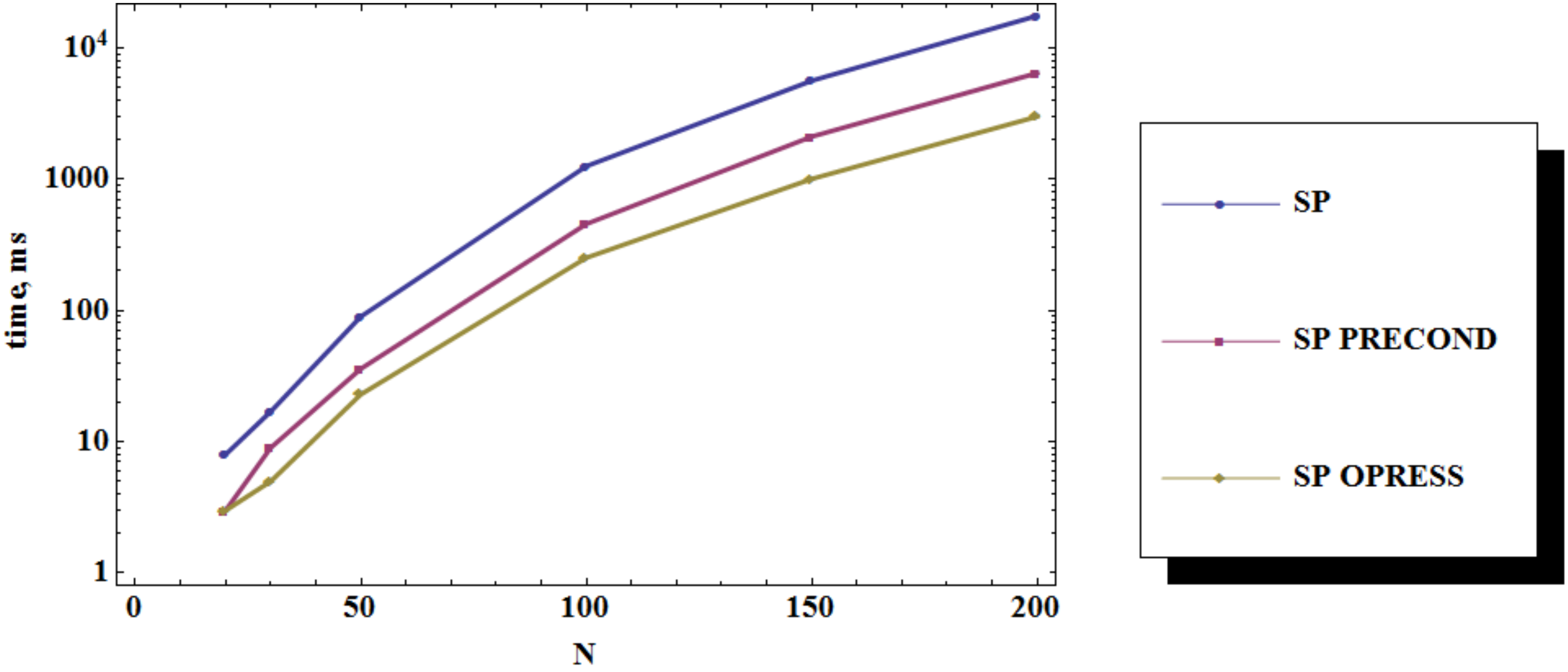
Количество итераций процесса установления



Количество перемножений матрицы на вектор



Время выполнения



Заключение

- Оба представленных способа, переобуславливание и подавление, показывают хорошее ускорение сходимости методов, основанных на процессах установления.

- Метод подавления компонент показывает несколько лучшие результаты по сравнению с применением переобуславливания.

Спасибо за внимание!