# Cvičení z předmětu Úvod do statistické analýzy

Josef Chudoba

Kapitoly v této cvičebnici jsou řazeny stejně jako na přednáškách. Součástí zadání příkladů je i jejich řešení, které je uvedeno v adresáři řešení. Soubory týkající se určitého příkladu jsou uvedeny pomocí písmenné (číselné) kombinace a platí následující pravidla:

* P – písmenný znak, aby soubor začínal písmenem,
* první dvojčíslí – číslo kapitoly (např. 04 značí příklad ze 4. kapitoly),
* druhé dvojčíslí – číslo příkladu v kapitole (např. 0403 značí 3. příklad ze 4. kapitoly),
* označení res/zad – zad značí vstupní data, res řešení příkladu

K příkladům jsem se snažil psát komentářové poznámky.

Obsah

[1 Kombinatorika 3](#_Toc62115686)

[2 Úvod do teorie pravděpodobnosti 7](#_Toc62115687)

[3 Náhodná veličina a náhodný vektor 13](#_Toc62115688)

[4 Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti 17](#_Toc62115689)

[5 Spojitá rozdělení pravděpodobnosti 21](#_Toc62115690)

[6 Výběrové charakteristiky 26](#_Toc62115691)

[7 Teorie odhadu 30](#_Toc62115692)

[8 Testy hypotéz 34](#_Toc62115693)

[9 Testy dobré shody 41](#_Toc62115694)

[10 Analýza závislostí 46](#_Toc62115695)

[11 Úvod do korelační a regresní analýzy 47](#_Toc62115696)

Hotovo:

Není hotovo:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

# Kombinatorika

## Faktoriál, kombinační čísla

Př. 1:

Jak a pro jaká čísla je definován faktoriál.

Př. 2:

Vypočtěte faktoriál čísla 20 pomocí a) pomocí for cyklu, b) pomocí příkazu počítající faktoriál (funkce factorial). Zkuste se zamyslet a spočítat faktoriál 1000000.

[2.4329e+18, 2.4329e+18, 8.2639e+5565708]

Př. 3:

Jak se vypočítají kombinační čísla a co musí pro ně platit. Jak se značí.

Př. 4:

a) Vypočtěte kombinační číslo pomocí faktoriálu a pomocí v matlabu implementované funkce (funkce nchoosek).

b) Zkuste obdobně spočítat kombinační číslo a . Zauvažujte, proč nelze vypočítat na počítači pomocí faktoriálu kombinační číslo a jak lze problém obejít.

[210, 1.374623414580280e+28, 4.965272386254229e+290]

## Pravděpodobnost

Př. 5:

Co je to pravděpodobnost a jak je definována (dle středoškolské matematiky, vysokoškolské definice se naučíte později v kap. 2)?

Př. 6:

Z telefonního čísla, které má devět cifer, jste poslední dvě cifry zapomněli. Víte pouze, že jsou různé. Zkoušíte je náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že vytočené číslo je správné?

[0.0111]

Př. 7:

Na pěti kartičkách jsou napsány číslice 1, 2, 3, 4, 5. Vyberete tři kartičky, které najednou otočíte. Vypočtěte pravděpodobnost, že číslo je sudé.

[0.4]

Př. 7a:

Jaká je pravděpodobnost, že z balíčku karet obsahující 32 karet vyberete buď spodka nebo filka. V balíčku jsou 4 spodci a 4 filci.

[0.25]

## Variace, permutace, kombinace

Př. 8:

Co to jsou variace a jaký je rozdíl mezi variacemi bez opakování a s opakováním. Zkuste odvodit vzorec na jejich výpočet.

Př. 9:

V mariášovém turnaji je 10 hráčů. Kolika způsoby mohou obsadit první čtyři místa v turnaji?

[5040]

Př. 10:

5x házíme šestistěnnou hrací kostkou a zaznamenáváme na papír výslednou číselnou hodnotu. Kolik existuje možností zapsaných čísel?

[7776]

Př. 11:

V osudí je 10 karet s ciframi 0 až 9. Vybereme 6 cifer a položíme je na stůl. Kolik různých čísel můžeme zaznamenat? První cifra může být 0.

[151200]

Př. 12:

Na papíru máte napsané následující cifry 1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,3. Kolik dvanáctimístných čísel z nich můžete vytvořit.

[27720]

Př. 13:

Uveďte vzorce pro výpočet kombinací bez opakování a s opakováním. Odvoďte správnost vzorce pro kombinace bez opakování.

Př. 14:

V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Od každé pohlednice mají dostatečný počet exemplářů. Kolika způsoby lze koupit a) 10 pohlednic, b) 5 pohlednic, c) 5 různých pohlednic

[8008, 462, 21]

Př. 15:

Osm přátel si poslalo vzájemně pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?

[56]

Př. 16:

Na florbalovém mistrovství je 12 mužstev. Kolik se odehraje zápasů, jestliže každý hraje s každým.

[66]

## Kombinatorické pravidlo součinu

Př. 17:

Třikrát hodíte hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že a) padnou tři šestky, b) padnou všechna stejná čísla, c) padnou dvě šestky a jedno číslo jiné.

[0.0046, 0.0278, 0.0694]

Př. 18:

Máme dva balíčky karet, v prvním jsou pouze červené (8 různých karet) a v druhém pouze žaludy (také 8 různých karet). Z prvního balíčku vyberete 5 karet, z druhého 4 karty. Kolik existuje kombinací výběru karet?

[3920]

Př. 19:

Jaká je pravděpodobnost, že v normálním balíčku mariášových karet, při výběru 4 karet budou samá esa?

1. Vybranou kartu vracíte do balíčku.
2. Vybranou kartu necháte venku.

[2.44e-4, 2.78e-5]

Př. 20:

Vyučující připravuje zadání písemné práce. Má k dispozici 10 příkladů, z nichž vybere 3. Studenti znají z loňského roku zadání 5 příkladů, které se mohu objevit v písemné práci.

1. Zjistěte pravděpodobnost, že učitel vybere z 10 příkladů všechny ty, jejichž zadání studenti znají.
2. Zjistěte pravděpodobnost, že studenti budou znát pouze 2 zadané příklady.

[0.0833; 0.4167]

Př. 21:

Učitel má připraveno 15 příkladů z pravděpodobnosti a 5 příkladů ze statistiky.

1. Náhodně zvolí 6 příkladů, kolik existuje možností výběru příkladů?
2. Jaká je pravděpodobnost, že z 6 vybraných příkladů budou právě 2 ze statistiky.

[38760; 0.3522]

Př. 22:

Dle zadání příkladu 21 dokažte, že součet pravděpodobností přes všechny možné stavy (vybrán 0, 1 … 5 příkladů ze statistiky) bude roven 1.

[a) 0.1291, 0.3874, 0.3522, 0.1174, 0.0135, 0.0004, součet =1]

Př. 23:

Hodí se n kostek. Určete pravděpodobnost, že na všech bude stejné číslo.

[ ]

## Sčítání pravděpodobností

Př. 23a:

V mariášovém balíčku je 32 karet (8 hodnot po 4 barvách). Vypočtěte pravděpodobnost, že vyberete spodka, nebo filka, nebo žaludovou barvu.

[14/32 = 0.4375]

Př. 24: Mezi 100 a 1000 (čísla na kraji interval započítejte) je 143 prvočísel. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybrané celé číslo mezi 100 a 1000 je:

1. Prvočíslo (funkce primes), nebo dělitelné dvěma, nebo dělitelné třemi
2. není prvočíslo
3. je dělitelné dvěma nebo pěti

[0.8257, 0.8413, 0.6004]

## Obecné příklady a opakování

Př. 25

Kolika způsoby je možno na šachovnici s 64 poli vložit 5 věží tak, aby se vzájemně neovlivňovaly, tj. žádná neležela ve stejném sloupci a řádku.

[376320]

Př. 26

Vytvořte Pascalův trojúhelník kombinačních čísel pro 8 prvků (funkce pascal). Zkuste z něj zjistit následující kombinační čísla , ,,. Určete základní početní pravidla pro aritmetické operace s kombinačními čísly.

(6, 15, 20, 15;

Př. 27

Ověřte, že součet kombinačních čísel , pro pět libovolných m je . (Ověření platnosti binomické věty.)

Př. 28

Máte funkci . Spočtěte koeficient u , a .

[376 740, 6 906 900, 30 421 755]

Př. 29

V atletickém oddíle je 15 chlapců a 10 dívek. Pro reprezentaci je nutné vybrat deset členů (5 chlapců a 5 dívek). Kolik možností výběru existuje?

[756756]

# Úvod do teorie pravděpodobnosti

## Jevy

Př. 1

Házíme hrací kostkou. Máte následující jevy: A= {2,4}, C= {2,5}

1. Jaké jsou elementární jevy při hodu kostkou? [{1},{2},{3},{4},{5},{6}]
2. Uveďte příklad složeného jevu. [{1,2}]
3. Jaký je doplněk k jevu A. [{1,3,5,6}]
4. Vytvořte jev B, který je disjunktní k jevu A. [například {3,5}]
5. Jaký je průnik jevu A a C. [{2}]
6. Jaké je sjednocení jevu A a C. [{2,4,5}]
7. Jaký je rozdíl jevů A a C. [{4,5}]

Př. 2

Jev A je množina čísel dělitelných dvěma beze zbytku. Jev B je množina čísel dělitelných třemi beze zbytku. Jev C je množina čísel dělitelných čtyřmi beze zbytku. Jev D je množina čísel dělitelných pěti beze zbytku. Určete:

1. [množina čísel, která po dělení 6 mají zbytek 0,2,3,4]
2. [množina čísel dělitelných 6 beze zbytku]
3. [množina čísel dělitelných 10 beze zbytku]
4. [lichá čísla]
5. [lichá čísla]
6. [množina celých čísel]
7. [C]

## Klasická pravděpodobnost

Př. 3:

Dřevěnou kostku o straně 5 cm natřeme na červeno a rozřežeme na krychle o hraně 1 cm. Určete pravděpodobnost, že vylosujete krychličku, která

1. Nebude obarvena. [0.216]
2. Bude obarvena na jedné stěně. [0.432]
3. Bude obarvena na dvou stěnách. [0.288]
4. Bude obarvena na třech stěnách. [0.064]

Př. 4:

Máme 10 druhů minerálek. 6 je perlivých, zbývající neperlivé. Určete pravděpodobnost, že z náhodně vybraných 3 minerálek budou

1. Všechny perlivé. [0.167]
2. Jedna perlivá, ostatní neperlivé. [0.300]
3. Jaké jsou elementární jevy pokusu? [0 perlivých, 1 perlivá, 2 perlivé, 3 perlivé]
4. Dokažte výpočtem, že součet pravděpodobností přes všechny elementární jevy je roven 1.

[0 perlivých 0.033; 1 perlivá 0.300; 2 perlivé 0.500; 3 perlivé 0.167]

Př. 5

Ve hře šťastných deset je v osudí 80 míčků, z nichž se losuje 20. Sázející vybere 10 čísel. Určete pravděpodobnost, že uhádne právě 0 až 10 čísel.

[0.045790700789028 0.179571375643246 0.295256781105723 0.267402367793862 0.147318897071618 0.051427687705001 0.011479394577009 0.001611143098528 0.000135419355264 0.000006120648825 0.000000112211895]

Př. 6

20 studentů má být rozděleno na 4 stejně početné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že A a B budou ve stejné skupině?

[4/19]

Př. 7

Jaká je pravděpodobnost, že z náhodně poskládaných písmen A,A,B,C,D,E,E sestrojíte slovo ABECEDA?

[7.94 E-4]

Př. 8

Jaká je pravděpodobnost, že mezi 3 mariášovými kartami náhodně vytažených z balíčku bude právě 1 eso?

[0.3048]

Př. 9:

Máme deset vstupenek – pět po 100 Kč, tři po 150 Kč a dvě po 200 Kč. Vybereme náhodně tři vstupenky. Určete pravděpodobnost, že alespoň dvě vstupenky budou mít stejnou hodnotu.

[0.6583]

Př. 10

Postupně vyndávám koule z urny, kde jsou 3 bílé, 5 černých a 4 červené koule. Jaká je pravděpodobnost, že červenou vytáhnu dříve než bílou? Koule nevracíme.

[0.5851]

## Geometrická pravděpodobnost

Př. 11

Ve čtverci o délce hrany 3 cm je kružnice o poloměru 1 cm. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod ze čtverce je zároveň uvnitř kružnice.

[0.3491)

Př. 12

Dva lidé si dají schůzku mezi 12 a 13. hodinou. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají, přichází-li nezávisle a čekají jeden na druhého přesně 15 minut.

[7/16]

Př. 13

Jaká je pravděpodobnost, že náhodná čísla v intervalu <0,1> budou od sebe vzdáleny na ose méně než 0.1. Jak se změní výsledek úlohy, pokud vzdálenost dvou čísel bude (k<1)?

[0.19; 1-(1-k)2]

## Vlastnosti pravděpodobnosti, nezávislost jevů, Bayesova věta

Př. 14

Pomocí znalosti pravděpodobností jednotlivých jevů a jejich průniků vyjádřete obecně . Ověřte výsledek pomocí Vennova diagramu.

[]

Př. 15

Mějme , a . Určete a zakreslete pomocí Vennova diagramu:

[0.7; 0.2; 0.3;0.9]

Př. 16

Dvakrát hodíme mincí. Jsou výsledky jednotlivých hodů nezávislé?

[ano jsou]

Př. 17:

Z balíčku 32 mariášových karet náhodně vytáhneme jednu kartu. Jev A spočívá ve vytažení žaludové karty, jev B ve vytažení esa. Určete, zda jevy jsou nezávislé a pokud ano určete pravděpodobnost nastolení obou jevů současně.

[ano jsou]

Př. 18

Máte zadání z příkladu 15, určete, zda jevy jsou vzájemně nezávislé. Zjistěte podmíněnou pravděpodobnost toho, že nastane jev A za podmínky, že nastal jev B.

[nejsou, 0.2]

Př. 19

V populaci je 20 % lidí se srdeční chorobou; 40 % populace jsou kuřáci. 12 % populace jsou kuřáci se srdeční chorobou. Jaká je pravděpodobnost, že kuřák má zároveň srdeční chorobu; obdobně jaká je pravděpodobnost, že nekuřák má zároveň srdeční chorobu.

[30%; 13,3 %]

Př. 20

Na závodech na 110 m překážek zvítězí běžec A s pravděpodobností 0.3; běžec B s pravděpodobností 0.2. Při závodu běžec A spadl na překážce. Jaká je pravděpodobnost, že běžec B závod vyhraje.

[0.2857]

Př. 21

Výrobek je s pravděpodobností 0.8 zařazen do 1. jakostní skupiny, s pravděpodobností 0.1 do druhé, s pravděpodobností 0.1 bude do třetí. Pravděpodobnost, že výrobek bude v provozuschopném stavu po stanovenou dobu je pro jednotlivé jakostní skupiny 0.8; 0.6 a 0.3. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně získaný výrobek bude v provozuschopném stavu po stanovenou dobu.

[0.73]

Př. 22

Automat A vyrobí za směnu třikrát víc výrobků než automat B. Přičemž automat A má zmetkovitost 0.01 a automat B 0.002. Výrobky se vhazují do stejné krabice. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek není zmetek.

[0.992]

Př. 23

Neprůhledný pytlík obsahuje 8 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Jevy jsou definovány následovně:

* B1 – při první realizaci byla vytažena bílá kulička
* B2 – při druhé realizaci byla vytažena bílá kulička
* C1 – při první realizaci byla vytažena černá kulička
* C2 – při druhé realizaci byla vytažena černá kulička

Co znamenají jevy: , , , a jaké jsou jejich pravděpodobnosti.

[ – při druhé realizaci náhodného pokusu byla vytažena bílá kulička, za předpokladu že při první realizaci byla vytažena také bílá kulička. Dále obdobně;

, , , ]

Př. 24 Pravděpodobnost, že selže aktivní hasicí systém při požáru je 5 %. Pravděpodobnost, že selže signalizace na centrální pult je 8 %. Pravděpodobnost, že selžou oba systémy najednou je 3 %.

1. Jaká je pravděpodobnost, že selže hasicí systém, ale nikoliv signalizace.
2. Zapůsobí oba dva systémy.

[0.02, 0.90]

Př. 25

160 studentů absolvovalo zkoušky ze statistiky a aplikované matematiky. 20 z nich nesložilo obě zkoušky, dalších 10 nesložilo pouze ze statistiky a dalších 60 nesložilo zkoušku z aplikované matematiky. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student:

a) složil zkoušku z aplikované matematiky, víme-li, že nesložil zkoušku ze statistiky,

b) složil zkoušku ze statistiky, víme-li, že nesložil zkoušku z aplikované matematiky,

c) složil zkoušku z aplikované matematiky, víme-li, že složil zkoušku ze statistiky.

Uveďte výsledky i se zápisem podmíněných pravděpodobností.

[; ; ]

Př. 26

V běhu na 100 metrů běží 8 závodníků. Šance závodníka A na vítězství je 50 %, u závodníka B 30 % a u závodníka C 15 %. Závodník B ulil start a odstoupil ze závodu. Jaká je nyní pravděpodobnost na vítězství závodníka C.

[21.4 %]

Př. 27

V první urně je 6 bílých a 3 černé koule. V druhé urně je 5 bílých a 1 černá koule. Náhodně zvolíme urnu a vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá.

[0.75]

Př. 28

Jeden ze 3 střelců s pravděpodobnostmi zásahu 0.3, 0.5 a 0.8 vystřelil a zasáhl. Jaká je pravděpodobnost, že střílel druhý střelec.

[0.3125]

Př. 29

Výrobní linka produkuje pouze 60 % kvalitních výrobků. Proto se každý testuje. V případě, že je výrobek nekvalitní bude s pravděpodobností 90 % odhalen a odstraněn. Naopak kontrola nepropustí 3 % kvalitních výrobků.

1. jaká je pravděpodobnost, že nekvalitní výrobek projde kontrolou,
2. jaké je procento neporouchaných výrobků v odstraněných výrobcích.

[6.43 %, 4.76 %]

Př. 30

Na vojenský cíl bylo čtyřikrát vystřeleno. Pravděpodobnost zásahu je 0.1. Jaká je pravděpodobnost, že cíl bude vyřazen, jestliže:

1. při 3 nebo 4 zásazích je pravděpodobnost zničení 0.9,
2. při 2 zásazích 0.4,
3. při 1 zásahu 0.1.

[0.05193]

# Náhodná veličina a náhodný vektor

## Základní pojmy

Př. 1: Uveďte pět příkladů na diskrétní a spojitou náhodnou veličinu. Uveďte příklady jevů.

Př. 2: Uveďte příklad diskrétní náhodné veličiny, která může mít konečný a nekonečný počet jevů.

## Distribuční funkce

Př. 3: Uveďte vlastnosti distribuční funkce, a jakým způsobem byste ověřovali její vlastnosti.

Př. 4: Máte funkci . Zjistěte, zda se jedná o distribuční funkci a vykreslete graf funkce (funkce plot).

Př. 5: Máte vygenerovaný soubor 10000 naměřených hodnot, který je uložen v P0305.mat. Vytvořte z nich distribuční funkci. Pro třídění dat použijte příkaz sort.

Př. 6: Máte výsledky 10000 hodů šestistěnnou kostkou. Data jsou uložena v P0306.mat. Vytvořte distribuční funkci z výsledků.

## Diskrétní náhodná veličina

Př. 7: Nakreslete do grafu pravděpodobnostní funkci, která je dána předpisem .

Př. 8: Obdrželi jste pravděpodobnostní funkci, která je dána v tabulce. Vytvořte graf pravděpodobnostní funkce.

Př. 9: V souboru P0309.mat je 10000 naměřených dat. Vytvořte graf, kde budou vyobrazeny 4 histogramy. První bude obsahovat 10, druhý 100, třetí 500 a čtvrtý 5000 sloupců. Jaký byste z nich označily jako nejlepší?

## Spojitá náhodná veličina

Př. 10: Máte distribuční funkci ve tvaru , kde a,b>0. Vypočtěte hustotu distribuční funkce. Užijte knihovnu symbolic.

[a\*b\*exp(-(a\*x)^b)\*(a\*x)^(b - 1)]

Př. 11: Hustota pravděpodobnosti má tvar . Zjistěte distribuční funkci.

[1-exp(-lambda\*t)]

## Funkce náhodné veličiny

Př.12: V souboru P0312.mat máte vygenerováno 1000 dvojic dat (vektor x a y), která byla z rovnoměrného rozdělení v intervalu <0,1>. Nakreslete 4 grafy:

* v prvním bude distribuční funkce náhodné veličiny z vektoru x,
* v druhém bude distribuční funkce náhodné veličiny (x+y),
* ve třetím bude distribuční funkce náhodné veličiny (x\*y),
* ve čtvrtém bude distribuční funkce náhodné veličiny (x/y). Vodorovnou osu zlogaritmujte.

Uvědomte si, jaký vliv mají transformace náhodné proměnné na výsledky.

## Číselné charakteristiky náhodné veličiny

Př. 13: Máte naměřená data týkající se počtu poruch za rok určenou pravděpodobnostní tabulkou v souboru P0313.xlsx. Vypočtěte z dat střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, šikmost a špičatost.

[3.9900; 4.7099; 2.1702; 0.8464; 3.2138]

Př. 14: Máte distribuční funkci ve tvaru . Uvažujte, že parametr a=0.1 a 0.2 ( t>0). Vypočtěte hustotu pravděpodobnosti, intenzitu náhodného jevu (), střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, šikmost a špičatost. Zkuste na základě výsledků odvodit vzorce pro výše uvedené veličiny. (Bylo by možné řešit problematiku obecně, ale zde vzniká problém s limitami v nekonečnu.)

[střední hodnota je 1/a; rozptyl 1/a2; směrodatná odchylka 1/a; šikmost=2, špičatost = 9]

Př. 15: Máte hustotu pravděpodobnosti ve tvaru , pro a<x<b. Vypočtěte střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, šikmost a špičatost.

[]

Př. 16: Máte naměřená data, která jsou uložena v souboru P0316.mat. Zjistěte 5%, 50% a 95% kvantil těchto hodnot. Užijte funkci quantile. Vykreslete distribuční funkci z naměřených dat.

[11.0036; 24.0640; 37.2066]

Př. 17: Máte naměřená data, která jsou uložena v souboru P0317.mat. Zjistěte 5%, 50% a 95% kvantil těchto hodnot. Určete modus. Jak se odlišuje modus od mediánu. Zkuste zauvažovat, co by značilo, jestliže modus bude „hodně“ odlišný od mediánu. Nakreslete si histogram.

Př. 18: Náhodná veličina má hustotu , pro . Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina bude mít výsledek v intervalech:

[střední hodnota=3/2; rozptyl = 3/20; a) 0.1250; b) 0.4063; c) 0.7031]

Př. 19: Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti f(x):

V intervalu <-2,2>. Hustota pravděpodobnosti je nulová jinde. Úkolem je

1. Nalézt konstantu c tak, aby f(x) byla korektně zadána. Uvažte, že při integraci přičítáte i posun.
2. Nakreslit do jednoho grafu hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci
3. Určete pravděpodobnost P(X<0.3); P(0<X<1) a P(X>1)

[1/2 - (x\*(x^2 - 12))/32; P(X<0.3)=0.6117; P(0<X<1)=0.3438; P(X>1)=0.1563 ]

## Statistické charakteristiky kvalitativních proměnných

Př. 20: Vypočtěte pravděpodobnost, že uhádnete právě n čísel ve hře šťastných desek (viz příklad P0205). Výsledky zobrazte graficky.

Př. 21: Předmět na univerzitě si zapsalo 80 studentů, z nichž 4 vykonaly zkoušku na první termín, 16 na druhý, 25 na třetí a 10 studentů zkoušku nesplnilo ani na třetí termín (sloupec 4). Zbytek studentů neobdržel zápočet (sloupec 5). Zjistěte relativní četnosti a vytvořte sloupcový graf výsledků. Vytvořte distribuční funkci pomocí funkce cdfplot a histogram (funkce hist).

Př. 22: Byly provedeny 2 průzkumy. Prvního se zúčastnilo 5 respondentů a výsledky byly 40 % ano a 60 % ne. Druhého výzkumu na stejné otázky se zúčastnilo 50 respondentů. Výsledky byly 24 % ano, 62 % ne a zbytek nevím. Jaký test má dle vašeho názoru vyšší váhu.

[druhý test]

Př. 23: Máte k dispozici záznamy o poruchách na jednotlivých zařízeních v rámci jednoho podniku (soubor P0323.xlsx). Data obsahují datum poruchy a typ zařízení, kde byla porucha nalezena. Vytvořte histogram pro poruchovost jednotlivých komponent.

## Statistické charakteristiky numerických proměnných

Př. 24: Proč se výběrové statistiky rozptylu a dalších odlišují od způsobu výpočtu rozptylu počítaných pomocí integrálu.

Př. 25: Od kolika hodnot lze provést výpočet výběrové střední hodnoty, výběrového rozptylu, výběrové směrodatné odchylky, výběrové šikmosti a výběrové špičatosti. Uvědomte si kolikáté centrální (obecné) momenty využíváte pro výpočet.

[1, 2, 2, 3, 4]

Př. 26: Máte naměřená diskrétní data uložená v souboru P0326.xlsx. Zjistěte z nich aritmetický průměr, medián a modus.

[12.44, 11, 0]

Př. 27: Místní odborová organizace zveřejnila hrubé mzdy ve firmě, která jsou uložená v souboru P0327.xlsx. Zjistěte z nich aritmetický a geometrický průměr. Zjistěte medián, vytvořte histogram a distribuční funkci z naměřených dat. Proč není účelné zjišťovat modus.

[aritmetický 22 815 Kč, geometrický 21 374 Kč, medián 21 579 Kč]

Př. 28: Máte data uložená v souboru 0328.mat. Zjistěte z nich aritmetický průměr a výběrový rozptyl. Dále určete 5% a 95% kvantil a dolní a horní kvartil. Jistě nepohrdnete i znalostí mediánu, modusu a shorthu. Vytvořte empirickou distribuční funkci.

Př. 29: Byly zjištěny výsledky ze 100 teplotních čidel (údaje jsou v K). V jakých jednotkách bude střední hodnota, medián, rozptyl, směrodatná odchylka, šikmost a špičatost.

[rozptyl K2, šikmost 1, špičatost 1, vše ostatní K]

Př. 30: Mějte výsledky měření z 5 aparatur, které jsou uloženy v souboru P0330.xlsx. Vypočtěte pro každý typ aparatury střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Př. 31: Máte naměřená data uložená v souboru S0112.mat. Určete, která data splňují pravidla pro odlehlá pozorování. Pro stanovení využijte vnitřní hradby, z-souřadnici a x0,5 souřadnici. Zkuste vysvětlit, proč zjištěná odlehlá data nejsou pomocí všech tří testů shodná.

# Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti

## Alternativní rozdělení

Př. 1: Vypočtěte z pravděpodobnostní funkce () střední hodnotu, směrodatnou odchylku, rozptyl, šikmost a špičatost.

## Binomické rozdělení

Binocdf Distribuční funkce binomického rozdělení

Binopdf Pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení

Binoinv inverzní funkce k distribuční funkci binomického rozdělení

Binostat střední hodnota a rozptyl binomického rozdělení

Binofit odhad parametrů binomického rozdělení

Binornd náhodná čísla z binomického rozdělení

Př. 2: Jakým způsobem se odlišuje binomické rozdělení od alternativního.

Př. 3: Napište si vzorec pro pravděpodobnostní funkci Binomického rozdělení a uvědomte si význam jednotlivých členů.

Př. 4: Střední hodnota alternativního rozdělení je E(X)=p a rozptyl D(X)=p(1-p). Na základě n-krát opakovaného alternativního pokusu určete střední hodnotu a rozptyl.

[;]

Př. 5: Pětkrát hodíme mincí. Určete pravděpodobnost, že orel padne právě dvakrát. Určete pravděpodobnost, že padne alespoň 4.

[0.3125, 0.1875]

Př. 6: Pravděpodobnost narození děvčete je 0.49. Určete pravděpodobnost, že ve třídě mající 25 dětí bude (neuvažujte jednopohlavní třídy):

1. Právě 10 dívek,
2. Alespoň 10 a více dívek,
3. Více než 15 dívek,
4. Kolik dívek bude ve třídě nejpravděpodobněji.

Nakreslete graf, kde bude vynesena pravděpodobnost počtu dívek ve třídě.

[0.1071; 0.8646; 0.0964; 12]

Př. 7: Pravděpodobnost narození chlapce je 0.51. Určete minimální počet dětí, aby pravděpodobnost, že mezi nimi bude alespoň jeden chlapec, bude větší než 0.99.

[7 dětí]

Př. 8: Víme, že mezi výrobky je 10 % vadných. Určete pravděpodobnost, že u 20 výrobků bude více než 5 ks vadných.

[1.13 %]

## Hypergeometrické rozdělení

Hygecdf Distribuční funkce hypergeometrického rozdělení

Hygepdf Pravděpodobnostní funkce hypergeometrického rozdělení

hygeinv Inverzní funkce k distribuční funkci hypergeometrického rozdělení

Př. 9: Jak se odlišuje hypergeometrické rozdělení od binomického. Jak byste rozdíl těchto rozdělení simulovali u pokusu, kde máte v krabici m černých a n bílých koulí.

Př. 10: Vypočtěte pravděpodobnost, že z 32 karetního balíčku budou při vylosování 3 karet právě 2 esa. Jak se změní pravděpodobnost, jestliže karty do balíčku vracíme a pokud je nevracíme.

[0.0339, 0.0410]

Př. 11: V loterii je v osudí 200 čísel, z nichž se losuje 30. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li náhodně 10 čísel, bude z nich právě 5 vylosovaných. Řešte

1. Pomocí Hypergeometrického rozdělení,
2. Pomocí Binomického rozdělení,
3. Kolik čísel uhádneme nejpravděpodobněji.

[0.0071, 0.0085, 1]

Př. 12: Vypočtěte pravděpodobnost, že při výběru 10 karet z 32 karetního balíčku bude právě 8 vyšších karet (spodek, filek, král nebo eso). Karty do balíčku nevracíte.

1. Řešte pomocí hypergeometrického rozdělení,
2. Řešte pomocí binomického rozdělení,
3. Odůvodněte rozdíl mezi výše uvedenými výsledky.

## Geometrické rozdělení

Př. 13: Házíte kostkou. Určete pravděpodobnost, že právě u pátého hodu Vám padne poprvé šestka.

[0.0804]

Př. 14: Dva hráči střídavě házejí kostkou. Vyhrává ten, kdo první hodí šestku. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje ten, který začínal.

Př. 15: Distributor prodává knihu. 10 % knihkupců ji zakoupí. Jaká je pravděpodobnost, že distributor předtím než bude úspěšný, bude muset uskutečnit:

1. Právě 5 návštěv knihkupectví,
2. Méně než 5 návštěv,
3. 8 a více návštěv.

[0.0656, 0.3439, 0.4783]

## Poissonovo rozdělení

Př. 16: Na 100 metrech látky se nachází 10 kazů. Jestliže vybereme 10 metrový úsek látky, jaká je pravděpodobnost, že zde není žádný kaz.

[0.3679]

Př. 17: Při sledování poruchovosti provozu se zjistilo, že za 1 rok zde bylo zaznamenáno 5 poruch. Určete pravděpodobnost, že v následujících 2 letech bude zaznamenáno:

1. Méně než 8 poruch,
2. Právě 10 poruch,
3. Více než 15 poruch.

[0.2202, 0.1251, 0.0487]

Př. 18: Průměrný telefonní hovor trvá 1,5 min. Dochází-li průměrně k 600 hovorům za hodinu, jaká je pravděpodobnost, že se bude současně konat více než 30 hovorů. 4.26

Př. 19: Průměrný telefonní hovor trvá 1,5 min. Kolik linek musí ústředna mít, dochází-li průměrně ke 240 hovorům za hodinu a pravděpodobnost ztráty volání nesmí překročit 0,01. 4.28

Př. 20: Tisíckrát se hodilo mincí. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 480x až 520x padne orel. Proveďte výpočet pomocí:

1. Binomického rozdělení,
2. Poissonova rozdělení,
3. Proč nejsou splněny předpoklady převedení binomického rozdělení na poissonovo?

[0.7939, 0.6286]

Př. 21: Ve sportce se táhne 6 čísel ze 49. Sázíme 6 čísel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme uhodli právě 4 čísla.

1. Řešte pomocí hypergeometrického rozdělení.
2. Řešte pomocí aproximace binomickým rozdělením.
3. Řešte pomocí aproximace Poissonovým rozdělením.

Př. 22: Korektura tisíce stran textu prokázala 1500 chyb. Určete pravděpodobnost, že na náhodně vybrané stránce se nachází 4 chyby. Odhadněte, kolik stran v tisícistránkové knize bude bez chyby.

[0.0471, 223]

## Aproximace binomického rozdělení Poissonovým

Př. 23: Bankovní úředník zjistil, že u 20 % návrhů na půjčku zákazníci zamlčí důležité informace. Určete pravděpodobnost, že mezi 10 návrhy budou 3 s zamlčenými informacemi.

1. Řešte pomocí binomického rozdělení
2. Řešte pomocí Poissonova rozdělení

Př. 24: Řešte obdobný příklad 23 se změněnými parametry. Bankovní úředník zjistil, že u 50 % návrhů na půjčku zákazníci zamlčí důležité informace. Určete pravděpodobnost, že mezi 10 návrhy bude 5 s zamlčenými informacemi.

1. Řešte pomocí binomického rozdělení
2. Řešte pomocí Poissonova rozdělení
3. Jaké předpoklady aproximace nejsou splněny.

# Spojitá rozdělení pravděpodobnosti

## Vlastnosti rozdělení

Př. 1: Máte rozdělení ve tvaru . Zjistěte, zda se jedná o statistické rozdělení. Pokud ano, určete median, střední hodnotu a rozptyl. Nakreslete graf rozdělení.

Př. 2: Náhodná veličina X má distribuční funkci na intervalu , nulovou pro x<0 a jednotkovou pro x>2. Najděte hustotu funkce, modus, medián a střední hodnotu. Určete pravděpodobnost .

[x/2, není, 1.4142, 1, 0.5]

Př. 3: Náhodná veličina má hustotu (Laplaceovo rozdělení). Určete pro něj hodnotu parametru a, střední hodnotu a rozptyl.

5.5

Př. 4: Najděte distribuční funkci vzdálenosti náhodně zvoleného bodu v kruhu o poloměru R od jeho středu.

5.8

Př. 5: Náhodná veličina má hustotu (Cauchyovo rozdělení). Nakreslete graf a odhadněte medián a střední hodnotu. Vypočtěte střední hodnotu pomocí integrálu z funkce – nezalekněte se řešení.

## Rovnoměrné rozdělení

Př. 6: Funkce náhodné číslo generuje data z rovnoměrného rozdělení s parametry a=0, b=1. Transformujte tato data tak, aby a=10 a b=15. Tj. byla rovnoměrně rozdělena mezi <10,15>.

Př. 7: Ověřte výpočtem správnost střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky rovnoměrného rozdělení. Zjistěte dále šikmost a špičatost.

[

Př. 8: Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení. Jaké jsou parametry a a b, jestliže jste zjistily z dat, že střední hodnota výběru je 1 a rozptyl je 3.

[řeší se soustava rovnic:

Př. 9: Uveďte příklady, kde data jsou z rovnoměrného rozdělení.

## Exponenciální rozdělení

Př. 10: Uveďte příklady, kde data jsou z exponenciálního rozdělení.

Př. 11: Zkuste vysvětlit, co představuje intenzita náhodného jevu (u tohoto rozdělení intenzita poruch), popřípadě intenzita poruch násobená časovým intervalem.

Př. 12: Doba do poruchy zařízení lze popsat exponenciálním rozdělením. Data o poruchách máte uvedeny v souboru P0512.mat. Vypočtěte parametry exponenciálního rozdělení a střední dobu do poruchy (střední hodnota rozdělení).

[; 302h]

Př. 13: Doba do poruchy zařízení je popsána exponenciálním rozdělením, kde střední doba do poruchy E(T)=500 h. Vypočtěte čas, při kterém bude 50% výrobků v poruše. Vygenerujte 10, 100 a 1000 dat z exponenciálního rozdělení se střední hodnotou 500 h a vypočtěte z dat střední hodnotu a rozptyl.

Př. 14: Vypočtěte z hustoty pravděpodobnosti střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, šikmost a špičatost.

[

Př. 15: Doba opravy má exponenciální rozdělení. Určete střední dobu opravy, jestliže do 60 minut je opraveno 30 % výrobků.

5.15

Př. 16: Doba do poruchy zařízení má exponenciální rozdělení s parametrem . Jaká je pravděpodobnost, že mezi dvěma po sobě jdoucími poruchami uběhne alespoň hodin.

[0.0498]

Př. 17: Výrobek má střední dobu do poruchy 3 roky. Jaká je pravděpodobnost, že se porouchá v záruce, tj. v prvních dvou letech provozu.

## Weibullovo rozdělení

Př. 18: Uveďte příklady, kde data jsou popsána Weibullovým rozdělením

Př. 19: Nakreslete graf, kde parametr a parametr bude po řadě 0.8; 1, 1.5, 2, 2.5 a 3.

Př 20: Poruchovost degradujícího zařízení je popsána Weibullovým rozdělením s parametry roky a parametr . Určete střední dobu do poruchy (střední hodnota) zařízení. A určete pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v době záruky, tj. do dvou let.

Př. 21: Zjistěte z dat o poruchovosti výrobku, které jsou uloženy v souboru P0621.mat, parametry Weibullova rozdělení.

## Normální rozdělení

Př. 22: Nakreslete graf, kde budou vyneseny hustoty pravděpodobnosti z normálního rozdělení s následujícími parametry:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;

Uvědomte si, jakým způsobem se odlišují jednotlivé příklady od základního uvedeného v bodu a.

Př. 23: Jak se odlišuje normované normální rozdělení od obecného normálního rozdělení. Uveďte transformační vztah, abyste obdrželi normované normální rozdělení.

[]

Př. 24: Máte normální rozdělení s parametry . Vypočtěte následující hodnoty:

1. 20% kvantil
2. 50% kvantil
3. Ze znalosti výsledku z bodu a) zpaměti 80% kvantil
4. Zpaměti ze znalosti výsledku z bodu d)

[3.317, 5, 6.683, 0.2266, 0.9332, 0.7734]

Př. 25: Délka výrobku v mm má . Určete pravděpodobnost, že rozměr výrobku bude mezi 49 a 51 mm.

[0.8469]

Př. 26: Výsledky měření jsou zatíženy jen normálně rozdělenou náhodnou chybou se směrodatnou odchylkou 3 mm.

1. Jaká je pravděpodobnost, že při měření bude chyba v interval (-2 mm, 5 mm).
2. Máte 3 výrobky, jaká je pravděpodobnost, že alespoň u jednoho výrobku bude chyba mimo tento interval.

[0.6997, 0.6574]

Př. 27: Výsledky radarového měření jsou zatíženy normálně rozdělenou náhodnou chybou s nulovou střední hodnotou, kde s pravděpodobností 0.95 nepřesahuje . Určete směrodatnou odchylku měření.

[10.2043 m]

Př. 28: Jaká je výhoda normovaného normálního rozdělení od obecného normálního rozdělení a jak přetransformujete vstupní data.

Př. 29: Vygenerujte 100 dat z následujících rozdělení a vytvořte z nich krabicový graf. Následně ověřte pro data z bodu d), že data pochází z Weibullova nebo normálního rozdělení podle příslušného papíru.

1. Exponenciální rozdělení se střední hodnotou 100 hodin
2. Weibullovo rozdělení s parametrem ,
3. Weibullovo rozdělení s parametrem ,
4. Normální rozdělení s parametry

Výsledky porovnejte z pohledu rozptylu a šikmosti.

Př. 30: X je náhodná veličina s rozdělením . Jak velké musí být číslo x, aby náhodná veličina nabyla hodnoty z intervalu (3, x) s pravděpodobností 25 %.

[7.7668]

Př. 31: Pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude vyšší hodnoty než 59.6 je 0.2119. Pravděpodobnost, že nabude hodnoty menší než 57.2 je 0.7258. Náhodná veličina je z normálního rozdělení. Vypočtěte hodnoty parametrů.

Př. 32: Nalezněte 1, 5, 10, 50, 90, 95 a 99% kvantil normálního rozdělení s parametry . Určete pravděpodobnost, že náhodná veličina bude záporná.

Př. 33: Máte naměřená data v souboru P0533.mat. Odstraňte data, která jsou odlehlá a následně zjistěte parametry normálního rozdělení.

[11.148, 40.155]

Př. 34: Jaká je pravděpodobnost, že po 200 hodinách provozu budou fungovat alespoň 3 výrobky z 5, jestliže jejich životnost v hodinách má .

[3.1 %]

Př. 35: Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou , kde x<0. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl. Zkuste zauvažovat, zda lze rozdělení přetransformovat na jiné.

[, jedná se o exponenciální rozdělení, které je zrcadleno na zápornou osu.

## Logaritmicko – normální rozdělení

Př. 36: Nechť X je náhodná veličina s logaritmicko-normálním rozdělením s parametry . Vypočtěte pravděpodobnost, že data jsou v interval <2,4>

[0.0874]

Př. 37: Vygenerujte 100 dat z logaritmicko-normálního rozdělení s parametry . Vytvořte z nich krabicový graf, dale pomocí Weibullova a normálního papíru ověřte, zda byste mohli použít dané rozdělení.

## Přesnost statistických charakteristik kvantitativních proměnných

Př. 38: Pro data uložená v souboru P0538.mat vytvořte krabicový graf. Co představují jednotlivé čáry v grafu.

Př. 39: Bylo testováno, zda se rozměry výrobků mění v závislosti na intervalu mezi seřízením stroje. Intervaly mezi seřízením stroje byl 1, 2, 3 a 4 dny. Zkuste analyzovat data pomocí krabicového grafu a odhadněte z charakteru výsledků, zda dochází k posuvu přesnosti rozměrů (změna středních hodnot) a k rozptylu přesnosti dat. Data jsou uložena v souboru P0539.mat.

[střední hodnota se zvyšuje, stejně tak se opticky zvyšuje rozptyl, stroj je nutno dříve setřídit, protože rozptyl se opticky zvyšuje.]

# Výběrové charakteristiky

## Výběrové charakteristiky

Př. 1:

1. Vygenerujte 10000 náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení <0,1> a vyneste je do grafu 1.
2. Dále vygenerujte 10000 dvojic náhodných čísel, které sečtete a vydělíte dvěma. Opět vyneste do grafu 2.
3. Obdobně vygenerujte 10000 pětic náhodných čísel, které sečtete a vydělíte pěti. Opět vyneste do grafu 3.
4. Obdobně vygenerujte 10000 desetic náhodných čísel, které sečtete a vydělíte pěti. Opět vyneste do grafu 4.
5. Vysvětlete, proč data se „shlukují“ v blízkosti střední hodnoty.

Př. 2: Vygenerujte 10000 desetic náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení <0,1>. Prvky v deseticích sečtěte a vyneste do histogramu. Zároveň do stejného grafu vyneste hustotu pravděpodobnosti normálního rozdělení s parametry N(, kterou vynásobíte 10000. Vysvětlete, proč se obě funkce tvarově relativně dobře překrývají.

Př. 3: Vygenerujte 10000 čísel z normálního rozdělení s parametry N( a vyneste je do grafu ve formě histogramu. Do druhého obdobného grafu vyneste vygenerovaných 10000 čísel z normálního rozdělení s parametry N(

Odhadněte, jaké parametry bude mít rozdělení, jestliže hodnoty sečtete. Nasimulujte a ověřte podle oka správnost Vašeho řešení.

[N(

Př. 4: Náhodná veličina A má E(X)=5 a D(X)=4, náhodná veličina B má E(X)=3 a D(X)=6, náhodná veličina C má E(X)=2 a D(X)=8. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl výsledné náhodné veličiny X, která je dána vzorcem X=A+B+C a Y=A+B-C.

[E(X)=10, D(X)=18; E(X)=6, D(X)=18]

Př. 5: Dokažte následující tvrzení. Vynásobením naměřených dat se střední hodnotou E(X) a rozptylem D(X) konstantou c, kde c>0, bude střední hodnota naměřených dat rovna cE(X) a rozptyl c2D(X). Zkuste ověřit na datech.

Př. 6: Náhodná veličina A má E(X)=5 a D(X)=4, náhodná veličina B má E(X)=0 a D(X)=16. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl výsledné náhodné veličiny X, která je dána vzorcem X=A+3\*B.

[E(X)=5, D(X)=148]

## Centrální limitní věta

Jsou-li , pro N velká, ze stejného rozdělení s konečným průměrema rozptylem, potom

)

)

Platí, že )

Př. 7: Máte vygenerováno 1000 náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení <0,1>. Určete pravděpodobnost, že průměr všech vygenerovaných čísel bude vyšší než 0.520.

[0.0142]

Př. 8: Životnost komponenty má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 5 let. Určete pravděpodobnost, že 100 náhodně vybraných komponent bude mít v průměru životnost nižší než 4 roky.

[0.0228]

Př. 9: Zatížení letadla s 64 místy nemá překročit 6000 kg. Jaká je pravděpodobnost, že při plném obsazení bude tato hodnota překročena, má-li hmotnost cestujícího střední hodnotu 90 kg a směrodatnou odchylku 10 kg.

[0.0013]

Př. 10: Počet chyb na jedné straně textu má střední hodnotu 3 a rozptyl 4. Jaká je pravděpodobnost, že na 400 stranách bude méně než 1000 chyb.

[2.8665e-07]

Př. 11: Stokrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet hodů bude mezi 320 a 380.

[0.9259]

Př. 12: 600 krát hodíme kostkou. Pomocí binomického rozdělení, Poissonova rozdělení a centrální limitní věty určete, jaká je pravděpodobnost, že šestka padne 105 a vícekrát.

[0.3078; 0.3216; 0.3264]

Př. 13: V osudí je 16 bílých a 14 černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že při 150 tazích jedné koule (s vracením) vytáhneme bílou právě 77x.

1. Řešte pomocí binomického rozdělení.
2. Řešte pomocí Poissonova rozdělení.
3. Řešte pomocí centrální limitní věty.

[0.0577, 0.0429, 0.0421]

## Rozdíl výběrových průměrů

Př. 14: Průměrný plat v České republice je 27 000 Kč se směrodatnou odchylkou 8000 Kč. Průměrné náklady na bydlení jsou 7000 Kč se směrodatnou odchylkou 2000 Kč. Vypočtěte pravděpodobnost, že člověku zůstane alespoň 25000 Kč, jestliže z platu odečteme náklady na bydlení.

[0.2721]

Př. 15: V roce 2015 a 2016 probíhal průzkum ohledně měsíčních výdajů za pivo. Zjistěte pravděpodobnost, že v roce 2016 dávají lidé minimálně o 200 Kč za pivo více než v roce 2015.

x2015=[587,124,651,1212,1074,523,273,800,485,961,1683,2411]

x2016=[121,524,2612,847,1310,1521,951,1000,521,12,190,263,321,587,953]

[0.3665]

Př. 16: Odvoďte vzorec pro rozdíl výběrových průměrů:

Př. 17: Zeptali jsme se 1000 respondentů na oblibu místního cholerického politika. Obdrželi jsme kladný výsledek od 168 respondentů. Místní cholerický politik však říká, že jeho obliba je 55 procent. Určete pravděpodobnost, že jeho tvrzení je pravdivé a jeho obliba je 55 %.

[1.5 E-130, místní cholerický politik nemluví pravdu]

Př. 18:Zeptali jsme se 1000 respondentů na určitý výrok. 60 % řeklo, že s ním souhlasí. Určete pravděpodobnost, že po zeptání celé společnosti bude výsledek minimálně: 45%, 50%, 55%, 59 %, 60 %, 61 %, 65 %, 70 %.

Porovnejte výsledky mezi sebou. Lze vidět, že výsledné pravděpodobnosti 45 % i 70 % jsou velmi málo pravděpodobné.

[45 %: 1.000000000000000 50 %: 0.999999999873019 55 %: 0.999259059612640

59 %: 0.739874064813421 60%: 0.500000000000000 61 %: 0.258382552217168

65 %: 0.000458268538057 70%: 0.000000000002588]

Př. 19: Jak se změní výsledky z příkladu 18, jestliže se zeptáme pouze 100 lidí?

[45 %: 0.998715584236489 50 %: 0.977249868051821 55 %: 0.842560679331790

59 %: 0.580557897327941 60 %: 0.500000000000000 61 %: 0.418777041703992

65 %: 0.147253696840055 70 %: 0.014548165870626]

Př. 20: V roce 2015 jsme se zeptali 250 respondentů na určitý názor – 62 odpovědělo souhlasně. Obdobně v roce 2016 jsme se zeptali 340 respondentů na stejnou otázku – 141 odpovědělo souhlas.

[0.9999936]

Př. 21: Řešte př. 20 s následující úpravou. Určete pravděpodobnost, že se zvýšila podpora tohoto názoru minimálně o 5 %.

[0.9988]

## rozdělení

Př. 22: Zjistěte 5 a 95% kvantil chí kvadrát rozdělení s 10 stupni volnosti

[3.9403, 18.3070]

Př. 23: Vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti pro chí kvadrát rozdělení s 2, 4 a 6 stupni volnosti.

Př. 24: Mějme data z rozdělení s 12 stupni volnosti. Určete pravděpodobnost: .

[0.0671]

## Studentovo rozdělení (t-rozdělení)

Př. 25: Určete pravděpodobnost, že Studentovo rozdělení s 2, 4, 10, 100 stupni volnosti nabývá . Určete pravděpodobnost i pro normované normální rozdělení.

[0.2113, 0.187,0.1704,0.1599,0.1587]

Př. 26: Zjistěte 5 a 95% kvantil Studentova rozdělení s 10 stupni volnosti.

[-1.8125, 1.8125]

Př. 27: Vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti pro Studentovo rozdělení s 1 (rozdělení je symetrické, přesto není rovna z integrálu střední hodnota 0), 2 a 4 stupni volnosti. Do jednoho grafu nakreslete zároveň hustotu pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení. Uvědomte si, že Studentovo rozdělení konverguje k normovanému normálnímu, jestliže stupeň volnosti se blíží .

## Fisherovo-Schnedecorovo rozdělení (F rozdělení)

Př. 28: Zjistěte 5 a 95 % kvantil F rozdělení s 10 a 5 stupni volnosti. Dále určete 5 a 95% kvantil F rozdělení s 5 a 10 stupni volnosti. Zkuste odhadnout jaký je mezi výsledky vztah.

[0.3007, 4.7351, 0.2112, 3.3258]

# Teorie odhadu

## Bodový odhad

Př. 1: Kdy můžete použít výběrové statistické charakteristiky (výběrový průměr, výběrová směrodatná odchylka atd.) a kdy obecné (průměrná hodnota, směrodatná odchylka, rozptyl atd.).

Př. 2: Mějte data 0.1; 0.2; 0.3; … ; 0.8; 0.9 a 1. Vypočtěte vyběrovou střední hodnotu, rozptyl , směrodatnou odchylku a výběrovou šikmost. Jak se změní tyto charakteristiky, jestliže data budou vynásobena 10.

[střední hodnota=0.55 vs. 5.5; rozptyl=0.0917 vs. 9.17; směrodatná odchylka=0.3028 vs. 3.028; šikmost=1.7758 je shodná, špičatost 0 a je shodná; střední hodnota a směrodatná odchylka se zvětší 10x, rozptyl 100x, šikmost a špičatost se nezmění]

## Intervalový odhad střední hodnoty normálního rozdělení

Př. 3: Deset balíčků mouky pocházející z balícího stroje mělo hmotnost v gramech: 987, 1001, 993, 994, 993, 1005, 1007, 999, 995 a 1002. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu hmotnosti.

[993.1, 1002.1]

Př. 4: Z 12 pozorování doby trvání montážní operace byl zjištěn průměr 44 s a směrodatná odchylka 4 s. Sestrojte 90% interval spolehlivosti pro očekávanou délku operace, jestliže daná operace má normální rozdělení.

[41.9263 s, 46.0737 s]

Př. 5: Naměřili jsme 10 údajů o životnosti žárovky: 380, 402, 408, 412, 454, 459, 472, 481, 491, 502 hodin. Odhadněte, zda data jsou z normálního rozdělení (například pravděpodobnostním papírem) a dale určete 95% intervalový odhad střední hodnoty životnosti žárovky. Určete i levo a pravostranný odhad střední hodnoty. Interpretujte výsledky.

[Data jsou z normálního rozdělení, 415.4 až 480.7, levostranný 421.6 až , pravostranný až 474.6. Oboustranný: S pravděpodobností 95 % bude střední doba do poruchy v intervalu 415.4 až 480.7 hodin.

Levostranný: s pravděpodobností 95 % bude střední doba do poruchy delší než 421.6 hodin.

Pravostranný: s pravděpodobností 95 % bude střední doba do poruchy kratší než 474.6 hodin.]

Př. 6: V prodejně si udělali průzkum, kolik zákazníků přijde do obchodu během jednoho dne. Byly zjištěny následující data:

x=[541,574,585,596,612,618,632,641,654,671,681,692,711,713,718,719,754,796,812,815,835,858];

Ověřte, že data jsou z normálního rozdělení. Zjistěte 99% interval spolehlivosti odhadu střední hodnoty.

[621.80,734.78 hod]

Př. 7: Automat vyrábí pístové kroužky o daném průměru. Při kontrole kvality bylo náhodně vybráno 80 kroužků a zjištěna střední hodnota průměru 12.01 mm. A dále vypočtena směrodatná odchylka jejich průměru 0.04 mm. Určete 95% oboustranný intervalový odhad střední hodnoty. Uvažujte dva případy a) směrodatná odchylka je definována na 0.04 mm, b) směrodatná odchylka byla vypočtena 0.04 mm. Zjistěte rozdíl výsledků a odůvodněte ho.

(Předpokládejte, že průměr pístových kroužku lze modelovat pomocí normálního rozdělení.)

[a) , b) , rozdíl = 1.3634E-4]

## Intervalový odhad rozptylu normálního rozdělení

Př. 8: Obdoba zadání z příkladu 1.

Deset balíčků mouky pocházející z balícího stroje mělo hmotnost v gramech: 987, 1001, 993, 994, 993, 1005, 1007, 999, 995 a 1002. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozptyl a směrodatnou odchylku hmotnosti.

[18.4200, 129.7591; 4.29,11.39]

Př. 9: U 100 náhodně vybraných výrobků činila průměrná hmotnost materiálu 150 g a výběrový rozptyl byl 16 g2. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro očekávanou hmotnost materiálu a jeho rozptyl.

[, ]

## Intervalový odhad relativní četnosti

Př. 10: Při provádění průzkumu 400 respondentů uvedlo 12 %, že by volilo Stranu mírného pokroku v mezích zákona. Vypočtěte 95% interval spolehlivosti pro očekávanou relativní četnost. Jak se změní interval spolehlivosti, jestliže se budeme ptát 1600 respondentů.

Zdůvodněte, proč je šířka intervalu u 1600 respondentů poloviční oproti 400 respondentů.

[, ]

Př. 11: Při kontrole data spotřeby určitého druhu masové konzervy ve skladech produktů masného průmyslu bylo náhodně vybráno 320 z 20 000 konzerv a zjištěno, že 59 z nich má prošlou záruční lhůtu. Stanovte se spolehlivostí 95% intervalový odhad podílu konzerv s prošlou záruční lhůtou. A dále 95 % intervalový odhad počtu konzerv s prošlou záruční lhůtou.

[p=,n=]

## Rozsah výběru

Př. 12: Jak velký by měl být rozsah výběru, jestliže chceme, aby jeho 95% šířka byla menší než 0.01.

[38400 respondentů]

Př. 13: Při odhadu volebních výsledků chceme, aby odchylka strany mající odhadem 20 % hlasů byla maximálně 1 %. Určete rozsah výběru pro 95% intervalový odhad.

[6146 respondentů]

Př. 14: Ze zadání příkladu 13 proveďte diskuzi, při jaké pravděpodobnosti volebního výsledku strany musí být rozsah největší, a kdy naopak nejmenší. Ověřte grafem výsledek.

[při 50 %]

## Intervalový odhad mediánu

Př. 15: Životnost výrobku je popsána exponenciálním rozdělením. Byly zjištěny následující data doby do poruchy:

x=[37,61,98,135,162,194,222,235,256,287,317,345,400,412,484,495,510,528,612,711,787,843,911,987,1014,1218,1512] hodin.

Opticky ověřte, že data nejsou z normálního rozdělení, ale z exponenciálního. Určete odhad mediánu.

[248,576 hodin]

Př. 16: Vygenerujte si 100 dat z normálního rozdělení s parametry . Data jsou symetrická kolem střední hodnoty. Vypočítejte 95 % odhad střední hodnoty, jestliže víte, že data jsou z normálního rozdělení. A obdobně vypočtěte 95% odhad mediánu, jestliže informaci o typu rozdělení nemáte.

Odhadněte, proč je šířka intervalu přibližně stejná?

[a) přibližně , b) přibližně , vlivem symetričnosti a velkého počtu dat ]

## Intervalový odhad poměrů rozptylů dvou výběrů s normálním rozdělením

Př. 17: Stroj vyrábějící komponenty potřebuje jednou za čas setřídit. Při testování několika výrobků po 20 hodinách nepřetržitého provozu jsme obdrželi následující hodnoty určitého rozměru. Obdobně jsme testovali také po 50 hodinách nepřetržitého provozu.

x20=[3.96,4.03,4.07,4.12,4.16,4.18,4.20,4.22,4.23,4.24,4.24,4.25,4.29,4.32,4.35,4.38,4.41,4.44];

x50=[4.02,4.07,4.11,4.16,4.22,4.28,4.32,4.36,4.40,4.42,4.46,4.48,4.51,4.52,4.54,4.58,4.62,4.73];

Velikost rozptylu u stroje ukazuje, zda je třeba stroj setřídit či nikoliv. Zjistěte 99% intervalový odhad podílů rozptylu.

[podíl je 0.4141; intervalový odhad podílu je ]

Př. 18: Stroj A vyrobí za hodinu 85 výrobků se směrodatnou odchylkou 8 výrobků. Stroj B vyrobí za hodinu 76 výrobků se směrodatnou odchylkou 6 výrobků. Vypočtěte 95% intervalový odhad podílu směrodatných odchylek.

[1.0666,1.6620]

## Intervalový odhad rozdílů středních hodnot dvou výběrů s normálním rozdělením

Př. 19: V roce 1980 jsme se dostali rychlíkem z Prahy do Brna za t1980=[243,251,257,257,259,261,263,265,284, 293] minut. Obdobně v roce 2015 jsme stejnou cestu absolvovali za t2015=[191,193,193,195,195,195,197,198,199,202,202,203,204,205,207,208] minut. Zvětšování rozptylů vypovídá o zvětšující se náhodné chybě. Zjistěte 99% intervalový odhad zrychlení cesty.

[52.8,75.4 minut]

Př. 20: Ze zadání příkladu 18 zjistěte 95% intervalový odhad rozdílů středních hodnot. Rozdíl středních hodnot vypovídá o systematické chybě.

[; ]

## Intervalový odhad pro rozdíl relativních četností dvou populací

Př. 21: HDD dvou velkých výrobců - DISK a EMEM byly podrobeny zkoušce kvality. HDD obou výrobců jsou baleny po 20 kusech. Ve 40 balících firmy DISK bylo nalezeno 24 vadných HDD, ve 30 balíčcích EMEM bylo nalezeno 14 vadných HDD. Se spolehlivostí 0,95 určete intervalový odhad rozdílu relativních četností (procent) vadných HDD v celkové produkci firem DISK a EMEM.

[-0.0105, 0.0239]

Př. 22: Strana mírného pokroku v mezích zákona by v roce 2015 volilo 60 z 845 respondentů. Obdobný průzkum proběhl i v roce 2016 s výsledkem: 57 z 541 respondentů. Určete intervalový odhad na hladině významnosti 95 %, o kolik se zvýšila podpora této strany.

[0.0044, 0.0644]

Myslíte si, že výsledek intervalového odhadu je natolik průkazný, že se zvýšila podpora strany mírného pokroku v mezích zákona?

[na hladině významnosti 5 % ano.].

# Testy hypotéz

## Jednovýběrové testy

### Jednovýběrový test – test rozptylu normálního rozdělení

[H,P,CI,STATS] = vartest(X,V,alpha,tail)

X – vstupní data

V – hodnota veličiny se kterou porovnáváme

Alpha – hladina významnosti

Tail – jednostranný (oboustranný) interval – ‘both’, ‘right’, ‘left’

H – výsledná hypotéza

P – p-value

Ci – konfidenční interval

Stats – velikost testovací veličiny a počet stupňů volnosti

Př. 1: Na hladině významnosti 5 % otestujte, zda je správná představa o směrodatné odchylce , když data jsou popsána rozdělením náhodné veličiny a bylo zjištěno: počet vzorků n=25, a směrodatná odchylka je s=357?

Poznámka: nutno počítat podle vzorců.

[H0 přijímáme, pvalue=0.0849]

Př. 2: Pro zadání z příkladu 1 určete i výsledky pro následující případy:

1. H0: H1:
2. H0: H1:
3. Proveďte diskuzi výsledků

[a) H0 výsledek testové veličiny je 33.98, testovací kritérium je 39.36

V případě jiných dat, když s=0 musíme přijmout H0 a výsledek testované veličiny bude 0;

b) H0 výsledek testové veličiny je 19.12, testovací kritérium je 12.40.

V případě jiných dat, když , musíme přijmout H0 a výsledek testované veličiny bude .]

Př. 3: Stroj na sáčkování smažených brambůrků vyrábí 100 gramové sáčky. Stroj má povolenou maximální směrodatnou odchylku 1.5 g na jeden sáček (rozptyl 2.25 g2). Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda je tato směrodatná odchylka splněna. Data jsou uložena v souboru P0801.mat.

[hypotézu H0 přijímáme, pvalue=0.6932;

H0 bychom přijali, jestliže bude testovaný rozptyl větší než 1.669 g2]

Př. 4: Pro bavlněnou přízi je předepsána horní mez rozptylu pevnosti vlákna (data jsou z normálního rozdělení), která nemá překročit . Při zkoušce 16 vzorků byly zjištěny výsledky:

x=[2.22, 3.54, 2.37, 1.66, 4.74, 4.82, 3.21, 5.44, 3.23, 4.79, 4.85, 4.05, 3.48, 3.89, 4.90, 5.37]

Je důvod na 5% hladině významnosti, že je rozptyl vyšší než deklarovaný?

[hypotézu H0 nepřijímáme, pvalue=0.0038; H0 bychom přijali, jestliže .]

### Jednovýběrový test – test střední hodnoty normálního rozdělení

[H,P,CI,STATS] = ttest(X,V,alpha,tail)

[H,P,CI,STATS] = ztest(X,střední hodnota,směrodatná odchylka,alpha,tail)

rozptyl je definován a je neměnný

Př. 5: Spotřeba téhož auta byla testována u 11 řidičů s výsledky

Spotreba=[8.8, 8.9, 9.0, 8.7, 9.3, 9.0, 8.7, 8.8, 9.4, 8.6, 8.9] (l/100 km). Je pravdivá výrobcem udávaná spotřeba H0=8.8 l/100 km? Lze popřít tvrzení, že rozptyl získaných údajů je 0,1?

[střední hodnota H0 přijímáme, pvalue=0.1455, přijímáme pokud porovnáváme s hodnotami od 8.75 do 9.085.

rozptyl H0 přijímáme, pvalue=0.3976, přijímáme, pokud porovnáváme s hodnotami od 0.03 do 0.19]

Př.6: Při kontrole životnosti 50 výrobků bylo z dat zjištěno, že střední doba do poruchy výrobku je 27400 hodin a směrodatná odchylka 5400 hodin (popsáno normálním rozdělením). Určete na hladině významnosti 5 %, zda lze přijmout fakt, že výrobce uvádí střední dobu do poruchy je rovna 30 000 hodin. (Alternativní hypotéza je, že je kratší, nebo naopak delší než 30 000 hodin)

[H0 nepřijímáme,pvalue=0.00065]

### Párový test

Př. 7: Mějme následující data, kde první řádek představuje hodnotu parametru před tepelnou úpravou a v druhém řádku jsou uvedeny výsledky na stejných kusech po tepelné úpravě. Data jsou z normálního rozdělení. Zjistěte na hladině význanosti 5 %, zda

1. Je shodná hodnota parametru (, )
2. došlo ke zvětšení parametru po tepelné úpravě. (, )

x=[35,36,36.3,36.8,37.2,37.6,38.3,39.1,39.3,39.6,39.8;37.2,38.1,38.2,37.9,37.6,38.3,39.2,39.4,39.7,39.9,39.9];

[a) H1 střední hodnoty nejsou na hladině význanosti 5 % shodné, pval=0.0024

b) H1, tj. že a došlo tím k prodloužení životnosti , pval=0.0012]

### Znaménkový test

Př. 8: Mějme data: x=[2,3,5,6,7,8,9,11,12,14,15,18,22,28,32,37,41]. Otestujte na hladině významnosti 5 % znaménkovým testem, zda medián je roven 25.

[přijímáme H1, zamítáme H0, že median je roven 25, pval=0.049].

Př. 9: Mějme data z příkladu 5 o spotřebě auta, kdy byla testována spotřeba u 11 řidičů. Otestujte na hladině významnosti 5 % (nevíte zda data pocházejí z normálního rozdělení), zda medián spotřeby může být 8.8. Porovnejte výsledky s příkladem 5.

Spotreba=[8.8, 8.9, 9.0, 8.7, 9.3, 9.0, 8.7, 8.8, 9.4, 8.6, 8.9]

[H0, že median je roven 8.8 nezamítáme, pval=0.5078]

### Kvantilový test

Př. 10: Mějme data: x=[2,3,4,5,6,7,7,8,8,9,11,12,13,15,16,18,19,22,25,28,31,34,37,39,42,45,48]. Otestujte na hladině významnosti 1 %, zda dolní kvartil může být 3.5. Vykreslete hypotetickou distribuční funkci.

[H0, pval=0.0415]

Př. 11: Mějme data x=[2,3,4,5,6,7,7,8,8,9,11,12,13,15,16,18,19,22,25,28,31,34,37,39,42,45,48]. Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda 10% kvantil může být 1.5 (tj. menší než minimum).

[H0, pval=0.1163, je to způsobeno malým množstvím vstupních dat].

Př. 12: Byla zkoumána životnost 50 silně namáhaných výrobků, životnost nelze popsat žádným jednoduchým rozdělením. Otestujte znaménkovým testem na hladině významnosti 5 %, zda medián životnosti je 220 hodin.

Data životnosti jsou následující (soubor P0812.mat).

x=[12, 15, 24, 32, 63, 69, 75, 87, 95, 121, 154, 159, 162, 187,191,201,212,218,223,241, 246, 249, 253, 259, 263, 269, 273, 291, 312, 313, 318, 323, 352, 356, 361, 368, 369, 371, 395, 521, 523, 561, 785,800,823,837,844, 954, 991, 1023];

[H0 přijímáme, pvalue=0.0649]

### Jednovýběrový Wilcoxonův test

P = signrank(X,M)

Př. 13: Byla zkoumána životnost 50 silně namáhaných výrobků, životnost nelze popsat žádným jednoduchým rozdělením. Otestujte Wilcoxonovým testem, zda medián životnosti je 220 hodin.

Data životnosti jsou následující (soubor P0812.mat).

x=[12, 15, 24, 32, 63, 69, 75, 87, 95, 121, 154, 159, 162, 187,191,201,212,218,223,241, 246, 249, 253, 259, 263, 269, 273, 291, 312, 313, 318, 323, 352, 356, 361, 368, 369, 371, 395, 521, 523, 561, 785,800,823,837,844, 954, 991, 1023];

[H0 nepřijímáme, pvalue=0.0171; pomocí krabicového grafu, nebo výpočtem šikmosti se lze přesvědčit, zda data mohou být symetrická]

Př. 14: Zdůvodněte, proč Wilcoxonův test má vyšší váhu než znaménkový test.

[Wilcoxonův test uvažuje rozdíly od střední hodnoty, znaménkový pouze pořadí. Z důvodu rozdílů od střední hodnoty je nutný předpoklad symetričnosti dat]

### Test relativní četnosti

Př. 15: Při průzkumu bylo zjištěno, že 82 lidí z 1000 by volilo Stranu mírného pokroku v mezích zákona. Strana vyhlašuje, že by jí volilo 15 % lidí. Lze na hladině významnosti 5 % její tvrzení potvrdit?

[H1, testovací veličina T=-6.022]

## Dvouvýběrový test

### Dvouvýběrový test – test shody dvou rozptylů

Př. 16: Balicí zařízení je seřízeno na začátku ranní směny a následně kontrolováno u odpolední směny. Byly zjištěny následující hodnoty hmotnosti výrobků:

Ráno=[98.5, 98.6, 98.7, 98.7, 98.7, 98.8, 98.9, 99.2, 99.3, 99.3] g

Odpoledne=[98.1,98.2, 98.3, 98.4, 98.6, 98.7, 98.8, 98.9, 99.0, 99.0] g

Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda je shodné seřízení stroje, tj. zda rozptyl hmotnosti výrobku je shodný.

[H0 přijímáme, pvalue=0.7187]

Př. 17: Otestujte, zda je u následujících dvou vektorů shodný rozptyl.

x=[3,4,5,6,8,9,9,10,11,12,13,13,14,15,15,15,16,16,17]

y=[5,5,6,6,6,7,7,8,8,9,9,10,10,11,13,15]

[H0, pvalue=0.1006]

Př. 18. Mějme 20 dat z vektoru A, který má rozptyl 1.35. Mějme 10 dat z vektoru B, který má rozptyl 0.32. Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda podíl rozptylů .

[H0, pval=0.2516]

### Dvouvýběrový test – test shody dvou středních hodnot

[H,P,CI,STATS] =ttest2(X,Y,ALPHA,TAIL,VARTYPE)

Proměnné viz výše

VARTYPE – ‘equal’, ‘unequal’ – rozptyly jsou (nejsou) shodné

Př. 19: Jak by dopadl výsledek testování vlivu tepelné úpravy z párového testu (př. 7), jestliže bychom neznali informaci, že testování proběhlo na stejných kusech. Data jsou z normálního rozdělení. Zjistěte na hladině význanosti 5 %, zda je shodná hodnota parametru (, ).

x=[35,36,36.3,36.8,37.2,37.6,38.3,39.1,39.3,39.6,39.8;37.2,38.1,38.2,37.9,37.6,38.3,39.2,39.4,39.7,39.9,39.9];

[H0, pval=0.112]

Př. 20: Denní přírůstky váhy selat byly při krmení směsí A: 62, 54, 55, 60, 53, 58 dkg. U směsi B: 52, 56, 50, 49, 51 dkg. Je mezi krmnými směsmi na hladině významnosti 5 % rozdíl?

[H1 nepřijímáme, pvalue=0.0217]

Př. 21: U 8 aut byla zjištěna velikost vzorku u předních pneumatik v mm:

Levá pneumatika: 2.8 2.0 3.2 1.9 2.5 2.6 1.7 4.1

Pravá pneumatika: 2.5 2.1 3.0 2.1 2.4 2.4 1.9 3.8

Zjistěte pomocí párového testu, zda dochází k opotřebování pneumatik stejně. Jak se změní výsledky, pokud bychom aplikovali (chybně) test o shodě dvou středních hodnot.

[H0,pvalue=0.7486, H0, pvalue=0.8345, zcela odlišné jsou však meze, kdy můžeme přijmout hypotézu (proměnná CI) (-0.10,0.25) oproti (-0.68,0.83)]

Př. 22: Mějme naměřená data ve vektorech x a y. Otestujte na hladině významnosti shodu středních hodnot. Testu obvykle předchází test shody rozptylů, který take aplikujte.

x=[24,26,27,28,28,28,29,31,32,33];

y=[-21,-5,3,8,14,17,19,21,29,38,46,52,68];

[data jsou z normálního rozdělení, rozptyly nejsou shodné, střední hodnoty H0, pval=0.368]

### Dvouvýběrový test – Mannův- Whitneyův test

Př. 23: Mějme naměřená data ve vektorech x a y. Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda median je shodný. Testu obvykle předchází testování shody rozptylů. Předpokládáme, že typ rozdělení je shodný (testování se naučíme v kapitole 9).

x=[12,14,16,18,19,19,21,23,25,27,31,35,39,42]

y=[15,18,21,24,27,29,32,35]

[rozptyly jsou shodné, medián je shodný pval=0.707]

### Testování relativních četností

Př. 24 Bylo zjišťováno, zda ve městě a na vesnici je při odpovědi na určitou otázku shoda v relativní četnosti. Ve městě bylo dotázáno 1240 respondentů a odpovědělo ano 325. Na vesnici bylo dotázáno 741 respondentů a odpovědělo ano 287. Otestujte na hladině významnosti 5 % shodu názoru ve městě a na vesnici.

[H1, relativní četnost není shodná]

## Vícevýběrové testy

### Test shody rozptylů

Př. 25: Výrobní stroj se seřídí začátkem směny. Kontrola výrobků probíhá vždy po jedné hodině a chceme zjistit, zda nedochází k většímu rozptylu určitého rozměru. Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda rozptyly dat jsou shodné. Použijte Bartlettův i Leveneův test.

x1=[18,19,19,19,20,21,21,22,22,23,23,24,24,24,25,25,25,26,26,26,27,28];

x2=[17,18,18,19,19,20,21,21,22,22,22,23,23,23,23,24,24,25,25,26,26,27,28,29] ;

x3=[16,17,18,18,18,19,20,20,20,20,21,21,21,22,23,23,23,24,25,26,27,27,28,28,29,31];

x4=[14,15,16,16,17,18,19,20,22,22,22,23,24,25,25,27,27,27,28,28,28,31,31,33,34];

[rozptyly nejsou shodné, a) pval=0.0041, b) pval=0.000216]

### ANOVA

Př. 26: Mějme naměřená data z 5 skupin (každá o 100 prvcích), která jsou uložena v souboru P0826.mat. Ověřte předpoklady a zjistěte, zda střední hodnota je u všech výběrů shodná.

[data jsou z normálního rozdělení, shoda rozptylů pval=0.0713, shoda středních hodnot pval=0.5909]

### Kruskall Wallisův test

Př. 27: Mějme shodná data jako v příkladě 25. Otestujte pomocí Kruskall Wallisova testu, zda mediány jsou shodné. (Nelze použít anovu, protože shoda rozptylů nebyla prokázána.)

[shoda středních hodnot byla prokázána pval=0.7952]

### Mnohonásobné porovnávání

Př. 28: Mějme naměřená data z 5 skupin (každá o 100 prvcích), která jsou uložena v souboru P0828.mat. Ověřte předpoklady a zjistěte, zda střední hodnota je u všech výběrů shodná. Pokud ne, porovnejte skupiny mezi sebou.

(co lze očekávat: data pravděpodobně z normálního rozdělení, shodné rozptyly, rozdílné střední hodnoty)

[boxplot ukazuje na normální rozdělení, shoda rozptylů prokázána pval=0.0791, shoda středních hodnot neprokázána pval=0.0118

Porovnání viz tabulka, shodné hodnoty nemá 3. a 5. výběr.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | OK | OK | OK | OK | OK |
| 2 | OK | OK | OK | OK | OK |
| 3 | OK | OK | OK | OK | KO |
| 4 | OK | OK | OK | OK | OK |
| 5 | OK | OK | KO | OK | OK |

]

Př. 29: Mějme naměřená data z 5 skupin (každá o 100 prvcích), která jsou uložena v souboru P0829.mat. Ověřte předpoklady a zjistěte, zda střední hodnota je u všech výběrů shodná. Pokud ne, porovnejte skupiny mezi sebou.

(co lze očekávat: data pravděpodobně z normálního rozdělení, neshodné rozptyly, rozdílné střední hodnoty)

[boxplot ukazuje na normální rozdělení, shoda rozptylů zamítnuta pval=8.64E-6, shoda středních hodnot neprokázána pval=6.84E-4

Porovnání viz tabulka, třetí výběr má vyšší střední hodnotu než všechny ostatní.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | OK | OK | KO | OK | OK |
| 2 | OK | OK | OK | OK | OK |
| 3 | KO | OK | OK | KO | KO |
| 4 | OK | OK | KO | OK | OK |
| 5 | OK | OK | KO | OK | OK |

]

Př. 30: Mějme naměřená data z 5 skupin (každá o 100 prvcích), která jsou uložena v souboru P0830.mat. Ověřte předpoklady a zjistěte, zda střední hodnota je u všech výběrů shodná. Pokud ne, porovnejte skupiny mezi sebou.

(co lze očekávat: data pravděpodobně z normálního rozdělení, neshodné rozptyly, rozdílné střední hodnoty)

[boxplot ukazuje na nesymetričnost prvního výběru, shoda rozptylů zamítnuta pval=1E-47, shoda středních hodnot neprokázána pval=0.037

Porovnání viz tabulka, první výběr má nižší střední hodnotu než druhý a třetí.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | OK | KO | KO | OK | OK |
| 2 | KO | OK | OK | OK | OK |
| 3 | KO | OK | OK | OK | OK |
| 4 | OK | OK | OK | OK | OK |
| 5 | OK | OK | OK | OK | OK |

]

# Testy dobré shody

## -test ověření relativních četností

Př. 1: Bylo provedeno 50 hodů šestistěnnou kostkou s výsledky: 1 – 11x, 2 – 8x, 3 – 14x, 4 – 5x, 5 – 7x, 6 -5x. Zjistěte, zda přijmete na hladině významnosti 5 % hypotézu, že pravděpodobnost padnutí každého z čísel je 1/6.

[H0, pval=0.1797]

Př. 2: Bylo provedeno 50 náhodných pokusů s výsledky: 1 – 15x, 2 – 10x, 3 – 10x, 4 – 8x, 5 – 7x. Přičemž očekávaný výskyt je: 1 – 18x, 2 – 14x, 3 – 10x, 4 – 4.5x, 5 – 3.5x. Zjistěte, zda přijmete na hladině významnosti 5 % hypotézu, že naměřená četnost výsledků koresponduje s očekávanými. Intervaly 4 a 5 neslučujte.

[H0, pval=0.0966]

Př. 3: Pan Novák při sezení v hospůdce se svěřil, že si dělá statistiku svého sázení Sportky. Řekl, že při 1000 násobném sázení (tahá se 6 čísel ze 49), ve 385 případech neuhodl ani jedno číslo; 431x jedno číslo, 148x dvě čísla, 29x tři čísla, 5x čtyři čísla a 1x pět čísel. Zjistěte (hladina významnosti 5 %), zda zjištěné výsledky mohou odpovídat realitě. Použijte hypergeometrické i binomické rozdělení.

[hypergeometrické H1, pval=4.14E-5; binomické H1, pval=1.024E-4]

Př. 4: V obchodě sledují počet návštěvníků za hodinu. Byly zjištěny následující výsledky: 0 – 3x, 1 – 10x, 2 – 15x, 3 – 12x, 4 – 17x, 5 – 10x, 6 – 11x, 7 – 9x, 8 – 5x, 9 – 5x, 10 – 4x, více než 10 – 5x. Určete na hladině významnosti 5 %, zda data jsou z Poissonova rozdělení.

[H1, pval=9.78E-6]

Př. 5: Vygenerujte si 100 dat z Poissonova rozdělení s parametrem . Otestujte těchto 100 dat, zda pocházejí z Poissonova rozdělení. Nyní k datům přidejte dalších 15 (celkem jich bude 115): [14,15,17,18,19,21,22,24,26,27,27,28,32,34,36]. Otestujte na hladině významnosti 5%, zda data pocházejí z Poissonova rozdělení.

[1. Data – pravděpodobně budou H0, 2. Data – pravděpodobně budou již H1. ]

Př. 6: V osudí je 10 koulí černých a 20 bílých. Vylosujeme vždy 5 koulí, které vracíme zpět. Několikrát opakujeme stejný pokus. Máme podezření, že losující podvádí a do osudí vidí a preferuje černé koule. Obdrželi jsme následující výsledky počtu vytažených bílých koulí:

x=[0,1,0,1,0,2,0,1,1,0,0,1,0,1,0,2,0,1,1,0,0,0,0,1,2,1,1,2,1,0,1,2,1,2,3];

Lze předpokládat, že losující podváděl?

[H1,pval=0, suma]

## -test ověření shody s očekávaným rozdělením

Př. 9.7: V souboru P0907.xlsx máte data o poruchách výrobku. Zjistěte na hladině významnosti 5 %, zda data jsou z exponenciálního rozdělení. Ověřte, že data jsou z toho rozdělení i na základě Weibullova papíru (funkce wblplot)

[nejsou z exponenciálního rozdělení, pval=0.0462]

Př. 9.8: Výpočet z dat v souboru P0907.xlsx budeme obměňovat.

a) Zkuste si nadefinovat jiné hraniční body a zjistěte, jak se změní výsledek analýzy.

b) Jaká jsou základní podmínky pro použití testu dobré shody?

c) Otestujte data, jestliže budeme předpokládat exponenciální rozdělení s parametrem .

d) Otestujte data, jestliže budete předpokládat, že jsou z normálního rozdělení.

e) Otestujte data, zda jsou z normálního rozdělení pomocí normálního papíru (funkce normplot)

[ad a) výsledky pval se budou měnit, při příznivých datech může být přijata i hypotéza H0

ad b) v každé skupině musí být očekáváno minimálně 5 dat

ad c) výsledkem bude H1

ad d) výsledkem bude H1, pval= 1.21E-6]

Př. 9.9: V souboru P0909.mat máte data o poruchách výrobku. Zjistěte, zda data jsou z normálního rozdělení. Zkuste otestovat, zda mohou být data z normálního rozdělení s parametry .

[data jsou z normálního rozdělení s parametry: , H0,pval=0.6397

data nejsou z normálního rozdělení s parametry , H1,pval=2.71E-5]

Př. 9.10: V souboru P0910.mat máte vygenerováno 100 dat z normálního rozdělení s parametry . Zbylých 10 vstupních dat jsou odlehlé hodnoty. Zjistěte na hladině významnosti 5 %, zda všechna data pocházejí z normálního rozdělení s parametry . Pokud nikoliv, odhalte odlehlé hodnoty a testujte znova na normální rozdělení

[H1, pval=5.90E-7; H1,pval=0.0071]

Př. 9.11: V souboru P0911.mat máte vygenerováno 100 dat, o kterých se domníváme, že mohou být z logaritmicko-normálního rozdělení. Ověřte.

[bez použití hraničních bodů bude mít statistika pouze 0 stupňů volnosti.

Při použití hraničních bodů [0,10,50,100,200,500,1000,10000] je z lognorm rozdělení H0, pval=0.676]

Př. 9.12: Vygenerujte si 10, 100, 1000 a 10000 náhodných dat z normovaného normálního rozdělení. Ověřte testy na hladině významnosti 5 %, zda skutečně vygenerovaná data jsou z tohoto rozdělení.

[10 dat nelze určit pro málo dat, 100, 1000 a 10000 dat je výsledek H0, pval se postupně zvyšuje]

Př. 9.13: Vygenerujte 50 dat z normálního rozdělení s parametry a dalších 50 dat z normálního rozdělení s parametry . Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda výsledný vektor bude opět z normálního rozdělení.

[H0, pval=0.2697]

Př. 9.14: V souboru máte vygenerováno 100 dat o poruchách. Ověřte, že data jsou z Weibullova rozdělení (rozdělení se používá pro popis doby do poruchy degradujících výrobků). Ověřte, že data jsou z toho rozdělení i na základě Weibullova papíru (funkce wblplot)

[H0, pval=0.5317, parametry Weibullova rozdělení: a=990.45, b=1.5124]

## Kolmogorov – Smirnovův jednovýběrový test rozdělení

Př. 9.15: Studenti ve třídě mají následující výšku. Ověřte na hladině významnosti 5 %, zda výška studentů splňuje normální rozdělení. Pokud data splňují normální rozdělení, zjistěte optimální parametry normálního rozdělení.

vyska=[162,167,170,171,172,175,178,179,180,181,182,184,185,187,191,195].

[H0,pval=0.9962]

Př. 9.16: Byla zaznamenána doba do poruchy zařízení. Zjistěte na hladině významnosti 5 %, zda data splňují exponenciální rozdělení. Pokud ano, zjistěte jeho parametry. Pokud nikoliv použijte Weibullovo rozdělení. Pro optické posouzení použijte Weibullův papír (funkce wblplot).

t=[37,48,54,75,81,104,123,141,156,187,195,213,241,254,271,289,312,345,395,412,461,512,651,731];

[exponenciální: H0, pval=0.7231; Weibullovo: H0, pval=0.842]

Př. 9.17: Vygenerujte postupně 3, 5, 10, 20, 50 a 100 náhodných čísel. Zjistěte, zda vygenerovaná data jsou skutečně z rovnoměrného rozdělení v rozmezí . Následně otestujte, zda vygenerovaná data mohou být z rovnoměrného rozdělení v rozmezí . Jaký maximální rozdíl distribučních funkcí (naměřené a teoretické) může být při určitém rozsahu výběru.

[]

Př. 9.18: V souboru P0918.xlsx máte vygenerována data. Ověřte, zda jsou z normálního rozdělení s parametry , . Pro optické posouzení použijte normální papír (funkce normplot).

[]

Př. 9.19: Máte vektor vstupních hodnot: t=[37,54,81,123,156,213,254,289,345,512,731]. Otestujte, zda data pochází z normálního rozdělení. Vykreslete obě distribuční funkce.

[]

Př. 9.20: Máte vektor vstupních hodnot: x=[24,35,61,87,120,151,187,214,341,541,653,1213,2421]. Zkuste zjistit zda data pochází z logaritmicko-normálního rozdělení.

[]

Př. 9.21: Zkuste vysvětlit princip testu dobré shody a Kolmogorova-Smirnovova testu. Jaký je rozdíl mezi Kolmogorov-Smirnovovým testem a Lilieforsovým testem a proč má normální rozdělení méně přísné požadavky.

[]

## Kolmogorov – Smirnovův dvouvýběrový test shody rozdělení

Př. 9.22: Máte následující data: x=[3,5,9,12,15,17,21,24] a y=[5,8,12,12,15,17,19,24,25,28]. Ověřte, zda data jsou ze shodného rozdělení. Ověřte, zda data z vektoru x a y jsou z normálního rozdělení.

[]

Př. 9.23: Máte následující data: x=[31,36,42,48,52,57] a y=[15,18,22,27,29,34,35,38,43,49,52]. Ověřte, zda data jsou ze shodného rozdělení.

[]

Př. 9.24: Vygenerujte 20 dat z normálního rozdělení s parametry , obdobně vygenerujte 20 dat z rovnoměrného rozdělení . Ověřte, zda data mohou být ze stejného rozdělení.

Obdobně příklad vypočítejte pro 200 dat. Interpretujte rozdíl výsledků.

[]

Př. 9.25: Ověřte, zda data ze souboru P0925.xlsx (ve sloupci A a B) pochází ze stejného rozdělení.

[]

Př. 9.26: Máte průměrný plat zaměstnanců v Praze a v Liberci. Ověřte znaménkovým testem, že v Praze je vyšší průměrný plat (údaje v tis. Kč), zároveň ověřte, že v pracovníci v Liberci mají „vyšší distribuční funkci“ než v Praze a tedy nižší plat než v Praze.

Praha=[16,18,18,18,21,23,25,28,31,34,37,41,45,48,48,61]

Liberec=[13,14,14,15,15,16,17,18,23,28,34,36]

[]

Př. 9.27: Pro data:

x=[16,18,18,18,19,19,19,20,20,21,21,21,23,26] y=[13,14,14,15,15,16,16,16,17,17,18,19,20,21,23,23,23,24,25,28]

ověřte, zda jsou ze shodného rozdělení a vyneste jejich distribuční funkce. Následně otestujte, zda každé z rozdělení lze popsat normálním rozdělením a vyneste data do pravděpodobnostního papíru. Udělejte krabicový graf.

[]

# Analýza závislostí

Př. 1

Př. 2

Př. 3

Př. 4

Př. 5

Př. 6

Př. 7

Př. 8

Př. 9

Př. 10

Př. 11

Př. 12

Př. 13

Př. 14

Př. 15

Př. 16

Př. 17

Př. 18

Př. 19

Př. 20

# Úvod do korelační a regresní analýzy

## Lineární regrese

Př. 1: Nalezněte parametry lineární regrese ( ) pro následující data: x=[3,5,8,11,12,14,15]; y=[6,11,15,22,25,27,30];. Určete parametry a zjistěte, zda parametr b se může rovnat 0.

[; parameter b může být 0, protože a pval=0.65546]

Př. 2: Nalezněte parametry lineární regrese pro následující data: x=[2,5,8,11,5,10,6]; y=[6,11,15,22,25,27,30];. Je daný model lineární regrese vhodný?

[; Model vhodný není, protože Ftest je F=2.05 (pval=0.212) a takékoeficient determinace je ]

Př. 3: Nalezněte parametry lineární regrese pro data uložená v souboru P1103.xlsx.

[]

Př. 4: Jaké všechny proměnné obsahuje struktura počítající lineární regresi? Otevřete si proměnnou z předchozího příkladu.

Př. 5: Nalezněte parametry kvadratické regrese pro data uložená v souboru P1103.xlsx. Je nutný kvadratický člen?

[]

Př. 6: Nalezněte parametry regresního modelu: pro naměřená data: x=[2,4,5,6,7,8,9,10]'; y=[1,2,3,4,5,6,7,8]'; z=[6,11,14,15,18,23,26,31]';. Vstupní data musejí být sloupcové vektory.

[

Př. 7: Nalezněte parametry regresního modelu , pro data uložená v souboru P1107.xlsx.

[]

Př. 8: Mějte data: x=[1,2,3,4,5,6,6.5]; y=[3,5.1,6.9,8.8,10.9,13.3,14.1]; Proložte data kvadratickým modelem. V případě, že některý člen není třeba, vypusťte ho, a nahraďte jiným modelem. Určete 95% interval spolehlivosti pro člen .

[ není třeba kvadratický člen. Po odstranění kvadratického členu je

Intervalový odhad kvadratického členu je: ]

Př. 9: Mějme data: x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]; y=[1,2,3,1,2,3,1,2,3,1]; z=[3,9,17,10,16,26,14,25,38,23]; Proložte data modelem (linear) a dále modelem (interactions). Co si myslíte o výsledcích modelu?

[; ; U druhého (možná i u prvního) modelu je možno absolutní člen vynechat.]

Př. 10: Mějte data z příkladu 9: x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]; y=[1,2,3,1,2,3,1,2,3,1]; z=[3,9,17,10,16,26,14,25,38,23]; a proložte je modelem (quadratic) a (purequadratic). Jsou všechny parametry modelu nutné?

[

Oba modely jsou překombinované, protože pval u ttestů je u všech parametrů vysoké. ]

Př. 11: Mějme data: x=[1,2,3,5,7,4,1,2,3,4,1,2,2,2,3]';y=[2,1,1,4,1,2,5,2,1,2,1,2,1,2,3]'; z=[8,11,14,18,12,18,15,15,15,12,1,11,8,7,5]'; Proložte je modelem (linear) a dále modelem (interactions). Co si myslíte o výsledcích modelů?

[; Ftest má pval=0.116 – model špatně určen není vhodné použít regresi.

; Ftest má pval=0.248 – model špatně určen není vhodné použít regresi.]

## Nelineární regrese

Př. 12: Máte naměřená data v souboru P1112.xlsx. Určete výsledky regresního modelu: a) , b) .

[a) y=5.174, b)y=1.4735/x+4.9344]

Př. 13: Máte data v souboru P1113.xlsx. Určete výsledky regresního modelu . Počáteční vektor uvažujte c=5, a=1/3, b=1. Zapište koeficient determinace

[y=4.9581\*sin(0.34398x+0.89692), r2=0.998]

Př. 14: Uvažujme stejné zadání příkladu jako je př.13. Ale počáteční vektor uvažujte c=1, a=1, b=0. Zjistěte výsledky a zdůvodněte, proč jsou odlišné od předchozích?

[y=1.1501\*sin(0.8986x-0.38972), r2=0.0387, našlo lokální extrém funkcionálu, nikoliv globální]

Př. 15: Máte naměřená data, která jsou uložena v souboru P1115.xlsx. Zkuste regresní model . Pokud nejvyšší řád polynomu není třeba, proveďte výpočet bez něj.

[ model je špatně určen – pvalue parametru b8 je sice malé, ale pro ostatní parametry je obtížné vypočítat směrodatnou odchylku. Parametr b8 je velmi blízký 0.

model je špatně určen – pvalue parametru b7 je sice 0.063, pro ostatní parametry je obtížné vypočítat směrodatnou odchylku.

model je špatně určen – pvalue parametru b6 je sice 0.007, pro ostatní parametry je obtížné vypočítat směrodatnou odchylku.

model je špatně určen pvalue b5=0.34919.

model je OK, ; pvalue parametrů jsou max. 1E-34]

Př. 16: Vygenerujte následujících 100 dat, která vznikla následující rovnicí:

* Parametr i sudý:
* Parametr i lichý:

Funkci lze aproximovat funkcí . Zkuste vypočítat kvadratickou regresi této funkce a odůvodněte, proč tento model není vhodný.

[Funkce kvadraticky roste a zároveň klesá. Model není vhodný, protože Ftest má pval=0.938. U modelu se zvyšuje s rostoucím x rozptyl, proto nelze použít metodu nejmenších čtverců. Z výsledku modelu vyplívá, že kvadratický člen je roven 0. ]

Př. 17: V souboru P1117.xlsx máte uložena data. Zkuste je proložit funkcí . Počáteční vektor stanovte (2,4,1).

[; první člen není třeba. Po jeho vynechání obdržíme výsledek ;]

Př. 18: Mějte data uložená v souboru P1118.xlsx. Proložte data funkcí . Následně zlogaritmujte y=ln(y) a proložte lineárním modelem. (; ).

[. Výsledek by měl být shodný, vlivem numerického výpočtu tomu tak není.]

Př. 19: Máte naměřená následující data: x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]; y=[2,4,6,12,15,23,29,38,45,59];. Vypočtěte parametry regresního modelu . Lze použít tento model?

[a=0.51715; ano Ftest má pval=2.2E-14, tstat má pval=2.2E-14]

Př. 20: Máte naměřená následující data: x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]; y=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100]. Proložte data modelem: . Který z uvedených modelů je nejlepší, a proč. Jaký vzniká problém při proložení těchto dat?

[a)

b)

c)

Ani jeden model není vhodný. Hlavním důvodem je, že data jsou získána ze dvou souborů, které jsou zcela odlišné. Pokud bychom měli naměřena více dat, výsledky pro dané modely budou ještě horší.]

Př. 21: Mějme naměřena data x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]; y=[0,5,9,18,28,39,69,111,177,277]; Proložte data modelem . Zjistěte, zda všechny parametry jsou nutné.

[

Konstantní člen není třeba, protože tstat pval=0.0643, proto hledám ve tvaru

]

Př. 22. Máte data týkající se složení vody ve vrtech uložena v souboru P1122.csv. Proložte data modelem . Počáteční vektor volte . Zjistěte, zda všechny parametry jsou nutné.

[, všechny parametry jsou nutné, u obou parametrů je pval=0]