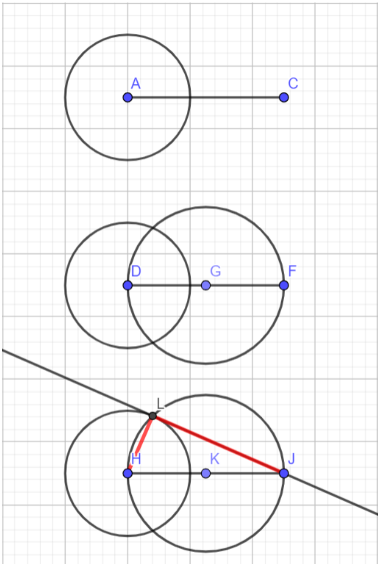
به نام خدایی که از نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است

هفته‌نامه ریاضی نیک‌پرور - شماره ٤

مبحث علمی: مماس و دایره



ما در این بحث می‌خواهیم روش‌های رسم مماس مشترک بین دو دایره را بررسی کنیم. ابتدا به سراغ یک مسئله‌ی دیگر می‌رویم که بعداً به نتیجه‌ی آن نیاز خواهیم داشت: رسم مماس از یک نقطه بر دایره.

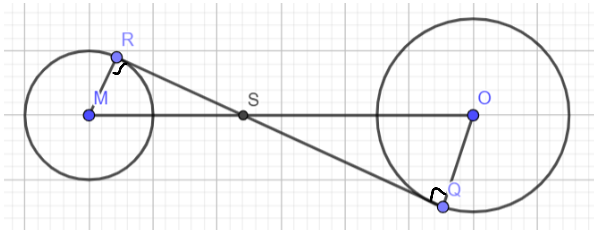
می‌دانیم که زاویه‌ی بین مماس و شعاع ۹۰ درجه است. حال اگر بتوانیم یک مثلّث قائم الزّاویه رسم کنیم که وتر آن خط بین نقطه و مرکز دایره باشد و یک ضلع آن شعاع دایره باشد؛ خطّ واصل رأس قائم مثلّث و نقطه راستای مماس مورد نظر است. برای این کار از زاویه محاطی مقابل قطر استفاده می‌کنیم.

ابتدا از وسط خطّ واصل نقطه و مرکز دایره، دایره‌ی دومی رسم می‌کنیم که از نقطه و مرکز دایره‌ی اوّل گذر کند. بدین ترتیب، خط واصل نقطه و مرکز دایره قطر است. اگر از مرکز دایره‌ی اوّل و نقطه به محلّ تلاقی دو دایره خطوطی رسم کنیم؛ مثلّث مورد نظر ایجاد می‌شود و خطّ مماس ضلع این مثلّث است.

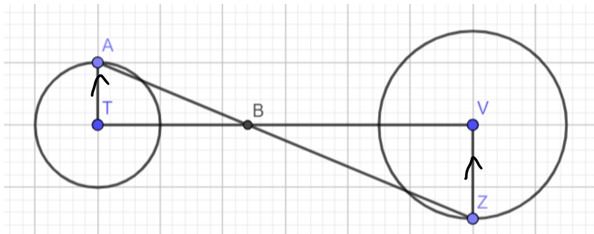
به دلیل اینکه هر دو دایره در دو نقطه تقاطع می‌کنند؛ از هر نقطه می‌توان دو مماس بر هر دایره رسم کرد.

حال می‌رویم به سراغ رسم مماس‌های مشترک بین دو دایره. می‌دانیم که بین هر دو دایره چهار مماس مشترک وجود دارد که دو تا از آنها از کنار دوایر و دو تا از آنها از میان دوایر عبور می‌کنند. ابتدا به سراغ رسم مماس‌هایی می‌رویم که از میان دو دایره عبور می‌کنند.

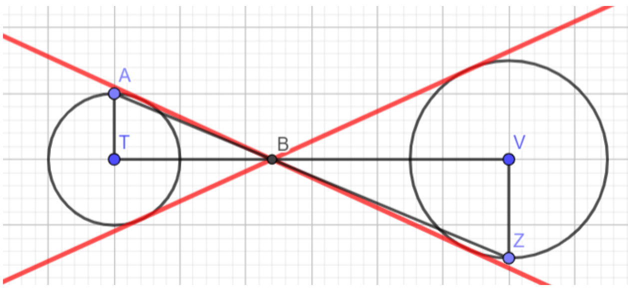
یکی از ویژگی‌های این نوع مماس این است که خطّ المرکزین دوایر را به دو قسمت تقسیم می‌کند که نسبت طول این دو قسمت برابر نسبت شعاع دو دایره است. اثبات این روش با استفاده از تشابه میان مثلّث‌های OQS و MRS صورت می‌گیرد.



حال اگر بتوانیم که نقطه‌ای پیدا کنیم که نسبت فاصله‌ی آن از مرکزهای دایره برابر نسبت شعاع‌ها باشد؛ می‌توانیم مماس مشترک میانی را رسم کنیم.

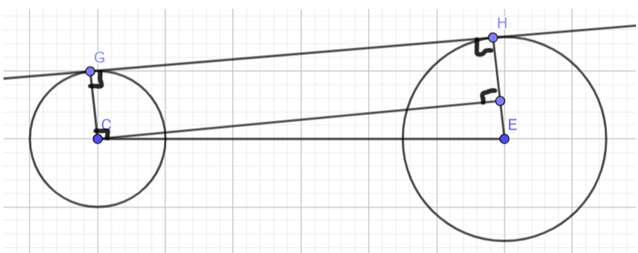


اگر دو شعاع دلخواه موازی از دو دایره رسم کنیم (VZ و AT) و نقطه‌ی انتهای آنها را به هم وصل کنیم؛ دو مثلّث متشابه (ZBV و ABT) ایجاد می‌شود و بر اساس تشابه نتیجه می‌گیریم که نسبت فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی خطّ رسم شده با خطّ المرکزین دو دایره (B) با مرکز دو دایره (BV و BT) برابر نسبت شعاع دو دایره است.



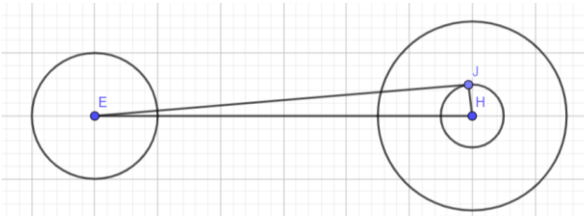
طبق اثباتی که قبلاً کرده بودیم؛ این نقطه (B) روی مماس مشترک دو دایره است. حال کافی است که از این نقطه با روشی که در بالا ذکر شده به دو دایره مماس رسم کنیم.

به دلیل اینکه از هر نقطه می‌توان دو مماس بر دایره رسم کرد؛ هر دو دایره دو مماس مشترک دارند که از میانشان عبور می‌کند.

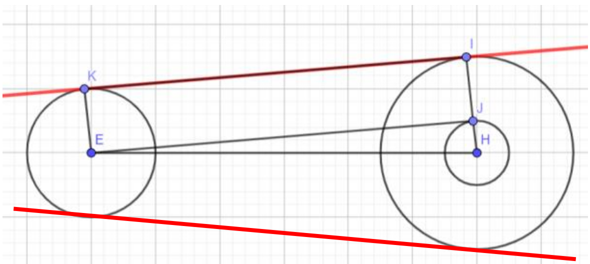


حال به سراغ دو مماسی می‌رویم که از کنار دو دایره عبور می‌کنند. اگر از محل تلاقی این مماس‌ها و دوایر (G و H) دو عمود رسم کنیم و تا مراکز دو دایره امتداد دهیم

تشکیل یک ذونقه می‌دهد. این ذوزنقه را می‌توانیم به صورت یک مستطیل و یک مثلّث قائم الزّاویه در نظر بگیریم. وتر این مثلّث قائم الزّاویه خطّ المرکزین و طول یک ضلع آن برابر اختلاف طول شعاع‌های دو دایره است. اگر به چنین مثلّثی دست‌یابیم؛ می‌توانیم مماس را رسم کنیم. حال برای رسم این مثلّث به صورت زیر عمل می‌کنیم:

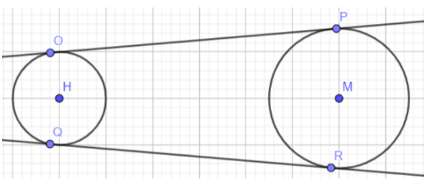


ابتدا دایره‌ی سومی به مرکز دایره‌ی بزرگتر و شعاعی برابر اختلاف شعاع دو دایره رسم می‌کنیم. سپس از مرکز دایره‌ی کوچکتر بر این دایره‌ی سوم یک مماس رسم می‌کنیم و به مرکز دایره‌ی بزرگتر وصل می‌کنیم. حال مثلّث رسم شده (EJH) همان مثلّث دلخواه ما است. حال فقط کافی است که یک مستطیل $(EJIK)$ با عرضی برابر شعاع دایره‌ی کوچک رسم کنیم. ضلع این مستطیل که بر شعاع دو دایره عمود است مماس مورد نظر ما است.

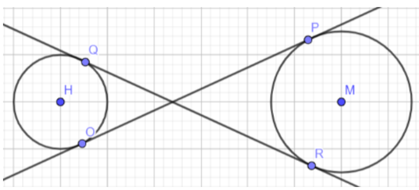


به دلیل اینکه از هر نقطه دو مماس می‌توان بر هر دایره رسم کرد؛ می‌توانیم بین هر دو دایره دو مماس مشترک رسم کنیم که از کنار دو دایره عبور می‌کنند.

چند سوال جالب مربوط به مبحث مماس:



الف) اثبات کنید که اگر دو مماس خارجی مشترک بین دو دایره را رسم کنیم؛ کمان‌های ایجاد شده در دو دایره بر اثر برخورد مماس با هم برابرند. $(OQ = PR)$



ب) اثبات کنید که اگر دو مماس داخلی مشترک بین دو دایره را رسم کنیم؛ کمان‌های ایجاد شده در دو دایره بر اثر برخورد مماس با هم برابرند. $(OQ = PR)$