به نام خدایی که از نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است

هفته‌نامه ریاضی نیک‌پرور – شماره ۱

مبحث علمی: اثبات حجم هرم

بیایید قبل از هر چیز به سطح مقطع یک هرم توجّه کنیم. یک هرم از تعدادی صفحه‌ی روی هم ایجاد شده است که هر چه بالاتر می‌رود کوچکتر می‌شوند تا در رأس هرم به یک نقطه ختم شود. اثبات روش محاسبه‌ی حجم هرم را با هرم مثلّث القاعده‌ی پیکسلی شروع می‌کنیم.

الگوی هرمی جمع جمله‌ی ۱ تا n الگوی مثلّثی است که اعداد ابتدایی آن به ترتیب $1-4-10-20$ است. اختلاف جمله‌ی n و n+1 این الگو برابر جمله‌ی n+1 الگوی مثلّثی یا (n+1)(n+2)/2 است. برای پیدا کردن جمله‌ی کلّی الگوی هرمی می‌توان فرض کرد که جمله‌ی n و n+1 این الگو هر دو مضربی از (n+1)(n+2) هستند.

(عدد دو که در مخرج بود ضریب است و موقّتاً آن را حذف می‌کنیم.)

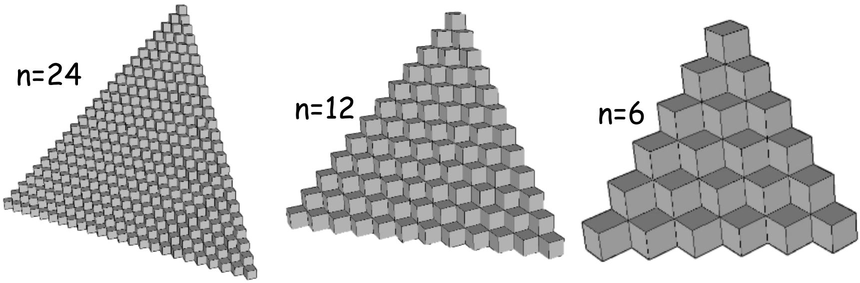
طبق این فرض جمله‌ی n+1 هرمی مضرب (n+1)(n+2) می‌شود و به همین ترتیب جمله‌ی n این الگو مضرب n(n+1) می‌شود. از طرفی طبق فرضی که کردیم؛ جمله‌ی n این الگو مضرب (n+1)(n+2) است؛ بنابراین جمله‌ی n مضرب n(n+1)(n+2) می‌شود. حال باید به سراغ پیدا کردن ضریب برویم.

اختلاف جمله‌ی n و n+1 الگوی هرمی برابر (n+1)(n+2)/2 است. اگر اختلاف جمله‌ی n و n+1 را طبق n(n+1)(n+2) محاسبه کنیم؛ برابر (n+1)(n+2)(n+3)-n(n+1)(n+2) می‌شود که برابر 3(n+1)(n+2) است. پس اگر این جمله‌ی کلّی را بر ۶ تقسیم کنیم؛ اختلاف جمله‌ی n و n+1 برابر جمله‌ی n+1 الگوی مثلّثی می‌شود. بنابراین جمله‌ی کلّی دنباله‌ی هرمی برابر n(n+1)(n+2)/6 می‌شود.

(تمرین: اگر دوست دارید؛ می‌توانید با روشی مشابه جمله‌ی کلّی دنباله‌ای را حساب کنید که جمله‌ی n آن برابر مجموع جمله‌ی یک تا n الگوی هرمی باشد.)

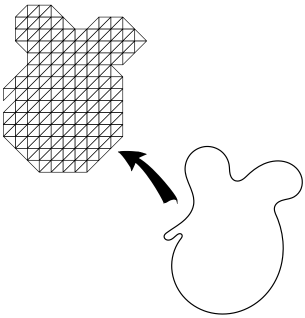
اکنون که این جمله‌ی کلّی را حساب کردیم می توانیم حجم هرم‌های مثلّث القاعده‌ی پیکسلی را حساب کنیم. حال باید کاری کنیم که اندازه‌ی این پیکسل‌ها را کم کنیم.

برای این کار می‌توانیم n را چند برابر کنیم. هر چه n بیشتر می‌شود؛ هرم پیکسلی به هرم واقعی شبیه‌تر می‌شود؛ امّا از طرفی حجم هرم هم زیادتر می‌شود.



پس می‌توانیم n را در عددی مثلاً m ضرب کنیم و حاصل را بر m^3 تقسیم کنیم.

$$(mn)(mn+1)(mn+2)/6m^3=(m^3n^3+3m^2n^2+2mn)/6m^3=n^3/6+n^2/6m+n/6m^2$$



حال اگر m را برابر بی‌نهایت قرار دهیم؛ حاصل برابر $n^3/6$ می‌شود که حجم هرم مثلّث القاعده است. ارتفاع n و قاعده $n^2/2$ است؛ پس حجم هرم مثلّث‌القاعده برابر $S*h/3$ می‌شود. با توجّه به اینکه هر شکلی را می‌توان به صورت تعدادی مثلّث کنار هم تصوّر کرد؛ **پس می‌توان نتیجه گرفت که حجم هرم برابر یک سوم مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است.**

چند سوال جالب:

الف) فرض کنید در امتحانی هستید که در آن تنها به نوشتن یکان پاسخ‌ها نیاز است. بدون محاسبه‌ی پاسخ نهایی؛ یکان را بیابید!!!

۱) $۷۷۷^{۷۷۷}$

۲) $۹^{۱۲۳۴۵۶۷۸۹}$

۳) $۴ * ۹^{۱۷}$

ب) اگر a عددی زوج باشد؛ اثبات کنید که عدد $a(a^2-4)$ بر ۴۸ بخش‌پذیر است.

ج) چند عدد ۹ رقمی با ارقام یکسان وجود دارد که بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد؟

د) چند عدد ۹ رقمی با ارقام یکسان وجود دارد که بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

ه) اگر a عددی فرد باشد اثبات کنید که a^2-1 مضرب ۸ است.