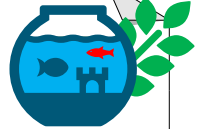


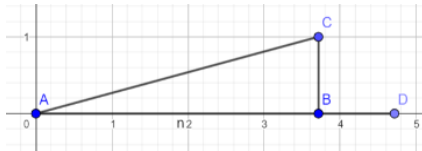
بسم الله الذي يحصى كل شيء عدداً

ویژه نامه ریاضی نیک‌پرور - نوروز ۱۴۰۳

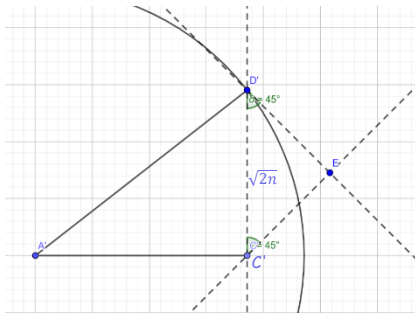


مبحث علمی: رسم رادیکال

فرض کنید می‌خواهید پاره‌خطی به طول جذر ۵ رسم کنید. طبیعتاً با رسم مثلث و با استفاده از فیثاغورس آن را رسم می‌کنید. برای تمامی اعداد گویا هم از طریق مشابهی یعنی رسم مثلث و فیثاغورس عمل می‌کنیم؛ اما همیشه این روش کارگر نیست! مثلاً برای رسم جذر اعداد گنگ نمی‌توان از این روش استفاده کرد. یا مثلاً پاره‌خطی را به ما داده‌اند و طول آن را نمی‌دانیم و می‌خواهیم جذر آن را رسم کنیم. در این صورت باز هم باید از فیثاغورس استفاده کنیم اما با روشی متفاوت.



ابتدا پاره‌خطی به طول n در نظر بگیرید (AB) . حال بر روی این پاره خط یک مثلث قائم الزاویه به ارتفاع یک رسم می‌کنیم (ABC) . مجذور وتر (AC) این مثلث $n^2 + 1$ است. حال خطی که داشتیم (AB) را به اندازه‌ی یک واحد ادامه می‌دهیم (AD) . مجذور خط (AD) برابر $n^2 + 2n + 1$ است. حال اگر یک مثلث قائم الزاویه رسم کنیم که وتر آن برابر (AD) و یک ضلع آن برابر (AC) باشد؛ مجذور ضلع سوم برابر $2n$ می‌شود. پس ضلع سوم برابر $\sqrt{2n}$ می‌شود که با استفاده از رسم یک مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین می‌توان خطی به طول جذر n ایجاد کرد $(C'E)$.



چند سوال برای تمرین بیشتر:

(الف) ریشه‌ی چهارم ۵ را روی محور اعداد رسم کنید.

(ب) مربعی رسم کنید که مساحت آن برابر ریشه‌ی دوم ۶ باشد.



مبحث علمی: انتخاب



فرض کنید که می‌خواهید ده مهره‌ی رنگی را در ده خانه بچینید. چند حالت برای این کار وجود دارد؟

در خانه‌ی اول ده حالت برای انتخاب داریم؛ اما برای خانه‌ی دوم تنها نه مهره باقی مانده و نه حالت برای انتخاب داریم. برای خانه‌ی سوم هشت حالت و

در نهایت برای خانه‌ی دهم تنها یک حالت برای گذاشتن مهره وجود دارد. پس اگر بخواهیم تعداد کل حالات را پیدا کنیم اعداد ۱ تا ۱۰ در هم ضرب می‌کنیم.

نکته: به ضرب اعداد ۱ تا n ($1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$) برای اختصار n فاکتوریل یا $n!$ می‌گوییم.

پس اگر n مهره را بخواهیم در n خانه بچینیم، $n!$ حالت داریم. حال مسئله را کمی تغییر می‌دهیم. ۱۰ مهره‌ی رنگی داریم و می‌خواهیم ۸ تا از آنها را در ۸ خانه بچینیم.

برای خانه‌ی اول ۱۰ حالت انتخاب داریم. برای خانه‌ی دوم ۹ حالت، برای خانه‌ی سوم ۸ حالت، ... برای خانه‌ی آخر ۳ حالت وجود دارد. پس با ضرب اعداد ۱۰ تا ۲! / ۱۰! می‌نویسیم.

به طور کلی برای چیدن n شیء در r خانه تعداد حالات ممکن برابر $\frac{n!}{(n-r)!}$ است.

حال مسئله را کمی سخت‌تر می‌کنیم. ۱۰ مهره‌ی رنگی داریم و می‌خواهیم ۷ تا از آنها را انتخاب کنیم. چند حالت وجود دارد.

برای چیدن ۷ تا از ۱۰ مهره در ۷ خانه ۱۰! / ۳! حالت وجود دارد. اما در این صورت تعدادی حالت مشابه ایجاد می‌شود که با هم فرقی ندارند؛ زیرا در اینجا ترتیب مهم نیست. برای مثال:

۶-۴-۵-۳-۲-۱ و ۷-۵-۳-۲-۴-۱ با هم یکسان هستند.

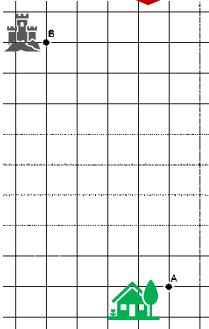
برای رفع این مشکل و در نظر نگرفتن ترتیب مهره‌ها باید این عدد را بر تعداد حالت چیدن ۷ مهره در ۷ خانه ($7!$) تقسیم کنیم. یعنی پاسخ برابر $(7! \times 3) / 10!$ می‌شود.

به طور کلی برای انتخاب r شیء از n شیء تعداد حالات برابر $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ است.

چند سوال جالب مربوط به انتخاب:

الف) ۵۰ نقطه داریم که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط نیستند. به چند حالت می‌توان مثلثی رسم کرد که رأس‌هایش روی این نقاط باشد؟

ب) به چند حالت می‌توان ۶ کتاب فارسی، ریاضی، علوم، اجتماعی، دینی و آمادگی دفاعی را در یک قفسه چید که کتاب دینی و علوم کنار هم نباشند؟



ج) یک نفر می‌خواهد با عبور از خیابان‌های متقاطع از نقطه‌ی A به B برسد و کوتاه‌ترین مسیر را رفته باشد. او از چند مسیر متفاوت می‌تواند حرکت کند؟

د) همین فرد اگر بخواهد از مسیری برود که $\frac{7}{6}$ کوتاه‌ترین مسیر (۱۴ خیابان) باشد؛ از چند مسیر متفاوت می‌تواند حرکت کند.

ه) ۱۲ نفر می‌خواهند دست‌هایشان را به هم بدهند و حلقه‌ای ایجاد کنند. به چند حالت مختلف می‌توانند این حلقه را ایجاد کنند؟

چند سوال حسابی مربوط به مبحث انتخاب:

الف) اگر باز شده‌ی $(x+y)^{10}$ را به صورت استاندارد شده بر حسب x بنویسیم؛ ضرایب اعضای این چند جمله‌ای به ترتیب برابر چه اعدادی است؟ چه رابطه‌ای میان این اعداد و انتخاب وجود دارد؟ چرا؟

$$0^0 = 1$$

$$C_0 = \frac{16 \times 13}{16! \times 13!} + \frac{17 \times 12}{16! \times 12!}$$

$$C_2 = \frac{17 \times 13}{16!}$$

$$C_3 = \frac{17 \times 13 \times 12}{16!}$$

$$C_4 = \frac{17 \times 13 \times 12 \times 11}{16!}$$

$$C_5 = \frac{17 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{16!}$$



ب) به یک مغازه‌ی شکلات‌فروشی رفته‌ایم که سه نوع شکلات دارد: (تلخ، شیری، پسته‌ای) به چند طریق می‌توانیم ۲۰ شکلات از این مغازه بخریم؟

در شماره‌های بعد پاسخ این دو مسئله را بررسی خواهیم کرد.

منابع:

کتاب ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم