به نام او

پاسخنامه تمرینات سری سوم – فصل سوم و چهارم

۱. الف) طبق قوانین دترمینان می‌دانیم:

$$det(B) = 24 \qquad\qquad det(A) = -60$$

$$det(A^2B^{-1}A^{-2}B^2) = det(A^2)\,det(B^{-1})\,det(A^{-2})\,det(B^2)$$

$$= [det(A)]^2 \times \frac{1}{det(B)} \times \left[\frac{1}{\det(A)}\right]^2 \times [det(B)]^2 = 3600 \times (\frac{1}{24}) \times (\frac{1}{3600}) \times 576 = 24$$

ب) برای اینکه ماتریس A معکوس‌پذیر باشد باید $det(A) \neq 0$ باشد.

$$det(A) = (1)(ax^2 + bx) + 0 + c(0 + 1) = ax^2 + bx + c$$

روی علامت Δ بحث می‌کنیم:

$b^2 - 4ac < 0 \quad \rightarrow$ به ازای تمام مقادیر x

$b^2 - 4ac = 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -\frac{b}{2a}$

$b^2 - 4ac > 0 \quad \rightarrow \quad x \neq \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

---

۲. سیستم معادلات به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 5 \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم B ماتریس ضرایب باشد، دترمینان آن برابر ۷ خواهد بود. از آنجاییکه دترمینان مخالف صفر است می‌توانیم از قانون کرامر استفاده کنیم.

$$x = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1(2) - 2(-6) + 1(-4)}{|B|} = \frac{10}{7},$$

$$y = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{0 + 1(-7) - 2(-8)}{|B|} = \frac{9}{7},$$

$$z = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{0 + 1(-8) - 1(-7)}{|B|} = -\frac{1}{7}.$$

۳. ابتدا از تمام نقاط نقطه‌ی (x_1, y_1) (یا هر کدام از دونقطه‌ی دیگر) را کم می‌کنیم تا مثلث به مبدأ انتقال داده شود. حال می‌دانیم مساحت متوازی الاضلاعی که روی بردارهای $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ و $(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ بنا می‌شود برابر است با :

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$= x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2$$

چون مساحت مثلث نصف مساحت متوازی الاضلاع است پس:

$$\{area\ of\ triangle\} = S_\Delta = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2)$$

اکنون حاصل عبارت داده شده در صورت سوال را بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2} det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2) = S_\Delta$$

بنابراین:

$$\{area\ of\ triangle\} = \frac{1}{2} det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

---

۴. با استفاده از عملیات سطری تمام سطرها بجز سطر اول را منهای سطر اول کنید. حال تمام درایه‌های سطرهای ۲ تا n ، ۲- ، ۰ یا ۲ هستند. پس کافی است از هر سطر، ۲ را فاکتور بگیریم که در این صورت داریم:

$$det|A| = 2^{n-1}\, det|B|$$

---

۵. هردوی H و K شامل بردارصفر V می‌باشند چرا که هر دو زیرفضاهایی از V هستند. بنابراین بردار صفر V در $H \cap K$ وجود دارد. اگر u و v در $H \cap K$ باشند آنگاه u و v در H هستند. از آنجاییکه H یک زیرفضا

است، $u+v$ هم در H هستند. به طور مشابه داریم $u\ ,\ v\ ,\ u+v$ در K هستند. بنابراین $u+k$ در $H\cap K$ است.

از طرفی داریم اگر u در $K\cap H$ باشد می‌توان گفت u در H است و از آنجاییکه H یک زیرفضاست، می‌توان گفت cu نیز در H است و به طور مشابه برای K نیز داریم که شامل u و cu می‌باشد. بنابراین cu در اشتراک این دو نیز هست.

اجتماع دو زیرفضا در حالت کلی یک زیرفضا نمی‌باشد. برای مثال، در R^2 اگر H را محور x و K را محور y درنظر بگیریم، هردوی K و H زیرفضاهای R^2 خواهند بود ولی اجتماع آن‌ها تحت عملیات جمع برداری بسته نمی‌باشد. بنابراین اجتماع K و H یک زیرفضا از R^2 نیست.

---

۶. برای هر ماتریس $M\in V$ می‌توانیم $T(M)$ را به صورت زیر بنویسیم :

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که از آن می‌توان برداشت کرد که هر عضو در دامنه T را می‌توان به صورت مجموع خطی از چهار ماتریس زیر نوشت :

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_4=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و این به معنای این است که مجموعه $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ یک پایه برای W می‌باشد . برای اثبات آن باید نشان دهیم که بردار مختصات‌های v_i نسبت به پایه استاندارد , مستقل خطی می‌باشند. پایه استاندارد متشکل از ماتریس‌های زیر می‌باشد:

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\mathbf{e}_5=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\mathbf{e}_6=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

متناسب با پایه استاندارد $B=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ بردار مختصات‌های v_i برابر مقادیر زیر می‌باشند:

$$[\mathbf{v}_1]_B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},[\mathbf{v}_2]_B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},[\mathbf{v}_3]_B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},[\mathbf{v}_4]_B=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای اینکه نشان دهیم این بردارها مستقل خطی می‌باشند، آن‌ها را به ترتیب قرار می‌دهیم و ماتریس زیر را حاصل می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای اینکه نشان دهیم که ستون‌های این ماتریس مستقل خطی می‌باشند، ستون‌های آن را با عملیات سطری ساده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{-1}{3}R_6]{\frac{1}{2}R_2 \quad \frac{-1}{3}R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_6 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_5 \; -2R_6+R_4]{R_3 \; -2R_6+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال چهار ستون این ماتریس به وضوح مستقل خطی می‌باشند. پس ماتریس دارای $rank$ ۴ می‌باشد. پس ماتریس اولیه نیز دارای $rank$ ۴ می‌باشد. درنتیجه مجموعه $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ یک مجموعه مستقل خطی بوده و یک پایه برای W می‌باشد .

---

۷. الف) فرض کنید A نمایش ماتریس تبدیل خطی $T: R^n \to R$ است . پس A ماتریسی غیرصفر و $1 \times n$ می‌باشد . حال از آنجایی که $rank$ ماتریس A برابر ۱ می‌باشد، $rank$ تبدیل T نیز برابر ۱ خواهد بود . حال با توجه به قضیه $rank - nullity$ داریم که $rank(T) + nullity(T) = n$ که نتیجه می‌دهد $nullity(T) = n - 1$.

ب) ادعا میکنیم که n بردار $v_1 , \ldots , v_n - 1, w$ مستقل خطی می‌باشند . فرض کنید به ازای

$c_1 , \ldots , c_n \in R$ داریم که $c_1 v_1 + \ldots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n w = 0$. اگر $c_n \neq 0$ خواهیم داشت $w = \frac{-c_1}{c_n} v_1 + \ldots + \frac{-c_{n-1}}{c_n} v_{n-1}$ که نتیجه می‌دهد $w \in Span(B) = N(T)$ که با فرض سوال تناقض دارد. در نتیجه $c_n = 0$. حال معادله فوق به صورت $c_1 v_1 + \ldots + c_{n-1} v_{n-1} = 0$

در می‌آید که چون B یک پایه می‌باشد، بردار های $v_1 , \ldots , v_n - 1$ مستقل خطی می‌باشند و در نتیجه داریم $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

حال با توجه با این که همه ضرایب $c_1 , \ldots , c_n$ باید صفر باشند، نتیجه می‌گیریم که بردارهای

$v_1 , \ldots , v_n - 1, w$ مستقل خطی می‌باشند. حال چون R^n یک فضای برداری n بعدی می‌باشد و B' شامل n بردار مستقل خطی است، مجموعه B' یک پایه برای R^n می‌باشد.

ج) فرض کنید $u \in R^n$ که چون B' یک پایه برای R^n می‌باشد وجود دارد $c_1, \ldots, c_n \in R$ که

$u = c_1 v_1 + \ldots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n w$ که می‌توان آن را به صورت $u = v + c_n w$ نوشت که $v \in N(T)$.

حال با اعمال ترکیب خطی T بر دو عبارت مساوی خواهیم داشت که:

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}) &= T(\mathbf{v} + c_n \mathbf{w}) \\
&= T(\mathbf{v}) + c_n T(\mathbf{w}) && \text{by linearity of } T \\
&= \mathbf{0} + c_n T(\mathbf{w}) && \text{since } \mathbf{v} \in \mathcal{N}(T) \\
&= c_n T(\mathbf{w}).
\end{aligned}
$$

و از آن جایی که $w \notin N(T)$ مقدار تبدیل $T(w)$ مخالف صفر خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت که

$C_n = \frac{T(u)}{T(w)}$ که از ترکیب آن با رابطه بدست آمده در بالا خواهیم داشت که $u = v + \frac{T(u)}{T(w)} w$ که $v \in N(T)$.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

پاییز ۹۹