۱۳۹۷

۱) الف) نادرست)

$$AB = [Ab_1 \; Ab_2 \; Ab_3]$$

ب) درست) ترانهاده یک ماتریس جای سطر ها و ستون ها را عوض می کند

حال تفاوتی نمی کند که ابتدا دو سطر را باهم جمع کنیم و تبدیل به ستون کنیم

یا اینکه تبدیل به ستون کنیم و بعد جمع کنیم

$$\left(\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

پ)

نادرست)

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} ۹ & ۱۰ \\ ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۴ \\ ۱۵ & ۱۶ \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ & ۷ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۸ \\ ۹ & ۱۱ & ۱۳ & ۱۵ \\ ۱۰ & ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

$$\neq \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۹ & ۱۱ \\ ۲ & ۴ & ۱۰ & ۱۲ \\ ۵ & ۷ & ۱۳ & ۱۵ \\ ۶ & ۸ & ۱۴ & ۱۶ \end{bmatrix} = A^T$$

ت) نادرست

$$A = I \; , \; B = -I \Rightarrow A + B = ۰$$

ماتریس ۰ وارون پذیر نیست.

ط) فرم سطری پلکانی در صورتی وارون پذیر است که دارای ۳ Pivot باشد.

ح) $\det(A^2) = \det^2(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow$ وارون پذیر نیست

د) نادرست، وقتی عبارت درست است که A و B وارون هم باشند.

ه) درست $(AB)^{-1} = BA \Rightarrow \underline{I} = B(AA)B = BB = \underline{I}$

و) معادل عبارت صورت سوال این است که بگوییم ضرب دو ماتریس وارون پذیر، وارون پذیر است که درست است. $C = A \times B \Rightarrow C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ی) نادرست

$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ span R^3

$B_2 = \{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)\}$ span R^3

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$

با توجه به اینکه W_1 و W_2 هردو R^3 می‌شوند و $W_1 \cap W_2 = R^3 \neq \emptyset$ پس عبارت نادرست است.

۲)

$$AD = I \Rightarrow ADb = b$$
$$\left.\begin{array}{l} ADb = b \\ Ax = b \end{array}\right\} \Rightarrow x = Db$$

پس x ای پیدا کردیم که به b وابسته است و در معادله $Ax=b$ به ازای هر b برقرار است پس قسمت اول ثابت می‌شود.

حال با توجه به قضیه ۴ فصل ۱ وقتی $Ax=b$ به ازای هر b جواب دارد، آنگاه ماتریس A ما pivot در m سطر دارند؛ حال اگر تعداد سطرها از ستون ها بیشتر شود ممکن است با تبدیل به فرم نردبانی کاهش یافته سطرهای آخر صفر شود و به ازای هر b برقرار نباشد: $0 \neq b = 1$

۳) الف)

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax_1 = b_1 \Rightarrow x_1 = A^{-1}b_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Ax_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = A^{-1}b_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$Ax_3 = b_3 \Rightarrow x_3 = A^{-1}b_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Ax_4 = b_4 \Rightarrow x_4 = A^{-1}b_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ب)

$$[A\ b_1 b_2 b_3 b_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 12 & 3 & -5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 11 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= [I\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$$

(۴

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & y \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ xA_{11} & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & yA_{11} \\ xA_{11} & xyA_{11}+S \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}}}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & yA_{11} \\ xA_{11} & xyA_{11}+A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{11} = A_{11} & \checkmark \\ yA_{11} = A_{12} \Rightarrow y = A_{12}A_{11}^{-1} & * \\ xA_{11} = A_{21} \Rightarrow x = A_{21}A_{11}^{-1} & ** \\ xyA_{11} + A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = A_{22} \end{cases}$$

* و ** را در عبارت آخر جایگذاری می‌کنیم:

$$\underline{(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}A_{11}^{-1})A_{11}} + \underline{A_{22}} - \underline{A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} = \underline{\underline{A_{22}}} \Rightarrow 0=0 \checkmark$$

پس مقادیر $x = A_{21}A_{11}^{-1}$ و $y = A_{12}A_{11}^{-1}$ برقرار اند

۵)

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & & & \\ n_1 & n_2 & \dots & n_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & (-a_1-a_2\dots a_{n-1}) \\ b_1 & b_2 & \dots & (-b_1-b_2\dots-b_{n-1}) \\ \vdots & & & \\ n_1 & n_2 & \dots & (-n_1-n_2\dots-n_{n-1}) \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه ستون آخر را توانستیم برحسب دیگر ستون های ماتریس A بنویسیم پس مستقل خطی نیست. از طرفی برای اینکه ماتریس $A_{n\times n}$ وارون پذیر باشد باید تمام ستون ها مستقل خطی باشند؛ پس $A_{n\times n}$ وارون پذیر نیست.

۶)

$Aa = x \Rightarrow A^{-1}x = a :$ پاسخ معادله $Aa=x$

یا $LUa=x$

$$\Rightarrow a: \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , x \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$Ab = y \Rightarrow A^{-1}y = b \Rightarrow A^{-2}y = A^{-1}b = c :$ پاسخ معادله $Ac=b$

یا $LUc=b$

ابتدا $\vec{b}$ را حساب می‌کنیم:

$$b: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}x + A^{-2}y = \vec{a} + \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۱۳۹۷

۷)

الف)

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۵ \\ ۰ & -۴ & -۱ & -۷ \\ ۰ & ۳ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۵ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۳ \end{bmatrix} = U \Rightarrow L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ب)

$$Ax=b=\begin{bmatrix} ۸ \\ ۷ \\ ۱۴ \\ -۷ \end{bmatrix} = L\underbrace{Ux}_{y} \Rightarrow Ly=b$$

$$[L\ \vec{b}] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۸ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۷ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۰ & ۱۴ \\ -۱ & -۳ & ۰ & ۱ & -۷ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۹ \\ ۰ & ۴ & ۱ & ۰ & -۱۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۹ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۲۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۲۶ \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۹ \\ ۲۶ \\ -۲۶ \end{bmatrix}$$

$$[U\ y] = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۳ & ۸ \\ ۰ & -۱ & -۱ & ۵ & -۹ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱۳ & ۲۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۳ & -۲۶ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۸ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۵ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱۳ & ۲۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۳ & -۲۶ \end{bmatrix}$$

۱۳۹۷

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۳}{۳} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{۲۸}{۳} & -\frac{۱۳}{۳} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{۱۳}{۳} & \frac{۲۶}{۳} \\ 0 & 0 & 0 & ۱۳ & ۲۶ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ۳ \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} ۳ \\ -1 \\ 0 \\ ۲ \end{bmatrix}$$

۸) الف)

$$[A \; 0] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۲ & ۲ & ۲ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۲ & ۲ & ۲ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_۳ + x_۴ = 0 \\ x_۲ + x_۳ + x_۴ = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -x_۳ - x_۴ \\ -x_۳ - x_۴ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix}$$

$$= x_۳ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u} + x_۴ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v} \Rightarrow \{u, v\}$$: null space basis for A

ب) فرم نردبانی کاهش یافته A با توجه به محاسبات (الف) می‌شود:

$$A \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} & b_۲ & & b_۴ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & & b_۳ & \end{matrix} \end{array}$$

ستون‌های b_1 و $b_۲$ که مستقل خطی و pivot هستند،

تشکیل پایه برای فضای ستون A می‌دهند.

پ) با توجه به فرم نردبانی کاهش یافته ماتریس A در مورد ب) دو سطر اول تشکیل یک پایه برای فضای سطری ماتریس A می‌دهند: $\{(1,0,1,1),(0,1,1,0)\}$

۶)

با توجه به معادله $x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$ می‌توان (مثلاً) متغیر x_1 را برحسب سایرین نوشت و بقیه متغیرها از هم مستقل اند پس ۳ ستون محوری در ماتریس تبدیل T که 4×3 است داریم پس مجموعه جواب غیرصفر $Ax=0$ تهی است که یعنی $null(T)=\{0\}$ است.

$$T(x_2, x_3, x_4) = (x_2 - 2x_3 - 4x_4, x_2, x_3, x_4)$$

$$T(x) = Ax$$

$$T(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

ما ۲) الف) ابتدا ثابت می‌کنیم که $Col(A+B) \subseteq Col(A)+Col(B)$

طبق تعریف، $Col(A)$ مجموعه بردارهای مستقل خطی ستون‌های A است که می‌توان به عنوان زیرفضای

یک فضای مشخص در نظر گرفت و با استفاده از ویژگی زیرفضا که اگر بردار a و b در زیرفضا باشند

$a+b$ نیز موجود است ثابت می‌شود: $\{a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n\} \subseteq$

$\{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\}$

حال به اثبات سوال می‌پردازیم: $Col(A+B) \leq Col(A)+Col(B)$

$$\dim(Col(A+B)) \leq \dim(Col(A)+Col(B)) = \dim Col(A) + \dim Col(B) - \dim Col(A) \cap \dim Col(B)$$

$$\Rightarrow rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B) - \underbrace{X}_{\geq 0} \leq rank(A) + rank(B)$$

ب) II: $rank\, AB = \dim Col\, AB$

$$v \in Col(AB) \Rightarrow ABx = v ,\ x \neq 0 \Rightarrow A\underbrace{(Bx)}_{y} = v$$

به این معنی که هر بردار v را در $Col(AB)$ در نظر بگیریم که در $Col(A)$ موجود است پس:

$$Col(AB) \subseteq Col(A) \Rightarrow \underbrace{\dim Col(AB)}_{rank(AB)} \leq \underbrace{\dim Col(A)}_{rank(A)}$$