۱) الف: درست: چون row operation ها بر روی این دو ماتریس تنها ما را به یک فرم کاهش یافته نردبانی می‌رسانند

ب) درست: چون مجموعه جواب $Ax=b$ تنها انتقال یافته معادله $Ax=0$ است

ج) نادرست: چون راست‌ترین ستون باید خالی از Pivot باشد تا به تناقض برنخوریم

د) درست: اگر فرض کنیم یکتا نیست به ازای یک دستگاه دو جواب بدست آورده‌ایم که تناقض است

هـ) نادرست: دو ماتریس معادل سطری اند اگر بر روی آنها تنها عملیات سطری انجام شده باشد.

و) درست: به همین دلیل در الگوریتم حل دستگاه از آن استفاده می‌کنیم.

۲)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7}{3},\ x_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{7}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۳)

$$4T_1 = 10 + 20 + T_2 + T_4$$
$$4T_2 = 40 + 20 + T_3 + T_1$$
$$4T_3 = 40 + 30 + T_2 + T_4$$
$$4T_4 = 30 + 10 + T_3 + T_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_4 = 30 \\ T_1 - 4T_2 + T_3 = -60 \\ -T_2 + 4T_3 - T_4 = 70 \\ -T_1 - T_3 + 4T_4 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & -60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0 & -0.25 & 7.5 \\ 0 & -3.75 & 1 & 0.25 & -67.5 \\ 0 & -0.25 & -1 & 3.75 & 47.5 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.07 & -0.27 & 12 \\ 0 & 1 & -0.27 & 0.07 & 18 \\ 0 & 0 & 3.73 & -1.07 & 88 \\ 0 & 0 & -1.07 & 3.73 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.29 & 13.57 \\ 0 & 1 & 0 & -0.14 & 24.29 \\ 0 & 0 & 1 & -0.29 & 23.57 \\ 0 & 0 & 0 & 3.43 & 77.14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 27.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22.5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = 25 \\ T_2 = 27.5 \\ T_3 = 30 \\ T_4 = 22.5 \end{cases}$$

۴) چون هر سه نقطه روی یک خط قرار دارند پس ماتریس افزوده چیزی مانند روبرو می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ia & ja & ka & 0 \\ ib & jb & kb & 0 \\ ic & jc & kc & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & j & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که دستگاه دارای متغیر آزاد است پس دارای جواب غیر بدیهی است

پس نهایتاً این دستگاه وابسته خطی است.

۵)

$$[A\,b]=\begin{bmatrix}2&3&1&1&4\\1&2&0&-1&1\\3&4&2&4&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1{,}33&0{,}67&1{,}33&3\\0&0{,}33&-0{,}33&-1{,}67&-2\\0&0{,}67&-0{,}67&-2{,}33&-2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&2&6&7\\0&1&-1&-3{,}5&-3\\0&0&0&-0{,}5&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&0&-5\\0&1&-1&0&4\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_3-5\\x_2=x_3+4\\x_3 \text{ is free}\\x_4=2\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2x_3-5\\x_3+4\\x_3\\2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-5\\4\\0\\2\end{bmatrix}}_{p}+\underbrace{x_3}_{t}\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}}_{v}$$

$$AP=\begin{bmatrix}2&3&1&1\\1&2&0&-1\\3&4&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\4\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\9\end{bmatrix}\checkmark\quad,\quad Av=\begin{bmatrix}2&3&1&1\\1&2&0&-1\\3&4&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\checkmark$$

الف) اگر معادله $Ax=0$ را حل کنیم به جواب روبرو می‌رسیم $x_3\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$

پس جواب وجود دارد و سازگار است.

ب) با توجه به عبارت الف) و وجود متغیر آزاد دستگاه جواب غیر بدیهی دارد پس بیشمار جواب دارد که هرکدام وابسته به $x_3$ است.

۶) الف)

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰٫۳۳ & ۰٫۳۳ & ۱ \\ ۰ & -۱٫۳۳ & -۱٫۳۳ & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = -x_۳ \\ x_۳ \text{ is free} \end{array} \Rightarrow L: \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + x_۳ \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \end{array}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$v_۱ \quad v_۲ \quad v_۳ \quad b$$

با توجه به اینکه $v_۲ = v_۳$ درنتیجه $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ وابسته خطی اند پس مجموعه جواب همان مجموعه جواب بالاست

ب)

$$[A \; ۶x] = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ & ۱ & ۶x \\ -۱ & ۴ & -۱ & ۶y \\ ۱ & -۱ & ۴ & ۶z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ & ۶z \\ ۰ & ۳ & ۳ & ۶(z+y) \\ ۰ & ۳ & -۱۵ & ۶(x-۴z) \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۵ & ۲(۴z+y) \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲(z+y) \\ ۰ & ۰ & ۱۸ & ۶(۵z+y-x) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳}(-z+y+۵x) \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۳}(z+۵y+x) \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳}(۵z+y-x) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{۱}{۳}(-z+y+۵x) \\ y = \frac{۱}{۳}(z+۵y+x) \\ z = \frac{۱}{۳}(۵z+y-x) \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰٫۵ & -۰٫۵ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۱٫۵ & ۰ \\ ۰ & ۱٫۵ & ۱٫۵ & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = z \\ z \text{ is free} \end{array}$$

۷) الف)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}}_{c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + bx = x \\ cx + dx = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a+b=1 \Rightarrow b = 1-a \\ c+d=-1 \Rightarrow c=-d-1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ -d-1 & d \end{bmatrix}$$

ب)

$$T(e_1+e_2+e_3) = T(e_1)+T(e_2)+T(e_3) = e_1+e_3$$

$$T(2e_1+3e_2+5e_3) = 2T(e_1)+3T(e_2)+5T(e_3) = 2e_2-e_3$$

$$T(e_2+2e_3) = T(e_2)+2T(e_3) = e_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & e_1+e_3 \\ 2 & 3 & 5 & 2e_2-e_3 \\ 0 & 1 & 2 & e_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 2/5 & e_2-e_3 \\ 0 & -0/5 & -1/5 & \frac{3}{2}e_3-\overset{\bar{2}}{e_2}+e_1 \\ 0 & 1 & 2 & e_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0/5 & -\frac{3}{2}e_1+e_2-\frac{e_3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & e_1 \\ 0 & 0 & -0/5 & \frac{3}{2}e_3-e_2+\frac{3}{2}e_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3e_1+2e_2-2e_3 \\ 0 & 1 & 0 & 7e_1+6e_3-4e_2 \\ 0 & 0 & 1 & -3e_3+2e_2-3e_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(e_1) = -3e_1+2e_2-2e_3$$

$$T(e_2) = 7e_1-4e_2+6e_3$$

$$T(e_3) = -3e_1+2e_2-3e_3$$

$$\Rightarrow T(x) = T(e_1, e_2, e_3) = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

۸) $P$ مجموعه مستقل خطی است $P = \{T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_k)\}$

پس:

$$c_1 T(x_1) + c_2 T(x_2) + c_3 T(x_3) + \dots + c_k T(x_k) = 0$$

$$\xRightarrow{T(cx)=cT(x)} T(c_1 x_1) + T(c_2 x_2) + T(c_3 x_3) + \dots + T(c_k x_k) = 0$$

$$\xRightarrow{T(x)+T(y)=T(x+y)} T(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_k x_k) = 0$$

$$\xRightarrow{T \text{ خطی است}} c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_k x_k = 0$$

درنتیجه مجموعه $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ مستقل خطی است

۹)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

الف) چون ستون‌های $A$، $R^2$ را span می‌کنند پس پوشا است.

چون 〃 〃 مستقل خطی‌اند پس یک به یک است.

ب)

$$M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \text{ و } N=\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}$$

$$T(M+N)=T(M)+T(N)$$

$$T(M+N)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+a' & b+b'\\ c+c' & d+d'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a+a')-(c+c') & (b+b')-(d+d')\\ 2(a+a')+4(c+c') & 2(b+b')+4(c+c')\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}a-c & b-d\\ 2a+4c & 2b+4c\end{bmatrix}}_{T(M)}+\underbrace{\begin{bmatrix}a'-c' & b'-d'\\ 2a'+4c' & 2b'+4c'\end{bmatrix}}_{T(N)}=T(M)+T(N)$$

با توجه به اینکه $T(MK)=T(\underbrace{K+K+\dots+K}_{m \text{ تا}})$ و $KT(M)=\underbrace{T(M)+T(M)+\dots+T(M)}_{k \text{ تا}}$

و اثبات بالا ثابت می‌شود: $T(KM)=KT(M)$

پس تبدیل خطی است.

$$\vec{M} = ax + b \qquad \vec{N} = a'x + b'$$

$$T(M+N) = T(M) + T(N):$$

$$'' \quad = T\big((a+a')x + (b+b')\big) = (a+a')\frac{x^2}{2} + (b+b')x$$

$$= \left(a\frac{x^2}{2} + bx\right) + \left(a'\frac{x^2}{2} + b'x\right) = T(M) + T(N)$$

$$T(kM) = k\,T(M):$$

$$T(kM) = T\big(k(ax+b)\big) = \frac{akx^2}{2} + bkx$$

$$= k\left(\frac{ax^2}{2} + bx\right) = k\,T(M)$$

۱۰) الف

$$T(e_1+e_2) = e_1 - 2e_2 = T(e_1) + T(e_2)$$

$$T(2e_2+3e_2) = -2e_1 + 5e_2 = 2Te_1 + 3T(e_2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & e_1 - 2e_2 \\ 2 & 3 & -2e_1 + 5e_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & e_1 - 2e_2 \\ 0 & 1 & -4e_1 + 9e_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5e_1 - 11e_2 \\ 0 & 1 & -4e_1 + 9e_2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow T(e_1) = 5e_1 - 11e_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = -4e_1 + 9e_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$$

ب)

$$x = I_n x = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \cdots + \vec{e}_n x_n$$

$$\Rightarrow T(x) = T(\vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \cdots + \vec{e}_n x_n)$$

$$\xRightarrow{T \text{ خطی}} T(x) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \cdots + x_n T(\vec{e}_n)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & T(\vec{e}_3) & \cdots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = A\vec{x}$$