به نام او

پاسخنامه تمرینات سری دوم – فصل دوم

۱. الف) درست. طبق محتوای قسمت ماتریس های بلوکی.

ب) درست. طبق قضیه ۳ قسمت b (صفحه ۹۹ کتاب)

پ) نادرست زیرا : $A^T = \begin{bmatrix} P^T & R^T \\ Q^T & S^T \end{bmatrix}$

ت) نادرست. مثال نقض: ماتریس همانی یکه و قرینه آن

ث) نادرست. اطلاعات کافی برای تصمیم گیری در مورد معکوس پذیری داده نشده است.

ج) نادرست. $A^2 = 0 \xrightarrow{\times A^{-1}} (A^{-1}A)A = 0 \times A^{-1} \rightarrow IA = 0 \rightarrow A = 0$

د) نادرست. مثال نقض :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow AB \neq BA$$

ه) درست: $\begin{cases} A^2 = I \rightarrow A = A^{-1} \\ B^2 = I \rightarrow B = B^{-1} \end{cases} \rightarrow BA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

و) درست. فرض کنیم $Av_1 = y_1$ و $Av_2 = y_2$.

می توانیم A^{-1} را از راست در عبارت بالا ضرب کنیم:

$$\rightarrow C_1A^{-1}y_1 + C_2A^{-1}y_2 = 0 \rightarrow C_1A^{-1}Av_1 + C_2A^{-1}Av_2 = 0 \rightarrow C_1v_1 + C_2v_2 = 0$$

چون می دانیم که v_1 و v_2 مستقل هستند پس C_1 و C_2 هم صفر هستند. پس می توانیم نتیجه بگیریم که y_1 و y_2 هم مستقل هستند.

ی) نادرست. مثال نقض:

می توانیم بگوییم که w_1 و w_2 اگر فضای R^2 باشند در نتیجه اشتراک آن ها هم R^2است؛ و اگر فرض کنیم مقادیر B به صورت زیر باشد:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ and } B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

اشتراک B_1 و B_2هم تهی است و می‌دانیم که تهی پایه ی R^2 نیست.

۲. هر b در R^n را برمی‌داریم. فرض می‌کنیم $ADb = I_m b = b$. معادله را به صورت $A(Db)b$ بازنویسی می‌کنیم. بنابراین بردار $x = Db$ در معادله $Ax = b$ صدق می‌کند. این اثبات می‌کند که معادله $Ax = b$ به ازای هر b در R^n دارای جواب است. با استفاده از قضیه ۴ کتاب در بخش ۱.۴ میتوان گفت A در هر ردیف دارای یک $pivot\ position$ است. از آنجایی که هر عنصر $pivot$ در یک ستون مجزاست، تعداد ستون های A باید حداقل برابر با تعداد ردیف‌هایش باشد.

---

۳. الف)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 12 - 2\cdot 5}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2.5 & .5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -18 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}, A^{-1}\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}, A^{-1}\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

ب)

$$[A\ \ \mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2\ \ \mathbf{b}_3\ \ \mathbf{b}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 12 & 3 & -5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 11 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

جواب‌ها: $\begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ and } \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix},$

---

۴. ماتریس‌های سمت راست را ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ XA_{11} & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{bmatrix}$$

حال از آن جایی‌که که ماتریس حاصل مساوی با ماتریس سمت راست است:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = A_{11}Y$$
$$A_{11}^{-1}A_{12} = Y$$

$$A_{22} = XA_{11}Y + S$$
$$A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{11}A_{11}^{-1}A_{12} + S$$
$$A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + S$$
$S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, just as the definition said

$$A_{21} = XA_{11}$$
$$A_{21}A_{11}^{-1} = X$$

بنابراین $X = A_{21}A_{11}^{-1}$.

$Y = A_{11}^{-1}A_{12}$

---

۵. ماتریس A را به صورت $A = [a_1 a_2 \dots \dots \dots a_n]$ در نظر می‌گیریم. که a_i ها ستون‌های A باشند. ثابت می‌کنیم معادله‌ی $Ax = 0$ جواب غیر بدیهی دارد.

$$A = [a_1 a_2 \dots \dots \dots a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_3x_3 = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

کافی است X را برداری در نظر بگیریم که تمام درایه های آن ۱ است که طبق فرض سوال:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس $Ax = 0$ جوابی غیر از $x = 0$ دارد و وارون ناپذیر است.

---

۶. ابتدا عبارت مورد نظر را به صورت زیر می نویسیم:

$$A^{-1}(x + A^{-1}y)$$

$$A^{-1}y = z \implies y = Az = LUz \implies Uz = w \implies y = Lw$$

چون ماتریس L و y را داریم می‌توانیم معادله بالا را به صورت زیر حل کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حال w را در معادله قبلی جایگذاری می‌کنیم:

$$Uz = w \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}y = z = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x + A^{-1}y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای حل معادله کلی از اطلاعات بالا استفاده می‌کنیم:

$$A^{-1}(x + A^{-1}y) \Rightarrow a = x + A^{-1}y \Rightarrow A^{-1}(x + A^{-1}y) = A^{-1}a = b$$

$$\Rightarrow a = Ab \Rightarrow a = LUb \Rightarrow p = Ub$$

با استفاده از ماتریس L و a می‌توانیم ماتریس p را بدست آوریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

در نهایت با استفاده از ماتریس U و p به ماتریس b که همان جواب معادله است می‌رسیم.

$$p = Ub \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = A^{-1}(x + A^{-1}y)$$

---

۷. الف) ابتدا با انجام مراحل $(E_2 - 2E_1) \to (E_2), (E_3 - 3E_1) \to (E_3), (E_4 - (-1)E_1) \to (E_4),$ $(E_3 - 4E_2) \to (E_3), (E_4 - (-3)E_2) \to (E_4)$ سیستم فوق را به ماتریس مثلثی زیر تبدیل می‌کنیم :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad + \ 3x_4 &= 4, \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7, \\ 3x_3 + 13x_4 &= 13, \\ -13x_4 &= -13. \end{aligned}$$

حال حاصلضرب m_{ij} و ماتریس بالا مثلثی , تجزیه زیر را می‌سازند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} = LU$$

ب) معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

که برای حل آن از جایگزینی $y = Ux$ استفاده می‌کنیم. درنیتجه داریم:

$$L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

که ماتریس y نیز به سادگی به صورت زیر بدست می آید :

$$\begin{aligned} y_1 &= 8; \\ 2y_1 + y_2 &= 7, \quad \text{so } y_2 = 7 - 2y_1 = -9; \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 &= 14, \quad \text{so } y_3 = 14 - 3y_1 - 4y_2 = 26; \\ -y_1 - 3y_2 + y_4 &= -7, \quad \text{so } y_4 = -7 + y_1 + 3y_2 = -26. \end{aligned}$$

سپس معادله $Ux = y$ را برای بدست آوردن x (جواب مسئله) به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 26 \\ -26 \end{bmatrix}$$

که با استفاده از جایگزینی عقب گرد جواب آن به سادگی بدست می‌آید که داریم $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

۸. الف) برای این که یک پایه برای فضای پوچ $N(A)$ بیابیم , ابتدا یک توصیف جبری از $N(A)$ میابیم. به یاد بیاورید که $N(A)$ شامل جواب های دستگاه همگن $AX = 0$ می‌باشد. حال جواب های این دستگاه را با انجام عملیات‌های سطری بر روی ماتریس افزونه $[A|0]$ به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4-2R_2]{R_3-R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

در نتیجه داریم که

$$x_1 = -x_3 - x_4$$
$$x_2 = -x_3 - x_4$$

پس اعضای $N(A)$ به فرم زیر خواهند بود:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که در نتیجه پایه‌های آن مجموعه زیر می‌باشد :

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(به سادگی میتوان دید که این بردار ها مستقل خطی‌اند؛ در نتیجه می‌توانند یک پایه برای فضای $N(A)$ باشند)

ب) توجه کنید که ما فرم کاهش‌یافته سطری ماتریس A را در قسمت الف بدست آورده‌ایم (قسمت افزونه را نادیده بگیرید). از آنجایی که دو ستون اول دارای درایه پیشروی ۱ می‌باشند در نتیجه داریم که مجموعه زیر یک پایه برای $range(A)$ می‌باشد.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ج) دوباره با توجه به فرم کاهش یافته ماتریس A در قسمت الف می‌بینیم که دو بردار غیر صفر زیر یک پایه برای فضای سطری ماتریس فوق می‌باشند.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

۹. برای هر بردار x متعلق به V به فرم $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ داریم که:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 - 2x_3 - 6x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید که v_1 , v_2 , v_3 بردارهایی باشند که در ترکیب خطی بالا برای بردار x ظاهر می‌شوند. به سادگی میتوان دید که مجموعه $B = \{v_1 , v_2 , v_3\}$ یک پایه برای فضای V می‌باشد. حال تبدیل خطی $T : R^3 \rightarrow R^4$ را به صورت $T(x) = Ax$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون B یک پایه برای فضای V است، درنتیجه یک مجموعه مستقل خطی بوده که نتیجه می‌دهد که ستون های A مستقل خطی هستند پس داریم $N(T) = N(A) = \{0\}$.

همچنین می‌دانیم که دامنه T برابر دامنه A (فضایی که ستون های A اسپن می‌کنند) می‌باشد. در نتیجه داریم $R(T) = Span(B) = V$.

حال با توجه به تعریف ما از ماتریس T ، نمایش آن به فرم ماتریس A می‌باشد که فرمول صریح‌تری از آن به صورت زیر می‌باشد:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 - 6x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

---

۱۰. اثبات قسمت راهنمایی:

فرض کنید $n = dim(U)$ ، $m = dim(V)$ و $B_1 = \{u_1 , \dots , u_n\}$ یک پایه برای فضای برداری U باشد و $B_2 = \{v_1 , \dots , v_m\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد .

حال یک بردار دلخواه از فضای برداری $U + W$ به فرم $x + y$ میباشد که $x \epsilon U$ و $y \epsilon V$ و از آنجایی که B_1 یک پایه برای فضای U می‌باشد، می‌توانیم بنویسیم $x = r_1 u_1 + \dots + r_n u_n$. و به طور مشابه $y = s_1 v_1 + \dots + s_m v_m$.

پس داریم $x + y = r_1 u_1 + \dots + r_n u_n + s_1 v_1 + \dots + s_m v_m$. و چون $x + y$ در $S := Span(u_1 , \dots , u_n , v_1 , \dots , v_m)$ قرار دارد. در نتیجه داریم $U + V \subset S$ و این نتیجه می‌دهد که $dim(U + V) \le dim(S) \le n + m = dim(U) + dim(V)$.

الف) فرض کنید $A = [a_1, \dots , a_n]$ و $B = [b_1, \dots , b_n]$ که a_i و b_i بردار ستون‌های ماتریس A و B می‌باشند.

می‌دانیم که $rank$ ماتریس A برابر $dimension$ فضای ستونی ماتریس A می‌باشد. یعنی

$rank(A) = dim(Span(a_1, \dots , a_n))$ و به طور مشابه $rank(B) = dim(Span(b_1, \dots , b_n))$ و

$rank(A + B) = dim(Span(a_1 + b_1 , \dots , a_n + b_n))$ چرا که $A + B = [a_1 + b_1 , \dots , a_n + b_n]$

.

ادعا میکنیم که $Span(a_1 + b_1 , \dots , a_n + b_n) \subset Span(a_1, \dots , a_n) + Span(b_1, \dots , b_n)$

برای هر بردار که $x \in Span(a_1 + b_1 , \dots , a_n + b_n)$ می‌توانیم بنویسیم

$$x = r_1(a_1 + b_1) + \dots + r_n(a_n + b_n)$$

و داریم که

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= r_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) + \cdots + r_n(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \\ &= (r_1\mathbf{a}_1 + \cdots + r_n\mathbf{a}_n) + (r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n) \\ &\in \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n), \end{aligned}$$

در نتیجه ادعای ما اثبات می‌شود .

سپس داریم که

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}(A + B) \\ &= \dim(\,(\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)\,) \\ &\le \dim(\,\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)\,) \\ &\le \dim(\,\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)\,) + \dim(\,\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)\,) \\ &= \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B). \end{aligned}$$

که در اینجا از $dim(U + V) \le dim(U) + dim(V)$ استفاده کردیم .

ب) ۱) (امتیازی) می‌دانیم که $rank$ ماتریس M برابر $dimension$ دامنه $R(M)$ ماتریس M می‌باشد درنتیجه داریم:

$$rank(AB) = dim(R(AB)) \quad , \quad rank(A) = dim(R(A))$$

به طوری کلی اگر فضای V زیرفضایی از فضای برداری W باشد داریم که $dim(V) \leq dim(W)$.

در نتیجه کافی است نشان دهیم که $R(AB)$ زیرمجموعه‌ای از فضای برداری $R(A)$ است.

برای هر بردار $y \epsilon R(AB)$ برداری مانند $x \epsilon R^t$ وجود دارد که $y = (AB)x$ (با توجه با تعریف دامنه)

فرض کنید $z = Bx \epsilon R^n$ در نتیجه داریم $y = A(Bx) = Az$.

و چون بردار y درون $R(A)$ قرار دارد در نتیجه $R(AB)$ زیرمجموعه‌ای از $R(A)$ می‌باشد و داریم که

$$\text{rank}(AB) = \dim(\mathcal{R}(AB)) \leq \dim(\mathcal{R}(A)) = \text{rank}(A)$$

ب) ۲) چون ماتریس B نامنفرد است ، معکوس پذیر است. در نتیجه وارون ماتریس B به صورت B^{-1} وجود دارد. قسمت الف را به ازای دو ماتریس AB و B^{-1} به جای ماتریس های A و B در نظر بگیرید. در نتیجه خواهیم داشت:

$$rank((AB)B^{-1}) \leq rank(AB)$$

که از ترکیب آن با قسمت الف خواهیم داشت:

$$rank(A) = rank((AB)B^{-1}) \leq rank(AB) \leq rank(A)$$

درنتیجه همه نامساوی ها در اصل تساوی می‌باشند در نتیجه خواهیم داشت:

$rank(AB) = rank(A)$

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

پاییز ۹۹