Subject
Date

علی اسد ۹۸۳۱۰۰۴

۱- الف) ✗ - ممکن است آن مجموعه H را span نکند

$S=\{e_1,e_2\}$ و $H=\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow H \neq \text{span}\ S$

ب) ✓ - با توجه به spanning set مفید، است است.

پ) ✓ - چون یک فضای برداری n بعدی، برای span شدن به n بردار مستقل خطی نیاز دارد

و اگر مجموعه ما $n-1$ بردار داشته باشد، لزوماً آن را span نمی‌کند. پس برای پایه شدن باید بزرگترین مجموعه باشد

ج) ✗ - چون عملیات‌های سطری، فضای ستونی ماتریس A را تغییر می‌دهند پس باید

ستون‌های محوری خود A در نظر گرفته شود نه فرم کاهش یافته آن.

۲- بنابر برهان خلف فرض می‌کنیم که w را حداکثر می‌توان به یک فرم ترکیب خطی v_1 تا v_4 نوشت

که دو حالت می‌شود: ① نمی‌توان w را به فرم ترکیب خطی $v_1 \dots v_4$ نوشت که تناقض با فرض $w \in V$ است

② w را می‌توان تنها به یک فرم واحد ترکیب خطی $v_1 \dots v_4$ نوشت:

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = \underbrace{[v_1, v_2, v_3, v_4]}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}}_{x} = w$$

حال چون w یکتاست پس ماتریس A باید در هر سطر pivot داشته باشد که یعنی $v_1 \dots v_4$ مستقل خطی اند

در صورتی که فرض سوال می‌گوید $v_1 \dots v_4$ وابسته خطی‌اند ※ $\Rightarrow$ حکم برقرار است.

RAPCO

۳) با توجه به تعریف بردارهای مختصات:

$$\begin{cases} 2a_1 + 1a_2 = v_1 \\ -2a_1 - 4a_2 = v_2 \end{cases}$$

$$+ \quad -3a_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(v_1 - a_2) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

از طرفی می‌دانیم

$$P_{B\leftarrow A} = \begin{bmatrix} [a_1]_B & [a_2]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$[a_1]_B = \begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6b_1 + 7b_2 = a_1 \\ -5b_1 - 6b_2 = a_2 \end{cases} \Leftarrow [a_2]_B = \begin{bmatrix}-5\\-6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad b_2 = -6a_2 - 5a_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}, \quad b_1 = 7a_2 + 6a = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \left\{ a_1 = \begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ b_1 = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} \right\}$$

۴) الف)

$$[v]_B : x_1 b_1 + x_2 b_2 = v \Rightarrow [b_1 \; b_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = v$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

$$[v]_C : y_1 c_1 + y_2 c_2 = v \Rightarrow [c_1 \; c_2]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = v$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow [v]_C = \begin{bmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

۴) ب

$$[c_1 \; c_2 \; b_1 \; b_2] \sim [I \;\; P_{C \leftarrow B}]$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{11}{7} & \frac{19}{7} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{19}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ \frac{11}{2} & \frac{19}{2} \end{bmatrix}$$

$$(P_{C \leftarrow B})^{-1} = P_{B \leftarrow C} = \frac{1}{-3 \times \frac{19}{2} + 5 \times \frac{11}{2}} \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & 5 \\ -\frac{11}{2} & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{19}{2} & -5 \\ \frac{11}{2} & +3 \end{bmatrix}$$

Subject

Date

ه)

$$\alpha = \{x^2+x+1 ,\ x^2+1 ,\ x-1\} \Rightarrow \overrightarrow{[\alpha]}_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \right\}$$

$$\beta = \{2x^2+3x+1 ,\ 2x^2+2x+1 ,\ -x^2-2\} \Rightarrow \overrightarrow{[\beta]}_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix} \right\}$$

$$P_{\beta\leftarrow\alpha} : \ [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] \sim [I\ \ P_{\beta\leftarrow\alpha}]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{\beta\leftarrow\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$(P_{\beta\leftarrow\alpha})^{-1} = P_{\alpha\leftarrow\beta} : \ [P_{\beta\leftarrow\alpha} , I] \sim [I , P_{\alpha\leftarrow\beta}]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{\alpha\leftarrow\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} : \ \overrightarrow{[P(x)]}_{\alpha} = P_{\alpha\leftarrow\beta}\, \overrightarrow{[P(x)]}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (2+2-3 ,\ 0+2+0 ,\ 1+2+3) = (1 , 2 , 6)$$

۶) الف)

$$\det(A - I\lambda) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)\Big(\underbrace{(3-\lambda)(-\lambda)+2}_{\lambda^2-3\lambda+2}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 ,\ \lambda = 1$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{b_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_2}$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_3}$$

مجموعه بردارهای ویژه: $\{b_1, b_2, b_3\}$

$$P = [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \overset{?}{=} PDP^{-1} \Rightarrow AP \overset{?}{=} PD \xrightarrow{①,②} AP = PD \checkmark$$

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{①},\quad PD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{②}$$

۷) الف)

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&b&c\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{bmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\a&b&c-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$=-\lambda\left(-\lambda(c-\lambda)-b\right)-0+a(1-0)$$

$$=-\lambda^3+\underline{c}\,\lambda^2+\underline{b}\,\lambda+\underline{a}=-\lambda^3+\underline{4}\,\lambda^2+\underline{5}\,\lambda+\underline{6}$$

$$\Rightarrow c=4,\ b=5,\ a=6 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&5&4\end{bmatrix}$$

ب)

$$Ax=\lambda x \xrightarrow{\times A^{-1}} x=A^{-1}\lambda x=\lambda A^{-1}x$$

$$\xrightarrow{\lambda\neq 0} x\times\frac{1}{\lambda}=A^{-1}x$$

$$\Rightarrow A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$$

۸)

$$A=PDP^{-1}\ ,\quad A=\begin{bmatrix}4&5\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix}-\lambda+4&5\\-1&-\lambda-2\end{bmatrix}\right)=(\lambda-4)(\lambda+2)+5=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=-1,3$$

$$\lambda_1=-1:\ \begin{bmatrix}5&5\\-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{x_1=-x_2}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_2\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}_{b_1}$$

$$\lambda_2=3:\ \begin{bmatrix}1&5\\-1&-5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&5\\0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{x_1=-5x_2}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_2\underbrace{\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}}_{b_2}$$

$$P=[b_1,b_2]=\begin{bmatrix}-1&-5\\1&1\end{bmatrix}\ ,\ D=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}\ ,\ P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&5\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$A^n=PD^nP^{-1}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}-1&-5\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5\\-1&-1\end{bmatrix}\times\frac{1}{4}$$

$$=A^n=\begin{bmatrix}(-1)^{n+1}&-5\times3^n\\(-1)^n&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^{n+1}+5\times3^n&5(-1)^{n+1}\\\boxed{(-1)^n-3^n}&5(-1)^n-3^n\end{bmatrix}\times\frac{1}{4}$$

$(-1)^n-3^n\times\frac{1}{4}\in Z$ چون تمامی index های A عدد صحیح اند، A^n نیز index های صحیح دارد (بس)

$\Rightarrow (-1)^n-3^n \% 4=0$

۹) الف

$$\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1-\lambda = \pm i \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1+i \Rightarrow A - (1+i)I = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases}$$

از آنجایی که دو عبارت بالا ضریب هم هستند پس عبارت مدنظر را درست می‌کنند:

$$\Rightarrow x = +iy \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y \underbrace{\begin{bmatrix} +i \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_1}$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \Rightarrow \text{if } \lambda_2 = 1-i \Rightarrow b_2 = \overline{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_2}$$

$$\underbrace{\lambda_1 \lambda_2} = (1+i)(1-i) = 1+1 = 2 = \underbrace{\det A} = 1\times 1 - (-1\times 1) = 2$$

$$\underbrace{\lambda_1 + \lambda_2} = (1+i) + (1-i) = 2 = \underbrace{\operatorname{trace}(A)} = 2$$

$$\det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = +(2-\lambda)\left((-\lambda)^2 - 4\right) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ و } -2$$

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow B - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = z \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_1} + y \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_2}$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow B - \lambda I = \begin{bmatrix} +2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{b_3}$$

$$\det B = -(2\times 2\times 2) = -8 = \lambda_1^2 \lambda_2 = -8$$

$$\operatorname{trace} B = 2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2$$

۹) ب)

$$P^{-1} = [b_1 \; b_2] = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$P = (P^{-1})^{-1} = \frac{1}{i+i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & -1 \\ -i & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} \times C \times P = \begin{bmatrix} -1+i & -1-i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \times P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

۱۰) الف)

$$[P_1(x)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad [P_2(x)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

فضای P_2 را می‌توان با پایه $B=\{1, x, x^2\}$ حساب کرد پس:

$$[P_3(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} , \quad [P_4(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود ۳ ستون اول دارای leading Entry اند پس:

بنا بر تئوری ۱۲ کتاب درسی اگر فضای P_2 که ۳ بعدی باشد (که اینطور است) هر مجموعه مستقل

خطی ۳ بعدی در آن یک پایه برای P_2 حساب می‌شود پس $B' = \{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$

پایه‌ای برای P_2 است.

ب) باید ضرایب x_1، x_2 و x_3 را در معادله $P_4(x) = x_1 P_1(x) + x_2 P_2(x) + x_3 P_3(x)$ را بدست بیاوریم

با توجه به فرم نردبانی A در بخش الف، $x_3 = -3$ و $x_2 = 11$ و $x_1 = -4$ می‌شود پس:

$$[P_4(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix}$$