به نام او

پاسخنامه تمرینات سری پنجم – فصل ششم و هفتم

۱. طبق فرمول تصویر عمود:

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u$$

$$y \cdot u = (2,3) \cdot (4,-7) = 8 - 21 = -13$$

$$u \cdot u = (4,-7) \cdot (4,-7) = 16 + 49 = 65$$

$$\hat{y} = \frac{-13}{65} u = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم $\hat{y}$ همان برداری است که در $span\{u\}$ است. پس به دنبال بردار عمود بر u هستیم:

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

---

۲. ابتدا باید دقت کنیم که ماتریس در حالت کاهش‌یافته سطری است:

الف) می‌دانیم که فضای پوچ همان جواب‌های $Ax = 0$ است و چون ماتریس کاهش‌یافته سطری است داریم:

$$x_1 = -x_3 \quad , \quad x_2 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که عبارت بالا پایه‌ی فضای پوچ A است. چون اندازه این بردار ۱ نیست و برابر $\sqrt{2}$ است پس $orthonormal$ نیست و باید آن را تبدیل کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ب) می‌دانیم $nullity$ ماتریس A برابر ۱ است و طبق فرمول زیر داریم:

$$Rank\ of\ A\ +\ Nullity\ of\ A\ =\ 3$$

و متوجه می‌شویم که $rank$ ماتریس A برابر ۲ است.

روش دوم: می‌توانیم بگوییم چون ماتریس A در فرم کاهش‌یافته است، پس تعداد سطرهای غیرصفر آن همان $rank$ آن است که باز هم برابر ۲ می‌باشد.

ج) طبق قاعده فضای سطری، سطرهای غیرصفر در فرم کاهش‌یافته ماتریس، پایه‌های فضای سطری A هستند:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

چون ضرب داخلی این دو بردار صفر است، پس می‌دانیم $orthogonal$ هستند. پس کافی است آن‌ها را بر اندازه‌شان تقسیم کنیم تا orthonormal شوند:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

۳. **الف)** فرض کنید x متغیر است و اندازه بردار $a - xb$ برابر زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}0 &\le \|\mathbf{a} - x\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} - x\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - x\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot x\mathbf{b} - x\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + x^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\ &= \|\mathbf{b}\|^2x^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}x + \|\mathbf{a}\|^2.\end{aligned}$$

حال اگر مقدار x را برابر $\frac{a.b}{||b||^2}$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}0 &\le \|\mathbf{b}\|^2\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\right)^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\right) + \|\mathbf{a}\|^2 \\ &= \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{\|\mathbf{b}\|^2} - 2\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{\|\mathbf{b}\|^2} + \|\mathbf{a}\|^2 \\ &= -\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{\|\mathbf{b}\|^2} + \|\mathbf{a}\|^2.\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد که $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \le \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2$

ب) چون u_1 و u_2 عمود هستند داریم:

$$\mathrm{u}_1 \cdot \mathrm{u}_2 = \mathrm{u}_2 \cdot \mathrm{u}_1 = 0$$

چون اندازه u_2 برابر ۴ است داریم:

$$\mathrm{u}_2 \cdot \mathrm{u}_2 = \|\mathrm{u}_2\|\|\mathrm{u}_2\| = 16$$

در نهایت شرط آخر به این صورت است:

$$\mathrm{u}_2 \cdot \mathrm{u}_3 = \mathrm{u}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{u}_3 = 7$$

آنگاه ضرب داخلی u_1 و u_2 را محاسبه می کنیم:

$$0 = \mathrm{U}_2 \cdot \mathrm{u}_1 = \mathrm{u}_2 \cdot (\mathrm{u}_2 + \mathrm{a}\mathrm{u}_3) = \mathrm{u}_2 \cdot \mathrm{u}_2 + \mathrm{a}\mathrm{u}_2 \cdot \mathrm{u}_3 = 16 + 7\mathrm{a}$$

با حل معادله‌ی بالا به مقدار زیر برای a می‌رسیم:

$$\mathrm{a} = \frac{-16}{7}$$

---

۴. فرض کنید $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

دقت کنید که این دو پایه متعامد نیستند چرا که حاصلضرب داخلی آن‌ها مخالف صفر می‌باشد:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \neq 0.$$

ابتدا با توجه به فرآیند $Gram - Schmidt$ یک پایه متعامد برای W می‌یابیم. فرض کنید $w_1 = v_1$ و $w_2 = v_2 + av_1$ ، مقدار a را طوری می‌یابیم که $w_1 \,.\, w_2 = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= 2 + 3a. \end{aligned}$$

که نتیجه میدهد که $a = -{}^{2}\!/_{3}$ و در نتیجه:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال برای از بین بردن کسرها به جای w_2 از $3w_2$ استفاده می‌کنیم. (توجه کنید که با این کار تعامد بردارها از بین نمی‌رود)

$$3\mathbf{w}_2 = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموعه $\{\, w_1 \,, 3w_2 \,\}$ یک پایه متعامد برای W می‌باشد؛ اما اندازه بردار های آن برابر یک نیست. برای یکه کردن آن‌ها کافی است هر یک را بر اندازه خود بردار تقسیم کنیم:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_1\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ \|3\mathbf{w}_2\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

و در نتیجه به پایه متعامد یکه $(orthonormal)$ زیر خواهیم رسید:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

۵. معادله کلی خط به صورت $y = Mx + B$ می‌باشد. حال اگر سه نقطه داده شده بخواهند بر روی یک خط قرار بگیرند، سه معادله زیر باید برقرار شوند:

$$\begin{aligned} 6 &= M\cdot 0 + B \\ 0 &= M\cdot 1 + B \\ 0 &= M\cdot 2 + B \end{aligned}$$

اما به وضوح مشخص است که سه نقطه داده شده بر روی یک خط قرار نمی‌گیرند. پس بجای آن اقدام به یافتن جواب $least - squares$ می‌کنیم.

حال معادلات فوق را به صورت ماتریس نوشته و تلاش می‌کنیم که معادله $Ax = b$ را حل کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} M \\ B \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حال برای یافتن جواب $least - squares$ برای $Ax = b$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{RREF}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

در نتیجه $\hat{x}$ برابر $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و معادله خط مورد نظر برابر $y = -3x + 5$ خواهد بود.

---

۶. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ آنگاه $A^T A = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix}$, در این صورت معادله‌ی مشخصه AA^t برابر با $\lambda^2 - 90\lambda = \lambda(\lambda - 90)$, خواهد بود. داریم $eigenvalue$ های AA^t به ترتیب نزولی برابر با ۹۰ و صفر و بردار های متناظرشان برابر با $\lambda = 90 : \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{bmatrix}, \lambda = 0 : \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$. هستند.

بنابراین یک انتخاب برای V برابر با $V=\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}.$ است. دراین صورت خواهیم داشت

$singular\ value$ های A برابر با $\sigma_1=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ و $\sigma_2=\sqrt{0}=0.$ خواهند بود و $\Sigma=\begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

سپس به محاسبه u می‌پردازیم:

$$\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که $AV_2=0$ تنها ستونی که برای U تا الان می‌توان یافت u_1 است. بقیه ستون‌های U را باید از طریق گسترش $\{u_1\}$ به یک $orthonormal\ basis$ در R_3 بدست آوریم. در این صورت ما به دو بردار متعامد پایه u_3 و u_2 نیاز داریم که بر u_1 عمودند. همچنین هر بردار باید در معادله $\mathbf{u}_1^T\mathbf{x}=0,$ صدق کند. این معادله هم ارز با معادله $-x_1+2x_2+2x_3=0.$ می‌باشد.

پایه $orthonormal$ مورد نظر:

$$\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3=\begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

بنابر این:

$$U=\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

و داریم:

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

---

۷. اگر A یک ماتریس $positive\ definite$ باشد آنگاه $A=PDP^T$ که P یک ماتریس $orthogonal$ بوده و D یک ماتریس $diagonal$ است. درایه‌های قطری ماتریس D مثبت‌اند زیرا آنها $eigenvalue$ های یک ماتریس $positive\ definite$ هستند. از آنجایی که P یک ماتریس $orthogonal$ است، می‌توان گفت $PP^T=I$ و ماتریس مربعی P^T وارون پذیر است. همچنین داریم $(P^T)^{-1}=(P^{-1})^{-1}=P=$ $(P^T)^T$ بنابراین P^T یک ماتریس $orthogonal$ است. بنابراین $A=PDP^T$ ویژگی‌هایی دارد که آن را svd می‌کند.

۹. برای اینکه نشان دهیم v_1 یک مقدار ویژه برای A است باید Av_1 را محاسبه کنیم:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\mathbf{v}_1,$$

بنابراین v_1 یک بردار ویژه برای مقدار ویژه $\lambda = 3$ است. برای بردارهای ویژه داریم:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

که جواب‌های آن:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

پس یک پایه برای $eigenspace$ برابر است با $\{v_1, v_2\}$.

برای اینکه ماتریس را $orthogonaly\ diagonalise$ کنیم باید این پایه را به یک پایه $orthonormal$ برای $eigenspace$ تبدیل کنیم. پس لازم است یک مقدار ویژه دیگر و بردار ویژه متناظرش را بیابیم. برای اینکار می‌توان از معادله مشخصه کمک گرفت و سپس بردار ویژه متناظر را پیدا کرد.

روش دیگر این است که می‌دانیم $eigenspace$ برای $\lambda_1 = 3$ برابر یک صفحه در R_3 است. و می‌توان از فرم کاهش‌یافته ردیفی $A - 3I$ echelon نتیجه گرفت که عمود بر این صفحه بردار $v_3 = (1, -1, 2)^T$ خواهد بود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این سومین مقدار ویژه ما خواهد بود. سپس می‌توان بردار ویژه متناظر با آن را یافت:

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\mathbf{v}_3.$$

بنابراین $\lambda_3 = -3$

همچنان نیاز است تا یک پایه $orthonormal$ برای $eigenspace$ مقدار ویژه ۳ پیدا کنیم. با استفاده از عملیات $gram-schmidt$ داریم:

$$\mathbf{u}_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین می‌توان مشاهده کرد که w بر دو بردار قبلی عمود است. با تبدیل به بردارهای واحد داریم:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

پس $P^T = P^{-1}$ به نحوی که p ماتریس $orthogonal$ است و

$$P^{\mathrm{T}}AP = P^{-1}AP = D.$$

---

۱۰. الف) ماتریس متناظر با فرم مربعی q به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

در این ماتریس داریم:

$$a_{11} = -4 \quad , \quad \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

اگر مثبت معین باشد، باید هر دو عبارت بالا مثبت باشد و اگر منفی معین باشد، باید عبارت اول منفی و عبارت دوم مثبت باشد. پس چون حالت بالا هیچ یک از حالات گفته شده نیست و دترمینان ماتریس A مخالف صفر است، پس فرم مربعی گفته شده نامعین است.

ب) ماتریس متناظر با فرم مربعی f به صورت زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

در این ماتریس داریم:

$$b_{11} = -4 \qquad , \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \qquad |B| = -6$$

که طبق متن بالا این فرم مربعی منفی معین است.

---

۱۱. الف) فرض کنید λ مقدار ویژه ای از A و x بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ باشد. پس داریم $Ax = \lambda x$. که با ضرب کردن $\bar{x}^T$ از سمت چپ در دو طرف عبارت داریم که :

$$\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = \lambda \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = \lambda ||\mathbf{x}||^2 \quad (*)$$

توجه کنید که سمت چپ عبارت $\bar{x}^T Ax$ حاصلضرب داخلی بردار های $\bar{x}^T$ و Ax می‌باشد و چون حاصلضرب داخلی دارای ویژگی جابجایی می‌باشد داریم:

$$\begin{aligned} &\text{The left hand side of } (*) \\ &= \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{x}} \\ &= x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

حال از آنجایی که ماتریس A یک ماتریس پادمتقارن می‌باشد و $A^T = -A$ ، با جایگذاری این دو در تساوی بالا داریم :

$$\begin{aligned} &\text{The left hand side of } (*) \\ &= x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

حال با مزدوج گرفتن از $Ax = \lambda x$ و با توجه به حقیقی بودن A داریم $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$

درنتیجه :

$$\text{The left hand side of (*)} \\ = -\mathbf{x}^{T} A\bar{\mathbf{x}} \\ = -\mathbf{x}^{T}\bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}} = -\bar{\lambda}||\mathbf{x}||^{2}.$$

حال با در نظر گرفتن سمت چپ ستاره و تساوی بدست آمده در بالا داریم:

$$-\bar{\lambda}||\mathbf{x}||^{2} = \lambda||\mathbf{x}||^{2}$$

از آنجایی که x بردار ویژه می‌باشد، پس با توجه به تعریف مخالف صفر است. پس:

$$-\bar{\lambda} = \lambda$$

و این نشان می‌دهد که λ یا برابر صفر یا مطلقا موهومی می‌باشد . (چرا که اگر $\lambda = a + ib$ آنگاه داریم $-\bar{\lambda} = -a + ib = a + ib = \lambda$ پس $\lambda = \mathrm{ib}$)

ب) با توجه به قسمت الف، می‌دانیم که مقادیر ویژه A برابر صفر یا یک عدد مطلقا مختلط هستند .در نتیجه اگر λ یک مقدار ویژه مطلقا مختلط A باشد , انگاه مزدوج آن $-\lambda = \bar{\lambda}$ نیز با توجه به حقیقی بودن ماتریس A مقدار ویژه‌ای برای آن می‌باشد .

در نتیجه مقادیر ویژه مخالف صفر به صورت جفت‌های λ و $-\lambda$ می‌باشند .

فرض کنید $\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \ldots, \lambda_k, -\lambda_k$ مقادیر ویژه غیرصفر ماتریس A می‌باشند .

حال از آنجایی که یک ماتریس پادمتقارن حقیقی نرمال می‌باشد، قابل قطری‌سازی (به وسیله ماتریس واحد) است . پس ماتریس معکوس پذیر P وجود دارد به طوری که :

$$P^{-1}AP = \\ \mathrm{diag}\,[\lambda_1 \quad -\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad -\lambda_2 \quad \ldots \quad \lambda_k \quad -\lambda_k \quad 0 \quad \ldots 0]$$

که $diag[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ نشان‌دهنده ماتریسی است $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ که درایه های روی قطر آن برابر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ می‌باشد و بقیه درایه های آن برابر صفر است.

حال چون ماتریس P وارون پذیر است، $rank$ ماتریس A برابر $rank$ ماتریس قطری در سمت راست می‌باشد که به سادگی قابل مشاهده است که به صورت 2k می‌باشد. پس $rank$ ماتریس A به صورت 2k است. پس ثابت کردیم که rank ماتریس پادمتقارن زوج می‌باشد.

۱۲. ماتریس B^TB یک ماتریس $k \times k$ متقارن می‌باشد؛ چرا که $(B^TB)^T = B^T(B^T)^T = B^TB$. برای این که نشان دهیم این ماتریس مثبت معین است، باید اثبات کنیم که به ازای هر بردار X که $X \in R^n$ داریم $X^TB^TBX \geq 0$ و $X^TB^TBX = 0$ فقط و فقط اگر $x = 0$.

به ازای هر $X \in R^n$ داریم که :

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} B \mathbf{x} = (B\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(B\mathbf{x}) = \langle B\mathbf{x}, B\mathbf{x} \rangle = ||B\mathbf{x}||^2.$$

که به ازای هر $BX \neq 0$ دارای مقداری مثبت می‌باشد و $||BX||^2 = 0$ اگر و فقط اگر $BX = 0$.

حال چون $rank(B) = k$ می‌باشد، فرم پلکانی کاهش یافته B در هر ستون دارای یک درایه پیشرو خواهد بود و در نتیجه تنها جواب معادله $BX = 0$ برابر $X = 0$ می‌باشد. پس به ازای هر $X \in R^n$ داریم که $X^TB^TBX \geq 0$ و $X^TB^TBX = 0$ فقط و فقط اگر $x = 0$ در نتیجه ماتریس B^TB یک ماتریس مثبت معین می‌باشد .

اگرماتریس $n \times n$ متقارن A مثبت معین باشد، آنگاه همه‌ی مقادیر ویژه آن مثبت خواهند بود. پس صفر مقدار ویژه A نخواهد بود و در نتیجه دستگاه معادلات $AX = 0$ جوابی غیر بدیهی نخواهد داشت پس A وارون پذیر خواهد بود.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

پاییز ۹۹