

به نام او

تمرینات سری چهارم - فصل چهارم و پنجم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب $HW?_Name_StudentNumber$ (به عنوان مثال، $HW4_AmirHosseinSorour_9731028$) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل $linear.algebra99fall@gmail.com$ در ارتباط باشید.

۱. درستی و یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) یک مجموعه‌ی مستقل خطی در زیرفضای H ، یک پایه برای فضای H است.

ب) اگر مجموعه‌ی متناهی و غیرصفر S فضای برداری V را $span$ کند، آنگاه بعضی از زیرمجموعه‌های S پایه‌ای برای V هستند.

پ) پایه برای یک فضای برداری، بزرگترین مجموعه‌ی مستقل خطی ممکن است که آن فضا را $span$ می‌کند.

ج) اگر ماتریس B فرم کاهش‌یافته ماتریس A باشد، آنگاه ستون‌های محوری ($pivot$) ماتریس B پایه‌ای برای $Col(A)$ تشکیل می‌دهند.

۲. فرض کنید مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_4\}$ یک مجموعه‌ی وابسته خطی است که فضای برداری V را $span$ می‌کند. نشان دهید به ازای هر $w \in V$ ، می‌توان w را با بیش از یک ترکیب خطی از v_1 تا v_4 نوشت.

۳. ماتریس تبدیل C از پایه A به پایه B (در صفحه R^2) به صورت $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$ می‌باشد. همچنین اگر بدانیم بردار مختصات‌های متناسب با پایه A برای بردارهای $V_1 = (1, 5)$ و $V_2 = (2, 4)$ برابر $(2, 1)$ و $(-2, -4)$ می‌باشد، بردارهای پایه‌های A و B را بیابید.

۴. فرض کنید $V = R^2$ ، $B = \{(1, 2), (3, 4)\}$ ، $C = \{(7, 3), (4, 2)\}$ و $v = (1, 0)$.
واضح است که B و C پایه‌هایی برای V می‌باشند.

الف) $[v]_B$ و $[v]_C$ را محاسبه کنید.

ب) $P_{B \leftarrow C}$ و $P_{C \leftarrow B}$ را بیابید.

۵. ماتریس تبدیل پایه P از پایه $\alpha = \{x^2 + x + 1, x^2 + 1, x - 1\}$ به

$\beta = \{2x^2 + 3x + 1, 2x^2 + 2x + 1, -x^2 - 2\}$ را بیابید. از نتیجه فوق استفاده کرده و

ماتریس تبدیل پایه از β به α را بیابید. فرض کنید تابع چندجمله‌ای درجه دو $p(x)$ دارای مختصات $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

متناسب با پایه β می‌باشد. بردار مختصات آن را متناسب با پایه α محاسبه کنید.

۶. الف) مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورده و سپس بردارهای ویژه آن را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس A را قطری‌سازی کرده (ماتریس‌های P و D را در $A = P^{-1}DP$ بدست آورید) و سپس صحت جواب خود را بدون محاسبه P^{-1} بررسی کنید.

۷. الف) ردیف سوم از companion matrix زیر را بدست آورید به طوریکه معادله مشخصه آن به صورت

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

ب) فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ و معکوس‌پذیر باشد. ثابت کنید اگر λ مقدار ویژه غیرصفر ماتریس A باشد، آن گاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.

۸. ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ماتریس A^n را به ازای هر n صحیح و مثبت بدست آورده و نتیجه بگیرید که عبارت $(-1)^k - 3^k$ به ازای $K \geq 1$ بر ۴ بخش پذیر است.

۹. الف) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس های زیر را بدست آورده و سپس نشان دهید که مجموع مقادیر ویژه برابر $trace$ (اثر) و حاصل ضرب مقادیر ویژه برابر دترمینان است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس A را قطری سازی کرده به طوری که $A = P^{-1}CP$ و P ماتریس مختلط معکوس پذیر و C ماتریس قطری باشد.

۱۰. **(امتیازی)** فرض کنید P_2 فضای برداری تمامی چندجمله ای های با ضرایب حقیقی و درجه ۲ یا کمتر باشد. و فرض کنید $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ به طوری که:

$$p_1(x) = -1 + x + 2x^2, \quad p_2(x) = x + 3x^2 \\ p_3(x) = 1 + 2x + 8x^2, \quad p_4(x) = 1 + x + x^2.$$

الف) یک پایه برای P_2 بین بردارهای S پیدا کنید (و توضیح دهید چرا یک پایه است).

ب) فرض کنید B' پایه ای باشد که در قسمت الف پیدا کردید. برای هر بردار S که در B' نیست بردار $coordinate$ را با توجه ($respect$) به پایه B' پیدا کنید.

موفق باشید

تیم تدریس یاری جبر خطی

پاییز ۹۹