

به نام او

تمرینات سری سوم - فصل سوم و چهارم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب `HW?_Name_StudentNumber` (به عنوان مثال، `HW3_AmirHosseinSorour_9731028`) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل `linear.algebra99fall@gmail.com` در ارتباط باشید.

۱. الف) با توجه به ماتریس‌های زیر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

مقدار عبارت  $\det(A^2 B^{-1} A^{-2} B^2)$  را بدست آورید.

ب) مقادیر  $x$  را طوری بیابید که ماتریس  $A$  معکوس پذیر باشد (اعداد  $a, b, c$  ثابت هستند و  $a \neq 0$  است)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -1/a & x & x^2 \end{bmatrix}$$

۲. سیستم  $Bx = b$  را در اختیار داریم:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

با استفاده از روش کرامر (*Cramer's rule*) پاسخ آن را بیابید.

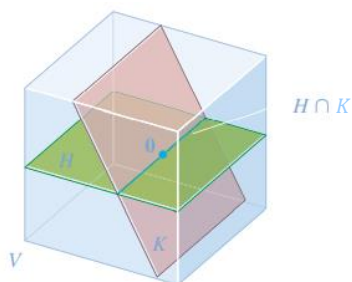
۳.  $R$  را مثلثی با رئوس  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  در نظر بگیرید. نشان دهید مساحت مثلث برابر است با:

$$\{\text{area of triangle}\} = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

۴. اگر  $A$  ماتریس  $n \times n$  باشد که فقط از  $\pm 1$  تشکیل شده است، نشان دهید دترمینان آن بر  $2^{n-1}$  بخش پذیر است.

۵. اگر  $H$  و  $K$  زیر فضاهایی از فضای برداری  $V$  باشند، تقاطع  $H$  و  $K$  که به صورت  $H \cap K$  نوشته می‌شود، مجموعه تمام  $v$ هایی است در  $V$  که به هر دوی  $H$  و  $K$  تعلق دارند. نشان دهید که  $H \cap K$  یک زیرفضا (subspace) از  $V$  است.

سپس یک مثال در  $R^2$  ارائه دهید که نشان دهد در حالت کلی اجتماع دوزیرفضا، یک زیرفضا را تشکیل نمی‌دهد.



۶. فرض کنید  $V$  نشان‌دهنده فضای برداری ماتریس‌های  $2 \times 2$  و  $W$  برابر فضای برداری ماتریس‌های  $3 \times 2$  می‌باشد. تبدیل خطی  $T: V \rightarrow W$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 2d \\ 2b-d & -3c \\ 2b-c & -3a \end{bmatrix}.$$

یک پایه برای دامنه (range) تبدیل  $T$  بیابید.

۷. فرض کنید  $n$  عددی صحیح و مثبت است و  $T$  تبدیلی است خطی و غیر صفر به طوری که  $T: R^n \rightarrow R$ . عبارات زیر را ثابت کنید:

الف) فضای پوچ (nullspace) تبدیل  $T$  دارای  $n - 1$  بُعد می‌باشد.

ب) فرض کنید  $B = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  یک پایه برای فضای پوچ (nullspace) تبدیل  $T$  می‌باشد و  $w$  برداری است  $n$  بُعدی که در  $N(T)$  قرار ندارد. ثابت کنید  $B = \{v_1, \dots, v_{n-1}, w\}$  یک پایه برای  $R^n$  می‌باشد.

ج) (امتیازی) هر بردار  $u \in R^n$  را میتوان به صورت  $u = v + \frac{T(u)}{T(w)} w$  نشان داد که  $v \in N(T)$ .

موفق باشید