

به نام او
تمرینات سری اول – فصل اول

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب `HW?_Name_StudentNumber` (به عنوان مثال، `HW1_AmirHosseinSorour_9731028`) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل `linear.algebra99fall@gmail.com` در ارتباط باشید.

۱. درستی و یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر A, B ماتریس های $m \times n$ و معادل ردیفی باشند و ستون های A, R^n را $span$ نمایند، ستون های B نیز آن را $span$ میکنند.

ب) اگر معادله $Ax = b$ بیش از یک پاسخ داشته باشد، آنگاه معادله $Ax = 0$ نیز بیش از یک جواب دارد.

ج) اگر هر ستون از یک ماتریس افزونه شامل یک درایه $pivot$ باشد، سیستم معادلات خطی متناظر با آن $consistent$ است.

د) فرم نردبانی کاهش یافته یک ماتریس یکتا است.

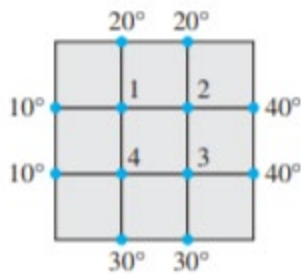
ه) دو ماتریس معادل ردیفی اند اگر تعداد ردیف های برابری داشته باشند.

و) عملیات ردیفی روی یک ماتریس افزونه هیچ گاه مجموعه جواب دستگاه خطی متناظر با آن را تغییر نمی دهد.

۲. بردار $(5, 6)$ را به صورت حاصل جمع ۲ بردار، یکی بر روی خط $y = 2x$ و دیگری بر روی خط $y = x/2$ بنویسید (با استفاده از ماتریس ها و معادله های ماتریسی)

۳. یک مسئله ی مهم در مطالعه انتقال گرما، تعیین توزیع دما در حالت پایدار یک صفحه نازک زمانی که دمای اطراف مرزهای آن مشخص باشد است. فرض کنید صفحه نشان داده شده در شکل زیر یک سطح مقطع از یک تیر فلزی است، با جریان گرمای ناچیز در جهت عمود بر صفحه. فرض کنید T_1 تا T_4 دمای ۴ نقطه داخلی در تصویر مشبک زیر باشند. دمای هر نقطه میانگین دمای ۴ نقطه نزدیک به آن (چپ-راست-بالا-پایین) است. برای مثال:

$$T_1 = (10 + 20 + T_2 + T_4)/4, \quad \text{or} \quad 4T_1 - T_2 - T_4 = 30$$



دمای تخمینی نقاط T_1 تا T_4 را بدست آورید.

(راهنمایی: دستگاه معادلات خطی آن‌ها را تشکیل داده و حل نمایید)

۴. فرض کنید v_1, v_2, v_3 نقاطی مجزا روی یک خط در R^3 باشند که از مبدأ نمی‌گذرد. نشان دهید $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقل خطی است.

۵. معادله‌ی $Ax = b$ را با معلومات داده شده حل کنید (ماتریس افزونه را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کنید) پاسخ بدست آمده را به فرم $x = p + tv$ معرفی کنید که در آن t عددی حقیقی است. صحت پاسخ خود را با محاسبه‌ی Av و Ap بررسی کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

با توجه به فرم نردبانی کاهش یافته ماتریس A ، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) آیا برداری مانند d در R^3 وجود دارد به طوری که معادله‌ی $Ax = d$ ناسازگار باشد؟
 ب) آیا برداری مانند d در R^3 وجود دارد به طوری که معادله‌ی $Ax = d$ جوابی یکتا داشته باشد؟

۶. الف) معادله‌ی خط حاصل از تقاطع دو صفحه‌ی زیر را بیابید.

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad \text{and} \quad x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

حاصل تقاطع دو صفحه‌ی بالا و صفحه‌ی زیر چیست؟

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$\text{ب) فرض کنید} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

حال دستگاه معادلات خطی $Ax = 6x$ را تشکیل داده و همه جواب‌های آن را بیابید.

۷. الف) همه ی تبدیل‌های خطی دو بعدی در فضای R^2 را بیابید که خط $y = x$ را به خط $y = -x$ منتقل می‌کنند.

ب) فرض کنید T یک تبدیل خطیست به طوری که $T : R^3 \rightarrow R^3$ و روابط زیر برای آن برقرار باشد :

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

تبدیل $T(x)$ را برای هر بردار $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ بیابید.

۸. فرض کنید T یک تبدیل خطی است به گونه ای که $T : R^n \rightarrow R^m$ و $S = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ زیر مجموعه ای از فضای R^n باشد به گونه‌ای که $\{T(X_1), T(X_2), \dots, T(X_k)\}$ تشکیل یک مجموعه مستقل خطی بدهد. ثابت کنید که مجموعه S نیز یک مجموعه مستقل خطی می‌باشد.

۹. الف) فرض کنید $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $T : R^2 \rightarrow R^2$ یک تبدیل خطی باشد:

I) آیا T پوشا (onto) است؟ II) آیا T یک به یک (one to one) است؟

ب) نشان دهید تبدیل‌های زیر خطی هستند:

$T: \mathcal{M}_{22} \rightarrow \mathcal{M}_{22}$ defined by

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$T: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ defined by

$$T(ax + b) = \frac{ax^2}{2} + bx$$

۱۰. الف) فرض کنیم T یک تبدیل خطی است. ماتریس A را از رابطه ی $T(x) = Ax$ طوری بدست آورید

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

که شرط زیر در آن برقرار باشد.

ب) (امتیازی) فرض کنیم که $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ یک تبدیل خطی باشد. ثابت کنید ماتریس $A_{m \times n}$ وجود دارد به طوری که $T(x) = Ax$.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی