۱) الف)

$$XX^{-1}=I \Rightarrow \det X \det X^{-1}=1 \Rightarrow \det X^{-1}=\frac{1}{\det X}$$

$$\det(A^2B^{-1}A^{-2}B^2)=\det(A^2)\det(B^{-1})\det(A^{-2})(\det B^2)$$

$$=\det^2(A)\times\frac{1}{\det(B)}\times\frac{1}{\det^2(A)}\times\det^2(B)=\det(B)$$

B مثلثی است $\Rightarrow \det(B)=۲\times۳\times۴=۲۴$

ب)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&c\\0&a&-b\\-\frac{1}{a}&x&x^2\end{bmatrix}$$

$$\det(A)\neq0 \Rightarrow (-1)^4x^2\begin{vmatrix}1&0\\0&a\end{vmatrix}+(-1)^5x\begin{vmatrix}1&c\\0&-b\end{vmatrix}+(-1)^6\left(-\frac{1}{a}\right)\begin{vmatrix}0&c\\a&-b\end{vmatrix}\neq0$$

$$\Rightarrow ax^2+bx+c\neq0 \Rightarrow x\neq\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Subject

Date

(۲

$$\det(B) = -۱\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} - ۰ + ۳\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۲ + ۹ = ۷$$

$$B_۱(b) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_۱(b)) = ۱\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} - ۱\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} + ۵\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱۵$$

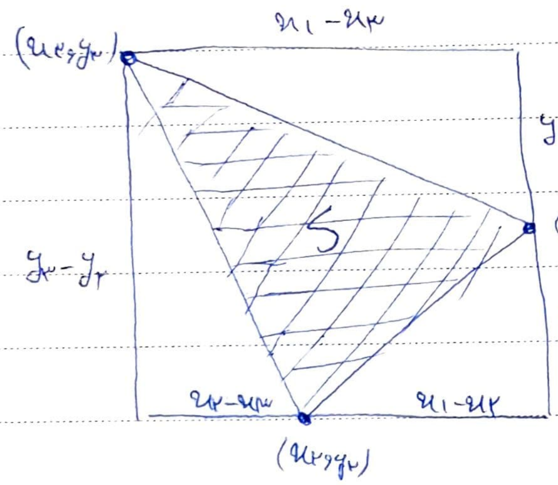
$$B_۲(b) = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_۲(b)) = -۱\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{vmatrix} - ۰ + ۳\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۹$$

$$B_۳(b) = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B_۳(b)) = -۱\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} - ۰ + ۳\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۱$$

$$x = \frac{\det(B_۱(b))}{\det(B)} = \frac{۱۵}{۷} \quad \text{و} \quad y = \frac{\det(B_۲(b))}{\det(B)} = \frac{۹}{۷}, \quad z = \frac{\det(B_۳(b))}{\det(B)} = \frac{-۱}{۷}$$

Subject
Date






square

مساحت مثلث (S) می‌شود تفاضل مساحت

مستطیل از "۳ مثلث گوشه":

$$S=(x_1-x_3)(y_3-y_2)-\frac{1}{2}(x_1-x_3)(y_3-y_1)$$

$$-\frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1-y_2)-\frac{1}{2}(x_2-x_3)(y_3-y_2)$$

$$=x_1y_3-x_1y_2-x_3y_3+x_3y_2-\frac{1}{2}(x_1y_3-x_1y_1-x_3y_3+x_3y_1)$$

$$-\frac{1}{2}(x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2)-\frac{1}{2}(x_2y_3-x_2y_2-x_3y_3+x_3y_2)$$

$$=\frac{1}{2}(0x_1y_1-x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+0x_2y_2-x_2y_3-x_3y_1+x_3y_2+0x_3y_3)$$

$$=-\frac{1}{2}\left((x_2y_3-x_3y_2)-(x_1y_3-x_3y_1)+(x_1y_2-x_2y_1)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(+(-1)^4\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+(-1)^5\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+(-1)^6\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\det\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}:$$

در این حالت با توجه به نقطه‌گذاری دلخواه
$\det(A)$ منفی می‌شود و تنها تا مساحت مثبت می‌شود
به این معنی که ضریب det هم مثبت، هم منفی $\frac{1}{2}$ می‌تواند بشود.

Subject
Date

۴) ابتدا سطر اول را به بقیه سطرها اضافه می‌کنیم و ماتریس حاصل شده را $A'$ می‌نامیم

می‌دانیم $\det(A)=\det(A')$ حال $\det(A')$ را حول سطر اول حساب می‌کنیم و می‌دانیم $n-1$ سطر

آخر از ۰ یا ۲ یا ۲- تشکیل شده است. اگر ثابت کنیم دترمینان ماتریس $X_{n-1 \times n-1}$ که $X_{n-1}$ از $0, \pm 2$

تشکیل شده است، بر $2^{n-1}$ بخش‌پذیر است آنگاه ثابت می‌شود که $\det(A')$ که از بسط حول سطر اول

حاصل می‌شود بر $2^{n-1}$ بخش‌پذیر است. چون سطر اول تنها از $\pm 1$ و ۰ تشکیل شده و با حذف سطر اول

ستون $i$ ماتریس $X_{n-1 \times n-1}$ حاصل شده که $\det$ آن $2^{n-1}$ است.

* حال ثابت می‌کنیم اگر $X_{n\times n}$ از $0, \pm 2$ تشکیل شده باشد بر $2^n$ بخش‌پذیر است. (به وسیله استقرا)

$$X_{1\times 1} = [0 \text{ یا } 2 \text{ یا } -2] \Rightarrow \det(X)_{1\times 1} = 0 \text{ یا } 2 \text{ یا } -2 \ \% \ 2^1 = 0 \checkmark$$

اگر فرض کنیم برای ماتریس $n\times n$ برقرار باشد آنگاه برای $n+1 \times n+1$ $Z$ نیز برقرار است

حول یکی از سطرها یا ستون‌ها ماتریس $Z_{n+1 \times n+1}$ را بسط می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} \det(Z_{n+1 \times n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \det Y_{n\times n} \\ c_i \in \{0, \pm 2\} \\ \det Y_{n\times n} \ \% \ 2^n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \det Z_{n+1 \times n+1} \ \% \ 2^{n+1} = 0$$

پس به وسیله استقرا * اثبات شد

پس با استفاده از * ثابت می‌شود $\det(A) = \det(A')$ بر $2^{n-1}$ بخش‌پذیر است.

۵) بردار صفر در $H$ و $K$ وجود دارد پس در $H \cap K$ نیز وجود دارد.

①

اگر بردار $u$ و $v$ را در $H \cap K$ در نظر بگیریم ، این دو بردار در $H$ و $K$ وجود دارند. چون $H$ و $K$ زیرفضا اند پس $u+v$ در هرکدام موجود است پس $u+v$ در $H \cap K$ موجود است

②

اگر بردار $u$ را در $H \cap K$ در نظر بگیریم ، این بردار در $H$ و $K$ وجود دارد. چون $H$ و $K$ زیرفضا اند پس $cu$ در $H$ و $K$ وجود دارد پس $cu$ در $H \cap K$ نیز موجود است

③

با بیان این ۳ ویژگی اثبات می‌شود که $H \cap K$ زیرفضایی از $V$ است.

برای $H \cup K$ اگر $H$ را محور yها و $K$ را محور xها در نظر بگیریم هردو $H$ و $K$ زیرفضای $R^2$ اند. اگر بردارهای $u$ و $v$ را در $H \cup K$ در نظر بگیریم برخلاف آنچه در $H \cap K$ بیان شد نمی‌توانیم $u$ و $v$ را به هر دو تا نسبت داد پس نمی‌توان گفت نسبت به جمع بسته است پس $H \cup K$ لزوماً زیرفضا نیست.

۴)

$T : V \to W$

$V$: ماتریس $2\times 2$

$W$: ماتریس $3\times 2$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & 2d \\ 2b-d & -3c \\ 2b-c & -3a \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هر کدام از ۴ ماتریس بالا یک پایه محسوب می‌شوند

Subject
Date

۷) اگر A ماتریس تبدیل باشد آنگاه با توجه به دامنه و برد یک ماتریس $n\times 1$ یک ماتریس $1\times n$ غیر صفر می‌شود

پس $Rank(A)$ ۱ می‌شود از طرفی می‌دانیم

$$\dim(col(A)) + \dim(null(A)) = n$$
$$\Rightarrow \dim(null(A)) = n-1$$

ب) اگر بردارهای $v_1, \dots, v_{n-1}$ و $w$ مستقل خطی باشند پس:

$$c_1 v_1 + \dots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n w = 0 \quad \overset{c_n \neq 0}{\Rightarrow} \quad w = -\frac{c_1}{c_n} v_1 + \dots - \frac{c_{n-1}}{c_n} v_{n-1}$$

پس $w \in span(B) = N(T)$ پس $c_n = 0$ :

$$c_1 v_1 + \dots + c_{n-1} v_{n-1} = 0$$

از آنجایی که $B$ مستقل خطی اند (چون پایه هستند) پس $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$

حال از آنجایی که $c_i$ ها همه صفر شدند پس فرض ما درست بوده و $B' = \{B, w\}$

مستقل خطی اند پس $B'$ با $n$ بردار مستقل خطی یک پایه برای $R^n$ است

پ)

$$\left.\begin{array}{l} u \in R^n \\ B' \; span \; R^n \end{array}\right\} \Rightarrow u = c_1 v_1 + \dots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n w$$

$$\Rightarrow u = c_1 v_1 + \dots + c_{n-1} v_{n-1} + c_n w$$
$$u = v + c_n w$$

$$T(u) = T(v + c_n w) = T(v) + c_n T(w) = 0 + c_n T(w) = c_n T(w)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{T(u)}{T(w)} \Rightarrow u = v + \frac{T(u)}{T(w)} w$$