به نام او

تمرینات سری دوم – فصل دوم

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا و تمیز در قالب $HW?\_Name\_StudentNumber$ (به عنوان مثال، $HW2\_AmirHosseinSorour\_9731028$) نوشته و تا قبل از ددلاین در سامانه کورسز دانشگاه آپلود نمایید. در صورت وجود هرگونه ابهام، با ایمیل linear.algebra99fall@gmail.com در ارتباط باشید.

---

۱. درستی و یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ باشند و $B = [b1 \;\; b2 \;\; b3]$ باشد، در نتیجه $AB = [Ab1 + Ab2 + Ab3]$.

ب) ترانهاده مجموع چند ماتریس برابر مجموع ترانهاده‌ی آن‌ها است.

پ) اگر $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ باشد آنگاه ترانهاده ی آن به صورت $A^T = \begin{bmatrix} P^T & Q^T \\ R^T & S^T \end{bmatrix}$ است.

ت) اگر دو ماتریس A و B معکوس پذیر باشند آنگاه $A + B$ هم معکوس پذیر است.

ث) فرم سطری پلکانی یک ماتریس 3×3 معکوس پذیر است.

ج) حداقل یک ماتریس معکوس پذیر غیر صفر A وجود دارد که در عبارت $A^2 = 0$ صدق کند.

د) اگر A و B دو ماتریس معکوس پذیر و $n \times n$ باشند آنگاه $AB = BA$.

هـ) اگر دو ماتریس A و B معکوس پذیر و $n \times n$ باشند و $I = A^2$ و $I = B^2$ آنگاه $(AB)^{-1} = BA$.

و) اگر A ماتریس 2×2 معکوس پذیر باشد و v_1 و v_2 دو بردار مستقل خطی در R^2 باشند، آنگاه دو بردار Av_1 و Av_2 هم بردارهایی مستقل خطی در R^2 هستند.

ی) اگر W_1 و W_2 زیرفضایی از فضای برداری R^n و B_1 و B_2 پایه‌های W_1 و W_2 باشند آنگاه $B_1 \cap B_2$ پایه ای برای فضای $W_1 \cap W_2$ است.

۲. فرض کنید $AD = I$ باشد (ماتریس همانی $m \times m$). نشان دهید به ازای هر b در R^m معادله‌ی $Ax = b$ دارای جواب است. توضیح دهید چرا سطرهای A نمی‌تواند بیش از ستون‌هایش باشد.

---

۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

الف) A^{-1} را بیابید و با استفاده از آن معادلات زیر را حل کنید.

$$Ax = b_1 \quad , \quad Ax = b_2 \quad , \quad Ax = b_3 \quad , \quad Ax = b_4$$

ب)۴ معادله بخش الف از طریق مجموعه یکسانی از عملیات ردیفی قابل حل می‌باشند؛ چرا که ماتریس ضرایب یکسانی دارند.این ۴ معادله را از طریق اعمال عملیات ردیفی بر روی ماتریس $[A \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4]$ بدست آورید.

---

۴. ماتریس $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر A_{11} وارون پذیر باشد آنگاه ماتریس $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ را ماتریس $Schut\ Complement$ برای A_{11} گویند. به طریق

مشابه اگر A_{22} وارون پذیر باشد ماتریس $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ را $Schut\ Complement$

برای A_{22} گویند. فرض کنید A_{11} وارون پذیر است. X, Y را طوری بیابید تا :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

---

۵. A یک ماتریس $n \times n$ است. فرض کنید مجموع درایه‌های هر ردیف از A برابر با صفر است. آنگاه اثبات کنید ماتریس A ، $singular$ (وارون ناپذیر) است.

---

۶. بدون محاسبه A ، A^{-1} ، A^{-2} یا A^2 به طور مستقیم، حاصل عبارت $A^{-1}x + A^{-2}y$ را بدست آورید. (با توجه به اینکه ماتریس های L و U زیر در عبارت $A = LU$ صدق می‌کند و حاصل تجزیه LU ماتریس A هستند)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۷. الف) تجزیه‌ی LU ماتریس A را برای دستگاه ماتریسی $Ax = b$ با توجه به اطلاعات زیر بدست آورید .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ب) سپس از این تجزیه LU استفاده کنید تا دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_4 &= 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 7, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 14, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -7. \end{aligned}$$

---

۸. فرض کنید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) یک پایه برای فضای پوچ $\mathcal{N}ull(A)$ بیابید .

ب) یک پایه برای فضای ستونی ($column\ space$) ماتریس A بیابید.

ج) یک پایه برای فضای سطری ($row\ space$) ماتریس A بیابید.

---

۹. فرض کنید V زیر فضایی از فضای R^4 است که با معادله $x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0$ تعیین می‌شود. تبدیل خطی T از R^3 به R^4 با فضای پوچ $\mathcal{N}ull(T) = \{0\}$ و دامنه‌ی $Range(T) = V$ را یافته و ماتریس تبدیل آن را پیدا کنید .

---

۱۰. الف) فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $m \times n$ باشند. ثابت کنید:

$$\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

(راهنمایی : ابتدا ثابت کنید $\dim(U + V) \leq \dim(U) + \dim(V)$ و از آن استفاده کنید)

ب) (**امتیازی**) فرض کنید A ماتریس $m \times n$ و B ماتریسی $n \times 1$ باشد، سپس موارد زیر را اثبات کنید:

I) $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$

II) اگر B ماتریسی نامنفرد ($nonsingular$) باشد آنگاه $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

پاییز ۹۹