Date

(۱

$$y = \hat{y} + z$$

$$\hat{y} = \operatorname{proj}_{\operatorname{span}\{u\}} y = \frac{y \cdot u}{u \cdot u}\vec{u} = \frac{\begin{bmatrix} ۴ \\ -۷ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} ۴ \\ -۷ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۴ \\ -۷ \end{bmatrix}} = \frac{۸ - ۲۱}{۱۶ + ۴۹}\vec{u} = \frac{-۱۳}{۶۵}\begin{bmatrix} ۴ \\ -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۴}{۵} \\ \frac{۷}{۵} \end{bmatrix}$$

$$z = y - \hat{y} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{۴}{۵} \\ \frac{۷}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۴}{۵} \\ \frac{۸}{۵} \end{bmatrix}$$

براساس قضیه ۸ کتاب درسی، $\hat{y}$ در $\underbrace{\operatorname{span}\{u\}}_{\text{قرار دارد}}$ و z بر $\operatorname{span}\{u\}$ (و همچنین خود u) عمود است.

۲) ابتدا پایه‌های null space ماتریس A را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_1}$$

چون $\dim(\operatorname{Nul}(A)) = 1$ شد پس می‌توان b_1 را به عنوان پایه متعامد نیز در نظر گرفت.

ب)

$$\operatorname{rank} A + \underbrace{\dim(\operatorname{Nul}(A))}_{1} = 3 \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$$

ج)

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{s_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{s_2} \right\}$$

واضح است که دو بردار در S مستقل خطی اند پس row space A را span می‌کند از طرفی $s_1 \cdot s_2$ صفر می‌شود پس می‌توان S را به عنوان پایه متعامد در نظر گرفت.

Subject: Year: Month: Date: / /

۳) الف)

$$\circledast \ |a \cdot b| = \big|\, \|a\|\, \|b\| \cos\varphi \,\big|$$

نامساوی: $|a\cdot b| \leq \|a\|\|b\| \overset{\circledast}{\Longrightarrow} \big|\|a\|\|b\|\cos\varphi\big| \leq \|a\|\|b\|$

$|a|,|b| \neq 0$

$\Rightarrow |\cos\varphi| \leq 1$ ✓ به عبارتی درست رسیدیم از طرفی روابط بازگشتی است

پس حکم اثبات می‌شود. اگر $|a|$ یا $|b|$ صفر شود آنگاه دو طرف نامساوی صفر شده و باز

هم برقرار است.

ب)

$$u_1 = u_2 + a u_3 \xrightarrow{\cdot u_2} u_1 u_2 = u_2 \cdot u_2 + a u_2 u_3$$

$$\overset{\circledast}{\Longrightarrow} 0 = 14 + a \times 7 \Rightarrow a = \frac{-14}{7}$$

u_1, u_2 عمودند

$$\circledast \begin{cases} u_1 u_2 = 0 \\ u_2 \cdot u_2 = \|u\|^2 \\ u_2 \cdot u_3 = u_2^T u_3 = 7 \end{cases}$$

۴) orthogonal basis $V = \{v_1, v_2\}$

$$X = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_2} \right\}$$

$V' = \{v_1', v_2'\}$ orthonormal basis

$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

حال بردارهای v_1', v_2' را پیدا می‌کنیم

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

۵)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X^T X \beta = X^T y \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta_0 = 5 \text{ و } \beta_1 = -3$$

$$\Rightarrow y = \beta_0 + \beta_1 x = \boxed{5 - 3x}$$

۶)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A - I\lambda) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 81-\lambda & -27 \\ -27 & 9-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow (81-\lambda)(9-\lambda) - 27 \times 27 =$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \text{ و } \lambda = 90$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_1 - \frac{1}{3} x_2 = 0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{e_2}$$

$$\lambda = 90 \Rightarrow \begin{bmatrix} -9 & -27 \\ -27 & -81 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_1 + 3x_2 = 0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_1}$$

$$v_2 = \frac{1}{\|e_2\|} e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ و } v_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{90} \text{ و } \sigma_2 = 0$$

$$\Rightarrow V=[v_1\ v_2]=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad \Sigma=\begin{bmatrix}3\sqrt{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$u_1=\frac{1}{\sigma_1}Av_1=\frac{1}{3\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 6 & -2\\ 6 & -2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}10\\ -20\\ -20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\ -2/3\\ -2/3\end{bmatrix}$$

$$u_1^Tx=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x_1+\frac{-2}{3}x_2+\frac{-2}{3}x_3=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_2\underbrace{\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}}_{w_1}+x_3\underbrace{\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}}_{w_2}$$

$\{u_1, w_1, w_2\}$ یک پایه است اما پایه متعامد نیست پس عملیات Gram Schmidt را اجرا می‌کنیم:

$$a_1=u_1$$

$$a_2=w_1-\frac{w_1\cdot a_1}{a_1\cdot a_1}a_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}-\frac{0}{1}a_1=w_1$$

$$a_3=w_2-\frac{w_2\cdot a_2}{a_2\cdot a_2}a_2=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}-\frac{4}{5}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ -\frac{4}{5}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2=\frac{1}{\|a_2\|}a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$u_3=\frac{1}{\|a_3\|}a_3=\frac{\sqrt{5}}{3}\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ -\frac{4}{5}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U=[u_1\ u_2\ u_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{-3\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{-3\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\sqrt{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$$

Subject: Year: Month: Date: / /

۱۷) طبق تعریف ماتریس A قابل قطری سازی عمودی است و تمامی مقدارهای ویژه آن بزرگتر از صفر می‌باشند.

$$A^T A = (PDP^T)^T (PDP^T) = PD^2P^T$$

Spectral decomposition $\lambda_1^2 v_1 v_1^T + \lambda_2^2 v_2 v_2^T + \dots + \lambda_n^2 v_n v_n^T$

با توجه به تساوی بالا می‌توان گفت $A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i$ و از طرفی چون v_i بر بقیه بردارهای P عمود است پس v_i یک بردار ویژه با مقدار ویژه متناظر λ_i^2 برای $A^T A$ است.

پس:

$$V = [v_1\ v_2 \dots v_n] = P \quad (1)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = \lambda_i \Rightarrow \Sigma = D \quad (2)$$

برای ماتریس U می‌دانیم:

$$U = [u_1 \dots u_n]$$

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i = \frac{1}{\lambda_i} A v_i = \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i v_i = v_i$$

$$u_i = v_i \Rightarrow U = [u_1 \dots u_n] = [v_1 \dots v_n] = P \quad (3)$$

(1)(2)(3) $\Rightarrow$ $A = U \Sigma V^T = PDP^T$

پس فرم SVD با فرم قطری سازی عمودی یکی است.

۹)

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\-2&2&-1\end{bmatrix} \quad , \quad v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$⊛\ A v_1=\lambda_1 v_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\-2&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}=\underbrace{3}_{\lambda_1}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_1} \Rightarrow \lambda_1=3$$

چون ⊛ برقرار است پس v_1 بردار ویژه است و λ_1 مقدار ویژه متناظر است.

$$A-3I=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\1&-1&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow x_1-x_2+2x_3=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}_{b_1}+x_3\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}}_{b_2}$$

$\{b_1,b_2\}$ پایه برای فضای ویژه $\lambda=3$ است.

$P=[u_1,u_2,u_3]$ و $\{u_1,u_2,u_3\}$ مجموعه بردارهای واحد متعامد مستقل خطی هستند

$\lambda=3$:

$$b_1\cdot b_2=-2\neq 0 \Rightarrow a=\underset{b_1}{\mathrm{Proj}}(b_2)=b_2-\frac{b_2\cdot b_1}{b_1\cdot b_1}b_1=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-2}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow -\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda-27=0 \Rightarrow \lambda=-3,3$$

$$\lambda=-3: \begin{bmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&1/2\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x_1=+\frac{1}{2}x_3\\ x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_3\underbrace{\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}}_{b_3}$$

$$\begin{cases}b_1\cdot b_3=0\\ b_3\cdot a=0\\ b_1\cdot a=0\\ b_1,a,b_3 \text{ مستقل خطی}\end{cases} \Rightarrow \{b_1,a,b_3\}$$

پایه متعامد است

$$u_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|a\|} a = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow P = [u_1 u_2 v_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|b_3\|} b_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

الف/۱۵

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad A - I\lambda = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 18\lambda + 15 = 0 \Rightarrow \lambda = -7.37 \text{ و } -3.06 \text{ و } +0.44$$

چون هم مقادیر ویژه مثبت داریم هم مقادیر ویژه منفی، پس f نامعین است. (بنابر قضیه کتاب)

ب)

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -2-\lambda & -2 \\ 3 & -2 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - I\lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 18\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -7.78 \text{ و } -1.78 \text{ و } -0.43$$

چون تمامی مقادیر ویژه منفی هستند پس f منفی معین است. (بنابر قضیه کتاب)

Subject: Year: Month: Date: / /

۱) الف) باید ثابت کنیم $\bar{\lambda} = -\lambda$ در این صورت λ یا صفر است یا کاملاً موهومی

$$Ax = \lambda x \xRightarrow{\times \bar{x}^T} \underbrace{\bar{x}^T A x}_{①} = \lambda \bar{x}^T x = \underbrace{\lambda \|x\|^2}_{②}$$

$$\underbrace{\bar{x}^T A x}_{①} = \bar{x} \cdot (Ax) = (Ax) \cdot \bar{x} = (Ax)^T \bar{x} = x^T A^T \bar{x} \overset{A^T = -A}{=} -x^T A \bar{x}$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x} \Rightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \quad ⊛$$

$$\xrightarrow{⊛} -x^T A \bar{x} = -x^T \bar{\lambda} \bar{x} = -\bar{\lambda} x^T \bar{x} = \underbrace{-\bar{\lambda} \|x\|^2}_{③}$$

$$\begin{cases} ① = ② \\ ① = ③ \end{cases} \Rightarrow ② = ③ \Rightarrow \lambda \|x\|^2 = -\bar{\lambda} \|x\|^2 \xrightarrow[\text{بردار ویژه است } x]{\|x\| \neq 0} -\lambda = \bar{\lambda} \checkmark$$

ب) با توجه به قسمت قبلی، اگر λ یک مقدار ویژه باشد $\bar{\lambda}$ نیز یک مقدار ویژه است

پس در ماتریس قطری D اگر m تا مقدار ویژه داشته باشیم، $2m$ تا ستون مخالف صفر داریم

و ما بقی صفر هستند پس: $Rank(D) = 2m$

از طرفی می‌دانیم rank دو ماتریس similar برابر است پس $rank(D) = rank(A) = 2m$