به نام او

پاسخنامه تمرینات سری چهارم – فصل چهارم و پنجم

۱. الف) نادرست. یک پایه برای فضای H ، یک مجموعه‌ی مستقل خطی در زیرفضای H است که H را $span$ می‌کند.

ب) درست. طبق قضیه ۵ کتاب

پ) درست. طبق متن کتاب بخش ۴.۳ بند دوم پاراگراف $two\ views\ of\ a\ basis$

ج) نادرست. طبق قضیه ۶ که فقط ستون‌های خود ماتریس A (نه هیچ ماتریس هم‌ارز یا کاهش‌یافته‌ی ماتریس A) پایه ای برای فضای $col\ A$ هستند.

---

۲. می‌دانیم $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ فضای برداری V را $span$ می‌کند و فرض کنید w یک بردار دلخواه در V باشد. داریم: $w = k_1v_1 + \cdots + k_4v_4$ (۱)
از آنجایی که $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ وابسته‌ی خطی است می‌توان c_1, c_2, c_3, c_4 یافت به طوری که حداقل یکی غیرصفر باشد و داشته باشیم: $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0$ (۲)
اگر این دو معادله را باهم جمع کنیم خواهیم داشت :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{0} = (k_1 + c_1)\mathbf{v}_1 + (k_2 + c_2)\mathbf{v}_2 + (k_3 + c_3)\mathbf{v}_3 + (k_4 + c_4)\mathbf{v}_4$$

به طوری که حداقل یکی از ضرایب متفاوت با ضریب متناظرش در معادله ۱ باشد؛ زیرا می‌دانیم حداقل یکی از c_i ها غیرصفر است. بنابراین w را می‌توان به بیش از ۱ روش با استفاده از ترکیب خطی $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ نوشت.

---

۳. فرض کنید (a, b) و (c, d) بردار های پایه A باشند. حال با توجه به بردار مختصات‌های v_1 و v_2 داریم:

```
(1, 5) = 2(a, b) + 1(c, d)

(2, 4) = -2(a, b) + -4(c, d)
```

که به نتایج زیر منجر می‌شود:

```
2a + c = 1
2b + d = 5
-2a - 4c = 2
-2b - 4d = 4
```

```
a = 1
b = 4
c = -1
d = -3
```

که در نتیجه خواهیم داشت :

در نتیجه پایه A از بردار های $(1,4)$ و $(-3,-1)$ تشکیل شده است.

حال با توجه به بردار تبدیل C و پایه A ، بردارهای پایه B را بدست می‌آوریم.

$$C = B^{-1}A$$

$$B = AC^{-1}$$

حال با توجه این که ماتریس C خودوارون است داریم :

$$B = AC$$

در نتیجه ماتریس B برابر $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ است که یعنی بردارهای پایه B برابر $(-1,3)$ و $(1,-2)$ می‌باشد.

---

۴. **الف)** با حل کردن معادله $(1,0) = a_1(1,2) + a_2\ (3,4)$ خواهیم داشت که $a_1 = -2$ و $a_2 = 1$ و درنتیجه $[v]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

به طور مشابه با توجه به معادله $(1,0) = b_1(7,3) + b_2(4,2)$ داریم که $b_1 = 1$ و $b_2 = -1.5$ و درنتیجه $[v]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$

ب) با محاسباتی کوتاه داریم که :

$$[(1,2)]_C = \begin{bmatrix} -3 \\ 5.5 \end{bmatrix} \qquad [(3,4)]_C = \begin{bmatrix} -5 \\ 9.5 \end{bmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت که $P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5.5 & 9.5 \end{bmatrix}$

به طور مشابه خواهیم داشت که :

$$[(7,3)]_B = \begin{bmatrix} -9.5 \\ 5.5 \end{bmatrix} \qquad [(4,2)]_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه $P_{B \leftarrow C} = \begin{bmatrix} -9.5 & -5 \\ 5.5 & 3 \end{bmatrix}$

۵. با توجه به تعریف، ماتریس P برابر $[I]_{\beta}^{\alpha}$ می‌باشد. حال داریم که :

$$2x^2+3x+1=2(x^2+x+1)+(x-1)$$
$$2x^2+2x+1=(x^2+x+1)+(x^2+1)+(x-1)$$
$$-x^2-2=-(x^2+x+1)+(x-1)$$

که درنتیجه :

$$P=[I]_{\beta}^{\alpha}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

در نتیجه ماتریس تبدیل پایه β به α که مطابق تعریف برابر $[I]_{\alpha}^{\beta}$ است برابر ماتریس زیر می‌باشد:

$$[I]_{\alpha}^{\beta}=([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

حال اگر تابع چندجمله‌ای $p(x)$ دارای مختصات $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ متناسب با پایه β باشد، در نتیجه بردار مختصات آن متناسب با پایه α مطابق زیر بدست می‌آید:

$$[p(x)]_{\alpha}=[I]_{\beta}^{\alpha}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$$

---

۶. ابتدا $characteristic\ equation$ آن را می نویسیم:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

حال طبق معادله بالا می‌دانیم که مقادیر ویژه ماتریس به صورت زیر است:

$\lambda_1=2$

$\lambda_2=2$

$\lambda_3=1$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه هم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A-2I=0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

که طبق ماتریس بالا بردارهای زیر بردار ویژه‌های مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 هستند.

$$\mathrm{v}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای $\lambda_3=1$ هم دقیقا همین مراحل را انجام می دهیم:

$$A-I=0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

که بردار ویژه آن به صورت زیر است:

$$\mathrm{v}_3=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که این سه بردار مستقل خطی هستند؛ پس ماتریس های P و D به صورت زیر می‌باشند:

$$P=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

برای اینکه بررسی کنیم ماتریس‌های P و D به درستی محاسبه شده‌اند، باید چک کنیم $AP=PD$.

$$AP=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PD=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $AP=PD$ و $A=PDP^{-1}$.

۷. **الف)** ماتریس A را به صورت رو به رو در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&b&c\end{bmatrix}$$

اکنون معادله‌ی مشخصه آن را بدست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\a&b&c-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)(-\lambda(c-\lambda)-b)+a(1)=-\lambda^3+c\lambda^2+b\lambda+a$$

$$-\lambda^3+c\lambda^2+b\lambda+a=-\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+6\quad\rightarrow\quad\begin{cases}a=6\\b=5\\c=4\end{cases}$$

بنابراین: $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&5&4\end{bmatrix}$

ب) می‌دانیم که اگر λ مقدار ویژه و v بردار ویژه متناظر با آن باشد، رابطه‌ی زیر بین ماتریس A و مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر آن برقرار است.

$$Av=\lambda v$$

حال اگر این رابطه را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم داریم:

$$A^{-1}Av=A^{-1}\lambda v\quad\rightarrow\quad v=\lambda A^{-1}v$$

اگر طرفین را بر λ تقسیم کنیم داریم:

$$\frac{1}{\lambda}v=A^{-1}v$$

که این رابطه دقیقا معادل همان رابطه اصلی است، با این تفاوت که برای ماتریس A^{-1} است که مقدار ویژه آن $\frac{1}{\lambda}$ می باشد. دقت کنید A وارون پذیر و $\lambda\neq 0$ است.

---

۸. ابتدا فرم $diagonalized$ ماتریس را بدست آورده و پس از انجام محاسبات داریم:

$$P=\begin{pmatrix}-1&-5\\1&1\end{pmatrix},\quad\text{and}\quad D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix},$$

و داریم: $P^{-1}AP = D$

بنابراین ماتریس A^n به صورت زیر است:

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -(-1)^n + 5(3^n) & -5(-1)^n + 5(3^n) \\ (-1)^n - 3^n & 5(-1)^n - 3^n \end{pmatrix}.$$

از آنجایی که ماتریس A تنها شامل اعداد صحیح است، هر توانی از A هم تنها شامل اعداد صحیح خواهد بود.

بنابراین هریک از درایه های A^n در عبارت نیز صحیح‌اند. به طور خاص :

$$\frac{(-1)^n - 3^n}{4}$$ یک عدد صحیح است.

---

۹. **الف)** ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را بدست می‌آوریم:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

در نتیجه:

$$\lambda = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

حال باید بردارهای ویژه آن را به کمک رابطه $(A - \lambda I)v = 0$بدست آوریم:

$$v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس A برابر $1 - (-1) = 2$ است و حاصل‌ضرب مقادیر ویژه آن هم برابر ۲ است:

$$(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 2$$

و مقدار $trace$ هم برابر $1 + 1 = 2$ است و مجموع مقادیر ویژه هم برابر ۲ می‌باشد:

$$(1 - \mathrm{i}) + (1 + \mathrm{i}) = 2$$

سپس مقادیر ویژه ماتریس B را بدست می‌آوریم:

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

پس برای مقادیر ویژه داریم:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = -2$$

بنابراین بردارهای ویژه به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس B برابر -8 است که برابر حاصل ضرب مقادیر ویژه می‌باشد:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2 \times 2 \times (-2) = 8$$

مقدار $trace$ هم برابر با مجموع مقادیر ویژه است یعنی ۲:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 2 + (-2) = 2 = trace$$

ب)

چون مقادیر ویژه برابر $1 \pm i$ هستند، پس ماتریس C به صورت زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و ماتریس $P = [Re\, V \quad Im\, V]$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و در نهایت:

$$A = P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰. **الف)** فضای برداری P_2 دارای پایه $B=\{1,x,x^2\}$ است و $dimension$ آن برابر ۳ است. بردارهای $coordinate$ با توجه به این پایه:

$$[p_1(x)]_B=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\quad [p_2(x)]_B=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$$

$$[p_3(x)]_B=\begin{bmatrix}1\\2\\8\end{bmatrix},\quad [p_4(x)]_B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

فضای برداری $\mathrm{Span}(T)$ را فرض کنید: $T=\{[p_1(x)]_B,[p_2(x)]_B,[p_3(x)]_B,[p_4(x)]_B\}.$

یک بردار پایه از $\mathrm{Span}(T)$ را از میان T انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A ماتریسی است که بردارهای ستونی‌اش این بردار های $coordinate$ هستند:

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&1&1\\1&1&2&1\\2&3&8&1\end{bmatrix}$$

با عملیات ردیفی داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&1&1\\1&1&2&1\\2&3&8&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2+R_1}\begin{bmatrix}-1&0&1&1\\0&1&3&2\\0&3&10&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-3R_2]{-R_1}\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&3&2\\0&0&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2-3R_3]{R_1+R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&11\\0&0&1&-3\end{bmatrix}$$

سه ستون اول شامل یک $leading$ هستند و بنابراین داریم: $\{[p_1(x)]_B,[p_2(x)]_B,[p_3(x)]_B\}$

یک پایه برای فضای برداری $\mathrm{Span}(T)$ است. می‌توان نتیجه گرفت که:

$\{p_1(x),p_2(x),p_3(x)\}$

یک پایه از $\mathrm{Span}(T)$ است. این نتیجه می‌دهد که $\mathrm{Span}(T)$ یک زیرفضای سه بعدی از P_2 می‌باشد در حالیکه خود P_2 هم سه بعدی است. بنابراین داریم: $P_2 = \mathrm{Span}(S)$

و می‌توان نتیجه گرفت پایه P_2 برابر است با $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$

ب) در قسمت الف یک پایه برای فضای برداری P_2 پیدا کردیم:

$$B' = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$$

بنابراین باید $coordinate$ برای P_4 با توجه به B' را پیدا کنیم:

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = p_4(x)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزونه این معادله دقیقا ماتریس A در بخش الف است. اگر این معادله را حل کنیم داریم:

$$a = -4, b = 11, c = -3.$$

$$p_4(x) = -4p_1(x) + 11p_2(x) + 3p_3(x)$$

$$[p_4(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

پاییز ۹۹