Preliminarii asupra șirurilor de funcții continue

Lema 2: În condițiile teoremei Cauchy-Picard (adică):

f este continuă în ambele argumente și $\frac{\partial f}{\partial x}$ este mărginită:

$\exists M_1 > 0$ a.î. $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq M_1,\ \forall (t,x) \in D_1$)

rezultă că funcția f este Lipschitz în al doilea argument, adică

$\exists L > 0$ a.î. $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|\ \forall (t,x_1),(t,x_2) \in \Delta$

$\Delta = [t_0-a, t_0+a] \times [x_0-b, x_0+b]$

Dem.

Considerăm funcția $g_t : [x_0-b, x_0+b] \to \mathbb{R}$ pt. $t \in [t_0-a, t_0+a]$, definită prin $g_t(x) = f(t,x)\ \forall x \in [x_0-b, x_0+b]$. Fie $x_1, x_2 \in [x_0-b, x_0+b]$, x_1

Pt g_t se aplică teorema Lagrange: $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ a.î.:

$$g(x_2) - g(x_1) = \underbrace{g_t'(c)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)}(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g(x_2) - g(x_1)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)(x_2 - x_1)\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)\right| \cdot |x_2 - x_1| \leq$$

$$\leq M_1 (x_2 - x_1) \Rightarrow \exists L > 0 \text{ și } L = M_1$$

qed

Lema 3 (Reprezentarea integrală a soluției problemei Cauchy (f, t_0, x_0))

În ipotezele teoremei Cauchy Picard are loc echivalența:

$\varphi : \underbrace{[x_0-\alpha, x_0+\alpha]}^{I_\alpha} \to \mathbb{R}$ este soluție a problemei Cauchy

$$[f, t_0, x_0] \Leftrightarrow \boxed{\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds}\ \forall t \in I_\alpha$$

Dem.:

„$\Rightarrow$" Pp. φ soluție a problemei Cauchy $(f, t_0, x_0) \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \forall t \in I_\alpha \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$

Știm că avem:

$$\varphi(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,ds}_{\varphi(s)\big|_{t_0}^{t} = \varphi(t) - \varphi(t_0)} + \varphi(t_0)$$

$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds$

"$\Leftarrow$" Fie $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds$. Arătăm că verifică condițiile din problema Cauchy.

$$\varphi(t_0) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))\,ds}_{} = x_0$$

$= 0$ (integrala din funcție continuă pe mulțime de măsură nulă)

$$\varphi'(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds\right)' =$$

$F(s)$ este o primitivă pt $f(s, \varphi(s))$

$\Downarrow$

$F'(s) = f(s, \varphi(s))$

$$= \left(F(s)\Big|_{t_0}^{t}\right)' = \left(F(t) - F(t_0)\right)' = F'(t) = f(t, \varphi(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{qed}$$

Demonstrația tm. Cauchy-Picard. Definim șirul de funcții următor

$\varphi_i : I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$ a.î.

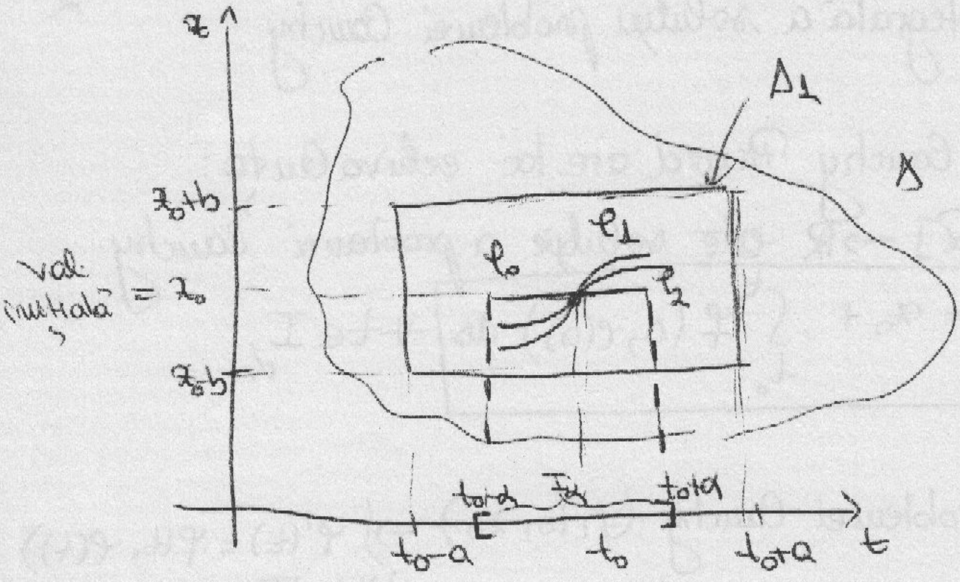
$\varphi_0(t) = x_0,\ \forall t \in I_\alpha$

$\varphi_{i+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Et. 1. Arătăm că $\Gamma_{\varphi_i} =$

graficul lui φ

$= \{(t, \varphi_i(t)) \mid t \in I_\alpha\} \subset \Delta_1$



$\varphi_0(t) = x_0,\ \forall t \in I_\alpha$

$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\,d \quad \forall t \in I_\alpha$

$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s))\,ds \quad \forall t \in I_\alpha$

Pt $i = 0$: $\varphi_0(t) = x_0 \Rightarrow \Gamma_{\varphi_0} = \{(t, x_0) \mid t \in I_\alpha\} \subset \Delta_1$

Presupunem proprietatea adevarată până la i, adică
$\Gamma_{\varphi_k} \subset \Delta_1,\ \forall\, 0 \le k \le i$

~~și~~ demonstrăm că este adevărată pt $i+1$

$$|\varphi_{i+1}(t) - \cancel{x_0}| = |\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds - \cancel{x_0}| = |\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \varphi(s))|}_{\le M \text{ (din } f \text{ continuă în ambele argumente)}}\,ds \le \int_{t_0}^{t} M\,ds = Ms\Big|_{t_0}^{t} = M\,|t-t_0| \le M\alpha \le$$

$\alpha \le \min(a, \frac{b}{M})$

dar $t \in \underset{\substack{\parallel \\ [t_0-\alpha,\, t_0+\alpha]}}{I_\alpha} \Rightarrow |t-t_0| \le \alpha$

$$\le \cancel{M}\frac{b}{\cancel{M}} \Rightarrow |\varphi_{i+1}(t) - x_0| \le b \Rightarrow \varphi_{i+1}(t) \in [x_0 - b, x_0 + b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\varphi_{i+1}} \subset \Delta_1$$

<u>Et 2</u>. Dem că șirul de funcții $(\varphi_i)_{i \ge 0}$ este șir Cauchy.

- Se dem că: (prin inducție)

$$(1)\quad |\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \le \frac{ML^i (t-t_0)^{i+1}}{(i+1)!} \qquad \forall i \ge 0,\ \forall t \in [t_0, t_0+\alpha]$$

Pt $\underline{\underline{i=0}}$. $|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \le \dfrac{M L^0 (t-t_0)}{1!}$:

Avem: $|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = |\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\,ds - \cancel{x_0}| =$

$$= |\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\,ds| \le \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \varphi_0(s))|}_{\le M}\,ds \le M \int_{t_0}^{t} ds =$$

$$= M(t-t_0) = M L^0 (t-t_0)$$

Presupunem propr. adev. până la i: $|\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)| \le \dfrac{ML^j (t-t_0)^{j+1}}{(j+1)!}$ $\quad \forall\, 0 \le j \le i$, $\forall t \in [t_0, t_0+\ldots$

Și demonstrăm pt $i+1$

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_{i+2}(t)| = \left|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{i+1}(s))\,ds - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_i(s))\,ds\right| =$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{i+1}(s)) - f(s, \varphi_i(s))\,ds\right| \le \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \underbrace{\varphi_{i+1}(s)}_{x_2}) - f(s, \underbrace{\varphi_i(s)}_{x_1})|}_{\text{(lemei 2)}}\,ds$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L\, \underbrace{|\varphi_{i+1}(s) - \varphi_i(s)|}_{\le \frac{ML^i (t-t_0)^{i+1}}{(i+1)!}}$$

$$\le L \int_{t_0}^{t} \frac{ML^i (t-t_0)^{i+1}}{(i+1)!}\,dt = L\frac{ML^i}{(i+1)!} \int_{t_0}^{t} (t-t_0)^{i+1}\,dt =$$

$$= \frac{ML^{i+1}}{(i+1)!} \cdot \frac{(t-t_0)^{i+2}}{i+2} = \frac{ML^{i+1}(t-t_0)^{i+2}}{(i+2)!}$$

Deci: relația $^{(1)}$ este adevărată

Evaluăm $|\varphi_{i+p}(t) - \varphi_i(t)| \overset{p>0}{=} |\underbrace{\varphi_{i+p}(t) - \varphi_{i+p-1}(t)} + \underbrace{\varphi_{i+p-1}(t) - \varphi_{i+p-2}(t)} + \ldots +$

$$+ \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \le \sum_{k=1}^{p} \underbrace{|\varphi_{i+k}(t) - \varphi_{i+k-1}(t)|}_{\overset{(1)}{\le} \frac{ML^{i+k-1}(t-t_0)^{i+k}}{(i+k)!}}$$

$$\le M \sum_{k=1}^{p} \frac{L^{i+k-1}(t-t_0)^{i+k}}{(i+k)!}$$

$$\le \sum_{k=0}^{p-1} |\varphi_{i+p-k}(t) - \varphi_{i+p-k-1}(t)| \le \sum_{k=0}^{p-1} \frac{ML^{i+p-k-1}(t-t_0)^{i+p-k}}{(i+p-k)!}$$

Folosim inegalitatea $(i+p-k)! \ge (i+1)!\,(p-k-1)!$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{(i+p-k)!} \le \frac{1}{(i+1)!\,(p-k-1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{|\varphi_{i+p}(t) - \varphi_i(t)|} \le M \sum_{k=0}^{p-1} \frac{L^{i+p-k-1}(t-t_0)^{i+p-k}}{(i+1)!\,(p-k+1)!} =$$

$$= M \underbrace{\frac{L^i (t-t_0)^i}{(i+1)!}}_{\substack{i\to\infty \\ \to 0}} \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} \frac{L^{p-k-1}(t-t_0)^{p-k}}{(p-k-1)!}}_{\text{sumă finită}} \longrightarrow 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\varphi_i)_{i\geq 0}$ este şir Cauchy $\xRightarrow{\text{Lema 1}} \exists\, \varphi : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ a.î.

$\varphi(t) = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(t)$

Et 3. Arătăm că $\varphi(t) = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(t)$ este soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0)

$$\varphi(t_0) = \lim_{i\to\infty} \underbrace{\varphi_i(t_0)}_{\substack{\| \\ x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi_{i-1}(s))\,ds = x_0}} = \lim_{i\to\infty} x_0 = x_0 \Rightarrow \text{cond. iniţială este îndeplinită } (2)$$

Avem $\varphi_i'(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{i-1}(s))\,ds\right)' =$

$$= f(t, \varphi_{i-1}(t)) \cdot \underset{\substack{\| \\ 1}}{t'} - \underbrace{f(t_0, \varphi_{i-1}(t_0)) \cdot t_0'}_{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi_i'(t) = f(t, \varphi_{i-1}(t)),\ \forall i \geq 1$

Rezultă $\varphi'(t) = \left(\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i(t)\right)' = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i'(t) = \lim\limits_{i\to\infty}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continuă}}}{=} f(t, \varphi(t)) \Rightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))\ \forall t \in I_\alpha$
$\Rightarrow \varphi$ verifică ecuaţia (3)

Existenţa soluţiei este demonstrată prin (2) şi (3)

Exemplu. Fie pb Cauchy $\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$ (4)

$x' = x \Rightarrow x = C e^{\int 1\,dt} = C e^t$
Cum $x(0) = 1$ $\Big/ \Rightarrow 1 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sol. pb. Cauchy este $\boxed{x(t) = e^t}$

Construim şirul aproximaţiilor succesive pt calcul soluţiei prob (4)
(şirul din metoda de aproximare Picard)

$$\boxed{\varphi_0(t) = x_0 = 1}$$

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_0(s))\,ds = 1 + \int_0^t \varphi_0(s)\,ds =$$

$f(t,x) = x$

$t_0 = 0$

$x_0 = 1$

$$= 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t. \Rightarrow \varphi_1(t) = 1 + t$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s))\,ds = 1 + \int_0^t \varphi_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds =$$

$$= 1 + \left(s + \frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_2(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}}$$

Tema 1) Arătați că $\varphi_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$

Se știe: seria exponențiala este:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = e^t$$

2) Fie problema Cauchy

(f, t_0, x_0) unde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(t,x) = 3\sqrt[3]{x^2}$.

a) Arătați că pt $x_0 \neq 0$ problema Cauchy (f, t_0, x_0) verifică cond. t.m. C-P.

b) Arătați că pb. Cauchy $(f, 0, 0)$ adica $\begin{cases} x' = 3\sqrt[3]{x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

nu verifică cond. C-P