③ Poligoane

Funcții cu ajutorul cărora pot fi desenate poligoane (inclusiv interiorul). Ce este interiorul? Cum se colorează / umple? Putem reprezenta "cât mai variat" aceste poligoane?

a) glBegin (GL_TRIANGLES);
   -- nr de vârfuri $p_1 p_2 \dots$
glEnd();

desenează Δ
$p_1 p_2 p_3$
$p_4 p_5 p_6$
—
$p_{3k+1}\, p_{3k+2}\, p_{3k+3}$
(pot exista vârfuri care nu apar în niciun triunghi)

triunghiuri care nu au laturi în comun

b) glBegin (GL_TRIANGLE_STRIP);
   -- nr de vârfuri -- $p_1 - p_n$
glEnd();

desenează Δ:
$\Delta p_1 p_2 p_3$
$\Delta p_2 p_3 p_4$
$\Delta p_4 p_5 p_6$ etc

triunghiuri care au laturi comune (care?)

c) glBegin (GL_TRIANGLE_FAN);
   -- nr de vârfuri $p_1 - p_n$
glEnd();

desenează
$\Delta p_1 p_2 p_3$
$\Delta p_1 p_3 p_4$
$\Delta p_1 p_k p_{k+1}$

triunghiuri cu vârful p_1

d) glBegin (GL_QUADS);
   -- nr de vârfuri $p_1 - p_n$
glEnd();

patrulateri
$p_1 p_2 p_3 p_4$
$p_5 p_6 p_7 p_8$

e) glBegin (GL_QUAD_STRIP)
   -- nr de vârfuri
glEnd();

$p_1 p_2 p_3 p_4$
—

f) glBegin(GL_POLYGON);

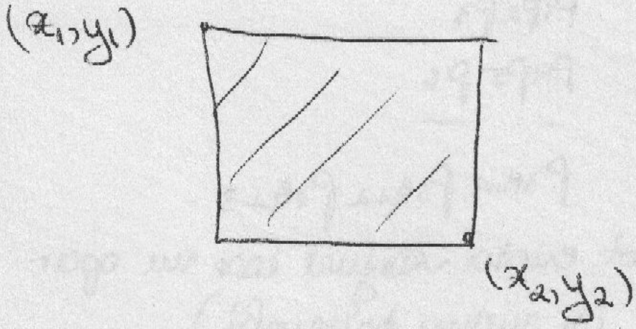
-- nr de vârfuri

glEnd();

vezi comentarii ulterioare

Există o funcție specială pt desenarea dreptunghiurilor 2D:

glRect*(x_1, y_1, x_2, y_2);



Reguli referitoare la vârfurile ce determină un poligon (pt ca GL_POLYGON să producă efectul dorit)

- cel puțin 2, distincte între ele 2x2

1) punctele tb să fie situate în același plan (coplanare)

Condiția de coplanaritate pt n puncte $p_1, p_2, \dots, p_n$ din $\mathbb{R}^3$:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{p_1} & x_{p_2} & x_{p_3} & \dots & x_{p_n} \\ y_{p_1} & y_{p_2} & y_{p_3} & \dots & y_{p_n} \\ z_{p_1} & z_{p_2} & z_{p_3} & \dots & z_{p_n} \end{pmatrix} = 3$$

Alternativă:

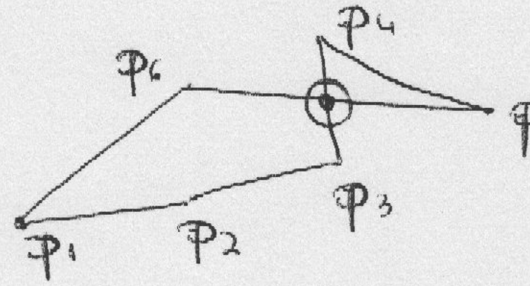
vectorial:

- se formează vectorii

$$\overrightarrow{p_1p_2} = p_2 - p_1$$
$$\overrightarrow{p_1p_3} = p_3 - p_1$$
$$\dots$$
$$\overrightarrow{p_1p_n} = p_n - p_1$$

- punctele $P_1, P_2, \ldots P_n$ sunt coplanare $\Leftrightarrow$ spațiul generat de vectorii indicați are dimensiunea $\underline{2}$.

2)



Ordinea vârfurilor să fie indicată a.î. muchiile poligonului să nu se intersecteze (decât muchiile succesive în vârfuri)

$\rightarrow$ linia poligonală care ia naștere să nu aibă autointersecții

<u>De fapt</u>: ce tb verificat?

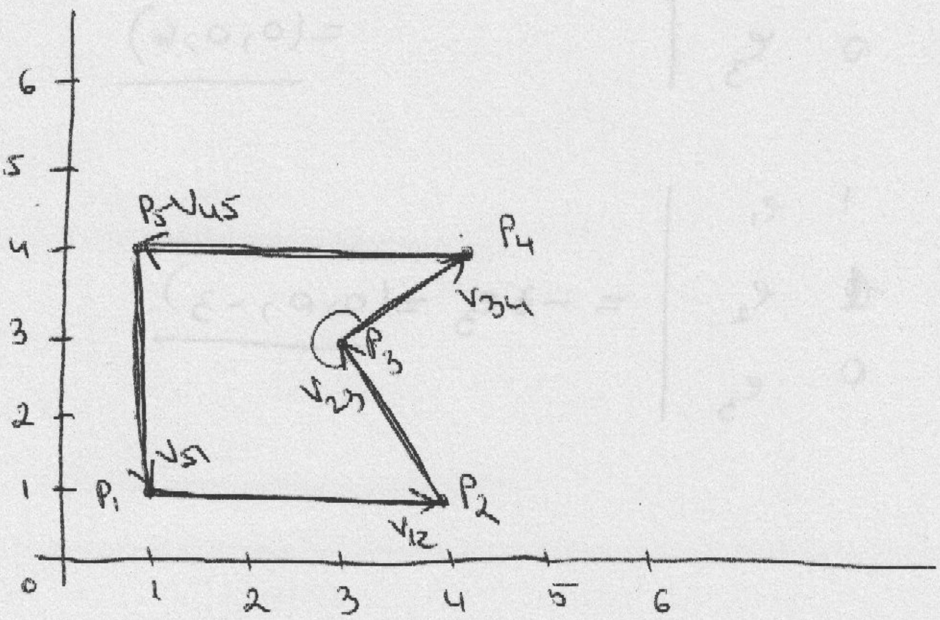
- Fie $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vârfuri (în această ordine!)
- Se formează muchiile $[P_1P_2], [P_2P_3], \ldots, [P_kP_{k+1}]$ (cu convenția $P_{n+1} = P_1$)
- Tb ca 2 muchii distincte să nu aibă puncte comune (cu excepția muchiilor succesive care au în comun un vârf)

$\rightsquigarrow$ problema revine la a testa intersecții de segmente (v. curs anterior)

3) <u>Vârfurile / punctele să genereze un poligon convex</u>

(?) <u>criteriu</u> care să precizeze dacă un poligon este convex/concav.

<u>Exemplu</u>.



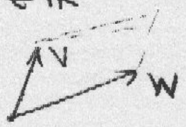
$P_1 = (1,1)$
$P_2 = (4,1)$
$P_3 = (3,3)$
$P_4 = (4,4)$
$P_5 = (1,4)$

$\Rightarrow$ poligon concav

Consider toate aceste puncte în $\mathbb{R}^3$, având ultima coordonată egală cu 0 și considerăm vectorii determinați de perechi de puncte succesive: v_{12}, v_{23}, v_{34}, v_{45}, v_{51}.

(Remember Produs vectorial în $\mathbb{R}^3$

$v, w \in \mathbb{R}^3$



Se calculează formal astfel:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix}}_{} \longrightarrow \text{vector din } \mathbb{R}^3$$

comp lui v în baza canonică

vectorii bazei canonice

componentele lui w în baza canonică)

$V_{12} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (3, 0, 0)$

$V_{23} = P_3 - P_2 = (-1, 2, 0)$

$$\underline{V_{12} \times V_{23}} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & e_1 \\ 0 & 2 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \underset{\text{dezv. după col 3}}{=\!=\!=} 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 6 e_3 = \underline{(0, 0, 6)}$$

$V_{34} = (1, 1, 0)$

$$\underline{V_{23} \times V_{34}} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & e_1 \\ 2 & 1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = -3 e_3 = \underline{(0, 0, -3)}$$

$$V_{34} \times V_{45} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & e_1 \\ 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = (0,0,3)$$

$$V_{45} \times V_{51} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & e_1 \\ 0 & -3 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = (0,0,9)$$

Concluzia. Un poligon 2D este convex $\Leftrightarrow$ toate produsele vectoriale de forma $V_{i\,i+1} \times V_{i+1\,i+2}$ $(i+1 \in \{2,3,\dots,n,1\})$ au ultima componentă pozitivă sau negativă (tb să aibă același semn) cu convenție

gta.math.unibuc.ro → Academic - Stupi - CGGC

Poligon din $\mathbb{R}^2$:

- convex $\Leftrightarrow$ toate vf au același "semn" (ultima comp a prod vect)
- concav: cum stabilim vârfurile "concave"?

Varianta 1. cu un algoritm eficient (e.g. Graham's Scan) - determinăm frontiera acoperirii convexe ⇝ v.f. convexe

Varianta 2. Presupunem că $P_1, P_2, \dots, P_r$ au același semn după redenumire

$Q_1, Q_2, \dots, Q_l$ ⇝ au semn contrar

Vârfurile concave sunt în acoperirea convexă a mulțimii determinate de celelalte vârfuri

În general, date niște puncte $A_1, A_2, \dots, A_n$ și M din $\mathbb{R}^3$ (presupuse coplanare) cum testăm dacă M este în interiorul acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(A_1, A_2, \dots, A_n)$

Varianta 1: cu arii

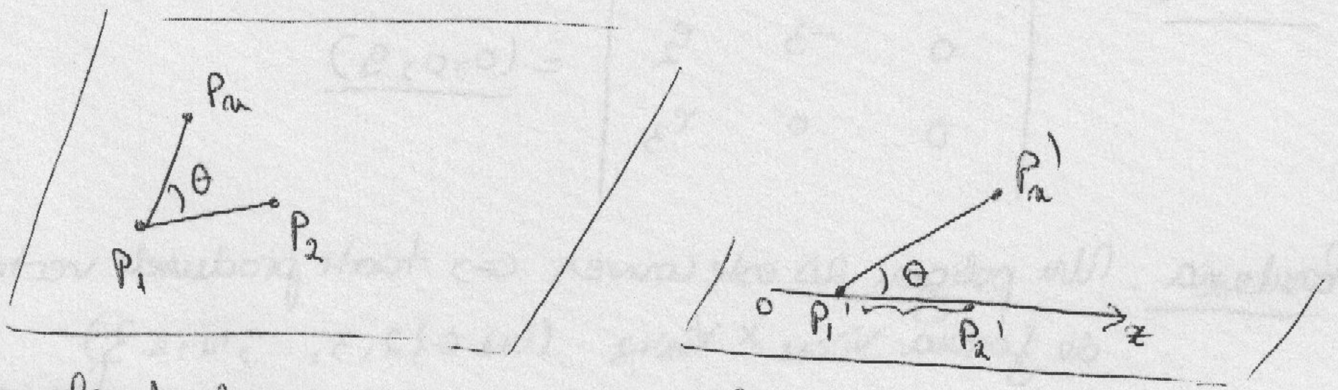
Varianta 2: M coplanar cu $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow M = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n$ (combinație afină)

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$

$M \in Conv(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow \exists$ o combinație afină care să fie convexă

Testarea concavității pt un poligon din $\mathbb{R}^3$

Metoda 1. găsim o transformare euclidiană, adică o izometrie a.î. poligonul inițial să fie transformat într-un poligon situat în planul $z = 0$



planul polig. planul $z=0$

găsim o izometrie a.î. $P_1 \longmapsto P_1' = (0,0,0)$

$P_2 \longmapsto P_2' = (\|P_1P_2\|, 0, 0)$

$P_n \longmapsto P_n'$ a.î. $\widehat{P_2 P_1 P_n} \equiv \widehat{P_2' P_1' P_n'}$ și

$\|P_n P_1\| = \|P_n' P_1'\|$

Metoda 2. Generalizăm în spațiu metoda din plan

Exemplu.
$P_1 = (2, -1, 1)$ $\quad \overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 2, 1)$

$P_2 = (0, 1, 2)$ $\quad \overrightarrow{P_1P_3} = (-1, 1, 2)$

$P_3 = (1, 0, 3)$ $\quad \overrightarrow{P_1P_4} = (-1, 1, 1)$

$P_4 = (1, 0, 2)$

Acești vectori sunt liniar dependenți (de ce? $\to$ determinant $= 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ punctele sunt coplanare

$$P_1P_2 \times P_2P_3 = (-2, 2, 1) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & e_1 \\ 2 & -1 & e_2 \\ 1 & 1 & e_3 \end{vmatrix} = (3, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = (1,-1,1) \times (0,0,-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e_1 \\ -1 & 0 & e_2 \\ 1 & -1 & e_3 \end{vmatrix} = (1,+1,0)$$

$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = (-1,-1,0)$

$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (4,4,0)$

(Obs! vectorii $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$, etc sunt colineari $\to$ legat de coplanaritatea punctelor)

Putem "grupa" vârfurile : $\begin{cases} P_1, P_2, P_3 \\ P_4 \end{cases}$

Afirm $P_4 \in \mathrm{Conv}(P_1, P_2, P_3)$

Determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ cu $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$ a.î. $P_4 = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

Idee de lucru: - scriem o relație vectorială între $\overrightarrow{P_4P_1}$, $\overrightarrow{P_4P_2}$ și $\overrightarrow{P_4P_3}$ (dependență liniară)

$\overrightarrow{P_4P_1} = (1,-1,-1)$

$\overrightarrow{P_4P_2} = (-1,1,0)$

$\overrightarrow{P_4P_3} = (0,0,1)$

Relația : $\overrightarrow{P_4P_1} + \overrightarrow{P_4P_2} + \overrightarrow{P_4P_3} = 0$

$\Longrightarrow$ împărțim convenabil a.î. suma coef $= 1$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{P_4P_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_4P_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_4P_3} = 0 = \overrightarrow{P_4P_4}$$

$$\xRightarrow{\text{devectorializare}} \underline{P_4 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3}$$

combinație afină care este convexă $\Rightarrow P_4 \in \mathrm{Conv}(P_1, P_2, P_3)$

$\Rightarrow$ poligonul $P_1P_2P_3P_4$ "concav" în P_4