Eddp - Curs 2

12.10.2011

220

- cursul din 19.10.2011, $8^{00}-10^{00}$ se va recupera Luni, 17.10.2011, $14^{00}-16^{00}$ sala
Seminarul din 19.10.2011, $10^{00}-12^{00}$ se va recupera Luni, 17.10.2011, $12^{00}-14^{00}$ sala? 13
Seminarul din 20.10.2011, [redacted], la grupa 343 se va recupera Luni, 17.10.2011, $12^{00}-14^{00}$ sala 9

Ecuații integrabile prin cuadraturi

4) Ec-Bernoulli $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}}$ (1)

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Metoda 2: Se face schimbarea de variabilă $\boxed{y = x^{1-\alpha}} \iff$

$\iff \boxed{x = y^{\frac{1}{1-\alpha}}}$

$\left(x(t) = (y(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$

Înlocuind în ec (1) se obține:

$$\frac{d}{dt}\left(y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) = a(t)\cdot y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\cdot\left(y^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\, y^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot\frac{dy}{dt} = a(t)\cdot y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\cdot y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,\frac{dy}{dt} = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Obs! 1) pt $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ $\Rightarrow$ ec. obț. are sol staționară $y = 0 \Rightarrow x = 0$ sol a ec (1)

2) pt $\alpha < 0 \Rightarrow$ ec nu are soluția $y = 0$

Înmulțind cu $y^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow$

$$\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{dy}{dt} = a(t)\, y^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + b(t) \quad \Big/ \cdot (1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = (1-\alpha)\, a(t)\, y + b(t) \Rightarrow \text{ec. liniară pt } y$$

) Ec. Riccati

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)} \quad (2)$$

unde $a, b, c : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, funcții continue

Obs! 1) Dacă $c \equiv 0$ $(c(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R})$, atunci ecuația (2) este ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$

2) Dacă $a \equiv 0$ $(a(t) = 0 \ \forall t \in I)$, atunci ec (2) este liniară

Rezolvarea ec (2) presupune cunoașterea unei soluții particulare φ_0

Prop. Dacă φ_0 este o soluție particulară a ec (2), atunci prin schimbarea de variabilă $\boxed{y = x - \varphi_0}$ adică $y(t) = x(t) - \varphi_0(t)$, se ajunge la o ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$

Dem: $x(t) = y(t) + \varphi_0(t)$

$x = y + \varphi_0$

Ec (2) devine: $\frac{d}{dt}(y + \varphi_0) = a(t)(y + \varphi_0)^2 + b(t)(y + \varphi_0) + c(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi_0(t)}{dt} = a(t)y^2 + 2a(t)y\varphi_0(t) + a(t)\cdot\varphi_0^2(t) + b(t)y + b(t)\varphi_0(t) + c(t)$$

Dar φ_0 e soluție a ec (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi_0(t)}{dt} = a(t)\varphi_0^2(t) + b(t)\varphi_0(t) + c(t) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{a(t)}_{b_1(t)}y^2 + \underbrace{[2a(t)\varphi_0(t) + b(t)]}_{b_1(t)}y \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. Bernoulli cu $\alpha = 2$.

Propoziția 2: Fie ecuația: (3)

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right)}$$, unde $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcție continuă,

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a.î. a și α nu sunt 0 simultan $(|a| + |\alpha| > 0)$,

β și ~~a~~ b nu sunt zero simultan
$(|b|+|\beta|>0)$

Considerăm $\Delta = a\beta - b\alpha$

a) Dacă $\Delta = 0$, atunci schimbarea de variabilă $y = at + bx$ dacă $b \neq 0$ <u>sau</u> $y = \alpha t + \beta x$ dacă $\beta \neq 0$, conduce la ec. cu variabile separabile

b) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} s = t - t_0 \\ y = x - x_0 \end{cases} \Leftrightarrow (t = s + t_0) \quad \left(\begin{array}{l} y(s) = x(t(s)) - x_0 \text{ sau} \\ x(t) = y(s(t)) + x_0 \end{array} \right)$$

unde (t_0, x_0) este soluția sistemului algebric liniar:

$$\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ \alpha t + \beta t + \gamma = 0 \end{cases}$$

, conduce la o ec. omogenă (în y și s)

<u>Dem.</u>

a) $\underline{\Delta = 0}$. Presupunem că $b \neq 0 \Rightarrow$ schimbarea de variabilă este

$$y = at + bx$$

$$y(t) = at + bx(t) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{b}(y(t) - at)$$

Ec (3) devine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{b}(y(t) - at)\right) = g\left(\frac{at + b\cdot\frac{1}{b}(y - at) + c}{\alpha t + \beta\frac{1}{b}(y - at) + \gamma}\right)$$

Dar $\Delta = 0 \Rightarrow a\beta - b\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{a\beta}{b}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}\frac{dy}{dt} - \frac{a}{b} = g\left(\frac{\cancel{at} + y - \cancel{at} + c}{\frac{\beta}{b}(\cancel{at} + y - \cancel{at}) + \gamma}\right) \quad /\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} - a = b\cdot g\left(\frac{y+c}{\frac{\beta}{b}y + \gamma}\right) \quad /+a \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{b\, g\left(\frac{y+c}{\frac{\beta}{b}y+\gamma}\right) + a}_{a_1(y)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. cu variabile separabile în y și t cu $a_1(y) = b\,g\left(\frac{y+c}{\frac{\beta}{b}y+\gamma}\right) + a$

și $b_1(t) = 1$

$$\frac{dy}{dt} = a_1(y)\, b_1(t)$$

b) $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistemul algebric

$$\begin{cases} at + bx = -c \\ \alpha t + \beta x = -\gamma \end{cases}$$ are soluție unică (t_0, x_0)

Schimbarea de variabilă în ec (3) înseamnă

$$x(t) = y(s(t)) + x_0$$

deci se obține

$$\frac{d}{dt}\left(y(s(t)) + x_0\right) = g\left(\frac{a(s+t_0) + b(y+x_0) + c}{\alpha(s+t_0) + \beta(y+x_0) + \gamma}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}(s(t)) \cdot \frac{d(s(t))}{dt} = g\left(\frac{as + \cancel{at_0} + by + \cancel{bx_0} + \cancel{c}}{\alpha s + \cancel{\alpha t_0} + \beta y + \cancel{\beta x_0} + \cancel{\gamma}}\right)$$

dar $s = t - t_0 \Rightarrow s(t) = t - t_0 \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = 1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{ds} = g\left(\frac{as + by}{\alpha s + \beta y}\right)$$

$$\frac{dy}{ds} = g\underbrace{\left(\frac{\cancel{s}(a + b\frac{y}{s})}{\cancel{s}(\alpha + \beta\frac{y}{s})}\right)}_{h(\frac{y}{s})} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = h\left(\frac{y}{s}\right) \Rightarrow \text{ec. omogenă în } y \text{ și } s$$

<u>Existența și unicitatea soluției problemei Cauchy pt ecuații diferențiale scalare</u>

Fie ec. diferențială scalară de ordinul întâi

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (4) \quad \text{unde } f: \Delta \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Spunem că avem o problemă Cauchy pt ec (4) dacă se cere determinarea unei soluții $\varphi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t)), \ \forall t \in I \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

unde $(t_0, x_0) \in \Delta$.

Deci problema Cauchy se poate nota (f, t_0, x_0) și se înțelege prob:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (5)$$

<u>Teorema Cauchy - Picard</u> (existența și unicitatea soluției prob. Cauchy)

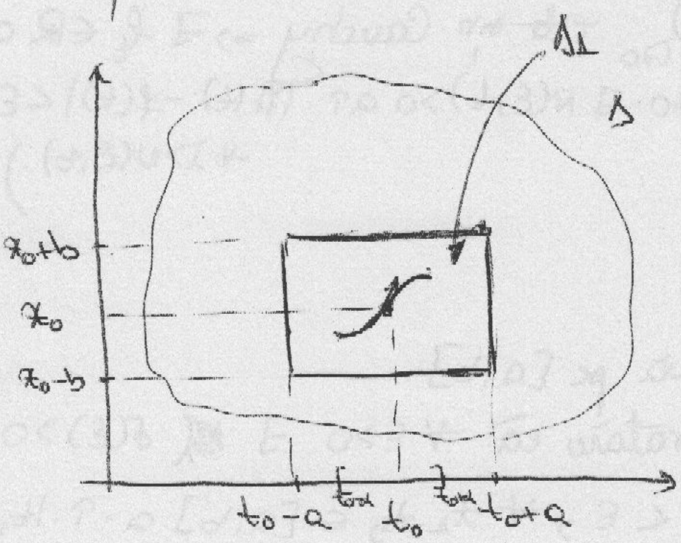
$f(\cdot, \cdot) : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f continuă în ambele argumente: $\exists M > 0$ a.î. $M = \sup |f(t, x)|$, $(t, x) \in \Delta_1$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este mărginită: $\exists M_1 > 0$ a.î. $M_1 = \sup \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|$, $(t, x) \in \Delta_1$
- $(t_0, x_0) \in \Delta$
- $a, b > 0$ a.î. $\overbrace{[t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - a, x_0 + a]}^{\Delta_1 \text{ not}} \subset \Delta$ (dreptunghi centrat în (t_0, x_0))
- Se consideră $\alpha \leq \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$

$\Downarrow$

$\exists!\ \varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ soluție a problemei Cauchy (f, t_0, x_0) adică

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t)) \quad \forall\, t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$



Preliminarii pt demonstrarea teoremei Cauchy-Picard

Fie $(f_i)_{i\geq 0}$ un şir de funcţii continue, $f_i : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval

Definiţii.

1) Şirul $(f_i)_{i\geq 0}$ converge punctual la $f : I \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \forall t \in I$, $\exists N(\varepsilon, t)$ a.î. $|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$, $\forall i \geq N(\varepsilon, t)$ se notează $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$

2) Şirul $(f_i)_{i\geq 0}$ converge uniform la $f : I \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall i \geq N(\varepsilon)$$
$$\forall t \in I.$$

3) Şirul $(f_i)_{i\geq 0}$ este şir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f_i(t) - f_j(t)| \quad \forall i, j \geq N(\varepsilon).$$

Lema 1. Fie şirul de funcţii continue $f_i : I \to \mathbb{R}$, $(f_i)_{i\geq 0}$ este şir Cauchy. $I = [a,b]$

Atunci:

1) $\exists$ o funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$

2) pt funcţia f de la punctul 1) avem $\int_a^b f_i(t)\,dt \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

$$\left(\lim_{i\to\infty} \int_a^b f_i(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\right)$$

Dem. 1) Fie $t \in [a,b] \Rightarrow (f_i(t))_{i\geq 0}$ este şir Cauchy $\Rightarrow \exists\, l_t \in \mathbb{R}$ a.î.

$\lim_{i\to\infty} f_i(t) = l_t$ $\quad(\forall \varepsilon > 0, \forall t > 0\ \exists N(\varepsilon, t) > 0$ a.î. $|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$ $\forall i > N(\varepsilon, t))$

Definim $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$f(t) = l_s$

Arătăm că f este continuă pe $[a,b]$

~~Fie $t_1, t_2 \in [a,b]$~~. Dacă arătăm că $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon, \ \forall t_1, t_2 \in [a,b] \text{ a.î. } |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$$

Fie $t_1, t_2 \in [a,b]$

$$|f(t_1) - f(t_2)| = |\underbrace{f(t_1) - f_i(t_1)} + f_i(t_1) - f_i(t_2) + \underbrace{f_i(t_2) - f(t_2)}| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(t_1) - f_i(t_1)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_i(t_1) - f_i(t_2)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|f_i(t_2) - f(t_2)|}_{< \varepsilon/3} <$$

$< \cancel{3} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{3}} = \varepsilon$

Deci: f este funcție uniform continuă, deci continuă

2) $\left| \int_a^b f_i(t) - \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b (f_i(t) - f(t))\,dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f_i(t) - f(t)|}_{< \varepsilon}\,dt \leq$

$\leq \int_a^b \varepsilon\,dt = \varepsilon t \Big|_a^b = \varepsilon(b-a) \qquad \forall \varepsilon > 0$
$\qquad \forall i \geq N(\varepsilon, t)$

$\Rightarrow \int_a^b f_i(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt.$