EDDP – Curs 1

5.10.2011

Bibliografie:

1. Șt. Miricã – Ec. diferențiale, I–III
   Ed. Universității Buc.
2. I. Roșca – Ec. diferențiale ~~și~~ cu derivate parțiale
   Ed. Fundației "România de Mâine", 2000
3. A. Cernea – Ec. diferențiale
   Ed. Univ. Buc. 2009 sau 2010

Def → O ec. diferențială de ordin $k \in \mathbb{N}^*$ cu n componente pentru funcția necunoscută $x = (x_1, \dots, x_n)$ este descrisă prin expresia

$$F\left(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right) = 0 \qquad (1)$$

sau, scrisă în formă cvasiliniară:

$$x^{(k)} = f\left(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}\right) \qquad (2)$$

unde $F : G \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{\text{de } (k+1) \text{ ori}} \to \mathbb{R}^n$

sau $f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ ori}} \to \mathbb{R}^n$

sunt funcții cunoscute

Def → O funcție $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ este soluție pentru ecuația (2) dc.

$$\varphi^{(k)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)\right), \ \forall t \in I$$

Vom considera $\boxed{n = 1}$, adică ecuații scalare

Exemple:

① $k = 1$ ecuații diferențiale scalare de ordin 1

(1) $\Rightarrow F(t, x, x^{(1)}) = 0$

(2) $\Rightarrow \boxed{x^{(1)} = f(t, x)}$

notații: $x' = f(t, x)$

sau $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ sau $\dot{x} = f(t, x)$

unde $f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dacă $f(t,x)$ nu depinde explicit de x, atunci ecuaţia devine

$$x' = f(t) \qquad (3)$$

este ecuaţie de tip primitivă

Dacă $t \in [a,b]$ şi considerăm $t_0 \in (a,b)$, atunci mulţ. sol. ec (3) este

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

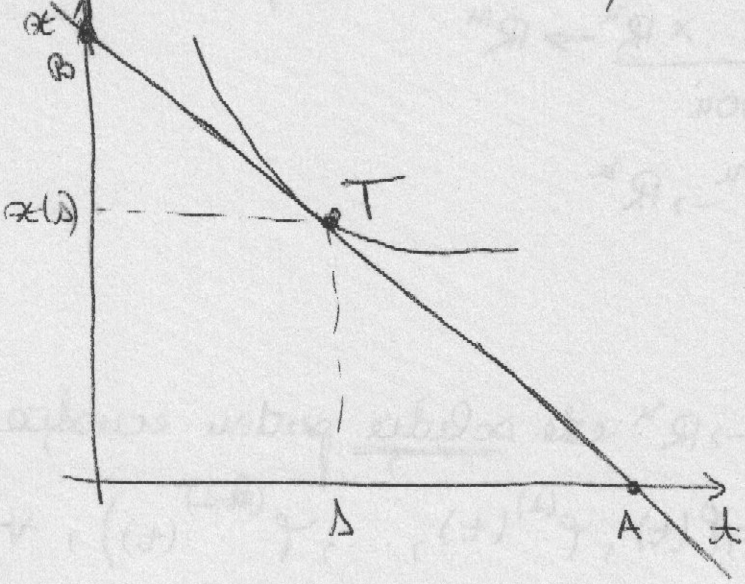
Dacă se cere o soluţie a.î. să avem $x(t_0) = x_0$, atunci $C = x_0$

Altfel spus $\quad x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + x_0 \quad$ este soluţia problemei (Cauchy / iniţiale)

$$\begin{cases} x' = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$\uparrow$ condiţie iniţială

② Problemă de geometrie: să se determine curbele x (din $\mathbb{R}^2$) a.î. în fiecare punct $(s, x(s))$ să aibă tangentă şi punctul de tangenţă să fie simetric faţă de intersecţiile tangentei cu axele de coordonate



(AB) = dr. tangentă în $T(s, x(s))$

$A(t_A, 0)$

$B(0, x_B)$

$\underline{\underline{TA = TB}}$

ec. tangentei: $\quad x - x(s) = x'(s)\,(t - s)$

$A: \quad 0 - x(s) = x'(s)\,(t_A - s)$

$$t_A = s - \frac{x(s)}{x'(s)} \quad (\text{cu condiţia ca } x'(s) \neq 0)$$

$\hookrightarrow = 0 \Rightarrow$ dr e $\parallel$ şi nu $\cap$ dr. a

$B: \; x_B - x(s) = x'(s)(0-s)$

$$\boxed{x_B = x(s) - s\,x'(s)}$$

Din condiția $TA = TB \Rightarrow TA^2 = TB^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (s - t_A)^2 + (x(s) - 0)^2 = (s-0)^2 + (x(s) - x_B)$$

$$\Rightarrow \cancel{s^2} - 2s\left(s - \frac{x(s)}{x'(s)}\right) + \left(s - \frac{x(s)}{x'(s)}\right)^2 + \cancel{x^2(s)} =$$

$$= \cancel{s^2} + \cancel{x^2(s)} + 2x(s)\left(x(s) - s x'(s)\right) + \left(x(s) - s x'(s)\right)^2$$

$$\Rightarrow -2s^2 + 2s\frac{x(s)}{x'(s)} + s^2 - 2s\frac{x(s)}{x'(s)} + \frac{x^2(s)}{(x'(s))^2} = 2x^2(s) + 2x(s)x'(s) +$$

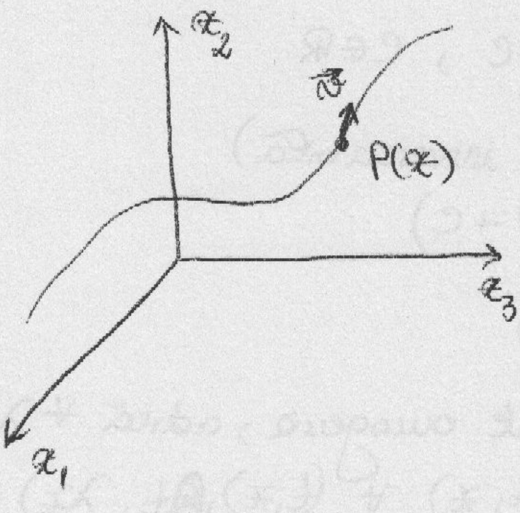
$$+ x^2(s) - 2s\,x(s)x'(s) + s^2(x'(s))^2$$

$$\Rightarrow x^2(s) - 2(s-s)x(s)x'(s) + s^2(x'(s))^2 + s^2 + 2s\frac{x(s)}{x'(s)}\left(s - \frac{x(s)}{x'(s)}\right) +$$

$$+ \frac{x^2(s)}{(x'(s))^2} = 0$$

$$F(s, x(s), x'(s)) = 0.$$

3) <u>Exemplu din mecanică</u>: $x = (x_1, x_2, x_3)$



$$\vec{v} \overset{not}{=} v = (v_1, v_2, v_3) = \frac{dx}{dt} \overset{not}{=} \dot{x}$$

$$\vec{a} \overset{not}{=} a = (a_1, a_2, a_3) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Dacă $\vec{f} \overset{not}{=} f = (f_1, f_2, f_3)$ este forța care acționează asupra lui P, atunci din legea a doua a lui Newton: $m \cdot \ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$

↑ masa punctului material

Deci se obține ec.:

$$\ddot{x} = \frac{1}{a_n} f(t, x, \dot{x})$$

<u>Ecuații integrabile prin cuadraturi</u> $n=1$, $k=1$

(ec. de ordin 1, scalare) $\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t,x)}$

① Ec. cu variabile separabile:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)b(x)} \quad (4)$$

<u>Alg:</u> I. $b(x) = 0$

- $x \in \emptyset \Rightarrow$ ec nu are soluții staționare
- $x \in M = \{x_1, \dots, x_k\} \Rightarrow$ avem sol. staționare $\varphi_j(t) = x_j$, $j = \overline{1,k}$

II $b(x) \neq 0$

se separă variabilele: $\frac{dx}{b(x)} = a(t)\,dt$

- se determină B primitiva pt $\frac{1}{b}$ și A primitivă pt a
- sol sub formă implicită:

$$B(x) = A(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

- sol. explicită (dacă B este inversabilă)

$$x = B^{-1}(A(t) + C)$$

② Ecuație omogenă: $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$

unde f este funcție omogenă, adică $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ avem

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x) \quad \forall (t,x), (\lambda t, \lambda x) \in \Delta$$

$$(f: \Delta \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

Obs! Dacă f este funcție omogenă, atunci $\exists\, g: \Delta_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.

$f(t,x) = g\left(\frac{x}{t}\right) \Rightarrow$ forma ec omogene este

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{x}{t}\right)} \quad (5)$$

Alg. de rezolvare:

I) Se face schimbarea de variabilă (de funcție)

$$y = \frac{x}{t}, \text{ adică } y(t) = \frac{x(t)}{t} \iff x = ty$$

În ec (5) $\Rightarrow \frac{d}{dt}(ty) = g(y) \Rightarrow y + t\frac{dy}{dt} = g(y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)} \underbrace{(g(y) - y)}_{b(y)}} \quad (6)$$

II Se rez. ec. cu variabile separabile (6).

③ Ec. liniară: $\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)} \quad (7)$$

unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

3.I Cazul omogen: $b(t) = 0$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)x} \quad (8)$$

ca ec. cu variabile separabile avem:

- $x = 0$ sol. staționară
- dacă $x \neq 0$ separăm variabilele:

$$\frac{dx}{x} = a(t)\,dt \Rightarrow \ln|x| = \int_{x_0}^{t} a(s)\,ds + C \quad \text{unde } t_0 \in I, \; C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x| = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \cdot \underbrace{e^{C}}_{C_1 > 0} \Rightarrow x = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \cdot C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}^*$$

Deci mulț. sol. ec. (8) este:

$$\left\{0,\; C e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds},\; C \in \mathbb{R}^*\right\} = \left\{C e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds},\; C \in \mathbb{R}\right\}$$

În concluzie, ec(8) are soluția generală:

$$\boxed{x(t) = C e^{A(t)}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\boxed{A \text{ este o primitivă pt } a}$

(3.2) Cazul neomogen: $b(t) \neq 0$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$$

Metoda 1:

• se rezolvă ec. liniară omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x} \quad \underline{\underline{\text{ec de forma (8)}}}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = C e^{A(t)}, \quad A \text{ este o primitivă pt } a$$

• se aplică metoda variației constantelor adică, determinăm $C(t)$ a.î.

$$x(t) = C(t)\, e^{A(t)} \quad \text{să verifice ec (7)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(C(t) e^{A(t)}\right) = a(t)\, C(t)\, e^{A(t)} + b(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} C(t) \cdot e^{A(t)} + C(t) \cdot \boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}\right)} = a(t)\, C(t) e^{A(t)} + C(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} \cdot e^{A(t)} + \cancel{C(t)\, e^{A(t)} \underbrace{A'(t)}_{= a(t)}} = \cancel{a(t)\, C(t)\, e^{A(t)}} + b(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} e^{A(t)} = b(t) \Rightarrow \underline{\frac{dC}{dt} = b(t) \cdot e^{-A(t)}}$$

$\Rightarrow$ ec. de tip primitivă pentru determinarea lui C $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C(t) = \int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt + C_1$$

• În concluzie, soluția ec. (7) (mulțimea generală de soluții) este:

$$\boxed{x(t) = \left(\int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt + C_1\right) \cdot e^{A(t)}}$$

Metoda 2: dacă se știe că $\varphi_0 : I_0 \to \mathbb{R}$ este soluție a ec. (7), adică

$$\varphi_0'(t) = a(t)\varphi_0(t) + b(t)$$

atunci se face schimbarea de variabilă

$$x(t) = y(t) + \varphi_0(t)$$

Înlocuind în (7) se obține:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) + \varphi_0(t)\right) = a(t)\cdot\left(y(t) + \varphi_0(t)\right) + b(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} + \cancel{\frac{d\varphi_0}{dt}} = a(t)\,y(t) + \cancel{a(t)\,\varphi_0(t) + b(t)}$$

$\Rightarrow$ ec. liniară omogenă pt y: $\boxed{\frac{dy}{dt} = a(t)\,y} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = Ce^{A(t)}$, $C \in \mathbb{R}$

A primitivă pt a

Se obține pt ec. (7) soluția generală:

$$\boxed{x(t) = Ce^{A(t)} + \varphi_0(t)}$$

b) Ec. Bernoulli

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t)\,x^{\alpha}} \qquad (9)$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

Obs! $\alpha = 0 \Rightarrow$ ec liniară neomogenă

$\alpha = 1 \Rightarrow$ ec. liniară omogenă

Metoda 1:

- se rezolvă ec liniară omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\,\bar{x} \Rightarrow \bar{x}(t) = Ce^{A(t)}, \quad A \text{ primitivă pt } a$$

- aplicăm variația constantelor: adică determinăm $C(t)$ a.î. $x(t) = C(t)e^{A(t)}$ să verifice ec. (9):

$$\frac{d}{dt}\left(C(t)\,e^{A(t)}\right) = a(t)\,C(t)\,e^{A(t)} + b(t)\cdot\left(C(t)\,e^{A(t)}\right)^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt} e^{A(t)} + \cancel{c(t) \cdot e^{A(t)} \underbrace{A'(t)}_{= a(t)}} = \cancel{a(t)\, c(t)\, e^{A(t)}} + b(t)\, c^{\alpha} e^{\alpha A}$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt} = \underbrace{c^{\alpha}}_{b_1(c)} \underbrace{e^{(\alpha-1)A(t)} \cdot b(t)}_{a_1(t)}$$

ec. cu variabile separabile pt determinarea lui c

Obs! • dacă $\alpha > 0$, atunci se obține soluția staționară $c = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ec (9) are sol $x(t) = 0$

• dacă $\alpha < 0$ at ec. în c nu are soluții staționare