矩阵论　第十四次作业

第 4 章　矩阵分解

4.3　矩阵的满秩分解

定义 4.8　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}_r^{m\times n}(r>0)$, 如果存在矩阵 $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{C}_r^{m\times r}$ 和 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{C}_r^{r\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$$

则称其为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**满秩分解**.

当 $\boldsymbol{A}$ 是满秩 (列满秩或行满秩) 矩阵时, $\boldsymbol{A}$ 可分解为一个因子是单位矩阵, 另一个因子是 $\boldsymbol{A}$ 本身, 称此满秩分解为**平凡分解**.

定理 4.13　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}_r^{m\times n}(r>0)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 有满秩分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$.

例 4.10　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的满秩分解, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

解

$$[\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

可求得

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

习题 4.3.1 求下列各矩阵的满秩分解.

$$(1)\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&2&1&-1\\1&0&2&1\end{bmatrix};\quad(2)\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

解

(1)

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1&2&3&0&\vdots&1&0&0\\0&2&1&-1&\vdots&0&1&0\\1&0&2&1&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&0&\vdots&1&0&0\\0&2&1&-1&\vdots&0&1&0\\0&0&0&0&\vdots&-1&1&1\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

可求得

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

于是有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&2&1&-1\end{bmatrix}$$

(2)

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1&-1&1&1&\vdots&1&0&0&0\\-1&1&-1&-1&\vdots&0&1&0&0\\-1&-1&1&1&\vdots&0&0&1&0\\1&1&-1&-1&\vdots&0&0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&-1&1&1&\vdots&1&0&0&0\\0&-2&2&2&\vdots&1&0&1&0\\0&0&0&0&\vdots&1&1&0&0\\0&0&0&0&\vdots&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&-2&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

可求得

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&0&1&0\\-1&1&0&0\\1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

于是有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\\-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&-2&2&2\end{bmatrix}$$

4.4 矩阵的奇异值分解

定义 4.11 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}_r^{m\times n}(r>0)$, $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r>\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$$

则称 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**奇异值**; 当 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵时, 它的奇异值都是 0.

定理 4.15 设 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$ 可逆, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的特征值.

定理 4.16 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}_r^{m\times n}(r>0)$, 则存在 m 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{V}$, 使得

$$\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

其中 $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$, 而 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部非零奇异值.

例 4.14 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

解 计算

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

求得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0$, 对应的特征向量依次是

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

可得

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2,\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\end{bmatrix}$$

且正交矩阵为

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

计算

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0\end{bmatrix}$$

构造

$$\boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^T$$

例 4.15 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^H$$

证明: $\boldsymbol{U}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ 的特征向量, $\boldsymbol{V}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ 的特征向量.

证 可求得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^H$$

即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$$

记 $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)$, 则有

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H)\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$$

这表明 $\boldsymbol{u}_i$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量. 同理可证另一结论.

习题 4.4.2 给出应用奇异值分解式求解齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的方法.

解 当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.
当 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, 等式两边同时乘以 $\boldsymbol{x}^T$, 得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 也就是 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
而 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||$, 称为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的范数, 它的取值大于等于 0, 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ 时, $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|| = 0$.
所以 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^T\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^T\boldsymbol{U}^T$$
$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$$
$$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

习题 4.4.4 求 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

解 计算

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$, 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

于是可得

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = 2, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

且正交矩阵为

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

构造

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$