矩阵论　第十次作业

第 2 章　范数理论及其应用

2.3　范数的一些应用

定义

P94 条件数　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 可逆,$\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$,且对 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 上的某种矩阵范数 $\|\cdot\|$,有 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\| < 1$,则有以下结论:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆;

(2) 记 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1})$，则 $\|F\| \leqslant \dfrac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|}$;

(3) $\dfrac{\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|} \leqslant \dfrac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|}{\|1-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\|}$.

若令 $\mathrm{cond}(A) = \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$，$d_A = \|\delta\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$，则当 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\,\|\delta\boldsymbol{A}\| < 1$ 时，有

$$\left\|\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A})^{-1}\right\| \leqslant \frac{d_A\mathrm{cond}(A)}{1-d_A\mathrm{cond}(A)}$$
$$\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1} - (\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|} \leqslant \frac{d_A\mathrm{cond}(A)}{1-d_A\mathrm{cond}(A)}$$

称 $\mathrm{cond}(A)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**条件数**，它是求矩阵逆的摄动的一个重要量，一般说来，条件数愈大，$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的相对误差就愈大.

定义 2.5　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，称

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max|\lambda_i|$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**谱半径**.

定理

定理 2.9　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，则对 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 上任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有

$$\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant |\boldsymbol{A}|$$

定理 2.10　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，对任意得整数 ε，存在某种矩阵范数 $|\cdot|_M$，使得

$$|\boldsymbol{A}|_M \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon$$

例题

2.10 试用矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-j & 3\\ 2 & 1+j\end{bmatrix}\quad (j=\sqrt{-1})$$

验证**定理 2.9** 中对三种常见范数的正确性.

解 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^2-5$，所以 $\lambda_1(\boldsymbol{A})=1+\sqrt{5},\lambda_2(\boldsymbol{A})=1-\sqrt{5}$，从而

$$\rho(\boldsymbol{A})=1+\sqrt{5}$$

又 $|A|_1=|\boldsymbol{A}|_\infty=3+\sqrt{2}$，而

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6 & 5+5j\\ 5-5j & 11\end{bmatrix},\ \det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})=\lambda^2-17\lambda+16$$

由此得 $\lambda_1(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})=16,\lambda_2(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})=1$，则有

$$|A|_2=\sqrt{\lambda_1(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})}=4$$

易见

$$\rho(\boldsymbol{A})<|\boldsymbol{A}|_1,\rho(\boldsymbol{A})<|\boldsymbol{A}|_2,\rho(\boldsymbol{A})<|\boldsymbol{A}|_\infty$$