# 矩阵论　第一次作业

## 第 1 章　线性空间和线性变换

### 1.1　线性空间

#### 定义

**定义 1.1**　设 $V$ 是一个非空集合，它的元素用 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 等表示，并称之为向量；$K$ 是一个数域，它的元素用 $k, l, m$ 等表示. 如果 $V$ 满足条件：

(1) 在 $V$ 中定义一个加法运算，即当 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 时，有唯一的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ 且加法运算满足以下性质：

1) 结合律 $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$;

2) 交换律 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

3) 存在**零元素** $\mathbf{0}$，使 $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$;

4) 存在**负元素**，即对任一向量 $\boldsymbol{x} \in V$，存在向量 $\boldsymbol{y} \in V$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$，则称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素，记为 $-\boldsymbol{x}$，于是有 $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

(2) 在 $V$ 中定义数乘（数与向量的乘法）运算，即当 $\boldsymbol{x} \in V$，$k \in K$ 时，有唯一的乘积 $k\boldsymbol{x} \in V$，且数乘运算满足以下性质：

5) 数因子分配律 $k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y})$;

6) 分配律 $(k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$;

7) 结合律 $k(l\boldsymbol{x})=(kl)\boldsymbol{x}$;

8) $1 \cdot \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

则称 $V$ 为数域 $K$ 上的**线性空间**或**向量空间**.

$V$ 中所定义的加法及数乘运算统称为 $V$ 的线性运算. 在不致产生混淆时，将数域 $K$ 上的线性空间简称为线性空间. 数 $k$ 与向量 $\boldsymbol{x}$ 的乘积 $k\boldsymbol{x}$ 也可写成 $\boldsymbol{x}k$.

需要指出，不管 $V$ 的元素如何，当 $K$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 时，则称 $V$ 为实线性空间；当 $K$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 时，就称 $V$ 为复线性空间.

**定义 1.3**　设 $V$ 是数域 $K$ 上的线性空间，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r (r \geqslant 1)$ 是属于 $V$ 的任意 $r$ 个向量，如果它满足

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 线性无关；

(2) $V$ 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 都是 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 的线性组合.

则称 $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 为 $V$ 的一个**基**或**基底**，并称 $\boldsymbol{x}_i (i=1,2,\cdots,r)$ 为**基向量**.

**定义 1.4**　称线性空间 $V^n$ 的一个基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 为 $V^n$ 的一个**坐标系**. 设向量 $\boldsymbol{x} \in V^n$，它在该基下的线性表示式为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi_1}\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{\xi_2}\boldsymbol{x_2}+\cdots+\boldsymbol{\xi_n}\boldsymbol{x_n}$$

则称 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在该坐标系中的**坐标**或**分量**，记为

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$$

#### 例题

**例 1.3** 在集合 $P_n$ 中，按照通常意义定义多项式加法及实数与多项式乘法，则 $P_n$ 对这两种运算是封闭的，因为，如果 $f(t) \in P_n$，$g(t) \in P_n$，则 $f(t)+g(t) \in P_n$；若 $k \in \mathbb{R}$，则 $kf(t) \in P_n$，易验证对 $P_n$ 的这两种运算，也满足交换律与结合律.

**例 1.4** 在所有 $n$ 阶实矩阵的集合 $\mathbf{R}^{n\times n}$（或复矩阵的集合 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中，如果 $\mathbf{A}+\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$（或 $\mathbf{C}^{n\times n}$），则 $\mathbf{A}+\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$（或 $\mathbf{C}^{n\times n}$）；如果 $k \in \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，则 $k\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ （或 $\mathbf{C}^{n\times n}$）. 即集合对于这两种运算是封闭的. 加法与数乘矩阵也都满足诸算律.

**例 1.5** 设 $\mathbb{R}^+$ 为所有正实数组成的数集，其加法与数乘运算分别定义为

$$m \oplus n = mn, \qquad k \circ m = m^k$$

证明 $\mathbb{R}^+$ 是 $\mathbb{R}$ 是上的线性空间.

**证** 设 $m, n \in \mathbb{R}^+,\quad k \in R$，则有

$$m \oplus n = mn \in \mathbb{R}^+, \qquad k \circ m = m^k \in \mathbb{R}^+$$

即 $\mathbb{R}^+$ 对所定义的加法运算“$\oplus$”与数乘运算“$\circ$”是封闭的，且有

(1) $(m \oplus n) \oplus p = (mn) \oplus p = mnp = m \oplus (np) =$
$$m \oplus (n \oplus p)$$

(2) $m \oplus n = mn = nm = n \oplus m$

(3) $1$ 是零元素，因为 $m \oplus 1 = m \times 1 = m$

(4) $m$ 的负元素是 $\dfrac{1}{m}$，因为 $m \oplus \dfrac{1}{m} = m \oplus \dfrac{1}{m} = 1$

(5) $k \circ (m \oplus n) = k \circ (mn) = (mn)^k =$
$$m^k n^k = (k \circ m) \oplus (k \circ n)$$

(6) $(k+l) \circ m = m^{k+l} = m^k m^l = (k \circ m) \oplus (l \circ m)$

(7) $k \circ (l \circ m) = k \circ m^l = m^{lk} = m^{kl} = (kl) \circ m$

(8) $1 \circ m = m^1 = m$

成立，故 $\mathbb{R}^+$ 是实线性空间.

## 习题

**习题 1.1.6** 求 $P_2$ 中向量 $1+t+t^2$ 对基：$1, t-1, (t-2)(t-1)$ 的坐标.

**解**

$$1+t+t^2 = a\cdot 1 + b(t-1) + c(t-1)(t-2)$$
$$1+t+t^2 = (a-b+2c) + (b-3c)t + ct^2$$
$$\begin{cases} a-b+2c=1 \\ b-3c=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=1 \end{cases}$$

因此，向量 $1+t+t^2$ 对基：$1, t-1, (t-2)(t-1)$ 的坐标为 $(3,4,1)^T$.

**习题 1.1.11** 求 $\mathbf{R}^4$ 的两个子空间

$$\begin{cases} V_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0\} \\ V_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0\} \end{cases}$$

的交 $V_1 \cap V_2$ 的基.

**解**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r(A) = 2,\ n - r(A) = 2$$

因此，$V_1 \cap V_2$ 基的维数是 $2$.

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + \xi_4 = 0 \end{cases} \quad \to (1, 0, -1, 0)^T, \quad (0, 1, 0, -1)^T$$

所以，$V_1 \cap V_2$ 的基为 $\{(1, 0, -1, 0)^T, \quad (0, 1, 0, -1)^T\}$