矩阵论　第四次作业

第 1 章　线性空间和线性变换

1.1　线性空间

习题

1.1.8　设 $\mathbf{R}^4$ 中两个基为
(I): $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{e}_4$;
(II): $\boldsymbol{y}_1 = (2,1,-1,1), \boldsymbol{y}_2 = (0,3,1,0), \boldsymbol{y}_3 = (5,3,2,1), \boldsymbol{y}_4 = (6,6,1,3)$;

(1) 求由基 (I) 改变为 (II) 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 对基 (II) 的坐标；

(3) 求对两个基由相同坐标的非零向量.

解

(1) 设过渡矩阵为 T，则

$$Y = XT \to T = X^{-1}Y$$

由题意，有

$$X = X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

得

$$T = X^{-1}Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\boldsymbol{x} = X(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T = YT^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$$

又

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{11}{9} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{23}{27} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{26}{27} \end{bmatrix}$$

所以

$$X=\begin{bmatrix}\frac{4}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3-\frac{11}{9}x_4\\ \frac{1}{27}x_1+\frac{4}{9}x_2-\frac{1}{3}-\frac{23}{27}\\ \frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}{}_4\\ -\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{26}{27}x_4\end{bmatrix}^T$$

(3) 设 $\eta=(k_1,k_2,k_3,k_4)$

$$\eta=X\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=Y\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=XT\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}$$

因此，

$$(T-E)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=\mathbf{0},\quad T-E=\begin{bmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases}k_1+5k_3+6k_4=0\\k_1+2k_2+3k_3+6k_4=0\\k_1-k_2-k_3-k_4=0\\k_1+k_3+2k_4=0\end{cases}$$

解得 $\eta=k(1,1,1,-1)$，k 为任意实数.

1.1.9 设线性空间 V 中的向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m$ 满足关系式

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)\boldsymbol{P}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是 m 阶矩阵，证明：若以下三个条件

(a) 向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关；

(b) 向量组 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m$ 线性无关；

(c) 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

中的任意两个成立时，其余的一个也成立.

证

(1) 若 (a)(b) 成立

由于 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ 线性无关，则

$$r(P) = r(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)$$

又因为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 线性无关，所以

$$r(P) = r(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m) = n$$

因此，矩阵 P 可逆.

(2) 若 (a)(c) 成立，有

$$\left|P\right| \neq 0, \quad \left|(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)\right| \neq 0$$

则

$$\left|(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m)\right| = \left|P\right| \left|(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)\right| \neq 0$$

因此，向量组 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ 线性无关.

(3) 同理可证，若 (b)(c) 成立，题意也成立.

1.2 线性变换及其矩阵

定义

1.16 设 T 是数域 K 上的线性空间 V^n 的线性变换，且对 K 中某一数 λ_0，存在非零向量 $\boldsymbol{x} \in V^n$，使得

$$T\boldsymbol{x} = \lambda_0 \boldsymbol{x} \tag{1.2.18}$$

成立，则称 λ_0 为 T 的**特征值**，$\boldsymbol{x}$ 为 T 的属于 λ_0 的**特征向量**.

$$(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{1.2.20}$$

1.17 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij} m \times n)$ 是数域 K 上的 n 阶矩阵，λ 是参数，$\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵** $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 的行列式

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdot & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2.22}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，它是 K 上的一个 n 次多项式，记为 $\varphi(\lambda)$，$\varphi(\lambda)$ 的根（或零点）λ_0 称为 $\boldsymbol{A}$ **特征值（根）**；而相应于方程组(??)的非零解向量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$ 称为 $\boldsymbol{A}$ **的属于特征值** λ_0 **的特征向量**.

例题

1.7 在 $\mathbf{R}^n$ 中，已知向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$，求当该基改变为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= (1, 1, \cdots, 1, 1) \\ \boldsymbol{y}_2 &= (0, 1, \cdots, 1, 1) \\ &\cdots\cdots \\ \boldsymbol{y}_n &= (0, 0, \cdots, 0, 1) \end{aligned}\right\}$$

时，向量 $\boldsymbol{x}$ 在新基下的坐标 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T$.

解 由题意，得

$$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

于是过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

不难求得

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $\beta = \boldsymbol{C}^{-1}\alpha$ 得 $\boldsymbol{x}$ 在新基 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 下的坐标为

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

也就是

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 \\ \eta_i = \xi_i - \xi_{i-1} \quad (i = 2, 3, \cdots, n) \end{cases}$$

1.8 已知矩阵 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的两个基

(I)

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

(II)

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

求由基 (I) 改变为 (II) 的过渡矩阵.

解 为了计算简单，采用中介基方法，引进 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的简单基

(III)

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

直接写出由基 (III) 改变为基 (I) 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{C}_1$$

再写出由基 (III) 改变为基 (II) 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)\boldsymbol{C}_2$$

所以有

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_2$$

于是得由基 (I) 改变为 (II) 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&1&1\\0&1&1&1\\2&2&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

1.18 设

$$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

线性空间

$$V=\{X=(\boldsymbol{X}_{ij})_{2\times 2}|x_{11}+x_{22}=0,\ x_{ij}\in R\}$$

中的线性变换为 $T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}\,(\forall\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{V})$，求 T 的特征值与特征向量.

解 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\in V$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&-x_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}&0\\0&-x_{11}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&x_{12}\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\x_{21}&0\end{bmatrix}\\&=x_{11}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}+x_{12}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+x_{21}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

这表示 $\boldsymbol{X}\in V$ 可由

$$\boldsymbol{X}_1\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

线性表示. 容易验证 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 线性无关，故 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 构成 V 的一个基，且 X 在该基下的坐标为 $(x_{11},x_{12},x_{21})^T$. 由线性变换公式求得

$$T(\boldsymbol{X}_1)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=0\boldsymbol{X}_1-1\boldsymbol{X}_2+1\boldsymbol{X}_3$$

$$T(\boldsymbol{X}_2)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=0\boldsymbol{X}_1+1\boldsymbol{X}_2-1\boldsymbol{X}_3$$

$$T(\boldsymbol{X}_3)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=0\boldsymbol{X}_1-1\boldsymbol{X}_2+1\boldsymbol{X}_3$$

故 T 在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

解得

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\quad\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix};\quad\lambda_3=2,\quad\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

那么，T 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{Y}_1=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)\alpha_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{Y}_2=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)\alpha_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{Y}_1 + k_2\boldsymbol{Y_2}(k_1, k_2 \in R$ 不同时为零 $);T$ 的特征值 $\lambda_3 = 2$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{Y}_3 = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3)\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

全体特征向量为 $k_3\boldsymbol{Y}_3(0 \neq k_3 \in R)$.

习题

1.2.7 已知 R^3 的线性变换 T 在基 $\boldsymbol{x}_1 = (-1, 1, 1), \boldsymbol{x}_2 = (1, 0, -1), \boldsymbol{x}_3 = (0, 1, 1)$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求 T 在基 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵.

解 由题意，可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{C}$$

解得

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 得，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.2.11 给定 R^3 得两个基

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{x}_2 = (2, 1, 0), \quad \boldsymbol{x}_3 = (1, 1, 1)$$
$$\boldsymbol{y}_1 = (1, 2, -1), \quad \boldsymbol{y}_2 = (2, 2, -1), \quad \boldsymbol{y}_3 = (2, -1, -1)$$

定义线性变换

$$T\boldsymbol{x}_i = y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

(1) 写出由基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 到基 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ 得过渡矩阵.

(2) 写出 T 在基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 下得矩阵.

(3) 写出 T 在基 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ 下得矩阵.

解

(1) 由 $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{C}$ 得,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{C}$$

解得

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(2) 由于 $T(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = ((\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{C}$
那么假设 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$

(3) 那么假设 T 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{C}^{-1} A \boldsymbol{C} \\ &= \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{C} \boldsymbol{C} \\ &= \boldsymbol{C} \end{aligned}$$

1.2.12 设 T 是数域 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V^3 的线性变换，已知 T 在 V^3 的基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 下的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

求 T 的特征值与特征向量.

解 由题意

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$$

当 $\lambda = -2$ 时,

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得特征向量为 $\alpha_1 = (0,0,1)^T$.
当 $\lambda = 1$ 时，有

$$E - A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解得特征向量为 $\alpha_2 = (3,6,-20)^T$.
那么，T 得特征值 $\lambda = -2$ 时对应得线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{x}_3$$

全体特征向量为 $k\boldsymbol{Y}_1$，$k \neq 0$；T 的特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{Y}_2 = 3\boldsymbol{x}_1 - 6\boldsymbol{x}_2 + 20\boldsymbol{x}_3$$

全体特征向量为 $k\boldsymbol{Y}_2$，$k \neq 0$.