矩阵论　第二次作业

第 1 章　线性空间和线性变换

1.2　线性变换及其矩阵

定义

定义 1.10　设 V 是数域 K 上的线性空间，T 是 V 到自身的一个映射，使对于任意向量 $\boldsymbol{x} \in V$，V 中都有唯一的向量 $\boldsymbol{y}$ 与之对应，则称 T 是 V 的一个**变换**或**算子**，记为 $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 T 下的**象**，而 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的**原象**（或**象源**）.

定义 1.11　如果数域 K 上的线性空间 V 的一个变换 T 具有以下性质：

$$T(k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{y}) = k(T\boldsymbol{x}) + l(Y\boldsymbol{y})$$

其中 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，$k, l \in K$，则称 T 为 V 的一个**线性变换**或**线性算子**.

例题

例 1.10　把线性空间 R^2 的所有向量均绕原点依顺（或逆）时针方向旋转 θ 角的变换，就是一个线性变换. 这是象 $(\eta_1,\ \eta_2)$ 与原象 $(\xi_1,\ \xi_2)$ 之间的关系为

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

例 1.11　在线性空间 P_n 中，求微分是其一个线性变换，这里用 D 表示，即

$$Df(t) = f^{'}t \qquad (\forall f(t) \in P_n)$$

事实上，对任意的 $f(t), g(t) \in P_n$ 及 $k, l \in R$，有

$$D(kf(t) + lg(t)) = (kf(t) + lg(t))^{'} = kf^{'}(t) + lg^{'}(t) = k(Df(t)) + l(Dg(t))$$

例 1.12　定义在闭区间 $[a,\ b]$ 上的所有实连续函数的集合 $(C(a,\ b))$ 构成 R 上的一个线性空间，在 $C(a,\ b)$ 上定义变换 J，即

$$J(f(t)) = \int_a^t f(t)\, du \qquad (\forall f(t) \in C(a,\ b))$$

则 J 是 $C(a,\ b)$ 的一个线性变换.

习题

习题 1.1.10　假定 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 是 R^3 的一个基，试求由

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3, \qquad \boldsymbol{y}_2 = 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3, \qquad \boldsymbol{y}_3 = 4\boldsymbol{x}_1 + 13\boldsymbol{x}_2$$

生成的子空间 $L(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)$ 的基.

解

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ -4 & 13 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} r(A)=2$$

所以，基的维数是 2，且 $\boldsymbol{y}_1$ 与 $\boldsymbol{y}_2$ 线性无关，
故生成子空间 $L(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3)$ 的基为 $\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\}$.

习题 1.1.12 给定 $R^{2\times2}=\{A=(a_{ij})_{2\times2}\mid a_{ij}\in R\}$（数域 R 上的 2 阶实方阵按通常矩阵的加法与数乘矩阵构成的线性空间）的子集

$$V=\{A=(a_{ij})_{2\times2}\mid a_{ij}\in R \text{ 且 } a_{11}+a_{22}=0\}$$

（1）证明 V 是 $R^{2\times2}$ 的子空间;

（2）求 V 的维数和一个基.

解

（1）设 $A=(a_{ij})_{2\times2}\in V$，$B=(b_{ij})_{2\times2}\in V$，则有

$$a_{11}+a_{22}=0，b_{11}+b_{22}=0$$

所以

$$\begin{aligned}A+B&=(a_{ij})_{2\times2}+(b_{ij})_{2\times2}\\&=(a_{ij}+b_{ij})_{2\times2}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&a_{11}+a_{22}+b_{11}+b_{22}=0\\ \Rightarrow\ &(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})=0\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}kA=k(a_{ij})_{2\times2}&=(ka_{ij})_{2\times2}\\&=ka_{11}+ka_{22}\\&=k(a_{11}+a_{22})=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A+B\in V,\ kA\in V$$

因此，V 是 $R^{2\times2}$ 的子空间.

（2）设 V 中,

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad A_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

线性无关. 对于任意 $A=(a_{ij})_{2\times2}\in A$,
有 $a_{11}+a_{22}=0$，即 $a_{22}=-a_{11}$，
所以 $A=a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{21}A_3$
因此，V 的维数是 3，一组基为 $\{A_1,A_2,A_3\}$

习题 1.2.1　判别下列哪些是线性变换：

(1) 在 R^3 中，设 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$，$T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\xi}_1^2, \boldsymbol{xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$；

(2) 在矩阵空间 $R^{n\times n}$ 中，$T\mathbf{X} = \mathbf{BXC}$，这里 $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ 是给定矩阵；

(3) 在线性空间 P_n 中，$Tf(t) = f(t+1)$.

解　(1) 不是 (2) 是 (3) 是