矩阵论　第三次作业

第 1 章　线性空间和线性变换

1.2　线性空间变换及其矩阵

定义

1.14

$$T(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \xlongequal{def} (T\boldsymbol{x}_1, T\boldsymbol{x}_2, \cdots, T\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A} \tag{1.2.12}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列恰是 $T\boldsymbol{x}_i$ 的坐标 $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

式(??)中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 T 在 V^n 的基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 下的矩阵，简称为 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的**矩阵**.

1.15　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为数域 K 上的两个个 n 阶矩阵，如果存在 K 上的 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，则称 A **相似于** B，记为 $A \sim B$.

定理

1.9　设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是数域 K 上的线性空间 V^n 的一个基，线性变换 T_1, T_2 在该基下的矩阵依次是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$. 则有如下结论：

(1) $(T_1 + T_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$

(2) $(kT_1)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)(k\boldsymbol{A})$

(3) $(T_1T_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

(4) $T_1^{-1}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}^{-1}$

证　因为

$$T_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}$$
$$T_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{B}$$

所以

$$(T+T_2)(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=T_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)+T_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=$$
$$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$$
$$(kT_1)(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=k(T_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n))=$$
$$k(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)(k\boldsymbol{A})$$
$$T_1(T_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n))=T_1((\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{B})=$$
$$T_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

上面诸式证明了 T_1+T_2，T_1T_2 及 kT_1 在基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 下的矩阵依次是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 及 $k\boldsymbol{A}$. 为了证明结论 (4)，设 T_1 的逆变换是 T_2，于是有

$$T_1T_2=T_2T_1=T_e$$

则由结论 (3) 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$$

即 T_1 的逆变换在所给基下的矩阵是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

推论　设 $f(t)=a_0t^m+a_1t^{m-1}+\cdots+a_{m-1}t+a_m$ 是纯量 t 的多项式，T 为线性空间 V^n 的线性变换，且对 V^n 的基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 有

$$T(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}$$

则 V^n 的线性变换 $f(T)$ 在所论基下的矩阵是

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-2}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{I} \tag{1.2.15}$$

式(??) 被称为**方阵 A 的多项式.** 它在以后的理论研究中占有重要地位.

1.10　设线性变换 T 在线性空间 V^n 的基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，向量 $\boldsymbol{x}$ 在该基下的坐标是 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $T\boldsymbol{x}$ 在该基下的坐标是

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.2.16}$$

证　由假设由 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\alpha}$，而

$$T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$$

另一方面由 $T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\beta}$. 由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关，故得式(??). 证毕.

例题

P23　在矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 中，给定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\qquad T_1(X)=AX,\ (\forall X\in R^{2\times 2})$$

求：$T(X)=f(T_1)(X)$.

解 1：

$$
\begin{aligned}
A &= P^{-1}\Lambda P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\
f(A) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}f(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix})\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

解 2： 找到一组 $R^{2\times 2}$ 的一组基

$$
X_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ X_4=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
X=(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha \qquad \alpha=\frac{1}{2}(x_1+x_3,x_2+x_4,-x_1+x_3,-x_2+x_4)^T
$$

$$
T_1(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
T_1(X)=T_1(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha &= (X_1,X_2,X_3,X_4)diag(1,1,-1,-1)\alpha\\
T_1^k(X)=T_1^k(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha &= (X_1,X_2,X_3,X_4)diag(1,1,(-1)^k,(-1)^k)\alpha\\
f(T_1)(X)=f(T_1)(X_1,X_2,X_3,X_4)\alpha &= (X_1,X_2,X_3,X_4)f(diag(1,1,(-1)^k,(-1)^k))\alpha
\end{aligned}
$$

1.17 如果 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，且 $f(t)$ 是数域 K 上的多项式，则矩阵多项式 $f(\boldsymbol{B})$ 与 $f(\boldsymbol{A})$ 之间有关系式 $f(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$.

解 对于正整数 k，易知 $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}$. 令

$$
f(t)=a_0t^m+a_1t^{m-1}+\cdots+a_{m-1}t+a_m
$$

则有

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{B}) &= a_0\boldsymbol{B}^m+a_1\boldsymbol{B}^{m-2}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{B}+a_m\boldsymbol{I}\\
&= a_0(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P})+a_1(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{P})+\cdots+a_{m-1}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})+a_m(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P})\\
&= \boldsymbol{P}^{-1}(a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}
\end{aligned}
$$

习题

1.2.3 在 P_n 中，$T_1f(t)=f'(t)$, $T_2f(t)=tf(t)$. 证明 $T_1T_2-T_2T_1=T_e$.

证

$$
\begin{aligned}
(T_1T_2 - T_2T_1)(f(t)) &= T_1T_2(f(t)) - T_2T_1(f(t)) \\
&= T_1(T_2(f(t))) - T_2(T_1(f(t))) \\
&= T_1(tf(t)) - T_2(f^{'}(t)) \\
&= f(t) + tf^{'}(t) - tf^{'}(t) \\
&= f(t) \\
&= T_e(f(t))
\end{aligned}
$$

1.2.4 在 R^3 中，设 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，定义 $T\boldsymbol{x} = (2\xi_1 - \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_1)$，试求 T 在基 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$，$\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵.

解 已知 $T\boldsymbol{x} = (2\xi_1 - \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_1)$，则

$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{e}_1) = (1, 0, 1) = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{A} \\
T(\boldsymbol{e}_2) = (-1, 1, 0) = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{A} \\
T(\boldsymbol{e}_3) = (0, 1, 0) = \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

解得

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

1.2.5 如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是二维线性空间 V^2 的基，T_1, T_2 是 V^2 的线性变换，$T_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$,$T_1\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2$，且 $T_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2, T_2(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$，试证明：$T_1 = T_2$.

证 已知 $T_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$，$T_1\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2$
由

$$
\begin{aligned}
T_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \\
T_2(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{cases} T_2\boldsymbol{x}_1 = T_1\boldsymbol{x}_1 \\ T_2\boldsymbol{x}_2 = T_1\boldsymbol{x}_2 \end{cases}
$$

即 $T_1 = T_2$. 证毕.

1.2.8 在 $R^{2\times 2}$ 中定义线性变换

$$
T_1\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\boldsymbol{X}, \qquad T_2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad T_3\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}
$$

求 T_1, T_2, T_3 在基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

解 计算基的基像组，有

$$T(\boldsymbol{E}_{11}) = \boldsymbol{A_1}\boldsymbol{E}_{11} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = a\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + c\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$$
$$T(\boldsymbol{E}_{12}) = \boldsymbol{A_1}\boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + a\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + c\boldsymbol{E}_{22}$$
$$T(\boldsymbol{E}_{21}) = \boldsymbol{A_1}\boldsymbol{E}_{21} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = b\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + d\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$$
$$T(\boldsymbol{E}_{22}) = \boldsymbol{A_1}\boldsymbol{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + b\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + d\boldsymbol{E}_{22}$$

故 T 在基下的矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$$

同理可得

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix}$$

有线性变换性质有

$$T_3 = T_1 T_2$$
$$A_3 = A_1 A_3$$

例 1.15 在矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 中，给定矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

线性变换为 $T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$ $(\forall \boldsymbol{X} \in R^{2\times 2})$, $R^{2\times 2}$ 的两个基为 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$.
求 T 在此基下的矩阵.

解 计算基的基像组，有

$$T(\boldsymbol{E}_{11}) = \boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 1\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$$

$$T(\boldsymbol{E}_{12}) = \boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$$

$$T(\boldsymbol{E}_{21}) = \boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 1\boldsymbol{E}_{22}$$

$$T(\boldsymbol{E}_{22}) = \boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 4\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$$

故 T 在基下的矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$