矩阵论　第六次作业

第 1 章　线性空间和线性变换

1.2　线性变换及其矩阵

定义

定义 1.21　如果给每个子空间 V，选一适当的基，每个子空间的基合并起来即为 V^n 的基，且 T 在该基下的矩阵为以下形式的准对角矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1(\lambda_1) & & & \\ & \boldsymbol{J}_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s(\lambda_s)\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

由上式给出的矩阵 $\boldsymbol{J}$ 称为矩阵 A 的 **Jordan 标准型**，$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)$ 称为因式 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 对应的 **Jordan 块**.

定理

定理 1.29　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵，且其特征多项式的某种分解式是

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_i)^{m_i} \quad (m_1+m_2+\cdots+m_s=n)$$

则存在 n 阶复可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$$

定理 1.30　每个 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一个 Jordan 标准形相似，这个 Jordan 标准形除去其中 Jordan 块的排列次序外，是被 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的.

例题

例 1.26 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$$

解 求 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子组，由于

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&0&0\\\lambda-3&(\lambda+1)(\lambda-3)+4&0\\0&-1&\lambda-2\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(\lambda-1)^2&0\\0&-1&\lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&(\lambda-1)^2&0\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

因此，所求的初等因子组为 $\lambda-2,\ (\lambda-1)^2$. 于是有

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

例 1.28 试分别计算使 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\\&&&1\end{bmatrix}$$

相似于 Jordan 标准形时所用的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解

(1) 因为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值和二重特征值，所以可求 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{3\times3}$，这里

$$(p_{1i},\ p_{2i},\ p_{3i})^T=\boldsymbol{x}_i(i=1,\ 2,\ 3)$$

解方程组

$$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0},\quad(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0},\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_3=-\boldsymbol{x}_2$$

得特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ 及广义特征向量 $\boldsymbol{x}_3$ 依次为

$$\boldsymbol{x_1}=(0,\ 0,\ 1)^T,\quad\boldsymbol{x_2}=(1,\ 2,\ -1)^T,\quad\boldsymbol{x_3}=(0,\ 1,\ -1)^T$$

故所求矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

(2) 因为 λ_1 是 $\boldsymbol{B}$ 的四重特征值，所以可以求矩阵 $\boldsymbol{P}$，解方程组

$$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$$

使得属于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1=(8,\ 0,\ 0,\ 0)^T$；然后解方程组

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_2=-\boldsymbol{x}_1$$

得广义特征向量 $x_2=(4,\ 4,\ 0,\ 0)^T$，再依次解方程组

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})x_3=-\boldsymbol{x}_2,\quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_4=-\boldsymbol{x}_3$$

便得广义特征向量

$$\boldsymbol{x}_3=(0,\ -1,\ 2,\ 0)^T,\quad \boldsymbol{x}_\mathbf{4}=(0,\ 1,\ -2,\ 1)^T$$

于是所求矩阵 P 为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{x}_4)=\begin{bmatrix}8&4&0&0\\0&4&-1&1\\0&0&2&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ppt 例题

P36 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{bmatrix}$$

的若当标准形.

解

$$
\begin{aligned}
\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda+3 & -6 \\ -2 & 2 & \lambda-4 \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda \\ -2\lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & \lambda-1 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix} \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda,\ \lambda,\ \lambda-2.$

故 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形为 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

习题

习题 1.2.16 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式和最小多项式，其中

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}
$$

解

$$
\begin{aligned}
\lambda\boldsymbol{I}-A&=\begin{bmatrix}\lambda-7 & -4 & 4\\ -4 & \lambda+8 & 1\\ 4 & 1 & \lambda+8\end{bmatrix}\\
&\to\begin{bmatrix}1 & \lambda+8 & -4\\ 4 & -4 & \lambda-7\\ \lambda+8 & 1 & 4\end{bmatrix}\\
&\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4\lambda-36 & \lambda+9\\ 0 & (\lambda+9)(-\lambda-7) & 4\lambda+36\end{bmatrix}\\
&\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4\lambda-36 & \lambda+9\\ 0 & (\lambda+9)(-\lambda+9) & 0\end{bmatrix}\\
&\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+9 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+9)(-\lambda+9)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此，特征多项式 $\varphi(\lambda)=(\lambda+9)^2(\lambda-9)$
最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda+9)(\lambda-9)$.

习题 1.2.19 求下列各矩阵的 Jordan 标准形.

$$
(1)\begin{bmatrix}3 & 7 & -3\\ -2 & -5 & 2\\ -4 & -10 & 3\end{bmatrix};\quad (2)\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 0 & 0\\ 7 & 1 & 2 & 1\\ -7 & -6 & -1 & 0\end{bmatrix}.
$$

解

(1)

$$
\begin{aligned}
\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -7 & 3\\ 2 & \lambda+5 & -2\\ 4 & 10 & \lambda-3\end{bmatrix}\\
&\to\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda^2+1)\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-1,\ \lambda-i,\ \lambda+i$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{bmatrix}$.

(2)

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0\\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1\\ 7 & 6 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}-1 & \lambda-3 & 0 & 0\\ \lambda+1 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -7 & \lambda-2 & -1\\ 6 & 7 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}-1 & \lambda-3 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda-4 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 6\lambda-11 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

所以初等因子组是 $(\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2$. 于是 $\boldsymbol{J_1}=\boldsymbol{J_2}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

因此，$\boldsymbol{A}$ 的若当标准形为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.