Beijing University of

Posts and Telecommunications

概率论与随机过程论文

概率的悖论——公理化的意义

Author:
You

Supervisor:
Your Teacher

摘要

和所有的数学分支类似, 概率论的也是经历了从直觉到严格的过程, 其中的一个转折点就是贝特朗悖论. 在概率论的发展史上, 贝特朗悖论起了揭示问题促使人们思考概率理论体系严密性的作用. 最后, 前苏联数学家柯尔莫哥洛夫建立了概率论的公理化体系. 在概率论的公理化以及数学的发展, 悖论起到了重要的作用.

关键词: 贝特朗悖论, 几何概率, 样本空间, 等可能假设, 概率的公理化

介绍

本主要对悖论及贝特朗悖论做出了阐释, 并列出其 3 种不同的解法. 其内涵是对"等可能"这一论述的不同解释, 从而引出概率公理化的必要性.

目录

第 1 章　概率的悖论

1.1　悖论

悖论是一逻辑学术语, 指那些会导致逻辑矛盾的命题. 如果承认这个命题成立, 就可推出它的否定命题成立; 反之, 如果承认这个命题的否定命题成立, 又可推出这个命题成立. 像这样自相矛盾的命题就是悖论.

悖论是表面上同一命题或推理中隐含着两个对立的结论, 而这两个结论都能自圆其说. 悖论的抽象公式就是: 如果事件 A 发生, 则推导出非 A, 非 A 发生则推导出 A.

古今中外有不少著名的悖论, 它们震撼了逻辑和数学的基础, 激发了人们求知和精密的思考, 吸引了古往今来许多思想家和爱好者的注意力. 解决悖论难题需要创造性的思考, 悖论的解决又往往可以给人带来全新的观念.

1.2　贝特朗悖论

“在一个圆内任意选一条弦，这条弦的弦长长于这个圆的内接等边三角形的边长的概率是多少?”

1.2.1　问题提出

几何概率是十九世纪末新发展起来的一门学科，使很多概率问题的解决变得简单而不用运用微积分的知识. 而正当几何概型正如火如荼的发展时, 法国学者贝特朗于 1899 年针对几何概念提出了这样一个“简单”的问题, 并在当时数学界引起了轩然大波. 按照几何概率的定义进行计算，竟然可以求得 3 个不同的概率, 这与概率的性质是背道而驰的. 这就是后来人们熟知的贝特朗悖论, 矛头直指几何概率概念本身.

1.2.2　三种解法

首先, 关于几何概型和几何概率, 有如下定义, 若随机试验 E 具有以下特点:

(1) 样本空间是直线或二维、三维空间中的度量有限的区间或区域;

(2) 样本点在其上是均匀分布的 (即所有基本事件是等可能的).

则这样的随机试验称为几何概型. 在几何概型中, 若样本空间 Ω 所对应区域的度量为 $L(\Omega)$, 且事件 A 的度量为 $L(A)$, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}.$$

在贝特朗问题提出时, 贝特朗就提出了 3 种经典的解法:

方法一 任意弦交圆周于两点, 不妨将弦的一段 A 固定, 问题化为在圆周上任取另一端点 B. 这时, 样本空间 Ω 为圆周上任一点, 假设任一点的选取具有等可能性. 如图 1.1(a) 所示, 以 A 为顶点做一等边三角形 AMN, 显然弦 AB 的长度大于 $\sqrt{3}$ 当且仅当端点 B 落在 $\widehat{MN}$ 上. 而 $\widehat{MN}$ 的长为整个圆周的 $\dfrac{1}{3}$, 于是所求概率为 $\dfrac{1}{3}$.

方法二 如图 1.1(b) 所示, 不妨只考虑与直径 MN 垂直的弦, 样本空间 Ω 为 MN 上任一点, 假设弦 AB 的中点在 MN 上是等可能的. 当且仅当弦 AB 与圆心的距离小于 $\dfrac{1}{2}$ 时, 弦 AB 的长度大于 $\sqrt{3}$, 于是所求概率为 $\dfrac{1}{2}$.

方法三 如图 1.1(c) 所示, 弦被其中点唯一确定, 假设弦的中点在圆周内是等可能的. 当且仅当弦 AB 的中点在半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的同心圆内时, 弦 AB 的长度大于 $\sqrt{3}$, 此小圆面积为大圆面积的 $\dfrac{1}{4}$, 于是所求概率为 $\dfrac{1}{4}$.

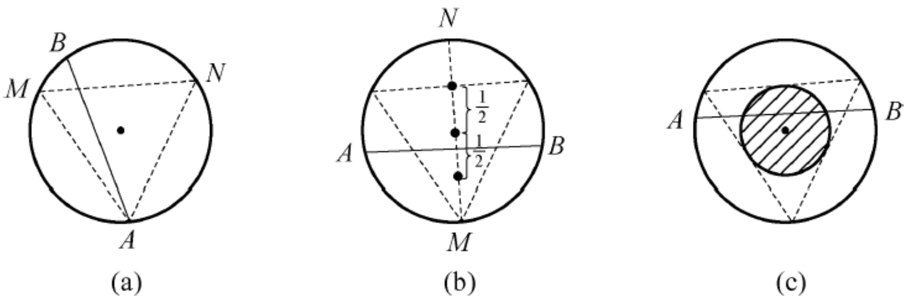

图 1.1

由于在取弦时采用了 3 种不同的等可能假设, 对 3 种不同的随机试验得到了 3 种不同结果, 通过分析这 3 种结果均正确. 而这这严重违背了常理.

1.2.3 观点争执

贝特朗问题之所以出现 3 种不同的答案, 是因为人们观察随机试验的基本结果的角度不同, 同时对基本结果的等可能性假设也有不同的理解.

然而, 仍然有不少学者对此持怀疑态度, 并根据自己对问题的理解以及自己特有的思维方式, 钟情于其中的某种解法, 想方设法寻找其他解法的瑕疵, 推翻其他解法的合理性, 从而认为贝特朗悖论并不奇, 答案其实是唯一的.

第 2 章　问题的探究

长期以来, “贝特朗问题”的上述三种“流行”解法像魔咒一样, 禁锢着人们的思维, 尽管人们的争论“喋喋不休”, 论战“硝烟四起”, 结果“众说纷纭”, 有人认为三种解法都对; 论据是“等可能角度不同, 概率的结果就不同”. 有人说其中的一种解法正确, 其它都是错误的; 但理由却不能令人信服; 有人说问题早已经解决, 又说不出是如何解决的; 林林总总, 不一而足. 最具代表性的论据就是“等可能角度不同, 概率的结果就不同”.

2.1　问题的分析

下面, 从几何概型的基本要素 (样本空间的构造和均匀) 对以上争议进行深入的分析.

2.1.1　样本空间构造的合理性

样本空间中的元素是试验的基本结果. 贝特朗悖论的题意是要求在圆内任意作弦, 直观看来, 试验的结果应该是做出的弦. 但是几何概率问题中试验的基本结果应该用“点”来描述, 这个点根据实际情况可以是一维数轴上的点, 也可以是二维平面上的点, 或者是三维空间上的点. 故求解贝特朗问题的首要任务是要把做出的弦转化成相应的“点”, 即样本空间的元素. 而弦和点之间应存在对应关系.

另外, 当对作弦附加了条件, 比如指定弦的端点 (方法 1) 和指定弦的方向 (方法 2), 会否缩小样本空间?

方法 1 中, 在圆周上任取一点, 作为弦的一端, 然后讨论弦的另一端点的位置. 根据圆的对称性, 以及取点的任意性, 固定一端点后所作的弦的性质与固定其他点所作的相应弦的性质相同, 当然包括概率这个性质. 故虽然表面上看起来方法 1 的样本空间比解方法 2 的样本空间要小, 但所求的概率是合理的.

方法 3 中, 预先任意确定弦的方向, 考虑在这个方向上的弦的性质. 由于这个方向也是任意的, 在这个方向的弦的性质与其他方向上的弦的性质相同. 因此虽然样本空间比方法 2 的样本空间小, 但所求的概率也是合理的. [1]

2.1.2　样本空间的均匀性

这意味着我们要选定一个区域, 而在这个区域中, 所有的样本都是均匀分布的. 而贝特朗悖论的题干中并没有明确的定义出这个”区域“到底是那一部分, 所以由于解题者对于使随机事件均匀分布的这部分”区域“的定义不同, 因此纠产生了分歧.

方法一是假设弦的端点在这块”区域“上均匀分布.

方法二是假定弦的中点在圆的直径上均匀分布.

方法三是假定弦的中点在圆形内部均匀分布.

这就是贝特朗悖论的成因, 在几何概型中所有随机事件都是需要在一块区域中均匀分布的. 而在贝特朗悖论并没有没有明确的定义出让所有随机事件可以均匀分布的那块”区域“, 导致解题者划定了不同的”区域“, 由此而产生了悖论.

2.2 分析结果

2.2.1 贝特朗悖论并不奇

所谓“悖论”一点也不悖. 这只是反映了选择不同的坐标会导致不同的概率分配这一事实. 至于哪一个分配是“正确”的, 决定于事先确定的模型的如何应用或阐释. 只是有的人对任意作弦的方式有个人偏好, 因此倾向于某种等可能性假设, 而偏向于某种解法. 而实际上, 这种假定甚至还不限于本文所提及的 3 种, 所以贝特朗悖论的答案非但不唯一, 甚至是无数个解. 当然, 当等可能性条件补充完整后, 贝特朗问题的解就唯一了.

2.2.2 概率公理化

贝特朗悖论说明在以往的定义中等可能性要求并不明确, 而要明确指出等可能的含义, 又要因具体试验而定. 因此, 采用等可能性来定义一般的概率是困难的. 贝特朗悖论的出现使得人们对什么是概率的疑惑放大到了极致. 人们明白必须要解决这个问题, 解决问题的方法就是给出概率的严密的定义, 再在此基础上推演概率的理论体系, 即将概率论公理化. 这极大地推动了概率论概念和方法的发展, 促使数学家们寻找另外的途径来定义事件的概率, 从而最终建立了概率的公理化体系.

第 3 章　概率的公理化

1900 年, Hilbert 在数学家大会上提出了 23 个 20 世纪应该解决的数学问题，建立概率的公理化体系就在列其中. 希尔伯特建议用数学的公理化方法推演出全部物理, 首先是概率和力学. 1993 年, 前苏联数学家柯尔莫哥洛夫建立了概率论的公理化体系.[2]

3.1　概率的公理化定义

从贝特朗悖论我们看到, 概率的统一定义不能从统一其计算方法入手. 我们注意到, 虽然不同类型的随即问题中事件概率的计算公式是各式各样的, 但进一步分析可发现它们有以下共同特点:

(1) 事件是样本空间的子集;

(2) 事件的概率 $P(A)$ 是事件 A 的函数. 由于事件 A 是 Ω 的子集, 因此 $P(A)$ 是以 Ω 中部分子集为变元的集合函数;

(3) 表达事件概率的集合函数 $P(A)$ 均满足非负性、规范性、有限可加性或可列可加性.

因此事件的概率的集合函数 $P(A)$ 可用定义域为 Ω 中的部分子集 (事件), 函数值域为 $[0,1]$ 且满足非负性、规范性、可列可加性的集合函数来定义. 概率的这种定义被称为**公理化定义**, 是前苏联科学家**柯尔莫哥洛夫**在 1933 年提出的, 即通过规定概率应具备的基本性质 (公理) 来定义概率. 下面是其内容.

概率的公理化定义　[3] 设 Ω 是试验 E 的样本空间, 对于 E 的每一个事件 A 有一个实数与之对应, 记为 $P(A)$, 且具有:

性质 1(非负性)　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

性质 2(规范性)　$P(\Omega) = 1$.

性质 3(可列可加性)　设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件, 即 $A_iA_j = \varnothing(i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots)$, 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{n} P(A_i).$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

3.2　概率的可应用性

柯尔莫哥洛夫的概率论公理化体系将概率论建立成了具有严谨演绎逻辑的一个纯数学分支. 然而, 公理化的概率论, 并没能解决一个非常重要的问题: 随机性的本质究竟是什么? 早在拉普拉斯（1812）就讨论过明天太阳升起的概率, 爱因斯坦确信上帝是不会掷骰子的, 海森堡（1927）提出测不准原理. 萨维齐秉承德 · 菲尼蒂的个人主观概率观点, 在他的《统计学基础》（1954）中认为概率是一个普遍存在的概念, 人们天生就会

使用概率来管理其生活, 无须将概率与柯尔莫哥洛夫的数学公理体系联系起来, 只需确定通用原则, 保持内在一致性规则. 柯尔莫哥洛夫在他提出公理化概率论后 30 年, 也再次回到概率的可应用性问题研究, 在 1965 年提出了“公理化随机性”概念和“算法复杂性”概念的两种解决思路.

讨论

公理化体系的建立, 离不开集合论和测度论的发展, 公理化体系的建立, 沟通了概率论与其它数学分支的联系。其中, 悖论的出现对公理化体系的建立起了不可低估的作用. 不过遗憾的是, 对于贝特朗悖论的之争, 至今还在研究, 始终没有给定一个确定的结果.

在数学的发展史上, 每一次悖论的出现, 都是数学理论体系漏洞的暴露, 每一次悖论的出现, 都使得人们重新思考和完善数学基础. 数学史上三次大的数学危机都与悖论的出现有关, 都使得数学前进了一大步. 希帕索斯悖论让当时统治数学界的“任何量都可以用整数和整数的比来表示”化为泡影, 产生了无理数; 贝克莱悖论的出现, 使得极限概念由模糊变得清晰, 由直觉变得严密; 罗素悖论的出现, 使得建立在集合论基础上的数学大厦摇摇欲坠, 人们在不断的做出努力来构建和加固数学大厦, 数学大厦也就在人们的不断加固和不断的扩建的过程中变得越来越光辉灿烂.

参考文献

[1] 张敏, 何小亚. 贝特朗悖论之争的终结 [J]. 数学教育学报, 2015(3)：4.

[2] 冯变英, 王平. 贝特朗悖论与概率论的公理化 [J]. 运城学院学报, 2008, 26(2)：2.

[3] 北京邮电大学理学院数学系概率教研室, 史悦, 孙洪祥. 概率论与随机过程 [J]. 北京邮电大学出版社, 2010.