矩阵论　第五次作业

第 1 章　线性空间和线性变换

1.2　线性变换及其矩阵

定义

定义 1.19　首项系数是 1（简称首 1），次数最小，且以矩阵 A 为根 λ 的多项式，称为 A 的**最小多项式，**常用 $m(\lambda)$ 表示.

根据定理 1.18，显然 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的次数不大于它的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的次数.

定理

定理 1.17　任意 n 阶矩阵与三角矩阵相似.

定理 1.18(Hamilton-Cayley)　n 阶矩阵 A 是其特征多项式的矩阵根（零点），即令

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

则有

$$\varphi(A)=A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+A_nI=O$$

定理 1.20　矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 与其特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的零点相同（不计重数）.

证　有定理 1.18 知 $\varphi(A)=O$，再知 $m(\lambda)$ 能够整除 $\varphi(\lambda)$，所以 $m(\lambda)$ 的零点是 $\varphi(\lambda)$ 的零点.

又设 λ_0 是 $\varphi(\lambda)$ 的一个零点，也是 A 的一个特征值，那么有非零向量 $\boldsymbol{x}\in C^n$，使得

$$A\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}\qquad or\qquad m(A)\boldsymbol{x}=m(\lambda_0)\boldsymbol{x}$$

因为 $m(A)=O$，所以 $m(\lambda_0)\boldsymbol{x}=0$，从而 $m(\lambda_0)=0$，故 $\varphi(\lambda)$ 的零点也是 $m(\lambda)$ 的零点.

定理 1.21　设 n 阶矩阵 A 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)$，特征矩阵 $\lambda I-A$ 的全体 $n-1$ 阶子式的最大公因式为 $d(\lambda)$，则 A 的最小多项式为

$$m(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{d(\lambda)}$$

例题

例题 1.20 计算矩阵多项式 $A^{100}+2A^{50}$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

解 令 $\phi(\lambda)=\lambda^{100}+2\lambda^{50}$，可求得 A 的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

用 $\varphi(\lambda)$ 除 $\phi(\lambda)$。可得

$$\phi(\lambda)=\varphi(\lambda)q(\lambda)+b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$$

将 $\lambda=1,2$ 分别代入上式，则有

$$\begin{cases}b_0+b_1+b_2=3\\ b_0+2b_1+4b_2=2^{100}+2^{51}\end{cases}$$

对 $\phi(\lambda)$ 求导，得到

$$\phi^{'}(\lambda)=[2(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda-1)^2]q(\lambda)+\varphi(\lambda)q^{'}(\lambda)+b_1+2b_2\lambda$$

将 $\lambda=1$ 代入上式，可得

$$b_1+2b_2=\varphi^{'}(1)=200$$

从而求得

$$\begin{cases}b_0=2^{100}+2^{51}-400\\ b_1=606-2^{101}-2^{52}\\ b_2=-203+2^{100}+2^{51}\end{cases}$$

故

$$A^{100}+2A^{50}=b_0I+b_1A+b_2A^2$$

例题 1.21 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 2\\ -1 & 5 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解 设 $f(\lambda)=\lambda+k\ (k\in R)$，由于 $f(A)=A+kI\neq O$，所以任何一次多项式都不是 A 的最小多项式，注意到 A 的特征多项式

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

且对于它的二次因式

$$\phi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)=\lambda^2-6\lambda+8$$

有

$$\phi(A) = A^2 - 6A + 8I = O$$

故，$m(\lambda) = \phi(\lambda)$.

ppt 例题

P5 设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 为线性空间 V 一组基，线性变换 T 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$ 为 V 的另一组基，且

$$(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 求 T 在 $\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$ 下的矩阵 B.

(2) 求 A^k.

解

(1) T 在基 $\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$ 下的矩阵

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 由 $B = C^{-1}AC$，有 $A = CBC^{-1}$，于是 $A^k = CB^kC^{-1}$

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 & k \\ -k & -k+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

P17 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I$.

解 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - 2\lambda + 1$
用 $\varphi(\lambda)$ 去除 $2\lambda^8 - 3\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^2 - 4\lambda = g(\lambda)$，得

$$g(\lambda) = \varphi(\lambda)(2\lambda^5 + 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 9\lambda - 14) + (24\lambda^2 - 37\lambda + 10)$$

$\because \quad \varphi(A) = 0$
$\therefore \quad 2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I = 24A^2 - 37A + 10I$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{bmatrix}$$

P22 求

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解 A 的特征多项式为

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3$$

又 $A - I \neq 0$,

$$(A - I)^2 = A^2 - 2A + I$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，A 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^2$.

P30 试用初等变换化多项式矩阵

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda + 1 & 2\lambda - 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2 + 1 & \lambda^2 + \lambda - 1 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

为标准形.

解

$$A(\lambda)\xrightarrow[{[3]+[1]}]{}\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & 1\\ \lambda & \lambda^2 & 0\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3]\leftrightarrow[1]}]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1\end{bmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3]+(\lambda-1)[1]}]{{[2]-(2\lambda-2)[1]}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[{[2]\leftrightarrow[3]}]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[{[3]-\lambda[2]}]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[(3)-(\lambda+1)(2)]{(-1)[3]}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda\end{bmatrix}$$

最后所得矩阵是 $A(\lambda)$ 的标准形，此时,$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\lambda$，$d_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda$.

P35 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解 求 $\lambda I-A$ 的初等因子组. 由于

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

不变因子为 $d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=2$，$d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$.
最后一个不变因子就是 A 的最小多项式：$m(\lambda)=d_3(\lambda)$
有 $m(A)=0$.

P38 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解

$$
\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda+3 & -6 \\ -2 & 2 & \lambda-4 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ -\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda \\ -2\lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & \lambda-1 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-2\lambda \\ 0 & \lambda & -2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{bmatrix}
$$

不变因子为 $d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\lambda$，$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$.
最后一个不变因子就是 A 的最小多项式：$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$
有 $m(A)=0$.

习题

1.2.14 计算 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$，其中

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

解

$$
\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 2\lambda + 1
$$

有

$$
A^3 - 2A + I = 0
$$

那么

$$
\begin{aligned}
& 2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I \\
=& (A^3-2A+I)(2A^5+4A^3-5A^2+9A-14I)+(24A^2-37A+10I) \\
=& 24A^2-37A+10I \\
=& \begin{bmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$