矩阵论　第十三次作业

第 4 章　矩阵分解

4.1　Gauss 消去法与矩阵的三角分解

定义

定义 4.1　如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以分解成一个下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和一个上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积, 则称 $\boldsymbol{A}$ 可做**三角分解**或 LU(LR) **分解**. 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 可分解成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是单位下三角矩阵, $\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵, $\boldsymbol{U}$ 是单位上三角矩阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 可做 LDU **分解**.

定义 4.2　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有唯一的 LDU 分解. 若把 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$ 中的 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 结合起来, 并且用 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 来表示, 就得到唯一的分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{DU})=\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{U}}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Doolittle **分解**; 若把 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$ 中的 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 结合起来, 并且用 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 来表示, 就得到唯一的分解为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{LD})\boldsymbol{U}=\hat{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{U}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Crout **分解**.

定义 4.3　称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{L}^T=(\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}})(\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}})^T=\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T$ 为实对称正定矩阵的 Cholesky **分解** (**平方根分解、对称三角分解**).
这里 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}$ 是下三角矩阵.

例题

例 4.1　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 LDU 分解, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

解　因为 $\Delta_1=2, \Delta_2=5$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 有唯一的 LDU 分解. 构造矩阵

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算, 得

$$L_1^{-1}A^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

对 $A^{(1)}$ 构造矩阵, 有

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

计算, 得

$$L_2^{-1}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -\dfrac{5}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

于是

$$L = L_1 L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \dfrac{1}{2} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

于是得 $A^{(0)} = A$ 的 LDU 分解为

$$A = L_1 L_2 A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 4.2　求矩阵 A 的 Gholesky 分解, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解　容易验证 A 是对称正定矩阵, 有

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5}$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad g_{22} = (a_{22} - g_{21}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{11}{5}}$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} = 0, \quad g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}} = -\sqrt{\frac{5}{11}}$$

$$g_{33} = (a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{6}{11}}$$

从而

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{11}{5}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{11}} & \sqrt{\frac{6}{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{11}{5}} & -\sqrt{\frac{5}{11}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{6}{11}} \end{bmatrix}$$

习题

习题 4.1.1　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 LDU 分解和 Doolittle 分解, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{2}{5} & 1 & & \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 & \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & \frac{1}{5} & & \\ & & 1 & \\ & & & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ & 1 & -2 & 5 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

习题 4.1.4　求对称正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Cholesky 分解, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

解　容易验证 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定矩阵, 有

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5}$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad g_{22} = (a_{22} - g_{21}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} = -\frac{4}{\sqrt{5}}, \quad g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$g_{33} = (a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2)^{1/2} = 1$$

从而

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & & \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$