矩阵论　第七次作业

第 1 章　线性空间和线性变换

1.3　两个特殊的线性空间

定义

定义 1.22　设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，对于 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，按照某种规则定义一个实数，用 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ 来表示，且它满足下述 4 个条件：

(1) 交换律：$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$;

(2) 分配律：$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z})$;

(3) 齐次性：$(k\boldsymbol{x},\ y) = k(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\ (\forall k \in \mathbb{R})$;

(4) 非负性：$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 0$.

则称实数 $(x,\ \boldsymbol{y})$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积，而称 V 为 **Euclid 空间**，简称**欧氏空间**或**实内积空间.**

定义 1.28　设 V 为欧氏空间，T 是 V 的一个线性变换，如果 T 保持 V 中任意向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度不变，则有

$$(T\boldsymbol{x},\ T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$$

那么称 T 是 V 的一个**正交变换.**

定义 1.29　如果实方阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{Q}$ 为**正交方阵.**

容易证明：$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵的充要条件是它的列向量是两两正交的单位向量. 此外，正交矩阵还有下面的性质.

(1) 正交矩阵是可逆的.

(2) 正交矩阵的逆矩阵仍是正交矩阵.

(3) 两个正交矩阵的乘积仍为正交矩阵.

定义 1.30　设 T 是欧氏空间 V 的一个线性变换，且对 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$，都有

$$(T\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ T\boldsymbol{y})$$

则称 T 为 V 的一个**对称变换**.

定理

定理 1.33 对于欧氏空间 V^n 的任一基 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$，都可以找到一个标准正交基 $\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{y}_n$，换言之，任意非零欧氏空间都有正交基和标准正交基.

定理 1.36 线性变换 T 为正交变换的充要条件是，对于欧氏空间 V 中任意向量 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$，都有 $(T\boldsymbol{x},\ T\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

定理 1.38 欧氏空间的线性变换是实对称变换的充要条件是，它对于标准正交基的矩阵是实对称矩阵.

例题

例题 1.33 试把向量组 $\boldsymbol{x}_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{x}_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{x}_3=(-1,\ 0,\ 0,\ 1)$，$\boldsymbol{x}_4b=(1,\ -1,\ -1,\ 1)$ 正交单位化.

解 先把它们正交化，使用 $l_i=-\dfrac{(\boldsymbol{x}_{m+1},\ \boldsymbol{y}_i')}{\boldsymbol{y}_i',\ \boldsymbol{y}_i'}$，可得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_1'=\boldsymbol{x}_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)\\
&\boldsymbol{y}_2'=\boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1')}{(\boldsymbol{y}_1',\ \boldsymbol{y}_1')}y_1'=\Big(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 0\Big)\\
&\boldsymbol{y}_3'=\boldsymbol{x}_3-\frac{(\boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{y}_2')}{(\boldsymbol{y}_2',\ \boldsymbol{y}_2')}y_2'-\frac{(\boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{y}_1')}{(\boldsymbol{y}_1',\ \boldsymbol{y}_1')}y_1'=\Big(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\Big)\\
&\boldsymbol{y}_4'=\boldsymbol{x}_4-\frac{(\boldsymbol{x}_4,\ \boldsymbol{y}_3')}{(\boldsymbol{y}_3',\ \boldsymbol{y}_3')}y_3'-\frac{(\boldsymbol{x}_4,\ \boldsymbol{y}_2')}{(\boldsymbol{y}_2',\ \boldsymbol{y}_2')}y_2'-\frac{(\boldsymbol{x}_4,\ \boldsymbol{y}_1')}{(\boldsymbol{y}_1',\ \boldsymbol{y}_1')}y_1'=(1,\ -1,\ -1,\ 1)
\end{aligned}
$$

再单位化，则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1&=\frac{1}{|\boldsymbol{y}_1'|}\boldsymbol{y}_1'=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\Big)\\
\boldsymbol{y}_2&=\frac{1}{|\boldsymbol{y}_2'|}\boldsymbol{y}_2'=\Big(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{-1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ 0\Big)\\
\boldsymbol{y}_3&=\frac{1}{|\boldsymbol{y}_3'|}\boldsymbol{y}_3'=\Big(-\frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{1}{\sqrt{12}},\ \frac{3}{\sqrt{12}},\ \Big)\\
\boldsymbol{y}_4&=\frac{1}{|\boldsymbol{y}_4'|}\boldsymbol{y}_4'=\Big(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

习题

习题 1.3.2 设 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ 是实线性空间 V^n 的基，向量

$$
\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{x}_1+\xi_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n,\qquad \boldsymbol{y}=\eta_1\boldsymbol{y}_1+\eta_2\boldsymbol{y}_2+\cdots+\eta_n\boldsymbol{y}_n,
$$

定义实数 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^n i\xi_i\eta_i$，问 V^n 是否形成欧氏空间.

解

(1) 交换律

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i=\sum_{i=1}^{n}i\eta_i\xi_i=(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$$

(2) 分配律，设 $\boldsymbol{z}=\mu_1\boldsymbol{z}_1+\mu_2\boldsymbol{z}_2+\cdots+\mu_n\boldsymbol{z}_n$,

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=\sum_{i=1}^{n}i(\xi_i+\eta_i)\mu_i=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\mu_i+\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\mu_i=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$$

(3) 齐次性

$$(k\boldsymbol{x},\ y)=\sum_{i=1}^{n}ik\xi_i\eta_i=k\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i=k(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

(4) 非负性

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\xi_i=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i^2\geqslant 0$$

且当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时,、11 等号成立.

综上，V^n 是一个欧氏空间.

习题 1.3.5 设 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{x}_4,\ \boldsymbol{x}_5$ 是欧氏空间 V^5 的一个标准正交基.$V_1=L(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_3)$，其中 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_5,\ \boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_4,\ \boldsymbol{y}_3=2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3$，求 V_1 的一个标准正交基.

解 由题，得

$$\boldsymbol{y}_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\qquad \boldsymbol{y}_2=(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0)\qquad \boldsymbol{y}_3=(2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$$

先把他们正交化

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1'&=\boldsymbol{y}_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_5\\
\boldsymbol{e}_2'&=\boldsymbol{y}_2-\frac{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{e}_1')}{(\boldsymbol{e}_1',\ \boldsymbol{e}_1')}e_1'=\frac{1}{2}(1,\ -2,\ 0,\ 2,\ -1)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_4-\boldsymbol{x}_5)\\
\boldsymbol{e}_3'&=\boldsymbol{y}_3-\frac{(\boldsymbol{y}_3,\ \boldsymbol{e}_2')}{(\boldsymbol{e}_2',\ \boldsymbol{e}_2')}e_2'-\frac{(\boldsymbol{y}_3,\ \boldsymbol{e}_1')}{(\boldsymbol{e}_1',\ \boldsymbol{e}_1')}e_1'=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1)=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_5
\end{aligned}$$

再单位化，则有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1&=\frac{1}{|\boldsymbol{e}_1'|}\boldsymbol{e}_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_5)\\
\boldsymbol{e}_2&=\frac{1}{|\boldsymbol{e}_2'|}\boldsymbol{e}_2'=\frac{1}{\sqrt{10}}(\boldsymbol{x}_1-2\boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_4-\boldsymbol{x}_5)\\
\boldsymbol{e}_3&=\frac{1}{|\boldsymbol{e}_3'|}\boldsymbol{e}_3'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_5)
\end{aligned}$$