矩阵论

第 3 章　矩阵分析及其应用

3.3　矩阵函数

定义

定义 3.7　设一元函数 $f(x)$ 能够展开为 z 的幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (|z| < r)$$

其中 $r > 0$ 表示该幂级数的收敛半径. 当 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A}) < r$ 时, 把收敛的矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$ 的和称为**矩阵函数**, 记为 $f(\boldsymbol{A})$, 即

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$$

定理

定理 3.7　如果 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则 $e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{B}}e^{\boldsymbol{A}} = e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$.

例题

例 3.3　设 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 证明

$$\left.\begin{array}{l}
\cos(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \cos\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B} - \sin\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B} \\
\cos 2\boldsymbol{A} = \cos^2\boldsymbol{A} - \sin^2\boldsymbol{A} \\
\sin(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B} + \cos\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B} \\
\sin 2\boldsymbol{A} = 2\sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}
\end{array}\right\}$$

证

$$
\begin{aligned}
\cos(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \frac{1}{2}(e^{j(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}+e^{-j(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}) = \frac{1}{2}(e^{j\boldsymbol{A}}e^{j\boldsymbol{B}}+e^{-j\boldsymbol{A}}e^{-j\boldsymbol{B}}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{(e^{j\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}})(e^{j\boldsymbol{B}}+e^{-j\boldsymbol{B}})}{2}+\frac{(e^{j\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}})(e^{j\boldsymbol{B}}-e^{-j\boldsymbol{B}})}{2}) \\
&= \frac{e^{j\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}}}{2}\frac{e^{j\boldsymbol{B}}+e^{-j\boldsymbol{B}}}{2}-\frac{e^{i\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}}}{2j}\frac{e^{i\boldsymbol{B}}-e^{-j\boldsymbol{B}}}{2j} \\
&= \cos\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}-\sin\boldsymbol{A}\sin\boldsymbol{B} \\
\cos 2\boldsymbol{A} &= \frac{1}{2}(e^{j(2\boldsymbol{A})}+e^{-j(2\boldsymbol{A})}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{(e^{j\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}})(e^{j\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}})}{2}-\frac{(e^{j\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}})(e^{j\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}})}{2j^2}) \\
&= \frac{e^{j\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}}}{2}\frac{e^{j\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}}}{2}-\frac{e^{i\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}}}{2j}\frac{e^{i\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}}}{2j} \\
&= \cos^2\boldsymbol{A}-\sin^2\boldsymbol{A} \\
\sin(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \frac{1}{2j}(e^{j(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}-e^{-j(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}) = \frac{1}{2j}(e^{j\boldsymbol{A}}e^{j\boldsymbol{B}}-e^{-j\boldsymbol{A}}e^{-j\boldsymbol{B}}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{(e^{j\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}})(e^{j\boldsymbol{B}}+e^{-j\boldsymbol{B}})}{2j}+\frac{(e^{i\boldsymbol{B}}+e^{-j\boldsymbol{B}})(e^{i\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}})}{2j}) \\
&= \frac{e^{j\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}}}{2j}\frac{e^{j\boldsymbol{B}}+e^{-j\boldsymbol{B}}}{2}+\frac{e^{i\boldsymbol{B}}+e^{-j\boldsymbol{B}}}{2j}\frac{e^{i\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}}}{2} \\
&= \sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{B}+\sin\boldsymbol{B}\cos\boldsymbol{A} \\
\sin 2\boldsymbol{A} &= \frac{1}{2j}(e^{j(2\boldsymbol{A})}-e^{-j(2\boldsymbol{A})}) \\
&= 2\frac{e^{j\boldsymbol{A}}-e^{-j\boldsymbol{A}}}{2j}\frac{e^{j\boldsymbol{A}}+e^{-j\boldsymbol{A}}}{2} \\
&= 2\sin\boldsymbol{A}\cos\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

例 3.4 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k \quad (|z|<1)$, 求矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$.

解 因为

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \quad (|z|<1)$$

根据定义 3.7, 当方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})<1$ 时, 有

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}.$$

例 3.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$, 求 $e^{\boldsymbol{A}}$ 与 $e^{t\boldsymbol{A}}(t\in R)$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$, 容易求得 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$, 取 $\psi(\lambda)=(\lambda-2)^2$

(1) 取 $f(\lambda)=e^{\lambda}$, 设 $f(\lambda)=\psi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$, 则有

$$\begin{cases} f(2)=e^2 \\ f'(2)=e^2 \end{cases} \quad \text{或者} \begin{cases} a+2b=e^2 \\ b=e^2 \end{cases}$$

解此方程组可得 $a=-e^2$, $b=e^2$. 于是 $r(\lambda)=e^2(\lambda-1)$, 从而

$$e^{\boldsymbol{A}}=f(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=e^2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=e^2\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

(2) 取 $f(\lambda)=e^{t\lambda}$, 设 $f(\lambda)=\psi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$, 则有

$$\begin{cases} f(2)=e^{2t} \\ f'(2)=te^{2t} \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} a+2b=e^{2t} \\ b=te^{2t} \end{cases}$$

解此方程组可得 $a=(1-2t)e^{2t}$, $b=te^{2t}$. 于是 $r(\lambda)=e^{2t}[(1-2t)+t\lambda]$, 从而

$$e^{t\boldsymbol{A}}=f(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=e^{2t}[(1-2t)\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}]=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{bmatrix}$$

例 3.7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$, 分别求 $e^{\boldsymbol{A}}$, $e^{t\boldsymbol{A}}(t\in R)$ 及 $\cos\boldsymbol{A}$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$. 对应 $\lambda_1=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,1)^T$; 对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(-2,1,0)^T$, $\boldsymbol{P}_3=(0,0,1)^T$. 构造矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$$

求得

$$e^{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{-2}&&\\&e&\\&&e\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2e-e^{-2}&2e-e^{-2}&0\\e^{-2}-e&2e^{-2}-e&0\\e^{-2}-e&2e^{-2}-2e&e\end{bmatrix}$$

$$e^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{-2t}&&\\&e^{t}&\\&&e^{t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2e^{t}-e^{-2t}&2e^{t}-e^{-2t}&0\\e^{-2t}-e^{t}&2e^{-2t}-e^{t}&0\\e^{-2t}-e&2e^{-2t}-2e^{t}&e^{t}\end{bmatrix}$$

$$\cos\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\cos(-2)&&\\&\cos 1&\\&&\cos 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2\cos 1-\cos 2&2\cos 1-2\cos 2&0\\\cos 2-\cos 1&2\cos 2-\cos 1&0\\\cos 2-\cos 1&2\cos 2-2\cos 1&\cos 1\end{bmatrix}$$

习题

习题 3.3.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, 求 $e^{\boldsymbol{A}}$, $e^{t\boldsymbol{A}}(t\in R)$, $\sin\boldsymbol{A}$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$. 对应 $\lambda_1=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(1,-3,3)^T$, 对应 $\lambda_2=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(-1,1,1)^T$, $\lambda_3=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(1,3,2)^T$. 构造矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-3&1&0\\3&1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&3&3\\6&4&2\end{bmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$$

则

$$e^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{-1}&&\\&e&\\&&e^{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6e^{2}&4e^{2}-3e-e^{-1}&2e^{2}-3e+e^{-1}\\0&3e+3e^{-1}&3e-3e^{-1}\\0&3e-3e^{-1}&3e+3e^{-1}\end{bmatrix}$$

$$e^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{-t}&&\\&e^{t}&\\&&e^{2t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6e^{2t}&4e^{2t}-3e^{t}-e^{-t}&2e^{2t}-3e^{t}+e^{-t}\\0&3e^{t}+3e^{-t}&3e^{t}-3e^{-t}\\0&3e^{t}-3e^{-t}&3e^{t}+3e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\sin(-1)&&\\&\sin 1&\\&&\sin 2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6\sin 2&4\sin 2-2\sin 1&2\sin 2-4\sin 1\\0&0&6\sin 1\\0&6\sin 1&0\end{bmatrix}$$

习题 3.3.6 设 $f(z)=\ln z$, 求 $f(\boldsymbol{A})$, 这里 $\boldsymbol{A}$ 为

$$(1)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix};(2)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

解

$$(1)\ \ \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}&&&1\\&&1&\\&1&&\\1&&&\end{bmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\ln\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\cdot\ln\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&1&0\end{bmatrix}$$

(2)

$$\ln\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\ln 2&\frac{1}{2}7&&\\&\ln 2&0&0\\&&0&1\\&&&\end{bmatrix}$$

3.4 矩阵的微分和积分

定义

定义 3.9 如果函数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 是变量 t 的可导函数, 则称 $\boldsymbol{A}(t)$ 可导, 其**导数 (微商)** 定义为

$$\boldsymbol{A}'(t)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)=(\frac{d}{dt}a_{ij}(t))_{m\times n}$$

定义 3.10

定理

定理 3.8 设 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ 是能够进行下面运算的两个可导的函数矩阵, 则有

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))=\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)+\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}(t)$$
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t))=\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}(t)$$
$$\frac{d}{dt}(a\boldsymbol{A}(t))=\frac{da}{dt}\cdot\boldsymbol{A}(t)+a\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)$$

这里, $a = a(t)$ 为 t 的可导函数,

定理 3.9 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 t 无关, 则有

$$\frac{d}{dt}e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$$
$$\frac{d}{dt}\cos(t\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}(\sin(t\boldsymbol{A})) = -(\sin(t\boldsymbol{A}))\boldsymbol{A}$$
$$\frac{d}{dt}\sin(t\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}(\cos(t\boldsymbol{A})) = (\cos(t\boldsymbol{A}))\boldsymbol{A}$$

习题

习题 3.4.4 设 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$, $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵, $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T$, c 为常数, 试求 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$ 对于 $\boldsymbol{x}$ 的导数.

解

$$f'(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$$