矩阵论　第十五次作业

第 4 章　矩阵分解

4.2　矩阵的 QR 分解

定义 4.6　如果实 (复) 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能够化成正交 (酉) 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和实 (复) 可逆上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的乘积, 即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$$

则称其为 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解.

定理 4.6　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实 (复) 可逆矩阵, 则存在正交 (酉) 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与实 (复) 可逆上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$, 使 $\boldsymbol{A}$ 有 QR 分解式. 除去相差一个对角元素的绝对值 (模) 全等于 1 的对角矩阵因子外, 分解式是唯一的.

定理 4.7　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实 (复) 矩阵, 且其 n 个列线性无关, 则 $\boldsymbol{A}$ 有分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是 $m\times n$ 实 (复) 矩阵, 且满足 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{Q}^H\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{R}$ 是 n 阶实 (复) 可逆上三角矩阵. 该分解除去相差一个对角元素的绝对值 (模) 全等于 1 的对角矩阵因子外是唯一的.

例题 4.6　用 Schmidt 正交化方法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

解　令 $\boldsymbol{a}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{a}_2=(2,1,2)^T,\boldsymbol{a}_3=(2,2,1)^T$, 正交可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1=&\boldsymbol{a}_1=(1,2,1)^T\\\boldsymbol{b}_2=&\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_1=(1,-1,1)^T\\\boldsymbol{b}_3=&\boldsymbol{a}_3-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}_2-\frac{7}{6}\boldsymbol{b}_3=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})^T\end{aligned}$$

构造矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\\boldsymbol{R}&=\begin{bmatrix}\sqrt{6}&&\\&\sqrt{3}&\\&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&\frac{7}{6}\\&1&\frac{1}{3}\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{6}&\sqrt{6}&\frac{7}{\sqrt{6}}\\&\sqrt{3}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$.

习题 4.2.1 用 Schmidt 正交化方法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

解 令 $\boldsymbol{a}_1=(0,1,1)^T,\boldsymbol{a}_2=(1,1,0)^T,\boldsymbol{a}_3=(1,0,1)^T$, 正交化可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_1&=\boldsymbol{a}_1=(0,1,1)^T\\\boldsymbol{b}_2&=\boldsymbol{a}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1=(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T\\\boldsymbol{b}_3&=\boldsymbol{a}_3-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}_2=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&&\\&\frac{\sqrt{6}}{2}&\\&&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\&1&\frac{1}{2}\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\&\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\&&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$.

第 6 章 广义逆矩阵

定义 6.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$, 若矩阵 $\boldsymbol{X}\in C^{n\times m}$ 满足以下 4 个 Penrose 方程

$$(1)\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A}\qquad(2)\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}$$
$$(3)(\boldsymbol{AX})^H=\boldsymbol{AX}\quad(4)(\boldsymbol{XA})^H=\boldsymbol{XA}$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 **Moore-Penrose 逆**, 记为 $\boldsymbol{A}^+$.

定义 6.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$, 矩阵 $\boldsymbol{X}\in C^{n\times m}$.

(1) 若 $\boldsymbol{X}$ 满足 Penrose 方程中的第 (i) 个方程, 则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{i\}$ -逆, 记作 $\boldsymbol{A}^{(i)}$, 全体 $\{i\}$ -逆的集合记作 $\boldsymbol{A}\{i\}$. 这种广义逆矩阵共有四类;

(2) 若 $\boldsymbol{X}$ 满足 Penrose 方程中的第 $(i),(j)$ 个方程 $(i\neq j)$, 则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{i,j\}$ -逆, 记作 $\boldsymbol{A}^{(i,j)}$, 全体 $\{i,j\}$ -逆的集合记作 $\boldsymbol{A}\{i,j\}$. 这种广义逆矩阵共有 6 类;;

(3) 若 $\boldsymbol{X}$ 满足 Penrose 方程中的第 $(i),(j),(k)$ 个方程 (i,j,k 互异), 则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{i,j,k\}$ -逆, 记作 $\boldsymbol{A}^{(i,j,k)}$, 全体 $\{i,j,k\}$ -逆的集合记作 $\boldsymbol{A}\{i,j,k\}$. 这种广义逆矩阵共有 4 类;

(4) 若 $\boldsymbol{X}$ 满足 Penrose 方程 $(1)\sim(4)$, 则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆 $\boldsymbol{A}^+$, 这种广义逆矩阵是唯一的.

公式 6.1.3

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{F}^{+}=\boldsymbol{G}^{H}(\boldsymbol{F}^{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{H})^{-1}\boldsymbol{F}^{H}$$

公式 6.1.4

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_r^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}_{n\times m}\boldsymbol{U}^{H}$$

公式 6.4.1 考虑非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n},\boldsymbol{b}\in C^{m}$ 给定, 而 $\boldsymbol{x}\in C^{n}$ 为待定向量. 如果存在向量 $\boldsymbol{x}$ 使方程组成立, 则称方程组相容, 否则称为不相容或矛盾方程组.

公式 6.4.2 如果方程组相容, 其解可能有无穷多个, 求出具有极小范数的解, 即

$$\min_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}}\|\boldsymbol{x}\|$$

其中 $\|\cdot\|$ 是欧式范数. 可以证明, 满足该条件的解是唯一的, 称之为极小范数解.

公式 6.4.3 如果方程组不相容, 则不存在通常意义下的解. 但在许多实际问题中, 需要求出极值问题

$$\min_{\boldsymbol{x}\in C^{n}}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|$$

的解 $\boldsymbol{x}$, 其中 $\|\cdot\|$ 是欧式范数. 称这个极值问题为求矛盾方程组的最小二乘问题, 相应的 $\boldsymbol{x}$ 称为矛盾方程组的最小二乘解.

公式 6.4.4 一般来说, 矛盾方程组的最小二乘解是不唯一的. 但在最小二乘解的集合中, 具有极小范数的解

$$\min_{\min\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|}\|\boldsymbol{x}\|$$

是唯一的, 称之为极小范数最小二乘解.

定理 6.1 对任意 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}^{+}$ 存在并且唯一.

定理 6.2 设 $\boldsymbol{A}_r^{m\times n}$ 的不可逆值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}_{m\times n}\boldsymbol{V}^{H}$$

那么

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_r^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}_{n\times m}\boldsymbol{U}^{H}$$

定理 6.33 设 $\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in C^m$, 则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$ 是方程组的唯一极小范数最小二乘解. 反之, 设 $\boldsymbol{X} \in C^{n\times m}$, 若对所有 $\boldsymbol{b} \in C^m, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$ 是方程组的极小范数最小二乘解, 则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^+$.

例题 6.10 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆 $\boldsymbol{A}^+$.

(2) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 是否有解, 并求其极小范数解或者极小范数最小二乘解 $\boldsymbol{x}_0$.

解 (1) 采用满秩分解方法求 $\boldsymbol{A}^+$. 计算得

$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$$

$$\boldsymbol{F}^+ = (\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^T = \frac{1}{58}\begin{bmatrix} -10 & 6 & 4 & 14 \\ 13 & -2 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}^+ = \boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{G}^+\boldsymbol{F}^+ = \frac{1}{174}\begin{bmatrix} -33 & 14 & 19 & 23 \\ 36 & -10 & -26 & -4 \\ 3 & 4 & -7 & 19 \end{bmatrix}$$

(2) 计算, 有

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$