矩阵论　第十一次作业

第 3 章　矩阵分析及其应用

3.1　矩阵序列

定义

定义 3.1　设有矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}$，其中 $\boldsymbol{A}^{(k)} = (a^{(}_{ij}k))_{m\times n} \in \boldsymbol{C}^{m\times n}$，当 $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}(k\to\infty)$ 时，称 $\{\boldsymbol{A}^(k)\}$ 收敛，或称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\{\boldsymbol{A}^(k)\}$ 的极限，或称 $\{\boldsymbol{A}^(k)\}$ 收敛于 $\boldsymbol{A}$，记为

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{A} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{A}^{(k)} \to \boldsymbol{A}$$

不收敛的矩阵序列称为**发散**.

定义 3.2　矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}$ 称为**有界**的，如果存在常数 $M>0$，使得对一切 k 都有

$$|a_{ij}^{(k)}| < M \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

定义 3.3　设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，且 $\boldsymbol{A}^k \to \boldsymbol{O}(k\to\infty)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**收敛矩阵**.

定理

定理 3.1　设 $\boldsymbol{A}^{(k)} \in \boldsymbol{C}^{m\times n}$，则

(1) $\boldsymbol{A}^{(k)} \to \boldsymbol{O}$ 的充要条件是 $\left\|\boldsymbol{A}^{(k)}\right\| \to 0$.

(2) $\boldsymbol{A}^{(k)} \to \boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\left\|\boldsymbol{A}^{(k)} - \boldsymbol{A}\right\| \to 0$.

定理 3.2　$\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$.

定理 3.3　$\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵的充分条件是只要有一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|\boldsymbol{A}\| < 1$.

例题

例 3.1　判断 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$ 是否为收敛矩阵.

解　因为 $\|\boldsymbol{A}\|_1 = 0.9 < 1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是收敛矩阵.

习题

习题 3.1.2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{bmatrix}$ $(c\in R)$，讨论 c 取何值时 $\boldsymbol{A}$ 为收敛矩阵.

解

$$|\lambda E-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}\lambda & -c & -c\\ -c & \lambda & -c\\ -c & -c & \lambda\end{bmatrix}=(\lambda+c)^2(\lambda-2c)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2c,\lambda_2=\lambda_3=-c$，于是 $r(\boldsymbol{A})=2|c|$
根据 $r(\boldsymbol{A})<1$ 得到，$-\dfrac{1}{2}<c<\dfrac{1}{2}$.

3.2 范数的一些应用

定义

定义 3.4 把定义 3.1 中的矩阵序列所形成的无穷和 $\boldsymbol{A}^{(0)}+\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots+\boldsymbol{A}^{(k)}+\cdots$ 称为**矩阵级数**，记为 $\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$，则有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}^{(0)}+\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots+\boldsymbol{A}^{(k)}+\cdots$$

定义 3.5 记 $\boldsymbol{S}^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{A}^{(k)}$，称其为矩阵级数式的**部分和**. 如果矩阵序列 $\{\boldsymbol{S}^{(N)}\}$ 收敛，且有极限 $\boldsymbol{S}$，则有

$$\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{S}^{(N)}=\boldsymbol{S}$$

那么就成矩阵级数式**收敛**，而且有**和** $\boldsymbol{S}$，记为

$$\boldsymbol{S}=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}$$

不收敛的矩阵级数称为是**发散**的.
若用 s_{ij} 表示 $\boldsymbol{S}$ 的第 i 行第 j 列的元素，那么，和 $\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{S}$ 的意义指的是

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}=s_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

定义 3.6 如果左端 mn 个数项数都是绝对收敛的，则称矩阵级数式是**绝对收敛**的.

定理

定理 3.5 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 对某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|\boldsymbol{A}\| < 1$，则对任何非负整数 N，以 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 为部分和的 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdot+\boldsymbol{A}^N$ 的近似矩阵时，其误差为

$$\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdot+\boldsymbol{A}^N)\right\| \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}\|^{N+1}}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

定理 3.6 设幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

的收敛半径为 r，如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\rho(\boldsymbol{A}) < r$，则矩阵幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$$

例题

例 3.2 研究矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 的收敛性，其中

$$\boldsymbol{A}^{(k)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{3\times 4^k} \\ 0 & \frac{1}{k(k+1)} \end{bmatrix} \quad (k=1,2,\cdots)$$

解 因为

$$\boldsymbol{S}^{(N)}=\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{A}^{(k)}=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} & \sum_{k=1}^{N} \frac{\pi}{3\times 4^k} \\ 0 & \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-(\frac{1}{2})^N & \frac{\pi}{9}[1-(\frac{1}{4})^N] \\ 0 & \frac{N}{N+1} \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{S}=\lim_{N\to\infty} \boldsymbol{S}^{(N)}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{\pi}{9} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，所给级数收敛.

习题

习题 3.2.1 问矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}^k$ 收敛还是发散，其原因是什么？其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

解

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 4 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}=(\lambda-1)^3$$

所以，$\rho(\boldsymbol{A})=1$，因此，发散.

习题 3.2.2 设幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛半径是 3，3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径也是 3，问矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \boldsymbol{A}^k$ 是否有可能收敛.

解 有可能收敛，但不是绝对收敛.

习题 3.2.4 设 $\boldsymbol{A}^{(k)} \in \boldsymbol{C}^{m\times n}$，且矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛，证明 $\lim_{k\to\infty} = \boldsymbol{O}$.

解 记 $\boldsymbol{S}^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{A}^{(k)}$，已知 $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{(k)}$ 收敛，可设

$$\lim_{N\to\infty} \boldsymbol{S}^{(N)} = \boldsymbol{S}$$

于是有，$\lim_{N\to\infty} \boldsymbol{A}^{(N)} = \lim_{N\to\infty}(\boldsymbol{S}^{(N)} - \boldsymbol{S}^{(N-1)}) = \boldsymbol{O}$