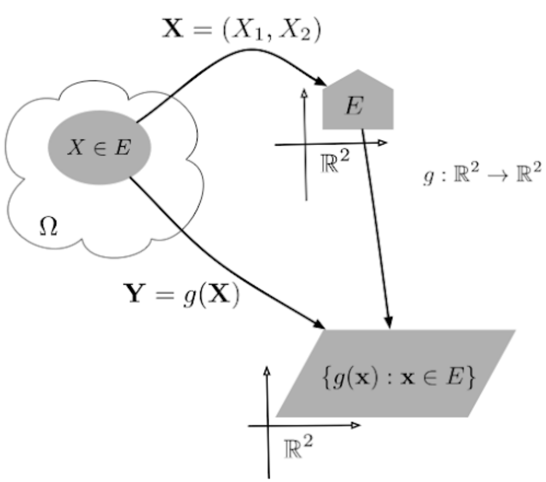
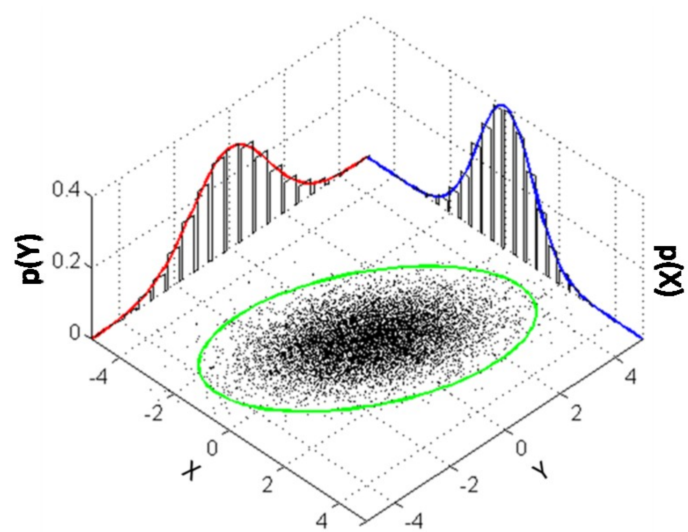
آمار و احتمالات مهندسی

فصل: متغیرهای تصادفی توأم

مدرس: مشکانی فراهانی





توزیع احتمالات توأم دو متغیره

- اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، توزیع احتمال برای وقـوع همزمـان آنها به صورت تابع دو متغیره $f_{X\,,\,Y}\left(x\,,\,y\right)$ نشان داده می‌شـود و آن را توزیع احتمال توأم X و Y گویند.

تابع چگالی احتمال توأم (**حالت گسسته**)

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابع چگالی توأم آن‌ها به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$f_{X\,,\,Y}\ (x,y) = P(X = x, Y = y)$$

یعنی $f_{X\,,\,Y}\left(x\,,\,y\right)$ احتمال این است که نتایج x و y به طور همزمان اتفاق بیفتند.

- تابع $f_{X\,,\,Y}\left(x\,,\,y\right)$ را یک تابع احتمال توأم برای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y گویند، هرگاه

۱) $f_{X\,,\,Y}\left(x\,,\,y\right) \geq ۰ \qquad \forall x \in R_X, y \in R_Y$

۲) $\sum_{R_Y}\sum_{R_X} f_{X\,,\,Y}\left(x\,,\,y\right) = ۱$

مثال ۱

- از ظرفی شامل ۴ مهره سفید، ۳ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه، ۲ مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X تعداد مهره‌های سفید و Y تعداد مهره‌های قرمز به دست آمده باشد. تابع چگالی احتمال (X , Y) را به دست آورید.

$\downarrow Y \;/\; X \rightarrow$	۰	۱	۲
۰	$\dfrac{\binom{۴}{۰}^{W}\binom{۳}{۰}^{R}\binom{۳}{۲}^{B}}{\binom{۱۰}{۲}}=\dfrac{۱}{۱۵}$	$\dfrac{\binom{۴}{۱}^{W}\binom{۳}{۰}^{R}\binom{۳}{۱}^{B}}{\binom{۱۰}{۲}}=\dfrac{۴}{۱۵}$	$\dfrac{\binom{۴}{۲}^{W}\binom{۳}{۰}^{R}\binom{۳}{۰}^{B}}{\binom{۱۰}{۲}}=\dfrac{۲}{۱۵}$
۱	$\dfrac{\binom{۴}{۰}^{W}\binom{۳}{۱}^{R}\binom{۳}{۱}^{B}}{\binom{۱۰}{۲}}=\dfrac{۳}{۱۵}$	$\dfrac{\binom{۴}{۱}^{W}\binom{۳}{۱}^{R}\binom{۳}{۰}^{B}}{\binom{۱۰}{۲}}=\dfrac{۴}{۱۵}$	۰
۲	$\dfrac{\binom{۴}{۰}^{W}\binom{۳}{۲}^{R}\binom{۳}{۰}^{B}}{\binom{۱۰}{۲}}=\dfrac{۱}{۱۵}$	۰	۰

مثال ۲

- در جعبه‌ای سه مهره با شماره ۱، سه مهره با شماره ۲ و سه مهره با شماره ۳ وجود دارد؛ سه مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کرده و X را مینیمم اعداد انتخاب شده و Y را ماکسیمم اعداد انتخاب شده در نظر می‌گیریم. تابع احتمال توأم (X , Y) را بیابید.

$Y\ /\ X$	۱	۲	۳
۱	$\frac{\binom{۳}{۳}^{۱}\binom{۳}{۰}^{۲}\binom{۳}{۰}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱}{۸۴}$	۰	۰
۲	$\frac{\binom{۳}{۱}^{۱}\binom{۳}{۲}^{۲}\binom{۳}{۰}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۲}^{۱}\binom{۳}{۱}^{۲}\binom{۳}{۰}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱۸}{۸۴}$	$\frac{\binom{۳}{۰}^{۱}\binom{۳}{۳}^{۲}\binom{۳}{۰}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱}{۸۴}$	۰
۳	$\frac{\binom{۳}{۱}^{۱}\binom{۳}{۰}^{۲}\binom{۳}{۲}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۱}^{۱}\binom{۳}{۱}^{۲}\binom{۳}{۱}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۲}^{۱}\binom{۳}{۰}^{۲}\binom{۳}{۱}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴۵}{۸۴}$	$\frac{\binom{۳}{۰}^{۱}\binom{۳}{۲}^{۲}\binom{۳}{۱}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۰}^{۱}\binom{۳}{۱}^{۲}\binom{۳}{۲}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱۸}{۸۴}$	$\frac{\binom{۳}{۰}^{۱}\binom{۳}{۰}^{۲}\binom{۳}{۳}^{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱}{۸۴}$

مثال ۳

- تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت مقابل است:

الف- مقدار k را بیابید.

$$f(x,y)=\frac{k}{x+y}, \qquad x=۰,۱,۲ \qquad y=۱,۲$$

ب- احتمال‌های زیر را به دست آورید.

$Y\ /X$	۰	۱	۲
۱	$\frac{k}{۰+۱}=k$	$\frac{k}{۱+۱}=\frac{k}{۲}$	$\frac{k}{۲+۱}=\frac{k}{۳}$
۲	$\frac{k}{۰+۲}=\frac{k}{۲}$	$\frac{k}{۱+۲}=\frac{k}{۳}$	$\frac{k}{۲+۲}=\frac{k}{۴}$

$$a.\quad ۱)\ k\ge ۰ \qquad ۲)\ k+\frac{k}{۲}+\frac{k}{۳}+\frac{k}{۲}+\frac{k}{۳}+\frac{k}{۴}=۱ \quad\Rightarrow\quad k=\frac{۱۲}{۳۵}$$

$$b.\quad P\left(X<Y\right)=P\left(X=۰,Y=۱\right)+P\left(X=۰,Y=۲\right)+P\left(X=۱,Y=۲\right)=\frac{k}{۱}+\frac{k}{۲}+\frac{k}{۳}=\frac{۲۲}{۳۵}$$

$$c.\quad P\left(XY<۲\right)=P\left(X=۰,Y=۱\right)+P\left(X=۰,Y=۲\right)+P\left(X=۱,Y=۱\right)=\frac{k}{۱}+\frac{k}{۲}+\frac{k}{۲}=\frac{۲۴}{۳۵}$$

تابع چگالی احتمال توأم (**حالت پیوسته**)

- تابع $f_{X\,,\,Y}\left(x\,,\,y\right)$ را یک تابع چگالی احتمال تـوأم متغیرهـای تصـادفی پیوسته X و Y گویند، هرگاه:

$$۱-\quad f_{X,\,Y}(x,\,y) \geq ۰ \qquad\qquad \forall x \in R_X\,, y \in R_Y$$

$$۲-\quad \int\limits_{R_Y}\int\limits_{R_X} f_{X,\,Y}\left(x,\,y\right) dx\;dy = ۱$$

مثال ۴

- فرض کنید X زمان واکنش (بر حسب ثانیه) نسبت بـه محـرک معینـی باشـد و Y درجه‌ی حرارتی (بر جسب فارنهایت) باشد که در آن واکنش معینی شروع مـی‌شـود. فرض کنید تابع چگالی توأم X و Y به صورت مقابل است:
- الف- مقدار a را محاسبه کنید. ب- احتمال زیر را به دست آورید.

$$f(x\ ,\ y) = a\ x\ y, \qquad ۰ < x < ۱ \qquad ۰ < y < ۱$$

- **راه‌حل**

$$۱)\quad a \geq ۰$$

$$۲)\quad \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱} a\ x\ y\ dx\ dy = a\int_{۰}^{۱} y\left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{x=۰}^{x=۱} dy = \frac{a}{۲}\left[\frac{y^{۲}}{۲}\right]_{۰}^{۱} = \frac{a}{۴} = ۱ \quad \Rightarrow \quad a = ۴$$

$$b.\ P\left(۰ < X < \frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۴} < Y < ۲\right) = \int_{\frac{۱}{۴}}^{۱}\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} a\ x\ y\ dx\ dy = a\int_{\frac{۱}{۴}}^{۱} y\left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{x=۰}^{x=\frac{۱}{۲}} dy = \frac{a}{۸}\left[\frac{y^{۲}}{۲}\right]_{\frac{۱}{۴}}^{۱} = \frac{۱۵}{۶۴}$$

مثال ۵

- ناحیه مربع شکل $1 < x < 0$ و $1 < y < 0$ با تـابع چگـالی مقابـل را در نظر بگیرید:
$f(x,y) = x + y$
احتمال $P\left(\frac{1}{2} < X < 1, 0 < Y < \frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

- **راه‌حل**

$$P\left(\frac{1}{2} < X < 1\,,\, 0 < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(x+y\right)\,dy\;dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[xy + \frac{y^{2}}{2}\right]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right)dx = \left(\frac{x^{2}}{4} + \frac{x}{8}\right)_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4}$$

مثال ۶

- تابع مقابل را در نظر بگیرید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx(1+2y), & 0<x<3\ ,\ 0<y<1 \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

الف- مقدار **c** را به گونه‌ای تعیین کنید که این تابع یک تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y باشد.

ب- احتمال $P(X+2Y\geq 3)$ را محاسبه کنید.

- **راه‌حل**

$$a.\quad \int_0^3\int_0^1 cx(1+2y)\,dy\,dx = c\int_0^3 x\left[y+y^2\right]_{y=0}^{y=1}dx = 2c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9c = 1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{c=\frac{1}{9}}$$

$$b.\quad P(X+2Y\geq 3)=\int_0^1\int_{3-2y}^{3} cx(1+2y)\,dx\,dy = c\int_0^1 (1+2y)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=3-2y}^{x=3}dy$$

$$=\frac{1}{18}\int_0^1 (1+2y)(-4y^2+12y)\,dy=\frac{1}{18}\int_0^1(-8y^3+20y^2+12y)\,dy$$

$$=\frac{1}{18}\left(-2y^4+\frac{20}{3}y^3+6y^2\right)_{y=0}^{y=1}=\frac{16}{27}$$

مثال ۷

- تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت مقابل مفروض است:

الف- تعیین مقدار k   ب- محاسبه‌ی P(X+Y<1)

$$f(x,y) = k\ x\ y^{۳}, \qquad ۰ < y < ۲x \qquad ۰ < x < ۱$$

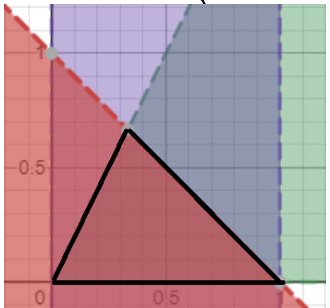
- راه‌حل

$a.\ \ ۱) \quad k > ۰$

$$۲) \quad \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۲x} k\ x\ y^{۳}\ dy\ dx = k\int_{۰}^{۱} x\left[\frac{y^{۴}}{۴}\right]_{y=۰}^{y=۲x} dx = k\int_{۰}^{۱} ۴\ x^{۵}\ dx = ۴k\left[\frac{x^{۶}}{۶}\right]_{x=۰}^{x=۱} = \frac{۴k}{۶} = ۱$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{۳}{۲}}$$

$$b. \quad P\left(X+Y<۱\right) = \int_{۰}^{\frac{۲}{۳}}\int_{\frac{y}{۲}}^{۱-y} k\ x\ y^{۳}\ dx\ dy = k\int_{۰}^{\frac{۲}{۳}} y^{۳}\left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{x=\frac{y}{۲}}^{x=۱-y} dy$$



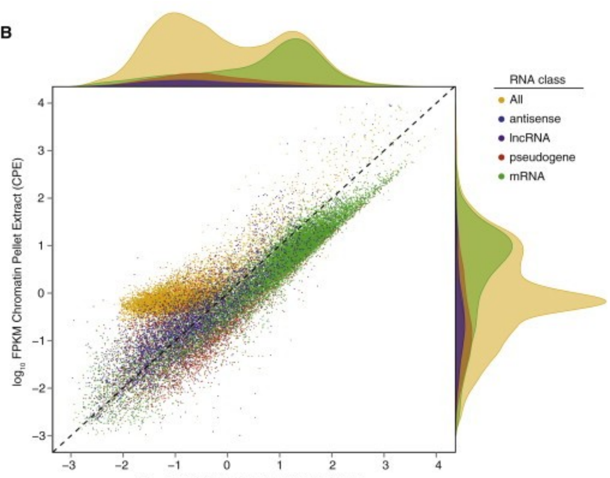
$$= \frac{۳}{۴}\int_{۰}^{\frac{۲}{۳}}\left(y^{۳} - ۲y^{۴} + \frac{۳}{۴}y^{۵}\right)dy = \frac{۳}{۲}\left(\frac{y^{۴}}{۴} - \frac{۲}{۵}y^{۵} + \frac{y^{۶}}{۸}\right)_{۰}^{\frac{۲}{۳}} = ???$$

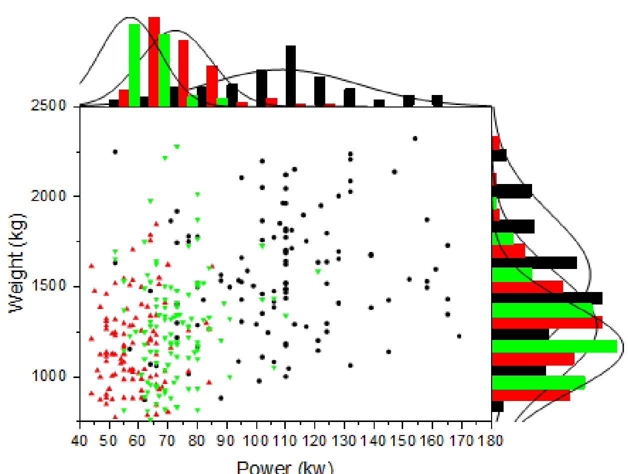
نحوه محاسبه‌ی احتمال (متغیرهای پیوسته توأم)

برای محاسبه این احتمال:

- ۱- ابتدا حدود تکیه‌گاه X و Y را در یک محور مختصات رسم می‌کنیم.
- ۲- سپس برای پیشامد مورد نظر خط مربوط به عبارت داخل پرانتز را (در حالت تساوی) رسم می‌کنیم.
- ۳- حال مشخص می‌کنیم که نقاط بالا یا پایین این خط را در حدود تکیه‌گاه در نظر بگیریم؛ آن را هاشور می‌زنیم.
- ۴- اگر بخواهیم انتگرال داخلی را بر حسب x بنویسیم، یک خط فرضی موازی محور xها رسم می‌کنیم؛ نقاط مینیمم و ماکسیمم برخورد این خط فرضی با ناحیه هاشور زده را مشخص کرده و آن‌ها را به عنوان کران‌های انتگرال داخلی می‌نویسیم.
- ۵- برای نوشتن حدود انتگرال خارجی، باید مقادیر مینیمم و ماکسیمم را از حدود تغییرات Y در ناحیه هاشور زده مشخص کنیم. توجه شود که حدود انتگرال خارجی هرگز نباید به X و Y وابسته باشد.

توزیع احتمالات حاشیه‌ای
یا
توزیع احتمالات کناری





توزیع احتمالات حاشیه‌ای (کناری)

- با داشتن تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم متغیرهای تصادفی X و Y می‌توان تابع احتمال X به تنهایی و Y به تنهایی را محاسبه کرد که به آنها توابع احتمال حاشیه‌ای (یا کناری) گویند.

توزیع احتمالات حاشیه‌ای (حالت گسسته)

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابع احتمال حاشیه‌ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{R_Y} P(X = x\ ,\ Y = y)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{R_X} P(X = x\ ,\ Y = y)$$

مثال ۸

- جعبه‌ای شامل ۳ مهره است که بر روی آن‌ها شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است. ۲ مهره یک‌به‌یک و بدون جایگذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر X را برابر شماره‌ی اولین مهره‌ی انتخاب شده از جعبه و Y را برابر شماره‌ی بزرگتر در بین دو مهره‌ی انتخابی در نظر بگیریم.
- الف- تابع احتمال توأم X و Y را بنویسید.

Y/X	1	2	3	$P(Y=y)$
2	$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$	0	$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+۰=\frac{۱}{۳}$
3	$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}\times۱=\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$
$P(X=x)$	$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$	$۰+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$	1

مثال ۸

- ب- توابع چگالی حاشیه‌ای X و Y را به دست آورید.

$$P(X=۱)=P(X=۱,Y=۲)+P(X=۱,Y=۳)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(X=۲)=P(X=۲,Y=۲)+P(X=۲,Y=۳)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(X=۳)=P(X=۳,Y=۲)+P(X=۳,Y=۳)=۰+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

$X=x_i$	۱	۲	۳
$P(X=x_i)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$

$$P(Y=۲)=P(X=۱,Y=۲)+P(X=۲,Y=۲)+P(X=۳,Y=۲)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+۰=\frac{۱}{۳}$$

$$P(Y=۳)=P(X=۱,Y=۳)+P(X=۲,Y=۳)+P(X=۳,Y=۳)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$Y=y_i$	۲	۳
$P(Y=y_i)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$

مثال

- تابع چگالی احتمال $(X\ ,\ Y)$به صورت زیر است. تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر X را حساب کنید.

$\downarrow Y / X \rightarrow$	۰	۱	۲	P(Y=y)
۰	۱/۱۵	۴/۱۵	۲/۱۵	۷/۱۵
۱	۳/۱۵	۴/۱۵	۰	۷/۱۵
۲	۱/۱۵	۰	۰	۱/۱۵
P(X=x)	۵/۱۵	۸/۱۵	۲/۱۵	

$$P(X=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)=\frac{1}{15}+\frac{3}{15}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}$$

$$P(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=\frac{4}{15}+\frac{4}{15}+0=\frac{8}{15}$$

$$P(X=2)=P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)=\frac{2}{15}+0+0=\frac{2}{15}$$

X=x	0	1	2
P(X=x)	5/15	8/15	2/15

توزیع احتمالات حاشیه‌ای (حالت پیوسته)

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}\left(x,y\right)dy$$

$$f_Y\left(y\right) = \int_{R_X} f_{X,Y}\left(x,y\right)dx$$

مثال ۹

- توابع چگالی کناری X و Y با چگالی توأم زیر را به دست آورید.

$$f(x,y) = \frac{۶-x-y}{۸}, \qquad ۰<x<۲\,,\quad ۲<y<۴$$

- **راه‌حل**

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{R_Y} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{۲}^{۴} \frac{۶-x-y}{۸}\,dy \\ &= \frac{۱}{۸}\left[۶y - xy - \frac{y^{۲}}{۲}\right]_{y=۲}^{y=۴} \\ &= \frac{۳-x}{۴}, \qquad ۰<x<۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{R_X} f(x,y)\,dx \\ &= \int_{۰}^{۲} \frac{۶-x-y}{۸}\,dx \\ &= \frac{۱}{۸}\left[۶x - \frac{x^{۲}}{۲} - yx\right]_{x=۰}^{x=۲} \\ &= \frac{۵-y}{۴}, \qquad ۲<y<۴ \end{aligned}$$

مثال ۱۰

- توابع چگالی کناری X و Y با چگالی توأم زیر را به دست آورید.

$$f(x,y) = \lambda\ x\ y^{۲}, \qquad ۰ \leq x \leq y \leq ۱$$

- **راه‌حل**

$$f_X\left(x\right) = \int_{R_Y} f\left(x,y\right)dy = \int_x^{۱} \lambda\ x\ y^{۲}\ dy = \lambda\ x\left[\frac{y^{۳}}{۳}\right]_{y=x}^{y=۱} = \frac{\lambda\ x\left(۱-x^{۳}\right)}{۳}, \qquad ۰ \leq x \leq ۱$$

$$f_Y\left(y\right) = \int_{R_X} f\left(x,y\right)dx = \int_{۰}^{y} \lambda\ x\ y^{۲}\ dx = \lambda\ y^{۲}\left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{x=۰}^{x=y} = \frac{\lambda\ y^{۴}}{۲}, \qquad ۰ \leq y \leq ۱$$

استقلال

استقلال متغیرهای تصادفی

- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}\left(x,y\right)$ و توابع احتمال حاشیه‌ای $f_X\left(x\right)$ و $f_Y\left(y\right)$ باشند. متغیرهـای تصـادفی X و Y را از لحاظ آماری مستقل گویند اگر و تنها اگر

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$$

- استقلال X و Y به معنی عدم تأثیر هر متغیر در توزیـع احتمـال متغیـر دیگر است (یعنی با دانستن مقدار یکـی از متغیرهـا، تغییـری در توزیـع متغیر دیگر به وجود نمی‌آید).

مثال ۱۱

- توزیع احتمال توأم بردار تصادفی(X , Y) به صورت زیر است. تحقیق کنید آیا X و Y از هم مستقل هستند؟

مثال ۱۱- الف (حالت گسسته)

$\downarrow Y \;/ X \rightarrow$	1	2	$f_Y(y)$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$f_X(x)$	1/2	1/2	1

برای بررسی استقلال دو متغیر، به ازای تمام خانه‌های جدول شرط استقلال را چک می‌کنیم؛ در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که برای همه‌ی نقاط شرط استقلال برقرار است. مثلاً:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

$$P(X=۱, Y=۱) = P(X=۱)P(Y=۱)$$

$$\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$$

پس X و Y مستقل هستند

مثال ۱۱- ب (حالت گسسته)

$\downarrow Y \;/ X \rightarrow$	1	2	$P(Y=y)$
0	1/9	2/9	1/3
1	1/18	4/9	1/2
2	1/6	0	1/6
$P(X=x)$	1/3	2/3	1

برای بررسی استقلال دو متغیر، به ازای تمام خانه‌های جدول شرط استقلال را چک می‌کنیم؛ در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که برای همه‌ی نقاط شرط استقلال برقرار نیست. مثلاً:

$$P\left(X=۱, Y=۱\right) \neq P\left(X=۱\right) \,.\, P\left(Y=۱\right)$$

$$\frac{۱}{۱۸} \neq \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}$$

پس X و Y مستقل نیستند

مثال ۱۱- ج (حالت پیوسته)

$$f(x,y) = ۱۲xy(۱-y), \qquad ۰ < x < ۱, \quad ۰ < y < ۱$$

- **راه‌حل**

$$f(x) = \int_۰^۱ f(x,y)\,dy = \int_۰^۱ ۱۲xy(۱-y)\,dy = ۱۲x\left[\frac{y^۲}{۲} - \frac{y^۳}{۳}\right]_{y=۰}^{y=۱} = ۱۲x\left[\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right] = ۲x$$

$$f(y) = \int_۰^۱ f(x,y)\,dx = \int_۰^۱ ۱۲xy(۱-y)\,dx = ۱۲y(۱-y)\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{x=۰}^{x=۱} = ۱۲y(۱-y)\left[\frac{۱}{۲} - ۰\right] = ۶y(۱-y)$$

$$f(x,y) = f(x)f(y) \qquad \Rightarrow \qquad ۱۲xy(۱-y) = ۲x \times ۶y(۱-y)$$

- پس X و Y مستقل هستند.

مثال ۱۱- د (حالت پیوسته)

$$f(x,y) = ۳xy, \qquad ۰ < x < ۱, \quad ۰ < y < ۲x^{۲}$$

- راه‌حل

$$f(x) = \int_{۰}^{۲x^{۲}} ۳xy\ dy = ۳x\left[\frac{y^{۲}}{۲}\right]_{y=۰}^{y=۲x^{۲}} = ۳x\left[\frac{\left(۲x^{۲}\right)^{۲}}{۲} - ۰\right] = ۶x^{۵}, \qquad ۰ < x < ۱$$

$$f(y) = \int_{\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{۱} ۳xy\ dx = ۳y\left[\frac{x^{۲}}{۲}\right]_{x=\sqrt{\frac{y}{۲}}}^{x=۱} = ۳y\left[\frac{۱}{۲} - \frac{\frac{y}{۲}}{۲}\right] = \frac{۳}{۴}y\left(۲-y\right), \qquad ۰ < y < ۲$$

$$f(x,y) = f(x)f(y) \qquad \Rightarrow \qquad ۳xy \neq ۶x^{۵} \times \frac{۳}{۴}y\left(۲-y\right)$$

پس X و Y مستقل نیستند.

توزیع‌های شرطی

تابع چگالی شرطی

احتمال شرطی

توزیع‌های شرطی (حالت گسسته)

فرض کنید

- X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه R_X و تابع جرم احتمال $P(X=x)$
- Y یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه R_Y و تابع جرم احتمال $P(Y=y)$
- فرض کنید $P(X=x\ ,\ Y=y)$ تابع احتمال توأم بردار $(X\ ,\ Y)$ باشد.

- وقتی مقدار Y معلوم باشد، به‌جای $P(X=x)$ از احتمال شرطی X با فرض معلوم بودن $Y=y$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$P\left(X=x \mid Y=y\right)=\frac{P\left(X=x\ ,Y=y\right)}{P\left(Y=y\right)}$$

✓**تذکر:** توجه کنید که $P(X=x|Y=y)$ خود یک تابع احتمال با مجموعه مقادیر R_X است.

مثال ۱۶

- فرض کنید تابع احتمال (X , Y) به صورت زیر باشد. مطلوب است تعیین احتمالات زیر:

$$P(x,y)=\frac{۱}{۱۵}(x+y),\qquad x=۰,۱,۲\quad y=۱,۲$$

- **راه‌حل**

$$P(X=x\mid Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{\frac{۱}{۱۵}(x+y)}{\frac{۱+y}{۵}}=\frac{۱}{۳}\times\frac{x+y}{۱+y}$$

$$P(Y=y)=\sum_{x=۰}^{۲}\frac{۱}{۱۵}(x+y)=\frac{۱}{۱۵}\left[(۰+y)+(۱+y)+(۲+y)\right]=\frac{۱+y}{۵}$$

$$\Rightarrow\quad P(X=۱\mid Y=۱)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱+۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\quad P(X=۰\mid Y=۲)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۰+۲}{۱+۲}=\frac{۲}{۹}$$

توزیع‌های شرطی (حالت پیوسته)

فرض کنید

- X یک متغیر تصادفی پیوسته با تکیه‌گاه R_X و تابع جرم احتمال f(x)
- Y یک متغیر تصادفی پیوسته با تکیه‌گاه R_Y و تابع جرم احتمال f(y)
- فرض کنید f(x , y) تابع احتمال توأم بردار (X , Y) باشد.

- زمانی که هیچ اطلاعی از مقدار Y نداریم، از $f_X(x) = \int_{R_Y} f(x,y)\, dy$ برای محاسبه‌ی احتمال پیشامدهای مربوط به X استفاده می‌کنیم.

- وقتی مقدار Y معلوم باشد، به‌جای f(x) از احتمال شرطی X با فرض معلوم بودن Y=y استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$f_{X \mid Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

نکته

- توجه کنید که $f\left(x \mid y\right)$ خود یک تابع چگالی احتمال با مجموعه مقادیر R_X است:

$$
\begin{aligned}
\int_{R_X} f\left(x \mid y\right) dx &= \int_{R_X} \frac{f\left(x\ ,\ \ y\right)}{f_Y\left(y\right)} dx \\
&= \frac{۱}{f_Y\left(y\right)} \int_{R_X} f\left(x\ ,\ \ y\right) dx \\
&= \frac{۱}{f_Y\left(y\right)} f_Y\left(y\right) \\
&= ۱
\end{aligned}
$$

مثال ۱۷

- فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم بردار تصادفی $(Y \ , \ X)$ به صورت زیر باشد. مطلوب است تعیین تابع چگالی شرطی زیر:

$$f\left(x,y\right)=\frac{۳}{۲}\left(x^{۲}+y^{۲}\right),\qquad ۰<x<۱,\quad ۰<y<۱$$

- **راه‌حل**

$$f\left(x \mid y\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x\ ,\ y\right)}{f_{Y}\left(y\right)}=\frac{\frac{۳}{۲}\left(x^{۲}+y^{۲}\right)}{\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳}+y^{۲}\right)}=\frac{x^{۲}+y^{۲}}{\frac{۱}{۳}+y^{۲}}$$

$$f_{Y}\left(y\right)=\int\limits_{R_X} f\left(x,y\right)\,dx=\int\limits_{۰}^{۱}\frac{۳}{۲}\left(x^{۲}+y^{۲}\right)\,dx$$

$$=\frac{۳}{۲}\left[\frac{x^{۳}}{۳}+y^{۲}x\right]_{x=۰}^{x=۱}=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳}+y^{۲}\right)$$

محاسبه‌ی احتمال شرطی

$$P\left(a \le X \le b \mid Y = c\right) = \begin{cases} \sum_{x=a}^{b} P\left(x \mid Y = c\right) \\ \int_{a}^{b} f\left(x \mid Y = c\right) dx \end{cases}$$

$$P\left(a \le X \le b \mid Y \ge c\right) = \frac{P\left(a \le X \le b\ ,\ \ Y \ge c\right)}{P\left(Y \ge c\right)} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{x=a}^{b} \sum_{y=c}^{\infty} P\left(X = x\ ,\ \ Y = y\right)}{\sum_{y=c}^{\infty} P\left(Y = y\right)} \\ \dfrac{\int_{a}^{b} \int_{c}^{\infty} f\left(x\ ,\ \ y\right) dy dx}{\int_{c}^{\infty} f_Y\left(y\right) dy} \end{cases}$$

مثال ۱۸

- فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم بردار تصادفی (X, Y) به صورت زیر باشد. مطلوب است تعیین احتمال شرطی $P\left(X \le ۲ \mid Y = ۱\right)$

$$f\left(x, y\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{y}, \qquad x\ , \ y = ۱, ۲, \ldots$$

- **راه‌حل**

$$***P\left(X \le ۲ \mid Y = ۱\right) = P\left(X = ۱ \mid Y = ۱\right) + P\left(X = ۲ \mid Y = ۱\right) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۳}{۴}$$

$$P\left(X = x \mid Y = y\right) = \frac{P\left(X = x, Y = y\right)}{P\left(Y = y\right)} = \frac{۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{y}}{۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^{y}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$$

$$P\left(Y = y\right) = \sum_{x=۱}^{\infty} ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{y} = ۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^{y}\left(\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}}{۱ - \frac{۱}{۲}}\right) = ۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^{y}$$

مثال ۱۹

- فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم بردار تصادفی (X, Y) به صورت جدول زیر باشد. مطلوب است تعیین احتمال شرطی $P(X \geq ۰ \mid Y \geq ۰)$

- **راه‌حل**

$\downarrow Y \;/ X \rightarrow$	۱-	۰	۲	$f_Y(y)$
۱-	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۵}{۱۶}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۹}{۱۶}$
۲	$\frac{۴}{۱۶}$	0	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۷}{۱۶}$

$$P(X \geq ۰ \mid Y \geq ۰) = P(X \geq ۰ \mid Y = ۲) = \frac{P(X \geq ۰ , Y = ۲)}{P(Y = ۲)}$$

$$= \frac{P(X = ۰ , Y = ۲) + P(X = ۲ , Y = ۲)}{P(Y = ۲)} = \frac{۰ + \frac{۳}{۱۶}}{\frac{۷}{۱۶}} = \frac{۳}{۷}$$

مثال ۲۰

- فرض کنید تابع چگالی احتمال شرطی متغیر تصادفی $X \mid Y = y$ به صورت زیر باشد. مطلوب است تعیین احتمال شرطی $P\left(X < ۱ \mid Y = ۲\right)$

$$f\left(x \mid y\right) = \frac{x + y}{۱ + y} e^{-x}, \qquad ۰ < x\ , y < \infty$$

- **راه‌حل**

$$P\left(X < ۱ \mid Y = ۲\right) = \int_{۰}^{۱} \frac{x + y}{۱ + y} e^{-x}\ dx$$

$$= \frac{۱}{۱ + ۲}\left[-e^{-x}\left(x + ۱ + ۲\right)\right]_{x=۰}^{x=۱}$$

$$= ۱ - \frac{۴}{۳e}$$

مثال ۲۱

- فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم بردار تصادفی (X , Y) به صورت زیر باشد. مطلوب است تعیین احتمال شرطی $P\left(Y > \frac{۱}{۲} \middle| X < \frac{۱}{۲}\right)$

$$f\left(x,y\right) = \frac{۶}{۷}\left(x^{۲} + \frac{xy}{۲}\right), \qquad ۰ < x < ۱\,,\, ۰ < y < ۲$$

- **راه‌حل**

$$P\left(Y > \frac{۱}{۲} \middle| X < \frac{۱}{۲}\right) = \frac{P\left(X < \frac{۱}{۲}, Y > \frac{۱}{۲}\right)}{P\left(X < \frac{۱}{۲}\right)} = \frac{\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \frac{۶}{۷}\left(x^{۲} + \frac{xy}{۲}\right) dx\ dy}{\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \frac{۶}{۷}\left(۲x^{۲} + x\right) dx} = \frac{\frac{۲۳}{۱۲۸}}{\frac{۵}{۲۴}} = \frac{۶۹}{۸۰}$$

$$f_X\left(x\right) = \int_{۰}^{۲} \frac{۶}{۷}\left(x^{۲} + \frac{xy}{۲}\right) dy = \frac{۶}{۷}\left[x^{۲}y + \frac{xy^{۲}}{۴}\right]_{y=۰}^{y=۲} = \frac{۶}{۷}\left(۲x^{۲} + x\right)$$

مثال ۲۲

- فرض کنید برای متغیرهای تصادفی X و Y داشته باشیم:

$$f_X(x) = a, \qquad ۰ < x < ۱$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = b, \qquad ۰ < x < ۱, \quad x < y < x + ۱$$

الف- مقادیر a و b را تعیین کنید.

ب- محاسبه $P\left(۱ < Y < ۲ \mid X = \frac{۱}{۲}\right)$

- راه‌حل

$$\int_{R_X} f_X(x)\,dx = ۱ \quad \Rightarrow \quad \int_۰^۱ a\ dx = ax\Big|_۰^۱ = a = ۱ \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = ۱}$$

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = f(y \mid x)\,f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = b \times a = b$$

$$\Rightarrow \quad \int_۰^۱ \int_x^{x+۱} b\ dy\ dx = b \int_۰^۱ y\Big|_{y=x}^{x=x+۱} dx = b\ x\Big|_۰^۱ = b = ۱ \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = ۱}$$

$$b. \quad P\left(۱ < Y < ۲ \mid X = \frac{۱}{۲}\right) = \int_۱^۲ f_{Y|X}\left(y \mid x = \frac{۱}{۲}\right) dy = \int_۱^{\frac{۳}{۲}} ۱\ dy = \frac{۱}{۲}$$

نکته:

- چنان‌چه X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در ایـن صـورت واضـح است که تابع احتمال شرطی $f_{X|Y}(x \mid y)$ با تابع چگـالی حاشـیه‌ای $f_X(x)$ برابر خواهد شد. زیرا:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \underline{\underline{ind}} \frac{f_X(x)\, f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

امید ریاضی

امید ریاضی تابعی از بردار تصادفی

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}\left(x\ ,\ y\right)$ باشند، امید ریاضی تابع $g(X\ ,\ Y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E\left[g\left(X,Y\right)\right]=\begin{cases}\sum\limits_{R_X}\sum\limits_{R_Y} g\left(X,Y\right)P\left(X=x,Y=y\right)\\ \\ \int\limits_{R_X}\int\limits_{R_Y} g\left(X,Y\right)f\left(x,y\right)dy\ dx\end{cases}$$

مثال ۱۲

- با توجه به جدول توزیع احتمال زیر مطلوبست:

الف- E(X+Y)

ب- E(XY)

ج- E(Y)

Y / X	1	2	3
0	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$
2	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$

$$E\left(X+Y\right)=\left[\left(۱+۰\right)\frac{۱}{۱۲}\right]+\left[\left(۲+۰\right)\frac{۱}{۶}\right]+\left[\left(۳+۰\right)\frac{۱}{۳}\right]+\left[\left(۱+۲\right)\frac{۱}{۴}\right]+\left[\left(۲+۲\right)\frac{۱}{۱۲}\right]+\left[\left(۳+۲\right)\frac{۱}{۱۲}\right]=\frac{۳۵}{۱۲}$$

$$E\left(XY\right)=\left[\left(۱\times ۰\right)\frac{۱}{۱۲}\right]+\left[\left(۲\times ۰\right)\frac{۱}{۶}\right]+\left[\left(۳\times ۰\right)\frac{۱}{۳}\right]+\left[\left(۱\times ۲\right)\frac{۱}{۴}\right]+\left[\left(۲\times ۲\right)\frac{۱}{۱۲}\right]+\left[\left(۳\times ۲\right)\frac{۱}{۱۲}\right]=\frac{۴}{۳}$$

$$E\left(Y\right)=\left[\left(۰\right)\frac{۱}{۱۲}\right]+\left[\left(۰\right)\frac{۱}{۶}\right]+\left[\left(۰\right)\frac{۱}{۳}\right]+\left[\left(۲\right)\frac{۱}{۴}\right]+\left[\left(۲\right)\frac{۱}{۱۲}\right]+\left[\left(۲\right)\frac{۱}{۱۲}\right]=\frac{۵}{۶}$$

مثال ۱۳

- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای چگالی احتمال توأم مقابل باشند. امید ریاضی $g(X,Y)=\frac{X+۱}{Y}$ را محاسبه کنید.

$$f(x,y)=\frac{۱۶y}{x^{۳}}, \qquad x>۲ \qquad ۰<y<۱$$

- **راه‌حل**

$$E\left(\frac{X+۱}{Y}\right)=\int_{۲}^{\infty}\int_{۰}^{۱}\frac{x+۱}{y}\times\frac{۱۶y}{x^{۳}}\,dy\,dx$$

$$=۱۶\int_{۲}^{\infty}\frac{x+۱}{x^{۳}}\times\left[y\right]_{۰}^{۱}\,dx$$

$$=۱۶\left[\frac{-۱}{x}-\frac{۱}{۲x^{۲}}\right]_{۲}^{\infty}$$

$$=۱۶\times\frac{۵}{۸}=۱۰$$

مثال ۱۴

- تابع احتمال توأم بردار تصادفی (X , Y) به صورت زیر داده شده است.
اگر $E(XY)=\frac{۹۶}{۲۵}$ باشد، a و b را به دست آورید.

Y/X	1	2
1	$\frac{۱}{۲۵}$	$\frac{۴}{۲۵}$
2	a	$\frac{۵}{۲۵}$
3	$\frac{۵}{۲۵}$	b

$$۱)\quad \frac{۱}{۲۵}+a+\frac{۵}{۲۵}+\frac{۴}{۲۵}+\frac{۵}{۲۵}+b=a+b+\frac{۱۵}{۲۵}=۱$$

$$\Rightarrow \quad a+b=\frac{۲}{۵}$$

$$۲)\quad E(XY)=\left[(۱\times ۱)\frac{۱}{۲۵}\right]+\left[(۲\times ۱)a\right]+\left[(۳\times ۱)\frac{۵}{۲۵}\right]+$$

$$+\left[(۱\times ۲)\frac{۴}{۲۵}\right]+\left[(۲\times ۲)\frac{۵}{۲۵}\right]+\left[(۳\times ۲)b\right]=$$

$$=۲a+۶b+\frac{۴۴}{۲۵}=\frac{۹۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \quad a+۳b=\frac{۲۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{۲}{۵} \\ a+۳b=\frac{۲۶}{۲۵} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a=\frac{۲}{۲۵} \\ b=\frac{۸}{۲۵} \end{array}$$

مثال ۱۵

- در مثال ۷ امید ریاضی $g(X,Y)=\frac{۱}{XY^۲}$ را به دست آورید.

$$f(x,y)=\frac{۳}{۲}\ x\ y^۳,\qquad ۰<y<۲x\qquad ۰<x<۱$$

- **راه‌حل**

$$E\left(\frac{۱}{XY^۲}\right)=\int_۰^۱\int_۰^{۲x}\frac{۱}{x\ y^۲}\times\frac{۳}{۲}\ x\ y^۳\ dy\ dx$$

$$=\frac{۳}{۲}\int_۰^۱\int_۰^{۲x} y\ dy\ dx\ =\ \frac{۳}{۲}\int_۰^۱\left[\frac{y^۲}{۲}\right]_{y=۰}^{y=۲x} dx$$

$$=\frac{۳}{۲}\int_۰^۱ ۲\ x^۲\ dx\ =\ \frac{۳}{۲}\left[\frac{۲x^۳}{۳}\right]_{x=۰}^{x=۱}=۱$$

قضیه

- مقدار مورد انتظار مجموع یا تفاضل دو یا چند تابع از متغیرهای تصادفی X و Y برابر با مجموع یا تفاضل مقادیر مورد انتظار تابع است:

$$E\left[g\left(X,Y\right)\pm h\left(X,Y\right)\right]=E\left[g\left(X,Y\right)\right]\pm E\left[h\left(X,Y\right)\right]$$

- **اثبات:**

$$\begin{aligned}E\left[g\left(X,Y\right)\pm h\left(X,Y\right)\right]&=\int_{R_Y}\int_{R_X}\left[g\left(X,Y\right)\pm h\left(X,Y\right)\right]f\left(x,y\right)dxdy\\&=\int_{R_Y}\int_{R_X}g\left(X,Y\right)f\left(x,y\right)dxdy\pm\int_{R_Y}\int_{R_X}h\left(X,Y\right)f\left(x,y\right)dxdy\\&=E\left[g\left(X,Y\right)\right]\pm E\left[h\left(X,Y\right)\right]\end{aligned}$$

- به عنوان مثال:

$$E\left[X^{۲}+۲XY-\frac{۵\,Y}{X^{۳}}\right]=E\left[X^{۲}\right]+۲E\left[XY\right]-۵E\left[\frac{Y}{X^{۳}}\right]$$

قضیه

- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند. در این صورت برای همه‌ی توابع حقیقی $g\left(X\right)$ و $h\left(Y\right)$

$$E\left[g\left(X\right)h\left(Y\right)\right]=E\left[g\left(X\right)\right]E\left[h\left(Y\right)\right]$$

- **اثبات:**

$$\begin{aligned}
E\left[g\left(X\right)h\left(Y\right)\right] &= \iint_R g\left(x\right)h\left(y\right)f\left(x,y\right)dxdy \\
&\underline{\underline{ind}}\iint_R g\left(x\right)h\left(y\right)f\left(x\right)f\left(y\right)dxdy \\
&= \int_{R_Y} h\left(y\right)f\left(y\right)\int_{R_X} g\left(x\right)f\left(x\right)dxdy \\
&= \int_{R_Y} h\left(y\right)f\left(y\right)dy\int_{R_X} g\left(x\right)f\left(x\right)dx \\
&= E\left[h\left(Y\right)\right]E\left[g\left(X\right)\right]
\end{aligned}$$

نکته

- اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه $E(XY)=E(X)E(Y)$

- **عکس قضیه‌ی قبل لزوماً برقرار نیست؛**
- به عنوان مثال فرض کنید مجموعه‌ی مقادیر متغیر تصادفی $R_X=\{-۱,۰,۱\}$ و تابع جرم احتمال آن $P\{-۱\}=P\{۰\}=P\{۱\}=\frac{۱}{۳}$ باشد. با فرض $Y=X^۲$

$$E(X)=\left[-۱\times\frac{۱}{۳}\right]+\left[۰\times\frac{۱}{۳}\right]+\left[۱\times\frac{۱}{۳}\right]=۰$$

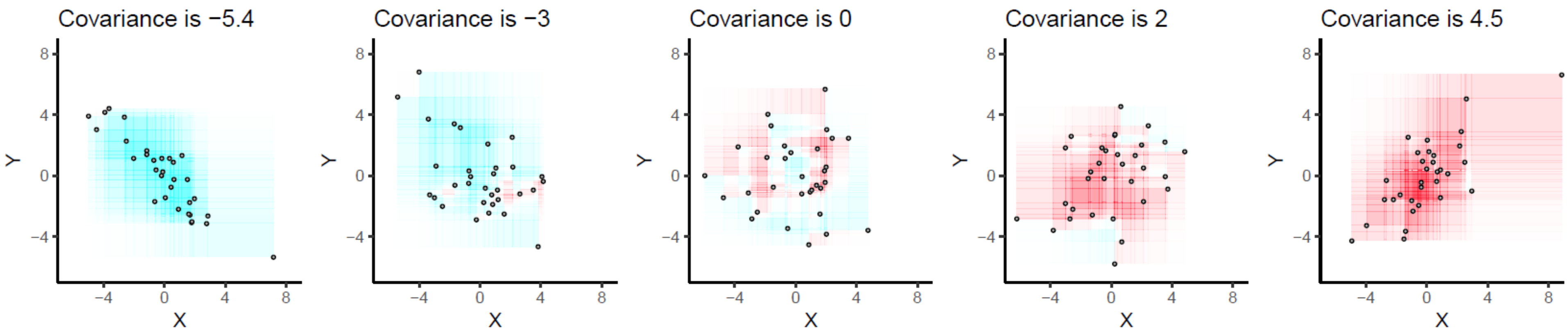
$$E(Y)=E(X^۲)=\left[۱\times\frac{۱}{۳}\right]+\left[۰\times\frac{۱}{۳}\right]+\left[۱\times\frac{۱}{۳}\right]=\frac{۲}{۳}$$

$$E(XY)=E(X^۳)=\left[-۱\times\frac{۱}{۳}\right]+\left[۰\times\frac{۱}{۳}\right]+\left[۱\times\frac{۱}{۳}\right]=۰$$

$$\Rightarrow \quad E(XY)=E(X)E(Y)$$

اما دو متغیر مستقل نیستند.

کوواریانس



Covariance is −5.4
Covariance is −3
Covariance is 0
Covariance is 2
Covariance is 4.5
X
Y

کوواریانس

- واریانس اندازه‌ی پراکندگی یا عدم تمرکز توزیع X پیرامون میانگین را نشان می‌دهد.
- مقادیر Var(X) و Var(Y) پراکندگی‌های X و Y را مستقلاً (نه به طور توأم) نشان می‌دهند.
- کوواریانس کمیتی است که اطلاعات مربوط به پراکندگی توأم X و Y را به دست می‌دهد. به عبارتی دیگر، این کمیت چگونگی تغییرات توأم X و Y را نشان می‌دهد.
- هرگاه X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، مقادیر آنها تحت تأثیر یکدیگر نبوده و ناهمبسته‌اند.
- حال اگر X و Y مستقل نباشند، نوع ارتباط یا همبستگی مقادیر آنها و همچنین میزان قدرت این همبستگی می‌تواند بوسیله‌ی **کوواریانس** X و Y اندازه‌گیری شود:

تعریف کوواریانس

- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع توأم باشند. در این صـورت کوواریانس X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E\Big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big] \\
&= E\Big[X\,Y - X\,E(Y) - Y\,E(X) + E(X)\,E(Y)\Big] \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

کوواریانس

- برای هر جفت متغیر تصادفی X و Y ممکن است کوواریانس مثبت، منفی و یا صفر باشد.

- مثبت بودن مقدار کواریانس نشان‌دهنده‌ی تغییرات هم جهت X و Y است (مثل سطح کلسترول خون هر فرد با مقدار چربی اشباع شده در بدن او)

- منفی بودن کوواریانس نشان‌دهنده‌ی همبستگی منفی یا معکوس بین X و Y است (مثل مقدار الکل موجود در خون یک نفر با نحوه‌ی رانندگی او)

- اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه $Cov(X , Y)=0$. اما عکس این گزاره درست نیست؛ یعنی دو متغیر تصادفی وابسته می‌توانند کوواریانس صفر داشته باشند.

نکته

- توجه کنید که $\mathrm{Cov}(X\ ,\ Y)=0$ تنها نشان‌دهنده‌ی عدم وجود همبستگی خطی بین X و Y است و ارتباط‌های غیرخطی هنوز ممکن است بین X و Y برقرار باشد.

- اگر دو متغیر X و Y مستقل باشند، آنگاه $\mathrm{Cov}(X\ ,\ Y)=0$
- اثبات:

$$Cov\left(X,\ Y\right) = E\left(XY\right) - E\left(X\right)E\left(Y\right)$$
$$\underline{\underline{indp}}\ E\left(X\right)E\left(Y\right) - E\left(X\right)E\left(Y\right)$$
$$= 0$$

مثال ۲۳ (حالت گسسته)

- تابع احتمال توأم X و Y به صورت زیر است. مطلوب است:
- الف- تعیین مقدار k ب- تعیین کوواریانس X و Y

$$f(x,y) = k(x+y), \qquad x = ۱,۲,۳ \qquad y = ۱,۲,۳$$

- راه‌حل

$X \backslash Y$	۱	۲	۳	$P(X=x)$
۱	۲k	۳k	۴k	۹k
۲	۳k	۴k	۵k	۱۲k
۳	۴k	۵k	۶k	۱۵k
$P(Y=y)$	۹k	۱۲k	۱۵k	۱

$$a) \quad k > ۰ \qquad \sum_{R_Y}\sum_{R_X} P\left(X=x, Y=y\right) = ۱ \Rightarrow ۹k + ۱۲k + ۱۵k = ۱ \Rightarrow k = \frac{۱}{۳۶}$$

$$b) \quad E\left(X\right) = \left(۱\times ۹k\right) + \left(۲\times ۱۲k\right) + \left(۳\times ۱۵k\right) = ۷۸k$$

$$E\left(Y\right) = \left(۱\times ۹k\right) + \left(۲\times ۱۲k\right) + \left(۳\times ۱۵k\right) = ۷۸k$$

$$E\left(XY\right) = \left(۱\times ۲k\right) + \left(۲\times ۳k\right) + \left(۳\times ۴k\right) + \ldots + \left(۹\times ۶k\right) = ۱۶۸k$$

$$Cov\left(X,Y\right) = E\left(XY\right) - E\left(X\right)E\left(Y\right) = \frac{۱۶۸}{۳۶} - \left(\frac{۷۸}{۳۶}\times\frac{۷۸}{۳۶}\right)$$

مثال ۲۴ (حالت پیوسته)

- فرض کنید X طول عمر یک دستگاه الکترونیکی و Y طول عمر یـک جـزء آن باشد. فرض کنید با از کار افتادن این جزء دستگاه از کار بیفتد. به‌علاوه، فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر باشد. کوواریـانس X و Y را بیابید.

$$f(x,y)=\frac{۱}{۴۹}e^{\frac{-y}{۷}}, \qquad ۰\le x\le y<\infty$$

- **راه‌حل**

$$E(X)=\int_۰^\infty\int_۰^y x\times\frac{۱}{۴۹}e^{\frac{-y}{۷}}\,dxdy=۷$$

$$E(Y)=\int_۰^\infty\int_۰^y y\times\frac{۱}{۴۹}e^{\frac{-y}{۷}}\,dxdy=۱۴$$

$$E(XY)=\int_۰^\infty\int_۰^y xy\times\frac{۱}{۴۹}e^{\frac{-y}{۷}}\,dxdy=۱۴۷$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=۱۴۷-(۷\times۱۴)$$

چند ویژگی کوواریانس

- $Cov\left(X\ ,Y\right)=Cov\left(Y,\ X\right)$

* $Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)=E\left(YX\right)-E\left(Y\right)E\left(X\right)=Cov\left(Y,X\right)$

- $Cov\left(X,\ X\right)=Var\left(X\right)$

* $Cov\left(X,X\right)=E\left(X\ .\ X\right)-E\left(X\right)E\left(X\right)=E\left(X^{۲}\right)-E^{۲}\left(X\right)=Var\left(X\right)$

- $Cov\left(aX\ ,Y\right)=a\ Cov\left(X\ ,Y\right)$

* $Cov\left(aX\ ,Y\right)=E\left(aX\ .Y\right)-E\left(aX\right)E\left(Y\right)=aE\left(XY\right)-aE\left(X\right)E\left(Y\right)=aCov\left(X\ ,Y\right)$

- $Cov\left(aX+b\ ,cY+d\right)=ac\ Cov\left(X\ ,Y\right)$

* $$Cov\left(aX+b\ ,cY+d\right)=E\left[\left(aX+b\right)\left(cY+d\right)\right]-E\left(aX+b\right)E\left(cY+d\right)$$
$$=E\left[acXY+adX+bcY+bd\right]-\left[aE\left(X\right)+b\right]\left[cE\left(Y\right)+d\right]$$
$$=acE\left[XY\right]-acE\left(X\right)E\left(Y\right)=acCov\left(X\ ,Y\right)$$

قضیه:

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم f(x,y) باشند، آن‌گاه:

$$Var\left(aX + bY\right) = a^{۲}\ Var\left(X\right) + b^{۲}\ Var\left(Y\right) + ۲\ a\ b\ Cov\left(X,Y\right)$$

$$\Rightarrow \quad Var\left(X + Y\right) = Var\left(X\right) + Var\left(Y\right) + ۲\ Cov\left(X,Y\right)$$

- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آنگاه

$$Var\left(aX \pm bY\right) = a^{۲}\ Var\left(X\right) + b^{۲}\ Var\left(Y\right)$$

مثال ۲۵

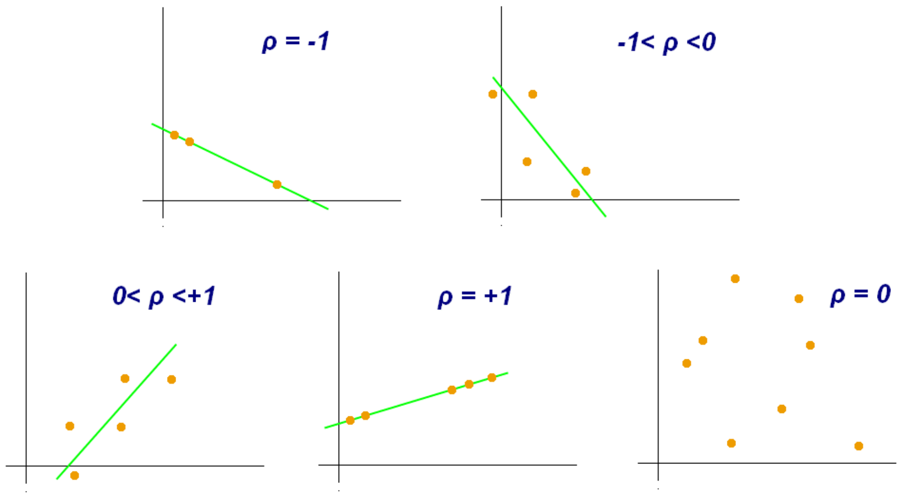
- فرض کنید X و Y میزان دو نوع ناخالصی در یک محصول شیمیایی باشد. با فرض اینکه $Var(X)=۲$ ، $Var(Y)=۳$ و $Cov(X,Y)=۱$ مقدار $Var(۳X-۲Y+۵)$ را محاسبه کنید.

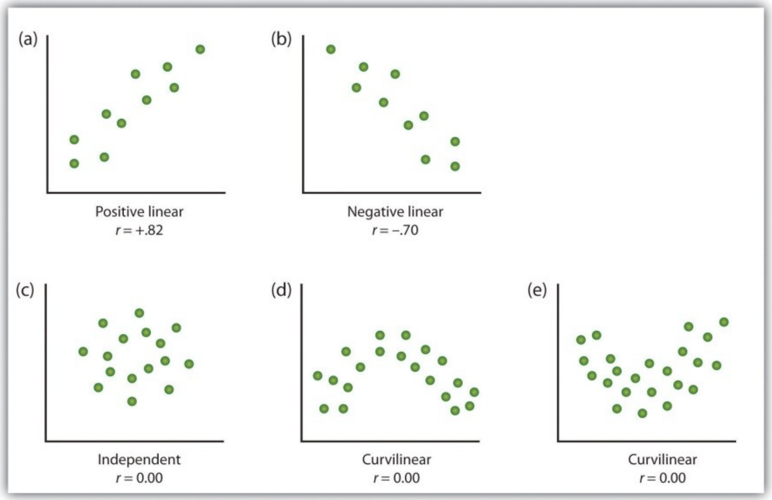
$$Var(۳X-۲Y+۵)=۹\,Var(X)+۴\,Var(Y)-۱۲\,Cov(X,Y)$$
$$=(۹\times۲)+(۴\times۳)-(۱۲\times۱)=۱۸$$

❋ اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه:

$$Var(۳X-۲Y+۵)=۹\,Var(X)+۴\,Var(Y)-۱۲\,Cov(X,Y)$$
$$=(۹\times۲)+(۴\times۳)-(۱۲\times۰)=۳۰$$

همبستگی


ρ = -1
-1< ρ <0
0< ρ <+1
ρ = +1
ρ = 0


(a)
Positive linear
r = +.82
(b)
Negative linear
r = −.70
(c)
Independent
r = 0.00
(d)
Curvilinear
r = 0.00
(e)
Curvilinear
r = 0.00

ضریب همبستگی

- کوواریانس X و Y را به عنوان معیاری برای تشخیص چگونگی ارتباط یا همبستگی و نیز قدرت همبستگی خطی میان مقادیر X و Y تعریف کردیم.

- اما کوواریانس سه نقص دارد که به‌ویژه در هنگام مقایسه‌ی میزان همبستگی بین دو یا چند دسته متغیر ما را دچار اشکال می‌کند. این سه نقص عبارتند از:

۱- وابستگی کوواریانس به واحدهای اندازه‌گیری متغیرها.

۲- نامحدود بودن مقادیر ممکن کوواریانس.

۳- عدم وابستگی کوواریانس به میزان پراکندگی مقادیر دو متغیر.

- برای رفع این نقص‌ها و بهبود بخشیدن به این معیار، به جای محاسبه‌ی کوواریانس X و Y، از کوواریانس استاندارد شده‌ی X و Y استفاده می‌کنیم.

ضریب همبستگی

- این کمیت جدید به همان خوبی قبل، میزانی است برای سنجش نوع و قدرت همبستگی متغیرهای تصادفی ولی عیوب را (سلاید قبل) ندارد.

- این کمیت را ضریب همبستگی X و Y می‌نامند و آن را با نماد $\rho_{X,Y}$ یا $Corr\left(X,Y\right)$ نشان می‌دهند:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sqrt{Var\left(X\right).Var\left(Y\right)}}$$

خواص ضریب همبستگی

- $-۱ \leq \rho_{X,Y} \leq +۱$

- $if\ X\ \&\ Y\ independent \Rightarrow \rho_{X,Y} = ۰$

- $\left|\rho_{X,Y}\right| = ۱$ اگر و تنها اگر یک رابطه‌ی خطی کامل بـین X و Y برقـرار باشـد؛ یعنی $Y = aX + b$. در این صورت
  - $\rho = +۱$ اگر و تنها اگر a>0
  - $\rho = -۱$ اگر و تنها اگر a<0

مثال آخر

فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند. ضریب همبستگی X و Y را به دست آورید.

$$f(x,y) = e^{-y}, \qquad 0 < x < y < \infty$$

- راه‌حل

$$f(y) = \int_0^y e^{-y}\, dx = y\, e^{-y}, \quad y > 0$$

$$f(x) = \int_x^\infty e^{-y}\, dy = e^{-x}, \quad x > 0$$

$$E(Y) = \int_0^\infty y^2\, e^{-y}\, dy = 2$$

$$E(X) = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = 1$$

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^3\, e^{-y}\, dy = 6$$

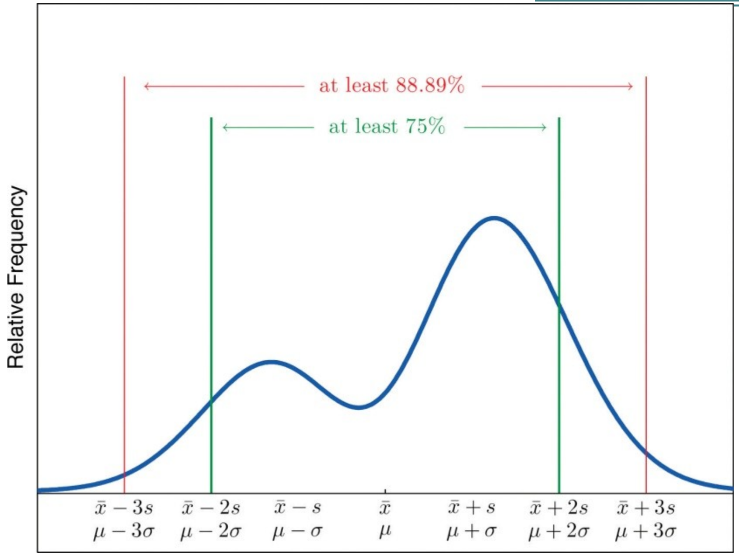
$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = 2$$

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^y x\, y\, e^{-y}\, dx dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^3\, e^{-y}\, dy = 3$$

$$Cov(X,Y) = 1 \qquad Var(X) = 1 \qquad Var(Y) = 2$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\, Var(Y)}} = 0/707$$

قضیه چبیشف



at least 88.89%
at least 75%
Relative Frequency
$\bar{x}-3s$ $\bar{x}-2s$ $\bar{x}-s$ $\bar{x}$ $\bar{x}+s$ $\bar{x}+2s$ $\bar{x}+3s$
$\mu-3\sigma$ $\mu-2\sigma$ $\mu-\sigma$ μ $\mu+\sigma$ $\mu+2\sigma$ $\mu+3\sigma$

نامساوی چبیشف

- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آن‌گاه به ازای هر t>0

$$P\left(\left|X-\mu\right| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^{۲}}{t^{۲}}$$

مثال

- اداره‌ی پست هر روز به طور متوسط ۱۰،۰۰۰ نامه را با واریانس ۲،۰۰۰ توزیع می‌کند. در مورد احتمال این‌که اداره‌ی پست فردا بین ۸،۰۰۰ تا ۱۲،۰۰۰ نامه را توزیع کند، چه می‌توان گفت؟
- **راه‌حل:**

$$p\left(۸۰۰۰ < X < ۱۲۰۰۰\right) = P\left(۸۰۰۰-۱۰۰۰۰ < X-۱۰۰۰۰ < ۱۲۰۰۰-۱۰۰۰۰\right)$$

$$= P\left(\left|X-۱۰۰۰۰\right| < ۲۰۰۰\right)$$

$$= ۱ - P\left(\left|X-۱۰۰۰۰\right| \geq ۲۰۰۰\right) \overset{**}{\geq} ۱ - ۰/۰۰۵$$

$$P\left(\left|X-۱۰۰۰۰\right| \geq ۲۰۰۰\right) \leq \frac{۲۰۰۰}{\left(۲۰۰۰\right)^{۲}} = ۰/۰۰۵ \qquad **$$

مثال

- فرض کنید می‌دانیم که تعداد محصولات تولید شده در یک کارخانه در طول هفته یک متغیر تصادفی با میانگین ۵۰ است. اگر واریانس تولید هفتگی برابر ۲۵ باشد، آنگاه در مورد احتمال این‌که محصول یک هفته معین بین ۴۰ تا ۶۰ باشد، چه می‌توان گفت؟

- راه‌حل

$$P\left(۴۰ < X < ۶۰\right) = P\left(۴۰ - ۵۰ < X - ۵۰ < ۶۰ - ۵۰\right) = P\left(\left|X - ۵۰\right| < ۱۰\right)$$

$$= ۱ - P\left(\left|X - ۵۰\right| \geq ۱۰\right) \overset{**}{\geq} ۱ - ۰/۲۵ = ۰/۷۵$$

$$P\left(\left|X - ۵۰\right| \geq ۱۰\right) \leq \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰/۲۵ \qquad **$$

مثال

- فرض کنید میانگین تعداد تصادفات در تقاطعی دو مـورد در روز اسـت. فـرض کنیـد واریانس تعداد تصادف‌ها ۲ مورد در روز باشد. احتمال این‌که فردا حداقل ۵ تصـادف رخ دهد، چه‌قدر است؟ (نامساوی چبیشف)

- **راه‌حل:**

$$P\left(X \geq ۵\right) = P\left(X - ۲ \geq ۳\right) = P\left(\left|X - ۲\right| \geq ۳\right) \leq \frac{۲}{۹} = ۰ / ۲$$

$$**\ Poisson\ Distribution: \quad P\left(X \geq ۵\right) = ۱ - ۰ / ۹۴۷۳ = ۰ / ۰۵۲۷$$

تذکر

- اهمیت نامساوی چبیشف در این است که ما را قادر می‌سازند هرگاه فقط میانگین و واریانس توزیعی معلوم باشد، کران‌هایی را روی مقادیر احتمال آن‌ها داشته باشیم.

- البته اگر توزیع معلوم باشد، آن‌گاه احتمال‌های مورد نظر دقیقاً قابل محاسبه هستند و لزومی برای مراجعه به کران‌ها وجود ندارد.