توجه ممکن است در
بعضی فایل های این
جزوه اشتباهاتی نیز باشد
با عرض پوزش

# معادلات دیفرانسیل ODE

۱۴۴۰ پنجشنبه ۱۴ رجب — 2019 فروردین ۹۸ Mar 21

آغاز نوروز (تعطیل)

استاد: دکتر مختار ایزدی

* مطابق نوت‌ها و کتاب درسی

نیم سال دوم ۰۰ - ۹۹

جلسه ۱ ۱۲ اسفند ۹۹

$y = f(x)$ — متغیر وابسته: $y$ ، متغیر مستقل: $x$

معادله دیفرانسیل (Differential equation) $x, y(x), y'(x), y''(x), \dots$

هر رابطه‌ای میان تابع، متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل گویند.

Ex.) $y(x) + y'(x) = x$ — یکی از جواب‌ها: $\{ y = x - 1$

Ex.) $y(x) + y''(x) = 0$ — یکی از جواب‌ها: $\begin{cases} y(x) = \sin x \\ y(x) = \cos x \end{cases}$

* معادلات دیف. → معمولی ODE : در معادله دیفرانسیل تابع مجهول تک متغیره Ordinary
→ با مشتقات جزئی PDE : " " " " " چند متغیره Partial

Ex.) PDE: $U(x,y,z) = ?$ $\quad U + U_x + U_y + U_z + U_{xx} = x + y + z$ $\quad \frac{\partial U}{\partial x} = U_x \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{xx}$

---

مثال) گوی با جرم $m$ از حال سکون به سمت زمین رها شده و نیروی مقاومت هوا متناسب با سرعت است. سرعت را به صورت تابعی از زمان بدست آورید. معادله حرکت گوی را نیز مشخص کنید.

$f = kv$ ، $m$ ، $mg$

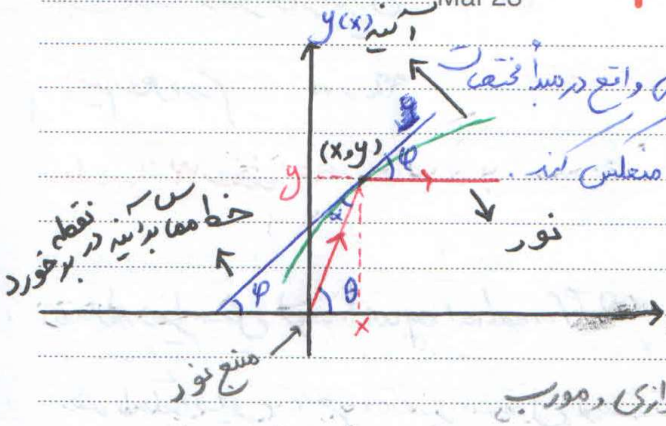
$f = kv \qquad F_T = mg - kv = ma \xrightarrow{m \neq 0} a = g - \frac{k}{m}v \qquad a + \frac{k}{m}v = g$

تابع سرعت $v(t)$ $\qquad a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \rightarrow v' + \underbrace{\boxed{\frac{k}{m}}}_{\text{ضریب}} v = g \;, \;\dots\; v(t)$

$\frac{dx}{dt} = v(t) \xrightarrow{\int dt} x(t)$

۱۴۴۰ جمعه ۱۵ رجب — 2019 فروردین ۹۸ Mar 22 — ۲

عید نوروز (تعطیل) - رحلت حضرت زینب (س) (۶۲ هـ ق)




مثال) معادله آینه مقعری را پیدا کنید که اگر از منبعی واقع در مبدأ مختصات به آن تابیده شود نور را موازی محور xها منعکس کند.

دو زاویه φ ایجاد شده به دلیل تقاطع خطوط موازی و مورب

$\alpha = \varphi$ به دلیل قانون بازتاب $y' = tg\,\varphi$ : شیب خط مماس $y(x)$ معادله منحنی آینه

$$\theta = \alpha + \varphi = 2\varphi$$

$$y' = tg\,\varphi \;,\; tg\,\theta = tg\,2\varphi = \frac{2tg\,\varphi}{1-tg^2\varphi} = \frac{2y'}{1-(y')^2}$$

$\theta$ در مثلث بازاویه : $tg\,\theta = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2} \longrightarrow y(x)$$

درباره حل معادله‌اش فعلاً بحث نمی‌کنیم!

× احتمال دارد ناقص باشد.

جلسه ۱۲ ۱۴ اسفند

حداقل مرتبه باید ۱ باشد تا معادله دیفرانسیل باشد.

order

مرتبه معادله دیفرانسیل: بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله گوئیم.

$y''+3(y')^2=4$ second order مرتبه ۲ $y^{(3)}+\sin(y')=y^3+(y')^4$ مرتبه ۳

$(y'')^3+x(y')^2=y^{(4)}$ مرتبه ۴

یک معادله جبری است $y^2-x^2=0 \rightarrow y=\pm x$ یک معادله جبری است $\leftarrow$ $0=x+3$

زیرا مشتق مرتبه اول یا مراتب بالاتر در آن ظاهر نشده است.

## دسته بندی جواب‌های معادله دیفرانسیل

$y'=x \xrightarrow{\int dx} y_g=\frac{x^2}{2}+c$ بی‌شمار جواب!

General Solution

I) جواب عمومی: ممکن است یک معادله دیفرانسیل دارای بیش از یک جواب باشد که همگی آنها تحت یک فرمول مشخص که شامل پارامتر یا پارامترهای دلخواه است، ارائه شود.

$y''=\sin x \xrightarrow{\int dx} y'=-\cos x+c_1 \xrightarrow{\int dx} y_g(x)=-\sin x+c_1x+c_2$

نکته مهم: تعداد ثابت‌ها در جواب عمومی معادله دیفرانسیل برابر با مرتبه معادله است.

Particular solution

II) جواب خصوصی: اگر جواب عمومی را تحت شرط یا شرایط خاص قرار دهیم و پارامترهای موجود در آن را به طور منحصر به فرد مشخص نمائیم جواب خصوصی بدست می‌آید.

Ex) جوابی را بیابید که از نقطه $(0,1)$ عبور کند؟ $y(0)=1$

$y'=x$

$y_g(x)=\frac{x^2}{2}+c \xrightarrow{y(0)=1} c=1$

$y_p(x)=\frac{x^2}{2}+1$

$y''=\sin x$

$y(0)=1$ $y'(0)=0$ از میان تمام جواب‌ها، جوابی را بیابید که از $(0,1)$ عبور کند و

$y_g(x)=-\sin x+c_1x+c_2 \xrightarrow{y(0)=1} c_2=1$

$y_g'(x)=-\cos x+c_1 \xrightarrow{y'(0)=0} c_1=1 \longrightarrow y_p(x)=-\sin x+x+1$

عید نوروز (تعطیل)

III) جواب غیرعادی Singular solution جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل جوابی است که تحت هیچ نوع شرط یا شرایطی

مشخص از جواب عمومی حاصل نمی شود.

نکته: می تواند نشان داد منحنی نمایش جواب غیرعادی بر تمام منحنی ها جواب عمومی مماس است،

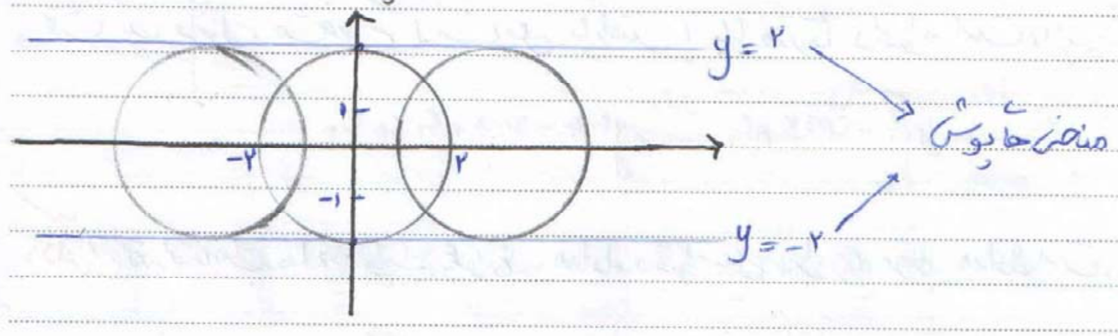
همچنین این جواب را منحنی پوش جواب ها عمومی معادله دیفرانسیل گوییم.

Ex) معادله دیفرانسیل $y^2(1+(y')^2)=4$ ، دارای جواب عمومی زیر است.

* مرتبه ۱ است پس یک ثابت دارد. دایره به مرکز $(c,0)$ $r=2$ $(x-c)^2+y^2=4$

برای اینکه ثابت کنیم جواب است یک بار مشتق می گیریم. $2(x-c)+2yy'=0 \to y'=-\frac{(x-c)}{y}$

و جایگذاری می کنیم. $y^2(1+y'^2)=y^2(1+\frac{(x-c)^2}{y^2})=4 \to y^2+(x-c)^2=4$



مثال) معادله دیفرانسیل $y=xy'+\frac{1}{y'}$ دارای جواب عمومی $y=cx+\frac{1}{c}$ می‌باشد؟

چرا؟

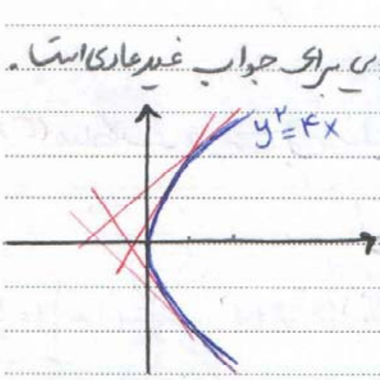
$y'=c \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y=cx+\frac{1}{c}$ ✓

ادعا می‌کنیم $y^2=4x$ جواب غیرعادی است.

$2yy'=4 \to y'=\frac{2}{y} \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

$y=\frac{2x}{y}+\frac{1}{2/y}=\frac{2x}{y}+\frac{y}{2} \to \frac{y}{2}=\frac{2x}{y} \to y^2=4x$ ✓

$y^2=4x$ از جواب عمومی به‌دست نمی‌آید پس $y^2=4x$ کاندیدایی برای جواب غیرعادی است.




همه خطوط مماس بر منحنی $y^2=4x$ هستند.

دسته‌بندی دیگر معادلات دیفرانسیل

## معادله دیفرانسیل خطی

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه $n$ به صورت زیر است:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=r(x)$$

که در آن $a_n(x),\dots,a_0(x)$ ضرایب معلوم هستند همچنین $r(x)$ نیز تابعی معلوم است.

در غیر این صورت معادله دیفرانسیل را غیرخطی گوییم. خطی $y''+x^2y=1$

تذکر: معادلات دیفرانسیل خطی جواب غیرعادی ندارند. $\sin(y')$ : غیرخطی $y^{(3)}+\sin(y')=x^2$

توان $y'$، ۱- است. ← غیرخطی $y=xy'+\frac{1}{y'}$

$yy'$ ظاهر شود غیرخطی $y(1+y')=4$ | توان $y'$، ۲ است و $yy'^2$ است. $y(1+y'^2)=4 \to$ غیرخطی

جلسه ۳ ۱۹ اسفند

## تشکیل معادله دیفرانسیل از روی جواب عمومی آن

فرض کنیم $y=F(x,c)$ یک دسته از منحنی ها باشند که در آن $c$ ثابت دلخواه است.
می خواهیم معادلهٔ دیفرانسیل را بیابیم که جواب آن $y=F(x,c)$ جواب عمومی آن باشد. بدین منظور باید از روابط زیر بتوان ثابت $c$ را حذف نمود.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F_x \ ^*$$

$$\begin{cases} y=F(x,c) \\ y'=\dfrac{\partial F(x,c)}{\partial x} \end{cases} \xrightarrow{\text{با حذف } c} \text{رابطه میان } y \text{ و } y' \text{ و } x \text{ حاصل می شود.}$$

تاکید بر مشتق گیری نسبت به $x$

Ex) معادلات دیفرانسیل نظیر منحنی های زیر را به دست آورید.

$$\text{I) } y=\overbrace{x^3+c}^{F(x,c)} \xrightarrow{d/dx} \boxed{y'=3x^2}$$

$$\text{II) } y=\underbrace{cx^2+1}_{F(x,c)} \xrightarrow{d/dx} y'=2cx \to \frac{y'}{2x}=c \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y=\frac{y'}{2x}(x^2)+1=\frac{xy'}{2}+1 \to \boxed{y=\frac{xy'}{2}+1}$$

تذکر: در حالتی که دسته منحنی داده شده به صورت زیر باشد: $y=F(x,c_1,c_2,c_3,\dots,c_n)$
آنگاه باید از معادلات زیر ثابت های $c_1$ تا $c_n$ را حذف نمائیم و به معادله دیفرانسیل موردنظر برسیم.

$$\left.\begin{aligned} y&=F(x,c_1,\dots,c_n) \\ y'&=\frac{\partial F(x,c_1,\dots,c_n)}{\partial x} \\ &\ \vdots \\ y^{(n)}&=\frac{\partial^n F(x,c_1,\dots,c_n)}{\partial x^n} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{با حذف } c} \text{رابطه میان } (x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

EX) معادلهٔ دیفرانسیل را بیابید.

I) $y=2x^2+c_1x+c_2 \xrightarrow{d/dx} y'=4x+c_1 \xrightarrow{d/dx} \boxed{y''=4}$

II) $y=(c_1+c_2x)e^x \xrightarrow{d/dx} \begin{cases} y'=c_2e^x+(c_1+c_2x)e^x \xrightarrow{d/dx} y''=\underbrace{c_2e^x}_{y'-y}+\underbrace{c_2e^x+(c_1+c_2x)e^x}_{y'} \\ y'=c_2e^x+y \to c_2e^x=y'-y \end{cases}$

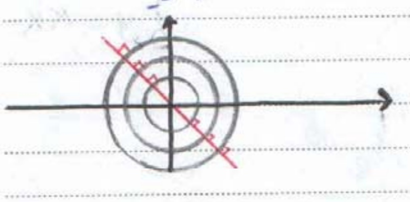
$y''=(y'-y)+y'=2y'-y \to \boxed{y''-2y'+y=0}$

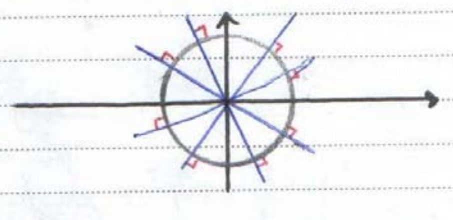
مسیرهای قائم orthognal trajectories (متعامد)

دو دسته منحنی $x^2+y^2=c$ و $y=Kx$ را درنظر بگیرید که در آن $K$, $c$ ثابت‌های دلخواه هستند.

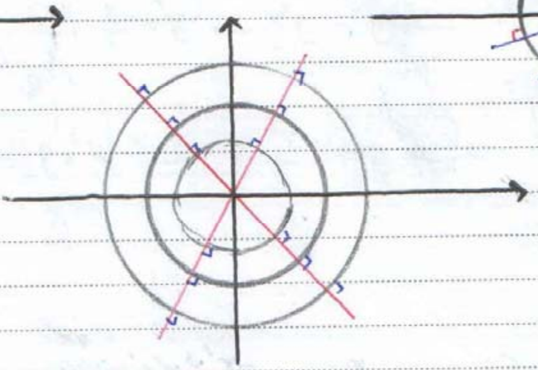
واضح است که هر منحنی از یک دسته بر تمام منحنی‌ها دستهٔ دیگر عمود است.

هرگاه چنین ارتباطی میان دو دسته برقرار باشد یک دسته را مسیرهای قائم دستهٔ دیگر گوییم.





$y_1'(x)\, y_2'(x)=-1$



* ابتدا معادله دیفرانسیل نظیر دسته منحنی داده شده را بدست می‌آوریم.

سپس در معادله دیف حاصل، $y'$ را با $-\frac{1}{y'}$ جایگذین می‌کنیم. جواب معادله دیف جدید همان مسیرهای قائم دسته منحنی اولیه می‌باشد.

EX) مسیرهای قائم دسته منحنی زیر را بدست آورید. $\{x^2+y^2=c$

$$x^2+y^2=c \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2x+2yy'=0 \xrightarrow{y'\to -\frac{1}{y'}} x+y\left(-\frac{1}{y'}\right)=0 \to y'=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \longrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \xrightarrow{\int} \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \to \ln y=\ln x+\overset{\ln K}{c}$$

$$\ln y=\ln x+\ln K=\ln Kx \longrightarrow y=Kx$$

روش یکی از دانشجوها:

$$\frac{y'}{x}=\frac{y}{x^2} \longrightarrow \frac{yx-y}{x^2}=0 \longrightarrow \frac{y}{x}=K \to y=Kx$$

$\{y=Kx$

$$y=Kx \xrightarrow{\frac{d}{dx}} y'=K \longrightarrow y=y'x \to y'=\frac{y}{x} \xrightarrow{y'\to -\frac{1}{y'}} -\frac{1}{y'}=\frac{y}{x} \to y'=-\frac{x}{y}$$

$$y\,dy=-x\,dx \xrightarrow{\int} \frac{y^2}{2}=\frac{-x^2}{2}+c \to x^2+y^2=c^*$$

* مختصات قطبی $(r,\theta)$ $r=F(\theta,c)$ $\frac{r}{r'} \to \frac{-r'}{r}$ جایگذین می‌شود.

درس معادلات دیفرانسیل

استاد: دکتر مختار انزدی

تمرینات سری ۱ «تحویلی»

$\underline{1}$ $y'' + 4y' + 5y = 0$ $\qquad y = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$

Ans.

$\xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -2\underbrace{e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)}_{y} + e^{-2x}(-A\sin x + B\cos x)$

$y' = -2y + e^{-2x}(-A\sin x + B\cos x) \rightarrow y' + 2y = e^{-2x}(-A\sin x + B\cos x)$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} y'' + 2y' = -2\underbrace{e^{-2x}(-A\sin x + B\cos x)}_{y'+2y} + \underbrace{e^{-2x}(-A\cos x - B\sin x)}_{-y}$

$y'' + 2y' = -2(y' + 2y) - y \rightarrow y'' + 4y' + 5y = 0$

حکم اثبات و تابع داده شده جواب معادله دیفرانسیل است.

$\underline{2}$ a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx = \int \frac{x^2-4+6}{(x+1)^3(x-2)}dx = \int \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)^3} + 6\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-2)}$

$\displaystyle = \int \frac{\overset{x+1+1}{x+2}}{(x+1)^3}dx + 6\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-2)} = \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x+1)^3} + 6\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-2)}$

$\displaystyle \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{2(x+1)^2} + c + 6I = \boxed{\frac{1}{27}\left(\ln^{|x-2|} - \ln^{|x+1|}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)^2} + C^*}$

$\displaystyle I = \int \frac{dx}{(x+1)^3(x-2)} = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2} + \frac{Ex^2+Fx+G}{(x+1)^3}dx$

$A = \frac{1}{27}$ $B = \frac{-1}{27}$ $C = 0$ $D = \frac{-1}{9}$ $E = 0$ $F = 0$ $G = \frac{-1}{3}$

$\displaystyle I = \frac{1}{27}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{27}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^3} =$

روز سلامتی

$\displaystyle I = \frac{1}{27}\ln^{x-2} - \frac{1}{27}\ln^{x+1} + \frac{1}{9(x+1)} + \frac{1}{6(x+1)^2} + C'$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx =$

$$\int \frac{x-1+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\left(\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}(x)}{2} + \frac{\ln(x-1)}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{4}$$

معادلات دیفرانسیل

دکتر مختار انزدی

I) مسیر های قائم دسته منحنی های زیر را بیابید.

$r^{-1} = \sin 2\theta + C$

$$\xrightarrow[\text{مشتق}]{d/d\theta} \frac{-r'}{r^2} = 2\cos 2\theta \longrightarrow \frac{-1}{r} = \frac{r}{r'}(2\cos 2\theta) \xrightarrow{\frac{r}{r'} \to \frac{-r'}{r}} \frac{-1}{r} = \frac{-r'}{r}(2\cos 2\theta)$$

$$\frac{1}{2\cos 2\theta} = r' = \frac{dr}{d\theta} \longrightarrow \frac{d\theta}{2\cos 2\theta} = dr \xrightarrow{\int} \int \frac{2d\theta}{4\cos 2\theta} = \int dr$$

$$\longrightarrow r = \frac{\ln(tg\, 2\theta + \sec 2\theta)}{4}$$

II) نشان دهید دسته منحنی $x^2 = 4C(y+C)$ خود متعامد است.

$$\xrightarrow{d/dx} 2x = 4Cy' \to x = 2Cy' \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 = 4C^2 y'^2 = 4C(y+C)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کردن}} Cy'^2 = y + C \to Cy'^2 - C = y \to C(y'^2 - 1) = y$$

$$x = 2Cy' \to \begin{cases} C = \frac{x}{2y'} \\ y' = \frac{x}{2C} \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{x}{2y'}(y'^2 - 1) = y \to \frac{xy'}{2} - \frac{x}{2y'} = y$$ معادله دیفرانسیل اولیه

معادله دیفرانسیل جدید

$$\xrightarrow[y' \to \frac{-1}{y'}]{\text{جایگذاری}} \frac{x}{2}\left(\frac{-1}{y'}\right) - \frac{x}{2\left(\frac{-1}{y'}\right)} = \boxed{\frac{xy'}{2} - \frac{x}{2y'} = y} \xrightarrow{\text{حل}} \frac{x}{2y'}(y'^2 - 1) = y$$

$$\xrightarrow[y' = \frac{x}{2C}]{} \frac{x}{2\left(\frac{x}{2C}\right)}\left(\frac{x^2}{4C^2} - 1\right) = y \to C\left(\frac{x^2 - 4C^2}{4C^2}\right) = y \to x^2 - 4C^2 = 4Cy$$

$$\boxed{x^2 = 4C(y+C)}$$

First order ODE

مقدمه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول       فرم کلی : $F(x,y,y')=0$

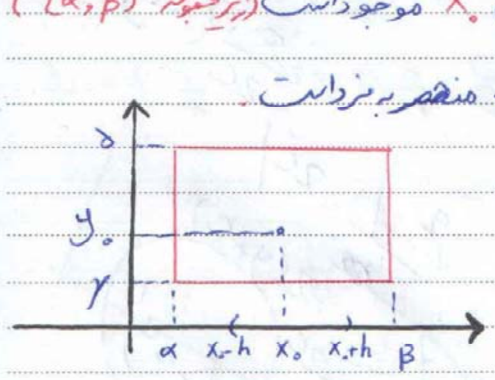
* برای جلوگیری از ابهام فرض می‌کنیم :       $y'=f(x,y)$ : فرم استاندارد

قضیه : فرض کنیم توابع $f(x,y)$ و $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ در مستطیل $\alpha<x<\beta$ , $\gamma<y<\delta$ : R

که شامل $(x_0,y_0)$ است، پیوسته است.

در اینصورت همسایگی $x_0-h<x<x_0+h$ حول $x_0$ موجود است (زیرمجموعه $[\alpha,\beta]$)

بطوری که در آن مسئله $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ دارای جواب منحصر به فرد است.




Ex) $\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$       $f(x,y)=x^2+y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$

در هر مستطیلی که شامل (۱،۰) می‌باشد پیوسته هستند

بنابراین همسایگی حول صفر موجود است بطوری که مسئله بالا در این

همسایگی دارای جواب یکتاست.

$y'=2xy^2 \to y=\frac{1}{1-x^2}$       $(-1,1)$

$\begin{cases} y'=\sqrt{y} \\ y(0)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{پیوستگی ندارد}} \begin{cases} y_1=0 \\ y_2=\frac{x^2}{4} \end{cases}$ جواب منحصر به فرد ندارد

Ex) بزرگترین بازه‌ای که مسئله زیر دارای جواب منحصربفرد در آن است را بیابید.

$$\begin{cases} x(x-4)y' + y = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

$$y' = \underbrace{\frac{-y}{x(x-4)}}_{f(x,y)}$$

$x_0 = 2 , y_0 = 1$

بازه جواب : $(0, 4)$

$x=0 , x=4$ نقاط ناپیوستگی

نکته خارج از بحث: در $\mathbb{R}$ جواب ندارد. $y'^2 + 1 = 0$ $\quad y^2 + y'^2 = 0 \Longrightarrow y(x) = 0$

جلسه چهارم ۱۱ اسفند

* معادلات دیفرانسیل مرتبه اول First order ODE

فرم استاندارد این معادلات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: $y' = f(x,y) \rightarrow \frac{dy}{dx}$

می‌توان به صورت روبرو نیز نوشت: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

I) معادلات جداپذیر Separable DE

معادله دیف $y' = f(x,y)$ را جداپذیر گوییم هرگاه بتوان نوشت $f(x,y) = g(x)h(y)$ همچنین در فرم $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ معادله را جداپذیر گوییم هرگاه بتوان نوشت:

$M(x,y) = g_1(x)\,h_1(y)$

$N(x,y) = g_2(x)\,h_2(y)$

در اینصورت این معادلات را می‌توان پس از مرتب سازی با انتگرال گیری حل نمود.

روز طبیعت (تعطیل)

(Ex) I) $y' = \dfrac{x(1+y)}{y(x+2)} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(1+y)}{y(x+2)} \longrightarrow \dfrac{y}{1+y}\,dy = \dfrac{x\,dx}{x+2} \xrightarrow{\int}$

$$\int \frac{1+y-1}{1+y}\,dy = \int 1 - \frac{1}{1+y}\,dy = y - \ln(1+y) = \int \frac{x+2-2}{x+2}\,dx = x - 2\ln(x+2) + C$$

جواب عمومی: $y - \ln|1+y| = x - 2\ln|x+2| + C$

II) $y' = \dfrac{1+y^2}{2y(1+x^2)}$ $\quad \dfrac{dy}{dx}$ $\quad \dfrac{y}{1+y^2}\,dy = \dfrac{1}{x(1+x^2)}\,dx \xrightarrow{\int}$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

جواب عمومی $(1+y^2)(1+x^2) = Cx^2 \longrightarrow 1+y^2 = \dfrac{Cx^2}{1+x^2} \longrightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{Cx^2}{1+x^2} - 1}$

تذکر) معادلات به فرم $y' = f(ax+by+c)$ که در آنها $a, b, c$ ثابت هستند جداپذیر نمی‌باشند.

اما با تغییر متغیر زیر می‌توان آنها را به معادلات جداپذیر تبدیل نمود:

$$U = ax+by+c \xrightarrow{d/dx} U' = a+by' \longrightarrow y' = \frac{1}{b}(U'-a) \quad \boxed{b \neq 0}$$

جایگذاری $\quad \dfrac{1}{b}(U'-a) = f(U) \longrightarrow U' = bf(U) + a$

(Ex.) I) $y' = 1 + \frac{1}{x-y}$

(I) $u = x - y \xrightarrow{d/dx} u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$

$1 - u' = 1 + \frac{1}{u} \to u' = \frac{-1}{u} = \frac{du}{dx} \to -u\,du = dx \xrightarrow{\int} \frac{-u^2}{2} = x + C$

$\to u^2 + 2x = C \to (x-y)^2 + 2x = C$   : جواب عمومی

II) $y' = tg(x+y) - 1$

(II) $u = x+y \xrightarrow{d/dx} u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$

$u' = tg\,u = \frac{du}{dx} = tg\,u \to \frac{du}{tg\,u} = dx \xrightarrow{\int} \ln(\sin u) = x + C$

$\to \ln|\sin(x+y)| = x + C$

یادآوری*

تابع همگن: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه $n \in \mathbb{Z}$ گوییم هرگاه $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

## II معادلات همگن Homogeneous

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را همگن گوییم هرگاه توابع $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ را همگن از یک درجه باشند

یا به طور معادل معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ را همگن گوییم هرگاه $f(x,y)$ تابعی همگن از درجه $n=0$ باشد.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$   همگن $\lambda$ $n=0$

$-\frac{\lambda^n}{\lambda^n}\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$

Ex. $f(x,y) = x^3 + 5xy^2 + 2y^3$

Ans. همگن از درجه $n=3$

$f(x,y) = x\sin\frac{x}{y}$

Ans. $n=1$ همگن

ناهمگن $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos y$

همگن از درجه $n=0$   $f(x,y) = tg\frac{y}{x}$

$f(x,y) = \frac{1}{xy}$   $n=-2$ " "

جلسه پنجم ۱۱۶ اسفند

ادامه تدریس معادلات دیف همگن

تذکر: اگر $f(x,y)$ تابعی همگن از درجه n باشد داریم: $f(x,y)=x^n f(1,\frac{y}{x})$

Ex. $f(x,y)=x^3+3x^2y+y^3=x^3\underbrace{\left(1+\frac{3y}{x}+\frac{y^3}{x^3}\right)}_{f(1,\frac{y}{x})}$ $(n=3)$

می دانیم $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n(f(x,y))$ با فرض اینکه $\lambda=\frac{1}{x}$ داریم:

$f(1,\frac{y}{x})=\frac{1}{x^n}f(x,y)\Longrightarrow f(x,y)=x^n f(1,\frac{y}{x})$

به طور مشابه می توان نشان داد:

$f(x,y)=y^n f(\frac{x}{y},1)$

حل معادلات دیفرانسیل همگن

معادله دیف همگن را می توان با تغییر متغیر ($y=xv$) ، $\frac{y(x)}{x}=v(x)$ به معادله جداپذیر تبدیل نمود.

با توجه به اینکه $f(x,y)$ تابعی همگن از درجه صفر است می توان نوشت

$y'=f(x,y)\Longrightarrow y'=f(1,\frac{y}{x})$

با فرض $\frac{y}{x}=v$ :

$y=xv\Longrightarrow y'=v+xv'\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{} v+xv'=f(1,v)$

$\Longrightarrow xv'=f(1,v)-v$ جداپذیر $\Longrightarrow \frac{dv}{f(1,v)-v}=\frac{dx}{x}$

$v'=\frac{dv}{dx}$

$\int$

مثال معادلات را حل کنید.

I) $\underbrace{(x^2-y^2)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{2xy}_{N(x,y)}\,dy=0$

قدم دیگر: $y' \leftarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy} \rightarrow f(x,y)$

توابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ هر دو همگن از درجه $n=2$ می‌باشند بنابراین معادله همگن است.

لذا فرض می‌کنیم $y=xv$ 　 $y=xv \longrightarrow dy=x\,dv+v\,dx$

با جایگذاری خواهیم داشت: $(x^2-x^2v^2)\,dx+2x^2v(x\,dv+v\,dx)=0$

$\xrightarrow{\div x^2} (1-v^2)dx+2xv\,dv+2v^2dx=0$

$\longrightarrow (1+v^2)\,dx=-2xv\,dv \longrightarrow \left(\dfrac{dx}{x}\right)=-\dfrac{2v\,dv}{1+v^2}$

$\xrightarrow{\int} \ln x=-\ln^{1+v^2}+\ln c \rightarrow \ln x+\ln^{1+v^2}=\ln c$

$x(1+v^2)=c \xrightarrow{v=\frac{y}{x}} x\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)=c \rightarrow \boxed{y^2+x^2=cx}$ جواب عمومی

---

II $\underbrace{\dfrac{y}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)}_{M(x,y)}dx-\underbrace{\left(\dfrac{x}{y}\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)+\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)}_{N(x,y)}dy=0$

$M,N$ توابع همگن از درجه $n=0$ می‌باشند بنابراین معادله دیف همگن است. فرض می‌کنیم: $y=xv$

$v\cos v\,dx-\left(\dfrac{1}{v}\sin v+\cos v\right)(x\,dv+v\,dx)=0$

$\dfrac{x}{v}\sin v\,dv+\sin v\,dx+x\cos v\,dv=0$

$x\left(\dfrac{\sin v}{v}+\cos v\right)dv=-\sin v\,dx \longrightarrow \left(\dfrac{1}{v}+\cot v\right)dv=-\dfrac{dx}{x}$

$\xrightarrow{\int} \ln^{v}+\ln^{\sin v}=-\ln^{x}+\ln^{c} \longrightarrow xv\sin v=c$

$y=xv \longrightarrow \boxed{y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)=c}$ 　 جواب عمومی

$y' = f\left(\dfrac{ax+by}{ex+hy}\right)$ ‎a، b، e، h ثابت دلخواه

معادلات فوق از نوع همگن می‌باشند امّا با اضافه شدن ثابت به صورت و مخرج خاصیت همگن بودن معادله از بین می‌رود.

$y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{ex+hy+d}\right)$ ناهمگن

(a، b، c، d، e، h ثابت دلخواه)

معادلات فوق را می‌توان تبدیل به همگن نمود. فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ex+hy+d=0 \end{cases}$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

I) دو خط متقاطع باشند (شیب نابرابر) $\left(\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{e}{h}\right)$

II) " موازی " ( " برابر) $\left(\dfrac{a}{b} = \dfrac{e}{h}\right)$

I) برای حالت I فرض می‌کنیم $(x_0, y_0)$ محل برخورد دو خط باشند تعریف می‌کنیم $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \xrightarrow[dy = dY]{dx = dX} y' = f\left(\dfrac{a\overbrace{x}^{X+x_0}+b\overbrace{y}^{Y+y_0}+c}{e\underbrace{x}_{X+x_0}+h\underbrace{y}_{Y+y_0}+d}\right) \longrightarrow \boxed{\dfrac{dY}{dX} = f\left(\dfrac{aX+bY}{eX+hY}\right)}$$

معادله همگن

$(Y = XV)$

(II) در حالت II با فرض اینکه دو خط موازی باشند می‌توان از تغییر متغیر زیر استفاده نمود.

در این حالت با تغییر متغیر $U=ax+by$ یا $U=ex+hy$ می‌توان معادله را مستقیماً به معادله جدایی‌پذیر تبدیل کرد.

$$U=ax+by \xrightarrow{d/dx} U'=a+by' \longrightarrow y'=\frac{1}{b}(U'-a) \quad (b\neq 0)$$

با جایگذاری در معادله می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{b}(U'-a)=f\left(\frac{U+c}{\frac{h}{b}U+d}\right)$$

$$U'=b\,f\left(\frac{U+c}{\frac{h}{b}U+d}\right)+a \qquad \text{(جدایی‌پذیر)}$$

Ex) معادلات را حل کنید.

(I) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$

$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3 \end{cases}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{1(X+1)+(Y-3)+2}{1(X+1)-(Y-3)-4} = \frac{X+Y}{X-Y}$

$\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+3 \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{همگن}]{Y = XV} V + X\frac{dV}{dX} = \frac{1+V}{1-V} \rightarrow \frac{X}{dX}dV = \frac{1+V^2}{1-V}$

$\longrightarrow \frac{1-V}{1+V^2}dV = \frac{dX}{X} \xrightarrow{\int}$

$\Longrightarrow tg^{-1}(V) - \frac{1}{2}\ln(1+V^2) + C = \ln X$

$\rightarrow \ln^{x-1} = tg^{-1}\frac{y+3}{x-1} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+3}{x-1}\right)^2\right)$ جواب عمومی

(II) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x+2\sin y-3}{(2x-4\sin y-3)\cos y}$ $\quad (x-2\sin y+3)dx + (2x-4\sin y-3)\cos y\,dy = 0$

$Z := \sin y \rightarrow dZ = \cos y\,dy \longrightarrow \left(\frac{dZ}{dx} = \frac{-x+2Z-3}{2x-4Z-3}\right)^*$ $\begin{cases} -x+2Z-3=0 \\ 2x-4Z-3=0 \end{cases}$ دوخط موازی

فرض میکنیم: $V := -x+2Z-3 \longrightarrow V' = -1+2Z' \Rightarrow Z' = \frac{1}{2}(1+V')$

$Z' = \frac{dZ}{dx} = \frac{V-3}{-2V-3} \longrightarrow \frac{1}{2}(1+V') = \frac{V-3}{-2V-3} \rightarrow V' = \frac{4V-3}{-2V-3}$ جدایی

$\frac{-2V-3}{4V-3}dV = dx \xrightarrow{\int} 9\ln|4V-3| + 4V = -8x + C$

$\begin{cases} V = -x+2Z-3 \\ Z = \sin y \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه}} V = -x+2\sin y-3$

معادلات دیفرانسیل کامل Exact DE

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل گوئیم هرگاه تابع $\varnothing(x,y)$ موجود باشد

به طوری که $\frac{\partial \varnothing}{\partial x}=M(x,y)$ , $\frac{\partial \varnothing}{\partial y}=N(x,y)$

در این حالت $\varnothing(x,y)=C$ جواب عمومی معادله است.

چرا؟ $\varnothing(x,y)=C \xrightarrow{d/dx} \frac{\partial \varnothing}{\partial x}+\frac{\partial \varnothing}{\partial y}\times\frac{dy}{dx}=0$

$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ✓

تذکر: فرض کنیم توابع $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ ، $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ , $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ در ناحیه $R$ از صفحه پیوسته باشند. در اینصورت معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ در $R^*$ کامل است اگر و تنها اگر به ازای هر $(x,y)\in R^*$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M_y=N_x$$

**اثبات**

فرض می‌کنیم معادله کامل باشد. نشان می‌دهیم $M_y = N_x$ : چون معادله کامل است

بنابر تعریف تابع $\phi(x,y)$ موجود است بطوریکه

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y) \xrightarrow{\partial/\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = M_y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y) \xrightarrow{\partial/\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = N_x$$

با توجه به پیوستگی عبارات سمت چپ برابرند درنتیجه $M_y = N_x$

**بالعکس**

فرض می‌کنیم $M_y = N_x$ نشان می‌دهیم معادله کامل است. باید تابع $\phi$ را بطوری بیابیم که

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = N \end{cases} \xrightarrow{\int dx} \phi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \underbrace{h(y)}_{\text{ثابت انتگرال‌گیری نسبت به } x}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \int M_y(x,y)\,dx + h'(y) \xlongequal{\frac{\partial \phi}{\partial y} = N} N(x,y)$$

$$h'(y) = N(x,y) - \int M_y(x,y)\,dx$$

عبارت سمت راست مستقل از $x$ است و تنها تابعی از $y$ است زیرا:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \int M_y(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$N_x(x,y) - M_y(x,y) = 0$$



درنتیجه با انتگرال‌گیری نسبت به $y$، تابع $h(y)$ معلوم می‌شود.

مثال)

$$I)\ \underbrace{(x^2-y^2)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{2xy}_{N(x,y)}dy=0$$

معادله کامل نیست!

$$M_y=-2y \neq N_x=2y$$

$$(y\cos x+2xe^y)dx+(\sin x+x^2e^y-1)dy=0$$

$$M_y=\cos x+2xe^y = N_x=\cos x+2xe^y$$ معادله کامل است.

بنابراین تابع $\phi(x,y)$ موجود است زیرا:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M(x,y)=y\cos x+2xe^y$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=N(x,y)=\sin x+x^2e^y-1 \quad *$$

با انتگرال گیری از رابطه اول داریم:

$$\phi(x,y)=y\sin x+x^2e^y+h(y)$$

مشتق عبارت فوق را مساوی طرف راست رابطه * قرار می‌دهیم.

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\sin x+x^2e^y+h'(y)\stackrel{*}{=}\sin x+x^2e^y-1$$

$$\longrightarrow h'(y)=-1 \xrightarrow{\int dy} h(y)=-y+c$$

$$y\sin x+x^2e^y-y=c$$

Ex) $(4x^3\sin^3 y - 2x\sin y)\,dx + (3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y\,dy = 0$

$M_y = 12x^3\cos y\sin^2 y - 2x\cos y = N_x$ معادله فوق کامل است.

بنابراین تابع $\phi(x,y)$ موجود است به طوری که:

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M = 4x^3\sin^3 y - 2x\sin y \xrightarrow{\int dx} *$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = (3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y \quad **$

$* \quad \phi = x^4\sin^3 y - x^2\sin y + \overset{?}{h(y)} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^4\sin^2 y\cos y - x^2\cos y + h'(y) = **$

$3x^4\sin^2 y\cos y - x^2\cos y$

$h'(y) = 0 \xrightarrow{\int} h(y) = c \longrightarrow \boxed{\phi(x,y) = c \Rightarrow x^4\sin^3 y - x^2\sin y = c \text{ جواب عمومی}}$

روش دیگر: بهتر است در امتحان تشریحی نوشته نشود! (خطرناک‌تر است)

$\int (4x^3\sin^3 y - 2x\sin y)\,dx + \int \cancel{(3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y}\,dy = \int 0$

$x^4\sin^3 y - x^2\sin y + 0 = c$

---

Ex.) $(y\cos x + 2xe^y)\,dx + (\sin x + x^2e^y - 1)\,dy = 0$

$\xrightarrow{\int} \int (y\cos x + 2xe^y)\,dx + \int (\cancel{\sin x} + \cancel{x^2e^y} - 1)\,dy = \int 0$

$y\sin x + x^2e^y - y = c$

## عامل انتگرال ساز (Integrating factor)

ممکن است معادله دیفرانسیل کامل نباشد اما با ضرب تابعی مانند $\mu(x,y)$ کامل شود، چنین تابعی را عامل انتگرال ساز معادله گوییم.

فرض کنیم معادله $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

کامل نباشد و $\mu(x,y)$ عامل انتگرال ساز آن باشد. بنابراین معادله جدید زیر کامل است.

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx+\mu(x,y)N(x,y)\,dy=0$$

لذا داریم:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\rightarrow \mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+N_x\mu$$

$$\rightarrow \mu(M_y-N_x)=\mu_x N-\mu_y M \longrightarrow M_y-N_x=\frac{\mu_x}{\mu}N-\frac{\mu_y}{\mu}M$$

معادله PDE

PDE فوق برای یافتن تابع $\mu(x,y)$ در حالت کلی قابل حل نمی‌باشد. بنابراین در بعضی حالات خاص می‌توان آن را حل نمود.

I) فرض می‌کنیم $\mu$ تنها تابعی از متغیر $x$ می‌باشد. در این حالت PDE مذکور به فرم ساده‌تر زیر تبدیل می‌شود

$$M_y-N_x=N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} \longrightarrow \frac{M_y-N_x}{N}=\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}$$

با فرض اینکه کسر سمت چپ تابعی از تنها متغیر $x$ باشد مانند $f(x)$

$$\mu(x)=e^{\int f(x)\,dx}$$

page26

II) فرض کنیم $\mu$ تنها تابعی از $y$ باشد. در این صورت PDE مذکور به فرم زیر در می‌آید.

$$M_y - N_x = -M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \longrightarrow \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \longrightarrow$$

در صورتی که سمت چپ تنها تابعی از $y$ باشد مانند $g(y)$

$$\longrightarrow \mu_y = e^{\int g(y)\, dy}$$

III) فرض کنیم $\mu$ تابعی از $Z = xy$ باشد. در این حالت داریم:

$$M_y - N_x = N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial z} \ln \mu(z)$$

$$\frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial z} \ln \mu(z)$$

$$M_y - N_x = \cancel{M} \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} (yN - xM) \rightarrow \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{\partial \ln(\mu(z))}{\partial z}$$

$\longrightarrow$ در صورتی که سمت چپ تنها تابعی از $Z = xy$ باشد مانند $h(z)$ $\Longrightarrow \mu(z) = e^{\int h(z)\, dz}$

فرض کنیم $\mu$ تابعی از $Z$ باشد

$$M_y - N_x = N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \times Z_x \qquad \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu(z)}{\partial z} \times Z_y$$

$$\frac{M_y - N_x}{N Z_x - M Z_y} = \frac{\partial}{\partial z} \ln \mu(z)$$

مثال) با چه شرطی معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دارای عامل انتگرال سازی است

که فقط تابعی از $Z=x^2+y^2$ است؟

(Ans.) در صورتی که کسر $\frac{M_y-N_x}{2xN-2yM}$ تنها تابعی از $Z=x^2+y^2$ باشد.

Ex.) (I) $(x+y^2)dx-2xy\,dy=0$

$$(M_y=2y)\neq(N_x=-2y)$$

$$\frac{M_y-N_x}{NZ_x-MZ_y}=\frac{4y}{(-2xy)Z_x-(x+y^2)Z_y}\xrightarrow{\text{if } Z=x}=\frac{-2}{x}$$

لذا معادله دارای انتگرال ساز برحسب x است.

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$

$$\longrightarrow\underbrace{\left(\frac{x+y^2}{x^2}\right)}_{M^*}dx-\underbrace{\frac{2xy}{x^2}}_{N^*}dy=0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y}=\frac{\partial N^*}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}$$

$$\int M\,dx=\int\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\,dx=\ln(x)-\frac{y^2}{x}+h(y)=\phi$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{2}{x}y+h'(y)=N^*=\frac{-2xy}{x^2}=\frac{-2y}{x}\quad h'(y)=0\xrightarrow{\int dy}h(y)=c$$

$$\phi(x,y)=\ln(x)-\frac{y^2}{x}+c=0\longrightarrow\ln(x)-\frac{y^2}{x}=c^*$$ جواب عمومی

page 28

Ex.) $\underbrace{y(1+xy)}_{M}dx - \underbrace{x}_{N}dy = 0 \qquad (M_y = 1+2xy) \neq (N_x = -1)$

معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y - N_x}{N Z_x - M Z_y} = \frac{2+2xy}{-x Z_x - y(1+xy) Z_y} =$$

اگر $Z=x$ معادله ساده حل نمی‌شود اگر $Z=y$ فرض شود داریم: $\quad Z_x = 0 \quad Z_y = 1$

$$\xrightarrow{\text{if } Z=y} \frac{2(1+xy)}{0 - y(1+xy)} = \frac{-2}{y} = g(y) \xrightarrow{\int} \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{y(1+xy)dx}{y^2} - \frac{x\,dy}{y^2} = \underbrace{\frac{(1+xy)}{y}}_{M^*}dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{N^*}dy = 0$$

$$\left(M^*_y = \frac{-1}{y^2}\right) = \left(N^*_x = \frac{-1}{y^2}\right) \longrightarrow$$ معادله کامل

* برعهده دانشجو:

$$\int M\,dx = \int \left(\frac{1}{y} + x\right) dx = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + h(y) = \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + h'(y) = N \longrightarrow h'(y) = 0 \xrightarrow{\int dy} h(y) = C$$

$$\phi = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + C = 0 \longrightarrow \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = C^*$$ جواب عمومی

page 32 جلسه هشتم ۲۵ اسفند ۹۹

Ex.) $\underbrace{(y+x^4y^2)}_{M}\,dx + \underbrace{x}_{N}\,dy = 0 \qquad (M_y = 1+2x^4y) \neq (N_x = 1)$

$$\frac{M_y - N_x}{NZ_x - MZ_y} = \frac{2x^4y}{xZ_x - (y+x^4y^2)Z_y} \longrightarrow \text{if } z = xy \rightarrow \begin{cases} Z_x = y \\ Z_y = x \end{cases}$$

$$= \frac{2x^4y}{xy - x(y+y^2x^4)} = \frac{2x^4y}{xy - xy - y^2x^5} = \frac{2x^4y}{-x^5y^2} = \frac{2}{-(xy)}$$

$z$

$$\mu(z) = e^{\int -\frac{2}{z}dx} = \frac{1}{z^2} \qquad \mu(x,y) = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{عامل انتگرال ساز}$$

$$\frac{y+x^4y^2}{x^2y^2}\,dx + \frac{x}{x^2y^2}\,dy = 0 \quad \text{معادله کامل:}$$

$$\frac{1+x^4y}{x^2y}\,dx + \frac{1}{xy^2}\,dy = 0 \xrightarrow{\text{حل}} \text{جواب عمومی: } \frac{-1}{xy} + \frac{x^3}{3} = C$$

$$\rightarrow xy = \frac{1}{\frac{x^3}{3} - c} \Longrightarrow \underset{g}{y(x)} = \frac{1}{x(\frac{x^3}{3} - c)}$$

page 33

Ex. $\alpha$ و $\beta$ را طوری تعیین کنید که $\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$ عامل انتگرال ساز معادلهٔ زیر باشد.

$$(5xy^2 - 2y)\,dx + (3x^2y - x)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب}} \underbrace{(5x^{1+\alpha}y^{2+\beta} - 2x^{\alpha}y^{\beta+1})}_{M^*}dx + \overbrace{(3x^{2+\alpha}y^{\beta+1} - x^{\alpha+1}y^{\beta})}^{N^*}dy = 0$$

مطابق فرض معادله باید کامل باشد.

$$\left.\begin{array}{l} M^*_y = 5(2+\beta)x^{1+\alpha}y^{1+\beta} - 2(1+\beta)x^{\alpha}y^{\beta} \\ N^*_x = 3(2+\alpha)x^{1+\alpha}y^{1+\beta} - (1+\alpha)x^{\alpha}y^{\beta} \end{array}\right\} M^*_y = N^*_x$$

$$\left\{\begin{array}{l} 5(2+\beta) = 3(2+\alpha) \longrightarrow \\ -2(1+\beta) = -(1+\alpha) \longrightarrow \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 5\beta - 3\alpha = -4 \\ -2\beta + \alpha = 1 \longrightarrow \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 5\beta - 3\alpha = -4 \\ -6\beta + 3\alpha = 3 \end{array}\right.$$

$$\beta = 1,\ \alpha = 3$$

$$\boxed{\mu(x,y) = x^3 y}$$

## «معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول»

فرم کلی معادله مرتبه اول

$$F(x,y,y')=0 \xrightarrow{\text{خطی}} A(x)y'+B(x)y=C(x) \xrightarrow{\div A(x)} y'+\frac{B(x)}{A(x)}y=\frac{C(x)}{A(x)}$$

معادلات خطی مرتبه اول را می‌توان به فرم استاندارد زیر در نظر گرفت:

$$\boxed{y'+P(x)y=q(x)}$$

یا در فرم دیفرانسیلی:

$$\underbrace{(p(x)y-q(x))}_{M}dx+\underbrace{dy}_{N=1}=0$$

$$(M_y=p(x))\neq(N_x=0) \longrightarrow \frac{M_y-N_x}{N}=\frac{p(x)-0}{1}=p(x)$$ عامل انتگرال ساز دارد.

ملاحظه می‌شود که معادلهٔ فوق دارای عامل انتگرال ساز به صورت زیر است:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

بنابراین معادله روبرو کامل است

$$\underbrace{\mu(x)(p(x)y-q(x))dx}_{M^*}+\underbrace{\mu(x)dy}_{N^*}=0$$

$$(M^*_y=\mu(x)p(x))=(N^*_x=\mu'(x))$$

اثبات برقراری:

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}\xrightarrow[\text{مشتق}]{} p(x)e^{\int p(x)dx}=\mu(x)p(x)$$

بنابراین $\phi(x,y)$ موجود است به طوری که

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\mu(x)(p(x)y-q(x))$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\mu(x)\xrightarrow{\int dy}\phi(x,y)=y\mu(x)+h(x)\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial\phi}{\partial x}=\cancel{y\mu'(x)}+h'(x)=\mu(x)(\cancel{p(x)y}-q(x))$$

$$\longrightarrow h'(x)=-\mu(x)q(x)\xrightarrow{\int dx}h(x)=-\int\mu(x)q(x)dx$$

page 35

$$\boxed{\phi(x,y) = C \Rightarrow y\,\mu(x) - \int \mu(x)\, q(x)\, dx = C}$$

معادلات دیفرانسیل
خطی مرتبه اول

$\longrightarrow$ جواب عمومی

$$\boxed{y_g(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int q(x)\,\mu(x)\,dx + C\right] \qquad \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}}$$

Ex.)

(I) $xy' + 2y - 4x^2 = 0$ (II) $(tg(x))\,y' + y = \frac{3x}{\cos x}$

(I) $y' + \frac{2}{x} y = 4x \rightarrow \frac{2}{x} = p(x)\,,\ 4x = q(x) \quad \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$

$$y_g = \frac{1}{x^2}\left[\int (4x)(x^2)\,dx + c\right] = \frac{x^4 + C}{x^2} = x^2 + \frac{c}{x^2} = y_g$$

---

(II) $y' + \cot x\ y = \frac{3x}{tgx \cos x} = \frac{3x}{\sin x} \qquad \mu_x = e^{\int \cot x\, dx} = \sin x$

$$y_g = \frac{1}{\sin x}\left[\int \frac{3x}{\sin x} \sin x \, dx + C\right] = \frac{3x^2}{2\sin x} + \frac{c}{\sin x} = y_g$$ جواب عمومی

روش دیگر: فکر کنم امتحانی نیست!

$$\int \mu(x)\left(p(x)y-q(x)\right)dx+\int \mu(x)\,dy=\int 0$$

$$-\int \mu(x)q(x)\,dx+y\,\mu(x)=0 \rightarrow y\,\mu(x)=\int \mu(x)q(x)\,dx \rightarrow [y\,\mu(x)]'=\mu(x)q(x)$$

---

روش دیگر: (پرسیده شده یکبار از کتاب مرجع)

$$y'+p(x)y=q(x)$$

اگر در معادله $q(x)=0$ فرض شود $\rightarrow y'+p(x)y=0 \xrightarrow{\text{جداپذیر}} \frac{dy}{y}=-p(x)dx \rightarrow y_1=e^{-\int p(x)dx}$

$$y_{(x)}=v_{(x)}\,y_1 \Rightarrow v'=q(x)\mu(x) \rightarrow v=\int q(x)\mu(x)\,dx+c$$

* در معادلات مرتبه بالاتر نیز این روش معرفی می‌شود.

---

تذکر: ممکن است یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به $x$ به عنوان تابعی از $y$ خطی باشد.

$$\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{x'}+p(y)x=q(y) \rightarrow \mu(y)=e^{\int p(y)dy}$$

$$\rightarrow x=\frac{1}{\mu(y)}\left[\int q(y)\mu(y)\,dy \mp c\right]$$

(Ex.) معادله زیر را حل کنید.

$$y'(x\sin y + 2\sin 2y) = 1$$

غیرخطی است

$$x\sin y + 2\sin(2y) = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} \longrightarrow \frac{dx}{dy} - (\sin y)x = 2\sin(2y)$$

$$p(y) = -\sin y \quad q(y) = 2\sin 2y$$

$$\mu_y = e^{\int p(y)dy} = e^{\int -\sin y\, dy} = e^{\cos y}$$

$$x = \frac{1}{e^{\cos y}}\left[2\int \sin(2y)\, e^{\cos y} dy + c\right]$$

$$(*)\ \int \sin(2y)\, e^{\cos y} dy = \int 2\sin y\cos y\, e^{\cos y} dy \longrightarrow u = \cos y \rightarrow du = -\sin y\, dy$$

$$(*)\ -2\int u e^{u} du = -2(ue^{u} - e^{u}) = -2(e^{\cos y}\cos y - e^{\cos y}) = -2e^{\cos y}(\cos y - 1)$$

$$x = \frac{1}{e^{\cos y}}\left(-4e^{\cos y}(\cos y - 1) + C\right) = -4(\cos y - 1) + \frac{C}{e^{\cos y}} = x$$

---

(تمرین)

$$y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x} \longrightarrow \frac{2y\ln y + y - x}{y} = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}$$

$$p(y) = \frac{1}{y}$$

$$2\ln y + 1 - \frac{x}{y} = \frac{dx}{dy} \longrightarrow \frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y}\right)x = (1 + 2\ln y) \qquad q(y) = 1 + 2\ln y$$

$$\mu_{(y)} = e^{\int \frac{dy}{y}} = y \longrightarrow x = \frac{1}{y}\left[\int y(1+2\ln y)dy + c\right] = \frac{1}{y}\left[\frac{1}{2}y^2 + c + 2\int y\ln y\, dy\right]$$

$$(*)\ \int y\ln y\, dy \rightarrow \begin{cases}\ln y = u \rightarrow \frac{dy}{y} = du \rightarrow \int u e^{2u} du = \frac{u}{2}e^{2u} - \frac{e^{2u}}{4} = \frac{y^2}{2}\ln y - \frac{y^2}{4} \\ y = e^{u}\end{cases}$$

$$\boxed{x = \frac{c}{y} + y\ln y}$$

جلسه نهم معادلات دیفرانسیل دکتر مجار ۱۴ فروردین ۱۴۰۰

«بررسی چند معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی»

I) معادله دیفرانسیل برنولی Bernoulli

فرم کلی این معادله به صورت زیر است:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \ ; \ n \in \mathbb{R} - \{0,1\}$$

$$\rightarrow y^{-n}y' + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

فرض می‌کنیم $U(x) = y^{1-n}$ داریم: $U'(x) = (1-n)y'y^{-n}$

$$\hookrightarrow y^{-n}y' = \frac{U'(x)}{1-n}$$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1-n}U'(x) + p(x)U(x) = q(x) \longrightarrow U'(x) + \underbrace{(1-n)p(x)}_{p^*(x)}U(x) = \underbrace{(1-n)q(x)}_{q^*(x)}$$

Ex.) (I) $y' - y = xy^2 \quad (n=2)$ (II) $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2} \quad (n=-2)$

(I) $y^{-2}y' - y^{-1} = x \longrightarrow U = y^{-1} \longrightarrow U' = -y'y^{-2} \rightarrow -U' - U = x$

$$U' + U = -x \longrightarrow \mu = e^{\int dx} = e^{x} \qquad U(x) = \frac{1}{e^x}\Big[\underbrace{\int -xe^x dx}_{-(xe^x - e^x)} + C\Big]$$

$$U_g(x) = -x + 1 + Ce^{-x} \xrightarrow{U = y^{-1}} y_g(x) = \frac{1}{1 - x + Ce^{-x}}$$

---

(II) $\xrightarrow{\text{ضرب } \frac{y^2}{3x}} y^2y' + \frac{-2}{3x}y^3 = \frac{x^2}{3} \rightarrow U = y^3 \rightarrow U' = 3y^2y'$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری و ضرب در } 3} U' + \frac{-2}{x}U = x^2 \longrightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{-2dx}{x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$U_g(x) = x^2\Big[\int x^2 \frac{1}{x^2}dx + C\Big] = x^3 + Cx^2 \xrightarrow{U = y^3} y_g = \sqrt[3]{x^3 + Cx^2}$$

Ex.) $xy' + y = 2x^2 y y' \ln y$ جواب های عمومی معادله رو به رو را بدست آورید.

$$\underset{\frac{dy}{dx}}{y'}(x - 2x^2 y \ln y) = -y \rightarrow \frac{dx}{dy} = 2x^2 \ln y - \frac{x}{y}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y}\right)x = (2\ln y)\,x^2 \rightarrow x^{-2}\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y}\right)x^{-1} = 2\ln y$$

$$\rightarrow U = x^{-1} \rightarrow \frac{dU}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy} \rightarrow \frac{dU}{dy} - \frac{1}{y}U = -2\ln y$$

$$\mu_{(y)} = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = \frac{1}{y} \rightarrow U = y\left[\int -2\frac{\ln y}{y}\,dy + c\right]$$

$$\rightarrow U = -y(\ln y)^2 + cy \xrightarrow{U = x^{-1}} x = \frac{1}{cy - y(\ln y)^2}$$ پاسخ به صورت ضمنی

(II) معادلات دیفرانسیل به فرم $f'(y)\,y' + f(y)\,p(x) = q(x)$ را می توان به معادله خطی تبدیل نمود.

$$U = f(y) \xrightarrow{d/dx} U' = y' f'(y) \rightarrow U' + p(x)\,U = q(x)$$ معادله خطی مرتبه اول

$$y_g = f^{-1}(U)$$

Ex.) (I) $y' - 2 = 2x\,e^{-y}$ (II) $y'\cos y + \sin y = x + 1$

$$\xrightarrow{* e^{y}} e^{y}y' - 2e^{y} = 2x \qquad e^{y} = U \xrightarrow{d/dx} y'e^{y} = U' \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$$

$$\rightarrow U' - 2U = 2x \rightarrow \mu_{(x)} = e^{\int -2dx} = e^{-2x} \rightarrow U = e^{2x}\left[\int 2x e^{-2x}dx + c\right]$$

$$U = e^{y} \rightarrow \ln U = y \rightarrow y_g = \ln\left(\frac{1}{2} - x + ce^{2x}\right)$$

(II) $v = \sin y \longrightarrow v' = y'\cos y \longrightarrow v' + v = x+1$ خطی

$\mu_{(x)} = e^{\int dx} = e^{x} \longrightarrow v = \frac{1}{e^{x}}\left[\int (x+1)e^{x}dx + C\right] = \frac{xe^{x}+c}{e^{x}} = x + ce^{-x}$

$\xrightarrow{v=\sin y} \quad \sin y = x + ce^{-x} \longrightarrow y_g = \sin^{-1}(x+ce^{-x})$

---

(III) معادله ریکاتی Ricatti فرم کلی این معادلات به صورت زیر است:

$y' + P_1(x)y + P_2(x)y^2 = q(x)$

برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی $y_1(x)$ معلوم باشد. در این صورت جواب عمومی عبارت است از:

$y_g(x) = y_1(x) + \frac{1}{Z(x)}$

که در آن $Z(x)$ از حل یک معادله مرتبه اول خطی حاصل می‌شود.

$y = y_1 + \frac{1}{z} \longrightarrow y' = y_1' - \frac{z'}{z^2} \xrightarrow{\text{جاگذاری}}$

$y_1' - \frac{z'}{z^2} + p_1(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + p_2(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 = q(x) \qquad \left(y_1' + p_1(x)y_1 + p_2(x)y_1^2\right) = q(x)$

$-\frac{z'}{z^2} + p_1(x)\left(\frac{1}{z}\right) + p_2(x)\left(\frac{1}{z^2} + \frac{2y_1}{z}\right) = 0$

$\longrightarrow z' - p_1(x)z - 2p_2(x)zy_1 = p_2(x)$

$\longrightarrow z' - \underbrace{(p_1(x) + 2p_2(x)y_1)}_{p^*(x)}z = \underbrace{p_2(x)}_{q^*(x)}$ خطی برای تابع $z(x)$

page 44

ما در حل معادلات خطی مرتبه اول یک ثابت داشتیم در این معادلات ریکاتی ثابت در $z$ ظاهر می‌شود

(از جمله این رابطه $y_g = y_1 + \frac{1}{z}$ رسیده شد که چنین چیزی پاسخ معادله است؟)

$$y' + P_1 y + P_2 y^2 = q \longrightarrow (y_1' + v') + P_1(y_1 + v) + P_2 (y_1 + v)^2 = q \longrightarrow v' + P_1 v + P_2(v^2 + 2y_1 v) = 0$$

$y = y_1 + v$ $\quad \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

$y_1' + P_1 y_1 + P_2 y_1 = q$ (*) مطابق صفحه قبل

$$v' + P_1 v + 2y_1 P_2 v + P_2 v^2 = 0$$

$$v' + (P_1 + 2y_1 P_2) v = -P_2 v^2$$

معادله برنولی است و تغییر متغیر آن $z = \frac{1}{v} \Leftarrow v = \frac{1}{z}$ فلذا $y = y_1 + \frac{1}{z}$ و ...

**Ex.)** $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$

$$y' + \left(\frac{-1}{x}\right) y + \left(\frac{+1}{x^2}\right) y^2 = 1$$

جواب عمومی را حدس

زدن رسیدیم : $y_1 = x$

$$y_g = x + \frac{1}{z} \longrightarrow z' - \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{+x^2}(x)\right) z = \frac{+1}{x^2}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = \frac{+1}{x^2} \longrightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$z = x\left[\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx + c\right] = x\left(-\frac{x^{-2}}{2} + c\right) = cx - \frac{1}{2x}$$

$$y_g(x) = x + \frac{1}{cx - \frac{1}{2x}}$$

page 45 ______ جلسه دهم ۱/۱۶

(IV) معادله کلرو clairaut

فرم کلی معادله به صورت روبرو است:  $y = xy' + f(y')$

برای حل این معادله فرض می‌کنیم $y' = p$ در اینصورت  $\boxed{y = xp + f(p)}$ رابطه*

$$\xrightarrow{d/dx} \underset{p}{y'} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}f'(p) \rightarrow x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}f'(p) = 0$$

جواب عمومی

$$\rightarrow \frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c \text{ (ثابت)} \xrightarrow{*} y_g = cx + f(c) \\ x = -f'(c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -f'(c) \\ y = cx + f(c) \end{cases} \longrightarrow$$ با حذف c جواب غیرعادی معادله کلرو را بدست می‌آوریم.

Ex.) $y = xy' + \frac{1}{y'}$   جواب عمومی و غیرعادی معادله روبرو را بدست آورید.

پاسخ $\Rightarrow$ $y = cx + \frac{1}{c}$ , $y^2 = 4x$

راه حل : $y' = p \longrightarrow y = px + \frac{1}{p} \xrightarrow{d/dx} p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^2}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c \rightarrow \boxed{y = cx + \frac{1}{c}} \\ x = \frac{1}{p^2} = \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

$$y = cx + \frac{1}{c} \longrightarrow y^2 = c^2x^2 + \frac{1}{c^2} + 2x = x + x + 2x = 4x \rightarrow \boxed{y^2 = 4x}$$

تذکر: برای یافتن جواب غیرعادی معادله $F(x,y,y')$ کافیست: دستگاه

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=0 \end{cases} \longrightarrow$$

با حذف $y'$ جواب غیرعادی بدست می‌آید.

مثال: معادله کلرو $y=xy'+f(y') \rightarrow y-xy'-f(y')=0 \quad F(x,y,y')=0$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \longrightarrow -x-f'(y')=0$$

if $y'=p$

$$\begin{cases} y=xp+f(p) \\ x=-f'(p) \end{cases} \xrightarrow{p=c}$$ با حذف $p$ جواب غیرعادی بدست می‌آید.

Ex.) I) $1+(y')^2=\dfrac{1}{y^2} \rightarrow \begin{cases} 1+(y')^2-\dfrac{1}{y^2}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=2y'=0 \end{cases} \xrightarrow{y'=0} y^2=1 \rightarrow y=\pm 1$

چک می‌کنیم در معادله اصلی صدق می‌کند یا خیر... $y=\pm 1$ در معادله صدق می‌کند

حل کل معادله: $y'^2=\dfrac{1-y^2}{y^2} \rightarrow y'=\pm\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y} \rightarrow \dots$

Ex.) (II) $(y'^2)(1-y)^2 = 2-y$

$$\begin{cases} (y')^2(1-y)^2 + y - 2 = 0 \rightarrow \boxed{y=2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y'(1-y)^2 = 0 \rightarrow \boxed{y'=0} \end{cases}$$

$(y=2, y'=0)$ جواب غیرعادی

$y=1$ → در معادله صدق نمی‌کند. ✗

(?) چرا معادلات خطی جواب غیرعادی ندارند؟ $y'+p(x)y=q(x)$

$$y' = q(x) - p(x)y \xrightarrow{d/dy'} (y''=1) \neq (0)$$

در حالت کلی معادلاتی که $y'=f(x,y)$ باشند جواب غیرعادی ندارند.

بررسی چند حالت خاص در حل $F(x,y,y')=0$

I) (معادله فاقد $x$ و $y$ باشد) $F(y')=0$

با فرض اینکه معادله $F(x)=0$ دارای یک ریشه حقیقی مانند $\alpha$ باشد می‌توان نوشت:

$$y' = \alpha \rightarrow y = \alpha x + c \rightarrow \alpha = \frac{y-c}{x}$$

$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$ جواب عمومی

Ex.) $(y')^3 - 3(y')^2 + y' = 1 \rightarrow x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \left(\frac{y-c}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 + \frac{y-c}{x} - 1 = 0$

جواب عمومی

page 48

$(\mathrm{II})$ معادله فاقد متغیر مستقل باشد: $F(y, y') = 0$

در این حالت باید بتوانیم معادله را به یکی از دو فرم زیر بنویسید.

حالت

(۱) $y' = f(y) \rightarrow \dfrac{dy}{f(y)} = dx \xrightarrow{\int}$ جداپذیر $\int \dfrac{dy}{f(y)} = x + C$ جواب عمومی

(۲) $y = f(y')$

$$\begin{cases} y' = p \rightarrow \boxed{y = f(p)} \xrightarrow{d} dy = f'(p)\,dp \rightarrow \\ dy = p\,dx \end{cases}$$

$$\rightarrow dx = \frac{f'(p)\,dp}{p}$$

$$\xrightarrow{\int} \boxed{x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = f(p) \\ x = \int \dfrac{f'(p)\,dp}{p} + C \end{cases} \rightarrow$$ با حذف $p$ جواب عمومی حاصل می‌شود.

Ex.) $y = (y')^2 e^{y'}$

$$\begin{cases} y' = p \rightarrow y = p^2 e^p \rightarrow dy = (2p + p^2) e^p\,dp \rightarrow p\,dx = (2p + p^2) e^p\,dp \\ dy = p\,dx \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} dx = (2 + p)\, e^p\,dp \\ p = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$ حالت ۱ — جواب غیرعادی حالت ۲

$$\xrightarrow{\int} \begin{cases} x = (p + 1) e^p + C \\ y = p^2 e^p \end{cases} \rightarrow$$ (جواب عمومی به فرم پارامتری)

جلسه ۱۱ ۲۱ فروردین

(III) معادله فاقد تابع مجهول باشد: $F(x, y') = 0$

حالت

در این حالت باید بتوان معادله را به یکی از دو فرم زیر نوشت:

۱ $y' = f(x) \xrightarrow{\text{جواب کلی}} y = \int f(x)\,dx + C$

۲ $x = f(y')$ در حالت دوم فرض می‌کنیم $y' = p$ $\left(\frac{dy}{dx} = p\right)$

$$x = f(p) \longrightarrow dx = f'(p)\,dp \Rightarrow \frac{dy}{p} = f'(p)\,dp$$

$$dy = p f'(p)\,dp \longrightarrow y = \int f'(p)\,p\,dp + C$$

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p f'(p)\,dp + C \end{cases}$$ جواب عمومی به فرم پارامتری

Ex.) $x = \ln y' + \sin y'$ معادله دیفرانسیل روبه‌رو را حل کنید:

$y' = p \longrightarrow x = \ln p + \sin p \qquad dx = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp$

$dy = p\,dx \qquad \frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp$

$$dy = (1 + p\cos p)\,dp \xrightarrow{\int} \boxed{\begin{cases} y = p + p\sin p + \cos p + C \\ x = \ln p + \sin p \end{cases}}$$ جواب عمومی

(IV)

معادله $F(x,y,y')$ ممکن است به دو حالت زیر نوشته شود

A) $x = f(y,y') \xrightarrow{y'=p} x = f(y,p) \xrightarrow{d} dx = f_y\,dy + f_p\,dp$

B) $y = f(x,y')$

$$\rightarrow \frac{dy}{p} = f_y\,dy + f_p\,dp$$

$$\rightarrow \frac{1}{p} = f_y + f_p \frac{dp}{dy}$$

از حل این معادله p برحسب y و c محاسبه و حاصل می‌شود

با جایگذاری در رابطه $x = f(y,p)$ جواب عمومی حاصل می‌شود.

A) $x = f(y,y')$

B) $y = f(x,y') \xrightarrow{y'=p} y = f(x,p) \xrightarrow{d} dy = f_x\,dx + f_p\,dp$

$$\longrightarrow p\,dx = f_x\,dx + f_p\,dp \rightarrow p = f_x + f_p \frac{dp}{dx}$$

p برحسب x و c محاسبه و حاصل می‌شود.

با جایگذاری در رابطهٔ $y = f(x,p)$ جواب عمومی حاصل می‌شود.

Ex.) $y = \frac{1}{2}(y')^2 + 2xy' + x^2$ معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$y = f(x,y') \longrightarrow \underset{dy = p\,dx}{y' = p} \Rightarrow y = \frac{1}{2}p^2 + 2xp + x^2 = f(x,p)$$

$$\longrightarrow dy = (2p + 2x)\,dx + (p + 2x)\,dp \rightarrow p\,dx = (2p + 2x)\,dx + (p + 2x)\,dp$$

$$\longrightarrow p = (2p + 2x) + (p + 2x)\frac{dp}{dx} \rightarrow (p + 2x)\left(1 + \frac{dp}{dx}\right) = 0 \rightarrow \frac{dp}{dx} = -1$$

$$p = -2x$$

$$\frac{dp}{dx} = -1 \longrightarrow \boxed{p = -x + c} \xrightarrow[f(x,p)]{\text{جایگذاری در}} y = \frac{1}{2}(c - x)^2 + 2x(c - x) + x^2$$

$$y = \frac{1}{2}(c^2 - 2cx + x^2) - x^2 + 2cx$$

$$\longrightarrow \boxed{y = \frac{c^2 - x^2}{2} + cx}$$

نکته: با جایگذاری $p = -2x$ در رابطه $y = f(x,p)$ جواب غیرعادی (منفرد) حاصل می‌شود. $y = -x^2$

محاسبه جواب غیرعادی مثال قبل طبق قاعده‌ای که قبلاً ذکر شد.

$F(x,y,y')=0$

$\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$

$\longrightarrow -y+\dfrac{y'^2}{2}+2xy'+x^2=0 \longrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y'}=y'+2x=0$

$\rightarrow y'=-2x$

$\rightarrow -y+\dfrac{(-2x)^2}{2}+2x(-2x)+x^2=$

$\rightarrow \Rightarrow y=-x^2$ جواب غیرعادی

# معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت زیر است:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

فرم کلی یک معادله مرتبه n خطی به صورت زیر است:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = r(x)$$

در حالتی که ضرایب $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ توابع ثابت باشند معادله را خطی با ضرایب ثابت گوییم.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = r(x)$$

$a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

خطی: با ضرایب متغیر / با ضرایب ثابت

تذکر: اگر $r(x) = 0$ باشد معادله را همگن و در غیر این صورت ناهمگن گوییم.

$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0$ همگن و خطی با ضرایب متغیر

$y'' + 2y' + \sin x = y$ ناهمگن

مسئله مقدار اولیه IVP

دارای دو شرط:
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

$y'' + p(x) + y' + q(x) y = 0$ همگن خطی با ضرایب متغیر

مسئله مقدار مرزی BVP

یا دارای دو شرط
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

$y'' = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'(1) = 1$

$y = c_1 x + c$ شرایط صدق نمی‌کند

جواب ندارد!

$y'' = 0 \quad y(-1) = 0 \quad y(1) - 2y'(1) = 0$

$y_1 = c_1 x + c_2 \rightarrow c_2 - c_1 = 0$

$c_1 + c_2 - 2c_1 = 0$

$c_1 = c_2 = c \rightarrow y = c(x+1)$

قضیه: "وجود و یکتایی جواب مسائل IVP"

- مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

- در این صورت اگر توابع $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$ در بازه $I$ که شامل نقطهٔ $x_0$ است پیوسته باشند آنگاه مسئله فوق در $I$ دارای جواب منحصر به فرد است.

Ex.) $(x^2-3x)\,y'' + x\,y' - (x+3)\,y = 0 \qquad y(1)=2\,,\ y'(1)=1$

بزرگترین بازه‌ای که مسئله فوق در آن دارای جواب است را بیابید:

معادله همگن است و $r(x)=0$ $\qquad p(x) = \dfrac{x}{x^2-3x} \qquad q(x) = \dfrac{-(x+3)}{x^2-3x}$

$$\boxed{I = (0,3)}$$

Ex.) همان معادله با شرط‌های $\begin{cases} y(4)=2 \\ y'(4)=1 \end{cases}$ بزرگترین بازه‌ای که در آن جواب دارد؟

$I = (3, +\infty)$

قضیه "اصل انطباق یا برهم نهی جواب ها" Superposition

فرض کنیم $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ جواب های معادله دیفرانسیل خطی و همگن از مرتبه n زیر باشد.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$$

در این صورت به ازاء هر $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ تابع $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ نیز جواب معادله فوق است.

(؟) اگر معادله ناهمگن - خطی باشد باز هم اصل بالا صدق می کند؟ $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x)$

اگر جواب های آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ باشد و فرض کنیم $y = c_1y_1 + c_2y_2$ نیز جواب باشد:

$$\begin{cases} y' = c_1y_1' + c_2y_2' \\ y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' \end{cases} \quad (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = r(x)$$

$$c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = c_1r(x) + c_2r(x) = r(x)(c_1 + c_2) \neq r(x)$$

اشتباه است و به تناقض رسیدیم

---

اگر معادله غیرخطی باشد آیا ترکیب خطی $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ جواب معادله است؟

$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y^2 = 0 \longrightarrow$ جواب $y_1(x), y_2(x)$

اگر $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز جواب باشد در صورت جایگذاری به علت توان 2 عبارت $y^2$ جملات اضافه ایجاد کرده و $c_1y_1 + c_2y_2$ جواب نخواهد بود.

تذکر: اصل انطباق تنها برای معادلات دیفرانسیل خطی و همگن صادق است.

## استقلال خطی و وابستگی خطی

دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را در $[a,b]$ **مستقل خطی** گوییم هرگاه به ازای هر $x$ در این بازه رابطهٔ $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$ نتیجه دهد: $c_1=c_2=0$

در غیر این صورت اگر $c_1$ و $c_2$ هردو همزمان صفر نباشند دو تابع وابسته خطی هستند.

$y_1=-\frac{c_2}{c_1}y_2 \rightsquigarrow \frac{y_1}{y_2}=k$ (ثابت) وابستگی خطی

$\frac{y_1}{y_2}=$ تابعی از $x$ استقلال خطی

*

---

مثال) توابع $y_1=x$ و $y_2=3x$ روی $\mathbb{R}$ وابسته خطی هستند.

$\frac{y_1}{y_2}=\frac{1}{3}$ $\quad c_1=-3, c_2=1$ $\quad -3y_1+y_2=0$

مثال) همچنین توابع $y_1=e^x$ $y_2=e^{2x}$ روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند.

$c_1e^x+c_2e^{2x}=0 \longrightarrow c_1=c_2=0$ $\quad \frac{y_1}{y_2}=e^{-x}$

مثال) توابع $y_1=x|x|$ و $y_2=x^2$ چه وضعیتی دارند؟

$I_1=(0,+\infty)$

روی بازه $I_1$ یا $I_2$ وابسته هستند

$I_2=(-\infty,0)$

و روی هر بازه شامل $x=0$ مستقل خطی هستند.

تذکر: مفهوم استقلال خطی و وابستگی خطی را می‌توان برای بیشتر از ۲ تابع تعریف کرد

توابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$

در $[a,b]$ مستقل خطی گوییم

هرگاه رابطهٔ $c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$

نتیجه دهد $c_1=c_2=\dots=c_n=0$

در غیر این صورت اگر $c_1$ تا $c_n$ همزمان صفر نباشند توابع فوق را وابسته خطی گوییم.

مثال) چه وضعیتی دارند؟ $y_1 = 2x \quad y_2 = -x \quad y_3 = e^x$

وابسته خطی هستند: $c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 0$

$y_1 = 0 \quad y_2 = e^x \quad y_3 = e^{2x}$

وابسته $c_1 =$ عدد دلخواه غیرصفر $\quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0$

نکته: تابع $y = 0$ با توابع دیگر وابسته خطی می‌سازد. زیرا ضریبش غیرصفر می‌تواند باشد.

مثلاً: $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = f(x) \end{cases} \rightarrow c_1 = 1 \quad c_2 = 0$

تعریف "رونسکین یا دترمینان رونسکی" wronskian

$$\underbrace{w(y_1, y_2)(x_0)}_{w(x_0)} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)$$

$2x^2$

به طور مشابه رونسکین توابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$ در $x_0$ با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$w(y_1, \dots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0), & y_2(x_0), & \dots, & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0), & y_2'(x_0), & \dots, & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0), & y_2^{(n-1)}(x_0), & \dots, & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$w(2x, -x)(x) = \begin{vmatrix} 2x & -x \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

حدس می‌زنیم رونسکین توابع وابسته صفر $\rightarrow$

$$w(e^x, e^{2x})(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

و توابع مستقل غیرصفر است.

تذکر) اگر $f$ و $g$ در بازه $I$ مشتق پذیر باشند آنگاه $f$ و $g$ در این بازه وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر $\forall x \in I ; w(f,g)(x)=0$

فرض کنیم $f$ و $g$ در $I$ وابسته خطی هستند. در این صورت $f(x)=kg(x)$ در نتیجه

$$w(f,g)=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kg(x) & g(x) \\ kg'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in I$$

بالعکس فرض می‌کنیم $\forall x \in I ; w(f,g)=0$ در نتیجه:

$$f(x)g'(x)-g(x)f'(x)=0 \xrightarrow[g\neq 0]{f\neq 0} \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)} \xrightarrow{\int dx} f(x)=cg(x)$$

وابستگی خطی

$$\ln f(x) = \ln cg(x)$$

برای $n$ تابع نیز به همین صورت ...

تمرین) اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌ها معادله دیفرانسیل زیر باشند

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

آنگاه رونسکین $y_1$ و $y_2$ عبارت است از

$$w(y_1,y_2)(x)=ce^{-\int p(x)dx}$$ «فرمول آبل»

که در آن $c$ ثابتی مستقل از $x$ است.

(؟) رابطه بالا را اثبات کنید.

---

تذکر: رونسکین کلاً صفر است یا هیچگاه صفر نخواهد شد.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ← خطی و همگن ← $y = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب معادله است

$y_1(x)$ $y_2(x)$ جواب ها ؟ اما جواب عمومی آن نیست لزوماً!

اگر $y_1$ و $y_2$ وابسته خطی باشند مثلاً $y_2 = \alpha y_1$ در نتیجه $y = c^* y_1$

از آنجا که معادله مرتبه ۲ بوده پس جواب عمومی آن دارای ۲ ثابت عددی است ولی $y = c^* y_1$

یک ثابت عددی دارد پس جواب عمومی نخواهد داشت

پس باید ۲ جواب مستقل پیدا کنیم یا اگر مرتبه $n$ بود؛ $n$ جواب مستقل بیابیم

تذکر: اگر $y_1, \dots, y_n$ ، $n$ جواب برای معادله دیفرانسیل خطی و همگن

از مرتبه $n$ زیر باشند:

$$y^{(n)} + (a_{n-1}(x))\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

آنگاه طبق اصل انطباق $y^* = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ نیز جواب مسئله است

اما این جواب در حالت کلی جواب عمومی نیز نمی باشد و تنها در صورتی که $n$ تابع

مستقل خطی باشند آنگاه $y^* = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$ جواب عمومی معادله است.

جلسه ۱۳ ۲۸ فروردین ۱۴۰۰

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \xrightarrow{\text{جواب}} y_1, \dots, y_n \Rightarrow c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = y_g \ \text{جواب}$$

اگر استقلال خطی داشته باشند جواب عمومی است.

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی و همگن با ضرایب ثابت

$$y'' + py' + qy = 0 \ ; \ p, q \in \mathbb{R}$$

فرض کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله فوق باشد در این صورت باید داشته باشیم

$$(\lambda^2 + p\lambda + q) e^{\lambda x} = 0$$

معادله مشخصه (مفسر) characteristic

سه حالت زیر را برای ریشه‌ها معادله فوق در نظر می‌گیریم:

I) فرض کنیم $\Delta = p^2 - 4q > 0$ در این حالت معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی و متمایز $\lambda_1$ و $\lambda_2$ می‌باشد. در نتیجه معادله دیفرانسیل اولیه دارای دو جواب به فرم زیر می‌باشد.

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

واضح است که دو تابع فوق مستقل خطی نیز می‌باشند.

$$\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \quad \text{یا} \quad W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0$$

لذا در این حالت جواب عمومی معادله دیفرانسیل اولیه عبارت است از

$$\boxed{y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$$

مثال:

$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$

معادله مشخصه : $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \qquad \Delta = 25 - 24 = 1 > 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-5+1}{2} = -2 \longrightarrow y_1 = e^{-2x} \\ \lambda_2 = \dfrac{-5-1}{2} = -3 \longrightarrow y_2 = e^{-3x} \end{cases}$ مستقل خطی هستند

$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$ جواب عمومی $\begin{matrix} \xrightarrow{y(0)=2} \\ \xrightarrow[y(0)=3]{} \end{matrix} \begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 3 = -2c_1 - 3c_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 9 \\ c_2 = -7 \end{cases}$

جواب خصوصی $y_p = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$

II) فرض کنیم: $\Delta = p^2 - 4q < 0$ در این حالت معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط به صورت:

$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} \end{cases}$

تعریف می‌کنیم: $\begin{cases} Y_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ Y_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2} \end{cases} \Longrightarrow Y_1 = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right) =$

$Y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$

$Y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

واضح است که $Y_1$ و $Y_2$ جواب‌ها معادله اولیه می‌باشند. (طبق اصل برهم‌نهی)

همچنین این دو تابع مستقل خطی نیز می‌باشند. (چرا؟)

$$W(Y_1, Y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & , \quad e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & , \quad \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

$\beta \neq 0$

در این حالت جواب عمومی: $Y_g = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

مثال: $y''-2y'+10y=0 \longrightarrow$ معادله مشخصه $\lambda^2-2\lambda+10=0 \quad \Delta=-36<0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}=1\pm\sqrt{-9} \longrightarrow \begin{cases}\lambda_1=1+3i & \alpha=1\\ \lambda_2=1-3i & \beta=3\end{cases}$$

$$y_g=e^{x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$$

III) فرض کنیم $\Delta=p^2-4q=0$ در این حالت معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی تکراری است.

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

بنابراین $y_1=e^{\lambda x}$ جواب معادله اولیه است.

برای یافتن جواب دوم معادله که مستقل خطی با $y_1$ می‌باشد فرض کنیم

$$y_2'=v'y_1+vy_1'$$
$$y_2''=v''y_1+2v'y_1'+vy_1'' \Longrightarrow \begin{cases} v''y_1+2v'y_1'+vy''+p(v'y_1+vy_1')+qvy_1=0\\ vy_1''+pvy_1'+qvy_1=0\end{cases}$$

$$\to v''+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p\right)v'=0 \longrightarrow \begin{cases}v'=u\\ v''=u'\end{cases} \longrightarrow u'+\left(\cancel{2\frac{y_1'}{y_1}+p}\right)u=0 \to u'=0 \to v''=0$$

$\lambda^2+p\lambda+q=0$

$\Delta=p^2-4q=0 \to \lambda=-\frac{p}{2} \to y_1=e^{-\frac{p}{2}x} \longrightarrow \frac{y_1'}{y_1}=\frac{-\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}}{e^{-\frac{p}{2}x}}=-\frac{p}{2}$

$v''=0 \to v(x)=\alpha x+\beta \longrightarrow y_2(x)=(\alpha x+\beta)y_1=(\alpha x+\beta)e^{\lambda x} \longrightarrow y_g=c_1e^{\lambda x}+c_2(\alpha x+\beta)e^{\lambda x}$

page62

$$y_g = c_1 e^{\lambda x} + c_2 \alpha x e^{\lambda x} + c_2 \beta e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\underbrace{(c_1 + c_2 \beta)}_{c_1^*} + x e^{\lambda x}\underbrace{(c_2 \alpha)}_{c_2^*}$$

فرض شود $\alpha = 1$

فرض شود $\beta = 0$ یعنی $y_2$ را برابر $x e^{\lambda x}$ فرض شود.

$$y_g = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$$

مثال)

$$y'' - y' + \frac{1}{4} y = 0 \longrightarrow \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \longrightarrow \Delta = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow y_1 = e^{x/2} \quad y_2 = x e^{x/2} \longrightarrow y_g = e^{x/2}(c_1 + c_2 x)$$

جلسه چهاردهم ۳۰ / فروردین

حل معادلات دیفرانسیل خطی و همگن از مرتبه $n$ با ضرایب ثابت.

فرم کلی این معادلات به صورت روبه‌رو است: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\in\mathbb{R}$

هدف یافتن $n$ جواب مستقل خطی $y_1$ تا $y_n$ برای معادله فوق است!

معادله مشخصه

با فرض اینکه $y=e^{\lambda x}$ جواب معادله فوق باشد داریم: $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0$

معادله مشخصه دقیقا دارای $n$ ریشه است (با در نظر گرفتن ریشه‌های تکراری و مختلط) حالات زیر را روی ریشه‌ها بررسی می‌کنیم.

(I) فرض کنیم معادله مشخصه دارای $n$ ریشه حقیقی و متمایز $\lambda_1$ تا $\lambda_n$ باشد

در این حالت معادله دیفرانسیل اولیه دارای $n$ جواب مستقل خطی: $y_1=e^{\lambda_1 x}, y_2=e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n=e^{\lambda_n x}$

لذا جواب عمومی عبارت است از $y_g=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n$

$$W(y_1,\dots,y_n)(x)=\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}_{n\times n}\neq 0$$

؟ حل کنید.

$y^{(3)} - 2y'' - 3y' = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \rightarrow y_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \rightarrow y_2 = e^{3x} \\ \lambda_3 = -1 \rightarrow y_3 = e^{-x} \end{cases}$

معادله مشخصه

** در متلب برای نشان دادن و یافتن ریشه‌ها:

$\begin{cases} P[1, -2, -3, 0] \\ roots(p) \end{cases}$

$y_g = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}$

(II) فرض کنیم معادله مشخصه دارای $n$ ریشه حقیقی باشد که $m$ تای آنها تکراری است.

$\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m}, \underbrace{\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots, \lambda_n}$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \cdots, y_m = x^{m-1} e^{\lambda_m x}$ حقیقی و متمایز $y_n = e^{\lambda_n x}$

در این حالت با استفاده از ایده کاهش مرتبه می‌توان جواب‌ها مستقل خطی زیر را برای

ریشه‌های $\lambda_1$ تا $\lambda_m$ بدست آورد.

در نتیجه جواب عمومی عبارت است از:

$$y_g = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_m x^{m-1}) e^{\lambda_1 x} + c_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

؟ حل کنید

$y^{(3)} - y'' = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \rightarrow y_1 = 1, y_2 = x \\ \lambda_3 = 1 \rightarrow y_3 = e^x \end{cases} \rightarrow y_g = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$

III. فرض کنیم معادله مشخصه دارای n ریشه باشد که شامل ریشه‌های مختلط متمایز است.

به عنوان مثال فرض می‌کنیم $\lambda_1=\alpha+i\beta$ ، $\lambda_2=\alpha^*+i\beta^*$ ریشه‌های مختلط باشند

در نتیجه $\lambda_3=\alpha-i\beta$ و $\lambda_4=\alpha^*-i\beta^*$ نیز ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشند.

$$\begin{cases}\lambda_1=\alpha+i\beta\\ \lambda_3=\alpha-i\beta\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_2=\alpha^*+i\beta\\ \lambda_4=\alpha^*-i\beta\end{cases}\quad \lambda_5,\dots,\lambda_n$$

$$\begin{cases}y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x\\ y_3=e^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}\begin{cases}y_2=e^{\alpha^* x}\cos\beta^* x\\ y_4=e^{\alpha^* x}\sin\beta^* x\end{cases}\Big\}\ \text{مستقل باشند}$$

$$y_g=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)+e^{\alpha^* x}(c_3\cos\beta^* x+c_4\sin\beta^* x)+\dots+c_5y_5+\dots+c_ny_n$$

(?) حل کنید.

I $y^{(3)}-4y''+5y'=0$

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda=0\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\longrightarrow y_1=1\\ \lambda_2=2+i\\ \lambda_3=2-i\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}y_2=e^{2x}\cos x\\ y_3=e^{2x}\sin x\end{cases}\quad \begin{matrix}\alpha=2\\ \beta=1\end{matrix}$$

$$y_g=c_1+e^{2x}(c_2\cos x+c_3\sin x)$$

II $y^{(4)}-y=0\longrightarrow\lambda^4-1=0\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\longrightarrow y_1=e^x\\ \lambda_2=-1\longrightarrow y_2=e^{-x}\\ \lambda_3=i\\ \lambda_4=-i\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}y_3=\cos x\\ y_4=\sin x\end{cases}\quad \begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=1\end{matrix}$

$$y_g=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$

III $y^{(4)}+y=0\quad \lambda^4+1=0$

$$\lambda^4=-1\longrightarrow\lambda=(-1)^{\frac14}$$

$$e^{\frac{i\pi}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}=\lambda_1\longrightarrow\lambda_3=\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$-e^{+\frac{i\pi}{4}}=-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}=\lambda_2\longrightarrow\lambda_4=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$$

ریشه‌های معادله

$$y_1=e^{\frac{\sqrt2}{2}x}\cos(\tfrac{\sqrt2}{2}x)$$

$$y_2=e^{\frac{\sqrt2}{2}x}\sin(\tfrac{\sqrt2}{2}x)$$

$$y_3=e^{-\frac{\sqrt2}{2}x}\cos(\tfrac{\sqrt2}{2}x)$$

$$y_4=e^{-\frac{\sqrt2}{2}x}\sin(\tfrac{\sqrt2}{2}x)$$

$$y_g=\dots$$

(IV) فرض کنیم معادله مشخصه دارای ریشه مختلط تکراری باشد.

به عنوان مثال فرض می‌کنیم $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=\alpha+i\beta$ در این صورت $m$ ریشه دیگر معادله

مشخصه عبارت است از $\lambda_{m+1}=\lambda_{m+2}=\dots=\lambda_{2m}=\alpha-i\beta$ و سایر ریشه‌ها $\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2}, \dots, \lambda_n$

$$\begin{cases}\lambda_1=\alpha+i\beta\\ \lambda_{m+1}=\alpha-i\beta\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_2=\alpha+i\beta\\ \lambda_{m+2}=\alpha-i\beta\end{cases}\quad \cdots \quad \begin{cases}\lambda_m=\alpha+i\beta\\ \lambda_{2m}=\alpha-i\beta\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x\\ y_{m+1}=e^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}\quad \begin{cases}y_2=xe^{\alpha x}\cos\beta x\\ y_3=xe^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}\quad \cdots \quad \begin{cases}y_m=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}$$

$$y_g=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)+xe^{\alpha x}(c_3\cos\beta x+c_4\sin\beta x)+\dots+x^{m-1}e^{\alpha x}(c_{2m-1}\cos\beta x+c_{2m}\sin\beta x)$$

+ جواب‌های متناظر با سایر ریشه‌ها

(؟) حل کنید.

$$y^{(6)}+y^{(4)}-y''-y=0$$

$$\lambda^6+\lambda^4-\lambda^2-1=0 \longrightarrow (\lambda^2+1)(\lambda^4-1)=0$$

$\lambda_1=1 \rightarrow y_1=e^{x}$

$\lambda_2=-1 \rightarrow y_2=e^{-x}$

$\lambda_3=i,\ \lambda_4=-i \rightarrow y_3=\cos x,\ y_4=\sin x$

$\lambda_5=i,\ \lambda_6=-i \rightarrow y_5=x\cos x,\ y_6=x\sin x$

$$y_g=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x+c_5x\cos x+c_6x\sin x$$

روش کاهش مرتبه

فرض کنیم $y_1(x)$ جوابی برای معادلهٔ $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد.

در این صورت برای یافتن جواب دوم معادله که مستقل خطی با $y_1$ باشد فرض می‌کنیم:

$y_2 = v(x)\, y_1$

با جایگذاری $y_2, y_2', y_2''$ در معادله $v(x)$ را بدست می‌آوریم.

$$y_2' = v' y_1 + v y_1' \Longrightarrow y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$$

$$v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' + p(x)\left(v' y_1 + v y_1'\right) + q(x)\left(v y_1\right) = 0$$

$$v'' y_1 + 2v' y_1' + p(x) v' y_1 = 0 \longrightarrow v'' + \left[\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right] v' = 0$$

$$v' = U \longrightarrow U' + \left[\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right] U = 0 \longrightarrow \mu(x) = e^{\int\left[\frac{2y_1'}{y_1} + p(x)\right]dx} = y_1^2\, e^{\int p(x)\,dx}$$

$$U = \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2} \xrightarrow[U=v']{\int dx} v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}\, dx \longrightarrow y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$$

$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی

?) با فرض اینکه $y_1 = \dfrac{1}{x}$ جواب معادلهٔ زیر باشد جواب عمومی آن را بدست آورید.

$2x^2 y'' + 3x y' - y = 0$ خطی با ضرایب متغیر

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}\, dx \Rightarrow \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\int \frac{3dx}{2x}}\, dx = \frac{1}{x} \int x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

$$y_g = \frac{c_1}{x} + c_2\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}\right) = \frac{c_1}{x} + c_2\sqrt{x}$$

پیدا کردن ریشه nام یک عدد مختلط $z^{\frac{1}{n}}$ $\quad z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

$$w = z^{\frac{1}{n}} \rightarrow w_1, w_2, \ldots, w_n$$

$$w^n = z \rightarrow \rho e^{i\varphi} \longrightarrow (re^{i\theta})^n = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}$$

$w \rightarrow re^{i\theta}$

$$\xrightarrow{|\,|} r^n(1) = \rho(1) \rightarrow r = \rho^{\frac{1}{n}}$$

$$e^{in\theta} = e^{i\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \cos(n\theta) = \cos\varphi \\ \sin(n\theta) = \sin\varphi \end{cases} \longrightarrow n\theta = \varphi + 2K\pi$$

K عدد صحیح

$$\theta = \frac{\varphi + 2K\pi}{n}$$

$$w = re^{i\theta} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi + 2K\pi}{n}\right)} \; ; \; \underbrace{K = 0, 1, \ldots, n-1}_{n}$$

$\varphi$: arg(z)

در هر صورت n تا باشد.

(مثال) $(-1)^{\frac{1}{4}} = w \longrightarrow \underbrace{w^4}_{re^{i\theta}} = \underbrace{-1}_{z} = 1e^{i\pi}$

اندازه: $1$ — زاویه: $\pi$

$$r = (1)^{\frac{1}{4}} = 1 \qquad \theta = \frac{\pi + 2K\pi}{4} \; ; \; K = 0, 1, 2, 3$$

$$w_0 = e^{i\theta_0} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad w_1 = e^{i\theta_1} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2 = e^{i\theta_2} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad w_3 = e^{i\theta_3} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = +\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$w_0, w_4$ مزدوج $\qquad w_1, w_3$ مزدوج

(مثال) $(i)^{\frac{1}{2}} \rightarrow w_0, w_1$ $\qquad i = z = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \rho = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad w^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$r = (\rho)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad \theta = \frac{\pi/2 + 2K\pi}{2} \; ; \; K = 0, 1$$

$$w_0 = e^{i\theta_0} = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad w_1 = e^{i\theta_1} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

جلسه پانزدهم ۱۴/۲/۱

## * حل معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن

ابتدا معادله مرتبه دوم زیر را درنظر می‌گیریم :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

اگر $y_p$ جواب خصوصی معادله فوق باشد آنگاه واضح است که به ازای هر جواب دلخواهی از معادله فوق مانند $y(x)$ ، $y(x) - y_p(x)$ جواب معادله همگن نظیر معادلهٔ فوق است .

$$y_g(x) = y(x) - y_p(x) \Longrightarrow y_G(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

جواب عمومی معادله همگن — جواب عمومی معادله اصلی

برای یافتن $y_p$ از دو روش { ۱) تغییر پارامتر ۲) ضرایب نامعین } می‌توان استفاده کرد .

Variation of Parameters

Undertermined Coefficients

(I) روش تغییر متغیر

فرض کنیم $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب عمومی معادله همگن نظیر آن است

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

در این روش فرض می‌کنیم : ① $\{ y_p(x) = U(x)y_1 + V(x)y_2$

با جاگذاری $y_p$ در معادله ناهمگن توابع $U$ و $V$ را بدست می‌آوریم ،

$$② \left\{ y_p' = \underbrace{U'y_1 + V'y_2}_{0 \text{ : فرض}} + Uy_1' + Vy_2' \right.$$

فرض می‌کنیم $U'y_1 + V'y_2 = 0$

در این صورت داریم :

$$③ \left\{ y_p'' = U'y_1' + V'y_2' + Uy_1'' + Vy_2'' \right.$$

با جاگذاری روابط 1 ، 2 ، 3 در معادله ناهمگن داریم :

$$U'y_1' + V'y_2' + Uy_1'' + Vy_2'' + p(x)(Uy_1' + Vy_2') + q(x)(Uy_1 + Vy_2) = r(x)$$

روز گفت و گو و تعامل سازنده با جهان - ولادت امام رضا (ع) (۱۴۸ هـ ق)

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$U'y_1' + V'y_2' + U\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{0} + V\underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{0} = r(x)$$

page 70

در نتیجه:

$$U'y_1' + V'y_2' = r(x)$$

در نهایت با توجه به فرض $U'y_1 + V'y_2 = 0$ و معادلهٔ حاصل دستگاه زیر تشکیل می‌شود.

$$\begin{cases} U'y_1 + V'y_2 = 0 \\ U'y_1' + V'y_2' = r(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 , y_2 \\ y_1' , y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$$

$$U' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{w(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0} \rightarrow U' = \frac{-y_2\, r(x)}{w(y_1,y_2)r(x)} \xrightarrow{\int} U(x) = -\int \frac{y_2\, r(x)\, dx}{w(y_1,y_2)(x)}$$

استقلال خطی $y_1$ و $y_2$

$$V' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{|w(y_1,y_2)(x)} = \frac{y_1\, r(x)}{w(y_1,y_2)(x)} \xrightarrow{\int} V(x) = \int \frac{y_1\, r(x)}{w(y_1,y_2)(x)} dx$$

$$\rightarrow y_p = Uy_1 + Vy_2$$

روش کرامر $\quad AX = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} , \cdots , a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} , \cdots , a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 , a_{12} , \cdots , a_{1n} \\ \vdots \\ b_n , a_{n2} , \cdots , a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$\vdots$

page 71

(5) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{4}y''+\frac{2}{4}y'+\frac{y}{4}=4e^{-x}\ln x$$

$$\frac{1}{4}y''+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{4}y=0 \quad \text{همگن} \longrightarrow \frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{4}=0 \quad \text{معادله مشخصه} \longrightarrow \frac{1}{4}(\lambda+1)^2=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-1$$

$$\begin{cases} y_1=e^{-x} \\ y_2=xe^{-x} \end{cases} \longrightarrow y_g=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

جواب عمومی معادله همگن

$$y_p=U(x)e^{-x}+V(x)\,xe^{-x}\quad,\quad W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix}=e^{-2x}\neq 0$$

$$U'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ 4e^{-x}\ln x & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix}}{e^{-2x}}=\frac{-4e^{-2x}x\ln x}{e^{-2x}}=-4x\ln x \xrightarrow{\int} U(x)=-4\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$V'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & 4e^{-x}\ln x \end{vmatrix}}{e^{-2x}}=4\ln(x) \xrightarrow{\int} V(x)=4(x\ln x-x)$$

$$y_G=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\left(-4\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)e^{-x}+4(x\ln x-x)\,xe^{-x}\right)$$

جواب عمومی معادله ناهمگن

$$y_G=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x^2e^{-x}(2\ln x-3)=e^{-x}\left(c_1+c_2x+x^2(2\ln x-3)\right)$$

معادله خطی ناهمگن از مرتبه n زیر را درنظر می‌گیریم

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=r(x)$$

ابتدا فرض می‌کنیم $y_1, \ldots, y_n$ n جواب مستقل خطی معادله همگن نظیر معادله فوق باشند. برای یافتن جواب خصوصی معادله ناهمگن تعریف می‌کنیم:

$$y_p=U_1(x)y_1+U_2(x)y_2+\cdots+U_n(x)y_2$$

$$y_p'=\underbrace{U_1'y_1+\cdots+U_n'y_n}_{0}+U_1y_1'+\cdots+U_ny_n'$$

فرض می‌کنیم $*\{U_1'y_1+\cdots+U_n'y_n=0$

$$y_p''=\underbrace{U_1'y_1'+\cdots+U_n'y_n'}_{0}+U_1y_1''+\cdots+U_ny_n''$$

فرض می‌کنیم $**\{U_1'y_1'+\cdots+U_n'y_n'=0$

با ادامه فرآیند خواهیم داشت:

$$y_p^{(n-1)}=U_1'y_1^{(n-2)}+\cdots+U_n'y_n^{(n-2)}+U_1y_1^{(n-1)}+\cdots+U_ny_n^{(n-1)}$$

فرض کنیم: $U_1'y_1^{(n-2)}+\cdots+U_n'y_n^{(n-2)}=0$

$$y_p^{(n)}=U_1'y_1^{(n-1)}+\cdots+U_n'y_n^{(n-1)}+U_1y_1^{(n)}+\cdots+U_ny_n^{(n)}$$

در نهایت با جایگذاری $y_p, y_p', \ldots, y_p^{(n)}$ در معادله اولیه داریم:

$$U_1'y^{(n-1)}+\cdots+U_n'y_n^{(n-1)}=r(x)$$

درنتیجه دستگاهی تشکیل می‌شود.

page 73

$$\begin{cases} U_1' y_1 + \cdots + U_n' y_n = 0 \\ U_1' y_1' + \cdots + U_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ U_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + U_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ U_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + U_n' y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

$$U_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(y_1, \cdots, y_n)(x)}$$

$$U_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(y_1, \cdots, y_n)(x)}$$

$$\vdots$$

$$U_n'(x) = \frac{W_n(x)}{W(y_1, \cdots, y_n)(x)}$$

$W_i(x)$ همان رونسکین توابع $y_1$ تا $y_n$ است که در ستون $i$ ام آن بردار $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{bmatrix}$ جایگزین شده است.

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & & y_n \\ 0 & y_2' & & y_n' \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ r(x) & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

page74

$$y^{(3)} - 2y'' + y' = e^{x}$$

$$y^{(3)} - 2y'' + y' = 0 \xrightarrow{\text{مشخصه}} \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \longrightarrow \lambda(\lambda-1)^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \rightarrow y_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \rightarrow y_2 = e^{x} \\ \lambda_3 = 1 \rightarrow y_3 = xe^{x} \end{cases}$$

$$y_g = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x} \longrightarrow y_p = U_1 + U_2 e^{x} + U_3 x e^{x}$$

$$\omega(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{x} & xe^{x} \\ 0 & e^{x} & (x+1)e^{x} \\ 0 & e^{x} & (x+2)e^{x} \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

$$U_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{x} & xe^{x} \\ 0 & e^{x} & (x+1)e^{x} \\ e^{x} & e^{x} & (x+2)e^{x} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^{x} \longrightarrow U_1(x) = e^{x}$$

$$U_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & xe^{x} \\ 0 & 0 & (x+1)e^{x} \\ 0 & e^{x} & (x+2)e^{x} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = -(x+1) \longrightarrow U_2(x) = \frac{-x^2}{2} - x$$

$$U_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^{x} & 0 \\ 0 & e^{x} & 0 \\ 0 & e^{x} & e^{x} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = 1 \Longrightarrow U_3(x) = x$$

$$y_G = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x} + \left(e^{x} + \left(\frac{-x^2}{2} - x\right)e^{x} + (x)(xe^{x})\right)$$

$$y_G = c_1 + c_2 e^{x} + e^{x} + c_3 x e^{x} + \frac{x^2}{2}e^{x} - xe^{x} = c_1 + (c_2+1)e^{x} + (c_3-1)xe^{x} + \frac{x^2}{2}e^{x}$$

$$y_G = c_1 + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x} + \frac{x^2}{2}e^{x}$$

$x \neq 0$ page 75



؟) نشان دهید توابع $y_1 = x$ و $y_2 = x^2$ جواب‌ها مستقل خطی معادله دیفرانسیل $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ می‌باشند. جواب‌ها معادله زیر را بدست آورید.

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{6}{x}$$

معادله به فرم استاندارد: $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{6}{x^3}$ / پاسخ‌ها مستقل خطی هستند

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0 \quad (x \neq 0 \text{ برای})$$

$$U'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \frac{6}{x^3} & 2x \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{-\frac{6}{x}}{x^2} = \frac{-6}{x^3} \xrightarrow{\int} U(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$V'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{6}{x^3} \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{\frac{6}{x^2}}{x^2} = \frac{6}{x^4} \xrightarrow{\int} \frac{-2}{x^3} = V(x)$$

$$y_p = Uy_1 + Vy_2 \longrightarrow y_p = \frac{3}{x^2}(x) - \frac{2}{x^3}(x^2) = \frac{1}{x}$$

$$y_G = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{x}$$

(I) روش تغییر متغیر (جلسه قبل)

(II) روش ضرایب نامعین $\quad$ خطی با ضریب متغیر $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

از این روش برای یافتن جواب خصوصی معادلاتی می‌توان استفاده کرد که اولاً معادله خطی با ضرایب ثابت باشد. دوماً تابع معلوم در معادله $r(x)$ از جنس توابع خوب باشد (توابعی که مشتق شان از جنس خودشان است.)

بنابراین حالات مختلف را روی $r(x)$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = r(x) & p, q \in \mathbb{R} \\ y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x) \end{cases}$$

(I) فرض کنیم $r(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $K$ باشد

$$\boxed{r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k}$$

در حالت I تابع $y$ را به فرم زیر در نظر می‌گیریم: $y_p = x^m(\text{چندجمله‌ای کامل از درجه } K)$

که در آن $m$ تعداد ریشه‌ها صفر در معادله مشخصه ممکن است

$$Ex)\ y'' + y = x^2 + 1$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

page76

(?) جواب خصوصی معادلات زیر را بدست آورید.

$(I)\ y'' + 2y' + y = x^2 + 1$ $\quad(II)\ y'' - y' = 2x$ $\quad III\ y''' - y'''' = x^3 + 1$

$(I)\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda+1)^2 = 0$

$y_p = x^0(Ax^2 + Bx + C)$

$2A + 4Ax + 2B + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1$

$Ax^2 + x(B+4A) + 2A + 2B + C = x^2 + 1$

$A = 1 \rightarrow B = -4 \rightarrow C = 7$

$y_p = x^2 - 4x + 7$

$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + y_p$

$(II)\ \lambda^2 - \lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

$y_p = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

$2A - 2Ax - B = 2x$

$A = -1 \quad B = -2$

$y_p = -x^2 - 2$

$y_g = c_1 + c_2 e^x - x^2 - 2$

$(III)\ \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

$y_p = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$

$y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2$

$y_p = \frac{-x^5}{20} - \frac{x^4}{x} - x^3 - \frac{7}{2}x^2$

$y_g = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + y_p$

(II) فرض کنیم $r(x)$ به فرم $\underline{M(x)e^{px}}$ باشد که $M(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه $K$ است و $p \in R$ عددی ثابت است.

در این حالت $y_p$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: $y_p = \quad$ (چند جمله‌ای کامل از درجه $K$) $e^{px}$

$m$ تعداد دفعاتی ست که $\lambda = p$ ریشه معادله همگن است.

$(Ex.)\ (I)\ y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$

$y_p = x^2(A)e^{2x} = Ax^2 e^{2x}$

$(2A + 8Ax + 4Ax^2)e^{2x} - 4(2Ax + 2Ax^2)e^{2x}$

$+ 4(Ax^2)e^{2x} = 5e^{2x}$

$2A = 5 \rightarrow A = \frac{5}{2}$

$y_p = \frac{5}{2}x^2 e^{2x}$

$(II)\ y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 6 \end{cases}$

$y_p = x(Ax + B)e^x$

...

$y_p = x\left(\frac{-x}{10} + \frac{9}{25}\right)e^x$

$(III)\ y^{(4)} + 2y''' + y'' = (x^2 + 3)e^{-x}$

$y_p = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2\right)e^{-x}$

جلسه ۱۷ام ۱۱٫۲٫۰۰

(III) فرض می‌کنیم تابع سمت راست در معادله فرم زیر باشد: $r(x)=M(x)\cos qx+N(x)\sin qx$

که در آن $M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله‌ای به ترتیب از درجات $m$، $n$ باشند و $q\in\mathbb{R}$.

در این حالت فرض می‌کنیم $y_p=(R(x)\cos qx+S(x)\sin qx)x^K$

که در آن $R(x)$ و $S(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه $\max\{m,n\}$ می‌باشند.

همچنین $K$ تعداد دفعاتی است که $\lambda=iq$ ریشه معادله مشخصه همگن است.

جواب خصوصی؟

(I) $y''+4y=6\cos 5x \qquad q=5$

$\lambda^2+4=0 \longrightarrow \lambda^2=-4 \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases}$

$5\neq 2$ پس تکراری وجود ندارد.

$y_p=A\cos 5x+B\sin 5x$

چون مشتق مرتبه اول نداریم می‌توانیم:

$y_p=A\cos 5x$

$y_p'=-5A\sin 5x+5B\cos 5x$

$y_p''=-25A\cos 5x-25B\sin 5x$

$-25(A\cos 5x+B\sin 5x)+4A\cos 5x+4B\sin 5x$

$=6\cos 5x=$

$-21A\cos 5x-21B\sin 5x=6\cos 5x$

$B=0,\quad A=\frac{6}{-21}=\frac{-2}{7}\rightarrow y_p=\frac{-2}{7}\cos 5x$

$y_G=y_g+y_p$

تمرین تحویلی

(II) $y''+4y=x^2\sin 2x \qquad q=2$

$\lambda^2+4\lambda=0 \longrightarrow \lambda^2=-4 \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases}$

$y_p=x\left[(Ax^2+Bx+C)\sin 2x+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cos 2x\right]$

(III) $y''+4y = 6\cos 5x + 7\sin 3x \longrightarrow y_p = A\cos 5x + B\sin 5x + \alpha \sin 3x + \beta \cos 3x$

IV) فرض می‌کنیم تابع سمت راست معادله به فرم زیر باشد: $r(x) = e^{px}(M(x)\cos qx + N(x)\sin qx)$

که در آن $M(x)$ و $N(x)$ دو چندجمله ای از درجات به ترتیب $m$ و $n$ می باشند، $p,q \in \mathbb{R}$

در این حالت فرض می‌کنیم $y_p = \left[e^{px}(R(x)\cos qx + S(x)\sin qx)\right]x^k$

که در آن $R(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله ای کامل از درجه $\max\{m,n\}$ می باشند.

همچنین $k$ تعداد دفعاتی است که $\lambda = p+iq$ ریشهٔ معادله مشخصه همگن است.

(?) جواب خصوصی؟

(I) $y''-4y'+5y = (x+2)e^{2x}\sin x \longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \longrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 2+i\\ \lambda_2 = 2-i\end{cases}$

$y_p = xe^{2x}((ax+b)\sin x + (Ax+B)\cos x) \qquad (a=0,\ b=\frac{1}{4},\ A=-\frac{1}{4},\ B=-1)$

مثال) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل با معادله مشخصه

$$\lambda^2(\lambda^2+2\lambda+2)^3(\lambda-1)^2=0$$

وطرف راست : $r(x)=x+\sinh x\cos x+e^x\sin^2 x+x^2-1$

را تعیین کنید.

ریشه‌ها: $\lambda_1=\lambda_2=0\ ;\ \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=-1+i\ ;\ \lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=-1-i\ ;\ \lambda_9=\lambda_{10}=1$

$$r(x)=x+\frac{1}{2}e^x\cos x-\frac{1}{2}e^{-x}\cos x+\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^x\cos 2x+x^2-1$$

$r_1(x)=\frac{1}{2}e^x\cos x \quad r_2(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}\cos x \quad r_3(x)=\frac{e^x}{2} \quad r_4(x)=\frac{-e^x}{2}\cos 2x \quad r_5(x)=x^2+x-1$

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}+y_{p_5}$$

$y_{p_1}=e^x(A\cos x+B\sin x) \qquad y_{p_2}=e^{-x}(A^*\cos x+B^*\sin x)\,x^3$

$y_{p_3}=\alpha e^x(x^2)=\alpha x^2e^x \qquad y_{p_4}=e^x(A_1\cos 2x+B\sin 2x) \qquad y_{p_5}=x^2(\alpha^*x^2+\beta^*x+\gamma^*)$

؟) تمرین تحویلی:

$$y''-y=\begin{cases}0 & 0\leq x<1\\ x+1 & 1\leq x\end{cases} \qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0$$

جلسه ۱۱۸ام / ۱۳/۲/۰۰

## حالات خاص در حل معادلات مرتبه دوم و بالاتر

I) اگر معادله دیفرانسیل مرتبه $n$ فاقد تابع تا مشتقات مرتبه $m-1$ام آن به صورت زیر باشد

$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)})=0$ آنگاه با تغییر متغیر $P=y^{(m)}$ به معادله‌ای از مرتبه $n-m$ تبدیل می‌شود.

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-m)})=0$$

Ex) معادلات را حل کنید.

$$(I)\quad y''+x(y')^2=0 \qquad p=y' \longrightarrow p'+xp^2=0 \Longrightarrow \frac{dp}{p^2}=-x\,dx \xrightarrow{\int} -\frac{1}{p}=\frac{-x^2}{2}+C$$

$$\rightarrow \frac{1}{p}=\frac{x^2-c^2}{2} \longrightarrow y'=\frac{2}{x^2-c^2}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x+c}\right) \xrightarrow{\int} y_g=\frac{1}{c}\ln\left(\frac{x-c}{x+c}\right)+c_1$$

$$(II)\quad xy^{(5)}-y^{(4)}=0 \qquad p=y^{(4)} \Rightarrow xp'-p=0 \longrightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x} \longrightarrow p=cx \Rightarrow y^{(4)}=cx$$

$$y^{(3)}=\frac{cx^2}{2}+c_1 \longrightarrow y^{(2)}=\frac{cx^3}{6}+c_1x+c_2 \longrightarrow y'=\frac{cx^4}{24}+\frac{c_1x^2}{2}+c_2x+c_3$$

$$y=\frac{cx^5}{120}+\frac{c_1x^3}{6}+\frac{c_2x^2}{2}+c_3x+c_4=c^*x^5+c_1^*x^3+c_2^*x^2+c_3x+c_4$$

II) معادلاتی به فرم $F(y,y',y'')=0$ که فاقد متغیر مستقل می‌باشند را می‌توان با تغییر متغیر زیر تبدیل به معادله‌ای مرتبه اول نمود.

$$y'=p \xrightarrow{d/dx} y''=p'=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$\Rightarrow F\left(y, p, p\dfrac{dp}{dy}\right)=0$ (معادله مرتبه اول برای تابع $p$ نسبت به متغیر $y$)

Ex) معادله زیر را حل کنید.

$(?)\quad y\,y''+(y')^2(1+y)=0$ (غیرخطی) $\qquad y'=p \rightarrow y''=p\dfrac{dp}{dy}$

$$yp\frac{dp}{dy}+p^2(1+y)=0 \Longrightarrow \frac{dp}{p}+\frac{(1+y)}{y}dy=0 \xrightarrow{\int} \ln p+\ln y+y=C \Rightarrow py=c^*e^{-y}$$

$$yy'=c^*e^{-y} \rightarrow ye^{y}dy=c\,dx \rightarrow (y-1)e^{y}=cx+c_1$$

(III) اگر معادله $F(x,y,y',y'')=0$ دارای خاصیت زیر باشد.

$$F=(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=0=\lambda^n F(x,y,y',y'')=0$$

در این صورت معادله با تغییر متغیر $y=e^{\int z(x)\,dx}$ به معادله‌ای مرتبه اول برحسب $z(x)$ تبدیل می‌شود.

$$y=e^{\int z(x)\,dx}\xrightarrow{d/dx} y'=z(x)e^{\int z(x)\,dx}\xrightarrow{d/dx} y''=z'(x)e^{\int z(x)\,dx}+z^2(x)\,e^{\int z(x)\,dx}$$

Ex) جواب عمومی؟ معادله همگن است شرط بالا برقرار است. ← غیرخطی $yy''-(y')^2-xy^2=0$

این با همگن های قبلی متفاوت است.

$$y=e^{\int z(x)\,dx}\longrightarrow \left(e^{\int z(x)dx}\right)^2\left(z'(x)+z^2(x)\right)-\left(e^{\int z(x)dx}\right)^2 z^2(x)-x\left(e^{\int z(x)dx}\right)^2=0$$

$$\underset{\neq 0}{\underset{\downarrow}{e^{2\int z(x)dx}}}\left(z'+z^2-z^2-x\right)=0\longrightarrow z'=x\xrightarrow{\int} z=\frac{x^2}{2}+c\rightarrow y=e^{\int\left(\frac{x^2}{2}+c\right)dx}=e^{\frac{x^3}{6}+cx+c_1}$$

$$\Longrightarrow y_g=c^{*}e^{\left(\frac{x^3}{6}+cx\right)}$$

(IV) معادلهٔ کوشی ـ اویلر Cauchy_Eular فرم کلی این معادله به صورت زیر است

$$x^n y^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1xy'+a_0y=0\qquad a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$$

یا به صورت:

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1(ax+b)y'+a_0y=0$$

$$a,b,a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$$

معادلات فوق را می‌توان با تغییر متغیر $x=e^t$ یا $ax+b=e^t$ تبدیل به خطی با ضرایب ثابت نمود.

کوشی - اویلر مرتبه دوم

$$x^2 y^{(2)} + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

$$x = e^t ,\ t = \ln x \longrightarrow dt = \frac{dx}{x} \longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} ,\ xy' = \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

$$y'' = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right) = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} \longrightarrow x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} \xrightarrow{d/dx} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

با جایگذاری روابط 1 و 2 در معادله کوشی داریم:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + a_1\left(\frac{dy}{dt}\right) + a_0 y = 0 \longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت برحسب متغیر $t$

$$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0$$

i) اگر $\Delta > 0$ و معادله دارای دو ریشه حقیقی و متمایز $\lambda_1, \lambda_2$ باشد:

$$y_g = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \xrightarrow{x = e^t} y_g = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

جواب عمومی معادله کوشی

ii) اگر $\Delta = 0$ و معادله دارای ریشه تکراری $\lambda$ باشد:

$$y_g = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \xrightarrow{x = e^t} y_g = c_1 x^{\lambda} + c_2 (\ln x)\, x^{\lambda}$$

iii) اگر $\Delta < 0$ ، ریشه‌ها معادله مشخصه $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$ شند

$$y_g = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t) \xrightarrow{x = e^t} y_g = x^{\alpha}\left(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right)$$

در حالت جواب عمومی معادله یکی از ۳ حالت زیر است :

$\underline{1}$ $y_g = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$ $\quad$ $\underline{2}$ $y_g = c_1 x^{\lambda} + c_2 (\ln x)\, x^{\lambda}$ $\quad$ $\underline{3}$ $x^{\alpha}(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin \beta \ln x)$

$= \bar{y}_g$

---

اپراتور

$D := \frac{d}{dt} \xrightarrow{\text{مثلاً}} Dy = \frac{dy}{dt}$ و $D^2 y = \frac{d^2 y}{dt^2} \Longrightarrow xy' = \frac{dy}{dt} = Dy \; ; x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = D^2 y - Dy$

$x^2 y'' = D(D-1)y$

$x^3 y^{(3)} = D(D-1)(D-2)y \; ---- \; x^n D^{(n)} = D(D-1)\dots(D-(n-1))y$

Ex.) $(D^2 - 2D + 1)y = y'' - 2y' + y$

$x^3 y^{(3)} + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0 \longrightarrow D(D-1)(D-2)y + a_2 D(D-1)y + a_1 Dy + a_0 y = 0$

خطی با ضریب ثابت

معادله مشخصه : $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + a_2 \lambda(\lambda-1) + a_1 \lambda + a_0 = 0$

! تذکر: درصورت نبودن شرط خاص و برقراری $x>0$ در معادله درجواب عمومی بجای $x$، $|x|$ قرار می‌دهیم.

مثال) جواب عمومی معادلات ؟ $(i)\ x^3y''-2xy=0$ $(ii)\ x^3y''-2xy=6\ln x$

$x\neq 0$

$$(i)\ \xrightarrow[\text{تقسیم بر } x]{x\neq 0} x^2y''-2y=0 \longrightarrow x=e^t \quad D:=\frac{d}{dt}$$

$$D(D-1)y-2y=0 \ \text{خطی با ضرایب ثابت} \Longrightarrow \lambda(\lambda-1)-2=0 \quad \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$$

$$y_g=c_1e^{2t}+c_2e^{-t} \xrightarrow{x=e^t} y_g=c_1|x|^2+c_2|x|^{-1}$$

---

(ii)

$$x^3y''-2xy=0 \longrightarrow y_g=c_1x^2+c_2x^{-1}$$ جواب قسمت همگن

$$y''-\frac{2}{x^2}y=\frac{6\ln x}{x^3} \longrightarrow$$ پیدا کردن جواب خصوصی

روش 1:

روش تغییر متغیر(روش طولانی تر)

$$y_p=U(x)\,x^2+V(x)\,x^{-1} \longrightarrow \begin{matrix}U'(x)=\dots\\V'(x)=\dots\end{matrix}$$

روش 2 : پیدا کردن جواب خصوصی $\qquad x^2y'' - 2y = \dfrac{6\ln x}{x}$

$$\xrightarrow{x = e^t} \quad * \left\{ D(D-1)y - 2y = 6te^{-t} \right\} \longrightarrow \begin{matrix} \lambda(\lambda-1)-2=0 \\ \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{نامعین}]{\text{روش ضرایب}} y_p = t(At+B)e^{-t} \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه } *} y_p = (At^2+Bt)e^{-t}$$

مشتق نسبت به $t$ $\Rightarrow y'_p = (2At+B-At^2-Bt)e^{-t} \Rightarrow y''_p = (2A-B-2At+(B-2A)t+At^2-B)e^{-t}$

$$y'_p = (-At^2+(2A-B)t+B)e^{-t} \to y''_p = (At^2-(4A-B)t+(2A-2B))e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 6te^{-t} \Rightarrow (At^2-(4A-B)t+(2A-2B)) + (At^2-(2A-B)t-B) - 2(At^2+Bt)$$

$$\to -6At = 6t \Rightarrow \begin{cases} -6A = 6 \\ 2A-3B = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \dfrac{-2}{3} \end{cases} \qquad y_p = \left(-t^2 - \frac{2}{3}t\right)e^{-t}$$

$$\xrightarrow{t = \ln x} y_p = \left(-\ln x - \frac{2}{3}\right)\frac{\ln x}{x}$$

$$y_G = c_1x^2 + c_2x^{-1} + \left(-\ln x - \frac{2}{3}\right)\frac{\ln x}{x}$$

مثال) جواب عمومی؟

$$x^3y^{(3)} - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3$$

حل معادله در فرم همگن

$x = e^t \quad , D := \frac{d}{dt}$

$$D(D-1)(D-2)y - D(D-1)y + 2Dy - 2y = 0$$

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda-1)(\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2}_{\lambda^2 - 3\lambda + 2}) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = +2 \end{cases}$$

$$y_g = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t} \xrightarrow{x = e^t} y_g(x) = c_1|x| + c_2|x|\ln|x| + c_3 x^2$$

جواب خصوصی

$$D(D-1)(D-2)y - D(D-1)y + 2Dy - 2y = e^{3t} \qquad y_p = Ae^{3t}$$

$$D^3y - 4D^2y + 5Dy - 2y = e^{3t} \qquad y_p' = 3Ae^{3t} \quad y_p'' = 9Ae^{3t} \quad y_p^{(3)} = 27Ae^{3t}$$

$$27A - 36A + 15A - 2A = 1 \longrightarrow 4A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4}e^{3t} \rightarrow y_p = \frac{|x|^3}{4} \qquad y_G = c_1|x| + c_2|x|\ln|x| + c_3x^2 + \frac{1}{4}|x|^3$$

مثال )

$$y'' + \frac{2}{x-2} y' + \frac{3}{2(x-2)^2} y = 0 \qquad x \neq 2$$

$$\xrightarrow{*(x-2)^2} \quad (x-2)^2 y'' + 2(x-2) y' + \frac{3}{2} y = 0 \qquad x-2 = e^t$$

$$D(D-1)y + 2Dy + \frac{3}{2} y = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) + 2\lambda + \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{3}{2} = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} i \\ \lambda_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} i \end{cases}$$

$$y_g = e^{-\frac{1}{2}t} \left( c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2} t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2} t\right) \right)$$

$$y_g = \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} \cdot \left( c_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \ln|x-2|\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \ln|x-2|\right)\right)$$

پایان مباحث میانترم $\longleftarrow$

امتحان 10 تستی $\longleftarrow$ برگشت دارد!

2 تشریحی $\longleftarrow$ برگشت ندارد!

## حل معادله دیفرانسیل به کمک سری ها

مقدمه

سری توانی Powerseries

فرض کنیم $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای در اعداد حقیقی باشد و $x_0 \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ را یک سری توانی حول $x_0$ (به مرکز $x_0$) گوییم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + c_1 + \cdots = \begin{cases} =L<\infty & \text{سری همگرا است} \\ =\infty & \text{سری واگرا است.} \end{cases}$$

// $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$ واگرا

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ همگرا // $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ $\begin{cases} a_n = \frac{1}{n(2)^n} \\ x_0 = -1 \end{cases}$

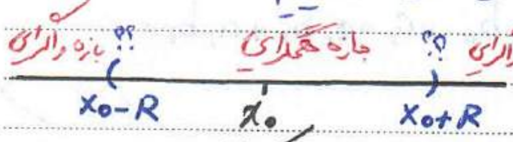
$\text{if } x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا

$\text{if } x=-3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا

$\text{if } x=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ همگرا

تعریف شعاع همگرایی Radius of convergence

اگر $R \geq 0$ به گونه‌ای باشد که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ به ازای $|x-x_0|<R$ همگرا، و به ازای $|x-x_0|>R$ واگرا باشد $R$ را شعاع همگرایی فوق می‌گوییم.




می‌توان نشان داد $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

یا $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

تذکر هر سری توانی حول $x_0$ در $x=x_0$ همگراست.

$\text{if } R=0 \Rightarrow$ تنها در $x=x_0$ همگراست.

$\text{if } R=\infty \Rightarrow$ سری به ازای $x \in \mathbb{R}$ همگراست.

مثال) بازه همگرایی زیر را تعیین کنید.

$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n\,2^n}$

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n2^n}{1/(n+1)2^{n+1}} = 2 \quad |x+1|<2 \to -3<x<1$

if $x=-3$ همگرا، $x=1$ واگرا

بازه همگرایی $[-3,1)$

$(ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow R = \infty \qquad x_0 = 0$

سری مکلورن برابر با $e^x$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$

Ex.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \qquad \left\{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \end{array}\right\} R=\infty$

تذکر: فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ، $g(x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ داریم:

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n \ ; |x-x_0|<R$$

$$f(x).g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \ ; c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$c_0 = a_0 b_0 \ , c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \ , \dots$$

تذکر: فرض کنیم شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ، $R$ باشد. در بازه همگرایی می‌توان از سری فوق مشتق و انتگرال گرفت. ثابت می‌شود شعاع همگرایی سری‌های حاصل با شعاع سری‌های اولیه برابر است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x) \ ; |x-x_0|<R \to a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$\downarrow d/dx$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = f'(x) \ ; \ |x-x_0|<R \to a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots$$

اثبات تغییرنکردن شعاع همگرایی برای تابع مشتق

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n^*}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$$

مشتق دوم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x-x_\circ)^{n-2}=f''(x)\quad ;|x-x_\circ|<R$$

انتگرال

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_\circ)^n=f(x)\ ;\ |x-x_\circ|<R$$

$$\int \left( \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_\circ)^{n+1}=\int f(x)\,dx\ ;\ |x-x_\circ|<R \right.$$

تذکر،

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,x^{n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_\circ)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_\circ)^n \longrightarrow \begin{cases} a_\circ=b_\circ \\ a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ \vdots \end{cases}\qquad a_n=b_n$$

Ex.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$(n+1)a_{n+1}=b_n$$

Ex) معادله دیفرانسیل $y''+y=0$ را به کمک سری حل کنید.

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

فرض می‌کنیم $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . با مشتق‌گیری از $y(x)$ و جایگذاری در معادله می‌توان ضرایب $a_n$ را مشخص نمود.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{d/dx} y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \xrightarrow{d/dx} y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جایگذاری در معادله:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n)(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ n+2(n+1) a_{n+2} + a_n \right] x^n = 0$$

$$\longrightarrow (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0 \; ; \; n=0,1,2,\dots$$

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)} \; ; n=0,1,2,\dots$$

$$n=0;\; a_2 = -\frac{a_0}{2\times1} = -\frac{a_0}{2!} \qquad n=2;\; a_4 = \frac{-a_2}{4\times3} = \frac{a_0}{4!} \; ; n=4 = -\frac{a_0}{6}$$

$$a_{2n} = (-1)^n \left(\frac{a_0}{2n!}\right)$$

$$n=1;\; a_3 = \frac{-a_1}{3\times2} = \frac{-a_1}{3!} \; ; \; n=3;\; a_5 = \frac{-a_3}{5\times4} = \frac{a_1}{5!}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \left(\frac{a_1}{(2n+1)!}\right)$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = a_0 \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}^{\cos x} + a_1 \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}^{\sin x}$$

$$y(0)=a_0$$

$$y'(0)=a_1$$

جلسه بیست و یکم

۰۰/۰۲/۲۵

تابع تحلیلی [تعریف]: یک تابع را در نقطه $x_0$ تحلیلی گوییم هرگاه سری تیلور این تابع در $x_0$ موجود باشد و در یک همسایگی از $x_0$ به خود تابع همگرا باشد.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad ; \quad |x-x_0|<\varepsilon$$

مثال) $\sin x$ در تمامی نقاط تحلیلی است. همچنین تابع $\frac{1}{1+x^2}$ در $x=0$ تحلیلی است. Ex.)

[تعریف]: نقطه $x_0$ برای معادله دیفرانسیل $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ عادی (معمولی) گوییم هرگاه توابع $\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $\frac{R(x)}{P(x)}$ در نقطه $x_0$ تحلیلی باشند. [Ordinary point]

در غیر این صورت $x_0$ نقطه تکین (منفرد) معادله گوییم. [Singular point]

* اگر $P$, $Q$, $R$ چند جمله‌ای باشند و عامل مشترک نداشته باشند آنگاه $x_0$ را نقطه عادی مذکور گوییم هرگاه $P(x_0)\neq 0$ ؛ در غیر این صورت $x_0$ را تکین گوییم.

مثال) نقاط معمولی و تکین معادلات زیر را مشخص کنید. $(I)\ (1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 ; \alpha\in\mathbb{R}$

$(II)\ x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \quad p\in\mathbb{R}$

$(III)\ xy''+(\sin x)y'+x^2y=0$

(I) $P(x)=1-x^2 \quad Q(x)=-2x \quad R(x)=\alpha(\alpha+1)$

نقاط $\{1,-1\}$ نقاط تکین معادله و $\mathbb{R}-\{1,-1\}$ نقاط عادی معادله می‌باشند.

(II) $P(x)=x^2 \quad Q(x)=x \quad R(x)=x^2-p^2$

نقطه $\{0\}$ نقطه تکین معادله و $\mathbb{R}-\{0\}$ نقاط عادی معادله می‌باشند.

(III) $\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{\sin x}{x}$ , $\dfrac{R(x)}{P(x)}=x$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Q(x)}{R(x)}<\infty$

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

[تذکر] در موارد خاصی که توابع $P$ و $Q$ و $R$ هموارند می‌توان از شرط زیر برای بررسی تحلیلی بودن توابع $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ استفاده نمود.

if $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Q}{P}<\infty$ $\quad \dfrac{Q}{P}$ در $x_0$ تحلیلی است

if $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R}{P}<\infty$ $\quad \dfrac{R}{P}$ در $x_0$ تحلیلی است

[قضیه] فرض کنید $x_0$ نقطه عادی معادله روبرو باشد. $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$

(توابع $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ در $x_0$ تحلیلی باشند.) در این صورت معادله فوق حول $x_0$ دارای جواب عمومی به فرم روبرو است:

$$y_g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$$

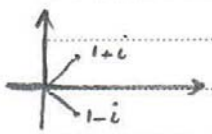
که در آن $y_0$ و $y_1$ دو سری توانی می‌باشند که شعاع همگرایی آنها حداقل برابر با مینیمم شعاع همگرایی سری‌های $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ در $x_0$ می‌باشند.

مثال) (الف) شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{1}{1+x^2}$ حول $x=0$ را بدست آورید.

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ ;\ |x|<1 \qquad R=1$$

(ب) شعاع همگرایی سری تیلور تابع $\frac{1}{x^2-2x+2}$ را حول $x=0$ و حول $x=1$ بدست آورید.

$$x^2-2x+2=0 \longrightarrow \begin{cases}1-i\\1+i\end{cases} \qquad |x+iy|=\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \sqrt{2}$$ فاصله $x=0$ تا ریشه‌ها




شعاع همگرایی سری تیلور حول $x=0$ $\longrightarrow R=\sqrt{2}$

شعاع همگرایی سری تیلور حول $x=1$ $\longrightarrow R=1$

[تذکر] در تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $f$ و $g$ دو چندجمله‌ای باشند که عامل مشترک نداشته باشند آنگاه شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{f}{g}$ حول $x_0$ برابر است با فاصله $x_0$ تا نزدیکترین ریشه مخرج.
$(g(x)=0)$

مثال) جواب عمومی معادله $y''-xy'+y=0$ را حول $x_0=0$ بدست آورید.

واضح است $x_0=0$ نقطه عادی است و لذا می‌توان نوشت:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$\rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1} \longrightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n)(n-1)x^{n-2}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n}_{xy'}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n+a_n\right]x^n=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(a_{n+1})x^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n$$ چون جمله صفر اضافه شده

$$a_{n+2}=\frac{(n-1)a_n}{(n+2)(n+1)}\ ;\ n=0,1,2,\dots$$

$n=1\ ;\ a_3=0\ ;\ a_5=a_7=a_9=0\ \dots$

$n=0\ ;\ a_2=\frac{-a_0}{2!}\ ;\ n=2\ ;\ a_4=\frac{-a_0}{4!}\ ;\ a_6=-\frac{3a_0}{6!}$

ادامه ← صفحه بعد

$$y_g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n\ \text{فرد}} a_n x^n + \sum_{n\ \text{زوج}} a_n x^n$$

$$y_g(x) = (a_1 x) + (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots)$$

$$y_g(x) = \underbrace{a_1 x}_{y_1(x)} + a_0 \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{3x^6}{6!} \dots\right)}_{y_0(x)}$$

$y_g = a_0 y_0 + a_1 y_1$

$\forall x \in \mathbb{R}$

علت :

شعاع همگرایی سری های توابع روبه رو حول $x=0$ $\quad \frac{Q}{P} = -x \quad \frac{R}{P} = 1$

برابر با بی نهایت است . $R=\infty$

نکته

$$\text{if} \quad f_1 + f_2 + f_3 = 0 \longrightarrow y = e^x$$
$$\text{if} \quad f_2 + x f_3 = 0 \longrightarrow y = x$$

$y'' - xy' + y = 0 \ ; \ y_1 = x$

روش کاهش مرتبه . $y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int x\,dx}\, dx$

$$y_2 = x \int \underbrace{\frac{1}{x^2} e^{\frac{x^2}{2}}}_{} dx$$

انتگرال تابع اولیه ندارد!

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{3x^6}{6!} \dots\right)$$

جلسه بیست و دوم

۱۴۰۰,۲,۲۷

[حل] معادله لژاندر و بررسی خواص جواب‌های آن

فرم کلی این معادله به صورت زیر است $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0;\ \alpha\in\mathbb{R}$

واضح است که $x=0$ نقطه عادی معادله است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Rightarrow y'=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k a^{k-1} \Rightarrow y''=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k-2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k+\alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_k x^k-2\sum_{k=0}^{\infty}k a_k x^k+\alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}-(k-1)(k)a_k-2ka_k+\alpha(\alpha+1)a_k\right]x^k=0$$

$$a_{k+2}=\frac{-(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k;\ k=0,1,2,\dots$$

فرض می‌کنیم $\alpha=n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$a_{k+2}=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k;\ k=0,1,2,\dots$$

$$k=0\rightarrow a_2=\frac{-n(n+1)}{2!}a_0 \qquad k=2\rightarrow a_4=\frac{-(n-2)(n+3)}{3\times 4}a_2=\frac{(n-2)(n)(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

$$k=4\rightarrow a_6=\frac{-(n-4)(n-2)(n)(n+1)(n+3)}{6!}a_0 \qquad k=6\rightarrow a_8=\frac{(n-6)(n-4)(n-2)(n)(n+1)(n+3)(n+5)}{8!}a_0$$

$$k=1\rightarrow a_3=\frac{-(n-1)(n+2)a_1}{3!} \qquad k=3\rightarrow a_5=\frac{-(n-3)(n+4)}{4\times 5}a_3=\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}$$

$$k=5\rightarrow a_7=\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}$$

Sep 20

$$y_g=\sum_{k=0}^{\infty}=\sum_{k\ \text{زوج}}a_k x^k+\sum_{k\ \text{فرد}}a_k x^k\Rightarrow$$ صفحه بعد

$$y_g(x) = a_0\left(1 - \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \frac{(n-2)(n)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)(n)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots\right)$$

$$= a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) \;;\; |x|<1$$

[تذکر] به ازای $n$های زوج $(n=0,2,4,\dots)$، سری $y_0(x)$ به یک چند جمله ای از درجه $n$ تبدیل می شود و $y_1(x)$ یک سری نامتناهی است.

به ازای $n$های فرد $(n=1,3,5,\dots)$ سری $y_1(x)$ تبدیل به یک چند جمله ای از درجه $n$ می شود و $y_0(x)$ یک سری نامتناهی است.

Ex.) $n=2$ ; $y_g(x) = a_0(1-3x^2) + \cancel{a_1}^{\,0}($سری نامتناهی$)$

$n=1$ ; $y_g(x) = \cancel{a_0}^{\,0}($سری نامتناهی$) + a_1 x$

تعریف می کنیم

$n=0$ $P_0(x) = a_0$

$n=2$ $P_2(x) = a_0(1-3x^2)$

$n=4$ $P_4(x) = a_0\left(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\right)$

$n=6$ $P_6(x) = a_0\left(1-21x^2+63x^4-\frac{21\times 11}{5}x^6\right)$

$\vdots$

$n=1$ $P_1(x) = a_1 x$

$n=3$ $P_3(x) = a_1\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)$

$n=5$ $P_5(x) = a_1\left(x-\frac{14}{3}x^3+\frac{21}{5}x^5\right)$

$\vdots$

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

ضرایب $a_0, a_1$ در چند جمله‌ای‌ها $P_n$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که $P_n(1)=1$

$n=0,1,2,\dots$

$P_0(1)=1 \rightarrow a_0=1 \qquad P_2(1)=1 \rightarrow a_0=\frac{-1}{2} \qquad P_4(1)=1 \rightarrow a_0=\frac{1\times3}{2\times4} \qquad P_6(1)=1 \rightarrow a_0=\frac{-1\times3\times5}{2\times4\times6}$

$$a_0=\begin{cases}1 & n=0\\ (-1)^{n/2}\cdot\dfrac{1\times3\times\dots\times(n-1)}{2\times4\times\dots\times n} & n=2,4,6,\dots\end{cases}$$

$P_1(1)=1 \rightarrow a_1=1 \qquad P_3(1)=1 \rightarrow a_1=\frac{-1\times3}{2} \qquad P_5(1)=1 \rightarrow a_1=\frac{1\times3\times5}{2\times4}$

$$a_1=\begin{cases}1 & n=1\\ \dfrac{1\times3\times5\times\dots\times n}{2\times4\times\dots\times(n-1)}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}} & ;\ n=3,5,7,\dots\end{cases}$$

بنابراین چند جمله‌ای‌های لژاندر عبارتند از

$P_0(x)=1$

$P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{-1}{2}(1-3x^2)$

$P_3(x)=\frac{-3}{2}\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)$

$P_4=\frac{3}{8}\left(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\right)$

$\vdots$

خواص چند جمله‌ای‌های لژاندر

i) $P_n(x)$ به ازای $n$ های زوج، زوج و به ازای $n$ های فرد، فرد است.

ii) $P_n(1)=1$ ، $n=0,1,2,\dots$ و $P_n(-1)=(-1)^n$ ، $n=0,1,2,\dots$

iii) به ازای $n$ های فرد، $P_n(0)=0$ ، $n=1,3,5,\dots$ و به ازای $n$ های زوج $P'_n(0)=0$ ، $n=2,4,6,\dots$

iv) $P_n(x)$ ، $n\neq 0$ دارای دقیقاً $n$ ریشه حقیقی و متمایز در $(-1,1)$ می‌باشد.

$$P_1(x)=x \longrightarrow x=0 \qquad P_2(x)=\frac{-1}{2}(1-3x^2)=0 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_3(x)=0 \longrightarrow x=0,\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

v) خاصیت تعامد یا عمود بودن

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}[P_3(x)]^2\,dx=\frac{2}{7}$$

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=0 \longrightarrow f\perp g$$

vi) (فرمول رودریگز) Rodrigues's formula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \quad ; n = 0, 1, 2, \dots$$

$n=0$ $P_0(x) = 1$ ; $n=1$ $P_1(x) = x$ ; $n=2$ $P_2(x) = \frac{-1}{2}(1-3x^2)$

vii) (رابطه بازگشتی)

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \end{cases}$$

viii) بسط تابع $f(x)$ برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$$

$$\xrightarrow{\times P_m(x)\ \int_{-1}^{1}} \quad \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$$

Ex.) $f(x) = \begin{cases} 0 & ; -1 < x < 0 \\ 1 & ; 0 < x < 1 \end{cases}$ $\quad f(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + C_2 P_2(x) + \dots$

$$C_0 = \frac{2(0)+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_0(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}$$

$$C_1 = \frac{2(1)+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_1(x)\, dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{3}{4}$$

$$C_3 = \frac{2(2)+1}{2} \int_{-1}^{1} f\, P_2(x)\, dx = 0$$

مثال I) حداقل شعاع همگرایی سری ها جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر حول نقاط $x=0$ ، $x=-\frac{1}{2}$ بیابید.

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \; ; \; R \geq 1 \qquad\qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x+\frac{1}{2}\right)^n \; ; \; R \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

II به کمک سری ها جواب معادلات زیر را بدست آورید.

(i) $yy'' + (y')^2 = 0 \quad ; \; y(0) = 1 \quad , \; y'(0) = \frac{1}{4} \longrightarrow y'' = \frac{-1}{16} \; , \; y''' = ۳/۶۴$

(ii) $y'' + y'(\sin x) + ye^x = 0$

(i)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$y = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16 \times 2}x^2 + \frac{3}{64 \times 3!}x^3 + \cdots$$

---

(ii)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)x^3}{3!}$$

$$x=0 \longrightarrow y''(0) + \underbrace{y(0)}_{\alpha}e^0 \Rightarrow y''(0) = -\alpha$$

$$y^{(3)} + \sin x\, y'' + \cos x\, y' + e^x y' + e^x y = 0 \longrightarrow y^{(3)}(0) + 2\overset{\beta}{y'(0)} + \overset{\alpha}{y(0)} = 0 \longrightarrow y^{(3)} = -\alpha - 2\beta$$

$$y = \alpha + \beta x - \frac{\alpha x^2}{2!} - \frac{(\alpha+2\beta)}{3!}x^3 + \cdots$$

دسته‌بندی نقاط تکین (منفرد) معادله

regular singular point

نقطه $x_0$ را تکین منظم معادله $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ گوییم هرگاه

اولاً تکین باشد (توابع $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ در $x_0$ تحلیلی نباشد.)

دوماً توابع $(x-x_0)\frac{Q}{P}$ و $(x-x_0)^2\frac{R}{P}$ در $x_0$ تحلیلی باشند.

در غیر این صورت

[حداقل $(x-x_0)\frac{Q}{P}$ یا $(x-x_0)^2\frac{R}{P}$ در $x_0$ تحلیلی نباشد] $x_0$ را تکین نامنظم گوییم.

مثال) نقاط تکین و نوع آنها را برای معادلات زیر مشخص کنید.

(i) $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$

(ii) $2x(x-2)^2y''+3xy'+(x-2)y=0$

(iii) $(x-\frac{\pi}{2})^2y''+y'\cos x+y\sin x=0$

(i) $x=\pm1$ نقاط تکین معادله هستند.

$x=-1$

$\lim(x+1)\frac{Q}{P}=\lim(x+1)\frac{(-2x)}{1-x^2}=\lim\frac{2x}{x-1}\quad \lim_{x\to-1}\frac{2x}{x-1}=1<\infty$ تحلیلی

$\lim(x+1)^2\frac{R}{P}=\lim(x+1)\frac{(\alpha(\alpha+1))}{1-x}\quad \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{-x+1}\alpha(\alpha+1)=0<\infty$ تحلیلی

$x=-1$ تکین منظم معادله است. به طور مشابه می‌توان نشان داد $x=1$ نیز تکین منظم است.

(ii) $x=0, 2$ نقاط تکین هستند.

$x=0;\ \lim x\frac{Q}{P}=\lim x\left(\frac{3x}{2x(x-2)^2}\right)=0<\infty$ ، تحلیلی

$\lim_{x\to0}x^2\frac{R}{P}=\lim_{x\to0}x^2\frac{(x-2)}{2x(x-2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2(x-2)}=0<\infty$ تحلیلی

$x=0$ تکین منظم است.

$x=2;\ \lim_{x\to2}(x-2)\frac{Q}{P}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)3x}{2x(x-2)}=$ وجود ندارد غیرتحلیلی

$x=2$ تکین نامنظم است.

(iii)

$x=\frac{\pi}{2}$ نقطه تکین است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})\frac{Q}{P} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\sin x = -1 < \infty$$

تحلیلی است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})^2 \frac{R}{P} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})^2 \frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1 < \infty$$

تحلیلی است.

بنابراین $x=\frac{\pi}{2}$ تکین منظم معادله iii است.

تذکر: فرض کنیم $x_0$ نقطه تکین منظم معادلهٔ $P(x)y''(x)+Q(x)y'(x)+R(x)y(x)=0$ باشد. ثابت می‌شود معادله حول $x_0$ دارای جوابی به صورت زیر است:

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_n)^n \;;\; r\in\mathbb{C} \quad \text{و} \quad a_0\neq 0 \text{ که در آن}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r}$$

به سری فوق سری فروبینیوس Frobenius می‌گوییم.

فرض کنیم تکین منظم معادله $x_0=0$ باشد. اگر طرفین معادله را بر $P$ تقسیم کنیم.

$$y''+\frac{Q(x)}{P(x)}y'+\frac{R(x)}{P(x)}y=0 \xrightarrow{*(x^2)} x^2y''+x\underbrace{\left(\frac{xQ}{P}\right)}_{\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n}y'+\underbrace{\frac{x^2R}{P}}_{\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n}y=0$$

و ...

جلسه بیست چهارم

۳ خرداد ۱۴۰۰

فرض کنیم $x_0$ تکین منتظم $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ باشد.

[ برای راحتی فرض می‌کنیم $x_0=0$ ] بنابراین معادله فوق دارای جوابی به فرم زیر است:

$$y = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad (a_0 \neq 0)$$

معادله مذکور را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$x^2y'' + x\left(x\frac{Q}{P}\right)y' + x^2\frac{R}{P}y = 0$$

با توجه به اینکه $x_0=0$ تکین منتظم است داریم:

$$x\frac{Q}{P} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \,, \quad x^2\frac{R}{P} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

$$x^2y'' + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)y' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری $y, y', y''$ در معادله قبل داریم:

$$a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\big((r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\big)\right]x^{n+r} = 0$$

که در آن: $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1 x + \cdots \qquad p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}$$

$\longrightarrow$ اگر $x_0 \neq 0$ آنگاه $(x-x_0)$ جایگذاری می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = q_0 + q_1 x \qquad q_0 = \lim x^2\frac{Q(x)}{P(x)}$$

معادله شاخصی — indicial equation معادله شاخصی

$$0 = x^r \xrightarrow{\text{ضریب}} a_0F(r) = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} F(r) = 0 \longrightarrow \underbrace{r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0}$$

$$0 = x^{r+n} \xrightarrow{\text{ضریب}} F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\big((r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\big) = 0 \,,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$ رابطه *

حالات زیر را روی ریشه‌های معادله شاخص در نظر می‌گیریم:

(i) فرض کنیم $\begin{cases} r_1 > r_2 \\ r_1 - r_2 \neq n \in \mathbb{N} \end{cases}$ عدد طبیعی نباشد دو ریشه حقیقی و متمایز معادله شاخص باشند. در این حالت ابتدا به ازاء ریشه بزرگتر یعنی $r_1$ جواب معادله را بدست می‌آوریم. برای این کار $r_1$ را در معادله * قرار می‌دهیم و ضرایب $a_n$ را محاسبه می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{r_1}\Big(\underbrace{1}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\Big)$$

برای یافتن جواب دوم معادله کافی است این بار در رابطه * به جای $r$، $r_2$ قرار دهیم. در اینصورت:

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n = x^{r_2}\Big(\underbrace{1}_{a_0^*} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* x^n\Big)$$

جواب عمومی در این حالت عبارت است از: $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$

(ii) فرض کنیم معادله شاخص دارای دو ریشه تکراری $r_1 = r_2 = r$ باشند. در این حالت معادله دارای جوابی به فرم زیر است:

$$y_1 = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$a_n$ ← از رابطه * به ازای $r$ بدست می‌آید.

برای یافتن جواب دوم فرض می‌کنیم: $y_2 = V(x)\, y_1$ ثابت می‌شود:

$$y_2 = (\ln x)\, y_1 + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

که ضرایب $b_n$ با جایگذاری $y_2$ در معادله حاصل می‌شوند.

نکته: اگر فرم بسته $y_1$ = باشد کاهش مرتبه را اگر از روش کاهش مرتبه به طور مستقیم برویم راهی راحت‌تر است!

iii) فرض کنیم معادله شاخصی دارای ۲ ریشه حقیقی و متمایز $r_1 > r_2$ باشد

به طوری که $r_1 - r_2 = N$ ← عدد طبیعی. در این حالت ابتدا به ازای ریشه بزرگتر جواب معادله را حساب می‌کنیم.

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

علت عاجز ✓ در جزوه نوشته نشد اما در کلاس تدریس شد :) — پس $r_1 - r_2 = N$ و $r_1 - r_2 \neq N$

در این حالت فرض می‌کنیم $y_2 = V(x)\, y_1$ می‌توان نشان داد

$$y_2 = C y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

if $c = 0$ ⟵ حالت i // if $C = C_2$ و $b_0 = 0$ ⟵ حالت ii

که در آن ثابت C و ضرایب $b_n$ با جاگذاری $y_2$ در معادله مشخص می‌شود.

مثال) جواب معادله دیفرانسیل $\underbrace{2x^2}_{P(x)} y'' \underbrace{- x}_{Q(x)} y' + \underbrace{(1+x)}_{R(x)} y = 0$ را حول $x=0$ بدست آورید.

نقطه $x=0$ واضح است که نقطه تکین است.

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q}{P} = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{-x}{2x^2}\right) = \frac{-1}{2} < \infty \to p_0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R}{P} = \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1+x}{2x^2}\right) = \frac{1}{2} < \infty \to q_0$$

هردو در $x=0$ تحلیلی هستند پس $x=0$ تکین منظم است.

داریم

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

معادله شاخصی : $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \rightarrow r^2 - r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2r^2 - 3r + 1 = 0 \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

جاگذاری :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r}$$

$$2r(r-1)a_0 - ra_0 + a_0 = 0 \Longrightarrow [2r(r-1) - r + 1]a_0 = 0 \Longrightarrow (r-1)(2r-1)a_0 = 0 \quad : x^r \text{ ضریب}$$

$$x^{n+r} \text{ ضریب } = 0 \longrightarrow 2(n+r)(n+r-1)a_n - (n+r)a_n + a_n + a_{n-1} = 0$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \longleftarrow (r-1)(2r-1) = 0 \longleftarrow a_0 \neq 0 \quad : \text{از رابطه اول}$$

از رابطه دوم:

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+r)^2 - 3(n+r) + 1} \quad ; n \geqslant 1$$

$$r = 1 \longrightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n+1)} \quad ; n \geqslant 1$$

$$n=1 \quad a_1 = \frac{-a_0}{1\times 3} \qquad n=2 \quad a_2 = -\frac{a_1}{2\times 5} = \frac{a_0}{(2!)3\times 5}$$

$$n=3 \quad a_3 = \frac{-a_2}{3\times 7} = -\frac{a_0}{(3!)(3\times 5\times 7)} \longrightarrow a_n = (-1)^n \frac{a_0}{(n!)(3\times 5\times \cdots \times (2n+1))}$$

$$y_1 = x^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_0}{n!(3\times 5\times \cdots \times (2n+1))} x^n = x^1\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(3\times 5\times \cdots \times (2n+1))}\right)$$

$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{2(n+\frac{1}{2})^2 - 3(n+\frac{1}{2}) + 1} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \quad ; n \geqslant 1$$

$$n=1 \quad a_1 = \frac{-a_0}{1} \qquad n=2 \quad a_2 = \frac{-a_1}{2\times 3} = \frac{a_0}{2!\times 3}$$

$$n=3 \quad a_3 = \frac{-a_2}{3\times 5} = \frac{a_0}{3!(3\times 5)} \longrightarrow a_n = (-1)^n \frac{a_0}{n!(3\times 5\times \cdots \times (2n-1))}$$

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_0}{n!(3\times 5\times \cdots \times (2n-1))} x^n = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(3\times 5\times \cdots \times (2n-1))} x^n\right)$$

page 108

جلسه بیست و پنج

۴ خرداد ۱۴۰۰

?) جواب عمومی معادله زیر را در همسایگی از صفر بدست آورید.

$$4x^2y''-8x^2y'+(4x^2+1)y=0$$

واضح است که $x=0$ تکین معادله است.

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q}{P}=\lim x\left(\frac{-8x^2}{4x^2}\right)=\underset{\hookrightarrow p_0}{0}<\infty$$

توابع $x\frac{Q}{P}$ و $x^2\frac{R}{P}$ در $x=0$ تحلیلی اند $\rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R}{P}=\lim x^2\left(\frac{4x^2+1}{4x^2}\right)=\frac{1}{4}<\infty$$

لذا $x=0$ تکین منظم است.

$$r(r-1)+(0\times r)+\frac{1}{4}=0\rightarrow\left(r-\frac{1}{2}\right)^2=0\rightarrow r_1=r_2=\frac{1}{2}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}\rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}\rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

جایگذاری $y$ و $y'$ و $y''$ در معادله:

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}-8\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}+4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+2}=0$$

$$4r(r-1)a_0x^r+4r(r+1)a_1x^{r+1}-8ra_0x^{r+1}+a_0x^r+a_1x^{r+1}+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[4(n+r)(n+r-1)a_n-8(n+r-1)a_{n-1}+a_n+4a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

$x^r$ ضریب $=0\longrightarrow[4r(r-1)+1]a_0=0\xrightarrow{a_0\neq 0}r^2-r-\frac{1}{4}=0\rightarrow r_1=r_2=\frac{1}{2}$

$x^{r+1}$ ضریب $=0\xrightarrow{(*)}4r(r+1)a_1+a_1-8a_0=0$

$x^{n+r}$ ضریب $=0\xrightarrow{(**)}4(n+r)(n+r-1)a_n-8(n+r-1)a_{n-1}+a_n+4a_{n-2}=0$

$$\text{if } r=\frac{1}{2}\xrightarrow{(*)}a_1=a_0\qquad \text{if } r=\frac{1}{2}\xrightarrow{(**)}a_n=\frac{8\left(n+\frac{1}{2}-1\right)}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}-1\right)+1}a_{n-1}-\frac{4a_{n-2}}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}-1\right)+1}$$

$$a_n = \frac{2n-1}{n^2} a_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{n^2} \quad ; \; n = 2, 3, \ldots$$

$$n=2 \longrightarrow a_2 = \frac{3}{2^2} a_1 - \frac{a_0}{2^2} \xrightarrow{a_1 = a_0} a_2 = \frac{1}{2!} a_0$$

$$n=3 \longrightarrow a_3 = \frac{5}{3^2} a_2 - \frac{a_1}{3^2} \longrightarrow a_3 = \frac{1}{3!} a_0$$

$$n=4 \longrightarrow a_4 = \frac{7}{4^2} a_3 - \frac{a_2}{4^2} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4!} a_0$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_0}{n!} \\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \longrightarrow y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n \overset{\text{if } a_0 = 1}{=} \sqrt{x}\, e^x$$

برای یافتن $y_2$ می‌توان:

① $y_2 = (\ln x)\, y_1 + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$

② استفاده مستقیم از روش کاهش مرتبه بطور مستقیم $\Longrightarrow y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}\, dx$

$$p(x) = \frac{-8x^2}{4x^2} = -2$$

$$y_2(x) = \sqrt{x}\, e^x \int \frac{1}{x e^{2x}} e^{2x}\, dx = \sqrt{x}\, e^x \ln x$$

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 + c_2 \ln x) \sqrt{x}\, e^x$$

110

(؟) دو جواب مستقل خطی برای معادله روبرو حول $x=0$ بدست بیاورید. $xy''+2y'+xy=0$

$x=0$ تکین معادله است.

$$\lim_{x\to 0} x\,\frac{Q}{P}=2<\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\,\frac{R}{P}=0<\infty$$

$\longrightarrow$ توابع $x\frac{Q}{P}$ و $x^2\frac{R}{P}$ در $x=0$ تحلیلی اند

لذا $x=0$ تکین منظم معادله است.

معادله را در فرم روبرو فرض میکنیم:

$$x^2y''+2xy'+x^2y=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

با جایگذاری $y$، $y'$ و $y''$ در معادله داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}=r(r-1)a_0x^r+r(r+1)a_1x^{r+1}+2ra_0x^r+2(r+1)a_1x^{r+1}+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+2(n+r)a_n+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

ضریب $x^r=0$ $\quad [r(r-1)+2r]a_0=0 \longrightarrow r^2+r=0 \longrightarrow \begin{cases} r_1=0 \\ r_2=-1\end{cases}$ $\quad$ بزرگتر $r_1>r_2$

ضریب $x^{r+1}=0$ $\quad (r+1)(r+2)a_1=0 \quad (*)$

ضرایب $x^{n+r}=0$ $\quad a_n=-\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r-1)+2(n+r)} \;;n\geqslant 2 \quad (**)$

$n=2,3,\dots$

$$\text{if } r=0 \xrightarrow{(*)} 2a_1=0 \longrightarrow a_1=0$$

$$\text{if } r=0 \xrightarrow{(**)} a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}\;;n=2,3,4,\dots \quad (***)$$

$a_1=0 \xrightarrow{***}$ n های فرد $a_n=0$

$$n=2\longrightarrow a_2=\frac{-a_0}{2\times 3}=-\frac{a_0}{3!} \qquad n=4\longrightarrow a_4=-\frac{a_2}{4\times 5}=\frac{a_0}{5!} \qquad a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{(2n+1)!}$$

$n=0,1,2,\dots$

$$y_1(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}} \to 0$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin x}{x}$$ فرم بسته

روش حل :

$y_2(x) =$

① $y_2 = c_1 y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

② استفاده از کاهش مرتبه بطور مستقیم

③ استفاده از محاسبات قبلی

$\xrightarrow{\text{صفحه قبل} (*)}$ if $r=-1 \xrightarrow{(r+1)(r+2)a_1} 0 \times a_1 = 0 \xrightarrow{a_0 : \text{دلخواه}} a_1 = 0$

$\xrightarrow{**}$ if $r=-1 \rightarrow a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{n(n-1)} \; ; n \geqslant 2$

$n=2 \longrightarrow a_2 = \dfrac{-a_0}{2!} \qquad n=4 \longrightarrow a_4 = -\dfrac{a_2}{4 \times 3} = \dfrac{a_0}{4!} \qquad a_{2n} = (-1)^n \dfrac{a_0}{2n!}$

$$y_2(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{-1} \Big( \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_{2n}}_{\frac{(-1)^n}{(2n)}} x^{2n} + \underbrace{\cancel{\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}}}_{0} \Big)$$

$$y_2(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cos x}{x}$$

$$y_g = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x}$$

بنابراین در روش اول اگر بررسی می‌کردیم $c_1 = 0$ بود و سری اکن مشابه سری جواب بود.

تابع گاما Gamma function

به ازای $x>0$ تعریف می‌کنیم: $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

* به ازای $x>0$ انتگرال فوق واگراست.

Ex.) $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\Big]_0^\infty=1$

درواقع تابع گاما تعمیم مفهوم فاکتوریل به اعداد حقیقی و مختلط است.

Ex.) $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\pi}$

تذکر: به ازای هر $x>0$ داریم: $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$

زیرا: $\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt \xleftarrow{\text{جزبجز}}$ برابر است با $=t^x(-e^{-t})\Big]_0^\infty+\int_0^\infty x\,t^{x-1}e^{-t}dt$

$$=0+x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}=x\,\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$$

Ex.) $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\quad\int_0^\infty\sqrt{t}\,e^{-t}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

تذکر: فرض کنیم $x$ عدد طبیعی مانند $n$ باشد.

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n(n-1)\,\Gamma(n-1)=\dots=n(n-1)(n-2)\dots(1)\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}=n!$$

$\Gamma(n+1)=n!$

Ex.) $\Gamma(5)=4!=24$

حال برای اعداد غیرطبیعی تعریف می‌کنیم: $p!:\Gamma(p+1)$

$(\frac{1}{2})!:=\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\qquad (\frac{-1}{2})!=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

$$\Gamma(x):=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\quad -1<x<0\qquad \Gamma(\frac{-1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{-1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-1)=\frac{\Gamma(0)}{-1}=\frac{\frac{\Gamma(1)}{0}}{-1}=\infty$$

برای هر $x$ منفی و غیرصحیح تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x):=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad x\neq -1,-2,-3,\dots$$

معادله بسل Bessel

معادله بسل مرتبه $p$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \; ; p\in\mathbb{R}$$

واضح است که $x=0$ نقطه تکین معادله بسل است.

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q}{P}=\overset{p_0}{1}<\infty \quad \text{تابع تحلیلی است.}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R}{P}=\overset{q_0}{-p^2}<\infty \quad \text{تابع تحلیلی است.}$$

(چند جمله‌ای)

$x=0$ تکین منظم معادله است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}}_{x^2y''}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}}_{xy'}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}-p^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

$$r(r-1)a_0x^r+ra_0x^r-p^2a_0x^r+r(r+1)a_1x^{1+r}+(r+1)a_1x^{r+1}-p^2a_1x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n+a_{n-2}-p^2a_n\right]x^{n+r}=0$$

$$x^r \text{ ضریب }=0 \longrightarrow (r^2-p^2)a_0=0 \quad (a_0\neq 0) \longrightarrow r^2-p^2=0 \longrightarrow r_1=p \;,\; r_2=-p$$

$$x^{r+1} \text{ ضریب }=0 \longrightarrow \left((r+1)^2-p^2\right)a_1=0 \quad \text{معادله } (*)$$

$$x^{n+r} \text{ ضریب }=0 \longrightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+r)^2-p^2} \;;\; n\geqslant 2 \quad \text{رابطه } (**)$$

page114

فرض می‌کنیم $P \geq 0$ در رابطه * و ** قرار می‌دهیم $r=p$

$$\text{if } r=p \xrightarrow{*} (\underbrace{(p+1)^2-p^2}_{2p+1>0})a_1=0 \longrightarrow a_1=0$$

$$\xrightarrow{**} a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+p)^2-p^2} \; ; \; n=2,3,\ldots$$

چون $a_1=0$ پس علات فرد صفر هستند.

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+p)^2-p^2}=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)} \; ; \; n\geq 2$$ n های زوج

$$n=2 \Rightarrow a_2=\frac{-a_0}{\underbrace{2\times 2(1+p)}_{2^2\times 1!}} \; ; \; n=4 \rightarrow a_4=\frac{-a_2}{4\times 2(p+2)}=\frac{a_0}{\underbrace{4\times 2\times 2\times 2}_{2^4\times 2!}\times(p+1)(p+2)}$$

$$n=6 \rightarrow a_6=\frac{-a_4}{6\times 2(p+3)}=\frac{-a_0}{2^6\times 3!\times(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{2^{2n}\times n!\,(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} \; ; \; a_0=\frac{1}{2^p\,\Gamma(p+1)}$$ دلخواه فرض کردیم:

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{2^{2n+p}\,n!\,\Gamma(n+p+1)}$$

$$y_1=x^p\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^p\left(\sum_{n=1,3,\ldots}a_nx^n+\sum_{n=2,4,\ldots}a_nx^n\right)$$

$$=x^p\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{a_{2n}}_{\frac{(-1)^n}{2^{2n+p}\,n!\,\Gamma(n+p+1)}}x^{2n}=\left(\frac{x}{2}\right)^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \rightarrow$$

$$J_p(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

به $J_p(x)$ تابع بسل نوع اول می‌نویسیم از مرتبه $p$ . first kind

Ex.) $x^2y''+xy'+(x^2-2)y=0 \longrightarrow$ $p=\sqrt{2}$ بسل مرتبه

$$J_{\sqrt{2}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\sqrt{2}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$\vdots$

با فرض اینکه $P$ عددی غیرصحیح باشد و مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ نیز نباشد آنگاه $r_2-r_1\neq N$

و برای یافتن جواب دوم معادله بسل کافیست در روابط * و ** قرار دهیم $r=r_2=\cancel{p}-p$

$$a_0 = \frac{1}{2^{-p}\,\Gamma(-p+1)} \qquad \text{if } r=-p \xrightarrow{*} \left[(-p+1)^2-p^2\right]a_1=0 \quad a_1=0$$

$$(-2p+1)\neq 0$$

$$\xrightarrow{**} a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n-p)^2-p^2}\,;\ n\geq 2 \longrightarrow y_2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بسل بصورت زیر است :

$$y_g = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

$$y_g = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

در حالتی که $p$ غیرصحیح و مضرب فرد $\frac{1}{2}$ نباشد

حتی در حالتی که $p$ مضرب فرد $\frac{1}{2}$ باشد

هم اثبات می‌شود جواب مثل حالت قبل است

page116

تذکر: جواب عمومی معادله بسل درحالتی که $p$ غیرصحیح باشد به صورت زیر است:

$$y_g = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

امّا درحالتی که $p$ عددی صحیح مانند $m$ باشد آنگاه داریم:

$$J_{-m} = (-1)^m J_m$$

درنتیجه $J_{+m}$ $J_{-m}$ مستقل خطی نمی‌باشند و لذا $c_1 J_m + c_2 J_{-m}$ نمی‌تواند جواب عمومی شود.

درحالتی که $p$ عددی صحیح مانند $m$ باشد دو حالت زیر است:

۱) اگر $m=0$ باشد آنگاه یک جواب معادله بسل مرتبه صفر همان $J_0(x)$ است
و برای جواب دوم فرض می‌کنیم: $y_2 = \ln x \, J_0 + x^0 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$
با جاگذاری در معادله بسل مرتبه صفر ضرایب $b_n$ مشخص می‌شوند.

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0 \longrightarrow x y'' + y' + x y = 0$$

$$Y_0 = \alpha \left( y_2 + b J_0 \right)$$ جواب دوم معادله بسل مرتبه صفر

$$\alpha = \frac{2}{\pi}, \quad b = \gamma - \ln 2$$

$$\gamma = \lim (H_n - \ln n) \simeq 0{,}5772 \quad , \quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$y_g = c_1 J_0 + c_2 Y_0$$

تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر

(ii) اگر $m \neq 0$ در اینصورت یک جواب معادله بسل مرتبه m، $J_m(x)$ و جواب دوم

به صورت زیر تعریف میشود.

$$y_2 = c\,J_m(x)\ln x + x^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$Y_m := a\,(y_2 + b\,J_m)$$ تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر

$$y_g = c_1 J_m + c_2 Y_m$$ جواب عمومی

جواب عمومی:

اگر p غیر صحیح باشد $y_g = c_1 J_p + c_2 J_{-p}$

اگر p صحیح باشد $y_g = c_1 J_p + c_2 Y_p$

$p=0$

تذکر: می توان نشان داد:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin(x)$$

$$J_{\frac{-1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos(x)$$

Ex.) $$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}+1) = (n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = (n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) = (n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\cdots\tfrac{1}{2}\,\underbrace{\Gamma(\tfrac{1}{2})}_{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 1\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\,n!}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\, n!}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\,.\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}\,.\sqrt{\pi}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin x}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \sin x$$ (اثبات بیودیل) فقط مضارب فرد $\frac{1}{2}$ فرم بسته دارند

جلسه بیست و هفتم

۸ خرداد



خواص تابع بسل نوع اول $J_p(x)$

(i) $\frac{d}{dx}(x^p J_p) = x^p J_{p-1}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(x^{-p} J_p) = -x^{-p} J_{p+1}$

اثبات عبارت سمت چپ :

$$x^p J_p = x^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2p}}{n!\,\Gamma(n+p+1)\, 2^{2n+p}}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} (x^p J_p)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \overset{2(n+p)}{\cancel{(2n+2p)}}\, x^{2n+2p-1}}{n!\,\underbrace{\Gamma(n+p+1)}_{(n+p)\Gamma(n+p)}\, 2^{2n+p-1}} = x^p \left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\Longrightarrow (x^p J_p)' = x^p J_{p-1}$$

اثبات عبارت سمت راست :

(ii) $J'_p = J_{p-1} - \frac{p}{x} J_p$

$J'_p = \frac{p}{x} J_p - J_{p+1}$

اثبات: $\frac{d}{dx}(x^p J_p) = x^p J_{p-1}$

$\rightarrow p x^{p-1} J_p + x^p J'_p = x^p J_{p-1}$

$\xrightarrow{\div x^p} p x^{-1} J_p + J'_p = J_{p-1}$

$J'_p = J_{p-1} - \frac{p}{x} J_p$

به طور مشابه با مشتق گیری از رابطه دوم خاصیت ۱

رابطه دوم خاصیت ۲ اثبات می شود.

(iii) $\frac{2p}{x} J_p = J_{p+1} + J_{p-1}$ رابطه بازگشتی

با توجه به خاصیت ۲ داریم:

$J_{p-1} - \frac{p}{x} J_p = \frac{p}{x} J_p - J_{p+1} \longrightarrow \frac{2p}{x} J_p = J_{p-1} + J_{p+1}$

مثال) $J_{\frac{3}{2}} = ?$

(i) $J_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}} - J_{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$

(ii) $p = \frac{-3}{2}$ $\quad J_{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{x} J_{\frac{-1}{2}} - J_{\frac{-3}{2}} \Rightarrow J_{\frac{-3}{2}} = -\left( \frac{1}{x} J_{\frac{-1}{2}} + J_{\frac{1}{2}} \right) = -\left( \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{\cos x}{x} + \sin x \right) \right)$

* به همین صورت فرم بسته $J_{m+\frac{1}{2}}$ و $J_{-(m+\frac{1}{2})}$ پیدا می شود.

تذکر: ثابت می شود تنها حالتی که $J_p(x)$ فرم بسته دارد (تابعی مقدماتی است) آن است که $p$ مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ باشد. $p = m + \frac{1}{2}$ ; $m \in \mathbb{Z}$

(۱۷) $\int x^{p} J_{p-1}\, dx = x^{p} J_{p} + C$ $\qquad$ $\int x^{-p} J_{p+1}\, dx = -x^{-p} J_{p} + C$

از رابطه بالا انتگرال گرفته شود.

Ex.) $\int J_1(x)\, dx = \longrightarrow$ if $p=0$ $\int x^{-p} J_{p+1}\, dx = -x^{-p} J_p + C \Rightarrow \int J_1\, dx = -J_0 + C$

$$\int J_3(x)\, dx = \int \underbrace{x^2}_{U}\, \underbrace{x^{-2} J_3(x)\, dx}_{dV} = x^2(-x^{-2} J_2) + \int x^{-2} J_2 (2x)\, dx = -J_2 + 2\int x^{-1} J_2\, dx$$

$$\longrightarrow = -J_2 - \frac{2}{x} J_1$$

جزء‌به‌جزء $= UV - \int V\, dU$

$$\int x^2 J_2\, dx = \int x^3 x^{-1} J_2\, dx = x^3(-x^{-1} J_1) + \int x^{-1} J_1 (3x^2)\, dx$$

$$= -x^2 J_1 + 3\int x J_1\, dx = -x^2 J_1 + 3\left[x(-J_0) + \int J_0\, dx\right] = -x^2 J_1 - 3x J_0 + 3\int J_0\, dx$$

تغییر متغیر برای رسیدن به تابع بسل مراتب مختلف

تغییر متغیر

- تغییر متغیر مستقل: $x = f(z)$، $z = g(x)$، $x = e^{t}$
- تغییر متغیر وابسته: $y = e^{-x} U$، $y = V(x)\, U$
- تغییر متغیر مستقل و تغییر متغیر وابسته با هم: $x = e^{t}$، $y = \sqrt{x}\, U$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$

$\vdots$

قواعد زنجیره‌ای

تذکر: برخی از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به معادله بسل تبدیل نمود.

Ex.) $x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - p^2) y = 0 \Longrightarrow Z := \lambda x$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \overset{\lambda}{\frac{dz}{dx}}$, $y'' = \lambda\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) \times \frac{dz}{dx}\right)$

$$\frac{1}{\lambda^2} z^2 \left(\lambda^2 \frac{d^2 y}{dz^2}\right) + \frac{1}{\lambda} z \left(\lambda \frac{dy}{dz}\right) + (z^2 - p^2) y = 0 \longrightarrow z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - p^2) y = 0$$

$$Ex.)\ 4x^2+4x+(x-p^2)y=0 \Rightarrow z=\sqrt{x}\ ,\ x=z^2$$

$$x^2y''+xy'+4(x^4-p^2)y=0 \Rightarrow z=x^2$$

$$xy''+(1+2p)y'+xy=0 \Rightarrow y=x^{-p}U$$

(تمرین تحویلی)

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر داده شده حل کنید.

$$y''+xy=0 \qquad z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \qquad y=\sqrt{x}\,U$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}U+\sqrt{x}\,U' \ ,\ y''=\frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}}U+\frac{1}{2\sqrt{x}}U'+\frac{1}{2\sqrt{x}}U'+\sqrt{x}\,U''$$

$$y''=\frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}}U+\frac{1}{\sqrt{x}}U'+\sqrt{x}\,U''$$

جایگذاری در معادله

$$\frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}}U+\frac{1}{\sqrt{x}}U'+\sqrt{x}\,U''+x^{\frac{3}{2}}U=0$$

$$U'=\frac{dU}{dx}=\frac{dU}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\sqrt{x}\,\frac{dU}{dz} \ ,\ U''=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dU}{dz}+\sqrt{x}\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{dU}{dz}\right)\times\frac{dz}{dx}\right.$$

$$\begin{cases}\dot{U}:=\dfrac{dU}{dz}\\ \ddot{U}:=\dfrac{d^2U}{dz^2}\end{cases} \qquad U''=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dU}{dz}+x\frac{d^2U}{dz^2}$$

$$\frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}}U+\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}\,\dot{U})+\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\dot{U}+x\ddot{U}\right)+x^{\frac{3}{2}}U=0$$

$$\frac{-1}{6z}U+\dot{U}+\frac{1}{2}\dot{U}+\frac{3}{2}z\,\ddot{U}+\frac{3}{2}zU=0 \Rightarrow \frac{-1}{9}U+z\dot{U}+z^2\ddot{U}+z^2U=0$$

$$z^2\ddot{U}+z\dot{U}+\left(z^2-\frac{1}{9}\right)U=0$$

بسل مرتبه $\frac{1}{3}$

$$U_g=c_1J_{\frac{1}{3}}(z)+c_2J_{\frac{-1}{3}}(z) \rightarrow y_g=c_1\sqrt{x}\,J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+c_2\sqrt{x}\,J_{\frac{-1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$$

Ex.) $y' = x^2 + y^2 \qquad y(0) = 1$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$y'(0) = 1 \qquad y'' = 2x + 2yy' \xrightarrow{x=0} y''(0) = 2 \quad \ldots$ روش مشتقات متوالی

مثال ۲) $2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$

تکین منظم $x = -1$

$(x+1)\dfrac{Q}{P} = \dfrac{3+x}{2x}$ ۱ = فاصله ۱- تا صفر

$(x+1)^2 \dfrac{R}{P} = \dfrac{-(x+1)x}{2} \qquad \infty$

حداقل شعاع همگرایی $\min\{\infty, 1\} = 1$

تکین منظم $x = 0$

$r_1 = 0 \qquad r_2 = -\frac{1}{2}$

$$y_1 = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$\dfrac{xQ}{P} = \dfrac{3+x}{2(1+x)}$

$\longrightarrow R = 1$ حداقل شعاع همگرایی

$x^2 \dfrac{R}{P} = \dfrac{-x^2}{2(1+x)}$ فاصله $x_0$ تا نزدیکترین ریشه

جلسه بیست و هشتم ۱۰ خرداد

## تبدیل لاپلاس Laplace transform

فرض کنیم $f(t)$ برای $t>0$ تعریف شده باشد. تبدیل لاپلاس تابع $f$ را با $L\{f(t)\}$ یا $F(s)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \equiv F(s)$$

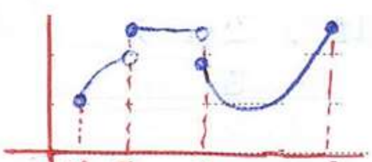
## تبدیل لاپلاس معکوس

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد آنگاه $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می‌نامیم و آن را با $L^{-1}\{F(s)\}$ نشان می‌دهیم.

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

## تابع قطعه‌ای پیوسته

تابع $f$ را در بازه $[\alpha, \beta]$ قطعه‌ای پیوسته گوییم، هرگاه تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در این بازه متناهی باشد ثانیاً حد چپ و راست $f$ در این نقاط ناپیوستگی موجود و متناهی باشد.




## قضیه شرط کافی برای وجود تبدیل لاپلاس

فرض کنیم: i) تابع $f(t)$ روی $(0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته باشد.

ii) هم مرتبه با تابع نمایی باشد:

$$\exists M>0 \ \forall t \geq M; \ |f(t)| \leq Ke^{at}$$

$K>0 \quad a \in \mathbb{R}$

در این صورت تبدیل لاپلاس $f(t)$ به ازای هر $s>a$ موجود است.

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \underbrace{\int_0^M e^{-st} f(t)\, dt}_{\text{موجود}} + \underbrace{\int_M^\infty e^{-st} f(t)\, dt}_{I_2}$$

$$|I_2| \leq \int_M^\infty |e^{-st}||f(t)|\, dt \leq K \int_M^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \frac{-K}{S-a} \overbrace{e^{-(S-a)t}}^{+} \Big]_{t=M}^{t=\infty} = \text{موجود}$$

بازای هر $S > a$

تذکر اگر $f(t)$ شرایط قضیه قبل را داشته باشد داریم : $\lim\limits_{S\to\infty} F(s) = 0$

محاسبه تبدیل لاپلاس چند تابع مقدماتی

(i) $f(t) = 1 \quad t > 0 \qquad L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{-1}{S} e^{-st} \Big]_0^\infty \overset{S>0}{=} \frac{1}{S} \; ; S > 0$

$L\{1\} = \frac{1}{S} \; ; \; S > 0$

$$\boxed{L\{a\} = \frac{a}{S} \; ; \; S > 0 \qquad a \in \mathbb{R}}$$

(ii) $f(t) = t^n \; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots \quad L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n\, dt = \frac{n!}{S^{n+1}} \; ; S > 0$

$$\boxed{L\{t^n\} = \frac{n!}{S^{n+1}} \; ; \; S > 0 \qquad n \geq 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

(iii) $f(t) = t^p \quad p \notin \mathbb{Z} \qquad L\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st} t^p\, dt \overset{st = x}{\underset{S>0}{=\!=}} \frac{1}{S^{p+1}} \overbrace{\int_0^\infty e^{-x} x^p\, dx}^{\Gamma(p+1)}$

$$\boxed{L\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{S^{p+1}} \; ; \; S > 0} \xrightarrow{\text{if } p = n \,\cup\, p = \ldots} L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{S^{n+1}} = \frac{n!}{S^{n+1}}$$

Ex.) $L\{\sqrt{t}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{S^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 S^{3/2}}$

$L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{S^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{S}} \; ; S > 0$

Ex.) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = 2\left(\sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)$

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

(iv) $f(t) = e^{at}$ ; $t>0$ $a \in \mathbb{R}$ $L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t}\Big]_0^\infty \underset{=}{\overset{s>a}{}} \frac{1}{s-a}$

$$\boxed{L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \ ; \ s>a}$$

Ex.) $L(e^{t}) = \frac{1}{s-1}$ ; $s>1$ $L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$ ; $s>-1$

(V) $f(t) = \sin at$ یا $\cos at$ $L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin(at) dt = \cdots$

$L\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at \, dt = \cdots$

$L\{e^{iat}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{iat} dt = \frac{-1}{s-ia} e^{-(s-ia)t}\Big]_0^\infty \underset{=}{\overset{s>0}{}} \frac{1}{s-ia}$

$= \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$

$\lim_{t\to 0} e^{-st} \underbrace{e^{iat}}_{\cos at + i\sin at \text{ کران دار}} = 0$ $s>0$

$s>0$

$$\boxed{L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

(vi) $f(t) = \sinh(at)$ یا $\cosh(at)$

$L\{\sinh(at)\} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} L\{e^{at}\} - \frac{1}{2} L\{e^{-at}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$

خاصیت خطی بودن صفحه بعد

$L\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$ ; $s>|a|$

$L\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$ ; $s>|a|$

## خواص تبدیل لاپلاس

(۱) تبدیل لاپلاس و معکوس آن عملگرهای خطی می‌باشند.

$$L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} + c_2 L\{g(t)\}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
ثابت

$$L^{-1}\{c_1 F(s) + c_2 G(s)\} = c_1 L^{-1}\{F(s)\} + c_2 L^{-1}\{G(s)\}$$

$$\xrightarrow{L} c_1 F(s) + c_2 G(s) = L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \underbrace{L\{f(t)\}}_{F(s)} + c_2 \underbrace{L\{g(t)\}}_{G(s)}$$

جلسه بیست و نهم ۱۶ خرداد

مثال: (i) تبدیل لاپلاس تابع زیر را محاسبه کنید. (ii) تبدیل لاپلاس معکوس

$f(t) = 6t^3 - 4\cos 5t + \frac{1}{2}e^{-2t} - 3\sinh 4t + 2$

$F(s) = \frac{5s-1}{s(s-1)(s^2+1)}$

$$(i)\ L\{f(t)\} = 6L\{t^3\} - 4L\{\cos 5t\} + \frac{1}{2}L\{e^{-2t}\} - 3L\{\sinh 4t\} + 2L\{1\} =$$

$$= 6\frac{3!}{s^4} - 4\frac{s}{s^2+25} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} - 3 \times \frac{4}{s^2-16} + \frac{2}{s} = F(s)$$

---

$$(ii)\ L^{-1}\left\{\frac{5s-1}{s(s-1)(s^2+1)}\right\} \Rightarrow F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=-3\ ,\ D=-2 \end{cases}$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-3s-2}{s^2+1}\right\}$$

$$= 1 + 2e^t + L^{-1}\left\{\frac{-3s}{s^2+1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = 1 + 2e^t - 3\cos t - 2\sin t = f(t)$$

ادامه خواص تبدیل لاپلاس

(II) [تبدیل لاپلاس مشتق تابع]

فرض کنیم $f$ در بازه دلخواه $[0, A]$ پیوسته باشد و هم‌مرتبه با تابع نمایی باشد. در این صورت اگر $f'(t)$ قطعه‌ای پیوسته باشد به ازای هر $s > a$ داریم:

در تعریف هم مرتبه بودن با تابع نمایی

$\lim_{t \to 0^+} f(t)$

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0^+) = sF(s) - f(0^+)$$

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt =$$

$\{|f(t)| \leqslant Ke^{at} \rightarrow e^{-st}|f(t)| \leqslant Ke^{-(s-a)t}\ \ s>a\}$ $\quad (0 - f(0^+)) + sF(s)$

تذکر: اگر $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ توابعی پیوسته باشند و در شرایط قضیه وجود لاپلاس صدق کنند آنگاه با فرض اینکه $f^{(n)}(t)$ قطعه‌ای پیوسته باشد داریم:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

مثال) به کمک تبدیل لاپلاس مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y^{(4)} - y\} = \mathcal{L}\{0\} \xrightarrow{\text{خطی بودن } \mathcal{L}} \mathcal{L}\{y^{4}\} - \mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s) \longrightarrow s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0$$

$$\longrightarrow s^4 Y(s) - s^2 - Y(s) = 0 \longrightarrow Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2 - 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 & B = \frac{1}{2} \\ C = 0 & D = \frac{1}{2} \end{cases} \quad Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2 + 1}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)$$

$$y_p(t) = \frac{1}{2}(\sinh t + \sin t)$$

خواص تبدیل لاپلاس

(III) (تبدیل لاپلاس انتگرال تابع)

فرض کنیم $f(t)$ در شرایط قضیه وجود تبدیل لاپلاس صدق کند در این صورت داریم:

$$L\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

اثبات:

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,dx \Longrightarrow g'(t) = f(t) \xrightarrow{L} L\{g'\} = L\{f\}$$

$$\longrightarrow sL\{g\} - g(0) = F(s) \longrightarrow L\{g\} = \frac{F(s)}{s}$$

مثال) به کمک تبدیل لاپلاس

$$\begin{cases} y'' - 4y' = 1 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad L\{y'' - 4y'\} = L\{1\} \longrightarrow L\{y''\} - 4\{y'\} = L\{1\}$$

$$\longrightarrow s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 Y(s) - 4sY(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(s-4)}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} \qquad Y(s) = \frac{\frac{1}{s(s-4)}}{s}$$

$$\frac{1}{s(s-4)} = \frac{\frac{1}{s-4}}{s} \xrightarrow{L^{-1}} \int_0^t e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1)$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-4)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)\,dx \Longrightarrow y_p(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4t} - t - \frac{1}{4}\right)$$

جواب خصوصی

(۱۷) خاصیت اول انتقال

اگر $L\{f(t)\}=F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$$

مثال) عبارات زیر را محاسبه کنید.

(i) $L\{e^{-2t}\cos 3t\}$

$$\text{(i)}=\left.\frac{s}{s^2+9}\right|_{s\to s+2}=\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$\text{(ii)}\ L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+2s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s+1)^2+4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{2s+2-2}{(s+1)^2+4}\right\}=$$

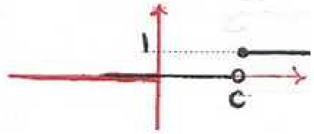
$$=2L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}=2(e^{-t}\cos 2t)-e^{-t}\sin 2t$$

$$=e^{-t}(2\cos 2t-\sin 2t)$$

## تابع پله‌ای واحد Heaviside unit step function

برای $c\geq 0$ تعریف می‌کنیم:

$$U_c(t)=\begin{cases}0 & t<c\\ 1 & t\geq c\end{cases}$$




برای نمایش توابعی که دارای ناپیوستگی پرشی یا جهشی هستند می‌توان از این تابع استفاده نمود.

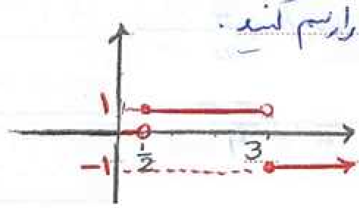
بیان دیگر:

$$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases} \longrightarrow$$ آنگاه به جای اندیس از انتقال استفاده می‌شود.

Ex.) $U_2(t)\equiv U(t-2)\,,\ U(t-1)\,,\dots$

مثال) تابع $f(t)=U_{\frac{1}{2}}(t)-2U_3(t)$ را رسم کنید.

$$f(t)=\begin{cases}0-2(0)=0 & 0<t<\frac{1}{2}\\ 1-2(0)=1 & \frac{1}{2}\leq t<3\\ 1-2(1)=-1 & 3\leq t\end{cases}$$




تذکر: تابع فوق را می‌توان برحسب توابع پله‌ای واحد به صورت زیر نوشت:

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t) & 0<t<t_1\\ f_2(t) & t_1\leq t<t_2\\ \vdots & \\ f_n(t) & t_{n-1}\leq t<t_n\end{cases}$$

$$f(t)=f_1(t)+(f_2(t)-f_1(t))U_{t_1}(t)+(f_3(t)-f_2(t))U_{t_2}(t)+\cdots+\ +(f_n(t)-f_{n-1}(t))U_{t_{n-1}}(t)$$

مثال)

$$L\{U_c(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}U_c(t)\,dt=\int_c^\infty e^{-st}\,dt=\frac{-1}{s}e^{-st}\Big]_{t=c}^{\infty}\quad s>0 \longrightarrow =\frac{e^{-cs}}{s}$$

$$\boxed{L\{U_c(t)\}=\frac{e^{-cs}}{s}\ ;\ s>0}$$

ادامه خواص تبدیل لاپلاس

(۷) خاصیت دوم انتقال

اگر $F(s)=L\{f(t)\}$ آنگاه:

$$L\{U_c(t)\,f(t-c)\}=e^{-cs}F_S$$

$$L\{U_c(t)f(t-c)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\,U_c(t)\,f(t-c)\,dt=\int_c^{\infty}e^{-st}f(t-c)\,dt$$

$$\text{if } \begin{matrix} x=t-c \\ dt=dx \end{matrix} \longrightarrow \int_0^{\infty}e^{-s(x+c)}f(x)\,dx=e^{-sc}\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)\,dx=e^{-cs}L\{f(t)\}$$

$$L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}=U_c(t)f(t-c)$$

مثال) عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$(i)\quad f(t)=\begin{cases}\sin(t) & ;\ 0<t<\frac{\pi}{4}\\ \sin t+\cos(t-\frac{\pi}{4}) & ;\ \frac{\pi}{4}\leq t\end{cases}\qquad L\{f(t)\}=?$$

$$f(t)=\sin t+\cos(t-\frac{\pi}{4})\,U_{\frac{\pi}{4}}(t)$$

$$L\{f(t)\}=L\{\sin t\}+L\{U_{\frac{\pi}{4}}(t)\cos(t-\frac{\pi}{4})\}=\frac{1}{s^2+1}+e^{(-\frac{\pi}{4}s)}\frac{s}{s^2+1}$$

$$(ii)\quad L^{-1}\left\{\frac{1-e^{-2s}}{s^3}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^3}\right\}=\frac{t^2}{2}-U_2(t)\,\frac{(t-2)^2}{2}$$

$$=\begin{cases}\frac{t^2}{2} & 0<t<2\\ \frac{t^2}{2}-\frac{(t-2)^2}{2} & t\geq 2\end{cases}\longrightarrow=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & 0<t<2\\ 2(t-1) & 2\leq t\end{cases}$$

$$(iii)\quad L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{2s^2+s+2}\right\}=U_5(t)\,f(t-5)=U_5(t)\left(\frac{2}{\sqrt{15}}e^{-\frac{1}{4}(t-5)}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right)\right)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{2[(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}]}\right\}=\frac{4}{\sqrt{15}}\cdot\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right\}=\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot e^{-\frac{1}{4}t}\cdot\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t$$

## Convolution پیچش دو تابع

پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را با علامت $(f*g)(t)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx$$

خواص پیچش

1. $f*g=g*f \longrightarrow \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx=\int_0^t g(x)f(t-x)\,dx$
2. $f*(g_1+g_2)=(f*g_1)+(f*g_2)$
3. $f*(g*h)=(f*g)*h$
4. $f*0=0*f=0$
5. $f*1=1*f\neq f$

**6:**

(Vi) تبدیل لاپلاس پیچش تابع

$$\mathcal{L}\{f*g\}=\mathcal{L}\{f\}\,\mathcal{L}\{g\}=F(s)\,G(s)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}(f*g)(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(x)g(t-x)\,dx\,dt=\int_0^\infty\int_x^\infty e^{-st}f(x)g(t-x)\,dt\,dx=$$

$$\xrightarrow[p=t-x,\ t=p+x,\ dt=dp]{}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(p+x)}f(x)g(p)\,dp\,dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx\int_0^\infty e^{-sp}g(p)\,dp=F(s)G(s)$$

مثال)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\times\frac{1}{s^2+1}\right\}=t*\sin t=t-\sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_0^t f(x)\,1\,dx\right\}=\mathcal{L}^{-1}\{f\}\{\mathcal{L}^{-1}\{1\}\}=\frac{F(s)}{s}$$

مثال) معادله زیر را حل کنید. [معادلات انتگرال دیفرانسیل Integro_differential]

$$y''(t)+y'(t)=\cos t+\int_0^t \sin(t-x)\;y'(x)\,dx \qquad y(0)=y'(0)=0$$

$$\mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{y'\}=\mathcal{L}\{\cos t\}+\mathcal{L}\left\{\overbrace{\int_0^t y'(x)\sin(t-x)\,dx}^{y'*\sin t}\right\}$$

$$\rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+sY(s)-y(0)=\frac{s}{s^2+1}+\mathcal{L}\{y'\}\mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$(s^2+s)Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+(sY(s)-y(0))\frac{1}{s^2+1}$$

$$\left(s^2+s-\frac{s}{s^2+1}\right)Y(s)=\frac{s}{s^2+1}\rightarrow Y(s)=\frac{1}{s(s^2+s+1)} \qquad y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}=\frac{2}{\sqrt3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{(s+\frac12)^2+\frac34}\right\}=\frac{2}{\sqrt3}e^{-\frac12 t}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}t\right)=f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=f*1=\int_0^t\frac{2}{\sqrt3}e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt3}{2}t\;dx=1-\frac13 e^{-\frac{t}{2}}\left(\sqrt3\cos\frac{\sqrt3}{2}t+\sin\frac{\sqrt3}{2}t\right)$$

جلسه سی و یکم ۲۰ خرداد

خواص تبدیل لاپلاس

(VII) تبدیل لاپلاس توابع متناوب

فرض کنیم $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $(T>0)$ باشد. $f(t+T)=f(t);\ \forall t>0$

می‌توان نشان داد $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt+\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt\xrightarrow{x=t-T}$$

$$=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt+e^{-sT}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$

$$\longrightarrow (1-e^{-sT})\,\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt\longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

مثال) تبدیل لاپلاس تابع $\begin{cases} f(t)=t-[t] \\ t>0\end{cases}$ را بدست آورید.

$f$ تابعی متناوب با دوره $T=1$ است.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-st}(t-\overset{0}{\cancel{[t]}})\,dt=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-st}t\,dt=\frac{1}{1-e^{-s}}\left(\frac{-1}{s}e^{-st}t-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}\{t-[t]\}=\frac{1}{1-e^{-s}}\left(-\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s^2}\right)=\frac{e^{-s}}{s(e^{-s}-1)}+\frac{1}{s^2}$$

مثال) تبدیل لاپلاس تابع $F(t)=\begin{cases}0 & 0<t<\pi\\ -\sin t & \pi<t<2\pi\end{cases}$ را بدست آورید.

(VIII) مشتق‌گیری از تبدیل لاپلاس

فرض کنیم $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ . داریم $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \xrightarrow{d/ds} F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st}\, t f(t)\,dt$

$$F'(s) = -\mathcal{L}\{t f(t)\} \longrightarrow \mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s)$$

$$F''(s) = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} \longrightarrow \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = F''(s)$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

مثال) تبدیلات لاپلاس زیر را حل کنید.

(I) $\mathcal{L}\{t^2 \sin at\}$ (I) $\mathcal{L}\{t^2 \sin at\} = \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right) = \dfrac{6as^2 - 2a^3}{(s^2+a^2)^3}$

(II) $\mathcal{L}\{t e^{-2t} \cos t\}$ (II) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\, t\cos t\} = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)\Big|_{s\to s+2}$

$$= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Big|_{s\to s+2} = \frac{(s+2)^2-1}{\left((s+2)^2+1\right)^2}$$

(III) $\int_0^\infty t e^{-2t} \cos t\, dt$

(III) $\mathcal{L}\{t\cos t\}\Big|_{s=2} = \dfrac{-d}{ds}\left(\dfrac{s}{s^2+1}\right)\Big|_{s=2} = \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \dfrac{3}{25}$

(iV) $\mathcal{L}^{-1}\left\{tg^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\} = ?$

$$F(s) = tg^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \longrightarrow F'(s) = \frac{-1/s^2}{1+\frac{1}{s^2}} = -\frac{1}{1+s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}}_{-t f(t)} = -\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\}}_{\sin t}$$

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

(V) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1} \ln \dfrac{s}{s-1}\right\} = ? = f * g = \int_0^t \dfrac{e^x - 1}{x} \cos(t-x)\,dx$

$$G(s) = \ln\left(\frac{s}{s-1}\right) = \ln(s) - \ln(s-1) \xrightarrow{d/ds} G'(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 - e^t = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{G'(s)\}}_{-t g(t)}$$

$$f(t) = \cos t \qquad g(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

## (IX) انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس

اگر $f(t)$ در شرایط قضیه وجود تبدیل لاپلاس صدق کند و $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آنگاه

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{که} \quad \int_s^{\infty} F(u)\,du = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

مثال)

(I) $$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = tg^{-1}(u)\Big]_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}(s)$$

$$tg^{-1}(x) + tg^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2} - tg^{-1}(s) = tg^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

(II) $$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin^2 t}{t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2t}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{\cos 2t}{t}\right\} \ \ldots$$

(III) $$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-t}\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\}_{s=1} = \ln\sqrt{2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right)du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big]_{u=s}^{u=\infty} = \ln\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\Big]_{u=s}^{\infty} = \ln\frac{\sqrt{1+s^2}}{s}$$

مثال)

$$\mathcal{L}\Big\{e^t \underbrace{\int_0^t e^{-2x}\,\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx}_{g(t)}\Big\} = F_1(s-1)$$

$$F_1(s-1) = \frac{1}{s-1}\ln\frac{s+2}{s+1}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-2x}\,\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx\right\} = \frac{F_2(s)}{s} \longrightarrow F_1 = \frac{1}{s}\ln\frac{s+3}{s+2}$$

$$F_2(s) = \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\,\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = F_3(s+2) \longrightarrow F_2 = \ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right)$$

$$F_3(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right)$$

اثبات — $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\,du$

طرف دوم : $\int_s^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-ut} f(t)\,dt\right)du = \int_0^{\infty}\int_s^{\infty} e^{-ut} f(t)\,du\,dt$

$\longrightarrow = \int_0^{\infty} f(t)\int_s^{\infty} e^{-ut}\,du\,dt = \int_0^{\infty} f(t)\left(\frac{1}{t}e^{-st}\right)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{f(t)}{t}$

جلسه سی و دوم ۲۲ خرداد

X دهمین خاصیت تبدیل لاپلاس

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt \underset{a>0}{\overset{x=at}{=}} \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{a}\right)x} f(x)\, dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\frac{s}{a}-1} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثال) به کمک تبدیل لاپلاس معادلات زیر را حل کنید.

$$(I)\begin{cases} y''+3ty'-6y=2 \\ y(0)=y'(0)=0 \qquad y_p(t)=? \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y''\}+3\mathcal{L}\{ty'\}-6\{y\}=\mathcal{L}\{2\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+3\left(-\frac{d}{ds}\left(sY(s)-y(0)\right)\right)-6Y(s)=\frac{2}{s}$$

$$s^2Y(s)-3\left(Y(s)+sY'(s)\right)-6Y(s)=\frac{2}{s}$$

$$-3sY'(s)+(s^2-9)Y(s)=\frac{2}{s} \longrightarrow Y'(s)+\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)Y(s)=\frac{-2}{3s^2}$$

خطی مرتبه اول

$$\mu(s)=e^{\int\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{3}\right)ds}=s^3e^{-\frac{s^2}{6}} \qquad Y(s)=\frac{1}{s^3}e^{\frac{s^2}{6}}\left[c+\int s^3e^{-\frac{s^2}{6}}\left(\frac{-2}{3s^2}\right)ds\right]$$

$$Y(s)=\frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}c+\frac{2}{s^3}$$

$$\lim_{s\to\infty}Y(s)=0 \longrightarrow c=0 \quad \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=t^2=y_p(t)$$

$$(II)\begin{cases} t y'' - t y' + y = 2 \\ y(0) = 2 \ , \ y'(0) = -4 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{ty''\} - \mathcal{L}\{ty'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{2\}$$

$$\frac{-d}{ds}\left(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)\right) + \frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$-\left(2sY(s) + s^2 Y'(s) - 2\right) + \left(Y(s) + sY'(s)\right) + Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s - s^2) Y'(s) + (2 - 2s) Y(s) = \frac{2}{s} - 2$$

$$Y'(s) + \frac{2(1-s)}{s(1-s)} Y(s) = \frac{2-2s}{s^2(1-s)} \qquad Y'(s) + \frac{2}{s} Y(s) = \frac{2}{s^2}$$ خطی مرتبه اول

$$\mu(s) = e^{\int \frac{2}{s} ds} = s^2 \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2}\left[c + \int s^2\left(\frac{2}{s^2}\right) ds\right] = \frac{2}{s} + \frac{c}{s^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} + c\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 2 + ct$$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -4 \end{cases} \longrightarrow y_p(t) = 2 - 4t$$

مثال) تبدیل لاپلاس توابع $J_0(t)$ ، $J_0(2t)$ ، $J_0(\sqrt{t})$ ، $J_1(t)$ را بدست آورید.

$$J_p(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \Gamma(n + p + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

معادله بسل مرتبه صفر بصورت زیر است:

$$t^2 y'' + t y' + t^2 y = 0 \longrightarrow t y'' + y' + t y = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-d}{ds}\left(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)\right) + sY(s) - y(0) - Y'(s) = 0$$

$$\rightarrow -2sY(s) - s^2 Y'(s) + y(0) + sY(s) - y(0) - Y'(s) = 0 \qquad (1 + s^2) Y'(s) + sY(s) = 0$$

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = \frac{-s}{1+s^2} \rightarrow \ln(Y(s)) = -\frac{\ln(1+s^2)}{2} + \ln c \Rightarrow Y(s) = \frac{c}{\sqrt{1+s^2}} \rightarrow \mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$\mathcal{L}\{J_0'(t)\} = s\mathcal{L}\{J_0(t)\} - J_0(0) \qquad \lim_{s\to\infty} F(s) = 0 = c - 1 = 0 \rightarrow c = 1$$

$$\mathcal{L}\{J_0(2t)\} = \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 4}} \qquad \mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$$

$$\int J_1(t)\,dt = -J_0(t) \qquad (-J_0(t))' = J_1(t)$$

$$\mathcal{L}\{J_1(t)\} = -\mathcal{L}\{J_0'(t)\} = -(s\mathcal{L}\{J_0\}-1) = 1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\sqrt{1+s^2}-s}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$\mathcal{L}\{J_n(t)\} = \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^n}{\sqrt{1+s^2}} \qquad n=0,1,2,3,\dots$$

بسل مرتبه $p=n$

$J_n(t)$ یکی از جواب‌ها معادله $t^2y''+ty'+(t^2-n^2)y = 0$ است.

$$\mathcal{L}\{t^2y''\}+\mathcal{L}\{ty'\}+\mathcal{L}\{t^2y\}-n^2\mathcal{L}\{y\}=0$$

$$\frac{+d^2}{ds^2}\left(s^2\mathcal{L}\{y\}-s\,y(0)-y'(0)\right)-\frac{d}{ds}\left(s\mathcal{L}\{y\}-s\,y(0)\right)+\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{y\}-n^2\mathcal{L}\{y\}=0$$

$$(s^2+1)Y''(s)+3sY'(s)+(1-n^2)Y(s)=0 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} u=\sqrt{s^2+1}\,Y(s)$$

$$u'=\frac{(s^2+1)Y'(s)+sY(s)}{\sqrt{s^2+1}} \longrightarrow u''=\frac{(s^2+1)^2Y''(s)+2s(s^2+1)Y'(s)+Y(s)}{(s^2+1)\sqrt{s^2+1}}$$

جایگذاری: $u''\sqrt{s^2+1}+\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}u'=\dfrac{n^2u}{\sqrt{s^2+1}} \rightarrow (s^2+1)u''u'+su'^2=n^2uu'$

$$2u'u''(s^2+1)+2su'^2=n^2(2uu')$$

$$\left((u'\sqrt{s^2+1})^2\right)'=n^2(u^2)' \longrightarrow u'\sqrt{s^2+1}=-nu' \longrightarrow \int\frac{du}{u}=\int\frac{-n\,ds}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\ln u = n\ln(\sqrt{s^2+1}-s) \longrightarrow u=(\sqrt{s^2+1}-s)^n$$

$$Y(s)=\mathcal{L}\{J_n(t)\}=\frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$$

$J_0(\sqrt{t}) = ?$ $\quad J_0(\sqrt{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\underbrace{\Gamma(n+1)}_{n!}\,2^{2n}} (t)^n$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2\, 2^{2n}} \underbrace{\mathcal{L}\{t^n\}}_{\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, s^n 2^{2n}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{4s}\right)^n}{n!} = \frac{1}{s}\, e^{\frac{-1}{4s}} \quad s>0$$

$ty'' + y' + 4ty = 0 \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = 0$ مثال

$$\mathcal{L}\{ty''\} + \mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{ty\} = 0$$

$$\frac{-d}{ds}\left(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)\right) + \left(sY(s) - y(0)\right) - 4Y'(s) = 0$$

$$-2sY(s) - s^2 Y'(s) + 3 + sY(s) - 3 - 4Y'(s) = 0$$

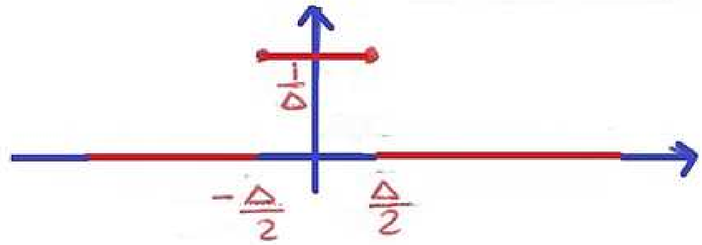
$$(s^2+4)Y'(s) + sY(s) = 0 \longrightarrow \frac{Y'(s)}{Y(s)} = \frac{-s}{s^2+4} \longrightarrow \ln(Y(s)) = \frac{-1}{2}\ln(s^2+4) + \ln C$$

$$Y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+4}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = C J_0(2t) \xrightarrow[y(0)=3]{} 3 = C(1) \rightarrow C = 3$$

$$y_p(t) = 3J_0(2t)$$

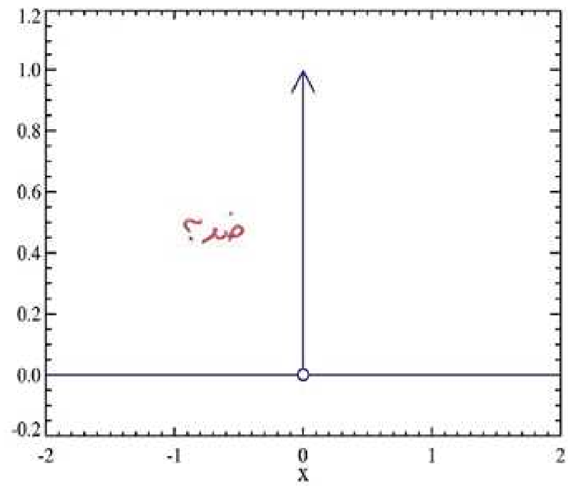
تابع دلتای دیراک (تابع ضربه) $\delta(t)$

$$P_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \; ; & -\frac{\Delta}{2} < t < \frac{\Delta}{2} \\ 0 \; ; & \text{o.w} \end{cases}$$




$\lim\limits_{\Delta \to 0} P_{\Delta} = \infty$ تعریف می‌کنیم

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$




$(I)\; \delta(t) = 0 \quad (\forall t \neq 0)$

$(II)\; \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$

بازه [a,b] شامل t=0 باشد. $\int_a^b \delta(t)\, dt = 1$ درغیر اینصورت $\int_a^b \delta(t)\, dt = 0$

$(III)\; \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, \delta(t-t_0)\, dt = e^{-st_0}$ $\qquad \frac{d}{dt} U_0(t) = \delta(t)$

$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim\limits_{t_0 \to 0^+} e^{-st_0} = 1$ $\qquad$ اگر بازه شامل $t_0$ باشد. $\int_a^b \delta(t-t_0)\, dt = 1$

مثال: به کمک تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2y'' + y' + 2y = \delta(t-5) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$2\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-5)\}$$

$$2\left[s^2 Y(s) - (s y(0) + y'(0))\right] + \left[s Y(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = e^{-5s}$$

$$Y(s)(2s^2 + s + 2) = e^{-5s} \longrightarrow Y(s) = \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2}\right\} = y = U_5(t)\, f(t-5) = \frac{2}{15} \cdot e^{-\frac{1}{4}t} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t$$

این لاپلاس معکوس در صفحه ۱۴۳ حل شد.

جلسه سی و سوم ۲۴ خرداد

# دستگاه معادلات دیفرانسیل

فرض کنید یک دستگاه شامل $m$ معادله دیفرانسیل از مرتبه $n$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f_1(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) \end{cases}$$

درحالتی که هریک از توابع $f_1, \dots, f_m$ نسبت به $y_1, \dots, y_m$ و مشتقات آنها خطی باشند

دستگاه را خطی گوییم.

روش ها حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

I) تبدیل لاپلاس [مشروط بر اینکه دستگاه خطی با ضرایب ثابت باشد یا ضرایب چندجمله‌ای باشند و شرایط اولیه نیز موجود باشد.]

II) روش حذفی [با استفاده از عملگر مشتق]

III) روش ماتریسی [استفاده از مقادیر ویژه ماتریس]

مثال)
$$\begin{cases} -4y_1 + y_2'' = -4e^t \\ y_1'' - y_1 - 3y_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 2 & y_2(0) = 1 \\ y_1'(0) = 3 & y_2'(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(t) = ? \\ y_2(t) = ? \end{cases}$$

به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$\begin{cases} -4\mathcal{L}\{y_1\} + \mathcal{L}\{y_2''\} = -4\mathcal{L}\{e^t\} \\ \mathcal{L}\{y_1''\} - \mathcal{L}\{y_1\} - 3\mathcal{L}\{y_2\} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4Y_1(s) + s^2Y_2(s) - sy_2(0) - y_2'(0) = \dfrac{-4}{s-1} \\ s^2Y_1(s) - sy_1(0) - y_1'(0) - Y_1(s) - 3Y_2(s) = 0 \end{cases}$$

کرامر؟
$$\begin{cases} -4Y_1(s) + s^2Y_2(s) = s + 2 - \dfrac{4}{s-1} \\ (s^2-1)Y_1(s) - 3Y_2(s) = 2s+3 \end{cases}$$

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+2-\frac{4}{s-1} & s^2 \\ 2s+3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & s^2 \\ s^2-1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2s-3}{(s-1)(s-2)}, \quad Y_2(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} \qquad y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(s)\} = e^t + e^{2t}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s-2} \qquad y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_2(s)\} = e^{2t}$$

مثال) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x' = x - y + e^t \\ y' = x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$D := \frac{d}{dt} \qquad \begin{cases} (D-1)x + y = e^t \\ -x + (D-3)y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{کرامر}} x(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 1 \\ 0 & D-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D-3 \end{vmatrix}} = \frac{(D-3)e^t}{(D-1)(D-3)+1}$$

$$x(t) = \frac{e^t - 3e^t}{D^2 - 4D + 4} \longrightarrow x(t) = \frac{-2e^t}{D^2 - 4D + 4} \longrightarrow (D^2 - 4D + 4)x = -2e^t$$

$$x'' - 4x' + 4x = -2e^t \longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$x_g(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

$$x_p(t) = Ae^t \longrightarrow \text{جایگذاری}: (A - 4A + 4A)e^t = -2e^t \longrightarrow A = -2$$

$$x_p = -2e^t$$

$$x_G = x_g + x_p = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} - 2e^t$$

$x_G$ را در معادله اول قرار می‌دهیم:

$$y_G = x_G - x_G' + e^t = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \cancel{- 2e^t} - 2c_1 e^{2t} - 2c_2 t e^{2t} - c_2 e^{2t} \cancel{+ 2e^t} + e^t$$

$$y_G = -(c_1 + c_2)e^{2t} - c_2 t e^{2t} + e^t$$

2 ثابت (در مجموعه جواب‌ها عمومی)

$$x_G(0) = 0 \longrightarrow c_1 = 2 \quad , \quad y_G(0) = 0 \longrightarrow 1 = c_1 + c_2 \longrightarrow c_2 = -1$$

$$x(t) = 2e^t - te^{2t} - 2e^t \qquad y(t) = -e^{2t} + te^{2t} + e^t$$

همان دستگاه را با لاپلاس حل کنید.

$$\mathcal{L}\{x'\}-\mathcal{L}\{x\}-\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{e^{t}\} \longrightarrow sX(s)-x(0)-X(s)+Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$\longrightarrow -X(s)+sY(s)-y(0)-3Y(s)=0$$

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{s-3}{(s-1)(s-2)^2} \Rightarrow \dfrac{A}{s-1}+\dfrac{Bs+C}{(s-2)^2} \rightarrow X(s)=\dfrac{-2}{s-1}+\dfrac{2}{s-2}-\dfrac{1}{(s-2)^2} \\ Y(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s-2)^2} \qquad Y(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{1}{(s-2)^2} \end{cases}$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=-2e^{t}+2e^{2t}-te^{2t}=(2-t)e^{2t}-2e^{t}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=e^{t}-e^{2t}+te^{2t}=(t-1)e^{2t}+e^{t}$$

مثال) ابتدا تعداد ثابت ها جواب عمومی دستگاه را مشخص و سپس آنها را حل کنید.

$$\begin{cases} -x_1''+x_2''=x_1 \\ x_1'-x_2'=\sin t \end{cases} \qquad x_1(t)=?\quad x_2(t)=?$$

$$D:=\frac{d}{dt} \qquad \begin{cases} -(D^2+1)x_1+D^2x_2=0 \\ Dx_1-Dx_2=\sin t \end{cases}$$

$$x_1=\frac{1}{\begin{vmatrix} -D^2-1 & D^2 \\ D & -D \end{vmatrix}}=\frac{1}{D}$$

درجه عملگر $D$ در مخرج تعداد ثابت ها را در جواب عمومی دستگاه خطی مشخص می کند.

در روش کرامر

مثال) معادله روبه رو خیلی ثابت در جواب عمومی آن ظاهر شود.
سپس دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 3x - 4y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 3y - 4x = 0 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}$ دو ثابت ظاهر می‌شود.

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & D+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{D^2-25} \rightarrow x'' - 25x = 0 \rightarrow x_G = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-5t}$$

$$y_G = \frac{\begin{vmatrix} D-3 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{D^2-25} \rightarrow y'' - 25y = 0 \rightarrow y_G = c_3 e^{5t} + c_4 e^{-5t}$$

با قرار دادن $x_G$ و $y_G$ در معادله اول دستگاه داریم:
$$\begin{cases} C_3 = \frac{1}{2} C_1 \\ C_4 = -2C_2 \end{cases}$$

جلسه سی و چهارم (آخرین) :

مثال) معادله روبرو چند ثابت در جواب عمومی آن ظاهر شود؟ سپس آن را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 3x - 4y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3y - 4x = 0 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}$ دو ثابت ظاهر می‌شود.

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & D+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{D^2-25} \rightarrow x'' - 25x = 0 \rightarrow x_G = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-5t}$$

$$y_G = \frac{\begin{vmatrix} D-3 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-3 & -4 \\ -4 & D+3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{D^2-25} \rightarrow y'' - 25y = 0 \rightarrow y_G = c_3 e^{5t} + c_4 e^{-5t}$$

با قرار دادن $x_G$ و $y_G$ در معادله اول دستگاه داریم:
$$\begin{cases} C_3 = \frac{1}{2} C_1 \\ C_4 = -2C_2 \end{cases}$$

جلسه سی و چهارم (آخرین جلسه):

Eigen value

Eigen Vector

مقدار ویژه - بردار ویژه

یکی از کاربردها: گرافیک کامپیوتر

برای ماتریس مربعی مانند $A$، بردار $X$ و اسکالر $\lambda$ را به ترتیب بردار ویژه و مقدار ویژه $A$ گوییم هرگاه:

$$A\overset{\text{بردار ویژه}}{X} = \underset{\text{مقدار ویژه}}{\lambda} X \qquad X \neq 0 \rightarrow$$ یعنی حداقل یکی از مولفه‌ها غیر صفر باشد.

$$AX = \lambda I X \rightarrow \overbrace{(A - \lambda I)}^{B} \overset{\neq 0}{X} = 0 \longrightarrow |B| = 0$$

$$\text{if } \det(B) = 0 \Rightarrow \exists X \neq 0 \; ; \; BX = 0$$

دستگاه $(A-\lambda I)X = 0$ دارای جواب غیر صفر است هرگاه: $\det(A - \lambda I) = 0$

ماتریس $n \times n$ با مولفه‌های وابسته به لاندا

چند جمله‌ای برحسب لاندا از درجه $n$

با حل این معادله $n$ مقدار ویژه برای ماتریس $n$ مشخص می‌شود

(با احتساب مقادیر ویژه تکراری و مختلط)

به ازای هر مقدار ویژه $\lambda^*$ می‌توان از حل دستگاه زیر بردار ویژه متناظر $\lambda^*$ را بدست آورد.

مثال) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس های زیر را بدست آورید

$$A=\begin{bmatrix}-3 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -2\end{bmatrix}_{2\times2},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-3 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3-\lambda\ , & \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\ , & -2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{\det}\lambda^2+5\lambda+6-2=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1=-4\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{if }\lambda=-4} AX_1=-4X_1\longrightarrow(A+4I)X_1=0=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{cases}\alpha+\sqrt{2}\beta=0\\ \sqrt{2}\alpha+2\beta=0\end{cases}\longrightarrow\alpha=-\sqrt{2}\beta\qquad \begin{matrix}\beta\in\mathbb{R}\\ \beta\neq0\end{matrix}\Longrightarrow X_1=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\beta\\ \beta\end{bmatrix};\ \beta\neq0,\ \beta\in\mathbb{R}$$

$$\text{if }\lambda=-1\quad AX=-X\longrightarrow(A+I)X=0=\begin{bmatrix}-2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -1\end{bmatrix}X=0$$

$$\longrightarrow\begin{cases}-2\alpha^*+\sqrt{2}\beta^*=0\\ \sqrt{2}\alpha^*-\beta^*=0\end{cases}\longrightarrow\beta^*=\sqrt{2}\alpha^*\longrightarrow X_2=\begin{bmatrix}\alpha^*\\ \sqrt{2}\alpha^*\end{bmatrix};\ \alpha\neq0,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$B-\lambda I=\begin{bmatrix}-2-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{\det}(2+\lambda)^2-1=0\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=-3\end{cases}$$

$$\text{if }\lambda=-1\longrightarrow BX_1=-X_1\longrightarrow(B+I)X_1=0=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}X=0$$

$$\begin{cases}-1\alpha+\beta=0\\ 1\alpha-\beta=0\end{cases}\longrightarrow X_1=\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}\ ;\ \begin{matrix}\alpha\neq0\\ \alpha\in\mathbb{R}\end{matrix}$$

$$\text{if }\lambda=-3\quad BX=-3X\longrightarrow(B+3I)X_2=0=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}X_2=0\qquad\begin{cases}\alpha^*+\beta^*=0\\ \alpha^*+\beta^*=0\end{cases}$$

$$\longrightarrow X_2\begin{bmatrix}\alpha^*\\ -\alpha^*\end{bmatrix}\ ;\ \begin{matrix}\alpha^*\neq0\\ \alpha^*\in\mathbb{R}\end{matrix}$$

تذکر: بردارهای $n$ تایی $X_1$ و $X_2$ و ... و $X_n$ را مستقل خطی هستند گوییم هرگاه:

هرگاه ماتریس زیر معکوس پذیر باشد.

$$\left[ X_1 \,\vdots\, X_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, X_n \right] \xrightarrow{\text{یا بطور معادل}} c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n = 0 \qquad c_1 = \cdots = c_n = 0$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad X_n = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

بردارهای $X_1 e^{\lambda_1 t}$ و ... و $X_n e^{\lambda_n t}$ مستقل خطی هستند هرگاه $X_1$ و ... و $X_n$ بردارها مستقل خطی باشند. ($\lambda_1$ و ... و $\lambda_n$ اسکالر)

$$\left[ X_1 e^{\lambda_1 t} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, X_n e^{\lambda_n t} \right] \xrightarrow{\det} e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} \det \left[ X_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, X_n \right]$$

استقلال خطی $X_1 e^{\lambda_1 t}$ و ... و $X_n e^{\lambda_n t}$ $\Longleftrightarrow$ استقلال خطی بردارهای $X_1$ تا $X_n$

تعریف: دستگاهی شامل $n$ تابع مجهول و $n$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت بصورت زیر است:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1n} y_n + g_1(t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{2n} y_n + g_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = a_{n1} y_1 + a_{n2} + \cdots + a_{nn} y_n + g_n(t)$$

که در آن $a_{ij} \in \mathbb{R}$ و $g_i(t)$ معلوم می‌باشند دستگاه فوق را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$i = 1, \ldots, n$

$j = 1, \ldots, n$

$$Y=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

$$Y'=AY+G$$

اگر $G=0$ دستگاه همگن گوییم: $[Y'=AY]$

$$\begin{cases} (D-a_{11})y_1-a_{12}y_2-\cdots-a_{1n}y_n=0 \\ -a_{21}y_1+(D-a_{22})y_2-a_{23}y_3-\cdots-a_{2n}y_n=0 \\ \vdots \\ -a_{n1}y_1-\cdots\cdots+(D-a_{nn})y_n=0 \end{cases}$$

کرامر $= \dfrac{|\quad|}{\begin{vmatrix} D-a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & D-a_{nn} \end{vmatrix}}$

چندجمله درجه $n$ برحسب $D$

در جواب عمومی دستگاه $Y'=AY$، $n$ ثابت موجود است بنابراین باید $n$ جواب مستقل خطی برای این دستگاه بدست آوردیم. $Y_1,\dots,Y_n \to Y_g=C_1Y_1+\dots+C_nY_n$

فرض کنیم $Y=Xe^{\lambda t}$ جواب دستگاه $Y'=AY$ باشد. داریم:

$$\frac{d}{dt}(Xe^{\lambda t})=A(Xe^{\lambda t}) \longrightarrow \lambda Xe^{\lambda t}=AXe^{\lambda t} \Rightarrow AX=\lambda X$$

بنابراین با فرض اینکه $\lambda$ مقدار ویژه $A$ باشد و $X$ بردار ویژه متناظر با $\lambda$ برای ماتریس $A$ باشد. $Xe^{\lambda t}$ جواب برای دستگاه $Y'=AY$ می باشد حال اگر $\lambda_1$ تا $\lambda_n$ مقادیر ویژه $A$ باشند و $X_1$ تا $X_n$ بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_1$ تا $\lambda_n$ باشند که مستقل خطی اند، آنگاه $n$ جواب مستقل دستگاه به صورت زیر است:

$$Y_1=X_1e^{\lambda_1 t},\ \dots,\ Y_n=X_ne^{\lambda_n t}$$

در نتیجه $Y_G=C_1Y_1+\dots+C_nY_n$

اگر A متقارن و مقادیر ویژه حقیقی و متمایز $\Longrightarrow$ بردارهای ویژه مستقل خطی اند.

مثال) به کمک روش ماتریسی دستگاه زیر را حل کنید.

$$Y' = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} Y$$

$$\equiv \begin{cases} y_1'(t) = -3y_1(t) + \sqrt{2}\, y_2(t) \\ y_2'(t) = \sqrt{2}\, y_1(t) - 2 y_2(t) \end{cases} \qquad Y_1 = X_1 e^{\lambda_1 t}, \quad Y_2 = X_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\xrightarrow{A} X_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}\beta \\ \beta \end{bmatrix} \; (\lambda_1 = -4) \longrightarrow Y_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix} \; (\lambda_2 = -1) \longrightarrow Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$Y_G = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 \begin{bmatrix} -\sqrt{2} e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \sqrt{2} e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{-4t} + \sqrt{2} c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

$y_{1g}(t) =$ سطر اول $\qquad y_{2g}(t) =$ سطر دوم

مثال) جواب عمومی دستگاه زیر را به روش ماتریسی بدست آورید.

$$Y' = BY \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases} \qquad Y = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} Y_1 = X_1 e^{-3t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} \\ Y_2 = X_2 e^{-t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \end{cases}$$

$$Y_G = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = \begin{bmatrix} -c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \end{bmatrix} \longrightarrow y_{1g}(t) = \text{سطر اول} \quad y_{2g}(t) = \text{سطر دوم}$$

ظاهراً تو امتحان نمیاد

$$Y' = AY \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = (sI - A)^{-1} Y(0) \longrightarrow Y(t) = e^{At} Y(0)$$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots$$

پایان

به پایان آمد این دفتر، حکایت همچنان باقی ست

تقدیم به روح پدر بزرگم....