۱- فرض کنید $\gamma = \gamma(s)$ یک خم پارامتری با پارامتر طول قوس باشد که سه بار مشتق پذیر است و در رابطه زیر صدق می‌کند: (تمرین تحویلی ۱۴۰۲)

$$\gamma(s) = B(s) - \gamma''(s)$$

نشان دهید

$$\tau(s) + \kappa'(s) = 0$$

پاسخ) چون $\gamma$ بر حسب طول قوس پارامتری شده است، اندازه $\gamma'$ برابر با یک می‌باشد و در نتیجه $T'(s) = \gamma''(s)$. از طرف دیگر می‌دانیم $T'(s) = \kappa(s)N(s)$. بنابراین:

$$\gamma(s) = B(s) - \gamma''(s) = B(s) - T'(s) = B(s) - \kappa(s)N(s)$$

حال از طرفین نسبت به $s$ مشتق می‌گیریم:

$$T(s) = B'(s) - \kappa'(s)N(s) - \kappa(s)N'(s)$$

$$T(s) = -\tau(s)N(s) - \kappa'(s)N(s) - \kappa(s)\big(\tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s)\big)$$

حال طرفین را در $N(s)$ ضرب داخلی می‌کنیم:

$$T(s).N(s) = -\tau(s)|N(s)|^2 - \kappa'(s)|N(s)|^2 - \kappa(s)\big(\tau(s)B(s).N(s) - \kappa(s)T(s).N(s)\big)$$

راهنمای حل سوال

چون $\gamma$ بر حسب طول قوس پارامتری شده است، $|\gamma'| = 1$

فرمول‌های فرنه:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

$$N'(s) = \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s)$$

مشتق‌گیری از طرفین نسبت به $s$ به منظور ظاهرشدن $B'$ و $N'$ و استفاده از فرمول‌های فرنه

ضرب داخلی طرفین در $N(s)$ و استفاده از خواصی مانند دو به دو عمود بودن بردارهای $T,N,B$ و یکه بودن بردارهای $T,N,B$

اگر دو بردار بر هم عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها صفر است

۱- فرض کنید $\gamma = \gamma(s)$ یک خم پارامتری با پارامتر طول قوس باشد که سه بار مشتق پذیر است و در رابطه زیر صدق می‌کند: (تمرین تحویلی ۱۴۰۲)

$$\gamma(s) = B(s) - \gamma''(s)$$

نشان دهید

$$\tau(s) + \kappa'(s) = 0$$

ادامه پاسخ) دقت داریم که $|N(s)| = 1$ و بردارهای $T,N,B$ دو به دو به هم عمود هستند (پس ضرب داخلی هر دو تا از آن‌ها برابر با صفر است). حال داریم:

$$0 = -\tau(s) - \kappa'(s) - 0 - 0 \Longrightarrow \tau(s) + \kappa'(s) = 0$$



راهنمای حل سوال

چون $\gamma$ بر حسب طول قوس پارامتری شده است، $|\gamma'| = 1$

فرمول‌های فرنه:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

$$N'(s) = \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s)$$

مشتق‌گیری از طرفین نسبت به $s$ به منظور ظاهرشدن $B'$ و $N'$ و استفاده از فرمول‌های فرنه

ضرب داخلی طرفین در $N(s)$ و استفاده از خواصی مانند دو به دو عمود بودن بردارهای $T,N,B$ و یکه بودن بردارهای $T,N,B$

اگر دو بردار بر هم عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها صفر است

۲- خم‌های زیر را بر حسب طول قوس پارامتری کنید:

الف) $r(t) = (a\cos^{۳} t, a\sin^{۳} t, b\cos ۲t)$ $\quad ۰ \le t \le \frac{\pi}{۲}$

پاسخ الف) برای پارامتری سازی بر حسب طول قوس ابتدا باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$s = \int_{۰}^{t} |r'(u)|\, du$$

پس به محاسبه $r'(t)$ می‌پردازیم:

$$r'(t) = (-۳a\cos^{۲} t\sin t\,, ۳a\sin^{۲} t\cos t\,, -۲b\sin ۲t)$$

حال اندازه $r'(t)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|r'(t)| = \sqrt{۹a^{۲}\cos^{۴} t\,\sin^{۲} t + ۹a^{۲}\sin^{۴} t\cos^{۲} t + ۴b^{۲}\sin^{۲} ۲t}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{۹a^{۲}\cos^{۴} t\,\sin^{۲} t + ۹a^{۲}\sin^{۴} t\cos^{۲} t + ۱۶b^{۲}\sin^{۲} t\cos^{۲} t}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{۹a^{۲} + ۱۶b^{۲}}\,\sin t\cos t$$

برای پارامتری سازی بر حسب طول قوس، ابتدا باید $s$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$s = \int_{۰}^{t} |r'(u)|\, du$$

در مرحله بعدی، خم $r$ را بر حسب $s$ بازنویسی می‌کنیم

۲- خم‌های زیر را بر حسب طول قوس پارامتری کنید:

الف) $r(t) = (a\cos^{۳} t, a\sin^{۳} t, b\cos ۲t) \qquad ۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$

ادامه پاسخ الف) حال مقدار $s$ را محاسبه می‌کنیم:

$$s = \int_{۰}^{t} |r'(u)|\, du = \int_{۰}^{t} \sqrt{۹a^{۲} + ۱۶b^{۲}} \sin u \cos u\, du$$

$$s = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹a^{۲} + ۱۶b^{۲}} \sin^{۲} t = A \sin^{۲} t$$

بنابراین

$$\sin^{۲} t = \frac{s}{A} \Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{s}{A}}, \qquad \cos t = \sqrt{۱ - \frac{s}{A}},$$

حال با جایگذاری در $r(t)$ خواهیم داشت:

$$r(s) = \left(a\left(۱ - \frac{s}{A}\right)^{\frac{۳}{۲}}, a\left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{۳}{۲}}, b\left(۱ - \frac{۲s}{A}\right)\right)$$

برای پارامتری سازی بر حسب طول قوس، ابتدا باید $s$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$s = \int_{۰}^{t} |r'(u)|\, du$$

در مرحله بعدی، خم $r$ را بر حسب $s$ بازنویسی می‌کنیم

راهنمای حل سوال

۲- خم‌های زیر را بر حسب طول قوس پارامتری کنید:

$$\text{ب)}\ r(t)=\left(t,\int_{۰}^{t}\sin\left(\frac{ku^{۲}}{۲}\right)du,\int_{۰}^{t}\cos\left(\frac{ku^{۲}}{۲}\right)du\right)$$

پاسخ ب) برای پارامتری سازی ابتدا باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$s=\int_{۰}^{t}|r'(u)|\,du$$

پس به محاسبه $r'(t)$ می‌پردازیم:

$$r'(t)=\left(۱,\sin\left(\frac{kt^{۲}}{۲}\right),\cos\left(\frac{kt^{۲}}{۲}\right)\right)$$

حال اندازه $r'(t)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|r'(t)|=\sqrt{۱^{۲}+sin^{۲}\left(\frac{kt^{۲}}{۲}\right)+cos^{۲}\left(\frac{kt^{۲}}{۲}\right)}=\sqrt{۲}$$

برای پارامتری سازی بر حسب طول قوس، ابتدا باید $s$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$s=\int_{۰}^{t}|r'(u)|\,du$$

در مرحله بعدی، خم $r$ را بر حسب $s$ بازنویسی می‌کنیم

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

راهنمای حل سوال

۲- خم‌های زیر را بر حسب طول قوس پارامتری کنید:

$$\text{ب)}\ r(t) = \left(t, \int_{0}^{t} \sin\left(\frac{ku^{2}}{2}\right) du, \int_{0}^{t} \cos\left(\frac{ku^{2}}{2}\right) du\right)$$

برای پارامتری سازی بر حسب طول قوس، ابتدا باید $s$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$s = \int_{0}^{t} |r'(u)|\, du$$

ادامه پاسخ ب) بنابراین $s$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s = \int_{0}^{t} |r'(u)|\, du = \int_{0}^{t} \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}t$$

در مرحله بعدی، خم $r$ را بر حسب $s$ بازنویسی می‌کنیم

پس $t$ بر حسب $s$ به صورت زیر می‌باشد:

$$t = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

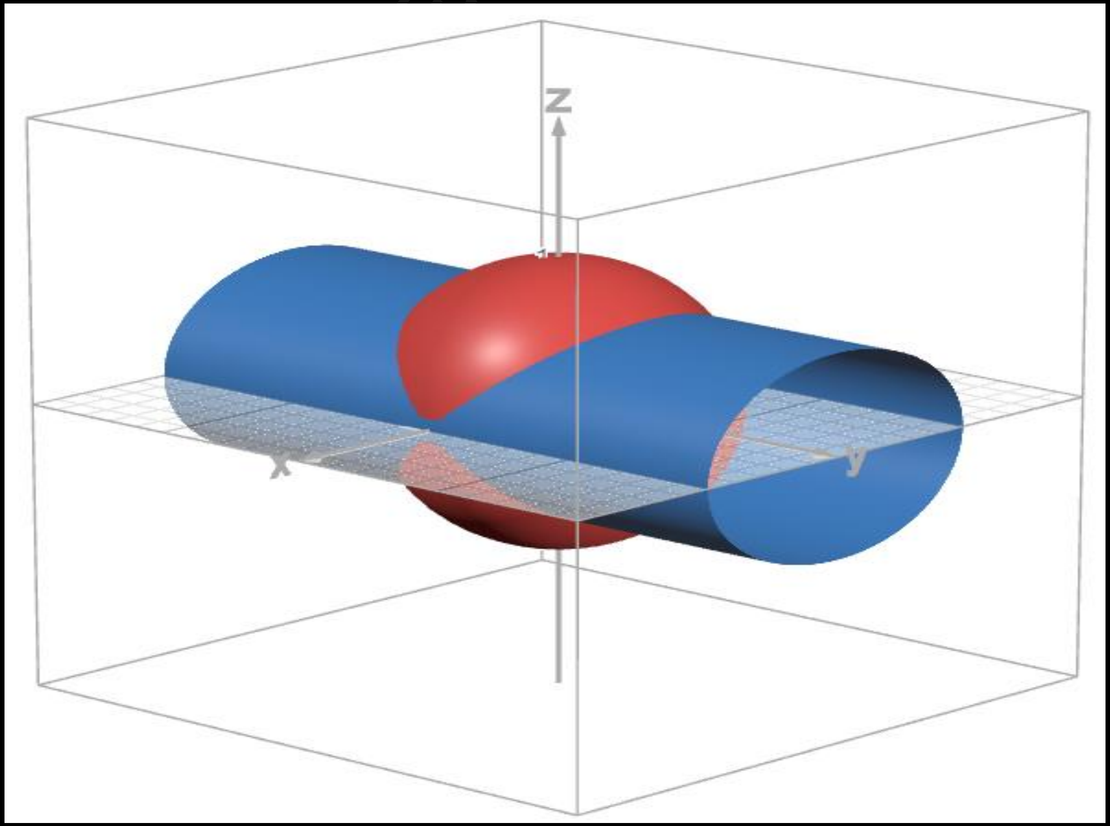
حال در آخرین گام، به جای $t$ قرار می‌دهیم $\frac{s}{\sqrt{2}}$:

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$r(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \int_{0}^{\frac{s}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{ku^{2}}{2}\right) du, \int_{0}^{\frac{s}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{ku^{2}}{2}\right) du\right)$$

۳- خم فصل مشترک کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و استوانه بیضوی $x^۲ + ۲z^۲ = ۱$ را توصیف کرده و طول خم مشترک را بیابید.

پاسخ)




راهنمای حل سوال

به دلیل تقارنی که وجود دارد، کافی است طول خم را در یکی از هشت ناحیه پیدا کنیم و در نهایت جواب را در هشت ضرب کنیم.

پارامتری کردن خم

شروع پارامتری کردن با رابطه مربوط به استوانه بیضوی

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(z-z_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_\circ = a\cos t$$

$$z - z_\circ = b\sin t$$

طول قوس:

$$s = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$$

محدوده $t$ به صورت زیر:

$$\circ \le t \le \frac{\pi}{۲}$$

۳- خم فصل مشترک کره $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و استوانه بیضوی $x^۲+۲z^۲=۱$ را توصیف کرده و طول خم مشترک را بیابید.

ادامه پاسخ) با توجه به تقارنی که وجود دارد، کافی است طول خم مورد نظر را در یکی از هشت ناحیه (مثلا ناحیه اول) محاسبه کنیم و در آخر کار جواب را در عدد هشت ضرب کنیم.

ابتدا خم مورد نظر را پارامتری می‌کنیم. ابتدا توجه داریم که:

$$x^۲+۲z^۲=۱ \Longrightarrow x^۲+\frac{z^۲}{\frac{۱}{۲}}=۱$$

بنابراین قرار می‌دهیم $x=\cos t$ و $z=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin t$. حال داریم (با فرض $y\geq ۰$ و $۰\leq t\leq \frac{\pi}{۲}$):

$$y^۲=۱-x^۲-z^۲=۱-cos^۲t-\frac{۱}{۲}sin^۲t=sin^۲t-\frac{۱}{۲}sin^۲t=\frac{۱}{۲}sin^۲t$$

پس $y=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin t$.

راهنمای حل سوال

به دلیل تقارنی که وجود دارد، کافی است طول خم را در یکی از هشت ناحیه پیدا کنیم و در نهایت جواب را در هشت ضرب کنیم.

پارامتری کردن خم

شروع پارامتری کردن با رابطه مربوط به استوانه بیضوی

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲}+\frac{(z-z_۰)^۲}{b^۲}=۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x-x_۰=a\cos t$$

$$z-z_۰=b\sin t$$

طول قوس:

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}|\gamma'(t)|dt$$

محدوده $t$ به صورت زیر:

$$۰\leq t\leq\frac{\pi}{۲}$$

۳- خم فصل مشترک کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و استوانه بیضوی $x^۲ + ۲z^۲ = ۱$ را توصیف کرده و طول خم مشترک را بیابید.

ادامه پاسخ) پس قرار می‌دهیم:

$$\gamma(t) = (\cos t, \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin t, \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin t) \qquad ۰ \le t \le \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین با استفاده از فرمول طول قوس، خواهیم داشت:

$$s = ۸\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} |\gamma'(t)|\, dt = ۸\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{cos^۲ t + \frac{۱}{۲}sin^۲ t + \frac{۱}{۲}sin^۲ t}\, dt$$

$$= ۸\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{cos^۲ t + sin^۲ t}\, dt$$

$$= ۸\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} dt$$

$$= ۴\pi$$



راهنمای حل سوال

به دلیل تقارنی که وجود دارد، کافی است طول خم را در یکی از هشت ناحیه پیدا کنیم و در نهایت جواب را در هشت ضرب کنیم.

پارامتری کردن خم

شروع پارامتری کردن با رابطه مربوط به استوانه بیضوی

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(z-z_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$
$$z - z_۰ = b\sin t$$

طول قوس:

$$s = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt$$

محدوده $t$ به صورت زیر:

$$۰ \le t \le \frac{\pi}{۲}$$

۴- خم فصل مشترک دو رویه $۴x^۲ - y^۲ = ۴$ و $z + ۲y = ۱$ را پارامتری کنید.

پاسخ) ابتدا رابطه $۴x^۲ - y^۲ = ۴$ را در نظر می‌گیریم:

$$4x^۲ - y^۲ = ۴ \quad \Longrightarrow \quad x^۲ - \frac{y^۲}{۴} = ۱$$

بنابراین قرار می‌دهیم $x = \cosh t$ و $y = ۲\sinh t$. حال از رابطه دیگر، $z$ را پارامتری می‌کنیم:

$$z = ۱ - ۲y \quad \Longrightarrow \quad z = ۱ - ۴\sinh t$$

پس خم مورد نظر ما که فصل مشترک دو رویه بود، به صورت پارامتری به صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma(t) = (\cosh t\,, ۲\sinh t\,, ۱ - ۴\sinh t)$$

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} - \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cosh t$$

$$y - y_۰ = b\sinh t$$

راهنمای حل سوال

۵- دامنه توابع زیر را مشخص کنید: (آدامز)

الف) $f(x,y)=\sqrt{۴x^{۲}+۹y^{۲}-۳۶}$

پاسخ) زیر رادیکال باید نامنفی باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$۴x^{۲}+۹y^{۲}-۳۶\geq ۰\Longrightarrow ۴x^{۲}+۹y^{۲}\geq ۳۶$$

$$\Longrightarrow \frac{x^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۴}\geq ۱$$

رابطه $\frac{x^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۴}=۱$ معرف یک بیضی است. بنابراین دامنه تابع $f$ شامل نقاط رو و خارج از بیضی $\frac{x^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۴}=۱$ می‌باشد.

زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد

رابطه $\frac{(x-x_{۰})^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(y-y_{۰})^{۲}}{b^{۲}}=۱$، معرف یک بیضی به مرکز $(x_{۰},y_{۰})$ می‌باشد

۵- دامنه توابع زیر را مشخص کنید: (آدامز)

ب) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^۲ - y^۲}$

پاسخ) مخرج باید مخالف صفر باشد. پس نقاطی که مخرج را صفر می‌کنند را شناسایی می‌کنیم:

$$x^۲ - y^۲ = ۰ \Longrightarrow y^۲ = x^۲ \Longrightarrow y = \pm x$$

پس دامنه شامل تمام نقاط صفحه $\mathbb{R}^۲$ به جز خطوط $y = x$ و $y = -x$ می‌باشد.

مخرج باید مخالف صفر باشد

۶- رویه‌های تراز تابع $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ را توصیف کنید. (آدامز)

پاسخ) قرار می‌دهیم $f(x,y,z) = c$، یعنی $x^2 + y^2 + z^2 = c$. اگر $c > 0$، آنگاه این رابطه معرف کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{c}$ است. بنابراین رویه‌ها در این حالت، کره‌هایی به مرکز مبدأ مختصات و شعاع‌های مختلف هستند.

اگر $c = 0$، آنگاه این رابطه معرف تک نقطه $(0,0,0)$ است.

رابطه $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ معرف یک کره به مرکز $(0,0,0)$ و شعاع $r$ است

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(۱,\pi)} \dfrac{\cos(xy)}{۱-x-\cos y}$ (آدامز)

پاسخ الف) درگام اول، جایگذاری را انجام می‌دهیم؛ یعنی داخل تابعی که می‌خواهیم حد آن را محاسبه کنیم، قرار می‌دهیم $x=۱$ و $y=\pi$.

$$\lim_{(x,y)\to(۱,\pi)} \frac{\cos(xy)}{۱-x-\cos y} = \lim_{(x,y)\to(۱,\pi)} \frac{\cos(\pi)}{۱-۱-\cos \pi} = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

جایگذاری درگام اول

بنابراین حد موجود و برابر با $-۱$ است.

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۱)} \dfrac{x^{۲}(y-۱)^{۲}}{x^{۲}+(y-۱)^{۲}}$ (آدامز)

پاسخ ب) ابتدا جایگذاری را انجام می‌دهیم:

$$L=\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{x^{۲}(y-1)^{۲}}{x^{۲}+(y-۱)^{۲}}=\frac{۰}{۰}$$

تغییر متغیرهای $X=x$ و $Y=y-۱$ را اعمال می‌کنیم. چون $(x,y)\to(۰,۱)$، پس $(X,Y)\to(۰,۰)$.

$$L=\lim_{(x,y)\to(۰,۱)} \frac{x^{۲}(y-۱)^{۲}}{x^{۲}+(y-۱)^{۲}}=\lim_{(X,Y)\to(۰,۰)} \frac{X^{۲}Y^{۲}}{X^{۲}+Y^{۲}}$$

می‌دانیم $\frac{X^{۲}}{X^{۲}+Y^{۲}}\leq ۱$. بنابراین

$$۰\leq\left|\frac{X^{۲}Y^{۲}}{X^{۲}+Y^{۲}}\right|=\left|\frac{X^{۲}}{X^{۲}+Y^{۲}}\right|\left|Y^{۲}\right|\leq ۱\times\left|Y^{۲}\right|=\left|Y^{۲}\right|$$

جایگذاری در گام اول

تغییر متغیر

$$\frac{X^{۲}}{X^{۲}+Y^{۲}}\leq ۱$$

قضیه فشردگی

راهنمای حل سوال

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ (آدامز)

جایگذاری در گام اول

ادامه پاسخ ب) حال چون

تغییر متغیر

$$\lim_{(X,Y)\to(0,0)} 0 = 0, \qquad \lim_{(X,Y)\to(0,0)} |Y^2| = 0,$$

طبق قضیه فشردگی، داریم:

$$\frac{X^2}{X^2+Y^2} \leq 1$$

$$\lim_{(X,Y)\to(0,0)} \left|\frac{X^2Y^2}{X^2+Y^2}\right| = 0$$

و در نتیجه:

قضیه فشردگی

$$L = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X^2Y^2}{X^2+Y^2} = 0$$

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

(آدامز)

پ) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y^۳}{x^۲+y^۲}$



پاسخ پ) ابتدا جایگذاری را انجام می‌دهیم:

جایگذاری در گام اول

$$L = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y^۳}{x^۲+y^۲} = \frac{۰}{۰}$$

حال عبارت را تفکیک می‌کنیم (به شکل حاصل ضرب دو عبارت):

نوشتن تابع به صورت حاصل ضرب دو عبارت

$$L = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y^۳}{x^۲+y^۲} = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y^۲}{x^۲+y^۲} y$$

$$\frac{y^۲}{x^۲+y^۲} \le ۱$$

می‌دانیم $\frac{y^۲}{x^۲+y^۲} \le ۱$. بنابراین

قضیه فشردگی

$$۰ \le \left|\frac{y^۳}{x^۲+y^۲}\right| = \left|\frac{y^۲}{x^۲+y^۲}\right| |y| \le ۱ \times |y| = |y|$$

راهنمای حل سوال

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

(آدامز)

پ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

جایگذاری در گام اول

ادامه پاسخ پ) حال چون

نوشتن تابع به صورت حاصل ضرب دو عبارت

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0,$$

طبق قضیه فشردگی، داریم:

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$$

و در نتیجه:

قضیه فشردگی

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0$$

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

ت) $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{\sin(xy)}{x^۲+y^۲}$ (آدامز)

پاسخ ت) ابتدا جایگذاری را انجام می‌دهیم:

جایگذاری در گام اول

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{\sin(xy)}{x^۲+y^۲} = \frac{۰}{۰}$$

حال حد را روی دو مسیر متفاوت حساب می‌کنیم.

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

مسیر اول: مسیر $y = x$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{\sin(xy)}{x^۲+y^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{\sin(x^۲)}{x^۲+x^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{\sin(x^۲)}{۲x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

مسیر دوم: مسیر $y = -x$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{u\to۰} \frac{\sin u}{u} = ۱$$

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{\sin(xy)}{x^۲+y^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{\sin(-x^۲)}{x^۲+(-x)^۲} = \lim_{x\to۰} \frac{-\sin(x^۲)}{۲x^۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

(آدامز)

ت) $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{\sin(xy)}{x^۲+y^۲}$

ادامه پاسخ ت) چون جواب حد برای دو مسیر متفاوت، اعداد متمایزی هست، پس حد وجود ندارد.

راهنمای حل سوال

جایگذاری در گام اول

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

$$\lim_{u\to ۰} \frac{\sin u}{u} = ۱$$

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱) ث) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 y)}{y^2 + x^4}$

جایگذاری در گام اول

پاسخ ث) ابتدا جایگذاری را انجام می‌دهیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 y)}{y^2 + x^4} = \frac{0}{0}$$

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

حال دو مسیر متفاوت را در نظر می‌گیریم:

مسیر اول: مسیر $x = 0$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 y)}{y^2 + x^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

مسیر دوم: مسیر $y = x^2$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{u} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 y)}{y^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^4)}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^4)}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

۷- در هر یک از موارد زیر، حدهای خواسته شده را محاسبه کنید و یا توضیح دهید که چرا حد وجود ندارد.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ث) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2 y)}{y^2 + x^4}$



ادامه پاسخ ث) چون جواب حد برای دو مسیر متفاوت، اعداد متمایزی هست، پس حد وجود ندارد.

جایگذاری در گام اول

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

$$\lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{u} = 1$$

۸- در مورد پیوستگی تابع زیر در مبدأ بحث کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۳}y^{۲}}{x^{۶}+y^{۴}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\[2ex] ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$



پاسخ) ادعا می‌کنیم تابع در مبدأ پیوسته نیست. حد تابع را در مبدأ بررسی می‌کنیم. با جایگذاری به $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. حال دو مسیر متفاوت را در نظر می‌گیریم:

مسیر اول: مسیر $y=۰$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{x^{۳}y^{۲}}{x^{۶}+y^{۴}}=\lim_{x\to ۰} ۰=۰$$

مسیر دوم: مسیر $y=x^{\frac{۳}{۲}}$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{x^{۳}y^{۲}}{x^{۶}+y^{۴}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۳}x^{۳}}{x^{۶}+x^{۶}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۶}}{۲x^{۶}}=\frac{۱}{۲}$$

راهنمای حل سوال

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

برای انتخاب یکی از مسیرها، به نحوی انتخاب را انجام می‌دهیم که درجه صورت و مخرج برابر شود

چون حد در مبدأ وجود ندارد، پس تابع در مبدأ پیوسته نیست

۸- در مورد پیوستگی تابع زیر در مبدأ بحث کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^{۳}y^{۲}}{x^{۶}+y^{۴}} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

ادامه پاسخ) چون جواب حد برای دو مسیر متفاوت، اعداد متمایزی هست، پس حد در مبدأ وجود ندارد و در نتیجه تابع $f$ در مبدأ پیوسته نیست.

راهنمای حل سوال

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

برای انتخاب یکی از مسیرها، به نحوی انتخاب را انجام می‌دهیم که درجه صورت و مخرج برابر شود

چون حد در مبدأ وجود ندارد، پس تابع در مبدأ پیوسته نیست

راهنمای حل سوال

۹- نشان دهید تابع زیر در مبدأ پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲ sin^۲ y}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$



پاسخ) باید نشان دهیم حد تابع $f$ در مبدأ با مقدار آن در مبدأ که صفر می‌باشد، برابر است.

می‌دانیم $|\sin y|\leq|y|$ و $\left|\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}\right|\leq ۱$. حال از این نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم:

$$۰\leq\left|\frac{x^۲ sin^۲ y}{x^۲+y^۲}\right|=\left|\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}\right|\left|sin^۲ y\right|\leq ۱\times|y|^۲=|y|^۲$$

حال داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} ۰ = ۰, \qquad \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} |y|^۲ = ۰$$

$$|\sin u|\leq|u|$$

$$\left|\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}\right|\leq ۱$$

قضیه فشردگی

چون حد با مقدار تابع در مبدأ برابر است، پس تابع در مبدأ پیوسته است.

۹- نشان دهید تابع زیر در مبدأ پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}\sin^{۲}y}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$



ادامه پاسخ) بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\left|\frac{x^{۲}\sin^{۲}y}{x^{۲}+y^{۲}}\right|=۰$$

و در نتیجه:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{x^{۲}\sin^{۲}y}{x^{۲}+y^{۲}}=۰$$

چون $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=f(۰,۰)=۰$ ، پس تابع $f$ در مبدأ پیوسته است.

$|\sin u|\leq|u|$

$$\left|\frac{x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}\right|\leq ۱$$

قضیه فشردگی

چون حد با مقدار تابع در مبدأ برابر است، پس تابع در مبدأ پیوسته است.

۱۰- نشان دهید تابع زیر پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{۱}{y}\right)+y\sin\left(\frac{۱}{x}\right) & x\neq ۰, y\neq ۰ \\ ۰ & O.W \end{cases}$$



پاسخ) کافی است نشان دهیم $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=f(۰,۰)=۰$ چون تابع $f$ در تمام نقاط غیر از مبدأ پیوسته است.

می‌دانیم طبق نامساوی مثلثی، $|a+b|\leq|a|+|b|$. همچنین $\left|\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\right|\leq ۱$ و $\left|\sin\left(\frac{۱}{y}\right)\right|\leq ۱$. حال از این نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم:

$$۰\leq\left|x\sin\left(\frac{۱}{y}\right)+y\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\right|\leq\left|x\sin\left(\frac{۱}{y}\right)\right|+\left|y\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\right|$$

$$=|x|\left|\sin\left(\frac{۱}{y}\right)\right|+|y|\left|\sin\left(\frac{۱}{x}\right)\right|$$

$$\leq|x|+|y|$$

راهنمای حل سوال

در نقاط غیر از مبدأ، تابع پیوسته است

$|\sin u|\leq ۱$

$|a+b|\leq|a|+|b|$

قضیه فشردگی

چون حد با مقدار تابع در مبدأ برابر است، پس تابع در مبدأ پیوسته است.

راهنمای حل سوال

۱۰- نشان دهید تابع زیر پیوسته است.

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0, y\neq 0 \\ 0 & O.W \end{cases}$$

در نقاط غیر از مبدأ، تابع پیوسته است

$|\sin u|\leq 1$

ادامه پاسخ) حال چون

$|a+b|\leq|a|+|b|$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0=0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|+|y|=0,$$

طبق قضیه فشردگی داریم:

قضیه فشردگی

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

بنابراین $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$ و این یعنی تابع $f$ در مبدأ نیز پیوسته است. پس در همه نقاط، تابع $f$ پیوسته است.

چون حد با مقدار تابع در مبدأ برابر است، پس تابع در مبدأ پیوسته است.

راهنمای حل سوال

۱۱- پیوستگی تابع زیر را در نقطه $(\circ,\circ)$ به طور دقیق بررسی کنید. (میان ترم ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{3}+y^{3}}{x-y} & x\neq y\\ \circ & x=y\end{cases}$$



پاسخ) ثابت می‌کنیم تابع $f$ در نقطه $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست. دو مسیر متفاوت زیر را در نظر می‌گیریم:

مسیر اول: مسیر $y=2x$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\frac{x^{3}+y^{3}}{x-y}=\lim_{x\to\circ}\frac{x^{3}+8x^{3}}{x-2x}=\lim_{x\to\circ}\frac{9x^{3}}{-x}=\lim_{x\to\circ}-9x^{2}=\circ$$

مسیر دوم: مسیر $y=x-x^{3}$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\frac{x^{3}+y^{3}}{x-y}=\lim_{x\to\circ}\frac{x^{3}+(x-x^{3})^{3}}{x-(x-x^{3})}=\lim_{x\to\circ}\frac{x^{3}+x^{3}(1-x^{2})^{3}}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to\circ}\frac{x^{3}(1+\left(1-x^{2}\right)^{3})}{x^{3}}=2$$

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

چون حد در مبدأ وجود ندارد، پس تابع در مبدأ پیوسته نیست

راهنمای حل سوال

۱۱- پیوستگی تابع زیر را در نقطه $(\circ,\circ)$ به طور دقیق بررسی کنید. (میان ترم ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۳}+y^{۳}}{x-y} & x\neq y\\[2ex] \circ & x=y\end{cases}$$

ادامه پاسخ) چون جواب حد روی دو مسیر متفاوت، اعداد غیر یکسانی است، پس تابع $f$ در $(\circ,\circ)$ حد ندارد و در نتیجه تابع $f$ در مبدأ پیوسته نیست.

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

چون حد در مبدأ وجود ندارد، پس تابع در مبدأ پیوسته نیست

۱۲- آیا می‌توان تابع

$$f(x,y)=\frac{\sin x\ \sin^3 y}{(1-\cos(x^2+y^2))}$$

را در $(0,0)$ طوری تعریف کرد که تابع حاصل در این نقطه پیوسته شود؟ اگر پاسخ مثبت است، این مقدار کدام است؟ (آدامز)

پاسخ) باید ببینیم آیا تابع $f$ در $(0,0)$ حد دارد یا خیر. دو مسیر متفاوت زیر را در نظر می‌گیریم:

مسیر اول: مسیر $y=0$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\ \sin^3 y}{(1-\cos(x^2+y^2))}=\lim_{x\to 0} 0=0$$

مسیر دوم: مسیر $y=x$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\ \sin^3 y}{(1-\cos(x^2+y^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{(1-\cos(2x^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{2\sin^2(x^2)}$$

$$=\frac{1}{2}$$



راهنمای حل سوال

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$

وقتی $u\to 0$، داریم:

$$\sin u \sim u$$

چون حد در مبدأ وجود ندارد، نمی‌توان $f$ را در مبدأ به گونه‌ای تعریف کرد که پیوسته باشد.

۱۲- آیا می‌توان تابع

$$f(x,y)=\frac{\sin x\ \ sin^{۳}y}{(۱-\cos(x^{۲}+y^{۲}))}$$

را در $(۰,۰)$ طوری تعریف کرد که تابع حاصل در این نقطه پیوسته شود؟ اگر پاسخ مثبت است، این مقدار کدام است؟ (آدامز)

ادامه پاسخ) چون جواب حد روی دو مسیر متفاوت، اعداد متمایزی هست، پس تابع $f$ در $(۰,۰)$ حد ندارد و بنابراین نمی‌توان $f(۰,۰)$ را به گونه‌ای تعریف کرد که تابع $f$ در مبدأ پیوسته باشد.

راهنمای حل سوال

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

$$\cos ۲\alpha = ۱-۲sin^{۲}\alpha$$

وقتی $u\to ۰$، داریم:

$$\sin u \sim u$$

چون حد در مبدأ وجود ندارد، نمی‌توان $f$ را در مبدأ به گونه‌ای تعریف کرد که پیوسته باشد.

۱۳- نشان دهید تابع زیر در $(\circ,\circ)$ پیوسته است. (میان ترم ۹۷-۹۸)

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos(xy)+\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(\circ,\circ)\\ ۱ & (x,y)=(\circ,\circ)\end{cases}$$



پاسخ) به بررسی $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$ می‌پردازیم. می‌دانیم $|\sin\alpha|\leq|\alpha|$ و $\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}\leq ۱$. حال داریم:

$$\circ\leq\left|\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right|\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\right|=\left|\sqrt{\frac{x^{۲}y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}}\right|=\left|\sqrt{\frac{x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}}\right||y|\leq|y|$$

حال چون

$$\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}|y|=\circ,\qquad \lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)}\circ=\circ,$$

$|\sin\alpha|\leq|\alpha|$

$\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}\leq ۱$

قضیه فشردگی

چون حد با مقدار تابع در مبدأ برابر است، پس تابع در مبدأ پیوسته است.

۱۳- نشان دهید تابع زیر در $(۰,۰)$ پیوسته است. (میان ترم ۹۷-۹۸)

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos(xy)+\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۱ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

ادامه پاسخ) طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=۰$$

حال داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\cos(xy)+\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\cos(xy)+\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

$$=۱+۰$$

$$=۱$$

بنابراین $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)=f(۰,۰)=۱$ و این یعنی تابع $f$ در $(۰,۰)$ پیوسته است.

راهنمای حل سوال

$|\sin\alpha|\leq|\alpha|$

$$\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}\leq ۱$$

قضیه فشردگی

چون حد با مقدار تابع در مبدأ برابر است، پس تابع در مبدأ پیوسته است.