۱- نشان دهید $W = \{(a-b,۳a+۲b,۰): a,b \in \mathbb{R}\}$ یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است. (پایان ترم ۱۴۰۲)

راهنمای حل سوال

پاسخ) ابتدا توجه داریم که به ازای $a=b=۰$، بردار $(۰,۰,۰)$ حاصل می‌شود. پس W ناتهی است و طبق یکی از قضایا، اگر به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و هر $v_۱,v_۲ \in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱ + v_۲ \in W$، آنگاه W یک زیرفضای $\mathbb{R}^۳$ خواهد بود. حال $\lambda \in \mathbb{R}$ و همچنین $v_۱,v_۲ \in W$ دلخواه را در نظر می‌گیریم. چون $v_۱ \in W$، پس $a_۱,b_۱ \in \mathbb{R}$ موجودند به طوری که $v_۱ = (a_۱-b_۱,۳a_۱+۲b_۱,۰)$. به طریق مشابه، چون $v_۲ \in W$، پس $a_۲,b_۲ \in \mathbb{R}$ موجودند به طوری که $v_۲ = (a_۲-b_۲,۳a_۲+۲b_۲,۰)$. حال داریم:

مجموعه W شامل $(۰,۰,۰)$ است پس ناتهی است

اگر فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و W به عنوان یک زیرمجموعه از فضای برداری، ناتهی باشد، می‌توانیم از محک زیر برای تشخیص زیرفضابودن استفاده کنیم:
مجموعه ناتهی W یک زیرفضاست اگر و تنها اگر به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و هر $v_۱,v_۲ \in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱ + v_۲ \in W$

$$\lambda v_۱ + v_۲ = \lambda(a_۱-b_۱,۳a_۱+۲b_۱,۰) + (a_۲-b_۲,۳a_۲+۲b_۲,۰)$$

$$= (\lambda a_۱ - \lambda b_۱ + a_۲ - b_۲, ۳\lambda a_۱ + ۲\lambda b_۱ + ۳a_۲ + ۲b_۲, ۰)$$

$$= ((\lambda a_۱ + a_۲) - (\lambda b_۱ + b_۲), ۳(\lambda a_۱ + a_۲) + ۲(\lambda b_۱ + b_۲), ۰)$$

حال اگر قرار دهیم $a_۳ = \lambda a_۱ + a_۲$ و $b_۳ = \lambda b_۱ + b_۲$، آنگاه خواهیم داشت:

$$\lambda v_۱ + v_۲ = (a_۳ - b_۳, ۳a_۳ + ۲b_۳, ۰) \in W$$

بنابراین W یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است.

بعد از تشکیل $\lambda v_۱ + v_۲$، فرمت $(a-b,۳a+۲b,۰)$ را برای آن نمایش می‌دهیم تا ثابت شود که داخل W است

راهنمای حل سوال

۲- نشان دهید $W=\{(a+۴c,۲b-a,۳c): a,b,c\in\mathbb{R}\}$ یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است. (پایان ترم ۱۴۰۱)

پاسخ) ابتدا توجه داریم که به ازای $a=b=c=۰$، بردار $(۰,۰,۰)$ حاصل می‌شود. پس W ناتهی است و طبق یکی از قضایا، اگر به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و هر $v_۱,v_۲\in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱+v_۲\in W$، آنگاه W یک زیرفضای $\mathbb{R}^۳$ خواهد بود. حال $\lambda\in\mathbb{R}$ و همچنین $v_۱,v_۲\in W$ دلخواه را در نظر می‌گیریم. چون $v_۱\in W$، پس $a_۱,b_۱,c_۱\in\mathbb{R}$ موجودند به طوری که $v_۱=(a_۱+۴c_۱,۲b_۱-a_۱,۳c_۱)$. به طریق مشابه، چون $v_۲\in W$، پس $a_۲,b_۲,c_۲\in\mathbb{R}$ موجودند به طوری که $v_۲=(a_۲+۴c_۲,۲b_۲-a_۲,۳c_۲)$. حال داریم:

$$\lambda v_۱+v_۲=\lambda(a_۱+۴c_۱,۲b_۱-a_۱,۳c_۱)+(a_۲+۴c_۲,۲b_۲-a_۲,۳c_۲)$$
$$=(\lambda a_۱+۴\lambda c_۱+a_۲+۴c_۲,۲\lambda b_۱-\lambda a_۱+۲b_۲-a_۲,۳\lambda c_۱+۳c_۲)$$
$$=\big((\lambda a_۱+a_۲)+۴(\lambda c_۱+c_۲),۲(\lambda b_۱+b_۲)-(\lambda a_۱+a_۲),۳(\lambda c_۱+c_۲)\big)$$

حال اگر قرار دهیم $a_۳=\lambda a_۱+a_۲$، $b_۳=\lambda b_۱+b_۲$ و $c_۳=\lambda c_۱+c_۲$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\lambda v_۱+v_۲=(a_۳+۴c_۳,۲b_۳-a_۳,۳c_۳)\in W$$

بنابراین W یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است.

مجموعه W شامل $(۰,۰,۰)$ است پس ناتهی است

اگر فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و W به عنوان یک زیرمجموعه از فضای برداری، ناتهی باشد، می‌توانیم از محک زیر برای تشخیص زیرفضابودن استفاده کنیم:
مجموعه ناتهی W یک زیرفضاست اگر و تنها اگر به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و هر $v_۱,v_۲\in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱+v_۲\in W$

بعد از تشکیل $\lambda v_۱+v_۲$، فرمت $(a+۴c,۲b-a,۳c)$ را برای آن نمایش می‌دهیم تا ثابت شود که داخل W است

۳- نشان دهید زیرمجموعه $W=\{(x,y,z)|۱۳۹۹x+۱۴۰۰y=۰\}$ از $\mathbb{R}^۳$ زیرفضای برداری آن است. (پایان ترم ۹۹)

پاسخ) اعضای مجموعه W را به شکل دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. در واقع اگر از رابطه $۱۳۹۹x+۱۴۰۰y=۰$، y را تنها کنیم، خواهیم داشت $y=-\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x$. بنابراین:

$$W=\left\{\left(x,-\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x,z\right)|x,z\in\mathbb{R}\right\}$$

ابتدا توجه داریم که به ازای $x=z=۰$، بردار $(۰,۰,۰)$ حاصل می‌شود. پس W ناتهی است و طبق یکی از قضایا، اگر به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و هر $v_۱,v_۲\in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱+v_۲\in W$، آنگاه W یک زیرفضای $\mathbb{R}^۳$ خواهد بود. حال $\lambda\in\mathbb{R}$ و همچنین $v_۱,v_۲\in W$ دلخواه را در نظر می‌گیریم. چون $v_۱\in W$، پس $x_۱,z_۱\in\mathbb{R}$ موجودند به طوری که $v_۱=(x_۱,-\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x_۱,z_۱)$. به طریق مشابه، چون $v_۲\in W$، پس $x_۲,z_۲\in\mathbb{R}$ موجودند به طوری که $v_۲=(x_۲,-\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x_۲,z_۲)$.

راهنمای حل سوال

می‌توانیم در ابتدا با تنها کردن y، نمایش دیگری برای W داشته باشیم

مجموعه W شامل $(۰,۰,۰)$ است پس ناتهی است

اگر فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و W به عنوان یک زیرمجموعه از فضای برداری، ناتهی باشد، می‌توانیم از محک زیر برای تشخیص زیرفضابودن استفاده کنیم:
مجموعه ناتهی W یک زیرفضاست اگر و تنها اگر به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و هر $v_۱,v_۲\in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱+v_۲\in W$

بعد از تشکیل $\lambda v_۱+v_۲$، فرمت $(x,-\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x,z)$ را برای آن نمایش می‌دهیم تا ثابت شود که داخل W است

۳- نشان دهید زیرمجموعه $W = \{(x,y,z) | ۱۳۹۹x + ۱۴۰۰y = ۰\}$ از $\mathbb{R}^۳$ زیرفضای برداری آن است. (پایان ترم ۹۹)

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\lambda v_۱ + v_۲ = \lambda(x_۱, -\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x_۱, z_۱) + (x_۲, -\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x_۲, z_۲)$$

$$= (\lambda x_۱ + x_۲, -\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}(\lambda x_۱ + x_۲), \lambda z_۱ + z_۲)$$

حال اگر قرار دهیم $x_۳ = \lambda x_۱ + x_۲$ و $z_۳ = \lambda z_۱ + z_۲$، آنگاه خواهیم داشت:

$$\lambda v_۱ + v_۲ = (x_۳, -\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x_۳, z_۳) \in W$$

بنابراین W یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است.

راهنمای حل سوال

می‌توانیم در ابتدا با تنها کردن y، نمایش دیگری برای W داشته باشیم

مجموعه W شامل $(۰,۰,۰)$ است پس ناتهی است

اگر فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و W به عنوان یک زیرمجموعه از فضای برداری، ناتهی باشد، می‌توانیم از محک زیر برای تشخیص زیرفضابودن استفاده کنیم:
مجموعه ناتهی W یک زیرفضاست اگر و تنها اگر به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و هر $v_۱, v_۲ \in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱ + v_۲ \in W$

بعد از تشکیل $\lambda v_۱ + v_۲$، فرمت $(x, -\frac{۱۳۹۹}{۱۴۰۰}x, z)$ را برای آن نمایش می‌دهیم تا ثابت شود که داخل W است

۴- نشان دهید $W=\{(۲x-y,y+۳z,x-z): x,y,z\in\mathbb{R}\}$ یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است. (پایان ترم ۹۷)

پاسخ) ابتدا توجه داریم که به ازای $x=y=z=۰$، بردار $(۰,۰,۰)$ حاصل می‌شود. پس W ناتهی است و طبق یکی از قضایا، اگر به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و هر $v_۱,v_۲\in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱+v_۲\in W$، آنگاه W یک زیرفضای $\mathbb{R}^۳$ خواهد بود. حال $\lambda\in\mathbb{R}$ و همچنین $v_۱,v_۲\in W$ دلخواه را در نظر می‌گیریم. چون $v_۱\in W$، پس $x_۱,y_۱,z_۱\in\mathbb{R}$ موجودند به طوری که $v_۱=(۲x_۱-y_۱,y_۱+۳z_۱,x_۱-z_۱)$. به طریق مشابه، چون $v_۲\in W$، پس $x_۲,y_۲,z_۲\in\mathbb{R}$ موجودند به طوری که $v_۲=(۲x_۲-y_۲,y_۲+۳z_۲,x_۲-z_۲)$.

حال داریم:

$$\lambda v_۱+v_۲=\lambda(2x_۱-y_۱,y_۱+۳z_۱,x_۱-z_۱)+(۲x_۲-y_۲,y_۲+۳z_۲,x_۲-z_۲)$$
$$=(۲\lambda x_۱-\lambda y_۱+۲x_۲-y_۲,\lambda y_۱+۳\lambda z_۱+y_۲+۳z_۲,\lambda x_۱-\lambda z_۱+x_۲-z_۲)$$
$$=(۲(\lambda x_۱+x_۲)-(\lambda y_۱+y_۲),(\lambda y_۱+y_۲)+۳(\lambda z_۱+z_۲),(\lambda x_۱+x_۲)-(\lambda z_۱+z_۲))$$

حال اگر قرار دهیم $x_۳=\lambda x_۱+x_۲$، $y_۳=\lambda y_۱+y_۲$ و $z_۳=\lambda z_۱+z_۲$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\lambda v_۱+v_۲=(۲x_۳-y_۳,y_۳+۳z_۳,x_۳-z_۳)\in W$$

بنابراین W یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است.

راهنمای حل سوال

مجموعه W شامل $(۰,۰,۰)$ است پس ناتهی است

اگر فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد و W به عنوان یک زیرمجموعه از فضای برداری، ناتهی باشد، می‌توانیم از محک زیر برای تشخیص زیرفضابودن استفاده کنیم:
مجموعه ناتهی W یک زیرفضاست اگر و تنها اگر به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و هر $v_۱,v_۲\in W$، داشته باشیم $\lambda v_۱+v_۲\in W$

بعد از تشکیل $\lambda v_۱+v_۲$، فرمت $(۲x-y,y+۳z,x-z)$ را برای آن نمایش می‌دهیم تا ثابت شود که داخل W است

۵- فرض کنید

$$a = (1,2,0), \qquad b = (-2,3,1), \qquad c = (0,1,1)$$

آیا $S = \{a,b,c\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی فضای برداری $\mathbb{R}^3$ است؟ چرا؟

پاسخ) فرض کنید $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ به گونه‌ای باشند که

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$$

حال داریم:

$$\lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(-2,3,1) + \lambda_3(0,1,1) = 0$$

$$\Longrightarrow (\lambda_1 - 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 & (1) \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

از رابطه (۱) داریم $\lambda_1 = 2\lambda_2$ و از رابطه (۳) داریم $\lambda_3 = -\lambda_2$. با جایگذاری در رابطه (۲) داریم $4\lambda_2 + 3\lambda_2 - \lambda_2 = 0$ که نتیجه می‌شود $6\lambda_2 = 0$ و این یعنی $\lambda_2 = 0$. در نتیجه $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ و این یعنی S مستقل خطی است.

راهنمای حل سوال

اگر از
$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$
بتوانیم نتیجه بگیریم
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
آنگاه S مستقل خطی است و در غیر این صورت، وابسته خطی است

۶- فرض کنید

$$a = (۳,۶,۰), \qquad b = (۱,۲,۰), \qquad c = (-۱,۳,۴)$$

آیا $S = \{a,b,c\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی فضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است؟چرا؟

پاسخ) فرض کنید $\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳ \in \mathbb{R}$ به گونه‌ای باشند که

$$\lambda_۱ a + \lambda_۲ b + \lambda_۳ c = ۰$$

یعنی:

$$\lambda_۱ (۳,۶,۰) + \lambda_۲ (۱,۲,۰) + \lambda_۳ (-۱,۳,۴) = ۰$$

$$\Longrightarrow (۳\lambda_۱ + \lambda_۲ - \lambda_۳, ۶\lambda_۱ + ۲\lambda_۲ + ۳\lambda_۳, ۴\lambda_۳) = ۰$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۳\lambda_۱ + \lambda_۲ - \lambda_۳ = ۰ & (۱) \\ ۶\lambda_۱ + ۲\lambda_۲ + ۳\lambda_۳ = ۰ & (۲) \\ ۴\lambda_۳ = ۰ & (۳) \end{cases}$$

از رابطه (۳) به دست می‌آوریم $\lambda_۳ = ۰$ که با جایگذاری در رابطه (۱) داریم $۳\lambda_۱ + \lambda_۲ = ۰$ و با جایگذاری در رابطه (۲) داریم $۶\lambda_۱ + ۲\lambda_۲ = ۰$. حال کافی است به عنوان نمونه قرار دهیم $\lambda_۱ = ۱$ و $\lambda_۲ = -۳$ که در هر دو رابطه صدق می‌کنند.

راهنمای حل سوال

اگر از
$\lambda_۱ a + \lambda_۲ b + \lambda_۳ c = ۰$
بتوانیم نتیجه بگیریم
$\lambda_۱ = \lambda_۲ = \lambda_۳ = ۰$
آنگاه S مستقل خطی است و در غیر این صورت، وابسته خطی است

۶- فرض کنید

$$a = (۳,۶,۰), \qquad b = (۱,۲,۰), \qquad c = (-۱,۳,۴)$$

آیا $S = \{a,b,c\}$ یک زیرمجموعه مستقل خطی فضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است؟چرا؟

ادامه پاسخ) بنابراین اسکالرهای $\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳$ یافت شدند که همزمان صفر نیستند و در رابطه

$$\lambda_۱ a + \lambda_۲ b + \lambda_۳ c = ۰$$

صدق می‌کنند. این یعنی S مستقل خطی نیست و وابسته خطی است. در واقع ما از رابطه $\lambda_۱ a + \lambda_۲ b + \lambda_۳ c = ۰$ نتوانستیم نتیجه بگیریم که $\lambda_۱ = \lambda_۲ = \lambda_۳ = ۰$ و بنابراین S مستقل خطی نیست.

اگر از
$\lambda_۱ a + \lambda_۲ b + \lambda_۳ c = ۰$
بتوانیم نتیجه بگیریم
$\lambda_۱ = \lambda_۲ = \lambda_۳ = ۰$
آنگاه S مستقل خطی است و در غیر این صورت، وابسته خطی است