۱- فرض کنید

$$f(x,y,z)=\frac{xy^2z^3}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{x^2-y^2}{y^2+z^2}\right)$$

در این صورت مقدار عبارت زیر را به طور دقیق به دست آورید: (میان ترم ۱۴۰۲)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)+2\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2)$$

پاسخ) ابتدا $f(tx,ty,tz)$ را به ازای هر $t>0$ محاسبه می‌کنیم چون ممکن است بتوانیم از قضیه اویلر بهره ببریم:

$$f(tx,ty,tz)=\frac{(tx)(ty)^2(tz)^3}{(tx)^2+(ty)^2}\cos\left(\frac{(tx)^2-(ty)^2}{(ty)^2+(tz)^2}\right)$$

$$=\frac{t^6xy^2z^3}{t^2x^2+t^2y^2}\cos\left(\frac{t^2x^2-t^2y^2}{t^2y^2+t^2z^2}\right)$$

$$=t^4\frac{xy^2z^3}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{x^2-y^2}{y^2+z^2}\right)=t^4f(x,y,z)$$

راهنمای حل سوال

تابع به طور مثبت همگن از درجه ۴ است. در واقع به ازای هر $t>0$:

$$f(tx,ty,tz)=t^4f(x,y,z)$$

استفاده از قضیه اویلر:

$$\sum_{i=1}^{n}a_if_i(a_1,\dots,a_n)=kf(a_1,\dots,a_n)$$

راهنمای حل سوال

۱- فرض کنید

$$f(x,y,z)=\frac{xy^{۲}z^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}}\cos\left(\frac{x^{۲}-y^{۲}}{y^{۲}+z^{۲}}\right)$$

در این صورت مقدار عبارت زیر را به طور دقیق به دست آورید: (میان ترم ۱۴۰۲)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۱,۱,۲)+\frac{\partial f}{\partial y}(۱,۱,۲)+۲\frac{\partial f}{\partial z}(۱,۱,۲)$$

تابع به طور مثبت همگن از درجه ۴ است. در واقع به ازای هر $t>۰$:

$$f(tx,ty,tz)=t^{۴}f(x,y,z)$$

ادامه پاسخ) چون $f(tx,ty,tz)=t^{۴}f(x,y,z)$، طبق قضیه اویلر:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۱,۱,۲)+\frac{\partial f}{\partial y}(۱,۱,۲)+۲\frac{\partial f}{\partial z}(۱,۱,۲)=۴f(۱,۱,۲)=۴\times\frac{۸}{۲}\cos ۰=۱۶$$

استفاده از قضیه اویلر:

$$\sum_{i=۱}^{n}a_i f_i(a_۱,\dots,a_n)=kf(a_۱,\dots,a_n)$$

۲- معادله صفحه مماس و خط قائم بر نمودار تابع $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ را در نقطه $(۱, -۱)$ بیابید. (آدامز)

پاسخ) قرار می‌دهیم $z = \arctan\frac{y}{x}$. برای نقطه $(۱, -۱)$ داریم $z = -\frac{\pi}{۴}$. پس می‌خواهیم معادله صفحه مماس و خط قائم را در نقطه $p = \left(۱, -۱, -\frac{\pi}{۴}\right)$ پیدا کنیم.

می‌توانیم از بردار گرادیان رویه $F(x,y,z) = z - \arctan\frac{y}{x}$ در نقطه p استفاده کنیم.

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(-\frac{-\frac{y}{x^۲}}{۱ + \frac{y^۲}{x^۲}}, -\frac{\frac{۱}{x}}{۱ + \frac{y^۲}{x^۲}}, ۱\right)$$

$$\nabla F\left(۱, -۱, -\frac{\pi}{۴}\right) = \left(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, ۱\right)$$

بردار نرمال صفحه مماس را بردار گرادیان در نظر می‌گیریم. بنابراین معادله صفحه مماس به صورت زیر می‌باشد:

$$-\frac{۱}{۲}(x - ۱) - \frac{۱}{۲}(y + ۱) + \left(z + \frac{\pi}{۴}\right) = ۰$$

راهنمای حل سوال

قرار می‌دهیم $z = f(x,y)$ و تمام جملات را به یک سمت منتقل می‌کنیم تا تابع سه متغیره را تشکیل دهیم

برای نقطه $(۱, -۱)$، مقدار z را به دست می‌آوریم

می‌توان بردار گرادیان را به عنوان بردار نرمال صفحه مماس و خط هادی خط قائم در نظر گرفت

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

۲- معادله صفحه مماس و خط قائم بر نمودار تابع $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ را در نقطه $(۱,-۱)$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) بردار گرادیان را می‌توانیم به عنوان بردار هادی خط قائم در نظر بگیریم.
بنابراین معادله خط قائم به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{x-۱}{-\frac{۱}{۲}} = \frac{y+۱}{-\frac{۱}{۲}} = \frac{z+\frac{\pi}{۴}}{۱}$$

راهنمای حل سوال

قرار می‌دهیم $z = f(x,y)$ و تمام جملات را به یک سمت منتقل می‌کنیم تا تابع سه متغیره را تشکیل دهیم

برای نقطه $(۱,-۱)$، مقدار z را به دست می‌آوریم

می‌توان بردار گرادیان را به عنوان بردار نرمال صفحه مماس و خط هادی خط قائم در نظر گرفت

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

۳- مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله $z = x^{۴} - ۴xy^{۳} + ۶y^{۲} - ۲$ را بیابید که در آن‌ها این رویه دارای صفحه مماس افقی هست. (آدامز)

پاسخ) وقتی صفحه مماس افقی است، بردار نرمال آن در جهت x و y حرکتی ندارد و صفر است. پس کافی است نقاطی از رویه $F(x,y,z) = x^{۴} - ۴xy^{۳} + ۶y^{۲} - ۲ - z$ را بیابیم که بردار گرادیان آن‌ها دارای مولفه اول و دوم صفر باشد. گرادیان F به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla F(x,y,z) = (۴x^{۳} - ۴y^{۳}, -۱۲xy^{۲} + ۱۲y, -۱)$$

حال قرار می‌دهیم $\frac{\partial F}{\partial x} = ۰$ و $\frac{\partial F}{\partial y} = ۰$. بنابراین

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ۰ \Rightarrow ۴x^{۳} - ۴y^{۳} = ۰ \Rightarrow ۴(x-y)\left(x^{۲} + xy + y^{۲}\right) = ۰ \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = ۰ \Rightarrow -۱۲xy^{۲} + ۱۲y = ۰ \Rightarrow ۱۲y(۱ - xy) = ۰ \qquad (۲)$$

از معادله (۲) نتیجه می‌گیریم $y = ۰$ یا $xy = ۱$.

راهنمای حل سوال

تمام جملات را به یک سمت منتقل می‌کنیم تا تابع سه متغیره را تشکیل دهیم

وقتی صفحه مماس افقی باشد، بردار نرمال آن در جهت x و y حرکتی ندارد

باید نقاطی را پیدا کنیم که گرادیان آن‌ها دارای مولفه اول و دوم صفر باشد

راهنمای حل سوال

۳- مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله $z = x^{۴} - ۴xy^{۳} + ۶y^{۲} - ۲$ را بیابید که در آن‌ها این رویه دارای صفحه مماس افقی هست. (آدامز)

ادامه پاسخ) اگر $y = ۰$، آنگاه از رابطه اول به دست می‌آوریم $x^{۳} = ۰$ که نتیجه می‌دهد $x = ۰$. پس یکی از نقاط مورد نظر $(۰,۰,-۲)$ است.

حال اگر $xy = ۱$، آنگاه از رابطه اول داریم:

$$\left(x - \frac{۱}{x}\right)\left(x^{۲} + ۱ + \frac{۱}{x^{۲}}\right) = ۰ \implies \begin{cases} x - \frac{۱}{x} = ۰ \\ x^{۲} + ۱ + \frac{۱}{x^{۲}} = ۰ \end{cases}$$

$$\implies x = \pm ۱$$

اگر $x = ۱$، آنگاه $y = ۱$ و $z = ۱$. اگر $x = -۱$، آنگاه $y = -۱$ و $z = ۱$.

پس در مجموع، سه نقطه زیر جواب‌های مسأله هستند:

$(-۱,-۱,۱)$ $(۱,۱,۱),$ $(۰,۰,-۲),$

تمام جملات را به یک سمت منتقل می‌کنیم تا تابع سه متغیره را تشکیل دهیم

وقتی صفحه مماس افقی باشد، بردار نرمال آن در جهت x و y حرکتی ندارد

باید نقاطی را پیدا کنیم که گرادیان آن‌ها دارای مولفه اول و دوم صفر باشد

۴- بردار مماس بر خم مشترک بین دو استوانه $x^{۲}+y^{۲}=۲$ و $y^{۲}+z^{۲}=۲$ را در نقطه $(۱,-۱,۱)$ بیابید. (آدامز)

پاسخ) ابتدا بردار قائم دو استوانه را در نقطه به دست می‌آوریم (از گرادیان استفاده می‌کنیم). قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}-۲$ و $G(x,y,z)=y^{۲}+z^{۲}-۲$.
حال داریم:

$$\nabla F(x,y,z)=(۲x,۲y,۰)\Longrightarrow \nabla F(۱,-۱,۱)=(۲,-۲,۰)$$

$$\nabla G(x,y,z)=(۰,۲y,۲z)\Longrightarrow \nabla G(۱,-۱,۱)=(۰,-۲,۲)$$

حال بردار مماس بر خم مشترک بین دو استوانه را می‌توانیم به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$n=\nabla F(۱,-۱,۱)\times\nabla G(۱,-۱,۱)=(۲,-۲,۰)\times(۰,-۲,۲)$$

$$=(-۴,-۴,-۴)$$

هر مضرب اسکالری از n را نیز می‌توانیم به عنوان بردار مماس بر خم مشترک بین دو استوانه در نظر بگیریم.

راهنمای حل سوال

انتقال تمام جملات به یک سمت به منظور تشکیل تابع سه متغیره

استفاده از گرادیان توابع F و G در نقطه مورد نظر (چون در آن نقطه بردار گرادیان عمود بر رویه است)

بردار حاصل از ضرب خارجی ∇F و ∇G بر خم مشترک دو استوانه مماس خواهد بود

۵- فرض کنیم

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

الف) مطلوبست محاسبه $\nabla f(۰,۰)$. (آدامز)

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

پاسخ الف) طبق تعریف، گرادیان به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Longrightarrow \nabla f(۰,۰)=(f_x(۰,۰),f_y(۰,۰))$$

پس باید $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ را پیدا کنیم.

برای $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

$$f_x(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰)-۰}{h}=۰$$

$$f_y(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,۰+h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,h)-۰}{h}=۰$$

بنابراین $\nabla f(۰,۰)=(۰,۰)$.

۵- فرض کنیم

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

ب) با استفاده از تعریف مشتق سویی، $D_u f(۰,۰)$ را که در آن $u=\frac{i+j}{\sqrt{۲}}$ را محاسبه کنید. (آدامز)

پاسخ ب) طبق تعریف مشتق سویی داریم:

$$D_u f(P)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

$$D_u f(۰,۰)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f\left(۰+\frac{۱}{\sqrt{۲}}h,۰+\frac{۱}{\sqrt{۲}}h\right)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{\frac{\sin(\frac{۱}{۲}h^{۲})}{\sqrt{h^{۲}}}}{h}$$

$$=\frac{۱}{۲}$$

$$D_u f(P)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

راهنمای حل سوال

۵- فرض کنیم

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

پ) آیا $f(x,y)$ در $(۰,۰)$ دیفرانسیل پذیر است؟ (آدامز)

پاسخ پ) اگر تابع f در (x,y) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر بردار یکه u داریم:

$$D_uf(x,y)=u.\nabla f(x,y)$$

حال در این جا اگر $u=(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ را در نظر بگیریم، آنگاه همان طورکه دیدیم:

$$D_uf(۰,۰)=\frac{۱}{۲},\qquad \nabla f(۰,۰)=۰$$

چون برای جهت $u=(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}})$، رابطه $D_uf(۰,۰)=u.\nabla f(۰,۰)$ برقرار نیست،

پس تابع f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر نیست.

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$$D_uf(۰,۰)=u.\nabla f(۰,۰)$$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(۰,۰)$ اثبات شود

۶- فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{|y|}\sqrt{x^{2}+y^{2}} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

الف) نشان دهید برای هر بردار یکه $u=(u_1,u_2)$ در صفحه، $D_u f(0,0)$ وجود دارد.

پاسخ الف) بردار یکه $u=(u_1,u_2)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $u_2\neq 0$، در این صورت طبق تعریف مشتق سویی داریم:

$$D_u f(P)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

$$D_u f(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+u_1h,0+u_2h)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{u_2h}{|u_2h|}\sqrt{h^{2}(u_1{}^{2}+u_2{}^{2})}}{h}$$

$$=\frac{u_2}{|u_2|}\sqrt{(u_1{}^{2}+u_2{}^{2})}$$

راهنمای حل سوال

$$D_u f(P)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

در نظر گرفتن دو حالت $u_2\neq 0$

و $u_2=0$

به خاطر یکه بودن بردار u، داریم:

$$\sqrt{(u_1{}^{2}+u_2{}^{2})}=1$$

۶- فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{|y|}\sqrt{x^۲ + y^۲} & y \neq ۰ \\ ۰ & y = ۰ \end{cases}$$

الف) نشان دهید برای هر بردار یکه $u = (u_۱, u_۲)$ در صفحه، $D_u f(۰,۰)$ وجود دارد.

ادامه پاسخ الف) حال چون بردار u یکه است، پس $|u| = \sqrt{(u_۱{}^۲ + u_۲{}^۲)} = ۱$.

بنابراین

$$D_u f(۰,۰) = \frac{u_۲}{|u_۲|}\sqrt{(u_۱{}^۲ + u_۲{}^۲)} = \frac{u_۲}{|u_۲|} = \pm ۱$$

حال فرض کنیم $u_۲ = ۰$. در این صورت داریم:

$$D_u f(۰,۰) = \lim_{h \to ۰^+} \frac{f(۰ + u_۱ h, ۰) - f(۰,۰)}{h} = ۰$$

پس در هر حالت، $D_u f(۰,۰)$ وجود دارد.

راهنمای حل سوال

$$D_u f(P) = \lim_{h \to ۰^+} \frac{f(P + hu) - f(P)}{h}$$

در نظر گرفتن دو حالت $u_۲ \neq ۰$

و $u_۲ = ۰$

به خاطر یکه بودن بردار u، داریم:

$$\sqrt{(u_۱{}^۲ + u_۲{}^۲)} = ۱$$

۶- فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{|y|}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} & y\neq ۰\\[2ex] ۰ & y=۰\end{cases}$$

ب) آیا تابع f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟

پاسخ ب) خیر. اگر تابع f در (x,y) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر بردار یکه u داریم:

$$D_u f(x,y)=u.\nabla f(x,y)$$

گرادیان تابع f را در $(۰,۰)$ به دست می‌آوریم:

$$f_x(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=۰$$

$$f_y(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,۰+h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{h}{|h|}|h|}{h}=۱$$

بنابراین $\nabla f(۰,۰)=(۰,۱)$.

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$$D_u f(۰,۰)=u.\nabla f(۰,۰)$$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(۰,۰)$ اثبات شود

۶- فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{|y|}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} & y\neq ۰\\ ۰ & y=۰\end{cases}$$

ب) آیا تابع f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟

ادامه پاسخ ب) حال اگر $u=(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ را در نظر بگیریم، آنگاه:

$$D_u f(۰,۰)=۱,\qquad u.\nabla f(۰,۰)=\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right).(۰,۱)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

چون به ازای این u، رابطه $D_u f(۰,۰)=u.\nabla f(۰,۰)$ برقرار نیست، پس تابع f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر نیست.

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$D_u f(۰,۰)=u.\nabla f(۰,۰)$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(۰,۰)$ اثبات شود

راهنمای حل سوال

تعریف مشتق پذیری تابع دو متغیره

برای $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

$$\left|\frac{h^2}{h^2+k^2}\right| \le 1$$

$$\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le 1$$

$$|\sin\alpha| \le 1$$

قضیه فشردگی

۷- تابع (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\sin(xy) & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. به طور دقیق بررسی کنید که آیا این تابع در نقطه $(0,0)$ مشتق پذیر است؟

پاسخ) برای مشتق پذیری باید حد زیر را بررسی کنیم (اگر برابر با صفر شود، مشتق پذیر است):

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

پس ابتدا $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0$$

۷- تابع (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}\sin(xy) & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. به طور دقیق بررسی کنید که آیا این تابع در نقطه $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟

ادامه پاسخ) بنابراین باید حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)}\frac{\frac{h^{۲}k^{۲}}{h^{۲}+k^{۲}}\sin(hk)}{\sqrt{h^{۲}+k^{۲}}}$$

می‌دانیم $\left|\frac{h^{۲}}{h^{۲}+k^{۲}}\right|\leq ۱$، $\left|\frac{k}{\sqrt{h^{۲}+k^{۲}}}\right|\leq ۱$ و $|\sin(hk)|\leq ۱$. حال داریم:

$$۰\leq\left|\frac{\frac{h^{۲}k^{۲}}{h^{۲}+k^{۲}}\sin(hk)}{\sqrt{h^{۲}+k^{۲}}}\right|=\left|\frac{h^{۲}}{h^{۲}+k^{۲}}\right|\left|\frac{k}{\sqrt{h^{۲}+k^{۲}}}\right||k||\sin(hk)|\leq|k|$$

حال چون

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)}|k|=۰,\qquad \lim_{(h,k)\to(۰,۰)}۰=۰,$$

تعریف مشتق پذیری تابع دو متغیره

برای $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

$$\left|\frac{h^{۲}}{h^{۲}+k^{۲}}\right|\leq ۱$$

$$\left|\frac{k}{\sqrt{h^{۲}+k^{۲}}}\right|\leq ۱$$

$$|\sin\alpha|\leq ۱$$

قضیه فشردگی

۷- تابع (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲}\sin(xy) & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. به طور دقیق بررسی کنید که آیا این تابع در نقطه $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟

ادامه پاسخ) طبق قضیه فشردگی، داریم

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)}\left|\frac{\frac{h^۲k^۲}{h^۲+k^۲}\sin(hk)}{\sqrt{h^۲+k^۲}}\right|=۰$$

و در نتیجه:

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)}\frac{\frac{h^۲k^۲}{h^2+k^۲}\sin(hk)}{\sqrt{h^۲+k^۲}}=۰$$

پس تابع f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است.

تعریف مشتق پذیری تابع دو متغیره

برای $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

$$\left|\frac{h^۲}{h^۲+k^۲}\right|\leq ۱$$

$$\left|\frac{k}{\sqrt{h^۲+k^۲}}\right|\leq ۱$$

$$|\sin\alpha|\leq ۱$$

قضیه فشردگی