۱- نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{۲xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\[2ex] ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در $(۰,۰)$ پیوسته نیست. بنابراین نمودار تابع در این نقاط هموار نیست. با وجود این نشان دهید $f_۱(x,y)$ و $f_۲(x,y)$ هر دو وجود دارند. (آدامز)

پاسخ) ابتدا حد تابع f را در نقطه $(۰,۰)$ بررسی می‌کنیم. دو مسیر متفاوت زیر را در نظر می‌گیریم:

مسیر اول: مسیر $x=۰$ را انتخاب می‌کنیم. در این حالت داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{۲xy}{x^۲+y^۲}=\lim_{y\to ۰} ۰ = ۰$$

مسیر دوم: مسیر $x=y$ را انتخاب می‌کنیم. در این حالت داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{۲xy}{x^۲+y^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲}{۲x^۲}=۱$$

راهنمای حل سوال

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

اگر $(x,y)\neq(۰,۰)$، $f_۱(x,y)$ و $f_۲(x,y)$ موجود هستند

برای $f_۱(۰,۰)$ و $f_۲(۰,۰)$ باید از تعریف اصلی مشتقات جزئی استفاده کنیم

۱- نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{۲xy}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\[2ex] ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در $(۰,۰)$ پیوسته نیست. بنابراین نمودار تابع در این نقاط هموار نیست. با وجود این نشان دهید $f_۱(x,y)$ و $f_۲(x,y)$ هر دو وجود دارند. (آدامز)

ادامه پاسخ) چون جواب حد روی دو مسیر متفاوت، اعداد متمایزی هست، پس تابع f در $(۰,۰)$ حد ندارد و در نتیجه تابع f در $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

اگر $(x,y)\neq(۰,۰)$ باشد، آنگاه $f_۱(x,y)$ موجود و برابر است با

$$f_۱(x,y)=\frac{۲y\left(x^۲+y^۲\right)-۲x(۲xy)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{-۲x^۲y+۲y^۳}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

همچنین اگر $(x,y)\neq(۰,۰)$ باشد، آنگاه $f_۲(x,y)$ نیز موجود و برابر است با

$$f_۲(x,y)=\frac{۲x\left(x^۲+y^۲\right)-۲y(۲xy)}{(x^۲+y^۲)^۲}=\frac{-۲xy^۲+۲x^۳}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

اگر $(x,y)\neq(۰,۰)$، $f_۱(x,y)$ و $f_۲(x,y)$ موجود هستند

برای $f_۱(۰,۰)$ و $f_۲(۰,۰)$ باید از تعریف اصلی مشتقات جزئی استفاده کنیم

راهنمای حل سوال

۱- نشان دهید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{۲xy}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در $(۰,۰)$ پیوسته نیست. بنابراین نمودار تابع در این نقاط هموار نیست. با وجود این نشان دهید $f_{۱}(x,y)$ و $f_{۲}(x,y)$ هر دو وجود دارند. (آدامز)

انتخاب دو مسیر مناسب به نحوی که حدهای متفاوتی را تولید کنند و بتوان عدم وجود حد را نتیجه گرفت

ادامه پاسخ) حال به بررسی $f_{۱}(۰,۰)$ می‌پردازیم:

$$f_{۱}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=۰$$

همچنین برای $f_{۲}(۰,۰)$ نیز داریم:

$$f_{۲}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,۰+h)-f(۰,۰)}{h}=۰$$

بنابراین برای هر x و y، $f_{۱}(x,y)$ و $f_{۲}(x,y)$ موجود است.

اگر $(x,y)\neq(۰,۰)$، $f_{۱}(x,y)$ و $f_{۲}(x,y)$ موجود هستند

برای $f_{۱}(۰,۰)$ و $f_{۲}(۰,۰)$ باید از تعریف اصلی مشتقات جزئی استفاده کنیم

۲- اگر

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^{۳}+y)\sin\dfrac{۱}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

مطلوبست تعیین $f_{۱}(۰,۰)$ و $f_{۲}(۰,۰)$ در صورت وجود. (آدامز)

پاسخ) به بررسی $f_{۱}(۰,۰)$ می‌پردازیم:

$$f_{۱}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^{۳}\sin\frac{۱}{h^{۲}}}{h}=\lim_{h\to ۰}h^{۲}\sin\frac{۲}{h^{۲}}=۰$$

حال به بررسی $f_{۲}(۰,۰)$ می‌پردازیم:

$$f_{۲}(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,۰+h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h\sin\frac{۱}{h^{۲}}}{h}=\lim_{h\to ۰}\sin\frac{۱}{h^{۲}}$$

حد بالا موجود نیست (می‌توان دو دنباله متفاوت $a_n=\sqrt{\frac{۱}{۲n\pi}}$ و $b_n=\sqrt{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}}$ را در نظر گرفت که جواب‌های متفاوتی تولید می‌کنند) و در نتیجه $f_{۲}(۰,۰)$ موجود نیست.

راهنمای حل سوال

برای $f_{۱}(۰,۰)$ و $f_{۲}(۰,۰)$ باید از تعریف اصلی مشتقات جزئی استفاده کنیم

صفر $=$ کراندار $\times$ صفر

برای $\lim_{h\to ۰}\sin\frac{۱}{h^{۲}}$، از دو دنباله برای اثبات عدم وجود حد استفاده می‌کنیم.

۳- اگر $z=f(x^{۲}+y^{۲})$ که در آن f یک تابع یک متغیره مشتق پذیر دلخواه است، نشان دهید معادله دیفرانسیل جزئی زیر برقرار است: (آدامز)

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=۰$$

پاسخ)

مشتق تابع مرکب

$$\frac{\partial z}{\partial x}=۲xf'(x^{۲}+y^{۲})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=۲yf'(x^{۲}+y^{۲})$$

در نتیجه:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=۲xyf'\left(x^{۲}+y^{۲}\right)-۲xyf'\left(x^{۲}+y^{۲}\right)=۰$$

۴- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دو بار مشتق پذیر باشد و

$$z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

نشان دهید: (توجه کنید که x,y,z به گونه‌ای هستند که هیچ یک از مخرج ها صفر نمی شوند)(میان ترم ۱۴۰۱)

$$\frac{xz_{xy} + yz_{yy}}{xz_x + yz_y} = \frac{x}{xy + z}$$

پاسخ) ابتدا z_x و z_y را به دست می‌آوریم:

$$z_x = y + f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^۲} f'\left(\frac{y}{x}\right) \times x = y + f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_y = x + \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \times x = x + f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

حال z_{xy} و z_{yy} را محاسبه می‌کنیم:

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$= ۱ + \frac{۱}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{۱}{x}\left[f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f''\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$= ۱ + \frac{۱}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{۱}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^۲} f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

۴- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دو بار مشتق پذیر باشد و

$$z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

نشان دهید: (توجه کنید که x,y,z به گونه‌ای هستند که هیچ یک از مخرج ها صفر نمی شوند)(میان ترم ۱۴۰۱)

$$\frac{xz_{xy}+yz_{yy}}{xz_x+yz_y}=\frac{x}{xy+z}$$

ادامه پاسخ)

$$z_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x+f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{1}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

حال داریم:

$$\frac{xz_{xy}+yz_{yy}}{xz_x+yz_y}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)\right)+y\left(\frac{1}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{x\left(y+f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)+y\left(x+f'\left(\frac{y}{x}\right)\right)}$$

$$=\frac{x-\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)}{xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)-yf'\left(\frac{y}{x}\right)+yx+yf'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$=\frac{x}{xy+z}$$

$$z_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

۵- فرض کنیم

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^{۲}z}{x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\[2ex] ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$$

مقادیر $f_{۱}(۰,۰,۰), f_{۲}(۰,۰,۰), f_{۳}(۰,۰,۰)$ را بیابید. آیا $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ در $(۰,۰,۰)$ پیوسته هستند؟ (آدامز)

پاسخ)

$$f_{۱}(۰,۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+h,۰,۰)-f(۰,۰,۰)}{h}=۰$$

$$f_{۲}(۰,۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,۰+h,۰)-f(۰,۰,۰)}{h}=۰$$

$$f_{۳}(۰,۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,۰,۰+h)-f(۰,۰,۰)}{h}=۰$$

استفاده از تعریف اصلی مشتقات جزئی برای مبدأ یا همان $(۰,۰,۰)$

باید ضابطه توابع $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ را برای نقاط غیر از $(۰,۰,۰)$ پیدا کنیم (با استفاده از قواعد مشتق گیری)

استفاده از مسیر $x=y=z$ برای اثبات عدم وجود حد و در نتیجه عدم پیوستگی

۵- فرض کنیم

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^{۲}z}{x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$$

مقادیر $f_{۱}(۰,۰,۰), f_{۲}(۰,۰,۰), f_{۳}(۰,۰,۰)$ را بیابید. آیا $f_{۱},f_{۲},f_{۳}$ در $(۰,۰,۰)$ پیوسته هستند؟ (آدامز)

ادامه پاسخ) حال باید ضابطه توابع $f_{۱},f_{۲},f_{۳}$ را مشخص کنیم. اگر $(x,y,z)\neq(۰,۰,۰)$، آنگاه داریم:

$$f_{۱}(x,y,z)=\frac{y^{۲}z(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})-۴x^{۳}\left(xy^{۲}z\right)}{\left(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}\right)^{۲}}=\frac{-۳x^{۴}y^{۲}z+y^{۶}z+y^{۲}z^{۵}}{\left(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}\right)^{۲}}$$

$$=\frac{(y^{۲}z)(-۳x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})}{\left(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}\right)^{۲}}$$

استفاده از تعریف اصلی مشتقات جزئی برای مبدأ یا همان $(۰,۰,۰)$

باید ضابطه توابع $f_{۱},f_{۲},f_{۳}$ را برای نقاط غیر از $(۰,۰,۰)$ پیدا کنیم (با استفاده از قواعد مشتق گیری)

استفاده از مسیر $x=y=z$ برای اثبات عدم وجود حد و در نتیجه عدم پیوستگی

۵- فرض کنیم

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^۲z}{x^۴+y^۴+z^۴} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$$

مقادیر $f_۱(۰,۰,۰),f_۲(۰,۰,۰),f_۳(۰,۰,۰)$ را بیابید. آیا $f_۱,f_۲,f_۳$ در $(۰,۰,۰)$ پیوسته هستند؟ (آدامز)

ادامه پاسخ)

$$f_۲(x,y,z)=\frac{۲xyz(x^۴+y^۴+z^۴)-۴y^۳\left(xy^۲z\right)}{(x^۴+y^۴+z^۴)^۲}=\frac{-۲xy^۵z+۲x^۵yz+۲xyz^۵}{(x^۴+y^۴+z^۴)^۲}$$

$$=\frac{۲xyz(x^۴-y^۴+z^۴)}{(x^۴+y^۴+z^۴)^۲}$$

استفاده از تعریف اصلی مشتقات جزئی برای مبدأ یا همان $(۰,۰,۰)$

باید ضابطه توابع $f_۱,f_۲,f_۳$ را برای نقاط غیر از $(۰,۰,۰)$ پیدا کنیم (با استفاده از قواعد مشتق گیری)

استفاده از مسیر $x=y=z$ برای اثبات عدم وجود حد و در نتیجه عدم پیوستگی

۵- فرض کنیم

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^{۲}z}{x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$$

مقادیر $f_{۱}(۰,۰,۰), f_{۲}(۰,۰,۰), f_{۳}(۰,۰,۰)$ را بیابید. آیا $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ در $(۰,۰,۰)$ پیوسته هستند؟ (آدامز)

ادامه پاسخ)

$$f_{۳}(x,y,z)=\frac{xy^{۲}(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})-۴z^{۳}(xy^{۲}z)}{(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})^{۲}}=\frac{-۳xy^{۲}z^{۴}+x^{۵}y^{۲}+xy^{۶}}{(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})^{۲}}$$

$$=\frac{xy^{۲}\,(x^{۴}+y^{۴}-۳z^{۴})}{(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})^{۲}}$$

استفاده از تعریف اصلی مشتقات جزئی برای مبدأ یا همان $(۰,۰,۰)$

باید ضابطه توابع $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ را برای نقاط غیر از $(۰,۰,۰)$ پیدا کنیم (با استفاده از قواعد مشتق گیری)

استفاده از مسیر $x=y=z$ برای اثبات عدم وجود حد و در نتیجه عدم پیوستگی

راهنمای حل سوال

۵- فرض کنیم

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^{۲}z}{x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$$

مقادیر $f_{۱}(۰,۰,۰), f_{۲}(۰,۰,۰), f_{۳}(۰,۰,۰)$ را بیابید. آیا $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ در $(۰,۰,۰)$ پیوسته هستند؟ (آدامز)

استفاده از تعریف اصلی مشتقات جزئی برای مبدأ یا همان $(۰,۰,۰)$

باید ضابطه توابع $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ را برای نقاط غیر از $(۰,۰,۰)$ پیدا کنیم (با استفاده از قواعد مشتق گیری)

ادامه پاسخ) حال باید حد $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ را در $(۰,۰,۰)$ محاسبه کنیم. برای هر سه تابع، بعد از جایگذاری به حالت $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. برای $f_{۱}$، مسیر $x=y=z$ را انتخاب می‌کنیم:

$$f_{۱}(x,y,z)=\frac{(y^{۲}z)(-۳x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})}{(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})^{۲}}$$

استفاده از مسیر $x=y=z$ برای اثبات عدم وجود حد و در نتیجه عدم پیوستگی

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۳}(-x^{۴})}{(۳x^{۴})^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-x^{۷}}{۹x^{۸}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۱}{۹x}$$

حد بالا وجود ندارد و بنابراین $f_{۱}$ در $(۰,۰,۰)$ حد ندارد و در نتیجه در مبدأ پیوسته نیست.

راهنمای حل سوال

۵- فرض کنیم

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^{۲}z}{x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$$

مقادیر $f_{۱}(۰,۰,۰),f_{۲}(۰,۰,۰),f_{۳}(۰,۰,۰)$ را بیابید. آیا $f_{۱},f_{۲},f_{۳}$ در $(۰,۰,۰)$ پیوسته هستند؟ (آدامز)

ادامه پاسخ) برای $f_{۲}$ نیز مسیر $x=y=z$ را انتخاب می‌کنیم:

$$f_{۲}(x,y,z)=\frac{۲xyz(x^{۴}-y^{۴}+z^{۴})}{(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴})^{۲}}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^{۳}(x^{۴})}{(۳x^{۴})^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^{۷}}{۹x^{۸}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲}{۹x}$$

حد بالا وجود ندارد و بنابراین $f_{۲}$ در $(۰,۰,۰)$ حد ندارد و در نتیجه در مبدأ پیوسته نیست.

استفاده از تعریف اصلی مشتقات جزئی برای مبدأ یا همان $(۰,۰,۰)$

باید ضابطه توابع $f_{۱},f_{۲},f_{۳}$ را برای نقاط غیر از $(۰,۰,۰)$ پیدا کنیم (با استفاده از قواعد مشتق گیری)

استفاده از مسیر $x=y=z$ برای اثبات عدم وجود حد و در نتیجه عدم پیوستگی

راهنمای حل سوال

۵- فرض کنیم

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy^{۲}z}{x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}} & (x,y,z)\neq(۰,۰,۰)\\ ۰ & (x,y,z)=(۰,۰,۰)\end{cases}$$

استفاده از تعریف اصلی مشتقات جزئی برای مبدأ یا همان $(۰,۰,۰)$

مقادیر $f_{۱}(۰,۰,۰), f_{۲}(۰,۰,۰), f_{۳}(۰,۰,۰)$ را بیابید. آیا $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ در $(۰,۰,۰)$ پیوسته هستند؟ (آدامز)

باید ضابطه توابع $f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}$ را برای نقاط غیر از $(۰,۰,۰)$ پیدا کنیم (با استفاده از قواعد مشتق گیری)

ادامه پاسخ) برای $f_{۳}$ نیز مسیر $x=y=z$ را انتخاب می‌کنیم:

$$f_{۳}(x,y,z)=\frac{xy^{۲}\left(x^{۴}+y^{۴}-۳z^{۴}\right)}{\left(x^{۴}+y^{۴}+z^{۴}\right)^{۲}}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۳}(-x^{4})}{(۳x^{۴})^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-x^{۷}}{۹x^{۸}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۱}{۹x}$$

استفاده از مسیر $x=y=z$ برای اثبات عدم وجود حد و در نتیجه عدم پیوستگی

حد بالا وجود ندارد و بنابراین $f_{۳}$ در $(۰,۰,۰)$ حد ندارد و در نتیجه در مبدأ پیوسته نیست.

۶- فرض کنید f دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. (آدامز)

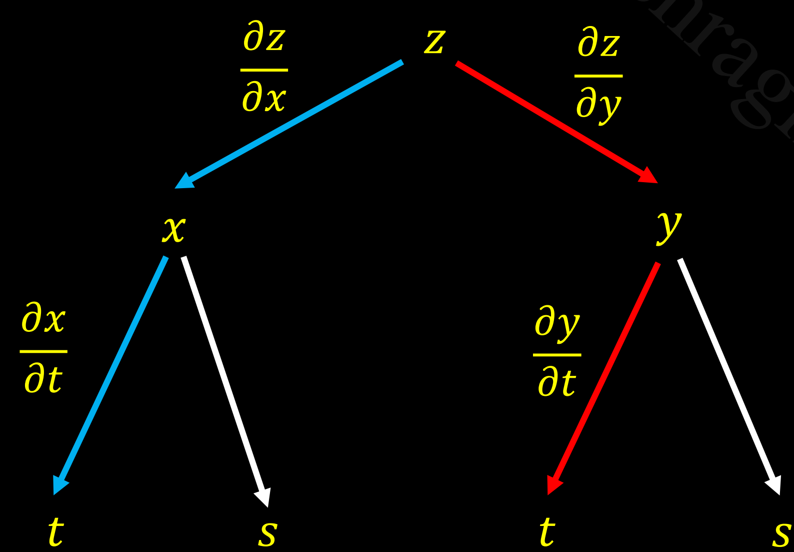
الف) اگر $z=f(x,y)$، $x=۲s+۳t$ و $y=۳s-۲t$، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^۲ z}{\partial s\,\partial t}$.

پاسخ الف) می‌دانیم

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

پس ابتدا $\frac{\partial z}{\partial t}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



راهنمای حل سوال

قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

برای z_x و z_y نیز دیاگرامی مشابه z را می‌توان نوشت

با توجه مفروضات مسأله، داریم:

$$z_{xy}=z_{yx}$$

۶- فرض کنید f دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. (آدامز)

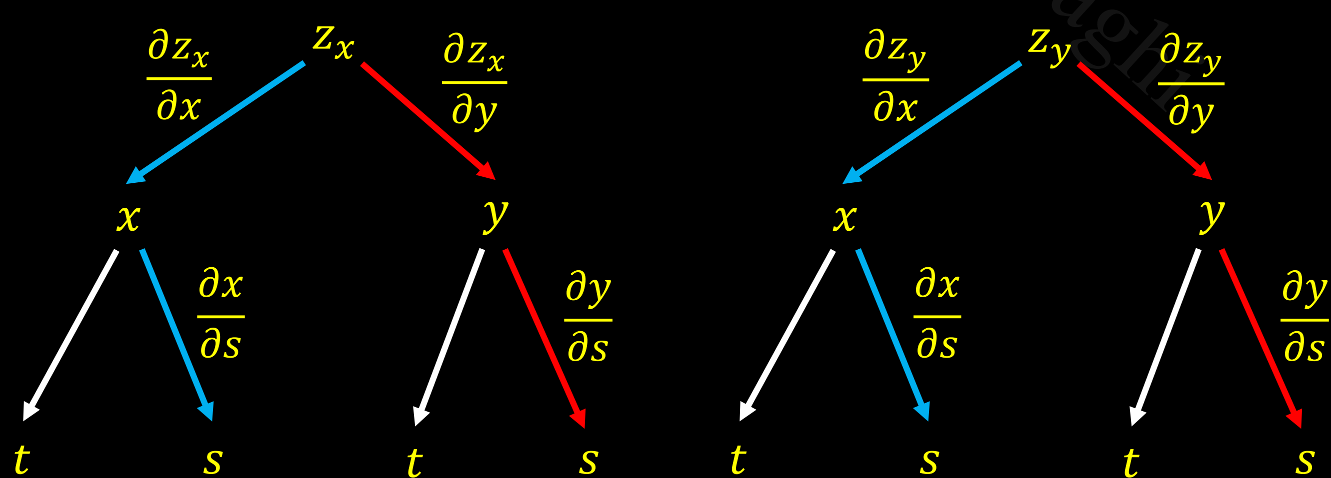
الف) اگر $z=f(x,y)$، $x=۲s+۳t$ و $y=۳s-۲t$، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^۲ z}{\partial s\,\partial t}$.

ادامه پاسخ الف)

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=z_x\times ۳+z_y\times(-۲)=۳z_x-۲z_y$$

حال داریم:

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial s}(۳z_x-۲z_y)=۳\frac{\partial z_x}{\partial s}-۲\frac{\partial z_y}{\partial s}$$



قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\,\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

برای z_x و z_y نیز دیاگرامی مشابه z را می‌توان نوشت

با توجه مفروضات مسأله، داریم:

$$z_{xy}=z_{yx}$$

۶- فرض کنید f دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. (آدامز)

الف) اگر $z = f(x,y)$، $x = ۲s + ۳t$ و $y = ۳s - ۲t$، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^۲ z}{\partial s\, \partial t}$.

ادامه پاسخ الف) بنابراین

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\, \partial t} = ۳\frac{\partial z_x}{\partial s} - ۲\frac{\partial z_y}{\partial s} = ۳\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) - ۲\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$= ۳(z_{xx} \times ۲ + z_{xy} \times ۳) - ۲(z_{yx} \times ۲ + z_{yy} \times ۳)$$

$$= ۶z_{xx} + ۹z_{xy} - ۴z_{yx} - ۶z_{yy}$$

حال بنابر مفروضات سوال، رابطه $z_{xy} = z_{yx}$ برقرار است و در نتیجه:

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\, \partial t} = ۶z_{xx} + ۵z_{xy} - ۶z_{yy}$$

راهنمای حل سوال

قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\, \partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

برای z_x و z_y نیز دیاگرامی مشابه z را می‌توان نوشت

با توجه مفروضات مسأله، داریم:

$$z_{xy} = z_{yx}$$

۶- فرض کنید f دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. (آدامز)

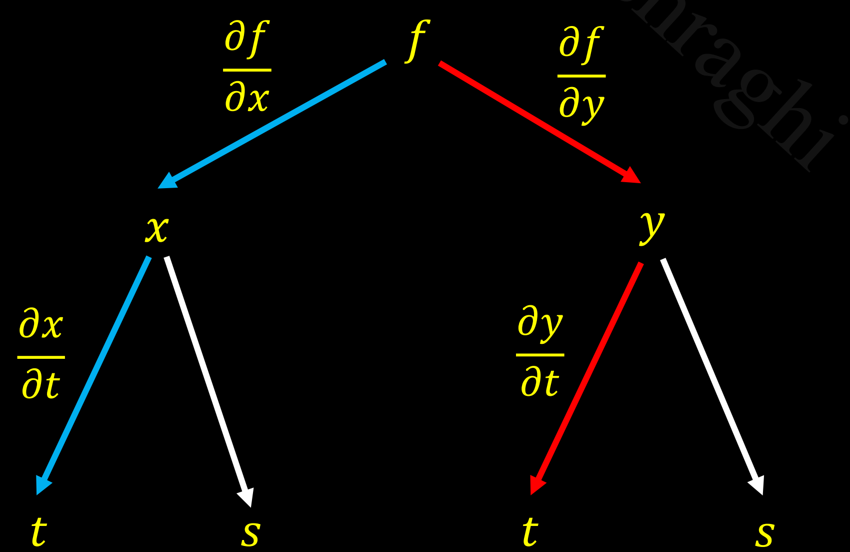
ب) اگر $x = t\sin s$ و $y = t\cos s$، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^{۲}}{\partial s\,\partial t} f(x,y)$.

پاسخ ب) می‌دانیم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

پس ابتدا $\frac{\partial f}{\partial t}$ را به کمک قاعده زنجیره‌ای پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



راهنمای حل سوال

قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial^{۲} z}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

برای z_x و z_y نیز دیاگرامی مشابه z را می‌توان نوشت

با توجه مفروضات مسأله، داریم:

$$f_{۱۲} = f_{۲۱}$$

۶- فرض کنید f دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. (آدامز)

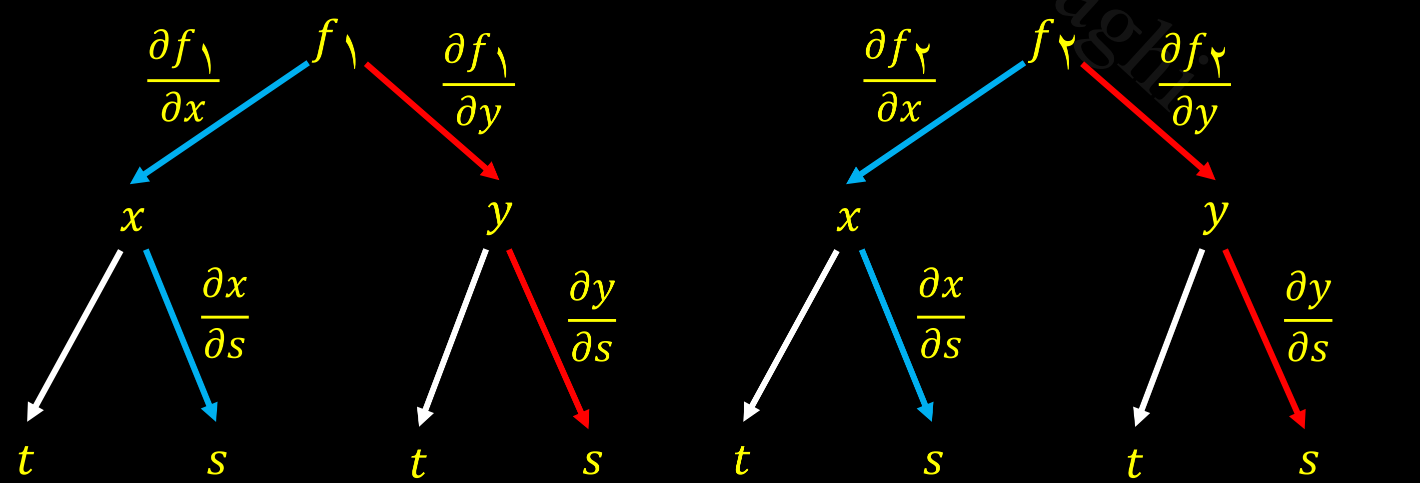
ب) اگر $x = t\sin s$ و $y = t\cos s$، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^۲}{\partial s\,\partial t} f(x,y)$.

ادامه پاسخ ب)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = f_۱ \times \sin s + f_۲ \times \cos s = (\sin s)\, f_۱ + (\cos s)\, f_۲$$

حال داریم:

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\big((\sin s)\, f_۱ + (\cos s)\, f_۲\big)$$



راهنمای حل سوال

قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

برای z_x و z_y نیز دیاگرامی مشابه z را می‌توان نوشت

با توجه مفروضات مسأله، داریم:

$$f_{۱۲} = f_{۲۱}$$

راهنمای حل سوال

۶- فرض کنید f دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. (آدامز)

ب) اگر $x = t\sin s$ و $y = t\cos s$، مطلوبست محاسبه $\dfrac{\partial^۲}{\partial s\,\partial t} f(x,y)$.

ادامه پاسخ ب) بنابراین

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial s\,\partial t} = (\cos s)f_۱ + (\sin s)\frac{\partial f_۱}{\partial s} - (\sin s)f_۲ + (\cos s)\frac{\partial f_۲}{\partial s}$$

و در نتیجه طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial s\,\partial t} = (\cos s)f_۱ + (\sin s)\left(\frac{\partial f_۱}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۱}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) - (\sin s)f_۲ + (\cos s)\left(\frac{\partial f_۲}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_۲}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$= (\cos s)f_۱ + (\sin s)\big(f_{۱۱}(t\cos s) - f_{۱۲}(t\sin s)\big) - (\sin s)f_۲ + (\cos s)\big(f_{۲۱}(t\cos s) - f_{۲۲}(t\sin s)\big)$$

$$= \cos s\ f_۱ + t\ \sin s\cos s\, f_{۱۱} - t\,sin^۲ s\, f_{۱۲} - \sin s\ f_۲ + t\,cos^۲ s\, f_{۲۱} - t\sin s\cos s\ f_{۲۲}$$

$$= \cos s\ f_۱ - \sin s\ f_۲ + t\sin s\cos s\,(f_{۱۱} - f_{۲۲}) + t(cos^۲ s - sin^۲ s)f_{۱۲}$$

قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

برای z_x و z_y نیز دیاگرامی مشابه z را می‌توان نوشت

با توجه مفروضات مسأله، داریم:

$$f_{۱۲} = f_{۲۱}$$

۷- اگر $u(x,y) = r^2 \ln r$ و $r^2 = x^2 + y^2$، نشان دهید (آدامز)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

پاسخ) با استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای $\frac{\partial u}{\partial x}$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

برای $\frac{\partial r}{\partial x}$ از طرفین رابطه $r^2 = x^2 + y^2$ نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2r\ln r + r)\frac{x}{r} = x(1 + 2\ln r)$$

حال $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2x\ln r) = 1 + 2\left(\ln r + \frac{x}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\right) = 1 + 2\left(\ln r + \frac{x^2}{r^2}\right)$$

راهنمای حل سوال

ابتدا باید دومین پرانتز را محاسبه کنیم

قاعده زنجیره‌ای

مشتق‌گیری از طرفین رابطه

$r^2 = x^2 + y^2$

به منظور دستیابی به $\frac{\partial r}{\partial x}$ و $\frac{\partial r}{\partial y}$

باید دقت داشته باشیم که هنگام مشتق گیری از r نسبت به x، عبارت $\frac{\partial r}{\partial x}$ نیز ظاهر می‌شود

(برای مشتق‌گیری نسبت به y نیز به طریق مشابه)

۷- اگر $u(x,y)=r^۲\ln r$ و $r^۲=x^۲+y^۲$، نشان دهید (آدامز)

$$\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\right)=۰$$

ادامه پاسخ) حال با استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای $\frac{\partial u}{\partial y}$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

برای $\frac{\partial r}{\partial y}$ از طرفین رابطه $r^۲=x^۲+y^۲$ نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$r^۲=x^۲+y^۲\Longrightarrow ۲r\frac{\partial r}{\partial y}=۲y\Longrightarrow\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(۲r\ln r+r)\frac{y}{r}=y(۱+۲\ln r)$$

حال $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(y+۲y\ln r)=۱+۲\left(\ln r+\frac{y}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)=۱+۲\left(\ln r+\frac{y^۲}{r^۲}\right)$$

راهنمای حل سوال

ابتدا باید دومین پرانتز را محاسبه کنیم

قاعده زنجیره‌ای

مشتق‌گیری از طرفین رابطه

$$r^۲=x^۲+y^۲$$

به منظور دستیابی به $\frac{\partial r}{\partial x}$ و $\frac{\partial r}{\partial y}$

باید دقت داشته باشیم که هنگام مشتق گیری از r نسبت به x، عبارت $\frac{\partial r}{\partial x}$ نیز ظاهر می‌شود

(برای مشتق‌گیری نسبت به y نیز به طریق مشابه)

۷- اگر $u(x,y) = r^۲ \ln r$ و $r^۲ = x^۲ + y^۲$، نشان دهید (آدامز)

$$\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\right) = ۰$$

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۱ + ۲\left(\ln r + \frac{x^۲}{r^۲}\right) + ۱ + ۲\left(\ln r + \frac{y^۲}{r^۲}\right)$$

$$= ۲ + ۴\ln r + ۲\left(\frac{x^۲ + y^۲}{r^۲}\right)$$

$$= ۴ + ۴\ln r$$

بنابراین:

$$\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\right) = \left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)(۴ + ۴\ln r)$$

$$= \left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\right)(۴ + ۴\ln r) + \left(\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)(۴ + ۴\ln r)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(۴\frac{x}{r^۲}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(۴\frac{y}{r^۲}\right)$$

راهنمای حل سوال

ابتدا باید دومین پرانتز را محاسبه کنیم

قاعده زنجیره‌ای

مشتق‌گیری از طرفین رابطه $r^۲ = x^۲ + y^۲$ به منظور دستیابی به $\frac{\partial r}{\partial x}$ و $\frac{\partial r}{\partial y}$

باید دقت داشته باشیم که هنگام مشتق گیری از r نسبت به x، عبارت $\frac{\partial r}{\partial x}$ نیز ظاهر می‌شود (برای مشتق‌گیری نسبت به y نیز به طریق مشابه)

راهنمای حل سوال

۷- اگر $u(x,y) = r^۲ \ln r$ و $r^۲ = x^۲ + y^۲$، نشان دهید (آدامز)

$$\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\right) = ۰$$

(ادامه پاسخ)

$$\left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}\right)\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(۴\frac{x}{r^۲}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(۴\frac{y}{r^۲}\right)$$

$$= ۴\left(\frac{r^۲ - ۲rx\frac{\partial r}{\partial x}}{r^۴}\right) + ۴\left(\frac{r^۲ - ۲ry\frac{\partial r}{\partial y}}{r^۴}\right)$$

$$= ۴\left(\frac{r^۲ - ۲x^۲}{r^۴}\right) + ۴\left(\frac{r^۲ - ۲y^۲}{r^۴}\right)$$

$$= ۴\left(\frac{۲\left(x^۲ + y^۲\right) - ۲x^۲ - ۲y^۲}{r^۴}\right)$$

$$= ۰$$

ابتدا باید دومین پرانتز را محاسبه کنیم

قاعده زنجیره‌ای

مشتق‌گیری از طرفین رابطه

$$r^۲ = x^۲ + y^۲$$

به منظور دستیابی به $\frac{\partial r}{\partial x}$ و $\frac{\partial r}{\partial y}$

باید دقت داشته باشیم که هنگام مشتق گیری از r نسبت به x، عبارت $\frac{\partial r}{\partial x}$ نیز ظاهر می‌شود (برای مشتق‌گیری نسبت به y نیز به طریق مشابه)

راهنمای حل سوال

۸- فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته و z تابعی مشتق پذیر بر حسب x و y باشد. اگر داشته باشیم $(x-y)^۲=f(u,v)$ به طوری که $u=۳z-۲x$، $v=۳z-۲y$ و $f_u\neq -f_v$، نشان دهید $z_x+z_y=\frac{۲}{۳}$.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

پاسخ) قرار می‌دهیم $w=f(u,v)$. حال قاعده زنجیره‌ای را برای $\frac{\partial w}{\partial x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=w_u\times(۳z_x-۲)+w_v\times(۳z_x)$$

باید دقت داشته باشیم که در این جا z تابعی از x است و باید در محاسبات، مشتق آن نسبت به x را لحاظ کنیم. حال با توجه به این که $\frac{\partial w}{\partial x}=۲(x-y)$، داریم:

$$۲(x-y)=۳w_uz_x-۲w_u+۳w_vz_x$$

$$\Longrightarrow z_x(۳w_u+۳w_v)=۲(x-y)+۲w_u$$

$$\Longrightarrow z_x=\frac{۲(x-y)+۲w_u}{۳w_u+۳w_v}$$

قاعده زنجیره‌ای

به کار بردن قاعده زنجیره‌ای برای $\frac{\partial w}{\partial x}$ به منظور پیدا کردن رابطه‌ای برای z_x و به کار بردن قاعده زنجیره‌ای برای $\frac{\partial w}{\partial y}$ به منظور پیدا کردن رابطه‌ای برای z_y

باید دقت داشته باشیم که z تابعی از x و y است و باید این مطلب را در مشتق‌گیری‌ها لحاظ کنیم

راهنمای حل سوال

۸- فرض کنید $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته و z تابعی مشتق پذیر بر حسب x و y باشد. اگر داشته باشیم $f(u,v)=(x-y)^{۲}$ به طوری که $u=۳z-۲x$، $v=۳z-۲y$ و $f_u\neq -f_v$، نشان دهید $z_x+z_y=\frac{۲}{۳}$.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) حال قاعده زنجیره‌ای را برای $\frac{\partial w}{\partial y}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=w_u\times(۳z_y)+w_v\times(۳z_y-۲)$$

باید دقت داشته باشیم که در این جا z تابعی از y است و باید در محاسبات، مشتق آن نسبت به y را لحاظ کنیم. حال با توجه به این که $\frac{\partial w}{\partial y}=-۲(x-y)$، داریم:

$$-۲(x-y)=۳w_uz_y+۲w_vz_y-۲w_v$$

$$\Rightarrow z_y(۳w_u+۳w_v)=-۲(x-y)+۲w_v$$

$$\Rightarrow z_y=\frac{-۲(x-y)+۲w_v}{۳w_u+۳w_v}$$

قاعده زنجیره‌ای

به کار بردن قاعده زنجیره‌ای برای $\frac{\partial w}{\partial x}$ به منظور پیدا کردن رابطه‌ای برای z_x و به کار بردن قاعده زنجیره‌ای برای $\frac{\partial w}{\partial y}$ به منظور پیدا کردن رابطه‌ای برای z_y

باید دقت داشته باشیم که z تابعی از x و y است و باید این مطلب را در مشتق‌گیری‌ها لحاظ کنیم

۸- فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته و z تابعی مشتق پذیر بر حسب x و y باشد. اگر داشته باشیم $(x-y)^۲ = f(u,v)$ به طوری که $u = ۳z - ۲x$، $v = ۳z - ۲y$ و $f_u \neq -f_v$، نشان دهید $z_x + z_y = \frac{۲}{۳}$.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) حال که z_x و z_y را به دست آوردیم، جمع آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$z_x + z_y = \frac{۲(x-y) + ۲w_u}{۳w_u + ۳w_v} + \frac{-۲(x-y) + ۲w_v}{۳w_u + ۳w_v}$$

$$= \frac{۲w_u + ۲w_v}{۳w_u + ۳w_v}$$

$$= \frac{۲}{۳}$$

راهنمای حل سوال

قاعده زنجیره‌ای

به کار بردن قاعده زنجیره‌ای برای $\frac{\partial w}{\partial x}$ به منظور پیدا کردن رابطه‌ای برای z_x و به کار بردن قاعده زنجیره‌ای برای $\frac{\partial w}{\partial y}$ به منظور پیدا کردن رابطه‌ای برای z_y

باید دقت داشته باشیم که z تابعی از x و y است و باید این مطلب را در مشتق‌گیری‌ها لحاظ کنیم