۱- تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}\sin y}{x^{۲}+۳y^{۴}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\[2ex] ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

الف) مشتق جهتی $D_uf(۰,۰)$ را به ازای بردار یکه $u=\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ محاسبه کنید.

$$D_uf(P)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

پاسخ الف) طبق تعریف مشتق سویی داریم:

$$D_uf(P)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(kh)}{h}=k$$

$$D_uf(۰,۰)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f\left(۰+\frac{۱}{\sqrt{۲}}h,۰+\frac{۱}{\sqrt{۲}}h\right)-f(۰,۰)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{\dfrac{\frac{۱}{۲}h^{۲}\sin(\frac{h}{\sqrt{۲}})}{\frac{۱}{۲}h^{۲}+\frac{۳}{۴}h^{۴}}}{h}$$

۱- تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲\sin y}{x^۲+۳y^۴} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

الف) مشتق جهتی $D_uf(۰,۰)$ را به ازای بردار یکه $u=\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ محاسبه کنید.

ادامه پاسخ الف)

$$D_uf(۰,۰)=\lim_{h\to۰^+}\frac{\dfrac{\frac{۱}{۲}\sin(\frac{h}{\sqrt{۲}})}{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}h^۲}}{h}$$

$$=\lim_{h\to۰^+}\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}h^۲}\times\frac{\sin(\frac{h}{\sqrt{۲}})}{h}$$

$$=۱\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$D_uf(P)=\lim_{h\to۰^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

$$\lim_{h\to۰}\frac{\sin(kh)}{h}=k$$

۱- تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}\sin y}{x^{۲}+۳y^{۴}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ب) آیا تابع $f(x,y)$ در مبدأ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$$D_u f(۰,۰)=u.\nabla f(۰,۰)$$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(۰,۰)$ اثبات شود

پاسخ ب) ابتدا گرادیان تابع f را در $(۰,۰)$ محاسبه می‌کنیم.

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_x(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰+h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰)-۰}{h}=۰$$

$$f_y(۰,۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,۰+h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۰,h)-۰}{h}=۰$$

برای $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

بنابراین $\nabla f(۰,۰)=(۰,۰)$. حال داریم:

$$D_u f(۰,۰)=\frac{۱}{\sqrt{۲}},\qquad u.\nabla f(۰,۰)=\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right).(۰,۰)=۰$$

۱- تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ \sin y}{x^۲ + ۳y^۴} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ب) آیا تابع $f(x,y)$ در مبدأ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

ادامه پاسخ ب) چون به ازای این u، رابطه $D_u f(۰,۰) = u.\nabla f(۰,۰)$ برقرار نیست، پس تابع f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر نیست.

راهنمای حل سوال

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$$D_u f(۰,۰) = u.\nabla f(۰,۰)$$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(۰,۰)$ اثبات شود

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

برای $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

۲- فرض کنید $h(x,y)$ تابعی هموار باشد به طوری که $\nabla h(۱۰,-۲)=(۱,-۱)$ و فرض کنید که

$$g(x,y)=h(۵xe^y, y-x)$$

الف) مقدار $\nabla g(۲,۰)$ را پیدا کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

$$\nabla g=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

پاسخ الف) طبق تعریف گرادیان داریم:

$$\nabla g(a,b)=\Big(g_x(a,b),g_y(a,b)\Big)\Longrightarrow \nabla g(۲,۰)=\Big(g_x(۲,۰),g_y(۲,۰)\Big)$$

قرار می‌دهیم $u=۵xe^y$ و $v=y-x$. حال طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=h_u\times(۵e^y)+h_v\times(-۱)$$

$$\Longrightarrow g_x(۲,۰)=h_u(۱۰,-۲)\times ۵+h_v(۱۰,-۲)\times(-۱)$$

$$\Longrightarrow g_x(۲,۰)=۱\times ۵+(-۱)\times(-۱)=۶$$

۲- فرض کنید $h(x,y)$ تابعی هموار باشد به طوری که $\nabla h(۱۰,-۲) = (۱,-۱)$ و فرض کنید که

$$g(x,y) = h(۵xe^y, y-x)$$

الف) مقدار $\nabla g(۲,۰)$ را پیدا کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

ادامه پاسخ الف) حال قاعده زنجیره‌ای را برای $\frac{\partial g}{\partial y}$ به کار می‌بریم:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = h_u \times (۵xe^y) + h_v \times ۱$$

قاعده زنجیره‌ای

$$\Longrightarrow g_y(۲,۰) = h_u(۱۰,-۲) \times ۱۰ + h_v(۱۰,-۲) \times ۱$$

$$\Longrightarrow g_y(۲,۰) = ۱ \times ۱۰ + (-۱) \times ۱ = ۹$$

بنابراین $\nabla g(۰,۲) = (۶,۹)$.

۲- فرض کنید $h(x,y)$ تابعی هموار باشد به طوری که $\nabla h(۱۰,-۲)=(۱,-۱)$ و فرض کنید که

$$g(x,y)=h(۵xe^{y},y-x)$$

ب) فرض کنید $\vec{u}$ بردار یکه‌ای باشد که در جهت آن، تابع g بیشترین مقدار کاهش را در نقطه $(۲,۰)$ دارد. بردار $\vec{u}$ را تعیین نمایید و میزان بیشترین کاهش g را در نقطه $(۲,۰)$ محاسبه کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

پاسخ ب) بیشترین میزان کاهش در خلاف جهت بردار گرادیان در نقطه $(۲,۰)$ است. پس بردار u مورد نظر (که باید یکه باشد) به صورت زیر است:

$$u=-\frac{\nabla g(۲,۰)}{|\nabla g(۲,۰)|}=-\frac{(۶,۹)}{\sqrt{۶^{۲}+۹^{۲}}}=-\frac{(۶,۹)}{\sqrt{۱۱۷}}=(-\frac{۶}{\sqrt{۱۱۷}},-\frac{۹}{\sqrt{۱۱۷}})$$

حال چون g مشتق پذیر است، داریم:

$$D_{u}g(۲,۰)=\nabla g(۲,۰).u=\nabla g(۲,۰).-\frac{\nabla g(۲,۰)}{|\nabla g(۲,۰)|}=-\sqrt{۱۱۷}$$

راهنمای حل سوال

بیشترین مقدار افزایش در جهت بردار گرادیان و بیشترین مقدار کاهش در خلاف جهت بردار گرادیان می‌باشد و طبیعتا برای این که جهت ما یکه باشد، باید بردار گرادیان (یا منفی گرادیان) را به اندازه اش تقسیم کنیم

$$\nabla g=\left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

چون g مشتق‌پذیر است، به ازای هر بردار یکه u داریم:

$$D_{u}g(۲,۰)=u.\nabla g(۲,۰)$$

۳- فرض کنید تابع $f(x,y)$ با ضابطه زیر داده شده است: (میان ترم ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(x-y) & y<|x|\\ ۰ & y=|x|\\ \dfrac{x^۲-y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & y>|x|\end{cases}$$

الف) مشتق جهتی (سویی) تابع f را در نقطه $(۰,۰)$ و در جهت بردار یکه $u=(u_۱,u_۲)$ (یعنی $D_uf(۰,۰)$) را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ الف) مشتق جهتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_uf(۰,۰)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۰+u_۱h,۰+u_۲h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(u_۱h,u_۲h)}{h}$$

$$h>۰:\ \frac{f(u_۱h,u_۲h)}{h}=\begin{cases}\dfrac{\sin(h(u_۱-u_۲))}{h} & u_۲<|u_۱|\\ ۰ & u_۲=|u_۱|\\ (u_۱{}^۲-u_۲{}^۲) & u_۲>|u_۱|\end{cases}$$

راهنمای حل سوال

$$D_uf(P)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

دسته بندی روی مقادیر مختلف $u_۱$ و $u_۲$ برای نوشتن تابع $\dfrac{f(u_۱h,u_۲h)}{h}$ با شرط $h>۰$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(kh)}{h}=k$$

۳- فرض کنید تابع $f(x,y)$ با ضابطه زیر داده شده است: (میان ترم ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(x-y) & y<|x| \\ 0 & y=|x| \\ \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & y>|x|\end{cases}$$

الف) مشتق جهتی (سویی) تابع f را در نقطه $(0,0)$ و در جهت بردار یکه $u=(u_1,u_2)$ (یعنی $D_u f(0,0)$) را در صورت وجود به دست آورید.

ادامه پاسخ الف) بنابراین

$$D_u f(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(u_1 h,u_2 h)}{h}=\begin{cases}u_1-u_2 & u_2<|u_1| \\ 0 & u_2=|u_1| \\ (u_1^2-u_2^2) & u_2>|u_1|\end{cases}$$

راهنمای حل سوال

$$D_u f(P)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

دسته بندی روی مقادیر مختلف u_1 و u_2 برای نوشتن تابع $\dfrac{f(u_1 h,u_2 h)}{h}$ با شرط $h>0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(kh)}{h}=k$$

۳- فرض کنید تابع $f(x,y)$ با ضابطه زیر داده شده است: (میان ترم ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(x-y) & y<|x|\\ \circ & y=|x|\\ \dfrac{x^{۲}-y^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & y>|x|\end{cases}$$

ب) به طور دقیق بررسی کنید که آیا تابع f در نقطه $(\circ,\circ)$ مشتق پذیر است؟

پاسخ ب) می‌دانیم اگر تابع f در (x,y) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر بردار یکه u داریم:

$$D_u f(x,y)=u.\nabla f(x,y)$$

حال گرادیان تابع f را در نقطه $(\circ,\circ)$ محاسبه می‌کنیم. با $f_x(\circ,\circ)$ شروع می‌کنیم:

$$f_x(\circ,\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(\circ+h,\circ)-f(\circ,\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{\sin h}{h}=۱$$

راهنمای حل سوال

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$$D_u f(\circ,\circ)=u.\nabla f(\circ,\circ)$$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(\circ,\circ)$ اثبات شود

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

برای $f_x(\circ,\circ)$ و $f_y(\circ,\circ)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

در این جا با توجه به ضابطه تابع f، برای $f_y(\circ,\circ)$ باید حد چپ و راست را محاسبه کنیم در صورتی که برای $f_x(\circ,\circ)$ نیازی نیست

۳- فرض کنید تابع $f(x,y)$ با ضابطه زیر داده شده است: (میان ترم ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(x-y) & y<|x|\\ \circ & y=|x|\\ \dfrac{x^{۲}-y^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & y>|x|\end{cases}$$

ب) به طور دقیق بررسی کنید که آیا تابع f در نقطه $(\circ,\circ)$ مشتق پذیر است؟

ادامه پاسخ ب) برای $f_y(\circ,\circ)$، باید حد چپ و راست را در نظر بگیریم:

$$\lim_{h\to\circ^+}\frac{f(\circ,\circ+h)-f(\circ,\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ^+}\frac{-h^{۲}}{h^{۲}}=-۱$$

$$\lim_{h\to\circ^-}\frac{f(\circ,\circ+h)-f(\circ,\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ^-}\frac{\sin(-h)}{h}=-۱$$

بنابراین داریم $f_y(\circ,\circ)=-۱$ و درنتیجه:

$$\nabla f(\circ,\circ)=(۱,-۱)$$

راهنمای حل سوال

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$$D_u f(\circ,\circ)=u.\nabla f(\circ,\circ)$$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(\circ,\circ)$ اثبات شود

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

برای $f_x(\circ,\circ)$ و $f_y(\circ,\circ)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

در این جا با توجه به ضابطه تابع f، برای $f_y(\circ,\circ)$ باید حد چپ و راست را محاسبه کنیم در صورتی که برای $f_x(\circ,\circ)$ نیازی نیست

راهنمای حل سوال

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$$D_u f(۰,۰) = u.\nabla f(۰,۰)$$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(۰,۰)$ اثبات شود

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

برای $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم

در این جا با توجه به ضابطه تابع f، برای $f_y(۰,۰)$ باید حد چپ و راست را محاسبه کنیم در صورتی که برای $f_x(۰,۰)$ نیازی نیست

۳- فرض کنید تابع $f(x,y)$ با ضابطه زیر داده شده است: (میان ترم ۱۴۰۲)

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin(x-y) & y<|x|\\ ۰ & y=|x|\\ \dfrac{x^۲-y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & y>|x|\end{cases}$$

ب) به طور دقیق بررسی کنید که آیا تابع f در نقطه $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟

ادامه پاسخ ب) حال داریم:

$$u.\nabla f(۰,۰) = (u_۱,u_۲).(۱,-۱) = u_۱ - u_۲$$

بنابراین لزوماً رابطه $D_u f(x,y) = u.\nabla f(x,y)$ برقرار نیست. کافی است به عنوان نمونه $u=(۲,۴)$ را در نظر بگیریم:

$$D_u f(۰,۰) = -۱۲ \neq -۲ = u.\nabla f(۰,۰)$$

پس تابع f در نقطه $(۰,۰)$ مشتق پذیر نیست.

۴- فرض کنید که (میان ترم ۱۴۰۱)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-۱)(y+۲) & |x-۱|\le|y-۱|\\ -(x-۱)(y+۲) & |x-۱|>|y-۱|\end{cases}$$

الف) مشتق جهتی $f(x,y)$ را در نقطه $(۱,۱)$ و در جهت بردار یکه $(u_۱,u_۲)$ به دست آورید.

$$D_u f(P)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

پاسخ الف) مشتق جهتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_u f(۱,۱)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f\left(۱+u_۱h,۱+u_۲h\right)-f(۱,۱)}{h}$$

حال داریم:

$$\frac{f\left(۱+u_۱h,۱+u_۲h\right)-f(۱,۱)}{h}=\begin{cases}\dfrac{(u_۱h)(۳+u_۲h)}{h} & |u_۱|\le|u_۲|\\ \dfrac{-(u_۱h)(۳+u_۲h)}{h} & |u_۱|>|u_۲|\end{cases}$$

دسته بندی روی مقادیر مختلف $u_۱$ و $u_۲$ برای نوشتن تابع $\frac{f\left(۱+u_۱h,۱+u_۲h\right)-f(۱,۱)}{h}$ با شرط $h>۰$

راهنمای حل سوال

۴- فرض کنید که (میان ترم ۱۴۰۱)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-۱)(y+۲) & |x-۱|\le|y-۱|\\ -(x-۱)(y+۲) & |x-۱|>|y-۱|\end{cases}$$

الف) مشتق جهتی $f(x,y)$ را در نقطه $(۱,۱)$ و در جهت بردار یکه $(u_۱,u_۲)$ به دست آورید.

ادامه پاسخ الف) بنابراین

$$D_uf(۱,۱)=\begin{cases}۳u_۱ & |u_۱|\le|u_۲|\\ -۳u_۱ & |u_۱|>|u_۲|\end{cases}$$

$$D_uf(P)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$$

دسته بندی روی مقادیر مختلف $u_۱$ و $u_۲$ برای نوشتن تابع

با $\frac{f(۱+u_۱h,۱+u_۲h)-f(۱,۱)}{h}$

شرط $h>۰$

۴- فرض کنید که (میان ترم ۱۴۰۱)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-۱)(y+۲) & |x-۱|\leq|y-۱|\\ -(x-۱)(y+۲) & |x-۱|>|y-۱|\end{cases}$$

ب) بررسی کنید که آیا $f(x,y)$ در $(۱,۱)$ مشتق پذیر است؟

پاسخ ب) ابتدا گرادیان تابع f در نقطه $(۱,۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f_x(۱,۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h,۱)-f(۱,۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۳h}{h}=-۳$$

$$f_y(۱,۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱,۱+h)-f(۱,۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

بنابراین داریم $\nabla f(۱,۱)=(-۳,۰)$ و

$$u.\nabla f(۱,۱)=(u_۱,u_۲).(-۳,۰)=-۳u_۱$$

حال چون رابطه $D_u f(۱,۱)=u.\nabla f(۱,۱)$ به ازای هر بردار یکه u برقرار نیست،

بنابراین تابع f در نقطه $(۱,۱)$ مشتق پذیر نیست.

راهنمای حل سوال

معرفی یک جهت که به ازای آن رابطه

$$D_u f(۱,۱)=u.\nabla f(۱,۱)$$

برقرار نباشد تا در نتیجه عدم مشتق‌پذیری در $(۱,۱)$ اثبات شود

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

برای $f_x(۱,۱)$ و $f_y(۱,۱)$ از تعریف مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم