به‌نام خدا

جبرخطی کاربردی

تمرین اول - فصل ۱

دکتر امیرمزلقانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی کامپیوتر

بهمن‌ماه ۱۴۰۳

۱

درستی و یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و در صورت نیاز اثبات کرده یا مثال نقض بیاورید.

الف)اگر مجموعه $\{V_1, V_2, V_3\}$ وابسته‌ی خطی باشد، آنگاه تبدیل‌یافته آن به فرم $\{T(V_1), T(V_2), T(V_3)\}$ نیز وابسته‌ی خطی است (T یک تبدیل خطی است).

ب)یک معادله‌ی همگن همیشه سازگار است.

ج)اگر $T : R^n \to R^m$ یک تبدیل خطی باشد و داشته باشیم $n > m$،آنگاه این تبدیل میتواند یک به یک باشد.

د)اگر هر $r - 1$ بردار از مجموعه بردارهای $v_1, v_2, ..., v_r$ مستقل خطی باشند، آنگاه $v_1, v_2, ..., v_r$ مستقل خطی‌اند.

پ)اگر A یک ماتریس 3×3 و y یک بردار در فضای برداری R^3 باشد، به گونه‌ای که معادله $Ax = y$ جواب ندارد، در فضای برداری R^3 برداری مانند z وجود دارد به طوریکه معادله $Ax = z$ دارای یک جواب منحصربه‌فرد است.

ت)اگر دستگاه $Ax = b$ جواب داشته باشد، تعداد جواب‌های آن برابر با تعداد جواب‌های دستگاه $Ax = 0$ است. نادرست

ث)اگر $v1, v2, v3$ نقاط منحصر به فردی روی یک خط در فضای برداری R^3 باشند، $\{v1, v2, v3\}$ وابسته‌ی خطی است.(خط لزوما از مبدا عبور نمی‌کند)

ه)اگر $(v_1, ..., v_n)$ مستقل خطی باشند آنگاه $(v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{n-1} - v_n, v_n)$ نیز مستقل خطی است.

۲

$augmented\ matrix$ هر یک از دستگاه‌های معادله‌ی زیر را تشکیل بدهید. سپس موارد زیر را برای هر ماتریس مشخص کنید.

a. درایه‌های محوری b. ستون‌های محوری c. متغیرهای آزاد و پایه d. سازگار یا ناسازگار

e. تعداد جواب‌های سیستم f. جواب‌ها به صورت پارامتریک(در صورت وجود)

الف)

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 = 6$$
$$x1 - 2x_2 - 2x_3 + 14x_4 - 4x_5 = 15$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -1$$
$$-2x_1 + 4x_2 - 12x_4 + x_5 = -7$$

ب)

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -26$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -4$$
$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 + 11x_4 = -10$$

ج)

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$$
$$10x_2 - 10x_3 - x_4 = 1$$

۳

مقادیر h, g, c, b, a و k را طوری تعیین کنید تا هر یک از سیستم‌ها:

الف)جواب نداشته باشد.

ب)بی‌نهایت جواب داشته باشد.

ج)جواب یکتا داشته باشد.

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -6 & 3a \\ 2 & 4 & 2b & 2c \\ -1 & -5 & d & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & k & 1 \end{bmatrix}$$

۴

اگر $W = span(S)$ باشد برای هر قسمت مشخص کنید که آیا y عضوی از W است؟

الف)

$$S = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ب)

$$S = \{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۵

اگر u, v و w بردارهای مجزا باشند:

ثابت کنید $\{u, v, w\}$ مستقل خطی‌اند، اگر وتنها اگر $\{u+v, u+w, v+w\}$ مستقل خطی باشند.

۶

اگر $L : R^2 \to R^3$ تبدیل خطی باشد به این صورت که:

$$L(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad L(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الف)بردار $L(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})$ را به دست آورید.

ب)فرمول $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ را به دست آورید.

۷

الف)نشان دهید آیا تبدیل‌های زیر خطی هستند یا خیر؟

1) $T_1(x,y,z) = (x+2y, y+3z, 0)$

2) $T_2(x,y,z) = (x+y+z, 2x+z, |z|)$

3) $T_3(x,y,z) = (x+y, 2x)$

ب)آیا تبدیل‌های $T_1 \circ T_2$ و $T_3 \circ T_2$ می‌توانند خطی باشند؟

دلیل پاسخ خود را بنویسید و در صورت خطی بودن ماتریس تبدیل هر یک را به دست آورید.

۸

تبدیل $T : R^2 \to R^3$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می‌شود:

الف)ابتدا یک انعکاس نسبت به خط $x+y=0$ انجام می‌دهد.

ب)سپس یک دوران به اندازه θ حول مرکز در جهت پادساعتگرد اعمال می‌کند.

ماتریس این تبدیل خطی را به دست آورید و نشان دهید آیا این تبدیل یک تبدیل پوشا و یک به یک می‌باشد یا خیر.

۹

گزاره‌های زیر را اثبات کنید.

الف)اگر $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ یک مجموعه از بردارها عضو R^n که مستقل خطی باشند و $span(A) = R^n$ آنگاه $B = \{v_1+v_2, v_2+v_3, ..., v_{n-1}+v_n, v_n+v_1\}$ نیز مجموعه مستقل خطی است که $span(B) = R^n$.

ب)نشان دهید اگر معادله $Ax = 0$ فقط جواب بدیهی داشته باشد و A به شکل $[a_1, a_2, ..., a_n]$ باشد که a_i ها ستون‌های ماتریس A هستند آنگاه وجود دارد عدد صحیح مانند k ای که $1 < k \leq n$ و $Bx = a_k$ سازگار باشد ($B = [a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}]$)

ج)فرض کنید w جوابی از $Ax = b$ باشد و تعریف می‌کنیم $v_h = w - p$ نشان دهید v_h جوابی از $Ax = 0$ است.این نشان می‌دهد که هر جوابی از $Ax = b$ به شکل $w = p + v_h$ است که p یک جواب خاص از $Ax = b$ است و v_h جوابی از $Ax = 0$.

پاسخ تمرین‌ها را به صورت خوانا در قالب $HW? - StudentNumber$ در سامانه کورسز بارگذاری کنید.
در صورت وجود ابهام، می‌توانید از طریق تلگرام یا ایمیل $La.spring2025@gmail.com$ با تدریسیاران در ارتباط باشید.