۱- انتگرال $\iint_S (curl\ F).N\, dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (آدامز)

$$x^۲+y^۲+۲(z-۱)^۲=۶$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

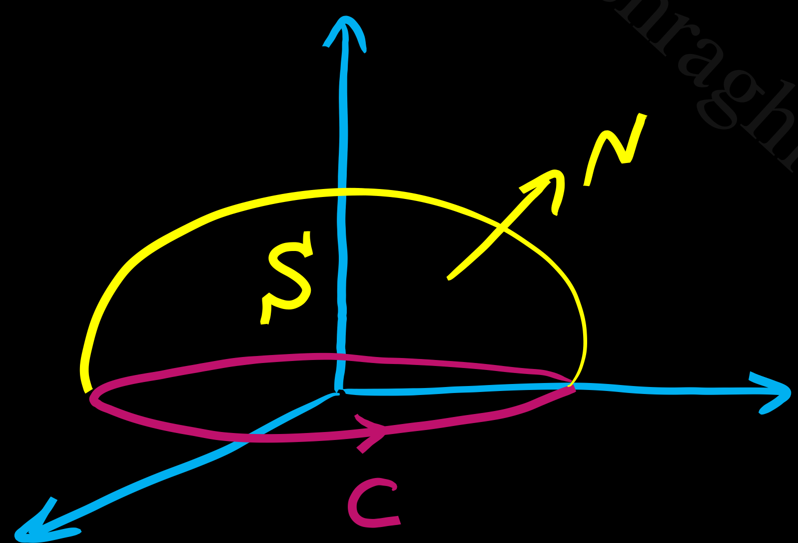
$$F=(xz-y^۳\cos z\,,x^۳e^z,xyze^{x^۲+y^۲+z^۲})$$

پاسخ) ابتدا می‌خواهیم مرز رویه S را مشخص کنیم که طبیعتا در صفحه xy قرار دارد.

بنابراین در معادله رویه قرار می‌دهیم $z=۰$. در این صورت داریم:

$$x^۲+y^۲=۴$$

پس مرز رویه S که آن را با C نمایش می‌دهیم، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است که در صفحه xy قرار دارد. جهت خم C را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که القاشده توسط S باشد.



راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\, dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\, dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۱- انتگرال $\iint_S (curl\ F).N\, dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (آدامز)

$$x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F = (xz - y^3 \cos z\, , x^3 e^z, xyze^{x^2+y^2+z^2})$$

ادامه پاسخ) حال S یک رویه هموار و C یک خم بسته هموار با جهت القایی از S است. همچنین F نیز یک میدان برداری هموار است. بنابراین شرایط قضیه استوکس برقرار است و طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\, dS = \oint_C F.dr$$

هرچند می‌توانیم $\oint_C F.dr$ را مستقیماً محاسبه کنیم اما می‌خواهیم برای بار دوم از قضیه استوکس استفاده کنیم و از سطح دیگری کمک بگیریم. در واقع خم C مرز رویه S_1 که در صفحه xy قرار دارد $(z=0)$ و $x^2+y^2 \le 4$ هست نیز می‌باشد. بردار قائم یکه S_1 را به صورت $N_1 = k$ در نظر می‌گیریم. حال S_1 نیز یک رویه هموار است و در نتیجه مجدداً می‌توانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم که طبق آن:

$$\iint_{S_1} (curl\ F).N_1\, dS_1 = \oint_C F.dr$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\, dS = \oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با S_1 نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_1} (curl\ F).N_1\, dS_1 = \oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه S_1 را به صورت $N_1 = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

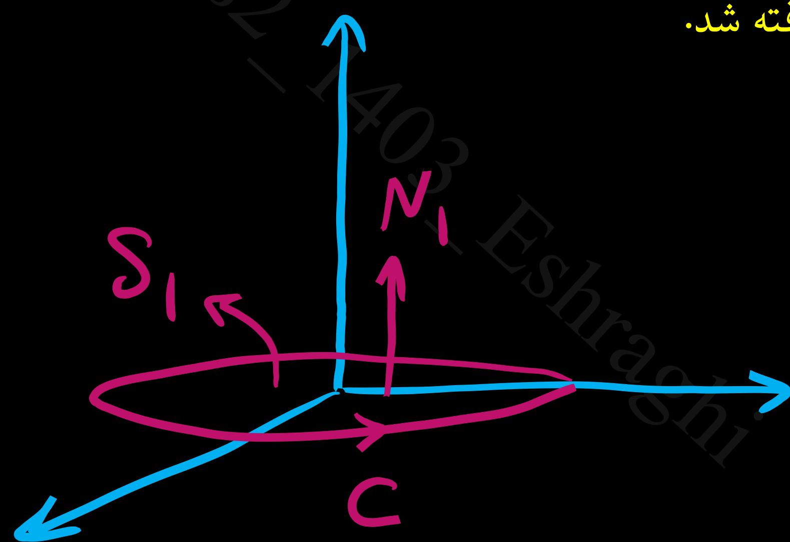
۱- انتگرال $\iint_S (curl\ F).N\, dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (آدامز)

$$x^{۲} + y^{۲} + ۲(z-۱)^{۲} = ۶$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F = (xz - y^{۳}\cos z\,, x^{۳}e^{z}, xyze^{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}})$$

ادامه پاسخ) رویه $S_۱$ به صورت زیر می‌باشد که بردار قائم یکه آن به صورت $N_۱ = k$ در نظر گرفته شد.



بنابراین در مجموع داریم (پس از دو بار استفاده از قضیه استوکس):

$$\iint_S (curl\ F).N\, dS = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\, dS_۱$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\, dS = \oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\, dS_۱ = \oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۱- انتگرال $\iint_S (curl\ F).N\,dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (آدامز)

$$x^۲+y^۲+۲(z-۱)^۲=۶$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F=(xz-y^۳\cos z\,,x^۳e^z,xyze^{x^۲+y^۲+z^۲})$$

ادامه پاسخ) حال باید $curl\ F$ را محاسبه کنیم که به صورت زیر است:

$$curl\ F=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz-y^۳\cos z & x^۳e^z & xyze^{x^۲+y^۲+z^۲}\end{vmatrix}$$

حال چون $N_۱=k$، ما فقط به مولفه سوم کرل نیاز داریم که برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^۳e^z)-\frac{\partial}{\partial y}(xz-y^۳\cos z)=۳x^۲e^z+۳y^۲\cos z$$

حال داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱=\iint ۳x^۲e^z+۳y^۲\cos z\,dxdy$$

$$\overset{z=۰}{=}\iint ۳(x^۲+y^۲)\,dxdy$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۱- انتگرال $\iint_S (curl\ F).N\,dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (آدامز)

$$x^۲+y^۲+۲(z-۱)^۲=۶$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F=(xz-y^۳\cos z\,,x^۳e^z,xyze^{x^۲+y^۲+z^۲})$$

ادامه پاسخ) ناحیه ما برای تعیین کران‌های انتگرال دوگانه، داخل دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ است. از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲ ۳r^۲\,r\,dr\,d\theta$$

$$=۳\left(\int_۰^۲ r^۳dr\right)\left(\int_۰^{۲\pi}d\theta\right)$$

$$=۳\left(\frac{r^۴}{۴}\bigg|_۰^۲\right)\left(\theta\bigg|_۰^{۲\pi}\right)$$

$$=۲۴\pi$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۲- $\iint_S (curl\ F).N\ dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (پایان ترم ۹۷)

$$x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۴ = ۱۷$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

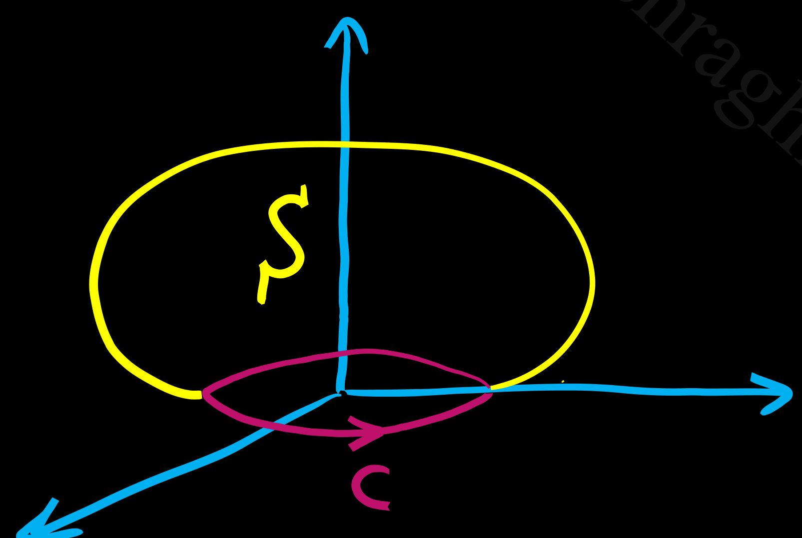
$$F = (x^۲ - y^۲, y^۲ - z^۲, z^۲ - x^۲)$$

پاسخ) ابتدا می‌خواهیم مرز رویه S را مشخص کنیم که طبیعتا در صفحه xy قرار دارد.

بنابراین در معادله رویه قرار می‌دهیم $z = ۰$. در این صورت داریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۱$$

پس مرز رویه S که آن را با C نمایش می‌دهیم، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است که در صفحه xy قرار دارد. جهت خم C را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که القاشده توسط S باشد.



راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS = \oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\,dS_۱ = \oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۲- $\iint_S (curl\ F).N\,dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (پایان ترم ۹۷)

$$x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۴ = ۱۷$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F = (x^۲ - y^۲, y^۲ - z^۲, z^۲ - x^۲)$$

ادامه پاسخ) حال S یک رویه هموار و C یک خم بسته هموار با جهت القایی از S است. همچنین F نیز یک میدان برداری هموار است. بنابراین شرایط قضیه استوکس برقرار است و طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS = \oint_C F.dr$$

حال می‌خواهیم برای بار دوم از قضیه استوکس استفاده کنیم و از سطح دیگری کمک بگیریم. در واقع خم C مرز رویه $S_۱$ که در صفحه xy قرار دارد $(z=۰)$ و $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ هست نیز می‌باشد. بردار قائم یکه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم. حال $S_۱$ نیز یک رویه هموار است و در نتیجه مجدداً می‌توانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم که طبق آن:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\,dS_۱ = \oint_C F.dr$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS = \oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\,dS_۱ = \oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

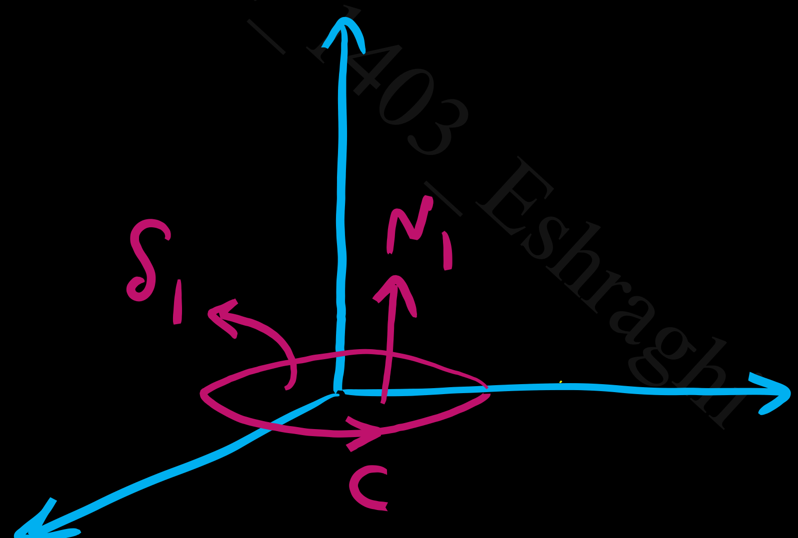
۲- $\iint_S (curl\ F).N\ dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (پایان ترم ۹۷)

$$x^2+y^2+(z-2)^4=17$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F=(x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2)$$

ادامه پاسخ) رویه S_1 به صورت زیر می‌باشد که بردار قائم یکه آن به صورت $N_1=k$ در نظر گرفته شد.



بنابراین در مجموع داریم (پس از دو بار استفاده از قضیه استوکس):

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\iint_{S_1}(curl\ F).N_1\,dS_1$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با S_1 نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_1}(curl\ F).N_1\,dS_1=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه S_1 را به صورت $N_1=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۲- $\iint_S (curl\ F).N\ dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (پایان ترم ۹۷)

$$x^۲ + y^۲ + (z - ۲)^۴ = ۱۷$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F = (x^۲ - y^۲, y^۲ - z^۲, z^۲ - x^۲)$$

ادامه پاسخ) حال باید $curl\ F$ را محاسبه کنیم که به صورت زیر است:

$$curl\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^۲ - y^۲ & y^۲ - z^۲ & z^۲ - x^۲ \end{vmatrix}$$

حال چون $N_۱ = k$، ما فقط به مولفه سوم کرل نیاز داریم که برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^۲ - z^۲\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^۲ - y^۲\right) = ۲y$$

حال داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\ dS = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\ dS_۱ = \iint ۲y\ dxdy$$

$$= \iint ۲y\ dxdy$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\ dS = \oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\ dS_۱ = \oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۲- $\iint_S (curl\ F).N\ dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از رویه (پایان ترم ۹۷)

$$x^{۲}+y^{۲}+(z-۲)^{۴}=۱۷$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد و N قائم یکه بر S و به سمت خارج S است و

$$F=(x^{۲}-y^{۲},y^{۲}-z^{۲},z^{۲}-x^{۲})$$

ادامه پاسخ) ناحیه ما برای تعیین کران‌های انتگرال دوگانه، داخل دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ است. از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱}(۲r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=۲\left(\int_۰^{۱}r^{۲}dr\right)\left(\int_۰^{۲\pi}\sin\theta\,d\theta\right)$$

$$=۲\left(\frac{r^{۳}}{۳}\Bigg|_۰^{۱}\right)\left(-\cos\theta\Bigg|_۰^{۲\pi}\right)$$

$$=۰$$

(می‌توانستیم از این که تابع داخل انتگرال فرد و ناحیه متقارن است نیز استفاده کنیم)

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۳- مقدار

$$\oint_C \left(۲xe^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)-۳y^۳\right)dx+\left(۲ye^{x^۲-z}\cos\left(y^۲\right)-۹xy^۲\right)dy+\left(۱۲z-e^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)+۲x\right)dz$$

را در امتداد خم C به معادله

$$r(t)=(\cos(\pi t),۲,\sin(\pi t)),\qquad ۰\leq t\leq ۲$$

به دست آورید. (پایان ترم ۱۴۰۲)

پاسخ) قرار می‌دهیم:

$$F=\left(۲xe^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)-۳y^۳,۲ye^{x^۲-z}\cos\left(y^۲\right)-۹xy^۲,۱۲z-e^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)+۲x\right)$$

پس به دنبال محاسبه $\oint_C F.dr$ هستیم. خم C بسته است و با توجه به این که مولفه دوم $r(t)$ برابر با عدد ثابت ۲ است، پس خم بسته C در صفحه $y=۲$ قرار دارد. همچنین با توجه به ترتیب پارامتری سازی $(۰\leq t\leq ۲)$، خم C در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. ناحیه داخل این خم بسته در صفحه $y=۲$، یک سطح یا رویه را مشخص می‌کند که آن را S می‌نامیم. برای رویه S، بردار قائم یکه N را به صورت $N=-j$ در نظر می‌گیریم. حال S یک رویه هموار و C یک خم بسته هموار با جهت القایی از S است. همچنین F نیز یک میدان برداری هموار است. بنابراین شرایط قضیه استوکس برقرار است و طبق آن داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_S (curl\ F).N\,dS$$

راهنمای حل سوال

با توجه به مولفه دوم $r(t)$، خم بسته C در صفحه $y=۲$ قرار دارد

باید دقت کنیم که خم C در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است

در صفحه $y=۲$، ناحیه داخل خم C، یک سطح یا رویه مانند S را مشخص می‌کند (شاید به عنوان ساده ترین سطحی که مرز آن C باشد)

انتخاب $N=-j$ به عنوان قائم یکه سطح S و استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\oint_C F.dr\iint_S (curl\ F).N\,dS$$

استفاده از مساحت یا مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۳- مقدار

$$\oint_C \left(۲xe^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)-۳y^۳\right)dx+\left(۲ye^{x^۲-z}\cos\left(y^۲\right)-۹xy^۲\right)dy+\left(۱۲z-e^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)+۲x\right)dz$$

را در امتداد خم C به معادله

$$r(t)=(\cos(\pi t),۲,\sin(\pi t)),\qquad ۰\leq t\leq ۲$$

به دست آورید. (پایان ترم ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) حال $curl\ F$ را باید محاسبه کنیم که به صورت زیر است:

$$curl\ F=\nabla\times F$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ ۲xe^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)-۳y^۳ & ۲ye^{x^۲-z}\cos\left(y^۲\right)-۹xy^۲ & ۱۲z-e^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)+۲x \end{vmatrix}$$

$$=\left(-۲ye^{x^۲-z}\cos\left(y^۲\right)+۲ye^{x^۲-z}\cos\left(y^۲\right)\right)\vec{i}+$$
$$\left(-۲xe^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)+۲xe^{x^۲-z}\sin\left(y^۲\right)-۲\right)\vec{j}+$$
$$(۴xye^{x^۲-z}\cos\left(y^۲\right)-۹y^۲-۴xye^{x^۲-z}\cos\left(y^۲\right)+۹y^۲)\vec{k}$$
$$=(۰,-۲,۰)$$

از طرفی با توجه به معادله پارامتری خم، داریم $x^۲+z^۲=۱$. در واقع خم C یک دایره با شعاع ۱ و مرکز $(۰,۰)$ (در صفحه $y=۲$) را مشخص می‌کند. بنابراین:

$$\oint_C F.dr=\iint_S (curl\ F).N\,dS=\iint ۲\,dx\,dz=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱}۲r\ dr\,d\theta=۲\pi$$

راهنمای حل سوال

با توجه به مولفه دوم $r(t)$، خم بسته C در صفحه $y=۲$ قرار دارد

باید دقت کنیم که خم C در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است

در صفحه $y=۲$، ناحیه داخل خم C، یک سطح یا رویه مانند S را مشخص می‌کند (شاید به عنوان ساده ترین سطحی که مرز آن C باشد)

انتخاب $N=-j$ به عنوان قائم یکه سطح S و استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\oint_C F.dr\iint_S (curl\ F).N\,dS$$

استفاده از مساحت یا مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۴- فرض کنید S بخشی از رویه $x^{۲} + y^{۲} + z^{۱۴۰۰} = ۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. همچنین فرض کنید N بردار قائم یکه بر S به سمت خارج S است و C مرز S و دارای جهت القایی از S است. میدان برداری F نیز به صورت زیر مفروض است:

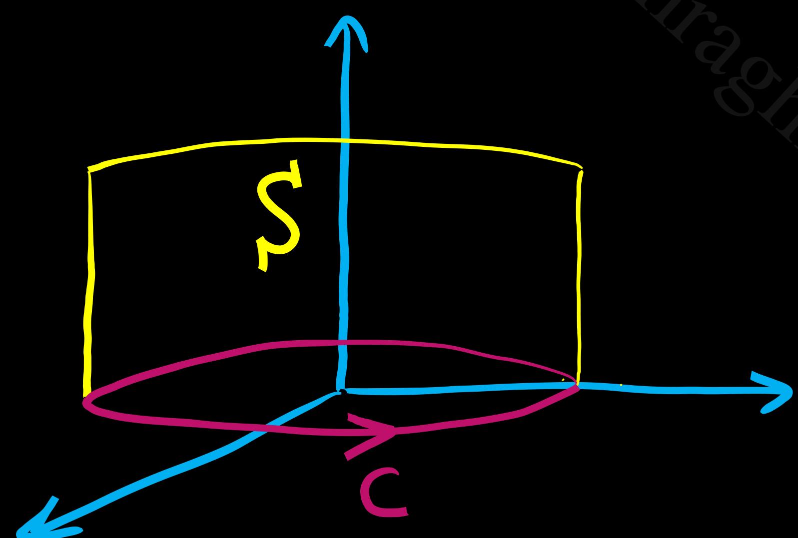
$$F(x,y,z) = (\sin y + \sin x + y, x\cos y\,, xz\sin y - z\cos x + ۱)$$

حاصل $\oint_C F.dr$ را بیابید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

پاسخ) ابتدا می‌خواهیم مرز رویه S را مشخص کنیم که طبیعتا در صفحه xy قرار دارد. بنابراین در معادله رویه قرار می‌دهیم $z = ۰$. در این صورت داریم:

$$x^{۲} + y^{۲} = ۱$$

پس مرز رویه S که آن را با C نمایش می‌دهیم، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است که در صفحه xy قرار دارد و طبق فرض، دارای جهت القایی از S است.



راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\,dS$$

حال قضیه استوکس را برای رویه دیگری استفاده می‌کنیم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم که مرز آن مجدداً خم C بود و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\,dS_۱$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مساحت یا مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۴- فرض کنید S بخشی از رویه $x^۲ + y^۲ + z^{۱۴۰۰} = ۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. همچنین فرض کنید N بردار قائم یکه بر S به سمت خارج S است و C مرز S و دارای جهت القایی از S است. میدان برداری F نیز به صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z) = (\sin y + \sin x + y, x\cos y\,, xz\sin y - z\cos x + ۱)$$

حاصل $\oint_C F.dr$ را بیابید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

ادامه پاسخ) حال S یک رویه هموار و C یک خم بسته هموار با جهت القایی از S است. همچنین F نیز یک میدان برداری هموار است. بنابراین شرایط قضیه استوکس برقرار است و طبق آن داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\,dS$$

حال می‌خواهیم برای بار دوم از قضیه استوکس استفاده کنیم و از سطح دیگری کمک بگیریم. در واقع خم C مرز رویه $S_۱$ که در صفحه xy قرار دارد $(z = ۰)$ و $x^۲ + y^۲ \le ۱$ هست نیز می‌باشد. حال $S_۱$ نیز یک رویه هموار است و اگر قائم یکه آن را به صورت $N_۱ = k$ در نظر بگیریم، مجدداً می‌توانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم که طبق آن:

$$\oint_C F.dr = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\,dS_۱$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\,dS$$

حال قضیه استوکس را برای رویه دیگری استفاده می‌کنیم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم که مرز آن مجدداً خم C بود و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\,dS_۱$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

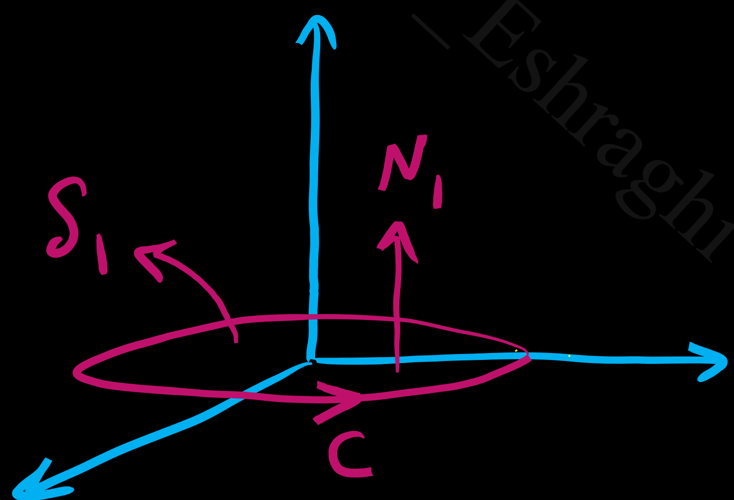
استفاده از مساحت یا مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۴- فرض کنید S بخشی از رویه $x^۲+y^۲+z^{۱۴۰۰}=۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. همچنین فرض کنید N بردار قائم یکه بر S به سمت خارج S است و C مرز S و دارای جهت القایی از S است. میدان برداری F نیز به صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z)=(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱)$$

حاصل $\oint_C F.dr$ را بیابید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

ادامه پاسخ) رویه $S_۱$ به صورت زیر می‌باشد که همان طور که گفته شد، بردار قائم یکه آن به صورت $N_۱=k$ در نظر گرفته شد:



راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_S (curl\ F).N\,dS$$

حال قضیه استوکس را برای رویه دیگری استفاده می‌کنیم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم که مرز آن مجدداً خم C است و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\,dS_۱$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مساحت یا مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۴- فرض کنید S بخشی از رویه $x^۲ + y^۲ + z^{۱۴۰۰} = ۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. همچنین فرض کنید N بردار قائم یکه بر S به سمت خارج S است و C مرز S و دارای جهت القایی از S است. میدان برداری F نیز به صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z) = (\sin y + \sin x + y, x\cos y, xz\sin y - z\cos x + ۱)$$

حاصل $\oint_C F.dr$ را بیابید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

ادامه پاسخ) حال باید $curl\ F$ را محاسبه کنیم که به صورت زیر است:

$$curl\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \sin y + \sin x + y & x\cos y & xz\sin y - z\cos x + ۱ \end{vmatrix}$$

حال چون $N_۱ = k$، ما فقط به مولفه سوم کرل نیاز داریم که برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin y + \sin x + y) = \cos y - \cos y - ۱ = -۱$$

حال داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\, dS_۱ = \iint -۱\, dxdy$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\, dS$$

حال قضیه استوکس را برای رویه دیگری استفاده می‌کنیم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم که مرز آن مجدداً خم C بود و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\, dS_۱$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مساحت یا مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۴- فرض کنید S بخشی از رویه $x^{۲} + y^{۲} + z^{۱۴۰۰} = ۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. همچنین فرض کنید N بردار قائم یکه بر S به سمت خارج S است و C مرز S و دارای جهت القایی از S است. میدان برداری F نیز به صورت زیر مفروض است:

$$F(x,y,z) = (\sin y + \sin x + y, x\cos y\,, xz\sin y - z\cos x + ۱)$$

حاصل $\oint_C F.dr$ را بیابید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

ادامه پاسخ) حال چون ناحیه ما دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است، داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\, dS_۱ = \iint -۱\, dxdy = -\iint_{x^۲+y^۲\leq ۱} dx\, dy$$
$$= -\pi$$

(آخرین انتگرال بیانگر مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ است)

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\, dS$$

حال قضیه استوکس را برای رویه دیگری استفاده می‌کنیم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم که مرز آن مجدداً خم C بود و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\, dS_۱$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

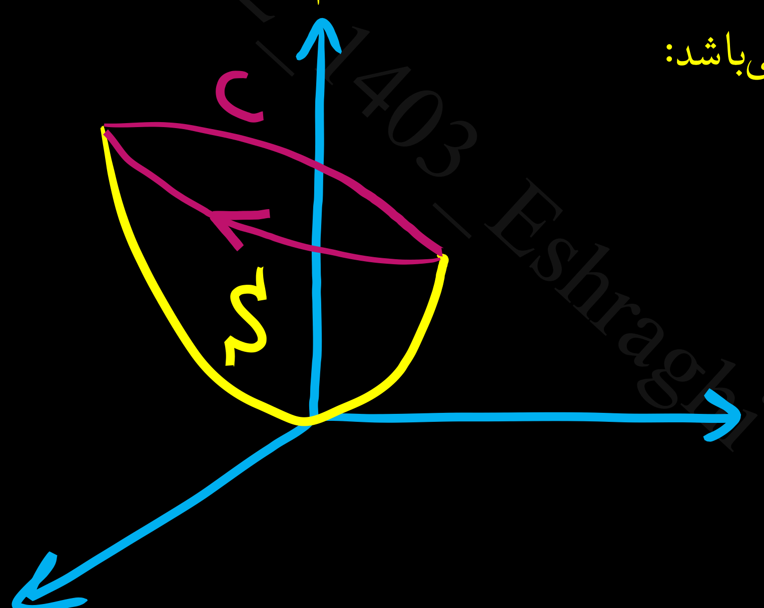
استفاده از مساحت یا مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال

۵- فرض کنید S بخشی از سهمی وار دایره ای $z=x^2+y^2$ باشد که زیر صفحه $y+z=3$ قرار دارد و به علاوه فرض کنید N میدان برداری قائم یکه بر S باشد که به سمت خارج سهمی وار است. اگر

$$F(x,y,z)=\left(z+\sin y+(y+z)e^x,\ x\cos y+e^x+e^{\sin z^2},\ 3x(y+z)+e^x+\cos e^{y^2}\right)$$

مطلوبست محاسبه $\iint_S curl\, F.N\, dS$. (پایان ترم ۹۹)

پاسخ) مرز S که آن را C نامگذاری می‌کنیم (و جهت مناسب برای آن انتخاب می‌کنیم)، به صورت زیر می‌باشد:



معادله خم C را به صورت زیر می‌توانیم به دست آوریم (با برابر قرار دادن z برای سهمی وار و صفحه):

$$x^2+y^2=-y+3 \Longrightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با S_1 نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_1} (curl\ F).N_1\,dS_1=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه S_1 را به سمت پایین در نظر می‌گیریم (برای استفاده از قضیه استوکس)

تعریف تابع g مناسب و محاسبه $N_1 dS_1$ به صورت زیر:

$$N_1=-\frac{\nabla g}{|\nabla g|},\ dS_1=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

۵- فرض کنید S بخشی از سهمی وار دایره ای $z = x^۲ + y^۲$ باشد که زیر صفحه $y + z = ۳$ قرار دارد و به علاوه فرض کنید N میدان برداری قائم یکه بر S باشد که به سمت خارج سهمی وار است. اگر

$$F(x,y,z) = (z + \sin y + (y+z)e^x, x\cos y + e^x + e^{\sin z^۲}, ۳x(y+z) + e^x + \cos e^{y^۲})$$

مطلوبست محاسبه $\iint_S curl\, F.N\, dS$. (پایان ترم ۹۹)

ادامه پاسخ) مقدار z روی خم C را نیز از روی هر کدام از معادله‌ها می‌توانیم مشخص کنیم؛ مثلا $z = ۳ - y$. حال رویه S هموار و C یک خم بسته هموار با جهت القایی از S است. همچنین F نیز یک میدان برداری هموار است. بنابراین شرایط قضیه استوکس برقرار است و طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS = \oint_C F.dr$$

حال می‌خواهیم روی سطح جدیدی مجدداً قضیه استوکس را به کار ببریم. سطح $S_۱$ را آن بخش از صفحه $y + z = ۳$ در نظر می‌گیریم که محدود به رو و داخل سهمی وار به معادله $z = x^۲ + y^۲$ است. همچنین جهت قائم یکه سطح $S_۱$ را به سمت پایین در نظر می‌گیریم (تا با جهت خم C هماهنگ و مطابق شود و بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم).

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS = \oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\, F).N_۱\, dS_۱ = \oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به سمت پایین در نظر می‌گیریم (برای استفاده از قضیه استوکس)

تعریف تابع g مناسب و محاسبه $N_۱ dS_۱$ به صورت زیر:

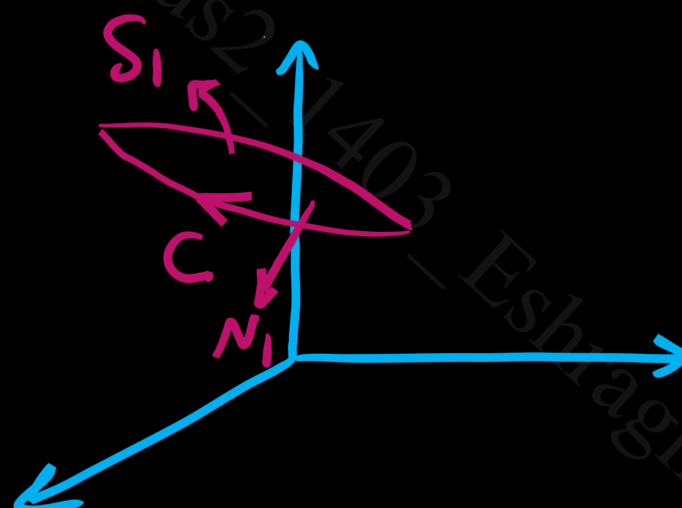
$$N_۱ = -\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS_۱ = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} dx\, dy$$

۵- فرض کنید S بخشی از سهمی وار دایره ای $z = x^۲ + y^۲$ باشد که زیر صفحه $y + z = ۳$ قرار دارد و به علاوه فرض کنید N میدان برداری قائم یکه بر S باشد که به سمت خارج سهمی وار است. اگر

$$F(x,y,z) = (z + \sin y + (y+z)e^x, x\cos y + e^x + e^{\sin z^۲}, ۳x(y+z) + e^x + \cos e^{y^۲})$$

مطلوبست محاسبه $\iint_S curl\, F. N\, dS$. (پایان ترم ۹۹)

ادامه پاسخ)



حال رویه $S_۱$ نیز هموار است و خم C نیز دارای جهت القایی از $S_۱$ است. پس طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\, F). N_۱\, dS_۱ = \oint_C F. dr$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\, F). N\, dS = \oint_C F. dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\, F). N_۱\, dS_۱ = \oint_C F. dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به سمت پایین در نظر می‌گیریم (برای استفاده از قضیه استوکس)

تعریف تابع g مناسب و محاسبه $N_۱ dS_۱$ به صورت زیر:

$$N_۱ = -\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS_۱ = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} dx\, dy$$

۵- فرض کنید S بخشی از سهمی وار دایره ای $z=x^{۲}+y^{۲}$ باشد که زیر صفحه $y+z=۳$ قرار دارد و به علاوه فرض کنید N میدان برداری قائم یکه بر S باشد که به سمت خارج سهمی وار است. اگر

$$F(x,y,z)=(z+\sin y+(y+z)e^{x}, x\cos y+e^{x}+e^{\sin z^{۲}}, ۳x(y+z)+e^{x}+\cos e^{y^{۲}})$$

مطلوبست محاسبه $\iint_S curl\ F.N\,dS$. (پایان ترم ۹۹)

ادامه پاسخ) پس مجموعاً داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱$$

حال تعریف می‌کنیم $g(x,y,z)=y+z-۳$. در این جا داریم:

$$N_۱=-\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, \qquad dS_۱=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

$$N_۱dS_۱=-\frac{\nabla g}{|g_z|}dx\,dy=-\frac{(۰,۱,۱)}{۱}dx\,dy=(۰,-۱,-۱)dx\,dy$$

همچنین برای کرل داریم:

$$curl\ F=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z+\sin y+(y+z)e^{x} & x\cos y+e^{x}+e^{\sin z^{۲}} & ۳x(y+z)+e^{x}+\cos e^{y^{۲}}\end{vmatrix}$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به سمت پایین در نظر می‌گیریم (برای استفاده از قضیه استوکس)

تعریف تابع g مناسب و محاسبه $N_۱dS_۱$ به صورت زیر:

$$N_۱=-\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS_۱=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

۵- فرض کنید S بخشی از سهمی وار دایره ای $z=x^{۲}+y^{۲}$ باشد که زیر صفحه $y+z=۳$ قرار دارد و به علاوه فرض کنید N میدان برداری قائم یکه بر S باشد که به سمت خارج سهمی وار است. اگر

$$F(x,y,z)=\left(z+\sin y+(y+z)e^{x},\, x\cos y+e^{x}+e^{\sin z^{۲}},\, ۳x(y+z)+e^{x}+\cos e^{y^{۲}}\right)$$

مطلوبست محاسبه $\iint_S curl\, F.N\, dS$. (پایان ترم ۹۹)

(ادامه پاسخ)

$$curl\, F=\left(۳x+۲ye^{y^{۲}}\sin\left(e^{y^{۲}}\right)-۲z\cos\left(z^{۲}\right)e^{\sin\left(z^{۲}\right)}\right)\vec{i}+$$
$$(۱+e^{x}-۳(y+z)-e^{x})\vec{j}+(\cos y+e^{x}-\cos y-e^{x})\vec{k}$$
$$=\left(۳x+۲ye^{y^{۲}}\sin\left(e^{y^{۲}}\right)-۲z\cos\left(z^{۲}\right)e^{\sin\left(z^{۲}\right)},\, ۱-۳(y+z),\, ۰\right)$$

حال اگر D تصویر سطح $S_۱$ روی صفحه xy باشد، آنگاه داریم (توجه داریم که $y+z=۳$):

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS=\iint_{S_۱}(curl\, F).N_۱\, dS_۱=\iint_D -۱+۳(y+z)\, dx\, dy$$
$$=\iint_D -۱+۹\, dx\, dy$$
$$=۸\iint_D dx\, dy$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱}(curl\, F).N_۱\, dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به سمت پایین در نظر می‌گیریم (برای استفاده از قضیه استوکس)

تعریف تابع g مناسب و محاسبه $N_۱ dS_۱$ به صورت زیر:

$$N_۱=-\frac{\nabla g}{|\nabla g|},\, dS_۱=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\, dy$$

۵- فرض کنید S بخشی از سهمی وار دایره ای $z = x^{۲} + y^{۲}$ باشد که زیر صفحه $y + z = ۳$ قرار دارد و به علاوه فرض کنید N میدان برداری قائم یکه بر S باشد که به سمت خارج سهمی وار است. اگر

$$F(x,y,z) = (z + \sin y + (y+z)e^{x}, x\cos y + e^{x} + e^{\sin z^{۲}}, ۳x(y+z) + e^{x} + \cos e^{y^{۲}})$$

مطلوبست محاسبه $\iint_S curl\, F.N\, dS$. (پایان ترم ۹۹)

ادامه پاسخ) حال چون شعاع دایره $x^{۲} + \left(y + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱۳}{۴}$ برابر با $\sqrt{\frac{۱۳}{۴}}$ است و $\iint_D dx\, dy$ بیانگر مساحت دایره است، خواهیم داشت:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS = ۸\iint_D dx\, dy = ۸ \times \frac{۱۳}{۴}\pi = ۲۶\pi$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS = \oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\, F).N_۱\, dS_۱ = \oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به سمت پایین در نظر می‌گیریم (برای استفاده از قضیه استوکس)

تعریف تابع g مناسب و محاسبه $N_۱ dS_۱$ به صورت زیر:

$$N_۱ = -\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS_۱ = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\, dy$$

۶- انتگرال $\iint_S curl\, F. NdS$ را محاسبه کنید که در آن سطح S قسمتی از کره

$$x^۲+y^۲+(z-۲)^۲=۸$$

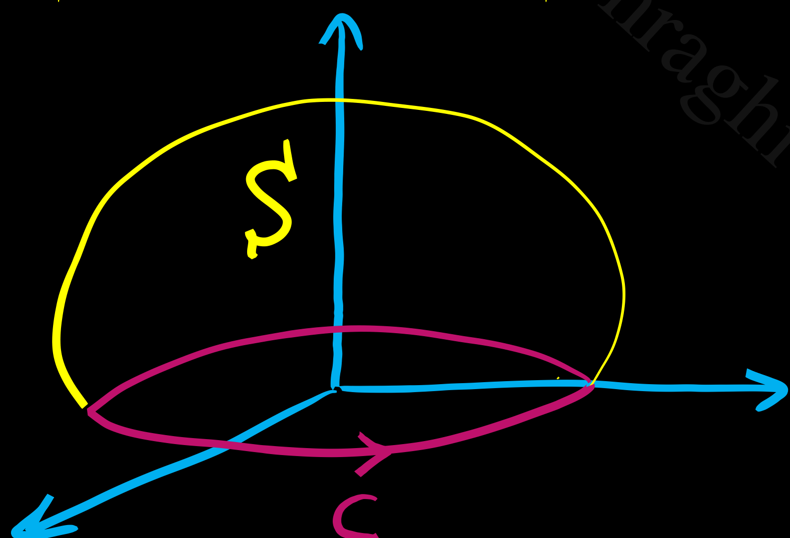
است که بالای صفحه xy قرار دارد. (پایان ترم علم و صنعت ۱۴۰۲)

$$F(x,y,z)=(y^۲+\cos xz\,, x^۳+e^{yz^۳}, -e^{-xyz})$$

پاسخ) ابتدا می‌خواهیم مرز رویه S را مشخص کنیم که طبیعتا در صفحه xy قرار دارد. بنابراین در معادله رویه قرار می‌دهیم $z=۰$. در این صورت داریم:

$$x^۲+y^۲=۴$$

پس مرز رویه S که آن را با C نمایش می‌دهیم، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است که در صفحه xy قرار دارد. جهت خم C را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که القاشده توسط S باشد.



راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\, F).N_۱\, dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال و این نکته که انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن صفر است

۶- انتگرال $\iint_S \ curl\ F.\ NdS$ را محاسبه کنید که در آن سطح S قسمتی از کره

$$x^۲ + y^۲ + (z - ۲)^۲ = ۸$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد. (پایان ترم علم و صنعت ۱۴۰۲)

$$F(x, y, z) = (y^۲ + \cos xz\,, x^۳ + e^{yz^۳}, -e^{-xyz})$$

ادامه پاسخ) حال S یک رویه هموار و C یک خم بسته هموار با جهت القایی از S است. همچنین F نیز یک میدان برداری هموار است. بنابراین شرایط قضیه استوکس برقرار است و طبق آن داریم:

$$\iint_S \ (curl\ F).N\ dS = \oint_C \ F.dr$$

حال می‌خواهیم برای بار دوم از قضیه استوکس استفاده کنیم و از سطح دیگری کمک بگیریم. در واقع خم C مرز رویه $S_۱$ که در صفحه xy قرار دارد $(z = ۰)$ و $x^۲ + y^۲ \leq ۴$ هست نیز می‌باشد. بردار قائم یکه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم. حال $S_۱$ نیز یک رویه هموار است و در نتیجه مجدداً می‌توانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم که طبق آن:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\ dS_۱ = \oint_C \ F.dr$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S \ (curl\ F).N\ dS = \oint_C \ F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\ dS_۱ = \oint_C \ F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال و این نکته که انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن صفر است

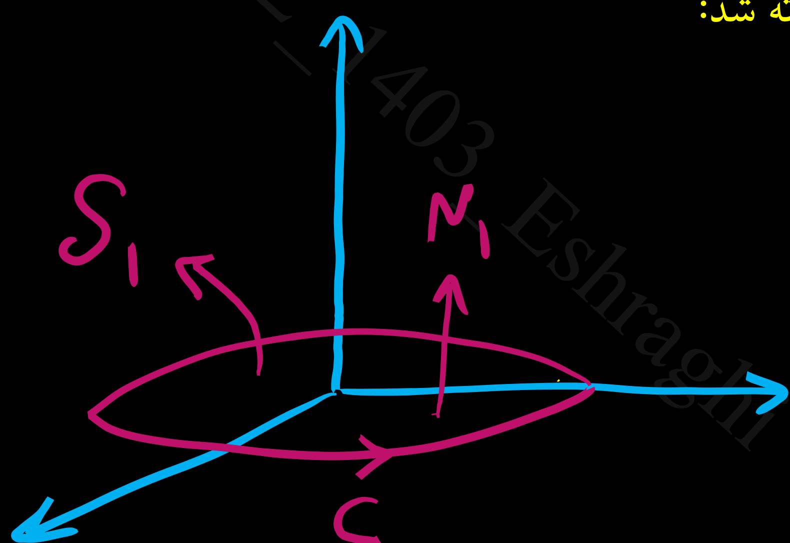
۶- انتگرال $\iint_S curl\,F.\,NdS$ را محاسبه کنید که در آن سطح S قسمتی از کره

$$x^{۲}+y^{۲}+(z-۲)^{۲}=۸$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد. (پایان ترم علم و صنعت ۱۴۰۲)

$$F(x,y,z)=(y^{۲}+\cos xz\,,x^{۳}+e^{yz^{۳}},-e^{-xyz})$$

ادامه پاسخ) رویه $S_۱$ به صورت زیر می‌باشد که بردار قائم یکه آن به صورت $N_۱=k$ در نظر گرفته شد:



بنابراین در مجموع داریم (پس از دو بار استفاده از قضیه استوکس):

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\iint_{S_۱}(curl\ F).N_۱\,dS_۱$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\ F).N\,dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\ F).N_۱\,dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال و این نکته که انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن صفر است

۶- انتگرال $\iint_S curl\, F.\, NdS$ را محاسبه کنید که در آن سطح S قسمتی از کره

$$x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۲ = ۸$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد. (پایان ترم علم و صنعت ۱۴۰۲)

$$F(x,y,z) = (y^۲ + \cos xz\,, x^۳ + e^{yz^۳}, -e^{-xyz})$$

ادامه پاسخ) حال باید $curl\, F$ را محاسبه کنیم که به صورت زیر است:

$$curl\, F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^۲ + \cos xz & x^۳ + e^{yz^۳} & -e^{-xyz} \end{vmatrix}$$

حال چون $N_۱ = k$، ما فقط به مولفه سوم کرل نیاز داریم که برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin y + \sin x + y) = ۳x^۲ - ۲y$$

حال داریم:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS = \iint_{S_۱} (curl\, F).N_۱\, dS_۱ = \iint ۳x^۲ - ۲y\, dxdy$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS = \oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱} (curl\, F).N_۱\, dS_۱ = \oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱ = k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال و این نکته که انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن صفر است

۶- انتگرال $\iint_S curl\, F.NdS$ را محاسبه کنید که در آن سطح S قسمتی از کره

$$x^۲+y^۲+(z-۲)^۲=۸$$

است که بالای صفحه xy قرار دارد. (پایان ترم علم و صنعت ۱۴۰۲)

$$F(x,y,z)=(y^۲+\cos xz\,, x^۳+e^{yz^۳}, -e^{-xyz})$$

ادامه پاسخ)

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS=\iint_{S_۱}(curl\, F).N_۱\, dS_۱=\iint ۳x^۲-۲y\, dxdy$$

$$=۳\underbrace{\iint x^۲\, dx\, dy}_{I_۱}-۲\underbrace{\iint y\ dx\, dy}_{I_۲}$$

انتگرال $I_۲$ برابر صفر است چون انتگرال یک تابع فرد روی یک ناحیه متقارن است. برای حل انتگرال $I_۱$ از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$I_۱=\iint_{x^۲+y^۲\le ۴}x^۲\, dx\, dy=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}r^۲cos^۲\theta\ r\, dr\, d\theta=\left(\int_۰^{۲}r^۳\, dr\right)\left(\int_۰^{۲\pi}cos^۲\theta d\theta\right)$$

$$I_۱=\left(\frac{r^۴}{۴}\Bigg|_۰^۲\right)\left(\frac{۱}{۲}\theta+\frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\ \Bigg|_۰^{۲\pi}\right)=۴\pi\Longrightarrow\iint_S (curl\, F).N\, dS=۱۲\pi$$

راهنمای حل سوال

مرز رویه S که خمی مانند C است را مشخص می‌کنیم

استفاده از قضیه استوکس که طبق آن داریم:

$$\iint_S (curl\, F).N\, dS=\oint_C F.dr$$

و سپس استفاده مجدد از قضیه استوکس. در واقع خم C را می توانیم مرز رویه دیگری هم در نظر بگیریم (که ممکن است کار با آن رویه ساده تر باشد). آن رویه را با $S_۱$ نمایش دادیم و طبق قضیه استوکس داریم:

$$\iint_{S_۱}(curl\, F).N_۱\, dS_۱=\oint_C F.dr$$

جهت دهی مناسب به خم C جهت استفاده از قضیه استوکس

قائم یکه برای رویه $S_۱$ را به صورت $N_۱=k$ در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگرال دوگانه در مراحل پایانی حل سوال و این نکته که انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن صفر است

۷- میدان برداری $F: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه

$$F(x,y,z) = -y^۳\vec{i} + x^۳\vec{j} + z^۳\vec{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $z = x^۲ - y^۲$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید: (پایان ترم شریف ۱۴۰۲)

$$I = \int_C F.dr$$

پاسخ) ابتدا می‌خواهیم با استفاده از تعریف، حاصل این انتگرال را پیدا کنیم. پس ابتدا خم C را پارامتری می‌کنیم. با استفاده از رویه $x^۲ + y^۲ = ۱$، می توانیم $x = \cos t$ و $y = \sin t$ را در نظر بگیریم و سپس با استفاده از رویه $z = x^۲ - y^۲$ خواهیم داشت $z = cos^۲t - sin^۲t$. بنابراین اگر ضابطه خم را با $r(t)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$r(t) = (\cos t, \sin t, \cos ۲t)$$

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, -۲\sin ۲t)$$

$$F(r(t)) = (-sin^۳t, cos^۳t, cos^۳۲t)$$

راهنمای حل سوال

برای حل با تعریف، ابتدا باید خم C را پارامتری کنیم و سپس $\oint_C F.dr$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\oint_C F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\,dt$$

برای استفاده از قضیه استوکس، یکی از رویه‌هایی که مرز آن خم C است را انتخاب می‌کنیم. طبیعتا بخشی از دو رویه معرفی شده، دو تا از انتخاب‌های ما هستند که ما در این جا از بخشی از $z = x^۲ - y^۲$ استفاده کرده‌ایم که آن را S نامگذاری کرده‌ایم. حال طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\,dS$$

قائم یکه برای رویه S را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

تعریف تابع g مناسب و محاسبه NdS به صورت زیر:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

استفاده از مختصات قطبی در آخرین مرحله (در روش استفاده از استوکس)

۷- میدان برداری $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را با ضابطه

$$F(x,y,z) = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^2+y^2=1$ و $z=x^2-y^2$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید: (پایان ترم شریف ۱۴۰۲)

$$I = \int_C F.dr$$

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$I = \oint_C F.dr = \int_0^{2\pi} F\big(r(t)\big).r'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} F\big(r(t)\big).r'(t)\ dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} sin^4 t + cos^4 t - 2\sin 2t\ cos^3 2t\ dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} 1 - 2sin^2 t\ cos^2 t - 2\sin 2t\ cos^3 2t\ dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} 1 - \frac{1}{2} sin^2 2t - 2\sin 2t\ cos^3 2tdt$$

راهنمای حل سوال

برای حل با تعریف، ابتدا باید خم C را پارامتری کنیم و سپس $\oint_C F.dr$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\oint_C F.dr = \int F\big(r(t)\big).r'(t)\ dt$$

برای استفاده از قضیه استوکس، یکی از رویه‌هایی که مرز آن خم C است را انتخاب می‌کنیم. طبیعتا بخشی از دو رویه معرفی شده، دو تا از انتخاب‌های ما هستند که ما در این جا از بخشی از $z=x^2-y^2$ استفاده کرده‌ایم که آن را S نامگذاری کرده‌ایم. حال طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\, dS$$

قائم یکه برای رویه S را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

تعریف تابع g مناسب و محاسبه NdS به صورت زیر:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} dx\, dy$$

استفاده از مختصات قطبی در آخرین مرحله (در روش استفاده از استوکس)

۷- میدان برداری $F: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه

$$F(x,y,z) = -y^۳\vec{i} + x^۳\vec{j} + z^۳\vec{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $z = x^۲ - y^۲$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید: (پایان ترم شریف ۱۴۰۲)

$$I = \int_C F.dr$$

ادامه پاسخ)

$$I = \int_۰^{۲\pi} ۱ - \frac{۱}{۲} sin^۲ ۲t - ۲\sin ۲t \ cos^۳ ۲t dt$$

$$I = t - \frac{۱}{۴}t + \frac{\sin ۴t}{۱۶} + \frac{cos^۴ ۲t}{۴} \Bigg|_۰^{۲\pi}$$

$$I = \frac{۳\pi}{۲}$$

راهنمای حل سوال

برای حل با تعریف، ابتدا باید خم C را پارامتری کنیم و سپس $\oint_C F.dr$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\oint_C F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\ dt$$

برای استفاده از قضیه استوکس، یکی از رویه‌هایی که مرز آن خم C است را انتخاب می‌کنیم. طبیعتا بخشی از دو رویه معرفی شده، دو تا از انتخاب‌های ما هستند که ما در این جا از بخشی از $z = x^۲ - y^۲$ استفاده کرده‌ایم که آن را S نامگذاری کرده‌ایم. حال طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\, dS$$

قائم یکه برای رویه S را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

تعریف تابع g مناسب و محاسبه NdS به صورت زیر:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} dx\, dy$$

استفاده از مختصات قطبی در آخرین مرحله (در روش استفاده از استوکس)

۷- میدان برداری $F:\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه

$$F(x,y,z) = -y^۳\vec{i} + x^۳\vec{j} + z^۳\vec{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $z = x^۲ - y^۲$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید: (پایان ترم شریف ۱۴۰۲)

$$I = \int_C F.dr$$

ادامه پاسخ) حال می‌خواهیم از قضیه استوکس استفاده کنیم و حاصل را بیابیم. قسمتی از رویه $z = x^۲ - y^۲$ که توسط استوانه $x^۲ + y^۲ = ۱$ محدود شده است را S در نظر می‌گیریم (در واقع مرز S، C است). قائم یکه سطح S (N) را نیز به سمت بیرون در نظر می‌گیریم. حال S یک رویه هموار و C یک خم هموار بسته با جهت القایی از S است. میدان برداری F نیز هموار است. بنابراین شرایط قضیه استوکس برقرار است و طبق آن داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\, dS$$

حال تابع g را به صورت $g(x,y,z) = z - x^۲ + y^۲$ در نظر می‌گیریم.

راهنمای حل سوال

برای حل با تعریف، ابتدا باید خم C را پارامتری کنیم و سپس $\oint_C F.dr$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\oint_C F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\ dt$$

برای استفاده از قضیه استوکس، یکی از رویه‌هایی که مرز آن خم C است را انتخاب می‌کنیم. طبیعتا بخشی از دو رویه معرفی شده، دو تا از انتخاب‌های ما هستند که ما در این جا از بخشی از $z = x^۲ - y^۲$ استفاده کرده‌ایم که آن را S نامگذاری کرده‌ایم. حال طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\, dS$$

قائم یکه برای رویه S را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

تعریف تابع g مناسب و محاسبه NdS به صورت زیر:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

استفاده از مختصات قطبی در آخرین مرحله (در روش استفاده از استوکس)

۷- میدان برداری $F: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه

$$F(x,y,z) = -y^۳\vec{i} + x^۳\vec{j} + z^۳\vec{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $z = x^۲ - y^۲$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید: (پایان ترم شریف ۱۴۰۲)

$$I = \int_C F.dr$$

ادامه پاسخ) در این جا داریم:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, \qquad dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} dx\, dy$$

$$NdS = \frac{\nabla g}{|g_z|} dx\, dy = \frac{(-۲x, ۲y, ۱)}{۱} dx\, dy = (-۲x, ۲y, ۱) dx\, dy$$

حال در ادامه $curl\ F$ را محاسبه می‌کنیم.

راهنمای حل سوال

برای حل با تعریف، ابتدا باید خم C را پارامتری کنیم و سپس $\oint_C F.dr$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\oint_C F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\ dt$$

برای استفاده از قضیه استوکس، یکی از رویه‌هایی که مرز آن خم C است را انتخاب می‌کنیم. طبیعتا بخشی از دو رویه معرفی شده، دو تا از انتخاب‌های ما هستند که ما در این جا از بخشی از $z = x^۲ - y^۲$ استفاده کرده‌ایم که آن را S نامگذاری کرده‌ایم. حال طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\, dS$$

قائم یکه برای رویه S را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

تعریف تابع g مناسب و محاسبه NdS به صورت زیر:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} dx\, dy$$

استفاده از مختصات قطبی در آخرین مرحله (در روش استفاده از استوکس)

۷- میدان برداری $F:\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه

$$F(x,y,z) = -y^۳\vec{i} + x^۳\vec{j} + z^۳\vec{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $z = x^۲ - y^۲$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید: (پایان ترم شریف ۱۴۰۲)

$$I = \int_C F.dr$$

ادامه پاسخ)

$$curl\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^۳ & x^۳ & z^۳ \end{vmatrix} = (۰,۰,۳x^۲ + ۳y^۲)$$

حال داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\,dS = \iint ۳(x^۲+y^۲)\ dx\,dy = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۳r^۳\,dr\,d\theta$$

دقت داریم که چون S توسط استوانه محدود شده است، تصویر S روی صفحه xy، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ خواهد بود.

راهنمای حل سوال

برای حل با تعریف، ابتدا باید خم C را پارامتری کنیم و سپس $\oint_C F.dr$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\oint_C F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\ dt$$

برای استفاده از قضیه استوکس، یکی از رویه‌هایی که مرز آن خم C است را انتخاب می‌کنیم. طبیعتا بخشی از دو رویه معرفی شده، دو تا از انتخاب‌های ما هستند که ما در این جا از بخشی از $z = x^۲ - y^۲$ استفاده کرده‌ایم که آن را S نامگذاری کرده‌ایم. حال طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\,dS$$

قائم یکه برای رویه S را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

تعریف تابع g مناسب و محاسبه NdS به صورت زیر:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

استفاده از مختصات قطبی در آخرین مرحله (در روش استفاده از استوکس)

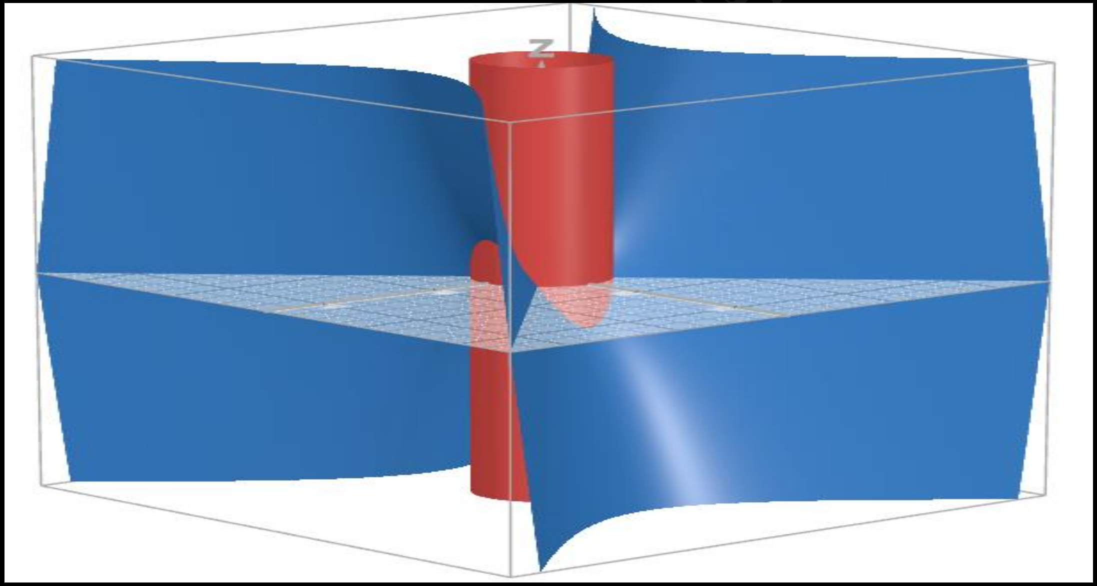
۷- میدان برداری $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را با ضابطه

$$F(x,y,z) = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^2+y^2=1$ و $z=x^2-y^2$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید: (پایان ترم شریف ۱۴۰۲)

$$I = \int_C F.dr$$

ادامه پاسخ)



راهنمای حل سوال

برای حل با تعریف، ابتدا باید خم C را پارامتری کنیم و سپس $\oint_C F.dr$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\oint_C F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\,dt$$

برای استفاده از قضیه استوکس، یکی از رویه‌هایی که مرز آن خم C است را انتخاب می‌کنیم. طبیعتا بخشی از دو رویه معرفی شده، دو تا از انتخاب‌های ما هستند که ما در این جا از بخشی از $z=x^2-y^2$ استفاده کرده‌ایم که آن را S نامگذاری کرده‌ایم. حال طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\,dS$$

قائم یکه برای رویه S را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

تعریف تابع g مناسب و محاسبه NdS به صورت زیر:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|},\ dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

استفاده از مختصات قطبی در آخرین مرحله (در روش استفاده از استوکس)

۷- میدان برداری $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را با ضابطه

$$F(x,y,z) = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

در نظر بگیرید. همچنین C را خمی در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه $x^2+y^2=1$ و $z=x^2-y^2$ حاصل می‌شود. اگر جهت C طوری باشد که تصویر آن در صفحه xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال زیر را یک بار با استفاده از تعریف و بار دیگر به کمک قضیه استوکس محاسبه کنید: (پایان ترم شریف ۱۴۰۲)

$$I = \int_C F.dr$$

ادامه پاسخ) پس:

$$\oint_C F.dr = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^3\,dr\,d\theta = 3\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

$$= 3\left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1\right)\left(\theta\Bigg|_0^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

راهنمای حل سوال

برای حل با تعریف، ابتدا باید خم C را پارامتری کنیم و سپس $\oint_C F.dr$ را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\oint_C F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\,dt$$

برای استفاده از قضیه استوکس، یکی از رویه‌هایی که مرز آن خم C است را انتخاب می‌کنیم. طبیعتا بخشی از دو رویه معرفی شده، دو تا از انتخاب‌های ما هستند که ما در این جا از بخشی از $z=x^2-y^2$ استفاده کرده‌ایم که آن را S نامگذاری کرده‌ایم. حال طبق قضیه استوکس داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (curl\ F).N\,dS$$

قائم یکه برای رویه S را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم

تعریف تابع g مناسب و محاسبه NdS به صورت زیر:

$$N = \frac{\nabla g}{|\nabla g|},\ dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

استفاده از مختصات قطبی در آخرین مرحله (در روش استفاده از استوکس)