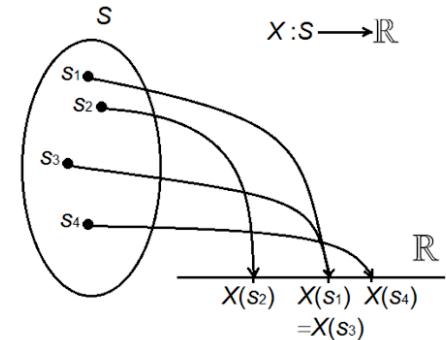
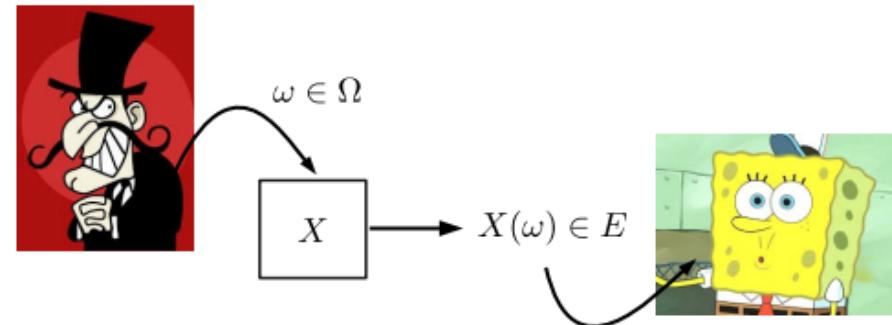


آمار و احتمالات مهندسی

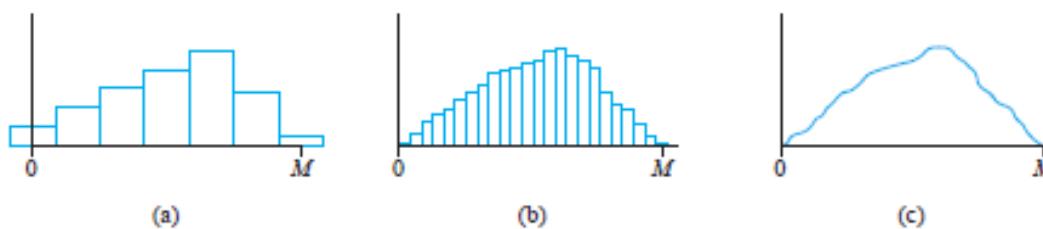
فصل: متغیرهای تصادفی پیوسته
مدرس: مشکانی فراهانی



متغیر تصادفی پیوسته

۹

تابع چگالی احتمال



متغیر تصادفی پیوسته و توزیع احتمالات آن

- **تعریف:** متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته گویند.

- **تابع چگالی احتمال:**
- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع $f(x)$ را تابع چگالی احتمال X می‌نامند هرگاه :

$$\begin{aligned} 1) \quad f_X(x) &> 0, \quad \forall x \in R_X \\ 2) \quad \int_{R_X} f_X(x) dx &= 1 \end{aligned}$$

مثال ۱ - الف

- مقدار ثابت c را چنان تعیین کنید که تابع زیر یک تابع چگالی احتمال باشد.

$$f(x) = cx(1-x), \quad 0 < x < 1$$

۱) $c > 0$

۲) $\int_{R_X} f_X(x) dx = \int_0^1 cx(1-x) dx$

$$= c \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$= c \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= c \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{c}{6}$$

$$\Rightarrow c = 6$$

• راه حل

مثال ١ - ب ، ج

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 4$$

Solution :

١) $c > 0$

$$\begin{aligned} ٢) \quad \int_{R_X} f_X(x) dx &= \int_0^4 \frac{c}{\sqrt{x}} dx \\ &= c \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= c \left[2\sqrt{x} \right]_0^4 \\ &= c \left[4 - 0 \right] = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = ce^{-rx}, \quad x > 0$$

Solution :

١) $c > 0$

$$\begin{aligned} ٢) \quad \int_{R_X} f_X(x) dx &= \int_0^\infty ce^{-rx} dx \\ &= c \left[\frac{e^{-rx}}{-r} \right]_0^\infty \\ &= c \left[0 - \frac{1}{-r} \right] = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = r$$

مثال ١ - هـ، و

$$f(x) = c|x|, \quad 0 < x < 1$$

$$= \begin{cases} c(1-x), & 0 < x \leq 1 \\ c(x-1), & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Solution :

١) $c > 0$

$$\text{٢) } \int_{R_X} f_X(x) dx = \int_0^1 c(1-x) dx + \int_1^2 c(x-1) dx$$

$$= c \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + c \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$$

$$= c \left[1 - \frac{1}{2} \right] + c \left[2 - \frac{-1}{2} \right] = 1$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$$f(x) = \frac{c}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Solution :

١) $c > 0$

$$\text{٢) } \int_{R_X} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2} dx$$

$$= c \left[\arctan(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= c \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$$

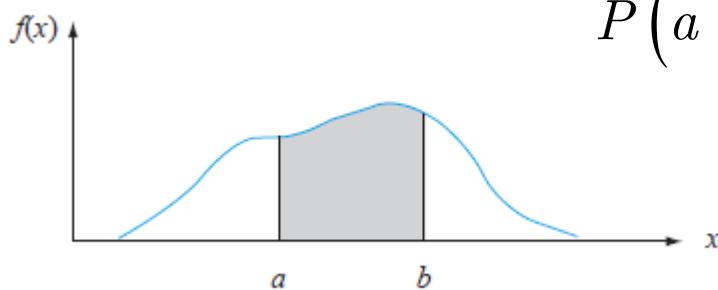
محاسبه‌ی احتمال (با استفاده از تابع چگالی احتمال)

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، بنا بر تعریف، احتمال هر پیشامد $A \subseteq R_X$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(A) = \int_A f(x) dx$$

- برای مثال اگر $A = \{a < X < b\}$ داریم:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$



چند نکته

- در توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی گسته، $f(x)$ نمایان گر احتمال در نقطه x است و احتمال فقط در نقاط تکیه‌گاه مثبت و در سایر نقاط برابر صفر است؛ در حالی که در توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی پیوسته، $f(x)$ نشان‌دهنده‌ی هیچ احتمالی نیست و احتمال قطعه‌ای از مساحت واقع در زیر نمودار تابع $f(x)$ است.
- احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته دقیقاً مقدار معینی a را بگیرد برابر صفر است:

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x) dx = 0.$$

- افزودن یا کاستن یک یا چند نقطه‌ی شمارا در پیشامدهای مربوط به متغیرهای تصادفی پیوسته هیچ تأثیری در مقدار احتمال آنها نخواهد داشت:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

مثال ۲

- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی X به صورت زیر است؛ مطلوبست:
ب- محاسبه‌ی احتمال‌های زیر
الف- تعیین مقدار k

$$f(x) = k \frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$$1) \quad k > 0.$$

$$2) \int_{\beta}^{\infty} k \frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = k \beta^\alpha \int_{\beta}^{\infty} x^{-(\alpha+1)} dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{k \beta^\alpha}{-\alpha x^\alpha} \right]_{\beta}^{\infty} \\ &= \frac{k \beta^\alpha}{\alpha \beta^\alpha} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \alpha$$

راه حل

$$P(X = \beta) = 0.$$

$$\begin{aligned} P(X > \beta) &= \int_{\beta}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{\beta}^{\infty} \alpha \frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx \\ &= \left[-\frac{\beta^\alpha}{x^\alpha} \right]_{\beta}^{\infty} \\ &= \left(\frac{1}{\beta} \right)^\alpha \end{aligned}$$

مثال ۳

- میزان تحمل خاک زیر پایه‌ی یک ستون بین ۶ تا ۱۵ تن بر متر مربع تغییر می‌کند. تابع چگالی احتمال آن در این تکیه‌گاه به صورت زیر است. اگر این ستون برای تحمل بار $7/5$ تن بر متر مربع طراحی شود، احتمال شکستن پایه‌ی ستون چه قدر است؟

$$f_Y(y) = \frac{1}{2/7} \left(1 - \frac{y}{15}\right), \quad y \in [6, 15]$$

راه حل

$$\begin{aligned} P(Y > 7/5) &= \int_{7/5}^{15} \frac{1}{2/7} \left(1 - \frac{y}{15}\right) dy \\ &= \frac{1}{2/7} \left[y - \frac{y^2}{30} \right]_{7/5}^{15} \\ &= \frac{1}{2/7} \left[(15 - 7/5) - (7/5 - 1/875) \right] \end{aligned}$$

یادآوری

- در فضای احتمال **گستته**، احتمال وقوع یک پیشامد را به صورت زیر حساب می‌کردیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

- در فضای احتمال **پیوسته**، احتمال وقوع یک پیشامد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

مثال ۴

- یک عدد تصادفی از بازه‌ی $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که سینوس آن از کسینوس آن بیشتر باشد، چه قدر است؟

• راه حل:

- X : عدد انتخاب شده

$$\begin{aligned}
 P(\sin X > \cos X) &= P(\tan X > 1) \\
 &= P\left(X > \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

مثال ۵

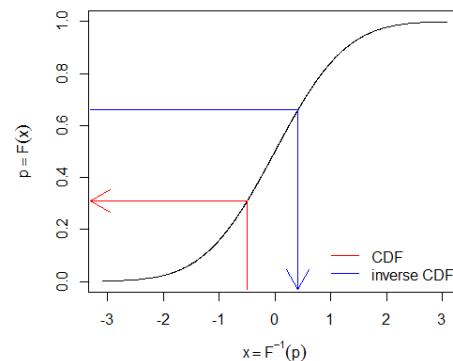
- فرض کنید X یک نقطه‌ی تصادفی از بازه‌ی $(3, 0)$ باشد. احتمال پیشامد $P(X - 5X + 6 > 0)$ چه قدر است؟

راه حل:

$$\begin{aligned}
 P(X - 5X + 6 > 0) &= P((X - 2)(X - 3) > 0) \\
 &= P(X < 2, X < 3) + P(X > 2, X > 3) \\
 &= P(X < 2) + P(X > 3) \\
 &= \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

تابع توزیع تجمعی

برای متغیرهای تصادفی پیوسته



تابع توزیع تجمعی

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

مثال ۶

- مقاومت جانبی اسکلت یک ساختمان کوچک R متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است. تابع توزیع $F_R(r)$ را حساب کنید.

$$f_R(r) = \frac{3}{500} (r - 10)(20 - r), \quad r \in [10, 20]$$

راه حل

$$\begin{aligned} F_R(t) &= \int_{10}^t \frac{3}{500} (r - 10)(20 - r) dr \\ &= \frac{3}{500} \int_{10}^t (-r^2 + 30r - 200) dr \\ &= \frac{3}{500} \left[\frac{-r^3}{3} + 15r^2 - 200r \right]_{10}^t \\ &= \frac{3}{500} \left[\frac{-t^3}{3} + 15t^2 - 200t + \frac{2500}{3} \right] \end{aligned}$$

$$F_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 10 \\ \frac{3}{500} \left[\frac{-t^3}{3} + 15t^2 - 200t + \frac{2500}{3} \right], & 10 \leq t < 20 \\ 1, & t \geq 20 \end{cases}$$

مثال ۷-الف

- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی X به صورت زیر است؛ تابع توزیع تجمعی X را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right), \quad x > 0.$$

راه حل

$$\begin{aligned}
 F_X(t) &= \int_0^t \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^t \\
 &= e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow F_X(t) &= \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}, & t \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

مثال ٧-ب

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |\mathbf{1} - x|, & 0 < x < 2 \\
 &= \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \leq 1 \\ x - 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

• راه حل

$$\begin{aligned}
 F_X(t) &= \int_0^t (1-x) dx \\
 &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^t \\
 &= t - \frac{t^2}{2}
 \end{aligned}$$

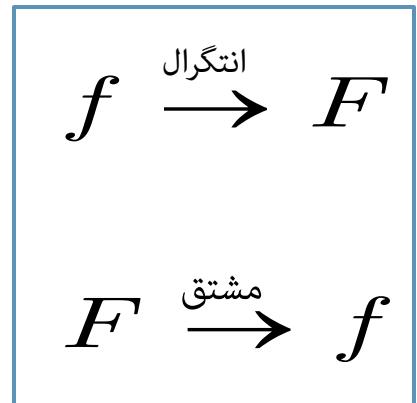
$$\begin{aligned}
 F_X(t) &= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^t (x-1) dx \\
 &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^t \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t - \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{t^2}{2} - t + 1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

نکته

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f_x(\cdot)$ و تابع توزیع تجمعی $F_X(\cdot)$ باشد، داریم:

$$F'_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$$



مثال ۸

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X به صورت زیر است. تابع چگالی احتمال X را به دست آورید.

$$F(x) = 1 - e^{-3x}, \quad x > 0$$

راه حل

$$f(x) = F'(x) = 3e^{-3x}$$

$$F(x) = 1 - \frac{9}{x^3}, \quad x > 3$$

راه حل

$$f(x) = F'(x) = 2 \times 9 x^{-4}$$

مثال ۹

- نقطه‌ای به تصادف از داخل دایره‌ای به شعاع r انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را برابر فاصله‌ی نقطه‌ی انتخابی از مرکز دایره در نظر می‌گیریم.
مطلوب است:

ب- تعیین تابع چگالی احتمال X

الف- تعیین تابع توزیع تجمعی X

ج- محاسبه‌ی احتمال زیر

$$a) \quad F(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \left(\frac{x}{r}\right)^2 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{x}{r}\right)^2, & 0 \leq x < r \\ 1, & x \geq r \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = F'(x) = \frac{2x}{r^2}, \quad 0 < x < r$$

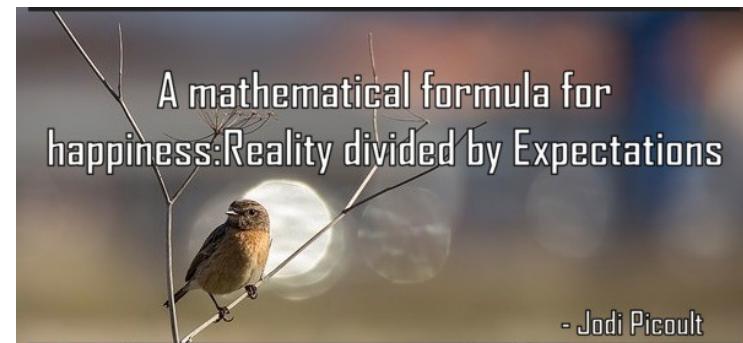
$$c) \quad P\left(\frac{r}{3} < X < \frac{r}{2}\right) = F\left(\frac{r}{2}\right) - F\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$$

نکته

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ باشد، احتمال هر پیشامد $A \subseteq R_X$ با استفاده از روابط بیان شده در تعریف تابع توزیع تجمعی به دست می‌آید.
- مراجعه شود به فایل:
آمار مهندسی – فصل ۲ و ۳ – متغیر تصادفی گسته – سلайд ۲۲

امید ریاضی

متغیرهای تصادفی پیوسته



امید ریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، امید ریاضی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(X) = \int_{R_X} x f(x) dx$$

مثال ۱۰

- قطر سوراخ‌های ایجاد شده به وسیله‌ی متله‌ای بر حسب میلی‌متر دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = 10 e^{-10(x-5)}, \quad x > 5$$

اگر چه اندازه‌ی قطر مورد نظر ۵ میلی‌متر است، لرزش‌ها، سایش ابزار و سایر عوامل غیر قابل کنترل باعث تولید قطرهایی با اندازه‌ی بزرگ‌تر از ۵ میلی‌متر می‌شوند. متوسط قطر سوراخ‌های ایجاد شده را به دست آورید.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{R_X} x f(x) dx \\ &= \int_5^\infty 10 x e^{-10(x-5)} dx \\ &= \left[-e^{-10(x-5)} \left(x + \frac{1}{10} \right) \right]_5^\infty \\ &= 5 / 10 \end{aligned}$$

مشتق	انتگرال
<i>derivative</i>	<i>Integral</i>
x	$10 e^{-10(x-5)}$
1	$-e^{-10(x-5)}$
.	$\frac{1}{10} e^{-10(x-5)}$

مثال ۱۱ - الف

- مدت زمان استفاده‌ی خانواده‌ای از جاروبرقی در طول سال، در واحد ساعت، متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1 \\ b(2-x), & 1 \leq x < 2 \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

الف-اگر $E(X)=1$ باشد،

مقادیر a و b را به دست آورید.

$$\int_{R_X} f(x) dx = 1 \quad *$$

$$\int_0^1 ax dx + \int_1^2 b(2-x) dx$$

$$= a \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + b \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \frac{a}{2} + b \left(2 - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1$$

$$E(X) = \int_{R_X} xf(x) dx = 1 \quad **$$

$$\int_0^1 x \cdot ax dx + \int_1^2 x \cdot b(2-x) dx$$

$$= a \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + b \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2$$

$$= \frac{a}{3} + b \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} = 1$$

مثال ۱۱ - ب

$$\begin{cases} 1) \quad a + b = 2 \\ 2) \quad a + 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \quad b = 1$$

ب- اگر $X > \frac{1}{2}$ باشد، احتمال این که X از $\frac{3}{2}$ کمتر باشد، چه قدر است؟

$$P\left(X < \frac{3}{2} \mid X > \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X < \frac{3}{2}, X > \frac{1}{2}\right)}{P\left(X > \frac{1}{2}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)}{P\left(X > \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2-x) \, dx}{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2-x) \, dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left[\frac{9}{8}\right] + \left[\frac{3}{8}\right]}{\left[\frac{9}{8}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]} = \frac{6}{7}$$

مثال ۱۱ - ج

• ج- تابع توزيع تجمعی X را به دست آورید.

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_0^t x \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^t \\ &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_0^t x \, dx + \int_t^2 (2-x) \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^t + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_t^2 \\ &= \frac{1}{2} + 2t - \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ 2t - \frac{t^2}{2} - 1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

یک ویژگی خاص از امید ریاضی

- در تعریف امید ریاضی داشتیم: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، امید ریاضی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(X) = \int_{R_X} x f(x) dx$$

- حال اگر بخواهیم امید ریاضی عدد ثابت c را حساب کنیم، با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم:

$$E(c) = \int_{R_X} c f(x) dx = c \int_{R_X} f(x) dx = c$$

به عنوان مثال:

$$E(5) = 5$$

$$E(-11) = -11$$

$$E(\circ) = \circ$$

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی پیوسته

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، امید ریاضی $(g(x))$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[g(X)] = \int_{R_X} g(x) f(x) dx$$

مثال ۱۲

- فرض کنید طول کابل‌های رایانه بر حسب میلی‌متر دارای تابع چگالی زیر باشد؛ امید ریاضی $(X - ۱۲۰۵)$ را محاسبه کنید.

$$f(x) = 0 / 1, \quad 1200 < x < 1210$$

راه حل

$$\begin{aligned} E[(X - 1205)^2] &= \int_{1200}^{1210} (X - 1205)^2 \times \frac{1}{10} dx \\ &= \frac{1}{10} \left[\frac{U^3}{3} \right]_{-5}^{25} \\ &= \frac{250}{3} \end{aligned}$$

ویژگی‌های خاص از امید ریاضی

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، امید ریاضی تابع cX ، که در آن c یک عدد ثابت است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(cX) = \int_{R_X} c x f(x) dx = c \int_{R_X} x f(x) dx = c E(X)$$

- به عنوان مثال:

$$E(2X) = 2E(X) \quad E(-5Y) = -5E(Y)$$

ویژگی‌های خاص از امید ریاضی

- حال اگر بخواهیم امید ریاضی تابع $a g(X) \pm b h(X)$ را حساب کنیم، با استفاده از رابطه‌ی صفحه‌ی قبل داریم:

$$\begin{aligned} E[a g(X) \pm b h(X)] &= \int_{R_X} [a g(X) \pm b h(X)] f(x) dx \\ &= a \int_{R_X} g(x) f(x) dx \pm b \int_{R_X} h(x) f(x) dx \\ &= a E[g(X)] \pm b E[h(X)] \end{aligned}$$

• به عنوان مثال:

$$E(X^2 - \ln X) = E(X^2) - E(\ln X)$$

$$E(-2X + 5X^2 - 1) = -2E(X) + 5E(X^2) - 1$$

واریانس و انحراف معيار

برای متغیرهای تصادفی پیوسته



واریانس و انحراف معیار

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با میانگین $E(X)$ یا μ باشد، آنگاه واریانس X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

- اثبات: در فایل متغیرهای گستته آورده شده است.

$$E(X) = \int_{R_X} x f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{R_X} x^2 f(x) dx$$

- انحراف معیار: جذر واریانس را انحراف معیار نامیده و آن را با σ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۳

- مدت زمان لازم برای ارائه یک خدمت بانکی به یک مشتری متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است؛ واریانس این توزیع را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

راه حل

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx & E[X^2] &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 & &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 & Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \frac{8}{4} & &= 2 & &= 2 - \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

مثال ۱۴

- فرض کنید اندازه‌ی ذرات آلودگی بر حسب میکرومتر به صورت زیر مدل‌بندی شود. انحراف معیار X را تعیین کنید.

$$f(x) = 2x^{-3}, \quad x > 1$$

راه حل

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_1^{\infty} x \cdot 2x^{-3} dx & E[X^2] &= \int_1^{\infty} x^2 \cdot 2x^{-3} dx \\ &= \left[-\frac{2}{x} \right]_1^{\infty} & &= 2 \left[\ln(x) \right]_1^{\infty} \\ &= 2 & &= \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \infty - (2)^2 = \infty \end{aligned}$$

قضیه

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، در این صورت برای ثابت‌های a و b داریم:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X), \quad \sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$$

• اثبات:

$$\begin{aligned}
 Var(aX + b) &= E[(aX + b) - E(aX + b)]^2 \\
 &= E[(aX + b) - aE(X) - E(b)]^2 \\
 &= E[(aX - aE(X)) - (b - b)]^2 \\
 &= E[a(X - E(X))]^2 \\
 &= a^2 E[X - E(X)]^2 \\
 &= a^2 Var(X)
 \end{aligned}
 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$$

خواص امید ریاضی و واریانس (خلاصه - متغیرهای گستته و پیوسته)

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی و a و b اعدادی ثابت باشند، آن‌گاه

$$* E(a) = a$$

$$\bullet Var(a) = 0.$$

$$* E(aX) = a E(X)$$

$$\bullet Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$* E[ag(X)] = a E[g(X)]$$

$$\bullet Var[ag(X)] = a^2 Var[g(X)]$$

$$* E[ag(X) \pm b] = a E[g(X)] \pm b$$

$$\bullet Var[ag(X) \pm b] = a^2 Var[g(X)]$$

$$* E[ag_1(X) \pm bg_2(X)] = a E[g_1(X)] \pm b E[g_2(X)]$$

$$\bullet Var[ag(X) \pm bg(X)] = a^2 Var[g(X)] + b^2 Var[g(X)]$$

مثال ۱۵

- مقدار تقاضای هفتگی برای نوشابه‌ای معین (بر حسب هزار لیتر) در فروشگاهی زنجیره‌ای متغیر تصادفی پیوسته‌ی $g(X) = X^3 + X - 2$ است، که در آن X دارای تابع چگالی زیر است. مقدار مورد انتظار تقاضای هفتگی این نوع نوشابه را پیدا کنید.

$$f(x) = 2(x-1), \quad 1 < x < 2$$

راه حل

$$E[X^3 + X - 2] = E(X^3) + E(X) - 2 = \frac{17}{6} + \frac{5}{3} - 2 = 2 / 5$$

$$E(X^3) = \int_1^2 x^3 \times 2(x-1) dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{6}$$

$$E(X) = \int_1^2 x \times 2(x-1) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{5}{3}$$