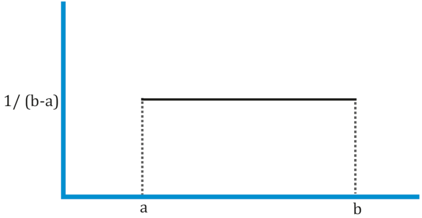
توزیع‌های شناخته شده‌ی پیوسته
-آمار و احتمالات مهندسی-

مدرس: مشکانی فراهانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۲۳ شهریور ۱۴۰۳

توزیع یکنواخت پیوسته



توزیع یکنواخت پیوسته

ساده‌ترین توزیع در بین توزیع‌های احتمالی پیوسته که شبیه به همتای گسسته‌ی آن است.

متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله‌ی $(a\ ,\ b)$ است، هرگاه دارای تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x) = \frac{۱}{b-a}, \qquad a < x < b \tag{۱}$$

نمادی که برای توزیع یکنواخت پیوسته استفاده می‌شود: $X \sim U(a\ ,\ b)$

میانگین و واریانس توزیع یکنواخت پیوسته عبارت است از:

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{۲} \qquad\qquad \sigma^۲ = Var(X) = \frac{(b-a)^۲}{۱۲}$$

مثال ۱

مدت زمانی که طول می‌کشد تا شخصی فاصله‌ی بین خانه تا ایستگاه مترو را پیاده طی کند، دارای توزیع یکنواخت بین ۱۵ تا ۲۰ دقیقه است. اگر شخصی ساعت ۷:۳۰ از منزل خارج شود، احتمال این‌که او سوار قطاری شود که ساعت ۷:۴۸ به ایستگاه می‌رسد.

راه‌حل:

X: زمان طی کردن فاصله‌ی خانه تا مترو $\qquad X \sim U(۱۵, ۲۰)$

$$P(X < ۱۸) = \int_{۱۵}^{۱۸} \frac{۱}{۲۰ - ۱۵} dx = \frac{۳}{۵}$$

توزیع‌های
نمایی و گاما و کای–دو

توزیع نمایی

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر β است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{۱}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, \qquad x > ۰, \quad \beta > ۰$$

- این توزیع را با نماد $X \sim Exp(\beta)$ نمایش می‌دهیم.

- توزیع نمایی مدت زمان لازم تا اولین رخداد یا زمان بین دو رخداد متوالی را می‌تواند محاسبه نماید.

- از جمله کاربردهای توزیع نمایی عبارتند از:
  - خطوط انتظار یا صف‌ها
  - زمان ورود به عوارضی جاده‌ها
  - زمان خرابی قطعات با نرخ خرابی ثابت
  - زمان متلاشی شدن یک ذره‌ی رادیواکتیو
  - زمان ورود یک آمبولانس به صحنه‌ی تصادف

توزیع نمایی

- پارامتر β در توزیع نمایی متوسط زمان لازم برای وقوع اولین رخداد یا بین دو رخداد متوالی تعریف می‌شود.

- میانگین و واریانس توزیع نمایی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(X) = \beta \qquad\qquad \sigma^۲ = \beta^۲$$

مثال ۲

مدت زمان لازم برای تعمیر یک اتومبیل در یک مرکز خدمات اتومبیل دارای توزیع نمایی با پارامتر ۳ ساعت است. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه مدت زمان تعمیر بیش از ۳ ساعت به طول انجامد.

مثال ۳

مدت زمانی که یک ساعت بدون وقفه کار می‌کند، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر ۵۰ روز است. احتمال اینکه ساعتی کمتر از ۲۰ روز بدون وقفه کار کند را بیابید.

مثال ۴

فرض کنید متغیر تصادفی X نشانگر طول عمر نوعی لاستیک بر حسب ساعت باشد که دارای توزیع نمایی با میانگین ۵۰۰ ساعت است. اگر بدانیم که طول عمر یک لاستیک از این نوع از ۷۰۰ ساعت کمتر بوده است، احتمال اینکه طول عمر آن از ۳۰۰ ساعت بیشتر باشد را بیابید.

راه‌حل:

$$\begin{aligned} P(X > ۳۰۰ | X < ۷۰۰) &= \frac{P(X > ۳۰۰, X < ۷۰۰)}{P(X < ۷۰۰)} \\ &= \frac{P(۳۰۰ < X < ۷۰۰)}{P(X < ۷۰۰)} \\ &= \frac{\int_{۳۰۰}^{۷۰۰} \frac{۱}{۵۰۰} e^{-\frac{x}{۵۰۰}} dx}{\int_{۰}^{۷۰۰} \frac{۱}{۵۰۰} e^{-\frac{x}{۵۰۰}} dx} \\ &= \frac{e^{-\frac{۳}{۵}} - e^{-\frac{۷}{۵}}}{۱ - e^{-\frac{۷}{۵}}} \end{aligned}$$

رابطه‌ی توزیع نمایی و پواسون

قضیه: اگر X نشان‌دهنده‌ی مدت زمان طی شده تا وقوع اولین رخداد در یک آزمایش پواسون با پارامتر λ باشد، آنگاه X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ است.

اثبات:
فرض کنید t یک عدد حقیقی مثبت و متغیر تصادفی N نشان‌دهنده‌ی تعداد رخدادها در زمان $[۰, t]$ باشد. زمان اولین رخداد فقط در صورتی بعد از زمان t است که در فاصله‌ی $[۰, t]$ هیچ رخدادی روی ندهد. پس $P(X > t) = P(N = ۰)$.

چون $N \sim P(\lambda t)$، پس $P(N = ۰) = e^{-\lambda t}$. در نتیجه

$$F_X(t) = P(X \leq t) = ۱ - P(X > t) = ۱ - e^{-\lambda t}, \qquad t > ۰$$

$$\Rightarrow \qquad f_X(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t > ۰$$

رابطه‌ی توزیع نمایی و پواسون

در صورتی که تعداد اتفاقات در واحد زمان دارای توزیع پواسون با میانگین λ اتفاق باشد. آن‌گاه، متغیر تصادفی $X \geq 0$ زمان بین دو اتفاق متوالی یا زمان لازم برای اولین اتفاق دارای توزیع نمایی با میانگین زمان $\frac{1}{\lambda}$ است.

$$X \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{\lambda}\right)$$

مثال ۵

اگر تعداد رانندگان با سرعت غیرمجاز که یک واحد رادار در مکان معینی از جاده‌ای در یک ساعت ثبت می‌کند، متغیری پواسون با $\lambda = ۸$ باشد، احتمال زمان انتظار کمتر از ۱۰ دقیقه بین مشاهدات متوالی رانندگان با سرعت غیرمجاز چه‌قدر است؟

راه‌حل:

$$\begin{aligned} P\left(\text{زمان انتظار} < ۱۰ \text{ دقیقه}\right) &= P\left(X < \frac{۱}{۶} \text{ ساعت}\right) \\ &= \int_{۰}^{\frac{۱}{۶}} ۸e^{-۸x}dx \\ &= -e^{-۸x}\Big]_{۰}^{\frac{۱}{۶}} \\ &= ۱ - e^{-\frac{۴}{۳}} \end{aligned}$$

مثال ۶

به طور متوسط تعداد ۵ تلفن در یک ساعت به تلفن‌خانه‌ی یک شرکت زده می‌شود. مطلوب است احتمال این‌که

الف- در یک ساعت حداقل ۲ تلفن زده شود.

ب- تلفن بعدی حداقل بعد از ۱۵ دقیقه زده شود.

مثال ۷

فاصله بین دست‌اندازهای بزرگ در یک بزرگراه از توزیع نمایی با میانگین ۵ مایل پیروی می کند.
الف- احتمال عدم وجود دست‌اندازهای بزرگ در امتداد ۱۰ مایلی بزرگراه چه‌قدر است؟
ب- احتمال اینکه دو دست‌انداز بزرگ در یک فاصله‌ی ۱۰ مایلی بزرگراه وجود داشته باشد، چه‌قدر است؟
ج- انحراف استاندارد فاصله بین دست‌اندازهای بزرگ چه‌قدر است؟

خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی

در بین توزیع‌های پیوسته فقط توزیع نمایی دارای این خاصیت است:

$$P\left(X > a+b|X > a\right) = P\left(X > b\right), \qquad \forall a, b > ۰$$

اگر X طول عمر نوعی ابزار باشد، طبق رابطه‌ی فوق عمر ابزار با زمان کارکرد آن ارتباطی ندارد.

احتمال این‌که ابزار نویی بیش از b سال کار کند برابر است با احتمال این‌که ابزار کهنه‌ای که مثلاً بیش از a سال کار کرده، حداقل b سالِ دیگر کار کند.

به عبارت دیگر، احتمال این‌که این ابزار b سال آینده از کار باز بماند، به مدت زمانی که تا کنون کار کرده بستگی ندارد.

توزیع گاما

یک متغیر تصادفی نمایی زمان را تا اولین رخداد در یک فرآیند پواسون توصیف می‌کند.
تعمیم توزیع نمایی به صورت زمان تا وقتی است که r رخداد در یک فرآیند پواسون روی دهد.
بدین صورت که اگر اتفاقات در طول زمان رخ دهند، آن‌گاه مدت زمانی که فرد بایستی منتظر بماند تا r اتفاق در یک فرایند پواسون رخ دهد، دارای توزیع گاما است.

تعریف: متغیر تصادفی X که نشان‌دهنده‌ی زمان لازم تا رخداد r اتفاق در یک فرآیند پواسون با میانگین λ است، دارای توزیع گاما با پارامترهای (r, β) است هرگاه تابع چگالی احتمال X به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^r \Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \qquad x > 0; \quad r, \beta > 0$$

$$E(X) = r\beta \qquad\qquad \sigma^2 = r\beta^2$$

نکته: اگر در توزیع گاما $r = 1$ قرار دهیم، توزیع نمایی به دست می‌آید.

تابع گاما

تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(n) = \int_{۰}^{\infty} x^{n-۱} e^{-x} dx$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء با قرار دادن $u = x^{n-۱}$ و $dv = e^{-x}dx$ به دست می‌آوریم:

$$\Gamma(n) = (n-۱)\int_{۰}^{\infty} x^{n-۲} e^{-x} dx = (n-۱)\Gamma(n-۱)$$

و به همین ترتیب با محاسبه‌ی انتگرال‌های جزءبه‌جزء متوالی خواهیم داشت:

$$\Gamma(n) = (n-۱)(n-۲)(n-۳)\cdots\Gamma(۱) = (n-۱)!$$

مثال ۸

در بیمارستانی نوزادان با نرخ ۱۲ نفر در روز متولد می‌شوند. احتمال این‌که حداقل ۷ ساعت طول بکشد تا ۳ نوزاد متولد شوند، چه‌قدر است؟

راه‌حل:

X: زمان لازم تا تولد ۳ نوزاد $\qquad X \sim G(r=۳, \beta=\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۲})$

$$
\begin{aligned}
P\left(X > ۷ \text{ ساعت}\right) &= P\left(X > \frac{۷}{۲۴} \text{ روز}\right) \\
&= \int_{\frac{۷}{۲۴}}^{\infty} \frac{۱۲^۳}{\Gamma(۳)} x^۲ e^{-۱۲x} dx \\
&= \frac{۱}{\Gamma(۳)} \times e^{-۱۲x}\left[-۱۲^۲x^۲ - ۲۴x - ۲\right]_{\frac{۷}{۲۴}}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-\frac{۷}{۲}}}{۲}\left[\frac{۴۹}{۴} + ۷ + ۲\right] = ۰/۳۲
\end{aligned}
$$

مثال ۹

فرض کنید به طور متوسط در هر ثانیه از یک ماده‌ی رادیواکتیو چهار ذره‌ی بتا منتشر می‌شود. احتمال این‌که بین انتشار ذره‌ی بتا سوم و پنجم حداقل دو ثانیه زمان لازم باشد، چه‌قدر است؟

مثال ۱۰

یک سایت فروش اینترنتی بلیط، در هر نیم ساعت ۴ بلیط قطار صادر می‌کند.
الف- احتمال این‌که بین صدور هشتمین و دهمین بلیط قطار، کمتر از ۲۰ دقیقه زمان بگذرد، چه‌قدر است؟
ب- احتمال این‌که در ۷۵ دقیقه‌ی آینده بیشتر از هشت نفر از این سایت بلیط قطار تهیه کنند را بیابید.

توزیع کای-دو

یک حالت خاص و مهم از توزیع گاما با قرار دادن $r = \frac{\nu}{۲}$ و $\beta = ۲$ به دست می‌آید. توزیع حاصل را توزیع کای-دو می‌نامند.

متغیر تصادفی X دارای توزیع کای-دو با ν درجه‌ی آزادی است، اگر تابع چگالی آن به صورت

$$f(x) = \frac{۱}{۲^{\frac{\nu}{۲}}\Gamma(\frac{\nu}{۲})} x^{\frac{\nu}{۲}-۱} e^{-\frac{x}{۲}}, \qquad x > ۰$$

باشد. ν یک عدد صحیح مثبت است.

میانگین و واریانس توزیع کای-دو برابر است با:

$$\mu = \nu \qquad\qquad \sigma^۲ = ۲\nu$$

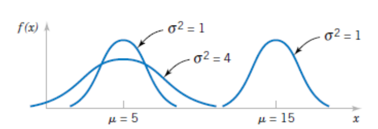
توزیع نرمال

- متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال است، اگر تابع چگالی آن به فرم زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

- در این تابع $\mu = E(X)$ و $\sigma^2 = Var(X)$ است: $\sigma^2 > 0 \quad , \quad -\infty < \mu < \infty$

- در چنین حالتی می‌گویند که متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است و آن را با این نماد نمایش می‌دهیم: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



برخی ویژگی‌های توزیع

◇ نمودار تابع چگالی نرمال زنگی شکل و حول μ متقارن است.

◇ با افزایش σ^2 پراکندگی توزیع افزایش یافته (نمودار پهن‌تر) و با افزایش μ منحنی به سمت راست انتقال پیدا می‌کند.

◇ منحنی تنها دارای یک ماکسیمم در نقطه $x = \mu$ است.

◇ منحنی نسبت به خط $x = \mu$ متقارن است؛ یعنی $f(\mu + a) = f(\mu - a)$. پس
$P(X < -a) = P(X > a)$

◇ در توزیع نرمال میانگین، میانه و مد با هم برابر هستند.

◇ سطح محصور بین منحنی و محور طول‌ها برابر یک واحد است.

توزیع نرمالی که میانگین آن صفر $\mu = ۰$ و واریانس آن یک $\sigma^۲ = ۱$ باشد را توزیع نرمال استاندارد می‌نامند.

متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد را با Z نمایش می‌دهند: $Z \sim N(۰, ۱)$

تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد را با Φ نمایش می‌دهند: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

محاسبه‌ی احتمال $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ نیاز به حل انتگرالی دارد که بسیار وقت‌گیر است.

به همین دلیل، به ازای مقادیر مختلف a، مقدار احتمال $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ در جدول "نرمال استاندارد" در پیوست کتاب آمده است.

برای استفاده از جدول دو شرط زیر باید برقرار باشد:
۱- متغیر مورد نظر دارای توزیع نرمال استاندارد باشد: $Z \sim N(۰, ۱)$
۲- احتمال خواسته شده به صورت $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ باشد.

مثال ۱۱

مطلوبست محاسبه احتمال آنکه متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد مقداری
الف- کمتر از $۱/۵۳$
ب- بیشتر از $۱/۵۳$ را اختیار کند.

راه‌حل:

الف- $P\left(Z < ۱/۵۳\right) = ۰/۹۳۷۰$

ب- $P\left(Z > ۱/۵۳\right) = ۱ - P\left(Z \leq ۱/۵۳\right) = ۱ - ۰/۹۳۷۰$

مثال ۱۲

مطلوبست محاسبه احتمال پیشامدهای زیر به قسمی که $Z \sim N(۰,۱)$

الف- $P(Z < ۱/۷۲) = ۰/۹۵۷۳$

ب- $P(۱/۳ < Z < ۱/۸) = ۰/۹۶۴۱ - ۰/۹۰۳۲$

ج- $P(-۰/۲۵ < Z < ۰/۴۵) = ۰/۶۷۳۶ - ۰/۴۰۱۳$

د- $P(Z > ۲/۱) = ۱ - P(Z \leq ۲/۱) = ۱ - ۰/۹۸۲۱$

نکته

هر گاه $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$، آنگاه هر ترکیب خطی از آن به صورت $Y = aX + b$ نیز دارای توزیع نرمال است.

مثال: متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۵۰ و واریانس ۶۴ است. اگر متغیر تصادفی Y بر اساس $Y = \frac{۱}{۲}X + ۲۵$ از X تبعیت کند، تابع چگالی Y را به دست آورید.

$$E(Y) = E\left(\frac{۱}{۲}X + ۲۵\right) = \frac{۱}{۲}E(X) + ۲۵ = \frac{۱۵۰}{۲} + ۲۵ = ۱۰۰$$

$$Var(Y) = Var\left(\frac{۱}{۲}X + ۲۵\right) = \frac{۱}{۴}Var(X) = \frac{۶۴}{۴} = ۱۶$$

$$\Rightarrow \qquad Y \sim N\left(۱۰۰\ ,\ ۱۶\right)$$

قضیه

تبدیل نرمال $N(\mu, \sigma^۲)$ به نرمال استاندارد $N(۰, ۱)$

۱- اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد آنگاه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ توزیع نرمال استاندارد دارد.

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = ۰ \qquad Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma^۲} = ۱$$

۲- اگر $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ باشد آنگاه:

$$P(X \leq b) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

یادآوری: جذر واریانس را انحراف معیار یا انحراف استاندارد می‌نامند و آن را با σ نشان می‌دهند.

مثال ۱۳

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۳ و واریانس ۴ باشد، مطلوبست احتمال $P(۰ \leq X \leq ۴)$.

راه‌حل:

$$\begin{aligned} P(۰ \leq X \leq ۴) &= P\left(\frac{۰-۳}{۲} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{۴-۳}{۲}\right) \\ &= P(-۱/۵ \leq Z \leq ۰/۵) \\ &= ۰/۶۹۱۵ - ۰/۰۶۶۸ \end{aligned}$$

مثال ۱۴

قد جوانان یک شهر دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۶۸ سانتی‌متر و واریانس ۴۰ می‌باشد. چند درصد از جوانان این شهر قدی بین ۱۶۰ تا ۱۷۶ سانتی‌متر دارند؟

مثال ۱۵

توزیع نمره‌های پایان ترم درس آمار و احتمال تقریباً $N(۱۴, ۳)$ است. چند درصد از دانشجویان از این درس نمره‌ی قبولی نخواهند گرفت؟

مثال ۱۶

فرض کنید متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد. مقدار z را تعیین کنید.

الف– $P\left(Z<z\right)=۰/۹ \quad \Rightarrow \quad z_{۰/۹}=۱/۲۸$

ب– $P\left(Z>z\right)=۰/۹ \quad \Rightarrow \quad P\left(Z\leq z\right)=۰/۱ \quad \Rightarrow \quad z_{۰/۱}=-۱/۲۸$

ج– $P\left(-z<Z<z\right)=۰/۶۸$

$$\begin{aligned}
P\left(-z<Z<z\right)&=P\left(Z<z\right)-P\left(Z<-z\right)\\
&=P\left(Z<z\right)-\left[۱-P\left(Z<z\right)\right]\\
&=۲P\left(Z<z\right)-۱=۰/۶۸\\
&\Rightarrow P\left(Z<z\right)=۰/۸۴ \quad \Rightarrow \quad z_{۰/۸۴}=۰/۹۹
\end{aligned}$$

مثال ۱۷

در یک آزمون بزرگ میانگین نمرات ۶۰ و انحراف معیار ۲۰ با توزیع نرمال است. اگر ۱۰ درصد از شرکت‌کنندگان بتوانند نمره قبولی بگیرند، حداقل نمره قبولی چه‌قدر خواهد بود؟

مثال ۱۸

یک ماشین سازنده نوشابه طوری ساخته شده است که در هر لیوان به طور متوسط ۲۰۷ میلی‌لیتر نوشابه می‌ریزد. اگر مقدار نوشابه ریخته شده به‌وسیله دستگاه دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۱۵ میلی‌لیتر باشد.

الف- چند درصد لیوان‌ها شامل بیش از ۲۳۱ میلی‌لیتر نوشابه هستند؟

ب- ۲۵ درصد از لیوان‌ها پایین‌تر از چه مقداری از نوشابه را خواهند داشت؟

مثال ۱۹

وقتی میله‌های پلاستیکی از قالب در می‌آیند، به طور خودکار به طول‌های ظاهری ۶ اینچ بریده می‌شوند. طول‌های واقعی به طور نرمال با میانگین ۶ اینچ و انحراف معیار ۰/۰۶ توزیع شده‌اند. اگر ۵۰ میله بریده شود، چه تعدادی از آن‌ها دارای طولی بیش از ۵/۸۵ اینچ هستند؟

تقریب توزیع دوجمله‌ای بوسیله‌ی توزیع نرمال

اگر $X \sim Bin(n,p)$ با میانگین $E(X)=np$ و واریانس $Var(X)=np(۱-p)$ باشد،
زمانی که n بسیار بزرگ $(n \geq ۳۰)$ و p (احتمال پیروزی) به $۰/۵$ نزدیک باشد،
به طوری که $np > ۵$ **و** $n(۱-p) > ۵$ باشد، آنگاه

$$Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(۱-p)}} \sim N(۰,۱)$$

از طرفی چون یک توزیع گسسته را با یک توزیع پیوسته تقریب می‌زنیم، لازم است از تصحیح پیوستگی استفاده کنیم:

$$P\left(X=k\right) = P\left(k-۰/۵ < X < k+۰/۵\right)$$
$$P\left(X \leq k\right) = P\left(X < k+۰/۵\right)$$
$$P\left(X \geq k\right) = P\left(X > k-۰/۵\right)$$

مثال ۲۰

در جامعه‌ای ۵۶٪ از رأی‌دهندگان مرد هستند. احتمال اینکه از ۵۰ نفر رأی‌دهنده **حداقل** ۳۰ نفر مرد باشند چه‌قدر است؟

مثال ۲۱

در شهری ۳۰ درصد از افراد بالغ جامعه سیگاری هستند. مطلوب است احتمال اینکه در نمونه‌ای به اندازه ۱۰۰۰ فرد بالغ، **کمتر** از ۲۸۰ فرد سیگاری وجود داشته باشد.

مثال ۲۲

درصد افرادی که با قرار گرفتن در معرض یک نوع باکتری به بیماری مبتلا می‌شوند، ۲۰٪ است. فرض کنید ۵۰۰ نفر در معرض باکتری قرار گرفته‌اند. احتمال این‌که ۱۲۰ نفر از آن‌ها به بیماری مبتلا شوند، چه‌قدر است؟