۱- خم $\gamma(t) = (\sin(2t), \ln(\cos t), e^{\sin t})$ را که در آن $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ را در نظر بگیرید. کنج فرنه (T,N,B)، انحنا، تاب و معادله صفحه بوسان خم را در $t = 0$ به دست آورید. (میان ترم امیرکبیر، اردیبهشت ۱۴۰۳)

پاسخ) ابتدا مشتق‌های مرتبه اول تا سوم $\gamma(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$\gamma'(t) = (2\cos(2t), -\tan t, \cos t\, e^{\sin t})$$

$$\gamma''(t) = (-4\sin(2t), -1 - \tan^2 t, (-\sin t + \cos^2 t)e^{\sin t})$$

$$\gamma'''(t) = \left(-8\cos(2t), -2\tan t\left(1 + \tan^2 t\right), (-\cos t - 2\sin t\cos t)\, e^{\sin t} + \cos t\, e^{\sin t}\left(-\sin t + \cos^2 t\right)\right)$$

حال می‌خواهیم بردار مماس یکه یعنی $T(0)$ را به دست آوریم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \Longrightarrow T(0) = \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

صفحه بوسان شامل T و N است. بنابراین B بردار نرمال این صفحه می‌تواند باشد

۱- خم $\gamma(t) = (\sin(2t), \ln(\cos t), e^{\sin t})$ را که در آن $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ را در نظر بگیرید. کنج فرنه (T,N,B)، انحنا، تاب و معادله صفحه بوسان خم را در $t = 0$ به دست آورید. (میان ترم امیرکبیر، اردیبهشت ۱۴۰۳)

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه دوم یعنی $B(0)$ را به دست می‌آوریم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$\gamma'(0) = (2,0,1), \qquad \gamma''(0) = (0,-1,1)$$

$$\gamma'(0) \times \gamma''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,-2)$$

$$|\gamma'(0) \times \gamma''(0)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

بنابراین

$$B(0) = \frac{(1,-2,-2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

صفحه بوسان شامل T و N است. بنابراین B بردار نرمال این صفحه می‌تواند باشد

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t)=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t)=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t)=B(t)\times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t)=\frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^{۳}}$$

تاب:

$$\tau(t)=\frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^{۲}}$$

صفحه بوسان شامل T و N است. بنابراین B بردار نرمال این صفحه می‌تواند باشد

۱- خم $\gamma(t)=(\sin(۲t),\ln(\cos t),e^{\sin t})$ را که در آن $-\frac{\pi}{۲}<t<\frac{\pi}{۲}$ را در نظر بگیرید. کنج فرنه (T,N,B)، انحنا، تاب و معادله صفحه بوسان خم را در $t=۰$ به دست آورید. (میان ترم امیرکبیر، اردیبهشت ۱۴۰۳)

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه اول (اصلی) یعنی $N(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$N(۰)=B(۰)\times T(۰)$$

$$N(۰)=\left(\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳}\right)\times\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}},۰,\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} & -\frac{۲}{۳}\\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۵}}\end{vmatrix}$$

$$N(۰)=\left(-\frac{۲}{۳\sqrt{۵}},-\frac{۵}{۳\sqrt{۵}},\frac{۴}{۳\sqrt{۵}}\right)$$

مقدار انحنا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa(t)=\frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^{۳}}\Longrightarrow\kappa(۰)=\frac{۳}{(\sqrt{۵})^{۳}}=\frac{۳}{۵\sqrt{۵}}$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t)=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t)=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t)=B(t)\times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t)=\frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^{۳}}$$

تاب:

$$\tau(t)=\frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^{۲}}$$

صفحه بوسان شامل T و N است. بنابراین B بردار نرمال این صفحه می‌تواند باشد

۱- خم $\gamma(t)=(\sin(۲t),\ln(\cos t),e^{\sin t})$ را که در آن $-\frac{\pi}{۲}<t<\frac{\pi}{۲}$ را در نظر بگیرید. کنج فرنه (T,N,B)، انحنا، تاب و معادله صفحه بوسان خم را در $t=۰$ به دست آورید. (میان ترم امیرکبیر، اردیبهشت ۱۴۰۳)

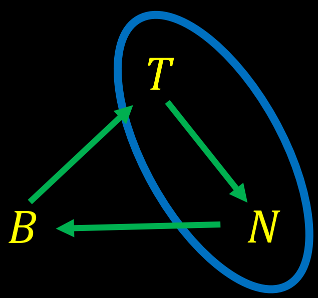
ادامه پاسخ) حال مقدار تاب را محاسبه می‌کنیم:

$$\tau(t)=\frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^{۲}}$$

$$(\gamma'(۰)\times\gamma''(۰)).\gamma'''(۰)=(۱,-۲,-۲).(-۸,۰,۰)=-۸$$

$$\tau(۰)=\frac{-۸}{۳۲}=-\frac{۸}{۹}$$

حال می‌خواهیم معادله صفحه بوسان را به دست بیاوریم. صفحه بوسان شامل بردار های T و N می‌باشد. بردار B بردار نرمال این صفحه است.



$$\vec{n}=B=(\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳})$$

۱- خم $\gamma(t) = (\sin(۲t), \ln(\cos t), e^{\sin t})$ را که در آن $-\frac{\pi}{۲} < t < \frac{\pi}{۲}$ را در نظر بگیرید. کنج فرنه (T,N,B)، انحنا، تاب و معادله صفحه بوسان خم را در $t = ۰$ به دست آورید. (میان ترم امیرکبیر، اردیبهشت ۱۴۰۳)

ادامه پاسخ) واضح است که $\gamma(۰)$ نیز یک نقطه از صفحه بوسان در $t = ۰$ می‌باشد:

$$\gamma(۰) = (۰,۰,۱)$$

بنابراین معادله صفحه بوسان به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{۱}{۳}(x-۰) - \frac{۲}{۳}(y-۰) - \frac{۲}{۳}(z-۱) = ۰$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳}y - \frac{۲}{۳}z + \frac{۲}{۳} = ۰$$

$$\Longrightarrow x - ۲y - ۲z + ۲ = ۰$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

صفحه بوسان شامل T و N است. بنابراین B بردار نرمال این صفحه می‌تواند باشد

۲- منحنی حاصل از فصل مشترک دو رویه $1-z=x^2+y^2$ و $4x^2+9y^2=9$ را بر حسب t پارامتری کنید. برای خم پارامتری حاصل از قسمت ۱، مقادیر T,N,B,κ را در $t=0$ محاسبه کنید.

پاسخ)

$$4x^2+9y^2=9 \Longrightarrow 4\frac{x^2}{9}+y^2=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}}+y^2=1$$

بنابراین قرار می‌دهیم $x=\frac{3}{2}\cos t$ و $y=\sin t$. حال با استفاده از معادله دیگر، z را پارامتری می‌کنیم:

$$1-z=x^2+y^2 \Longrightarrow z=1-x^2-y^2=1-\frac{9}{4}cos^2t-sin^2t$$
$$=-\frac{5}{4}cos^2t$$

پس خم مورد نظر ما که فصل مشترک دو رویه بود، به صورت پارامتری به صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma(t)=(\frac{3}{2}\cos t,\sin t,-\frac{5}{4}cos^2t)$$

راهنمای حل سوال

برای $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x-x_0=a\cos t$$
$$y-y_0=b\sin t$$

بردار مماس یکه:

$$T(t)=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t)=\frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t)=B(t)\times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t)=\frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

۲- منحنی حاصل از فصل مشترک دو رویه $1 - z = x^2 + y^2$ و $4x^2 + 9y^2 = 9$ را بر حسب t پارامتری کنید. برای خم پارامتری حاصل از قسمت ۱، مقادیر T, N, B, κ را در $t = 0$ محاسبه کنید.

پاسخ) حال مشتق‌های مرتبه اول تا سوم $\gamma(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$\gamma'(t) = (-\frac{3}{2}\sin t, \cos t, \frac{5}{4}\sin 2t)$$

$$\gamma''(t) = (-\frac{3}{2}\cos t, -\sin t, \frac{5}{2}\cos 2t)$$

$$\gamma'''(t) = (\frac{3}{2}\sin t, -\cos t, -5\sin 2t)$$

حال می‌خواهیم بردار مماس یکه یعنی $T(0)$ را به دست آوریم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \Longrightarrow T(0) = \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} = \frac{(0,1,0)}{1} = (0,1,0)$$

راهنمای حل سوال

برای $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_0 = a\cos t$$

$$y - y_0 = b\sin t$$

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

۲- منحنی حاصل از فصل مشترک دو رویه $۱ - z = x^۲ + y^۲$ و $۴x^۲ + ۹y^۲ = ۹$ را بر حسب t پارامتری کنید. برای خم پارامتری حاصل از قسمت ۱، مقادیر T,N,B,κ را در $t = ۰$ محاسبه کنید.

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه دوم یعنی $B(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$\gamma'(۰) = (۰,۱,۰), \qquad \gamma''(۰) = (-\frac{۳}{۲},۰,\frac{۵}{۲})$$

$$\gamma'(۰) \times \gamma''(۰) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -\frac{۳}{۲} & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{vmatrix} = (\frac{۵}{۲},۰,\frac{۳}{۲})$$

$$|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)| = \sqrt{\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ + ۰^۲ + \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲} = \sqrt{\frac{۳۴}{۴}} = \frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$$

بنابراین

$$B(۰) = \frac{(\frac{۵}{۲},۰,\frac{۳}{۲})}{\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}} = (\frac{۵}{\sqrt{۳۴}},۰,\frac{۳}{\sqrt{۳۴}})$$

راهنمای حل سوال

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

۲- منحنی حاصل از فصل مشترک دو رویه $۱ - z = x^۲ + y^۲$ و $۴x^۲ + ۹y^۲ = ۹$ را بر حسب t پارامتری کنید. برای خم پارامتری حاصل از قسمت ۱، مقادیر T, N, B, κ را در $t = ۰$ محاسبه کنید.

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه اول (اصلی) یعنی $N(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$N(۰) = B(۰) \times T(۰)$$

$$N(۰) = \left(\frac{۵}{\sqrt{۳۴}}, ۰, \frac{۳}{\sqrt{۳۴}}\right) \times (۰,۱,۰) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{۵}{\sqrt{۳۴}} & ۰ & \frac{۳}{\sqrt{۳۴}} \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$N(۰) = \left(-\frac{۳}{\sqrt{۳۴}}, ۰, \frac{۵}{\sqrt{۳۴}}\right)$$

مقدار انحنا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

$$\kappa(۰) = \frac{\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$$

راهنمای حل سوال

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

۳- منحنی فصل مشترک دو رویه زیر را در نظر بگیرید و طول قوس، کنج فرنه، انحنا و تاب خم را به دست آورید.

$$\begin{cases} \sqrt{۳}y + z = ۱ \\ x^۲ + ۴y^۲ = ۴ \end{cases}$$

پاسخ) در مرحله اول، خم را پارامتری می‌کنیم. اگر رابطه $x^۲ + ۴y^۲ = ۴$ را در نظر بگیریم و طرفین را به ۴ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x^۲}{۴} + y^۲ = ۱$$

با توجه به این رابطه، قرار می‌دهیم $x = ۲\cos t$ و $y = \sin t$.

حال با استفاده از رابطه دیگر، یعنی $\sqrt{۳}y + z = ۱$، z را پارامتری می‌کنیم:

$$\sqrt{۳}y + z = ۱ \Rightarrow z = ۱ - \sqrt{۳}y \Rightarrow z = ۱ - \sqrt{۳}\sin t$$

بنابراین منحنی فصل مشترک دو رویه، به شکل پارامتری به صورت زیر خواهد بود:

$$\gamma(t) = (۲\cos t\,, \sin t\,, ۱ - \sqrt{۳}\sin t)$$

که در آن $۰ \le t \le ۲\pi$.

راهنمای حل سوال

طول قوس:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)|dt$$

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۳- منحنی فصل مشترک دو رویه زیر را در نظر بگیرید و طول قوس، کنج فرنه، انحنا و تاب خم را به دست آورید.

$$\begin{cases} \sqrt{۳}y + z = ۱ \\ x^۲ + ۴y^۲ = ۴ \end{cases}$$

ادامه پاسخ) مشتق‌های مرتبه اول تا سوم $\gamma(t)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\gamma(t) = (۲\cos t, \sin t, ۱ - \sqrt{۳}\sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-۲\sin t, \cos t, -\sqrt{۳}\cos t)$$

$$\gamma''(t) = (-۲\cos t, -\sin t, \sqrt{۳}\sin t)$$

$$\gamma'''(t) = (۲\sin t, -\cos t, \sqrt{۳}\cos t)$$

طول قوس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$s = \int |\gamma'(t)|dt = \int_۰^{۲\pi} \sqrt{۴sin^۲t + cos^۲t + ۳cos^۲t} = \int_۰^{۲\pi} ۲\, dt = ۲t\Big|_۰^{۲\pi}$$

$$= ۴\pi$$

راهنمای حل سوال

طول قوس:

$$s = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$$

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۳- منحنی فصل مشترک دو رویه زیر را در نظر بگیرید و طول قوس، کنج فرنه، انحنا و تاب خم را به دست آورید.

$$\begin{cases} \sqrt{۳}y + z = ۱ \\ x^۲ + ۴y^۲ = ۴ \end{cases}$$

ادامه پاسخ) حال می‌خواهیم بردار مماس یکه یعنی $T(t)$ را به دست آوریم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{(-۲\sin t, \cos t, -\sqrt{۳}\cos t)}{۲}$$

$$T(t) = (-\sin t, \frac{۱}{۲}\cos t, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos t)$$

حال بردار قائم یکه دوم یعنی $B(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$\gamma'(t) = (-۲\sin t, \cos t, -\sqrt{۳}\cos t), \quad \gamma''(t) = (-۲\cos t, -\sin t, \sqrt{۳}\sin t)$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (۰, ۲\sqrt{۳}, ۲) \implies |\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = ۴$$

$$B(t) = (۰, \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$$

راهنمای حل سوال

طول قوس:

$$s = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt$$

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۳- منحنی فصل مشترک دو رویه زیر را در نظر بگیرید و طول قوس، کنج فرنه، انحنا و تاب خم را به دست آورید.

$$\begin{cases} \sqrt{۳}y + z = ۱ \\ x^۲ + ۴y^۲ = ۴ \end{cases}$$

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه اول (اصلی) یعنی $N(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$N(t) = \left(۰, \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲}\right) \times \left(-\sin t, \frac{۱}{۲}\cos t, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos t\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\sin t & \frac{۱}{۲}\cos t & -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos t \end{vmatrix}$$

$$N(t) = \left(-\cos t, -\frac{۱}{۲}\sin t, \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t\right)$$

مقدار انحنا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳} \Longrightarrow \kappa(t) = \frac{۴}{(۲)^۳} = \frac{۱}{۲}$$

راهنمای حل سوال

طول قوس:

$$s = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt$$

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۳- منحنی فصل مشترک دو رویه زیر را در نظر بگیرید و طول قوس، کنج فرنه، انحنا و تاب خم را به دست آورید.

$$\begin{cases} \sqrt{۳}y + z = ۱ \\ x^۲ + ۴y^۲ = ۴ \end{cases}$$

ادامه پاسخ) حال مقدار تاب را محاسبه می‌کنیم:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

$$(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t) = (۰,۲\sqrt{۳},۲).(۲\sin t, -\cos t, \sqrt{۳}\cos t) = ۰$$

$$\tau(t) = \frac{۰}{۴۲} = ۰$$

راهنمای حل سوال

طول قوس:

$$s = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$$

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

راهنمای حل سوال

تاب:

$$\tau(t)=\frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^۲}$$

زمانی یک خم مسطح است که تاب آن در هر نقطه برابر با صفر باشد یعنی به ازای هر t، داشته باشیم $\tau(t)=۰$

زمانی که یک خم مسطح است، به طور کامل در یک صفحه قرار می‌گیرد و B بردار نرمال آن صفحه خواهد بود (در این حالت، $B(t)$ به ازای هر t، مقدار ثابتی است). در واقع این صفحه همان صفحه بوسان است.

۴- خم C با معادله پارامتری $\gamma(t)=(t,۱+t,\sqrt{۱-۲t^۲})$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید این خم مسطح است و معادله صفحه شامل این خم را بنویسید.

پاسخ) مشتق‌های مرتبه اول تا سوم $\gamma(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$\gamma'(t)=\left(۱,۱,\frac{-۲t}{\sqrt{۱-۲t^۲}}\right)$$

$$\gamma''(t)=\left(۰,۰,\frac{-۲}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\right)$$

$$\gamma'''(t)=\left(۰,۰,\frac{-۱۲t}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۵}{۲}}}\right)$$

در نتیجه:

$$\gamma'(t)\times\gamma''(t)=\left(\frac{-۲}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۳}{۲}}},\frac{۲}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۳}{۲}}},۰\right)$$

$$|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|=\frac{۲\sqrt{۲}}{(۱-۲t^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

۴- خم C با معادله پارامتری $\gamma(t) = (t, 1 + t, \sqrt{1 - 2t^2})$ را در نظر بگیرید.
ثابت کنید این خم مسطح است و معادله صفحه شامل این خم را بنویسید.

ادامه پاسخ) حال تاب منحنی را به ازای t دلخواه محاسبه می‌کنیم:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

$$(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t) = \left(\frac{-2}{(1-2t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2}{(1-2t^2)^{\frac{3}{2}}}, 0\right).\left(0, 0, \frac{-12t}{(1-2t^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = 0$$

در نتیجه به ازای هر t، داریم $\tau(t) = 0$ و این یعنی خم C مسطح است.

چون خم C مسطح است، پس داخل یک صفحه قرار می‌گیرد که این صفحه همان صفحه بوسان است؛ یعنی صفحه شامل بردارهای T و N. بردار نرمال این صفحه را می‌توانیم بردار B در نظر بگیریم. به ازای هر t دلخواه، $B(t)$ به صورت زیر است:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

راهنمای حل سوال

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

زمانی یک خم مسطح است که تاب آن در هر نقطه برابر با صفر باشد یعنی به ازای هر t، $\tau(t) = 0$ داشته باشیم

زمانی که یک خم مسطح است، به طور کامل در یک صفحه قرار می‌گیرد و B بردار نرمال آن صفحه خواهد بود (در این حالت، $B(t)$ به ازای هر t، مقدار ثابتی است). در واقع این صفحه همان صفحه بوسان است.

۴- خم C با معادله پارامتری $\gamma(t) = (t,1+t,\sqrt{1-2t^2})$ را در نظر بگیرید.
ثابت کنید این خم مسطح است و معادله صفحه شامل این خم را بنویسید.

ادامه پاسخ) حال برای نوشتن معادله صفحه، به یک نقطه از صفحه نیز نیاز داریم. یک نقطه دلخواه از خم را انتخاب می‌کنیم. به عنوان مثال، $t = 0$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\gamma(0) = (0,1,1)$$

پس $(0,1,1)$ یک نقطه روی خم و در نتیجه داخل صفحه مورد نظر است. بنابراین معادله صفحه شامل خم عبارت است از:

$$P: -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) = 0$$

$$P: -x + y = 1$$

راهنمای حل سوال

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^2}$$

زمانی یک خم مسطح است که تاب آن در هر نقطه برابر با صفر باشد یعنی به ازای هر t، داشته باشیم $\tau(t) = 0$

زمانی که یک خم مسطح است، به طور کامل در یک صفحه قرار می‌گیرد و B بردار نرمال آن صفحه خواهد بود (در این حالت، $B(t)$ به ازای هر t، مقدار ثابتی است). در واقع این صفحه همان صفحه بوسان است.

راهنمای حل سوال

از رابطه اول شروع می‌کنیم (چون اولی شامل دو نماد و دومی شامل سه نماد است)

عبارت $x + y = ۱$ رابطه‌ای شامل دو نماد است که هر دو درجه یک هستند. بنابراین می‌توانیم یکی را t در نظر بگیریم و بلافاصله دیگری را نیز بر حسب t بنویسیم. در واقع در این موقعیت به سمت استفاده از عبارت‌های مثلثاتی نمی‌رویم

۵- خم‌های زیر را پارامتری کنید:

الف) $\begin{cases} x + y = ۱ \\ z = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲} \end{cases}$

پاسخ الف) از رابطه اول شروع می‌کنیم. قرار می‌دهیم $x = t$ که نتیجه می‌دهد:

$$y = ۱ - t$$

حال x و y پارامتری هستند و از رابطه دوم می‌توانیم z را نیز پارامتری کنیم:

$$z = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲} \Rightarrow z = \sqrt{۱ - t^۲ - (۱ - t)^۲}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{-۲t^۲ + ۲t}$$

بنابراین خم به صورت پارامتری عبارت است از:

$$\gamma(t) = (t, ۱ - t, \sqrt{-۲t^۲ + ۲t})$$

۵- خم‌های زیر را پارامتری کنید:

ب) $\begin{cases} z = x^۲ + y^۲ \\ ۲x - ۴y - z - ۱ = ۰ \end{cases}$

پاسخ ب) ابتدا از رابطه دوم، z را به دست می‌آوریم:

$$۲x - ۴y - z - ۱ = ۰ \Longrightarrow z = ۲x - ۴y - ۱$$

حال z را در رابطه اول جایگذاری می‌کنیم:

$$z = x^۲ + y^۲ \Longrightarrow ۲x - ۴y - ۱ = x^۲ + y^۲$$

$$\Longrightarrow x^۲ - ۲x + y^۲ + ۴y + ۱ = ۰$$

$$\Longrightarrow x^۲ - ۲x + ۱ - ۱ + y^۲ + ۴y + ۴ - ۴ + ۱ = ۰$$

$$\Longrightarrow (x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۴$$

با توجه به رابطه به دست آمده، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x - ۱ = ۲\cos t \\ y + ۲ = ۲\sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۱ + ۲\cos t \\ y = -۲ + ۲\sin t \end{cases}$$

راهنمای حل سوال

از رابطه دوم z را به دست می‌آوریم و آن را در رابطه اول جایگذاری می‌کنیم

استفاده از مربع کامل برای ایجاد معادله دایره (با نگاه دوبعدی)

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

که در این جا $a = b = ۱$، $x_۰ = ۱$ و $y_۰ = -۲$

۵- خم‌های زیر را پارامتری کنید:

$$\text{ب)}\quad \begin{cases} z = x^{۲} + y^{۲} \\ ۲x - ۴y - z - ۱ = ۰ \end{cases}$$

ادامه پاسخ ب) حال که x و y را به شکل پارامتری درآورده‌ایم، با استفاده از یکی از روابط، مانند رابطه دوم، z را نیز پارامتری می‌کنیم:

$$z = ۲x - ۴y - ۱ = ۲(۱ + ۲\cos t) - ۴(-۲ + ۲\sin t) - ۱$$

$$\Longrightarrow z = ۴\cos t - ۸\sin t + ۹$$

بنابراین خم به صورت پارامتری عبارت است از:

$$\gamma(t) = (۱ + ۲\cos t\,, -۲ + ۲\sin t\,, ۴\cos t - ۸\sin t + ۹)$$

راهنمای حل سوال

از رابطه دوم z را به دست می‌آوریم و آن را در رابطه اول جایگذاری می‌کنیم

استفاده از مربع کامل برای ایجاد معادله دایره (با نگاه دوبعدی)

برای $\frac{(x-x_۰)^۲}{a^۲} + \frac{(y-y_۰)^۲}{b^۲} = ۱$، می‌توان از موارد زیر برای پارامتری کردن استفاده کرد:

$$x - x_۰ = a\cos t$$

$$y - y_۰ = b\sin t$$

که در این جا $a = b = ۱$، $x_۰ = ۱$ و $y_۰ = -۲$

راهنمای حل سوال

۵- خم‌های زیر را پارامتری کنید:

ج) $\begin{cases} x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}} \\ z = x^{۲}y^{۲} \end{cases}$

پاسخ ج) از رابطه اول شروع می‌کنیم. عبارت‌های مثلثاتی مناسب را برای x و y انتخاب می‌کنیم:

$$x = a\,cos^{۳}t, \qquad y = a\,sin^{۳}t$$

حال x و y پارامتری هستند و از رابطه دوم می‌توانیم z را نیز پارامتری کنیم:

$$z = x^{۲}y^{۲} \Longrightarrow z = \left(a\,cos^{۳}t\right)^{۲}\left(a\,sin^{۳}t\right)^{۲} = a^{۴}cos^{۶}t\,sin^{۶}t$$

بنابراین خم به صورت پارامتری عبارت است از:

$$\gamma(t) = (a\,cos^{۳}t, a\,sin^{۳}t, a^{۴}cos^{۶}t\,sin^{۶}t)$$

$$\gamma(t) = (a\,cos^{۳}t, a\,sin^{۳}t, \frac{a^{۴}}{۶۴}sin^{۶}(۲t))$$

از رابطه اول شروع می‌کنیم (شامل دو نماد است)

از عبارت‌های مثلثاتی مناسب استفاده می‌کنیم به نحوی که اتحاد معروف زیر ظاهر شود:

$$sin^{۲}t + cos^{۲}t = ۱$$

۶- فرض کنید $\gamma = \gamma(s)$ یک خم پارامتری با پارامتر طول قوس باشد که سه بار مشتق پذیر است و در رابطه زیر صدق می‌کند: (تمرین تحویلی ۱۴۰۲)

$$\gamma(s) = B(s) - \gamma''(s)$$

نشان دهید

$$\tau(s) + \kappa'(s) = 0$$

پاسخ) چون γ بر حسب طول قوس پارامتری شده است، اندازه γ' برابر با یک می‌باشد و در نتیجه $T'(s) = \gamma''(s)$. از طرف دیگر می‌دانیم $T'(s) = \kappa(s)N(s)$. بنابراین:

$$\gamma(s) = B(s) - \gamma''(s) = B(s) - T'(s) = B(s) - \kappa(s)N(s)$$

حال از طرفین نسبت به s مشتق می‌گیریم:

$$T(s) = B'(s) - \kappa'(s)N(s) - \kappa(s)N'(s)$$

$$T(s) = -\tau(s)N(s) - \kappa'(s)N(s) - \kappa(s)\big(\tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s)\big)$$

حال طرفین را در $N(s)$ ضرب داخلی می‌کنیم:

$$T(s).N(s) = -\tau(s)|N(s)|^2 - \kappa'(s)|N(s)|^2 - \kappa(s)\big(\tau(s)B(s).N(s) - \kappa(s)T(s).N(s)\big)$$

راهنمای حل سوال

چون γ بر حسب طول قوس پارامتری شده است، $|\gamma'| = 1$

فرمول‌های فرنه:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

$$N'(s) = \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s)$$

مشتق‌گیری از طرفین نسبت به s به منظور ظاهرشدن B' و N' و استفاده از فرمول‌های فرنه

ضرب داخلی طرفین در $N(s)$ و استفاده از خواصی مانند دو به دو عمود بودن بردارهای T,N,B و یکه بودن بردارهای T,N,B

اگر دو بردار بر هم عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها صفر است

۶- فرض کنید $\gamma = \gamma(s)$ یک خم پارامتری با پارامتر طول قوس باشد که سه بار مشتق پذیر است و در رابطه زیر صدق می‌کند: (تمرین تحویلی ۱۴۰۲)

$$\gamma(s) = B(s) - \gamma''(s)$$

نشان دهید

$$\tau(s) + \kappa'(s) = 0$$

ادامه پاسخ) دقت داریم که $|N(s)| = 1$ و بردارهای T,N,B دو به دو به هم عمود هستند (پس ضرب داخلی هر دو تا از آن‌ها برابر با صفر است). حال داریم:

$$0 = -\tau(s) - \kappa'(s) - 0 - 0 \Longrightarrow \tau(s) + \kappa'(s) = 0$$

راهنمای حل سوال

چون γ بر حسب طول قوس پارامتری شده است، $|\gamma'| = 1$

فرمول‌های فرنه:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

$$N'(s) = \tau(s)B(s) - \kappa(s)T(s)$$

مشتق‌گیری از طرفین نسبت به s به منظور ظاهرشدن B' و N' و استفاده از فرمول‌های فرنه

ضرب داخلی طرفین در $N(s)$ و استفاده از خواصی مانند دو به دو عمود بودن بردارهای T,N,B و یکه بودن بردارهای T,N,B

اگر دو بردار بر هم عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها صفر است