۱- نشان دهید که می‌توان معادله‌های

$$\begin{cases} xy^۲ + zu + v^۲ = ۳ \\ x^۳z + ۲y - uv = ۲ \\ xu + yv - xyz = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (۱,۱,۱,۱,۱)$ نسبت به مجهولات x,y,z به عنوان توابعی از u,v حل کرد و سپس $\frac{\partial y}{\partial u}$ را به ازای $(u,v) = (۱,۱)$ بیابید. (آدامز)

پاسخ) توابع F,G,H را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = xy^۲ + zu + v^۲ - ۳ \\ G(x,y,z,u,v) = x^۳z + ۲y - uv - ۲ \\ H(x,y,z,u,v) = xu + yv - xyz - ۱ \end{cases}$$

حال $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P)$ که در آن $P = (۱,۱,۱,۱,۱)$ است را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که نقطه P در دستگاه بالا صدق می‌کند و توابع F,G,H دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند.

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

قضیه تابع ضمنی

در قضیه تابع ضمنی، توابع باید در یک همسایگی نقطه مورد نظر، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

چون $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) \neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی P، x,y,z را بر حسب توابعی از u,v نوشت

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

۱- نشان دهید که می‌توان معادله‌های

$$\begin{cases} xy^۲ + zu + v^۲ = ۳ \\ x^۳z + ۲y - uv = ۲ \\ xu + yv - xyz = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (۱,۱,۱,۱,۱)$ نسبت به مجهولات x,y,z به عنوان توابعی از u,v حل کرد و سپس $\frac{\partial y}{\partial u}$ را به ازای $(u,v) = (۱,۱)$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} y^۲ & ۲xy & u \\ ۳x^۲z & ۲ & x^۳ \\ u - yz & v - xz & -xy \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۴$$

حال چون $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) \neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی نقطه P، x,y,z را بر حسب توابعی از u,v نوشت و به این ترتیب قسمت اول سوال تکمیل شد.

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

قضیه تابع ضمنی

در قضیه تابع ضمنی، توابع باید در یک همسایگی نقطه مورد نظر، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

چون $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) \neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی P، x,y,z را بر حسب توابعی از u,v نوشت

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

۱- نشان دهید که می‌توان معادله‌های

$$\begin{cases} xy^{۲} + zu + v^{۲} = ۳ \\ x^{۳}z + ۲y - uv = ۲ \\ xu + yv - xyz = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (۱,۱,۱,۱,۱)$ نسبت به مجهولات x,y,z به عنوان توابعی از u,v حل کرد و سپس $\frac{\partial y}{\partial u}$ را به ازای $(u,v) = (۱,۱)$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال به ادامه حل سوال می‌پردازیم. طبق قضیه تابع ضمنی داریم:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u_\circ, v_\circ) = (۱,۱)} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P)}$$

حال داریم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} y^{۲} & z & u \\ ۳x^{۲}z & -v & x^{۳} \\ u - yz & x & -xy \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ \\ \circ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۶$$

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

قضیه تابع ضمنی

در قضیه تابع ضمنی، توابع باید در یک همسایگی نقطه مورد نظر، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

چون $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) \neq \circ$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی P، x,y,z را بر حسب توابعی از u,v نوشت

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

۱- نشان دهید که می‌توان معادله‌های

$$\begin{cases} xy^{۲} + zu + v^{۲} = ۳ \\ x^{۳}z + ۲y - uv = ۲ \\ xu + yv - xyz = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (۱,۱,۱,۱,۱)$ نسبت به مجهولات x,y,z به عنوان توابعی از u,v حل کرد و سپس $\frac{\partial y}{\partial u}$ را به ازای $(u,v) = (۱,۱)$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) از طرفی همان طور که در ابتدا محاسبه کردیم، $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) = ۶$.

بنابراین:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u_\circ, v_\circ) = (۱,۱)} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P)} = -\frac{۶}{۴} = -\frac{۳}{۲}$$

روش دیگر برای حل این قسمت این است که از طرفین تمام معادلات، نسبت به u مشتق بگیریم و کار را جلو ببریم.

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

قضیه تابع ضمنی

در قضیه تابع ضمنی، توابع باید در یک همسایگی نقطه مورد نظر، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

چون $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) \neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی P، x,y,z را بر حسب توابعی از u,v نوشت

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,u,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

۲- نشان دهید که می‌توان معادله‌های

$$\begin{cases} xe^{y} + uz - \cos v = ۲ \\ \\ u\cos y + x^{۲}v - yz^{۲} = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (۲,۰,۱,۱,۰)$ نسبت به مجهولات u,v به عنوان توابعی از x,y,z حل کرد و سپس $\frac{\partial u}{\partial z}$ را به ازای $(x,y,z) = (۲,۰,۱)$ بیابید. (آدامز)

پاسخ) نقطه داده شده را P در نظر می‌گیریم. همچنین توابع F,G را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (توجه داریم که نقطه P در دستگاه بالا صدق می‌کند و توابع F,G دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند):

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = xe^{y} + uz - \cos v - ۲ \\ \\ G(x,y,z,u,v) = u\cos y + x^{۲}v - yz^{۲} - ۱ \end{cases}$$

حال $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P)$ را که در آن $P = (۲,۰,۱,۱,۰)$ است را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^{۲} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۴$$

حال چون $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) \neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی نقطه P، u,v را بر حسب توابعی از x,y,z نوشت.

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

قضیه تابع ضمنی

در قضیه تابع ضمنی، توابع باید در یک همسایگی نقطه مورد نظر، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

چون $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) \neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی P، u,v را بر حسب توابعی از x,y,z نوشت

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

۲- نشان دهید که می‌توان معادله‌های

$$\begin{cases} xe^y + uz - \cos v = ۲ \\ \\ u\cos y + x^۲ v - yz^۲ = ۱ \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (۲,۰,۱,۱,۰)$ نسبت به مجهولات u,v به عنوان توابعی از x,y,z حل کرد و سپس $\frac{\partial u}{\partial z}$ را به ازای $(x,y,z) = (۲,۰,۱)$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال به ادامه حل سوال می‌پردازیم. طبق قضیه تابع ضمنی داریم:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_۰,y_۰,z_۰)=(۲,۰,۱)} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}(P)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P)}$$

حال داریم:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} u & \sin v \\ -۲yz & x^۲ \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix} = ۴$$

بنابراین:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_۰,y_۰,z_۰)=(۲,۰,۱)} = -\frac{۴}{۴} = -۱$$

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

قضیه تابع ضمنی

در قضیه تابع ضمنی، توابع باید در یک همسایگی نقطه مورد نظر، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

چون $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) \neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی P، u,v را بر حسب توابعی از x,y,z نوشت

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

۳- دستگاه زیر را در نظر بگیرید: (آدامز)

$$\begin{cases} u^۴v^۴ + (u+x)^۳ + y + ۳w - ۴ = ۰ \\ \sin(uv) + e^{v+y^۲-۱} + v - ۱ = ۰ \\ x^۲ - ۴y^۲ + ۴w = v - u \end{cases}$$

الف) نشان دهید در همسایگی نقطه $p_۰ = (u,v,w,x,y) = (۰,۰,۱,۰,۱)$ می‌توان این دستگاه را نسبت به مجهولات u,v,w به عنوان تابعی از x,y حل کرد.

پاسخ الف) توابع F,G,H را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} F(u,v,w,x,y) = u^۴v^۴ + (u+x)^۳ + y + ۳w - ۴ \\ G(u,v,w,x,y) = \sin(uv) + e^{v+y^۲-۱} + v - ۱ \\ H(u,v,w,x,y) = x^۲ - ۴y^۲ + ۴w - v + u \end{cases}$$

توجه داریم که نقطه $P_۰$ در دستگاه بالا صدق می‌کند و توابع F,G,H دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. حال $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P_۰)$ را محاسبه می‌کنیم.

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

قضیه تابع ضمنی

در قضیه تابع ضمنی، توابع باید در یک همسایگی نقطه مورد نظر، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

چون $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P_۰) \neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی P، u,v,w را بر حسب توابعی از x,y نوشت

راهنمای حل سوال

۳- دستگاه زیر را در نظر بگیرید: (آدامز)

$$\begin{cases} u^{۴}v^{۴}+(u+x)^{۳}+y+۳w-۴=۰ \\ \sin(uv)+e^{v+y^{۲}-۱}+v-۱=۰ \\ x^{۲}-۴y^{۲}+۴w=v-u \end{cases}$$

الف) نشان دهید در همسایگی نقطه $(۰,۰,۱,۰,۱)=(u,v,w,x,y)=p_۰$ می‌توان این دستگاه را نسبت به مجهولات u,v,w به عنوان تابعی از x,y حل کرد.

ادامه پاسخ الف)

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P_۰)=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial w} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial w} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} & \frac{\partial H}{\partial w} \end{vmatrix}_{P_۰}=\begin{vmatrix} ۴u^{۳}v^{۴}+۳(u+x)^{۲} & ۴u^{۴}v^{۳} & ۳ \\ v\cos(uv) & u\cos(uv)+e^{v+y^{۲}-۱}+۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{vmatrix}_{P_۰}$$

$$=\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{vmatrix}=-۶$$

حال چون $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P_۰)\neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی نقطه $P_۰$، u,v,w را به عنوان توابعی از x,y حل کرد.

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

قضیه تابع ضمنی

در قضیه تابع ضمنی، توابع باید در یک همسایگی نقطه مورد نظر، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

چون $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P_۰)\neq ۰$، طبق قضیه تابع ضمنی، می‌توان در یک همسایگی P، u,v,w را بر حسب توابعی از x,y نوشت

۳- دستگاه زیر را در نظر بگیرید: (آدامز)

$$\begin{cases} u^{۴}v^{۴} + (u+x)^{۳} + y + ۳w - ۴ = ۰ \\ \sin(uv) + e^{v+y^{۲}-۱} + v - ۱ = ۰ \\ x^{۲} - ۴y^{۲} + ۴w = v - u \end{cases}$$

ب) مقادیر $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y) = (۰,۱)$ بیابید.

پاسخ ب) برای محاسبه $\frac{\partial v}{\partial y}$ در نقطه $(x,y) = (۰,۱)$، طبق قضیه تابع ضمنی داریم:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_۰,y_۰)=(۰,۱)} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}(P_۰)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P_۰)}$$

حال داریم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}(P_۰) = \left|\begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial w} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial w} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial w} \end{matrix}\right|_{P_۰} = \left|\begin{matrix} ۴u^{۳}v^{۴} + ۳(u+x)^{۲} & ۱ & ۳ \\ v\cos(uv) & ۲ye^{v+y^{۲}-۱} & ۰ \\ ۱ & -۸y & ۴ \end{matrix}\right|_{P_۰} = \left|\begin{matrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۸ & ۴ \end{matrix}\right| = -۶$$

در نتیجه:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_۰,y_۰)=(۰,۱)} = -\frac{-۶}{-۶} = -۱$$

راهنمای حل سوال

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

راهنمای حل سوال

۳- دستگاه زیر را در نظر بگیرید: (آدامز)

$$\begin{cases} u^۴v^۴ + (u+x)^۳ + y + ۳w - ۴ = ۰ \\ \sin(uv) + e^{v+y^۲-۱} + v - ۱ = ۰ \\ x^۲ - ۴y^۲ + ۴w = v - u \end{cases}$$

ب) مقادیر $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y)=(۰,۱)$ بیابید.

ادامه پاسخ ب) برای محاسبه $\frac{\partial w}{\partial y}$ در نقطه $(x,y)=(۰,۱)$، طبق قضیه تابع ضمنی داریم:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x_۰,y_۰)=(۰,۱)} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}(P_۰)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P_۰)}$$

حال داریم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}(P_۰) = \left.\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix}\right|_{P_۰} = \left.\begin{vmatrix} ۴u^۳v^۴ + ۳(u+x)^۳ & ۴u^۴v^۳ & ۱ \\ v\cos(uv) & u\cos(uv) + e^{v+y^۲-۱} + ۱ & ۲ye^{v+y^۲-۱} \\ ۱ & -۱ & -۸y \end{vmatrix}\right|_{P_۰}$$

$$= \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۱ & -۱ & -۸ \end{vmatrix} = -۲$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

۳- دستگاه زیر را در نظر بگیرید: (آدامز)

$$\begin{cases} u^{۴}v^{۴}+(u+x)^{۳}+y+۳w-۴=۰ \\ \sin(uv)+e^{v+y^{۲}-۱}+v-۱=۰ \\ x^{۲}-۴y^{۲}+۴w=v-u \end{cases}$$

ب) مقادیر $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y)=(۰,۱)$ بیابید.

ادامه پاسخ ب) بنابراین:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x_{۰},y_{۰})=(۰,۱)}=-\frac{-۲}{-۶}=-\frac{۱}{۳}$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

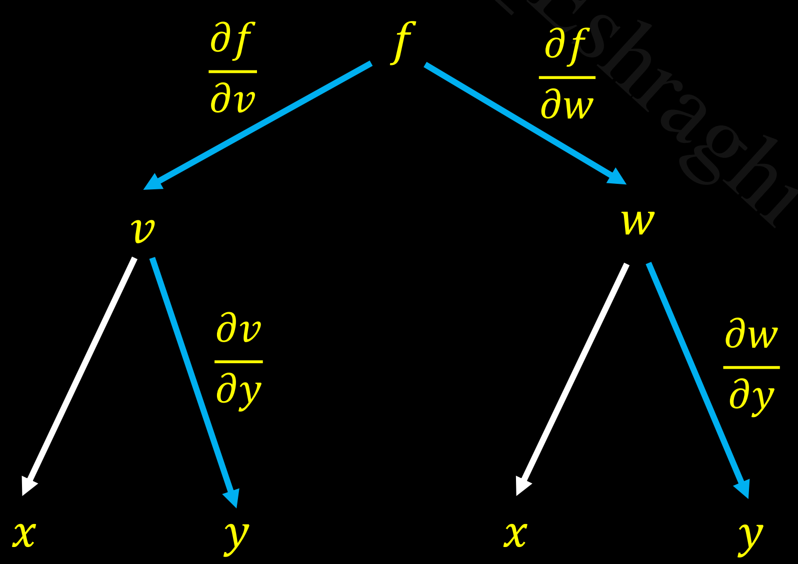
$$\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

۳- دستگاه زیر را در نظر بگیرید: (آدامز)

$$\begin{cases} u^4v^4 + (u+x)^3 + y + 3w - 4 = 0 \\ \sin(uv) + e^{v+y^2-1} + v - 1 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4w = v - u \end{cases}$$

پ) اگر $f(x,y) = e^{wv}$ باشد، مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y) = (0,1)$ بیابید.

پاسخ پ) از قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:



راهنمای حل سوال

قاعده زنجیره‌ای

قضیه تابع ضمنی

۳- دستگاه زیر را در نظر بگیرید: (آدامز)

$$\begin{cases} u^{۴}v^{۴} + (u+x)^{۳} + y + ۳w - ۴ = ۰ \\ \sin(uv) + e^{v+y^{۲}-۱} + v - ۱ = ۰ \\ x^{۲} - ۴y^{۲} + ۴w = v - u \end{cases}$$

پ) اگر $f(x,y) = e^{wv}$ باشد، مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در نقطه $(x,y) = (۰,۱)$ بیابید.

قاعده زنجیره‌ای

ادامه پاسخ پ) بنابراین:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = we^{wv}\frac{\partial v}{\partial y} + ve^{wv}\frac{\partial w}{\partial y}$$

قضیه تابع ضمنی

حال طبق قسمت ب داریم:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_۰} = ۱ \times ۱ \times (-۱) + ۰ \times ۱ \times \left(-\frac{۱}{۳}\right) = -۱$$

۴- فرض کنید در همسایگی $A=(x,y,z,u,v)=(۱,۱,۱,۱,۱)$ روابط زیر برقرارند:

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۳}u+v^{۲}z+xyuv=۴ \\ x^{۴}yv+yz^{۲}u+uv^{۲}=۳ \\ u^{۳}v+۸uyx^{۲}+۴vz^{۳}=۱۳ \end{cases}$$

اگر در یک همسایگی نقطه A بتوان x، y و z را به عنوان توابعی بر حسب u و v نوشت. مطلوبست محاسبه $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_A$ و $\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_A$. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

پاسخ) قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v)=x^{۲}+y^{۳}u+v^{۲}z+xyuv-۴ \\ G(x,y,z,u,v)=x^{۴}yv+yz^{۲}u+uv^{۲}-۳ \\ H(x,y,z,u,v)=u^{۳}v+۸uyx^{۲}+۴vz^{۳}-۱۳ \end{cases}$$

برای محاسبه $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_A$، طبق قضیه تابع ضمنی داریم:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_A=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,z)}(A)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(A)}$$

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

۴- فرض کنید در همسایگی $A=(x,y,z,u,v)=(۱,۱,۱,۱,۱)$ روابط زیر برقرارند:

$$\begin{cases} x^۲+y^۳u+v^۲z+xyuv=۴ \\ x^۴yv+yz^۲u+uv^۲=۳ \\ u^۳v+۸uyx^۲+۴vz^۳=۱۳ \end{cases}$$

اگر در یک همسایگی نقطه A بتوان x، y و z را به عنوان توابعی بر حسب u و v نوشت. مطلوبست محاسبه $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_A$ و $\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_A$. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

ادامه پاسخ) حال داریم:

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,z)}(A)=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix}_A=\begin{vmatrix} y^۳+xyv & ۳uy^۲+xuv & v^۲ \\ yz^۲+v^۲ & x^۴v+z^۲u & ۲zyu \\ ۳u^۲v+۸yx^۲ & ۸ux^۲ & ۱۲vz^۲ \end{vmatrix}_A=\begin{vmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱۱ & ۸ & ۱۲ \end{vmatrix}=۲$$

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(A)=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{vmatrix}_A=\begin{vmatrix} ۲x+yuv & ۳uy^۲+xuv & v^۲ \\ ۴x^۳yv & x^۴v+z^۲u & ۲zyu \\ ۱۶uyx & ۸ux^۲ & ۱۲vz^۲ \end{vmatrix}_A=\begin{vmatrix} ۳ & ۴ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۲ \\ ۱۶ & ۸ & ۱۲ \end{vmatrix}=-۴۰$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_A=-\frac{۲}{-۴۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

۴- فرض کنید در همسایگی $A=(x,y,z,u,v)=(۱,۱,۱,۱,۱)$ روابط زیر برقرارند:

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۳}u+v^{۲}z+xyuv=۴ \\ x^{۴}yv+yz^{۲}u+uv^{۲}=۳ \\ u^{۳}v+۸uyx^{۲}+۴vz^{۳}=۱۳ \end{cases}$$

اگر در یک همسایگی نقطه A بتوان x، y و z را به عنوان توابعی بر حسب u و v نوشت. مطلوبست محاسبه $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_A$ و $\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_A$. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) برای محاسبه $\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_A$ ، طبق قضیه تابع ضمنی داریم:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_A=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,z)}(A)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(A)}$$

۴- فرض کنید در همسایگی $A=(x,y,z,u,v)=(۱,۱,۱,۱,۱)$ روابط زیر برقرارند:

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۳}u+v^{۲}z+xyuv=۴ \\ x^{۴}yv+yz^{۲}u+uv^{۲}=۳ \\ u^{۳}v+۸uyx^{۲}+۴vz^{۳}=۱۳ \end{cases}$$

اگر در یک همسایگی نقطه A بتوان x، y و z را به عنوان توابعی بر حسب u و v نوشت. مطلوبست محاسبه $\left.\dfrac{\partial x}{\partial u}\right|_A$ و $\left.\dfrac{\partial y}{\partial v}\right|_A$. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,z)}(A)=\left|\begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial v} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{matrix}\right|_A=\left|\begin{matrix} ۲x+yuv & ۲zv+xyu & v^{۲} \\ ۴x^{۳}yv & x^{۴}y+۲uv & ۲zyu \\ ۱۶uyx & u^{۳}+۴z^{۳} & ۱۲vz^{۲} \end{matrix}\right|_A=\left|\begin{matrix} ۳ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۲ \\ ۱۶ & ۵ & ۱۲ \end{matrix}\right|=۲$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_A=-\frac{۲}{-۴۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

راهنمای حل سوال

انتقال جملات معادله‌ها به یک سمت و تعریف توابع چند متغیره

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

طبق قضیه تابع ضمنی:

$$\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,z)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}}$$

راهنمای حل سوال

۵- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

الف) $f(x,y,z) = x^۲ + ۴y^۲ + z^۲$

پاسخ الف) نقاط بحرانی شامل نقاطی مانند P است که $\nabla f(P) = ۰$. طبق تعریف، گرادیان تابع f به صورت $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ می‌باشد. بنابراین:

$$\nabla f = (۲x, ۸y, ۲z)$$

حال قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲x = ۰ \implies x = ۰ \\ ۸y = ۰ \implies y = ۰ \\ ۲z = ۰ \implies z = ۰ \end{cases}$$

بنابراین $(۰,۰,۰)$ تنها نقطه بحرانی است. حال می‌خواهیم نوع نقطه بحرانی را تعیین کنیم.

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

برای تعیین نوع نقاط بحرانی از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم

تشکیل ماتریس هسین و پس از آن تشکیل D_iها

۵- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

الف) $f(x,y,z) = x^{۲} + ۴y^{۲} + z^{۲}$

ادامه پاسخ الف) از ماتریس هسین و آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$H = \begin{bmatrix} f_{۱۱} & f_{۱۲} & f_{۱۳} \\ f_{۲۱} & f_{۲۲} & f_{۲۳} \\ f_{۳۱} & f_{۳۲} & f_{۳۳} \end{bmatrix} \Longrightarrow H(۰,۰,۰) = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

حال $D_{۱}, D_{۲}, D_{۳}$ را مشخص می‌کنیم:

$$D_{۱} = |۲|, \qquad D_{۲} = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{vmatrix} = ۱۶, \qquad \begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۳۲$$

پس ماتریس H، معین مثبت است و در نتیجه نقطه $(۰,۰,۰)$ مینیمم نسبی است.

راهنمای حل سوال

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

برای تعیین نوع نقاط بحرانی از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم

تشکیل ماتریس هسین و پس از آن تشکیل D_iها

۵- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰) ب) $f(x,y) = x^۲ - x^۲y + ۲y^۲$

پاسخ ب) نقاط بحرانی شامل نقاطی مانند P است که $\nabla f(P) = ۰$. طبق تعریف، گرادیان تابع f به صورت $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ می‌باشد. بنابراین:

$$\nabla f = \left(۲x - ۲xy, -x^۲ + ۴y\right)$$

حال قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$. بنابراین:

$$\begin{cases} ۲x - ۲xy = ۰ \quad \Longrightarrow x(۱ - y) = ۰ & (۱) \\ -x^۲ + ۴y = ۰ & (۲) \end{cases}$$

از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که $x = ۰$ یا $y = ۱$. اگر $x = ۰$، آنگاه از رابطه (۲) نتیجه می‌گیریم $y = ۰$. اگر $y = ۱$، آنگاه از رابطه (۲) نتیجه می‌گیریم $x = \pm ۲$.

بنابراین نقاط بحرانی به صورت زیر می‌باشند:

$$(۰,۰), \qquad (۲,۱), \qquad (-۲,۱)$$

راهنمای حل سوال

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

برای تعیین نوع نقاط بحرانی از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم

برای حالت دو متغیره داریم:

۱) اگر $AC > B^۲$ و $A > ۰$، نقطه مینیمم نسبی است

۲) اگر $AC > B^۲$ و $A < ۰$، نقطه ماکسیمم نسبی است

۳) اگر $AC < B^۲$، نقطه زینی است

۴) اگر $AC = B^۲$، آزمون مشتق دوم بی نتیجه است

۵- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

ب) $f(x,y) = x^{۲} - x^{۲}y + ۲y^{۲}$ (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

ادامه پاسخ ب) حال می‌خواهیم نوع نقاط بحرانی را مشخص کنیم. می‌خواهیم از آزمون مشتق دوم استفاده کنیم. بنابراین به مشتقات جزئی زیر نیاز داریم:

$$A = f_{۱۱}(x,y) = ۲ - ۲y, \quad B = f_{۱۲}(x,y) = -۲x, \quad C = f_{۲۲}(x,y) = ۴$$

برای نقطه $(۰,۰)$ داریم $A = ۲$، $B = ۰$ و $C = ۴$. پس $AC > B^{۲}$ و $A > ۰$، در نتیجه $(۰,۰)$ مینیمم نسبی است.

برای نقطه $(۲,۱)$ داریم $A = ۰$، $B = -۴$ و $C = ۴$. پس $AC < B^{۲}$ و در نتیجه نقطه $(۲,۱)$ زینی است.

برای نقطه $(-۲,۱)$ داریم $A = ۰$، $B = ۴$ و $C = ۴$. پس $AC < B^{۲}$ و در نتیجه نقطه $(-۲,۱)$ زینی است.

راهنمای حل سوال

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

برای تعیین نوع نقاط بحرانی از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم

برای حالت دو متغیره داریم:

۱) اگر $AC > B^{۲}$ و $A > ۰$، نقطه مینیمم نسبی است

۲) اگر $AC > B^{۲}$ و $A < ۰$، نقطه ماکسیمم نسبی است

۳) اگر $AC < B^{۲}$، نقطه زینی است

۴) اگر $AC = B^{۲}$، آزمون مشتق دوم بی نتیجه است

۵- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

(آدامز) پ) $f(x,y) = x^{۲}ye^{-(x^{۲}+y^{۲})}$

پاسخ پ) نقاط بحرانی شامل نقاطی مانند P است که $\nabla f(P) = ۰$. طبق تعریف، گرادیان تابع f به صورت $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ می‌باشد. بنابراین:

$$\nabla f = \left(y\left(۲xe^{-(x^{۲}+y^{۲})} - ۲x^{۳}e^{-(x^{۲}+y^{۲})}\right), x^{۲}\left(e^{-(x^{۲}+y^{۲})} - 2y^{۲}e^{-(x^{۲}+y^{۲})}\right)\right)$$

$$\nabla f = \left(2xye^{-(x^{۲}+y^{۲})}(۱-x^{۲}), x^{۲}e^{-(x^{۲}+y^{۲})}(۱-۲y^{۲})\right)$$

حال قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲xye^{-(x^{۲}+y^{۲})}\left(۱-x^{۲}\right) = ۰ \Longrightarrow xy\left(۱-x^{۲}\right) = ۰ & (۱) \\ x^{۲}e^{-(x^{۲}+y^{۲})}\left(۱-۲y^{۲}\right) = ۰ \Longrightarrow x^{۲}\left(۱-۲y^{۲}\right) = ۰ & (۲) \end{cases}$$

از رابطه (۱) به دست می‌آوریم $x = ۰$ یا $y = ۰$ یا $x = \pm ۱$. اگر $x = ۰$، آنگاه در رابطه (۲) نیز صدق می‌کند. اگر $y = ۰$، آنگاه از رابطه (۲) داریم $x = ۰$. اگر $x = \pm ۱$، آنگاه از رابطه (۲) داریم $y = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$.

راهنمای حل سوال

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

استفاده از آزمون مشتق دوم برای نقاط غیر از نقاط مجموعه $\{(۰,y) | y \in \mathbb{R}\}$

برای حالت دو متغیره داریم:

۱) اگر $AC > B^{۲}$ و $A > ۰$، نقطه مینیمم نسبی است

۲) اگر $AC > B^{۲}$ و $A < ۰$، نقطه ماکسیمم نسبی است

۳) اگر $AC < B^{۲}$، نقطه زینی است

۴) اگر $AC = B^{۲}$، آزمون مشتق دوم بی نتیجه است

برای $(۰,y)$ها آزمون مشتق دوم سکوت می‌کند اما می‌توانیم با دسته‌بندی مناسب روی مقادیر y، نوع نقاط را تعیین کنیم. از این نکات استفاده می‌کنیم که $f(۰,y) = ۰$، اگر $y > ۰$، $f(x,y) > ۰$ و اگر $y < ۰$، $f(x,y) < ۰$

۵- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

پ) $f(x,y) = x^۲ye^{-(x^۲+y^۲)}$ (آدامز)

ادامه پاسخ پ) بنابراین در مجموع، نقاط بحرانی عبارتند از $(۱,\frac{۱}{\sqrt{۲}})$، $(۱,-\frac{۱}{\sqrt{۲}})$، $(-۱,\frac{۱}{\sqrt{۲}})$، $(-۱,-\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ و مجموعه نقاط $\{(۰,y)|y \in \mathbb{R}\}$.

حال برای تعیین نوع نقاط، از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم. برای این کار، به مشتقات جزئی زیر نیاز داریم:

$$A = f_{۱۱}(x,y) = ۲y(۱-۵x^۲+۲x^۴)e^{-(x^۲+y^۲)}$$

$$B = f_{۱۲}(x,y) = ۲x(۱-x^۲)(۱-۲y^۲)e^{-(x^۲+y^۲)}$$

$$C = f_{۲۲}(x,y) = ۲x^۲y(۲y^۲-۳)e^{-(x^۲+y^۲)}$$

برای نقاط $(\pm۱,\frac{۱}{\sqrt{۲}})$، داریم $A = C = -۲\sqrt{۲}e^{-\frac{۳}{۲}}$ و $B = ۰$. حال $AC > B^۲$ و $A < ۰$ و در نتیجه طبق آزمون مشتق دوم، این نقاط ماکسیمم نسبی هستند.

راهنمای حل سوال

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

استفاده از آزمون مشتق دوم برای نقاط غیر از نقاط مجموعه $\{(۰,y)|y \in \mathbb{R}\}$

برای حالت دو متغیره داریم:
۱) اگر $AC > B^۲$ و $A > ۰$، نقطه مینیمم نسبی است
۲) اگر $AC > B^۲$ و $A < ۰$، نقطه ماکسیمم نسبی است
۳) اگر $AC < B^۲$، نقطه زینی است
۴) اگر $AC = B^۲$، آزمون مشتق دوم بی نتیجه است

برای $(۰,y)$ها آزمون مشتق دوم سکوت می‌کند اما می‌توانیم با دسته‌بندی مناسب روی مقادیر y، نوع نقاط را تعیین کنیم. از این نکات استفاده می‌کنیم که $f(۰,y) = ۰$، اگر $y > ۰$، $f(x,y) > ۰$ و اگر $y < ۰$، $f(x,y) < ۰$

۵- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

پ) $f(x,y) = x^۲ye^{-(x^۲+y^۲)}$ (آدامز)

ادامه پاسخ پ) برای نقاط $(\pm ۱, -\frac{۱}{\sqrt{۲}})$، داریم $A = C = ۲\sqrt{۲}e^{-\frac{۳}{۲}}$ و $B = ۰$. حال $AC > B^۲$ و $A > ۰$ و در نتیجه طبق آزمون مشتق دوم، این نقاط مینیمم نسبی هستند.

برای نقاط $(۰,y)$، داریم $A = ۲ye^{-y^۲}$ و $B = C = ۰$. بنابراین $AC = B^۲$ و در نتیجه آزمون مشتق دوم سکوت می‌کند.

طبق ضابطه داریم $f(۰,y) = ۰$. اگر $y > ۰$، آنگاه $f(x,y) > ۰$ و اگر $y < ۰$، آنگاه $f(x,y) < ۰$. بنابراین هر همسایگی نقطه $(۰,۰)$، شامل هم مقادیر کمتر از صفر و هم مقادیر بیشتر از صفر است. بنابراین نقطه $(۰,۰)$ اکسترمم نسبی نیست و در نتیجه زینی است.

راهنمای حل سوال

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

استفاده از آزمون مشتق دوم برای نقاط غیر از نقاط مجموعه $\{(۰,y) | y \in \mathbb{R}\}$

برای حالت دو متغیره داریم:
۱) اگر $AC > B^۲$ و $A > ۰$، نقطه مینیمم نسبی است
۲) اگر $AC > B^۲$ و $A < ۰$، نقطه ماکسیمم نسبی است
۳) اگر $AC < B^۲$، نقطه زینی است
۴) اگر $AC = B^۲$، آزمون مشتق دوم بی نتیجه است

برای $(۰,y)$ها آزمون مشتق دوم سکوت می‌کند اما می‌توانیم با دسته‌بندی مناسب روی مقادیر y، نوع نقاط را تعیین کنیم. از این نکات استفاده می‌کنیم که $f(۰,y) = ۰$، اگر $y > ۰$، $f(x,y) > ۰$ و اگر $y < ۰$، $f(x,y) < ۰$

۵- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

پ) $f(x,y) = x^۲ye^{-(x^۲+y^۲)}$ (آدامز)

ادامه پاسخ پ) حال اگر $y > ۰$، آنگاه نقطه $(۰,y)$ مینیمم نسبی است چون یک همسایگی حول این نقطه یافت می‌شود که در آن مقادیر تابع f بزرگتر از صفر است (یعنی از $f(۰,y) = ۰$ بزرگتر است). حال اگر $y < ۰$، آنگاه نقطه $(۰,y)$ ماکسیمم نسبی است چون یک همسایگی حول این نقطه یافت می‌شود که در آن مقادیر تابع f کمتر از صفر است (یعنی از $f(۰,y)$ کمتر است).

راهنمای حل سوال

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

استفاده از آزمون مشتق دوم برای نقاط غیر از نقاط مجموعه $\{(۰,y)|y \in \mathbb{R}\}$

برای حالت دو متغیره داریم:

۱) اگر $AC > B^۲$ و $A > ۰$، نقطه مینیمم نسبی است

۲) اگر $AC > B^۲$ و $A < ۰$، نقطه ماکسیمم نسبی است

۳) اگر $AC < B^۲$، نقطه زینی است

۴) اگر $AC = B^۲$، آزمون مشتق دوم بی نتیجه است

برای $(۰,y)$ها آزمون مشتق دوم سکوت می‌کند اما می‌توانیم با دسته‌بندی مناسب روی مقادیر y، نوع نقاط را تعیین کنیم. از این نکات استفاده می‌کنیم که $f(۰,y) = ۰$، اگر $y > ۰$، $f(x,y) > ۰$ و اگر $y < ۰$، $f(x,y) < ۰$