

توزیع‌های شناخته شده‌ی گسسته -آمار و احتمالات مهندسی-

مدرس: مشکانی فراهانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

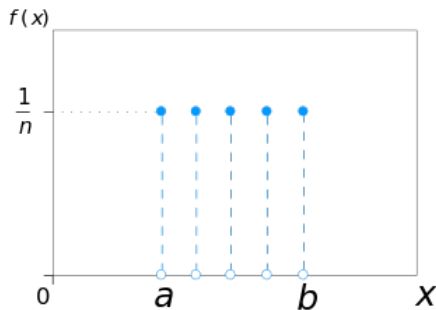
۴ آبان ۱۴۰۰

توزیع‌های شناخته شده (معروف)

بعضی از متغیرهای تصادفی دارای یک الگوی خاصی هستند به طوری که می‌توان برای آنها یک نوع توزیع احتمال را در نظر گرفت.

به عنوان مثال: اگر X تعداد مشاهده خال ۶ در ۷ بار پرتاب یک تاس و Y تعداد برخورد به هدف در ۵ بار پرتاب دارت باشند، این دو متغیر تصادفی دارای یک شکل هستند یعنی هر دو تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش مستقل را بیان می‌کند.

توزیع یکنواخت گسسته



توزیع یکنواخت گسسته

ساده‌ترین توزیع در بین توزیع‌های احتمالی گسسته است.

اگر متغیر تصادفی X مقادیر x_1, x_2, \dots, x_k را با احتمال‌های یکسان اختیار کند، آن‌گاه توزیع احتمال آن‌ها عبارت است از:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{k}, \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k \quad (1)$$

این توزیع مقدار احتمال را بین تمامی مقادیر متغیر تصادفی به طور یکسان تقسیم می‌کند.

نمادی که برای توزیع یکنواخت گسسته استفاده می‌شود: $X \sim DU(k)$

میانگین و واریانس توزیع یکنواخت گسسته

میانگین و واریانس توزیع یکنواخت گسسته عبارت است از:

$$\mu = E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X_i - \mu)^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2}{k}$$

تعریف

- k را پارامتر توزیع می‌نامند. پارامترهای یک توزیع مقادیر ثابتی هستند که به‌ازای قرار دادن مقادیر مختلف برای آن‌ها توابع چگالی متفاوتی به دست می‌آید.
- به مجموعه تمام توزیع‌های احتمال برای مقادیر مختلف پارامترها، خانواده توزیع احتمال گفته می‌شود.

یک حالت خاص

اگر متغیر تصادفی X مقادیر $1, 2, \dots, n$ را با احتمالات $P(X = x) = \frac{1}{n}$ اختیار کند، می‌گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته بر $\{1, 2, \dots, n\}$ است:

$$E(X) = \sum_{x=1}^n xP(X = x) = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^n x^2 P(X = x) = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

یک حالت خاص

اگر متغیر تصادفی X مقادیر متوالی $a, a+1, \dots, b$ را با احتمالات مساوی اختیار کند، می‌گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته است:

$$P(X = x) = \frac{1}{b - a + 1}$$

$$E(X) = \sum_{x=a}^b xP(X = x) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

مثال ۱

یک صفحه‌ی هدف‌زنی دایره‌ای شکل به ۱۵ قطاع مساوی تقسیم شده و با شماره‌های ۱ تا ۱۵ متمایز شده است. فرض کنید متغیر تصادفی X برابر عددی باشد که سوزن در قطاع مربوط به آن اصابت می‌کند.

الف- تابع احتمال، امید ریاضی و واریانس X را به دست آورید.

ب- احتمال این که سوزن در قطاع با شماره‌ی کمتر از ۱۰ بخورد، چه قدر است؟

راه‌حل:

$$\text{الف- } P(X = x) = \frac{1}{15}, \quad x = 1, 2, \dots, 15$$

$$E(X) = \frac{1 + 15}{2} = 8$$

$$Var(X) = \frac{15^2 - 1}{12} = 18/7$$

$$\text{ب- } P(X < 10) = \frac{9}{15}$$

مثال ۲

اندازه‌گیری ضخامت از یک فرآیند روکش سیم‌ها به نزدیکترین صدم میلیمتر انجام می‌شود. اندازه‌گیری ضخامت به طور یکنواخت با مقادیر ۰/۱۵، ۰/۱۶، ۰/۱۷، ۰/۱۸ و ۰/۱۹ توزیع می‌شود. میانگین و واریانس ضخامت روکش برای این فرآیند را تعیین کنید.

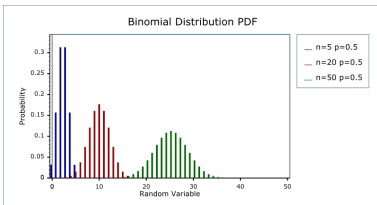
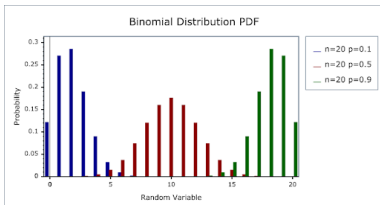
راه‌حل:

$$X = \frac{1}{100}Y, \quad Y = 15, 16, 17, 18, 19$$

$$E(X) = E\left(\frac{1}{100}Y\right) = \frac{1}{100}E(Y) = \frac{1}{100} \times \frac{15+19}{2} = 0/17 \text{ mm}$$

$$Var(X) = Var\left(\frac{1}{100}Y\right) = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \times \frac{(19-15+1)^2 - 1}{12} = 0/0002 \text{ mm}^2$$

توزیع دوجمله‌ای



آزمایش برنولی

هر آزمایش تصادفی که تنها به دو برآمد ممکن مانند S و F منجر شود، را یک آزمایش برنولی گویند؛ مشروط بر آنکه بتواند در شرایط یکسان و مستقل از هم تکرار شوند.

معمولاً برآمدی را که بر آن تأکید بیشتری داریم را با S نمایش داده و آن را "موفقیت" (برآمد مد نظر سؤال) و در نتیجه برآمد دوم که F می‌باشد را "شکست" می‌خوانیم.

فضای نمونه‌ی این آزمایش برنولی $S^* = \{S, F\}$ است.

حال اگر $p = P(S)$ و $q = P(F)$ آنگاه p احتمال موفقیت و q احتمال شکست خواهد بود.

از آن جا که $1 = P(S) + P(F)$ است، پس $1 = p + q$ و در نتیجه: $q = 1 - p$

فرآیند برنولی

فرآیند برنولی دارای ویژگی‌های زیر است:

- ۱- آزمایش شامل n امتحان تکراری است.
- ۲- هر آزمایش به برامدی منجر می‌شود که آن را می‌توان موفقیت یا شکست تعبیر کرد.
- ۳- احتمال موفقیت که آن را با p نشان می‌دهند، از آزمایشی به آزمایش دیگر ثابت است.
- ۴- آزمایش‌های تکراری مستقل هستند.

آزمایش برنولی

اکنون متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{اگر موفقیت رخ دهد} \\ 0, & \text{اگر شکست رخ دهد} \end{cases}$$

در این صورت X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $R_X = \{0, 1\}$ است.

این متغیر تصادفی که به صورت تعداد پیروزی‌ها در یک آزمایش برنولی تعریف می‌شود را یک متغیر تصادفی برنولی می‌نامند.

توزیع دو جمله‌ای

تجربه‌ای را در نظر بگیرید که در آن یک آزمایش برنولی ثابت با احتمال موفقیت p ، n بار مستقلاً تکرار شوند.

هدف از انجام چنین آزمایشی تعیین توزیع X تعداد موفقیت‌ها در n بار تکرار یک آزمایش برنولی باشد. مثل پرتاب ۱۰ بار یک سکه سالم و تعیین توزیع تعداد شیرها.

این متغیر تصادفی را با $X \sim \text{Bin}(n, p)$ نمایش داده و تابع احتمال، میانگین و واریانس آن به صورت زیر هستند:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1 - p) = npq$$

n : تعداد دفعات تکرار آزمایش p : احتمال موفقیت هر دو پارامترهای توزیع هستند.

یک نکته و یک تذکر

توزیع برنولی حالت خاصی از توزیع دو جمله‌ای است، در حالت $X \sim \text{Bin}(n=1, p)$.

اگر $X \sim \text{Bin}(n, p)$ آنگاه $P(X=x)$ بدین معنی است که در n آزمایش مستقل برنولی ما x موفقیت و $n-x$ شکست داشته باشیم.

مثال ۳

سکه سالمی را چهار بار به هوا پرتاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه سه بار خط ظاهر شود.

راه‌حل:

X : تعداد دفعاتی که خط ظاهر می‌شود، در ۴ بار پرتاب سکه.

$$n = 4$$

$$x = 3$$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{ظاهر شدن خط}) = \frac{1}{2}$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$$

مثال ۴

یک تاس سالم را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه خال ۶ حداکثر ۲ بار مشاهده شود را بیابید.

راه حل:

X : تعداد دفعاتی که خال ۶ ظاهر می‌شود، در ۵ بار پرتاب تاس. $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$n = 5 \quad x = 0, 1, 2$$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{ظاهر شدن خال ۶}) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 0.94$$

مثال ۵

آزمونی چهار جوابی که تنها یک گزینه آن صحیح است داده شده است. اگر تعداد سوال‌های آزمون ۲۵ عدد باشد و دانشجو هر سوال را به طور تصادفی و مستقل از یکدیگر پاسخ دهد

الف- احتمال اینکه دقیقاً ۱۰ سوال را پاسخ صحیح دهد چقدر است؟

ب- انتظار دارید به طور متوسط دانشجو چه تعدادی از سوالات را صحیح پاسخ دهد؟

راه‌حل:

X : تعداد سوالاتی که صحیح پاسخ می‌دهد، در بین ۲۵ سوال تستی. $X \sim Bin(n, p)$

$$n = 25 \quad x = 10$$

$$p = P(\text{پروزی}) = P(\text{صحیح پاسخ دادن}) = \frac{1}{4} \Rightarrow q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

الف- $P(X = 10) = \binom{25}{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$

ب- $E(X) = np = 25 \times \frac{1}{4} = 6.25$

مثال ۶

ویزیتوری برای فروش کالای خاصی به درب منازل مراجعه می‌کند. وی ۱۰ درصد شانس دارد که بتواند کالای خود را به خانم خانه‌دار آن منزل بفروشد. اگر او در روز به ۲۰ منزل مراجعه کند، مطلوبست احتمال اینکه

الف- یک فروش داشته باشد.

ب- بیش از یک فروش داشته باشد.

راه‌حل:

X : تعداد کالاهایی که به ۲۰ خانه فروخته می‌شود. $X \sim \text{Bin}(n = 20, p = 0.1)$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{فروختن کالا}) = 0.1 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.1 = 0.9$$

الف- $P(X = 1) = \binom{20}{1} (0.1)^1 (0.9)^{19}$

ب- $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}$

$$= 1 - \left\{ \binom{20}{0} (0.1)^0 (0.9)^{20} + \binom{20}{1} (0.1)^1 (0.9)^{19} \right\} = 0.61$$

مثال ۷

هر نمونه آب ۱۰ درصد احتمال دارد که آلاینده آلی خاصی را داشته باشد. فرض کنید که نمونه‌ها با توجه به وجود آلاینده مستقل هستند. این احتمال را پیدا کنید که در ۱۸ نمونه بعدی، دقیقاً ۲ نمونه حاوی آلاینده باشد.

راه حل:

X : تعداد نمونه‌هایی که آلاینده دارند، در بین ۱۸ نمونه. $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$n = 18 \quad x = 2$$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{داشتن آلاینده}) = 0.1$$

$$q = 1 - p = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$P(X = 2) = \binom{18}{2} (0.1)^2 (0.9)^{16}$$

مثال ۸

از آنجا که همه مسافران هواپیمایی برای صندلی‌های رزرو شده خود حضور ندارند، یک شرکت هواپیمایی برای بلیط پرواز که فقط ۱۲۰ مسافر در آن قرار دارد، ۱۲۵ بلیط می‌فروشد. احتمال عدم حضور مسافر ۰/۱۰ است و مسافران به طور مستقل رفتار می‌کنند.

الف) این احتمال که هر مسافری که حاضر شود می‌تواند پرواز داشته باشد، چقدر است؟
ب) احتمال پرواز با صندلی‌های خالی چه قدر است؟

راه‌حل:

X : تعداد مسافرانی که در پرواز حضور ندارند، در بین ۱۲۵ مسافر. $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$p = P(\text{پیروزی}) = P(\text{عدم حضور مسافر}) = 0/1 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0/1 = 0/9$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$= 1 - \left\{ \binom{125}{0} (0/1)^0 (0/9)^{125} + \dots + \binom{125}{4} (0/1)^4 (0/9)^{121} \right\}$$

توزیع چندجمله‌ای

اگر آزمایشی بیش از دو برآمد ممکن داشته باشد، آن گاه آزمایش دوجمله‌ای به آزمایش چندجمله‌ای تبدیل می‌شود. مثل دسته‌بندی محصولات یک کارخانه به سبک، سنگین و وزن قابل قبول.

اگر آزمایشی به k برآمد E_1, E_2, \dots, E_k با احتمال‌های p_1, p_2, \dots, p_k منجر شود، و اگر متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_k نشان‌دهنده‌ی تعداد وقوع E_1, E_2, \dots, E_k در n امتحان باشند، آن گاه توزیع احتمال آن‌ها عبارت است از:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$
$$\sum_{i=1}^k x_i = n \qquad \sum_{i=1}^k p_i = 1$$

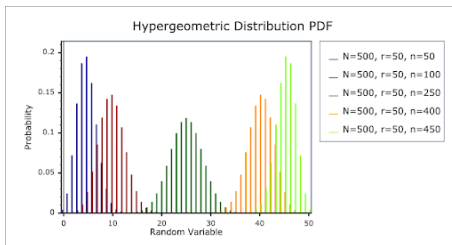
مثال ۹

احتمال این که شرکت کننده در کنفرانسی با هواپیما، اتوبوس، اتومبیل یا قطار وارد شهر محل کنفرانس شود، به ترتیب $0/4$ ، $0/2$ ، $0/3$ و $0/1$ است. احتمال این که از بین ۹ شرکت کننده که به طور تصادفی انتخاب شده اند، ۳ نفر با هواپیما، ۳ نفر با اتوبوس، یک نفر با اتومبیل و ۲ نفر با قطار وارد این شهر شده باشند، چه قدر است؟

راه حل:

$$P(3, 3, 1, 2) = \binom{9}{3, 3, 1, 2} \cdot 0/4^3 \times 0/2^3 \times 0/3^1 \times 0/1^2 = 0/0077$$

توزیع فوق هندسی



توزیع فوق هندسی

در توزیع دو جمله‌ای متغیر تصادفی X تعداد موفقیت‌ها در n آزمایش برنولی مستقل تعریف شد؛ حال چنانچه استقلال بین آزمایش‌ها نقض شود (مثلاً نمونه‌گیری بدون جایگذاری صورت گیرد) با توزیع فوق هندسی روبرو هستیم.

وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن از جامعه‌ای به اندازه‌ی N که در آن K عضو مشخصه‌ای خاص دارند یک نمونه تصادفی به حجم n بدون جایگذاری استخراج شود.

حال اگر X تعداد موفقیت‌هایی که در این نمونه‌ی n تایی (بدون جایگذاری) رخ می‌دهد باشد، داریم:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{N} \quad \text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right)$$

تذکر

برای نمایش توزیع فوق هندسی از نماد $X \sim HG(N, K, n)$ استفاده می‌شود که در آن:
 N : تعداد اعضای جامعه
 K : تعداد اعضای جامعه موفقیت
 n : تعداد اعضای نمونه‌ی انتخابی

در توزیع فوق هندسی $P(X = x)$ بدین معنی است که در انتخاب n عضو از جامعه N تایی ما می‌خواهیم x عضو از جامعه موفقیت K تایی و مابقی از جامعه شکست باشد.

مثال ۱۰

از انبار کارخانه‌ای با ۱۰۰ لامپ که تعداد ۲۰ عدد آنها معیوب هستند نمونه‌ای تصادفی و بدون جایگذاری به حجم ۵ انتخاب می‌کنیم:

الف- احتمال اینکه ۲ عدد از این ۵ لامپ معیوب باشند، چقدر است؟
ب- انتظار دارید در این نمونه ۵ تایی چند لامپ معیوب موجود باشد؟

راه‌حل:

X : تعداد لامپ‌های معیوب در بین ۵ لامپ انتخاب شده

$$\text{الف-} \quad P(X = 2) = \frac{\binom{20}{2} \binom{80}{3}}{\binom{100}{5}}$$

$$\text{ب-} \quad E(X) = n \frac{K}{N} = 5 \times \frac{20}{100} = 1$$

مثال ۱۱

در بین ۱۲ باطری خورشیدی در ویتترین یک فروشگاه، ۹ باطری صفحه تخت کانونی و بقیه متمرکز هستند. اگر شخصی به طور تصادفی ۴ عدد از این باطری‌ها را برای بررسی انتخاب کند، احتمال اینکه ۳ عدد از آن‌ها صفحه تخت باشند را بیابید.

راه‌حل:

X : تعداد باطری‌های صفحه تخت در بین ۴ باطری انتخاب شده

$$P(X = 3) = \frac{\binom{9}{3} \binom{3}{1}}{\binom{12}{4}}$$

مثال ۱۲

در بین ۱۶ متقاضی کار، ۱۰ نفر از آن‌ها دارای مدرک دانشگاهی هستند. اگر ۳ نفر را به طور تصادفی انتخاب کرده و با آن‌ها مصاحبه کنیم، مطلوبست محاسبه احتمال اینکه الف-هیچ کدام دارای مدرک دانشگاهی نباشند.

ب- حداقل دو نفر از آن‌ها دارای مدرک دانشگاهی باشند.

راه حل:

X : تعداد متقاضیانی که مدرک دانشگاهی دارند در بین ۳ نفر انتخاب شده

$$\text{الف- } P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0} \binom{6}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{1}{28}$$

$$\text{ب- } P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{\binom{10}{2} \binom{6}{1}}{\binom{16}{3}} + \frac{\binom{10}{3} \binom{6}{0}}{\binom{16}{3}}$$

مثال ۱۳

از بین اعداد ۱ تا ۹، چهار عدد را به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X عددی باشد که از کوچک‌ترین عدد بزرگ‌تر و از دو تای دیگر کوچک‌تر باشد. $P(X = ۴)$ چه قدر است؟

راه‌حل:

$$P(X = ۴) = \frac{\binom{۳}{۱} \binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{۵}{۲۱}$$

مثال ۱۴

فرض کنید جامعه‌ای به حجم M وجود دارد. می‌دانیم که k تا از اعضای این جامعه مشخصه‌ی خاصی دارند. اگر نمونه‌ای به حجم n از این جامعه استخراج کنیم، مطلوبست احتمال این که x تا از اعضای نمونه خاصیت مذکور را داشته باشند:

الف- در حالت نمونه‌گیری بدون جایگذاری

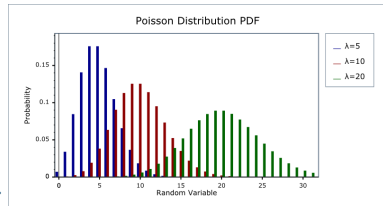
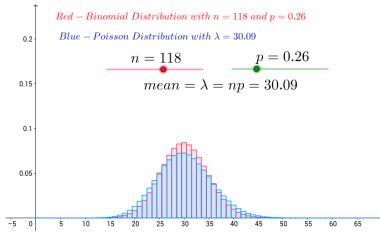
ب- در حالت نمونه‌گیری با جایگذاری

راه‌حل:

$$\text{الف - } P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{n-x}}{\binom{M}{n}}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$\text{ب - } P(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{k}{M}\right)^x \left(1 - \frac{k}{M}\right)^{n-x}$$

توزیع پواسون



فرآیند پواسون

یک بازه از اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. فرض کنید که پیشامدها به طور تصادفی در طول این بازه اتفاق می‌افتند. اگر این بازه را بتوان به زیر فاصله‌هایی با طول کوچک تقسیم کرد به طوری که

۱- احتمال بیش از یک پیشامد در هر زیر فاصله صفر است،

۲- احتمال وقوع یک پیشامد در یک زیر فاصله برای همه زیر فاصله‌ها یکسان بوده و متناسب با طول زیر فاصله است،

۳- رخداد پیشامد در هر زیر فاصله مستقل از سایر زیر فاصله‌ها است،

این آزمایش تصادفی یک فرآیند پواسون نامیده می‌شود.

متغیر تصادفی X که برابر با تعداد پیشامدها در یک بازه است، یک متغیر تصادفی پواسون نامیده می‌شود.

توزیع پواسون

فرض کنید دنباله‌ای از آزمایش‌های برنولی مستقل با پارامتر ثابت p در واحدی از زمان یا مکان در حال انجام‌اند. آنگاه زمانی که n بسیار بزرگ و p کوچک ($p < 0/1$) باشد به قسمی که np مقداری کوچک‌تر از ۱۰ باشد، توزیع دوجمله‌ای به وسیله‌ی توزیع پواسون تقریب زده می‌شود.

در واقع زمانی که با پیشامدهای کمیاب (نادر) سروکار داریم، توزیع پواسون به جای توزیع دوجمله‌ای به کار می‌رود؛ در این صورت قرار می‌دهیم $\lambda = np$.

متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است $X \sim P(\lambda)$ هرگاه برای $\lambda > 0$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

تقریب توزیع دوجمله‌ای

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \quad \lambda = np$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ = \frac{\lambda^k}{k!} \times 1 \times \dots \times 1 \times e^{-\lambda} \times (1-0)^{-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

مثال ۱۵

فرض کنید تعداد غلط‌های تایپی در یک صفحه از کتاب دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = ۰/۵$ باشد. احتمال اینکه الف- دقیقاً یک غلط و ب- حداقل یک غلط در این صفحه باشد را محاسبه کنید.

راه‌حل:

$$\text{الف- } P(X = ۱) = \frac{e^{-۰/۵} \times ۰/۵^۱}{۱!} = ۰/۳۰۳۳$$

$$\begin{aligned} \text{ب- } P(X \geq ۱) &= ۱ - P(X < ۱) = ۱ - P(X = ۰) \\ &= ۱ - \frac{e^{-۰/۵} \times ۰/۵^۰}{۰!} = ۰/۳۹۳۵ \end{aligned}$$

مثال ۱۶

فرض کنید یک نفر به طور متوسط ۵ بار در سال مبتلا به سرماخوردگی می‌شود. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه او در سال آینده

الف- چهار بار مبتلا به سرماخوردگی شود.

ب- حداکثر دو بار مبتلا به سرماخوردگی شود.

راه حل:

$$E(X) = \lambda = 5$$

$$\text{الف- } P(X = 4) = \frac{e^{-5} \times 5^4}{4!} = 0.1755$$

$$\begin{aligned} \text{ب- } P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= e^{-5} + \frac{e^{-5} \times 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} \times 5^2}{2!} = 0.1247 \end{aligned}$$

مثال ۱۷

در یک سیم مسی نازک فرض کنید به طور متوسط $2/3$ عیب در هر میلی متر وجود داشته باشد. احتمال وجود ۲ عیب در ۱ میلی متر از این سیم چه قدر است؟

راه حل:

$$E(X) = \lambda = 2/3$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2/3} \times 2/3^2}{2!} = 0.265$$

مثال ۱۸

نرخ خودکشی در یک ایالت آمریکا برابر با ۱ خودکشی در هر ۱ میلیون نفر در ماه گزارش شده است. احتمال این که در یک شهر ۴ میلیون نفری از آن ایالت، حداقل ۴ خودکشی در ماه رخ دهد، چه قدر است؟

راه حل:

$$\lambda = np = 4000000 \times \frac{1}{1000000} = 4$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\} \\ &= 1 - \left\{ e^{-4} + \frac{e^{-4} \times 4^1}{1!} + \frac{e^{-4} \times 4^2}{2!} + \frac{e^{-4} \times 4^3}{3!} \right\} = 0.566 \end{aligned}$$

مثال ۱۹

اگر X دارای توزیع پواسون و $P(X = 0) = 0.5$ باشد، $E(X)$ چقدر است؟

راه حل:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = 0.5$$

$$\Rightarrow -\lambda = \ln(0.5) \Rightarrow \lambda = \ln(2)$$

$$\Rightarrow E(X) = \lambda = \ln(2)$$

نکته بسیار مهم

فرض کنید که متوسط تعداد اتفاق‌هایی که در مدت زمان ثابت t رخ می‌دهد، برابر λ باشد
 $X \sim P(\lambda)$ ، آنگاه تعداد اتفاق‌هایی که در مدت زمان ثابت mt رخ می‌دهد از توزیع پواسون با پارامتر
 $m\lambda$ پیروی می‌کند $Y \sim P(m\lambda)$.

مثال ۲۰

افراد با نرخ ۱ نفر در هر دو دقیقه وارد یک فروشگاه می‌شوند. احتمال این که هیچ کس در بازه‌ی زمانی ۱۲:۰۰ تا ۱۲:۰۵ وارد فروشگاه نشود، چه قدر است؟

راه‌حل:

$$t = ۲ \text{ min} \quad \lambda = ۱$$

$$t = ۵ \text{ min} \quad \lambda_{New} = ۲/۵$$

$$P(X = ۰) = \frac{e^{-۲/۵} \times (۲/۵)^۰}{۰!} = e^{-۲/۵} = ۰/۰۸۲۱$$

مثال ۲۱

تعداد اتومبیل‌هایی که برای زدن بنزین سوپر به پمپ بنزین معینی مراجعه می‌کنند کاملاً تصادفی بوده و به طور متوسط ۲۴ اتومبیل در ساعت است. اگر برق به مدت ۱۰ دقیقه قطع شود، احتمال اینکه این پمپ بنزین حداقل دو مشتری را در این فاصله از دست بدهد را بیابید.

راه‌حل:

$$t = ۶۰ \text{ min} \quad \lambda = ۲۴$$

$$t = ۱۰ \text{ min} \quad \lambda_{New} = ۴$$

$$\begin{aligned} P(X \geq ۲) &= ۱ - P(X < ۲) = ۱ - \{P(X = ۰) + P(X = ۱)\} \\ &= ۱ - \left\{ \frac{e^{-۴} \times (۴)^۰}{۰!} + \frac{e^{-۴} \times (۴)^۱}{۱!} \right\} = ۰/۹۰۸۴ \end{aligned}$$

مثال ۲۲

اگر متغیر تصادفی X را تعداد تماس‌های اشتباه در روز برای شرکتی تعریف کنیم که در آن به طور متوسط شش تماس اشتباه در روز صورت می‌پذیرد، مطلوبست احتمال اینکه در یک روز معین:

الف- سه تلفن اشتباه زده شود.

ب- ده تلفن اشتباه در دو روز متوالی دریافت شود.

راه‌حل:

$$\text{الف- } E(X) = \lambda = 6 \quad \Rightarrow \quad P(X = 3) = \frac{e^{-6} \times (6)^3}{3!} = 0.0608$$

$$\text{ب- } t = 1 \text{ day} \quad \lambda = 6$$

$$t = 2 \text{ day} \quad \lambda_{New} = 12$$

$$P(X = 10) = \frac{e^{-12} \times (12)^{10}}{10!} = 0.1048$$

مثال ۲۳

تعداد نقص‌های موجود در سطح پنل‌های پلاستیکی مورد استفاده در فضای داخلی خودرو دارای توزیع پواسون با میانگین 0.05 عیب در هر فوت مربع از پنل‌های پلاستیکی است. فرض کنید فضای داخلی یک خودرو دارای 10 فوت مربع پنل پلاستیکی باشد.

(الف) احتمال عدم وجود نقص سطح در فضای داخلی اتومبیل چقدر است؟

(ب) اگر 10 اتومبیل به یک شرکت فروخته شود، احتمال این که هیچکدام از 10 خودرو دارای نقص سطحی نباشند، چقدر است؟

راه‌حل:

$$\text{الف-} \quad \lambda_{New} = 0.05 \times 10 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad P(X = 0) = e^{-0.5} = 0.6065$$

$$\text{ب-} \quad Y \sim B(n = 10, p = 0.6065) \quad \text{تعداد اتومبیل‌هایی که دارای نقص نیستند : } Y$$

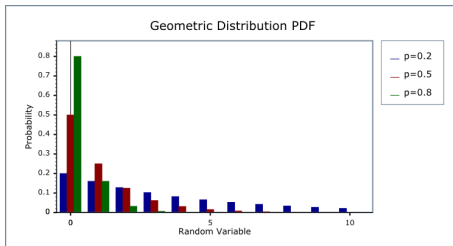
$$P(Y = 0) = \binom{10}{0} (0.6065)^{10} (1 - 0.6065)^0 = 0.007$$

رابطه‌ی بازگشتی در توزیع پواسون

اگر $X \sim P(\lambda)$ باشد، آنگاه رابطه‌ی بازگشتی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x-1} \lambda}{x(x-1)!} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda} \lambda^{x-1}}{x (x-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{x} P(X = x-1) \end{aligned}$$

توزیع هندسی



توزیع هندسی

یک آزمایش برنولی ثابت با احتمال موفقیت p را در نظر بگیرید. فرض کنید این آزمایش را به تعداد نامعینی بار آنقدر تکرار کنیم تا به اولین موفقیت دست یابیم؛ سپس آزمایش را متوقف کنیم. در این صورت اگر $x - 1$ بار اول شکست و بار آخر پیروزی داشته باشیم و با توجه به استقلال آزمایش‌ها داریم:

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2} \quad P(X \leq r) = 1 - q^r$$

$X \sim G(p)$ تعداد آزمایش‌های لازم تا رسیدن به اولین موفقیت

مثال ۲۴

احتمال این که فردی در کنکور قبول شود ۰/۹ است. احتمال اینکه این فرد در دومین سالی که کنکور می‌دهد قبول شود، چقدر است؟

راه‌حل:

X : تعداد آزمون‌ها تا قبول شدن در کنکور $X \sim G(p = ۰/۹)$

$$P(X = ۲) = qp = (۰/۱) \times ۰/۹ = ۰/۰۹$$

مثال ۲۵

یادداشت‌های یک باشگاه شنا نشان می‌دهد که ۰/۲ استخرهای تازه تأسیس آن‌ها ظرف یک سال احتیاج به تعمیر دارد. احتمال اینکه ششمین استخری که در یک سال می‌سازند، اولین استخری باشد که در ظرف یک سال احتیاج به تعمیر داشته باشد را بیابید.

راه‌حل:

X : تعداد استخرهای ساخته شده تا اولین استخری که احتیاج به تعمیر دارد $X \sim G(p = 0/2)$

$$P(X = 6) = q^5 p = (0/8)^5 \times 0/2 = 0/0655$$

مثال ۲۶

فرض کنید که هر یک از تماس‌های شما به یک ایستگاه رادیویی محبوب با احتمال ۰/۰۲ متصل می‌شود، یعنی عدم دستیابی به سیگنال شلوع. فرض کنید تماس‌های شما مستقل است.

الف- احتمال این که اولین تماس موفق شما دهمین تماس شما باشد، چه قدر است؟

ب- احتمال اینکه به بیش از چهار تماس برای برقراری ارتباط داشته باشید، چه قدر است؟

ج- میانگین تعداد تماس‌های لازم برای برقراری ارتباط چه قدر است؟

راه‌حل:

X : تعداد تماس‌ها تا برقراری اولین تماس موفق $X \sim G(p = 0/02)$

الف- $P(X = 10) = q^9 p = (0/98)^9 \times 0/02 = 0/0167$

ب- $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - [1 - q^4]$
 $= 1 - [1 - (0/98)^4] = 0/9224$

ج $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0/02} = 50$

مثال ۲۷

شخص فراموش کاری به خاطر نمی‌آورد که کدام یک از ۱۲ کلیدی که در دست دارد مربوط به دفتر کار اوست. اگر این شخص کلیدها را به تصادف و با جایگذاری امتحان کند، به طور متوسط باید چند کلید را برای باز شدن در دفتر کارش امتحان کند؟

راه حل:

X : تعداد کلیدهای امتحان شده تا اولین کلیدی که در را باز کند $X \sim G(p = \frac{1}{12})$

$$E(X) = \frac{1}{p} = 12$$

مثال ۲۸

سه نفر با هم در یک قهوه‌خانه سکه پرتاب می‌کنند. آن یکی که در اقلیت باشد، پول چای را می‌دهد. اگر سه سکه یک جور بیایند، پرتاب سکه دوباره تکرار می‌شود. احتمال این که کمتر از ۴ بار پرتاب سکه لازم باشد، چه قدر است؟

راه‌حل:

X : تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به اولین غیرهم‌جور $X \sim G(p)$

$$p = P(\text{ظاهر شدن غیرهم‌جور}) = 1 - P\{HHH, TTT\} = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$$

$$q = 1 - p = \frac{1}{4}$$

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) = 1 - q^3 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{63}{64}$$

رابطه‌ی بازگشتی در توزیع هندسی

اگر $X \sim G(p)$ باشد، آنگاه رابطه‌ی بازگشتی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}P(X = x + 1) &= q^x p \\&= q q^{x-1} p \\&= q P(X = x)\end{aligned}$$

خاصیت بی حافظگی توزیع هندسی

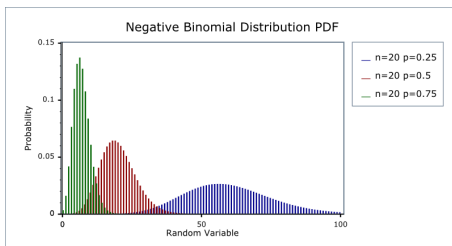
اگر $X \sim G(p)$ باشد، آن گاه رابطه‌ی زیر که به خاصیت بی حافظگی شناخته می‌شود، برقرار است:

$$P(X = x + n | X > n) = P(X = x)$$

در بین توزیع‌های گسسته فقط توزیع هندسی این خاصیت را دارد.
اگر آزمایشی را n بار تکرار کرده باشید و به پیروزی نرسیده باشید، احتمال این که در $x + n$ -امین بار به پیروزی برسید با احتمال این که در x -امین بار به پیروزی می‌رسیدید، برابر است.
توزیع هندسی شکست‌ها را در حافظه‌ی خود ثبت نمی‌کند. به بیان ساده، تعداد شکست‌های گذشته، احتمال پیروز شدن در آزمایش‌های بعدی را افزایش نمی‌دهد.

$$\begin{aligned} P(X = x + n | X > n) &= \frac{P(X = x + n, X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X = x + n)}{P(X > n)} \\ &= \frac{q^{x+n-1}p}{q^n} = q^{x-1}p = P(X = x) \end{aligned}$$

توزیع دو جمله‌ای منفی (پاسکال)



توزیع دو جمله‌ای منفی (پاسکال)

یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را به تعداد نامعین بار مستقلاً تکرار می‌کنیم.

فرض کنید این بار X نشان‌دهنده‌ی تعداد آزمایش‌ها تا رسیدن به r -امین موفقیت باشد؛ که در آن r یک عدد صحیح مثبت است.

اگر r -امین موفقیت در x -امین آزمایش حاصل شود: در x آزمایش دارای r موفقیت و $x - r$ شکست هستیم. احتمال انجام x آزمایش برای حصول r موفقیت برابر است با: $X \sim NB(r, p)$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$Var(X) = r \frac{q}{p^2}$$

مثال ۲۹

احتمال اینکه در پرتاب متوالی یک سکه‌ی سالم، دومین شیر در پنجمین آزمایش به دست آید، چقدر است؟

راه‌حل:

X : تعداد پرتاب‌ها تا مشاهده‌ی دومین شیر
 $X \sim NB(r = ۲, p = \frac{1}{۲})$

$$P(X = ۵) = \binom{۴}{۱} \left(\frac{1}{۲}\right)^۲ \left(\frac{1}{۲}\right)^۳$$

مثال ۳۰

فرض کنید ۲۰ درصد انسان‌ها چپ دست باشند. احتمال اینکه هشتمین مسافری که به یک هواپیما سوار می‌شود، سومین نفری باشد که چپ دست است، چقدر است؟

راه‌حل:

X : تعداد مسافران سوار شده تا سومین شخصی که چپ دست است

$$X \sim NB(r = 3, p = 0.2)$$

$$P(X = 8) = \binom{7}{2} (0.2)^3 (0.8)^5$$

مثال ۳۱

احتمال اینکه تیراندازی به هدف بزند برابر $۰/۸$ است. مطلوبست احتمال اینکه حداقل ۵ بار لازم باشد تا سومین تیر به هدف بخورد.

راه حل:

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) = 1 - [P(X = 4) + P(X = 3)] \\ &= 1 - \left\{ \binom{3}{2} (0/8)^3 (0/2)^1 + \binom{2}{2} (0/8)^2 (0/2)^0 \right\} \end{aligned}$$

مثال ۳۲

میانگین و واریانس تعداد دفعاتی که یک تاس سالم باید به صورت مستقل پرتاب شود تا به چهار نتیجه‌ی یک برسیم، چه قدر است؟

راه حل:

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{4}{\frac{1}{6}} = 24$$
$$\sigma^2 = \frac{rq}{p^2} = \frac{4 \times \frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 120$$

مثال آخر

سکه‌ی سالمی را متوالیاً می‌اندازیم. احتمال این که پنجمین خط قبل از دهمین شیر مشاهده شود، چه قدر است؟

راه‌حل:

X : تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به دهمین شیر
 $X \sim NB(r = 10, p = \frac{1}{2})$

$$P(X = 15) = \binom{14}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.0611$$