فصل ۱۰ – روابط بازگشتی

کلاس تدریس‌یار ریاضیات گسسته

ارائه دهنده: مرتضی دامن افشان

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

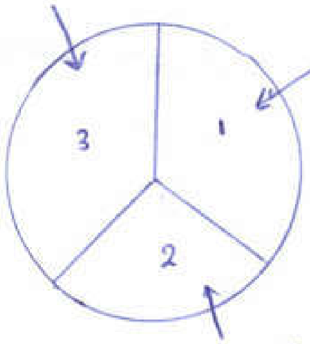
دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر

10

Recurrence Relations

دایره‌ای را به $n \ge 3$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ام. می‌خواهیم این قسمت‌ها را با k رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ ۲ قطاع مجاوری همرنگ نباشند. اگر a_n تعداد روش‌های ممکن برای انجام این کار باشد، a_n را به ازای $n \ge 3$ بیابید.

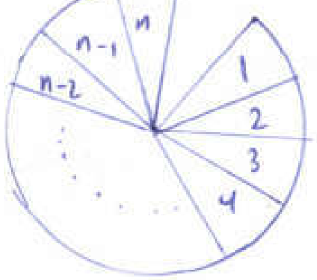
- به ازای $n=3$ داریم:



$$a_3 = k(k-1)(k-2)$$

- در مورد $n \ge 4$ داریم:

فرض کنیم همانند شکل زیر بین قطاع‌های ۱ و n یک فضای خالی وجود داشته باشد:



در این صورت می‌توانیم n قطاع را به صورت زیر رنگ‌آمیزی کنیم:

$$\underset{\text{اولین قطاع}}{k}\ \underset{\text{دومین قطاع}}{(k-1)}(k-1)\cdots \underset{\text{n امین قطاع}}{(k-1)} = k(k-1)^{n-1}$$

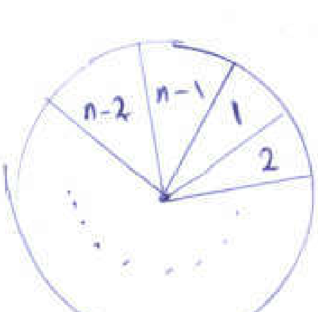
این تعداد رنگ‌آمیزی (یعنی $k(k-1)^{n-1}$) دو دسته زیر را شامل می‌شود:

$k(k-1)^{n-1}$

دسته ① آن دسته از رنگ‌آمیزی‌هایی که قطاع‌های ۱ و n دارای رنگ‌های مختلف هستند.

دسته ② آن دسته از رنگ‌آمیزی‌هایی که قطاع‌های ۱ و n دارای رنگ‌های یکسانی هستند.

دسته ① جواب مطلوب ماست. اما دسته ② دقیقاً دارای تناظر یک به یک با رنگ‌آمیزی n-1 قطاع می‌باشد (شکل روبرو) (در این رنگ‌آمیزی که شامل n-1 قطاع می‌باشد هر دو قطاع مجاور یکدیگر، مختلف الرنگ هستند).



بنابراین داریم :

$$K(K-1)^{n-1} = \text{تعداد رنگ آمیزی های موجود در دسته ①} + \text{تعداد رنگ آمیزی های موجود در دسته ②}$$

$$\Rightarrow K(K-1)^{n-1} = a_n + a_{n-1} \qquad n \geq 3 \qquad (*)$$

ابتدا معادله مشخصه رابطه $(*)$ را بدست می آوریم:

$$a_n + a_{n-1} = 0 \Rightarrow r^n + r^{n-1} = 0 \Rightarrow r = -1$$

$$\Rightarrow a_n^{(h)} = A(-1)^n$$

از آنجایی که در عبارت $(*)$ ، $f(n) = K(k-1)^{n-1}$ می باشد لذا $a_n^{(p)} = B(k-1)^{n-1}$ خواهد بود. حال با جایگذاری این عبارت $a_n^{(p)}$ در $(*)$ داریم:

$$B(K-1)^{n-1} + B(K-1)^{n-2} = K(K-1)^{n-1} \Rightarrow B = K-1$$

حال داریم:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A(-1)^n + (K-1)(K-1)^{n-1}$$
$$= A(-1)^n + (K-1)^n$$

با استفاده از رابطه $a_3 = K(K-1)(K-2)$ ، داریم:

$$a_3 = K(K-1)(K-2) = A(-1)^3 + (K-1)^3 \Rightarrow A = K-1$$

لذا در نهایت ، جواب به شکل زیر می باشد:

$$a_n = (-1)^n(K-1) + (K-1)^n$$

$$n \geq 3 \qquad K \geq 3$$

تمرین ۷ (تمرینات ۱۰-۳) ص ۲۱۲

رابطه بازگشتی $a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=3+5(n)$ را حل کنید.

$n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$

$$\begin{cases} a_n^{(h)} = Ar^n \\ n \geq 0 \quad A, r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow Ar^{n+3} - 3Ar^{n+2} + 3Ar^{n+1} - 3Ar^n = 0$$

$$\Rightarrow (r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$$ (معادله مشخصه)

$$\boxed{a_n^{(h)} = A_0 + A_1 n + A_2 n^2}$$

$$a_n^{(p)} = n^3 \left(B_0 + B_1 n \right) = B_0 n^3 + B_1 n^4$$

با جایگذاری $a_n^{(p)}$ در معادله اصلی داریم:

$$B_0(n+3)^3 + B_1(n+3)^4 - 3\left(B_0(n+2)^3 + B_1(n+2)^4\right)$$
$$+ 3\left(B_0(n+1)^3 + B_1(n+1)^4\right) - \left(B_0 n^3 + B_1 n^4\right) = 3+5n$$

$$\Rightarrow B_0 = -\frac{3}{4}, \quad B_1 = \frac{5}{24}$$

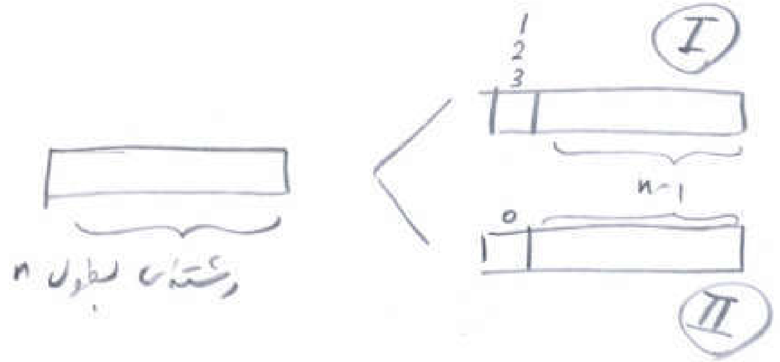
$$a_n^{(p)} = -\frac{3}{4}n^3 + \frac{5}{24}n^4$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = A_0 + A_1 n + A_2 n^2 - \frac{3}{4}n^3 + \frac{5}{24}n^4 \\ n \geq 0 \end{array}}$$

تعداد رشته‌های n رقمی با استفاده از ارقام $\{0,1,2,3\}$ را بیابید بطوری که عدد ۳ هیچ گاه در سمت راست ۰ قرار نگیرد.



رشته‌هایی که رقم سمت چپ‌ترین آن‌ها 1، 2 یا 3 است.

رشته‌هایی که رقم سمت چپ‌تر آن‌ها 0 است.

اگر کل رشته‌های بطول n با شرایط ذکر شده را با a_n نشان دهیم در اینصورت مجموع حالات I و II برابر با a_n است.

$$a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1} \quad (*)$$

$$a_1 = 4$$

حل معادله همگن متناظر

$$a_n - 3a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n^{(h)} = cr^n \Rightarrow cr^n - 3cr^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow r = 3 \Rightarrow \boxed{a_n^{(h)} = A3^n}$$

یافتن جواب خصوصی $\Rightarrow$ $B3^{n-1}$ نمی‌تواند جواب خصوصی باشد (به علت وابستگی به جواب معادله همگن) $\Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = Bn3^{n-1}} \Rightarrow$ جایگذاری در معادله $(*)$

$$Bn3^{n-1} - 3\left(B(n-1)3^{n-2}\right) = 3^{n-1} \Rightarrow B=1 \Longrightarrow \boxed{a_n^{(p)} = n3^{n-1}}$$

$$\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A3^n + n3^{n-1}}$$

$$a_1 = 4 = 3A + 3^0 \Rightarrow \boxed{A=1} \Longrightarrow \boxed{a_n = 3^n + n3^{n-1} \quad n \geq 1}$$

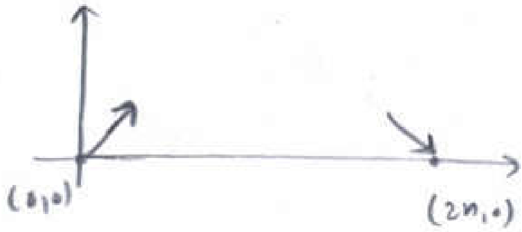
به ازای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$

که در اینجا منظور از C_n ، عدد nام کاتالان است . $C_0 = 1$

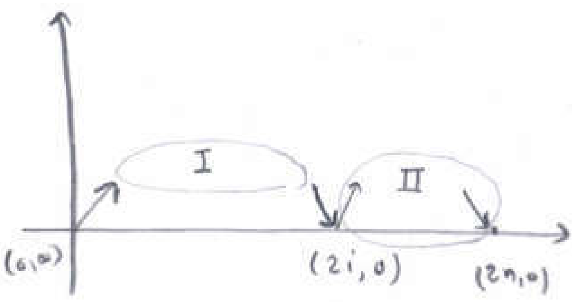
C_n برابر است با کلیه مسیرهایی که بین $(0,0)$ و $(2n,0)$ وجود دارد و این مسیرها صرفاً با استفاده از حرکت‌های $(x,y) \to (x+1,y+1)$ و $(x,y) \to (x+1,y-1)$ انجام می‌گیرد و در عین حال هیچ‌گاه در طول مسیر پایین‌تر از محور x ها نمی‌رویم .

این چون عدد کاتالان nام است .

حال می‌خواهیم به روشی دیگر عدد nام کاتالان را محاسبه کنیم .



کلیه مسیرهای مطلوب ما (با شرایطی که در بالا ذکر شد) از $(0,0)$ شروع می‌شوند اما در نهایت برای نخستین بار در یکی از نقاط $(2i,0)$ (که $1 \le i \le n$) با محور x ها مماس می‌شوند .



پس می‌توان مسیرها را برحسب اینکه اولین نقطه برخوردشان با محور x ها کجاست ، افراز کرد .

پس تعداد مسیرهای مطلوب مفروض که اولین برخورد در $(2i,0)$ صورت گیرد برابر است با :

(مسیرهای مطلوب با شرط بالا) = (تعداد مسیرهای I) × (تعداد مسیرهای II)

$= C_{i-1} \times C_{n-i}$

(توجه : C_n تعداد مسیرهایی به طول $2n$ است . C_i نیز تعداد مسیرهایی به طول $2i$ است .)

مسیرهای I : مسیرهایی هستند که از $(1,1)$ به $(2i-1,1)$ وجود دارند و هیچ گاه از خط $y=1$ پایین‌تر نمی‌آیند.

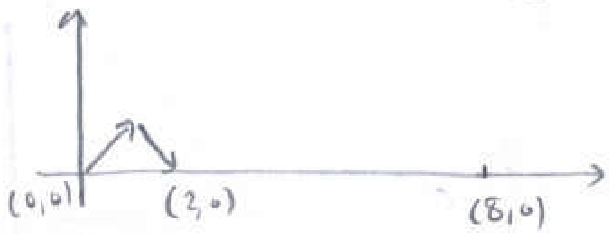
مسیرهای II : چون مسئله اصلی است با ابعاد کوچکتر یعنی کلیه مسیرهایی از $(2i,0)$ به $(2n,0)$ بطوریکه زیر محور x ها نیایند.

$$\Rightarrow \text{کل مسیرها} = C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}\, C_{n-i}$$

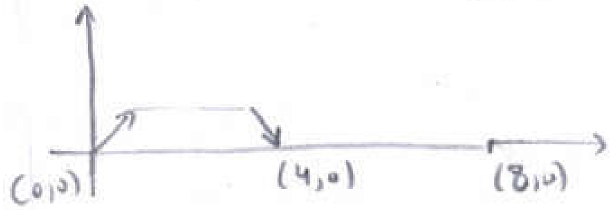
نکته: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

$C_0 = 1 \quad n \in \mathbb{Z}^+$

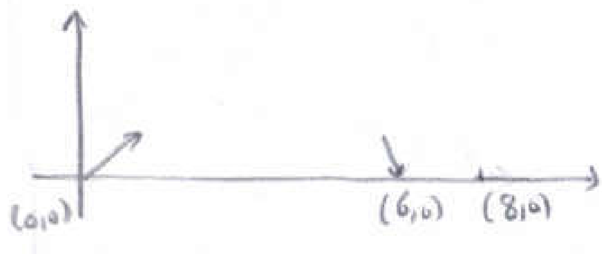
مثال: می‌خواهیم برای $n=4$ ، C_4 را حساب کنیم:



$C_0 C_3$



$C_1 C_2$



$C_2 C_1$

$C_3 C_0$

پس تعداد کل مسیرها می‌شود: $C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0$

$(C_0 = 1)$

به ازای $n \geq 0$ فرض کنید $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

(اگر $n=0$ باشد آنگاه $S=\emptyset$)

اگر a_n تعداد زیرمجموعه‌هایی از S را نشان دهد که شامل هیچ سه عضو متوالی نیستند،
رابطه‌ی بازگشتی برای a_n بیابید.

فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ زیرمجموعه‌ای باشد که هیچ سه عضو متوالی ندارد. $(n \geq 3)$

دراینصورت A به صورت یکی از موارد زیر است:

① $n \notin A \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌هایی از این نوع $= a_{n-1}$

② $\begin{cases} n \in A, \ (n-1) \notin A \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌هایی از این نوع} = a_{n-2} \\ n \in A, \ (n-1) \in A \Rightarrow (n-2) \notin A \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌هایی از این نوع} = a_{n-3} \end{cases}$

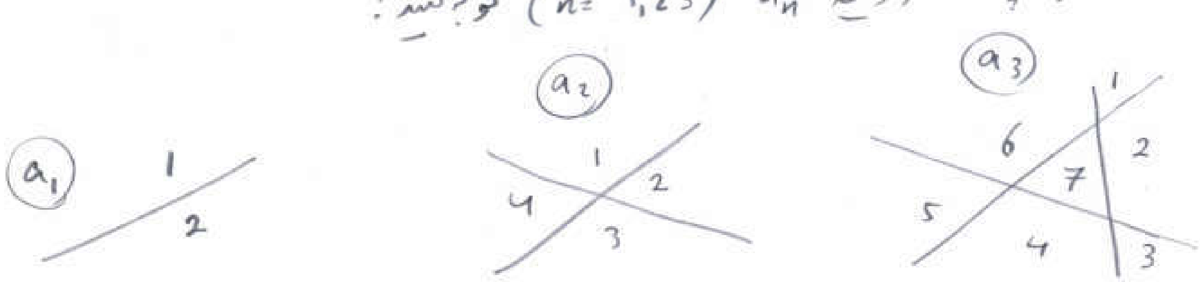
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, & n \geq 3 \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \\ \emptyset \quad \emptyset, \{1\} \quad \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \end{cases}$$

تمرین ۳ . (از تمرینات ۳.۱۰ - ص ۶۱۶)

الف) فرض کنید n خط در صفحه چنان رسم شده اند که هر خط همه خطهای دیگر را قطع می‌کند، ولی هیچ سه خطی در یک نقطه همدیگر را قطع نمی‌کنند. فرض کنید a_n به ازای $n \geq 0$ تعداد ناحیه‌هایی در صفحه باشد که این n خط پدید می‌آورند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

ابتدا به عنوان مثال، به چند مقدار اولیه a_n $(n = 1,2,3)$ توجه کنید:



واما برای حل و رسیدن به یک راه حل کلی: (l_i نشان دهنده i امین خط رسم شده است. $i \in \mathbb{Z}^+$)

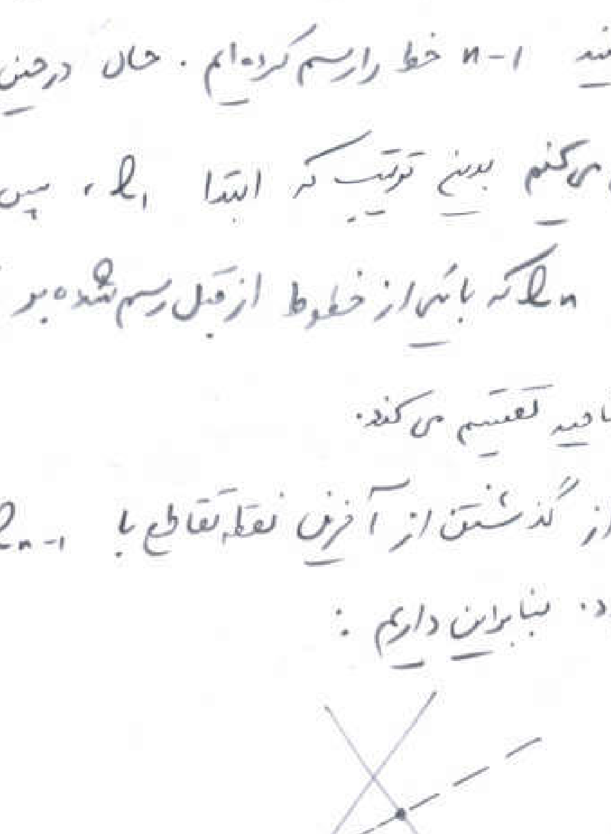
فرض کنید $n-1$ خط را رسم کرده‌ام. حال در حین نصب n امین خط (یعنی l_n) یکایک خطوط را قطع می‌کنم بدین ترتیب که ابتدا l_1، سپس l_2، ..... و درنهایت l_{n-1}.

هربار l_n که با یکی از خطوط از قبل رسم شده برخورد می‌کند، یکی از ناحیه‌های ایجاد شده قبلی را به دو ناحیه تقسیم می‌کند.

و سپس از گذشتن از آخرین نقطه تقاطع با l_{n-1}، یک ناحیه دیگر جدید نیز به دو بخش تقسیم می‌گردد. بنابراین داریم:

$$a_n = a_{n-1} + n$$

$$a_0 = 1$$



$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_0 = 1 \quad n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

معادله همگن متناظر

$$\begin{cases} a_n^{(h)} = Ar^n \\ A, r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow Ar^n - Ar^{n-1} = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow a_n^{(h)} = A1^n = A$$

(معادله مشخصه)

$$\boxed{a_n^{(h)} = A}$$

$$\begin{cases} a_n^{(p)} = n(B + Cn) = Bn + Cn^2 \\ Bn + Cn^2 = B(n-1) + C(n-1)^2 + n \Rightarrow \\ B = C = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \end{cases}$$

نحوه ی محاسبه جواب خصوصی (ضرایب توانهای یکسان n باید با یکدیگر برابر باشند)

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

$$a_0 = 1 = A + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(0)^2 \Rightarrow A = 1$$

پس جواب نهایی:

$$\boxed{\begin{array}{c} a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \\ n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \end{array}}$$

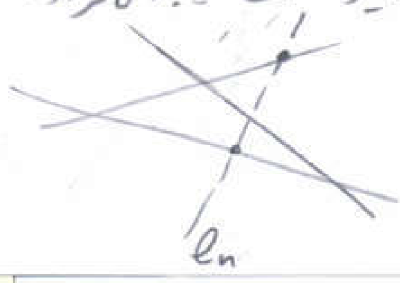
ب) برای وضعیت قسمت الف فرض کنید b_n تعداد ناحیه‌های بیکران حاصل باشد رابطه بازگشتی برای b_n بیابید و آن را حل کنید.

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2 \\ b_1 = 2 \quad n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

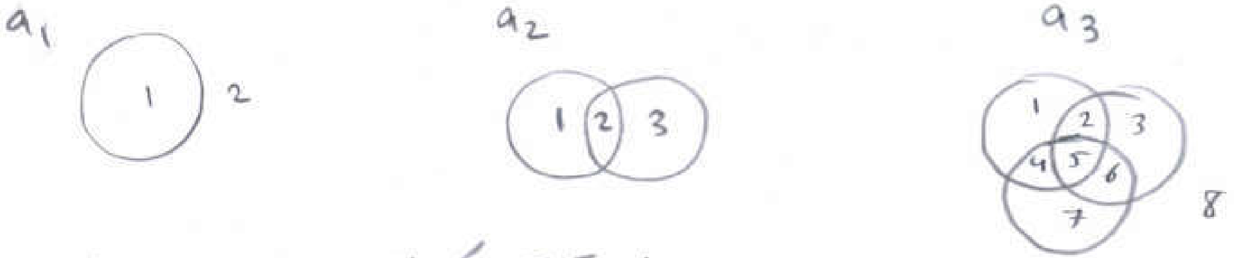
$$\boxed{\begin{cases} b_n = 2n \\ b_0 = 1 \quad n \in \mathbb{Z}^{\geq 1} \end{cases}}$$

در هنگام رسم خط l_n، ابتدا [illegible]) برخورد با اولین خط، و همچنین بعد از برخورد با آخرین خط دو فضای بیکران جدید ایجاد می‌گردد.



n دایره دوبه‌دو متقاطع در صفحه رسم شده‌اند، بطوریکه هیچ ۳ دایره‌ای از یک نقطه نمی‌گذرند.
فرض کنید a_n تعداد ناحیه‌هایی باشد که این n دایره پدید می‌آورند. رابطه‌ای بازگشتی برای a_n بیابید و سپس آن را حل کنید.

ابتدا به عنوان مثال، به چند مقدار اولیه a_n توجه کنید:

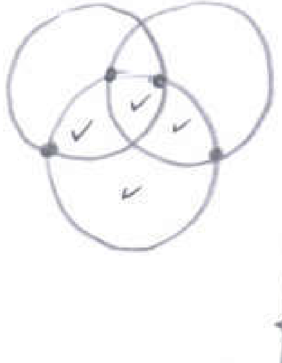


اگر فرض کنیم $n-1$ دایره، صفحه را به a_{n-1} ناحیه تقسیم کرده‌اند، در اینصورت داریم:
در حین رسم دایره n ام، این دایره جدید با هر یک از n دایره قبلی، در ۲ نقطه متقاطع خواهد بود.

سپس روی دایره جدید، $2(n-1)$ نقطه تقاطع ایجاد می‌گردد.

بین هر دو نقطه متوالی روی دایره جدید (دایره n ام)، یک ناحیه درون دایره جدید وجود دارد.

به عنوان مثال دایره سوم که دو دایره قبلی را قطع می‌کند، نواحی زیر را بوجود می‌آورد:



بنابراین با افزودن دایره n ام، تعداد $2(n-1)$ ناحیه جدید به نواحی قبلی اضافه می‌گردد.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \qquad n \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{cases}$$

معادله همگن متناظر

$$\begin{cases} a_n^{(h)} = Ar^n \\ A, r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad Ar^n - Ar^{n-1} = 0 \Rightarrow r = 1 \qquad a_n^{(h)} = A\,1^n = A$$

(معادله مشخصه)

$$\boxed{a_n^{(h)} = A}$$

نحوه محاسبه جواب خصوصی (ضرایب توانهای یکسان n با یکدیگر باید برابر باشند)

$$\begin{cases} a_n^{(P)} = n(B + Cn) = Bn + Cn^2 \\ Bn + Cn^2 = B(n-1) + C(n-1)^2 + 2(n-1) \\ \cancel{Bn} + \cancel{Cn^2} = \cancel{Bn} - B + \cancel{Cn^2} - 2Cn + C + 2n - 2 \\ B - C + 2 = 2n - 2Cn = n(2 - 2C) \\ \begin{cases} B - C + 2 = 0 \\ 2 - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = 1,\ B = -1 \quad \Rightarrow \boxed{a_n^{(P)} = n^2 - n} \end{cases}$$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(P)} = A + n^2 - n$$

$$a_1 = 2 = A + 1 - 1 \Rightarrow A = 2$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a_n = n^2 - n + 2 \\ &a_1 = 2 \quad n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}}$$

To understand recursion, one must first understand recursion.

Stephen Hawking