به نام خدا

تمرین سوم

جبر خطی کاربردی – پاییز ۱۴۰۴

توضیحات

- پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق شناسه‌های تلگرامی گفته شده برای این تمرین یا ایمیل LA.2025Spring@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **۲۳:۵۹، پنجشنبه ۶ آذر** می‌باشد.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber.pdf** آپلود کنید. (مثال: HW1_AmirhoseinShahabi_40131024.pdf)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- فرض کنید P_2 فضای خطی چند جمله‌ای های با درجه حداکثر ۲ است و تبدیل $T: P_2 \to P_2$ به صورت زیر باشد:

$$(T(p))(t) = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds$$

برای مثال اگر $p(t) = 2 + 3t^2$ آنگاه $T(p) = 2 + t^2$ خواهد بود. به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) ثابت کنید T یک تبدیل خطی است.

ب) با استفاده از پایه استاندارد $\{1, t, t^2\}$ برای P_2، تبدیل خطی T را با ماتریس A نمایش دهید.

ج) با استفاده از ماتریس Aی به دست آمده در قسمت ب، در صورتیکه p(t)=t-2 باشد، T(p) را پیدا کنید.

د) Null space این تبدیل را پیدا کرده و بُعد آن را مشخص کنید.

ه) Column space این تبدیل را پیدا کرده و بُعد آن را مشخص کنید.

و) انتظار می‌رود مجموع ابعاد Null space و Column space برابر چه ویژگی شود؟ نشان دهید. در مورد پوشا و یک به یک بودن یا نبودن این تبدیل توضیح دهید.

۲- تبدیل‌های خطی $A: R^3 \to R^2$ و $B: R^2 \to R^3$ را در نظر بگیرید. در نتیجه $BA: R^3 \to R^3$ و $AB: R^2 \to R^2$ خواهد بود. به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) توضیح دهید چرا لزوما بردار غیر صفری مانند $x \in R$ وجود دارد، به صورتیکه $A\vec{x} = 0$.

ب) نشان دهید ماتریس BA نمی‌تواند وارون‌پذیر باشد.

ج) با یک مثال نشان دهید ماتریس AB ممکن است وارون‌پذیر باشد.

۳- اگر U و V زیرفضاهای دو بعدی از R^5 باشند، مجموعه W را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$W := U + V$$

W مجموعه تمام بردارهای به شکل w=u+v است که u و v بردارهای دلخواه $u \in U$ و $v \in V$ هستند.

الف) ثابت کنید W یک فضای برداری است.

ب) تمامی مقادیر ممکن برای بُعد W را پیدا کنید.

۴- با توجه به بردارها و مجموعه‌های ارائه‌شده، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مختصات v در هر یک از پایه‌های B و C را بیابید.

ب) ماتریس انتقال از پایه B به C و از پایه C به B را بنویسید.

$V = M_2(R)$

$v = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$B = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$$
$$C = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$$

۵- فرض کنید $T: R^3 \to R^3$ تبدیل خطی‌ای باشد که $\overrightarrow{e_1}$ را به $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$، $\overrightarrow{e_2}$ را به $-\overrightarrow{e_1}$ و $\overrightarrow{e_3}$ را به $\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ می‌فرستد. (e_j بردار پایه‌ی استاندارد است.)

الف) نمایش ماتریسی T را پیدا کنید.

ب) توضیح دهید نتیجه تبدیل وارون T یا همان T^{-1} برروی بردارهای $\overrightarrow{e_1}$، $\overrightarrow{e_2}$ و $\overrightarrow{e_3}$ چیست.

ج) آیا $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ عضوی از فضای ستونی این تبدیل است؟

۶- استقلال خطی هر یک از مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.(راهنمایی[1]: می‌توانید از مشتق استفاده کنید.)

الف) $\{x, x^2, x^3\}$ $(-1 \le x \le 1)$

ب) $\{sin(nx);\ n\epsilon(\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)\}$ $(0 \le x \le 2\pi)$

ج) $\{sin(x), cos(x), xsin(x)\}$ $(0 \le x \le 2\pi)$

۷- (امتیازی) اگر f و g عضو فضای برداری F باشند و F فضای برداری تمامی تابع‌ها با مشتق‌های پیوسته باشد، به دترمینان زیر، رونسکیَن[2] f و g گفته می‌شود:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}$$

الف) نشان دهید که f و g مستقل خطی هستند اگر رونسکین آن‌ها identically zero نباشد.(=xای وجود داشته باشد که به ازای آن $W(x) \neq 0$)

ب) به طور کلی‌تر رونسکین $f_1, \cdots, f_n \in F$ به صورت دترمینان زیر است:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x) & & f_n'(x)\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

و اگر مقدار این دترمینان identically zero نباشد، $f_1, \cdots, f_n$ مستقل خطی اند.

استقلال خطی مجموعه‌های مسئله ۶ را یک بار دیگر با این روش بررسی کنید.

---

[1] اگر یک تابع در یک بازهٔ مشخص identically zero باشد(=به ازای تمامی مقادیر t در یک بازهٔ مشخص، تابع f(t) مقدار صفر داشته باشد.)، تمامی مشتق‌های آن تابع نیز برروی آن بازه identically zero هستند.

[2] Wronskian: نام‌گذاری شده به یاد josef wronski ریاضیدان لهستانی-فرانسوی که برروی تئوری دترمینان‌ها و فلسفهٔ ریاضی کار می‌کرد.