راهنمای حل سوال

۱- فرض کنید $F=(axy+z)\vec{i}+x^{۲}\vec{j}+(bx+۲z)\vec{k}$ میدان نیروی پایستار باشد. (آدامز)

الف) a و b و پتانسیلی برای F بیابید.

پاسخ الف) چون نیروی F پایستار است، پس $curl\ F=\circ$. در نتیجه باید داشته باشیم:

$$curl\ F=\circ \Longrightarrow \nabla\times F=\circ \Longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ axy+z & x^{۲} & bx+۲z \end{vmatrix}=\circ$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ۱-b=\circ \\ ۲x-ax=\circ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b=۱ \\ a=۲ \end{cases}$$

چون نیروی F پایستار است، پس دارای تابع پتانسیلی مانند φ است؛ یعنی $\nabla\varphi=F$.

میدان برداری F پایستار است اگر و تنها اگر $curl\ F=\circ$

$curl\ F=\nabla\times F$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi=F$

۱- فرض کنید $F=(axy+z)\vec{i}+x^{۲}\vec{j}+(bx+۲z)\vec{k}$ میدان نیروی پایستار باشد. (آدامز)

الف) a و b و پتانسیلی برای F بیابید.

ادامه پاسخ الف) پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=۲xy+z & (۱)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=x^{۲} & (۲)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=x+۲z & (۳)\end{cases}$$

حال از دو طرف رابطه (۱) نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx=\int(۲xy+z)dx\Longrightarrow\varphi=x^{۲}y+zx+g(y,z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^{۲}+\frac{\partial g}{\partial y}\qquad(۴)$$

راهنمای حل سوال

میدان برداری F پایستار است اگر و تنها اگر $curl\ F=۰$

$$curl\ F=\nabla\times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi=F$

۱- فرض کنید $F = (axy + z)\vec{i} + x^۲\vec{j} + (bx + ۲z)\vec{k}$ میدان نیروی پایستار باشد. (آدامز)

الف) a و b و پتانسیلی برای F بیابید.

ادامه پاسخ الف) حال با مقایسه روابط (۲) و (۴) داریم:

$$x^۲ = x^۲ + \frac{\partial g}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow g(y, z) = h(z) \Longrightarrow \varphi = x^۲ y + zx + h(z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به z مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x + h'(z) \qquad (۵)$$

حال با مقایسه روابط (۳) و (۵) داریم:

$$x + ۲z = x + h'(z) \Longrightarrow h'(z) = ۲z \Longrightarrow h(z) = z^۲ + C$$

$$\Longrightarrow \varphi = x^۲ y + zx + z^۲ + C$$

راهنمای حل سوال

میدان برداری F پایستار است اگر و تنها اگر $curl\, F = ۰$

$$curl\, F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

راهنمای حل سوال

۱- فرض کنید $F = (axy + z)\vec{i} + x^۲\vec{j} + (bx + ۲z)\vec{k}$ میدان نیروی پایستار باشد. (آدامز)

ب) کار انجام شده توسط میدان نیرو را بر خم C که فصل مشترک رویه‌های $۲x + y + z = ۳$ و $۹x^۲ + ۹y^2 + ۲z^۲ = ۱۸$ است و نقطه (۱,۱,۰) را به (۰,۰,۳) متصل می‌کند و در یک هشتم اول قرار دارد، محاسبه کنید.

پاسخ ب) چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است. به عبارت دیگر:

$$\int_C F.dr = \varphi(۰,۰,۳) - \varphi(۱,۱,۰) = ۹ - ۱ = ۸$$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۲- کار انجام شده به وسیله میدان نیروی

$$F = \left(y^{۲}\cos x + z^{۳}\right)\vec{i} + (۲y\sin x - ۴)\vec{j} + (۳xz^{۲} + ۲)\vec{k}$$

در حرکت دادن ذره‌ای در امتداد خم $x = sin^{-۱}t, y = ۱ - ۲t, z = ۳t - ۱, (۰ \leq t \leq ۱)$ را بیابید. (آدامز)

پاسخ) اگر خم داده شده را C در نظر بگیریم، به دنبال یافتن $\int_C F.dr$ هستیم. ابتدا نشان می‌دهیم که نیروی F پایستار است. مقدار $curl\ F$ را محاسبه می‌کنیم:

$$curl\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^{۲}\cos x + z^{۳} & ۲y\sin x - ۴ & ۳xz^{۲} + ۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۰\vec{i} + \left(۳z^{۲} - ۳z^{۲}\right)\vec{j} + (۲y\cos x - ۲y\cos x)\vec{k}$$

$$= ۰$$

چون $curl\ F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس F پایستار است و دارای تابع پتانسیلی مانند φ است به طوری که $\nabla\varphi = F$.

راهنمای حل سوال

چون $curl\ F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\ F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۲- کار انجام شده به وسیله میدان نیروی

$$F = \left(y^{۲}\cos x + z^{۳}\right)\vec{i} + (۲y\sin x - ۴)\vec{j} + (۳xz^{۲} + ۲)\vec{k}$$

در حرکت دادن ذره‌ای در امتداد خم $x = sin^{-۱} t, y = ۱ - ۲t, z = ۳t - ۱, (۰ \leq t \leq ۱)$ را بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) با توجه به $\nabla\varphi = F$، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = y^{۲}\cos x + z^{۳} & (۱) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = ۲y\sin x - ۴ & (۲) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = ۳xz^{۲} + ۲ & (۳) \end{cases}$$

حال از دو طرف رابطه (۱) نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = \int (y^{۲}\cos x + z^{۳})\, dx \Longrightarrow \varphi = y^{۲}\sin x + z^{۳}x + g(y,z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = ۲y\sin x + \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (۴)$$

راهنمای حل سوال

چون $curl\ F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\ F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۲- کار انجام شده به وسیله میدان نیروی

$$F = \left(y^{۲} \cos x + z^{۳}\right)\vec{i} + (۲y \sin x - ۴)\vec{j} + (۳xz^{۲} + ۲)\vec{k}$$

در حرکت دادن ذره‌ای در امتداد خم $x = sin^{-۱} t, y = ۱ - ۲t, z = ۳t - ۱, (۰ \leq t \leq ۱)$

را بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال با مقایسه روابط (۲) و (۴) داریم:

$$۲y \sin x - ۴ = 2y \sin x + \frac{\partial g}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = -۴ \Longrightarrow g(y, z) = -۴y + h(z)$$

$$\Longrightarrow \varphi = y^{۲} \sin x + z^{۳} x - ۴y + h(z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به z مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = ۳z^{۲} x + h'(z) \qquad (۵)$$

حال با مقایسه روابط (۳) و (۵) داریم:

$$۳xz^{۲} + ۲ = ۳z^{۲} x + h'(z) \Longrightarrow h'(z) = ۲ \Longrightarrow h(z) = ۲z + C$$

$$\Longrightarrow \varphi = y^{۲} \sin x + z^{۳} x - ۴y + ۲z + C$$

راهنمای حل سوال

چون $curl\, F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\, F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۲- کار انجام شده به وسیله میدان نیروی

$$F=\left(y^2\cos x+z^3\right)\vec{i}+(2y\sin x-4)\vec{j}+(3xz^2+2)\vec{k}$$

در حرکت دادن ذره‌ای در امتداد خم $x=sin^{-1}t, y=1-2t, z=3t-1, (0\le t\le 1)$ را بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال اگر برای خم از γ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\gamma(0)=(0\,1,-1),\qquad \gamma(1)=\left(\frac{\pi}{2},-1,2\right)$$

در نتیجه برای محاسبه $\int_C F.dr$ خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr=\varphi\left(\frac{\pi}{2},-1,2\right)-\varphi(0,1,-1)=(4\pi+9)-(-6)=4\pi+15$$

راهنمای حل سوال

چون $curl\,F=0$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\,F=\nabla\times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi=F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۳- اگر $F=(y+z\cos(xz),x,x\cos(xz))$ باشد، مقدار انتگرال $\int_C F.dr$ را محاسبه کنید که در آن C خم پارامتری زیر است: (پایان ترم ۹۶)

$$\gamma(t)=\left(e^{\cos(\pi t^{۲})},e^{\cos(\pi t)+\sin(\pi t)},\cos(\pi t)\right),\qquad ۰\le t\le ۱$$

پاسخ) ابتدا نشان می‌دهیم که نیروی F پایستار است. مقدار $curl\,F$ را محاسبه می‌کنیم:

$$curl\,F=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z\cos(xz) & x & x\cos(xz)\end{vmatrix}$$

$$=(۰)\vec{i}+(\cos(xz)-xz\sin(xz)-\cos(xz)+xz\cos(xz))\vec{j}+(۱-۱)\vec{k}$$

$$=۰$$

چون $curl\,F=۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس F پایستار است و دارای تابع پتانسیلی مانند φ است به طوری که $\nabla\varphi=F$.

راهنمای حل سوال

چون $curl\,F=۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\,F=\nabla\times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi=F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۳- اگر $F=(y+z\cos(xz),x,x\cos(xz))$ باشد، مقدار انتگرال $\int_C F.dr$ را محاسبه کنید که در آن C خم پارامتری زیر است: (پایان ترم ۹۶)

$$\gamma(t)=\left(e^{\cos(\pi t^{2})},e^{\cos(\pi t)+\sin(\pi t)},\cos(\pi t)\right),\qquad 0\le t\le 1$$

ادامه پاسخ) با توجه به $\nabla\varphi=F$، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=y+z\cos(xz) & (1)\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=x & (2)\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=x\cos(xz) & (3)\end{cases}$$

حال از دو طرف رابطه (۱) نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx=\int(y+z\cos(xz))\,dx\Longrightarrow\varphi=xy+\sin(xz)+g(y,z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x+\frac{\partial g}{\partial y}\qquad(4)$$

راهنمای حل سوال

چون $curl\,F=0$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\,F=\nabla\times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi=F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

راهنمای حل سوال

۳- اگر $F = (y + z\cos(xz), x, x\cos(xz))$ باشد، مقدار انتگرال $\int_C F.dr$ را محاسبه کنید که در آن C خم پارامتری زیر است: (پایان ترم ۹۶)

$$\gamma(t) = \left(e^{\cos(\pi t^{۲})}, e^{\cos(\pi t)+\sin(\pi t)}, \cos(\pi t)\right), \qquad ۰ \le t \le ۱$$

ادامه پاسخ) حال با مقایسه روابط (۲) و (۴) داریم:

$$x = x + \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ۰ \Rightarrow g(y,z) = h(z)$$

$$\Rightarrow \varphi = xy + \sin(xz) + h(z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به z مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x\cos(xz) + h'(z) \qquad (۵)$$

حال با مقایسه روابط (۳) و (۵) داریم:

$$x\cos(xz) = x\cos(xz) + h'(z) \Rightarrow h'(z) = ۰ \Rightarrow h(z) = C$$

$$\Rightarrow \varphi = xy + \sin(xz) + C$$

چون $curl\, F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\, F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۳- اگر $F=(y+z\cos(xz),x,x\cos(xz))$ باشد، مقدار انتگرال $\int_C F.dr$ را محاسبه کنید که در آن C خم پارامتری زیر است: (پایان ترم ۹۶)

$$\gamma(t)=\left(e^{\cos(\pi t^{۲})},e^{\cos(\pi t)+\sin(\pi t)},\cos(\pi t)\right),\qquad ۰\le t\le ۱$$

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\gamma(۰)=(e,e,۱),\qquad \gamma(۱)=\left(e^{-۱},e^{-۱},-۱\right)$$

در نتیجه برای محاسبه $\int_C F.dr$ خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr=\varphi\ (e^{-۱},e^{-۱},-۱)-\varphi(e,e,۱)=(e^{-۲}+\sin(-e^{-۱}))-\left(e^{۲}+\sin(e)\right)$$

$$=e^{-۲}+\sin(-e^{-۱})-e^{۲}-\sin(e)$$

راهنمای حل سوال

چون $curl\ F=۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\ F=\nabla\times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi=F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۴- فرض کنید C خم $r(t) = (۱ - t)e^t\vec{i} + t\vec{j} + ۲t\vec{k}$ باشد که در آن $۰ \leq t \leq ۱$.
انتگرال زیر را محاسبه کنید: (پایان ترم ۹۷)

$$\int_C (۱ + x)e^{x+y}\,dx + (xe^{x+y} + ۲y)dy - ۲zdz$$

پاسخ) اگر قرار دهیم $F = \left((۱ + x)e^{x+y}, xe^{x+y} + ۲y, -۲z\right)$، در واقع به دنبال محاسبه $\int_C F.dr$ هستیم. ابتدا نشان می‌دهیم که نیروی F پایستار است. مقدار $curl\ F$ را محاسبه می‌کنیم:

$$curl\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (۱ + x)e^{x+y} & (xe^{x+y} + ۲y) & -۲z \end{vmatrix}$$

$$= (۰)\vec{i} + (۰)\vec{j} + (e^{x+y} + xe^{x+y} - (۱ + x)e^{x+y})\vec{k}$$

$$= ۰$$

چون $curl\ F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس F پایستار است و دارای تابع پتانسیلی مانند φ است به طوری که $\nabla\varphi = F$.

راهنمای حل سوال

چون $curl\ F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\ F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

راهنمای حل سوال

۴- فرض کنید C خم $r(t) = (۱ - t)e^t\vec{i} + t\vec{j} + ۲t\vec{k}$ باشد که در آن $۰ \leq t \leq ۱$.
انتگرال زیر را محاسبه کنید: (پایان ترم ۹۷)

$$\int_C (۱ + x)e^{x+y}\,dx + (xe^{x+y} + ۲y)dy - ۲zdz$$

ادامه پاسخ) با توجه به $\nabla\varphi = F$، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = (۱ + x)e^{x+y} & (۱) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xe^{x+y} + ۲y & (۲) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = -۲z & (۳) \end{cases}$$

حال از دو طرف رابطه (۱) نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx = \int (۱ + x)e^{x+y}\,dx$$

برای محاسبه انتگرال بالا، از روش انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = ۱ + x \\ dv = e^{x+y}\,dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{x+y} \end{cases}$$

چون $curl\, F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\, F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۴- فرض کنید C خم $r(t) = (۱-t)e^t\vec{i} + t\vec{j} + ۲t\vec{k}$ باشد که در آن $۰ \le t \le ۱$. انتگرال زیر را محاسبه کنید: (پایان ترم ۹۷)

$$\int_C (۱+x)e^{x+y}\,dx + (xe^{x+y} + ۲y)dy - ۲zdz$$

ادامه پاسخ) بنابراین:

$$\varphi = \int (۱+x)e^{x+y}\,dx = (۱+x)e^{x+y} - \int e^{x+y}\,dx = xe^{x+y} + g(y,z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = xe^{x+y} + \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (۴)$$

ادامه پاسخ) حال با مقایسه روابط (۲) و (۴) داریم:

$$xe^{x+y} + ۲y = xe^{x+y} + \frac{\partial g}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ۲y \Longrightarrow g(y,z) = y^۲ + h(z)$$

$$\Longrightarrow \varphi = xe^{x+y} + y^۲ + h(z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به z مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = h'(z) \qquad (۵)$$

راهنمای حل سوال

چون $curl\ F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

$$curl\ F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۴- فرض کنید C خم $r(t) = (۱-t)e^t\vec{i} + t\vec{j} + ۲t\vec{k}$ باشد که در آن $۰ \le t \le ۱$.
انتگرال زیر را محاسبه کنید: (پایان ترم ۹۷)

$$\int_C (۱+x)e^{x+y}\,dx + (xe^{x+y} + ۲y)dy - ۲zdz$$

ادامه پاسخ) حال با مقایسه روابط (۳) و (۵) داریم:

$$-۲z = h'(z) \Longrightarrow h(z) = -z^۲ + C$$

$$\Longrightarrow \varphi = xe^{x+y} + y^۲ - z^۲ + C$$

حال داریم:

$$\gamma(۰) = (۱,۰,۰), \qquad \gamma(۱) = (۰,۱,۲)$$

در نتیجه برای محاسبه $\int_C F.dr$ خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr = \varphi(۰,۱,۲) - \varphi(۱,۰,۰) = -۳ - e$$

راهنمای حل سوال

چون $curl\,F = ۰$ و دامنه F، باز، همبند و فاقد حفره است، پس میدان F پایستار است

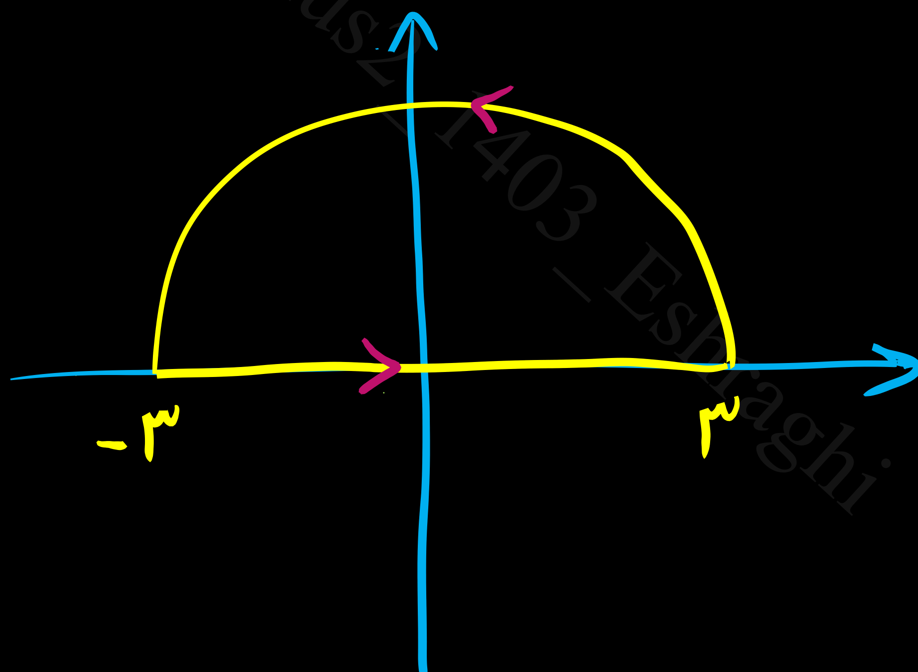
$$curl\,F = \nabla \times F$$

چون نیروی F پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F$

چون نیروی F پایستار است، پس کار انجام شده توسط نیروی F فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و می‌توانیم مقدار تابع پتانسیل را در ابتدا و انتها در نظر بگیریم

۵- مطلوبست محاسبه $\oint_C x^۲ydx - xy^۲dy$ که در آن منحنی C متشکل از نیم دایره بالایی $x^۲ + y^۲ = ۹$ و پاره خط واصل بین $(-۳,۰)$ و $(۳,۰)$ است که در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود. (پایان ترم ۹۷)

پاسخ) منحنی C به صورت زیر می‌باشد:



راهنمای حل سوال

استفاده از قضیه گرین (که شرایط آن برقرار است)

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

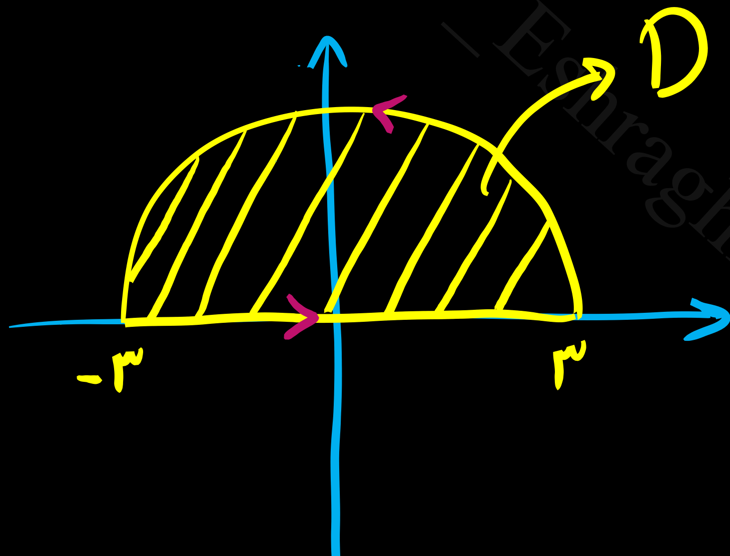
چون ناحیه ما نیم دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد

راهنمای حل سوال

۵- مطلوبست محاسبه $\oint_C x^2ydx - xy^2dy$ که در آن منحنی C متشکل از نیم دایره بالایی $x^2 + y^2 = 9$ و پاره خط واصل بین $(-3,0)$ و $(3,0)$ است که در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود. (پایان ترم ۹۷)

ادامه پاسخ) شرایط قضیه گرین برقرار است. اگر قرار دهیم $P = x^2y$، $Q = -xy^2$، $F = (x^2y, -xy^2)$ و همچنین D ناحیه محصور توسط خم C باشد، آنگاه طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$



استفاده از قضیه گرین (که شرایط آن برقرار است)

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما نیم دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد

۵- مطلوبست محاسبه $\oint_C x^۲ydx - xy^۲dy$ که در آن منحنی C متشکل از نیم دایره بالایی $x^۲ + y^۲ = ۹$ و پاره خط واصل بین $(-۳,۰)$ و $(۳,۰)$ است که در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود. (پایان ترم ۹۷)

ادامه پاسخ) بنابراین:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA = \iint_D -y^۲ - x^۲\, dA$$

طبیعتاً استفاده از مختصات قطبی مناسب خواهد بود. در مختصات قطبی داریم $|J| = r$، $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. برای تعیین حدود r، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و برای تعیین حدود θ، محدوده تغییراتی که زاویه نیم خط با جهت مثبت محور xها دارد را در نظر می‌گیریم. در این جا $۰ \le r \le ۳$ و $۰ \le \theta \le \pi$ است.

بنابراین:

$$I = \oint_C F.dr = \iint_D -y^۲ - x^۲\, dA = \int_۰^\pi \int_۰^۳ -r^۲\, r\, dr\, d\theta = \left(\int_۰^۳ -r^۳\, dr\right)\left(\int_۰^\pi d\theta\right)$$

$$I = \left(-\frac{r^۴}{۴}\Big|_۰^۳\right)\left(\theta\Big|_۰^\pi\right) = -\frac{۸۱\pi}{۴}$$

استفاده از قضیه گرین (که شرایط آن برقرار است)

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

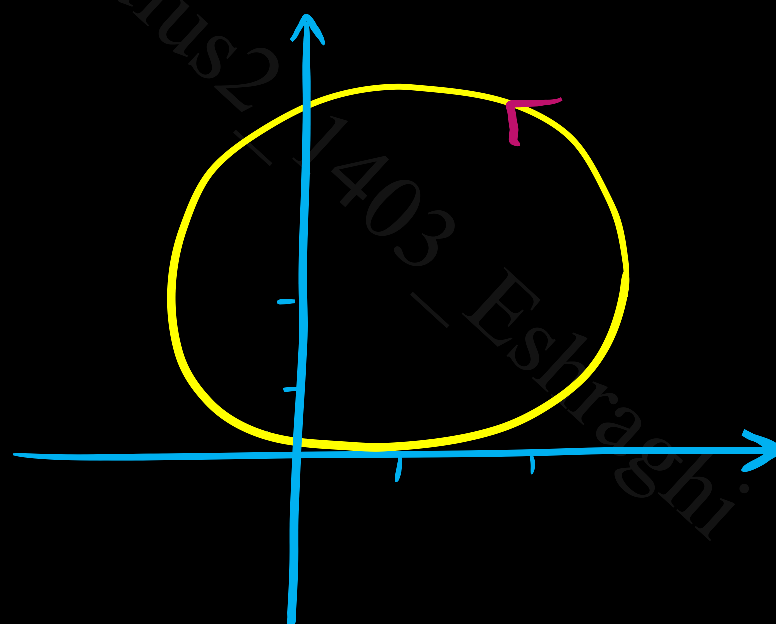
که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما نیم دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد

۶- فرض کنید منحنی C دایره $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است. مطلوب است محاسبه انتگرال زیر: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$\oint_C \left(2xy\cos x^2 - 4y + x^2\cos x^2\right)dx + \left(\sin x^2 + y^2\cos y^2\right)dy$$

پاسخ) خم C به صورت زیر می‌باشد:



شرایط قضیه گرین برقرار است و لذا اگر D ناحیه محصور شده توسط خم C باشد، داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}dA = \iint_D 2x\cos x^2 - 2x\cos x^2 + 4\,dA = \iint_D 4\,dA$$

راهنمای حل سوال

استفاده از قضیه گرین (که شرایط آن برقرار است)

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}dA$$

که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد اما قبل از آن از تغییر متغیر مناسب استفاده می‌کنیم به گونه‌ای که ناحیه جدید ما دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات باشد.

هنگام تغییر متغیر باید J که به صورت زیر است را محاسبه کنیم:

$$J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

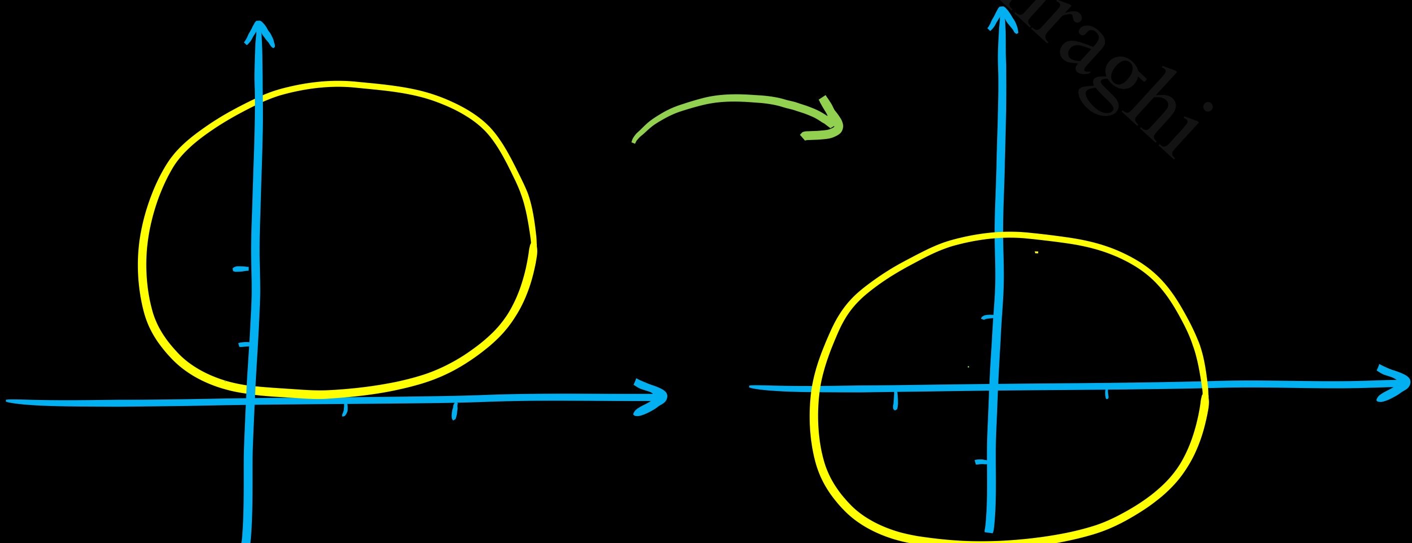
۶- فرض کنید منحنی C دایره $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$ باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است. مطلوب است محاسبه انتگرال زیر: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$\oint_C \left(۲xy\cos x^۲ - ۴y + x^۲\cos x^۲\right)dx + (\sin x^۲ + y^۲\cos y^۲)\,dy$$

ادامه پاسخ) در گام اول تغییر متغیرهای $u = x-۱$ و $v = y-۲$ را در نظر می‌گیریم. حال باید ژاکوبین را محاسبه کنیم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}} = ۱ \Rightarrow |J| = ۱$$

ناحیه جدید ما نیز پس از تغییر متغیر به شکل زیر در خواهد آمد:



راهنمای حل سوال

استفاده از قضیه گرین (که شرایط آن برقرار است)

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد اما قبل از آن از تغییر متغیر مناسب استفاده می‌کنیم به گونه‌ای که ناحیه جدید ما دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات باشد.

هنگام تغییر متغیر باید J که به صورت زیر است را محاسبه کنیم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

۶- فرض کنید منحنی C دایره $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$ باشد که در جهت مثلثاتی در نظر گرفته شده است. مطلوب است محاسبه انتگرال زیر: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$\oint_C \left(۲xy\cos x^۲-۴y+x^۲\cos x^۲\right)dx+\left(\sin x^۲+y^۲\cos y^۲\right)dy$$

ادامه پاسخ) حال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\oint_C F.dr=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲}۴r\ dr\,d\theta=\left(\int_۰^{۲}۴r\ dr\right)\left(\int_۰^{۲\pi}d\theta\right)$$

$$=\left(۲r^۲\Big|_۰^۲\right)\left(\theta\Big|_۰^{۲\pi}\right)$$

$$=۱۶\pi$$

راهنمای حل سوال

استفاده از قضیه گرین (که شرایط آن برقرار است)

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dA$$

که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد اما قبل از آن از تغییر متغیر مناسب استفاده می‌کنیم به گونه‌ای که ناحیه جدید ما دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات باشد.

هنگام تغییر متغیر باید J که به صورت زیر است را محاسبه کنیم:

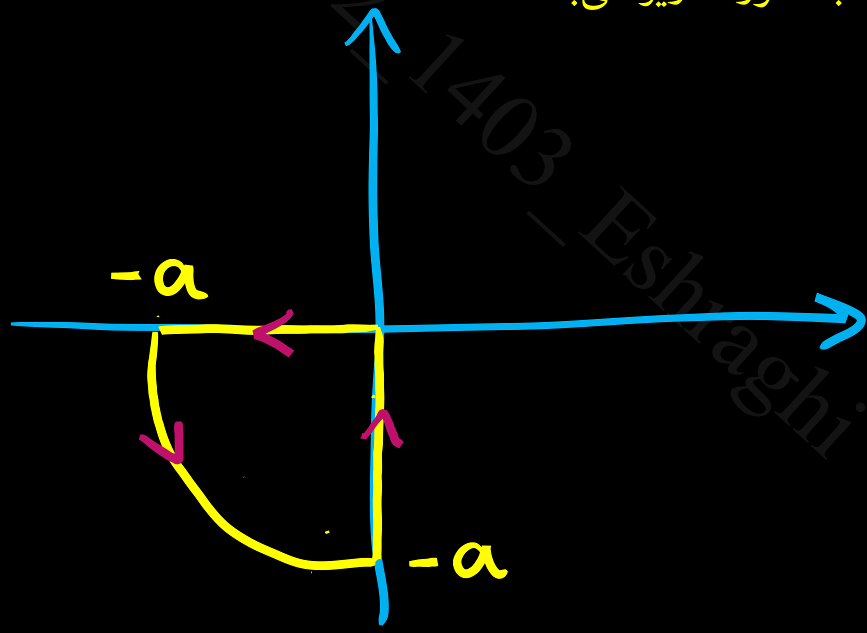
$$J=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

۷- میدان برداری $F=(۲x^۲-۴y^۳,۴x^۳+۸y^۲)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید C مرز ناحیه محصور توسط $x^۲+y^۲\le a^۲$ و $x\le ۰$ و $y\le ۰$ باشد و C دارای جهت مثبت قراردادی است. انتگرال

$$\oint_C \left(۲x^۲-۴y^۳\right)dx+(۴x^۳+۸y^۲)\,dy$$

را محاسبه کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

پاسخ) خم C به صورت زیر می‌باشد:



شرایط قضیه گرین برقرار است و لذا اگر D ناحیه محصور شده توسط خم C باشد، داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dA=\iint_D ۱۲x^۲+۱۲y^۲\,dA$$

راهنمای حل سوال

استفاده از قضیه گرین (که شرایط آن برقرار است)

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dA$$

که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما یک ربع دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد

۷- میدان برداری $F=(۲x^۲-۴y^۳,۴x^۳+۸y^۲)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید C مرز ناحیه محصور توسط $x^۲+y^۲\leq a^۲$ و $x\leq ۰$ و $y\leq ۰$ باشد و C دارای جهت مثبت قراردادی است. انتگرال

$$\oint_C \left(۲x^۲-۴y^۳\right)dx+(۴x^۳+۸y^۲)\,dy$$

را محاسبه کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

ادامه پاسخ) از مختصات قطبی برای حل انتگرال استفاده می‌کنیم.

$$\oint_C F.dr=\int_{\pi}^{\frac{۳\pi}{2}}\int_{۰}^{a}۱۲r^۲r\ dr\,d\theta=\left(\int_{۰}^{a}۱۲r^۳\,dr\right)\left(\int_{\pi}^{\frac{۳\pi}{۲}}d\theta\right)$$

$$=(۳r^۴\Big|_{۰}^{a})(\theta\Big|_{\pi}^{\frac{۳\pi}{۲}})$$

$$=\frac{۳}{۲}\pi a^۴$$

راهنمای حل سوال

استفاده از قضیه گرین (که شرایط آن برقرار است)

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dA$$

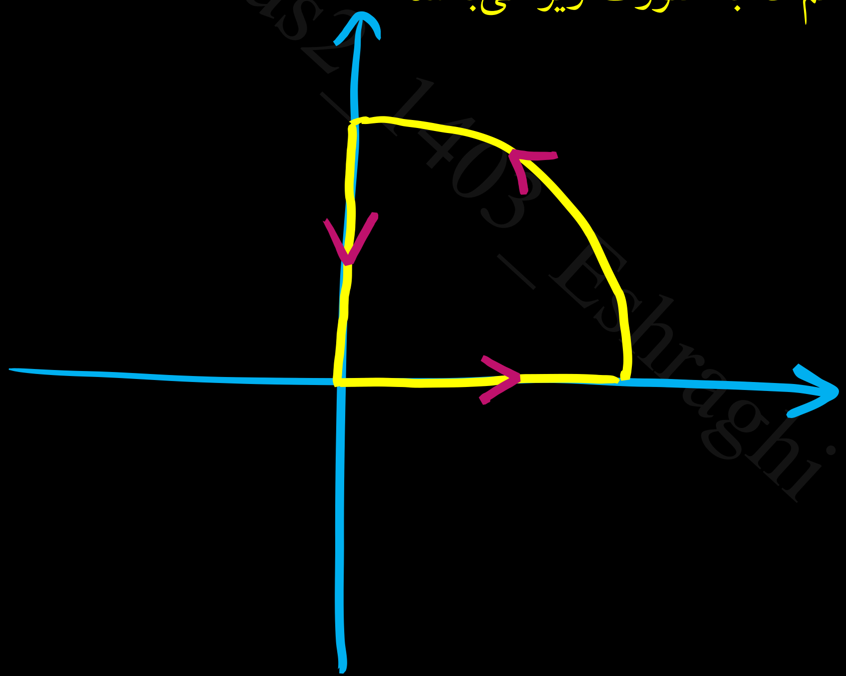
که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما یک ربع دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد

۸- میدان برداری $F=(x-y^{۳},y^{۳}+x^{۳})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^{۲}+y^{۲}\le a^{۲}$ و $x\ge ۰,y\ge ۰$ و C مرز ناحیه D باشد و به طور مثبت جهت دهی شده است. انتگرال $\oint_C F.dr$ را با استفاده از (پایان ترم ۹۵)

الف) قضیه گرین

پاسخ الف) خم C به صورت زیر می‌باشد:



اگر D ناحیه محصور شده توسط خم C باشد، طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dA=\iint_D ۳x^{۲}+۳y^{۲}\,dA=\iint_D ۳(x^{۲}+y^{۲})\,dA$$

راهنمای حل سوال

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dA$$

که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما یک ربع دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد

۸- میدان برداری $F = (x - y^۳, y^۳ + x^۳)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^۲ + y^۲ \leq a^۲$ و $x \geq ۰, y \geq ۰$ و C مرز ناحیه D باشد و به طور مثبت جهت دهی شده است. انتگرال $\oint_C F.dr$ را با استفاده از (پایان ترم ۹۵)

الف) قضیه گرین

ادامه پاسخ الف) طبیعتاً استفاده از مختصات قطبی مناسب خواهد بود.

$$I = \oint_C F.dr = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \int_۰^a ۳r^۲ r \; dr\, d\theta = \left(\int_۰^a ۳r^۳ dr\right)\left(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} d\theta\right)$$

$$= \left(\frac{۳r^۴}{۴}\Bigg|_۰^a\right)\left(\theta \Bigg|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\right)$$

$$= \left(۳\frac{a^۴}{۴}\right)\left(\frac{\pi}{۲}\right)$$

طبق قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

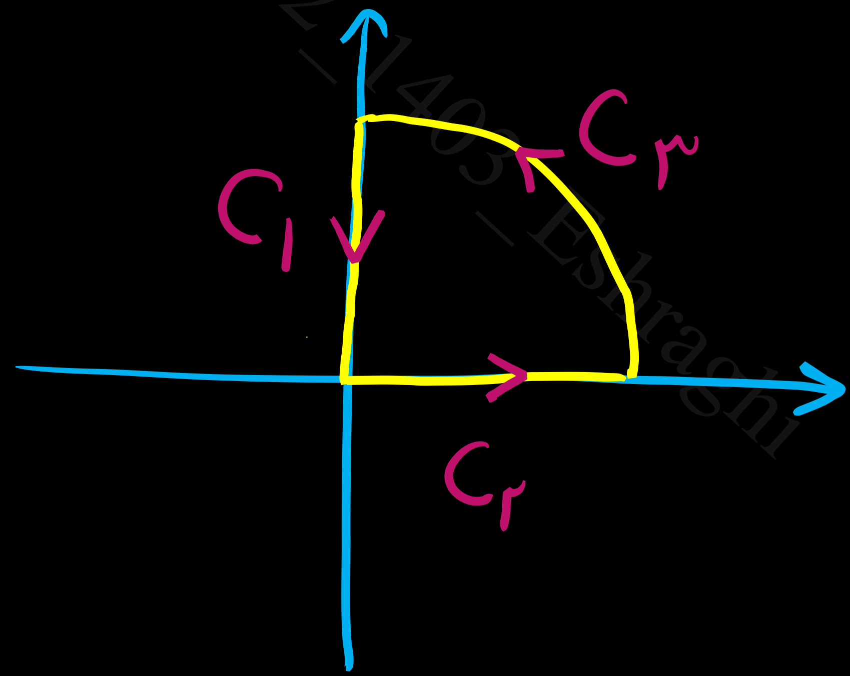
که درآن، D ناحیه محصور شده توسط خم C است

چون ناحیه ما یک ربع دایره است، استفاده از مختصات قطبی برای حل انتگال دوگانه می‌تواند مناسب باشد

۸- میدان برداری $F = (x - y^۳, y^۳ + x^۳)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^۲ + y^۲ \leq a^۲$ و $x \geq ۰, y \geq ۰$ و C مرز ناحیه D باشد و به طور مثبت جهت دهی شده است. انتگرال $\oint_C F.dr$ را با استفاده از (پایان ترم ۹۵)

ب) به طور مستقیم محاسبه کنید.

پاسخ ب) برای محاسبه مستقیم، باید خم را به سه قسمت تقسیم کنیم:



حال مقدار انتگرال را روی خم‌های $C_۱, C_۲, C_۳$ به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم.

راهنمای حل سوال

خم C شامل سه خم $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ است و ما انتگرال مورد نظر را به صورت جداگانه روی این سه خم محاسبه می‌کنیم و پس از آن خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr = \int_{C_۱} F.dr \int_{C_۲} F.dr + \int_{C_۳} F.dr$$

اگر خم ما به شکل یک پاره خط با شروع از A و انتهای B باشد، آنگاه می‌توانیم به شکل زیر آن را پارامتری کنیم:

$$r(t) = A + (B - A)t, \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

برای پارامتری کردن دایره ای به معادله $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = a^۲$، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$x - \alpha = a \cos t, y - \beta = a \sin t$$

$$\int F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\, dt$$

۸- میدان برداری $F=(x-y^{۳},y^{۳}+x^{۳})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^{۲}+y^{۲}\le a^{۲}$ و $x\ge ۰,y\ge ۰$ و C مرز ناحیه D باشد و به طور مثبت جهت دهی شده است. انتگرال $\oint_C F.dr$ را با استفاده از (پایان ترم ۹۵)

ب) به طور مستقیم محاسبه کنید.

ادامه پاسخ ب) نمایشی پارامتری را برای خم $C_۱$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C_۱: r(t)=(۰,a)+\big((۰,۰)-(۰,a)\big)t, \qquad ۰\le t\le ۱$$

$$C_1: r(t)=(۰,a(۱-t)), \qquad ۰\le t\le ۱$$

حال داریم:

$$\int_{C_۱} F.dr=\int F\big(r(t)\big).r'(t)\,dt=\int_۰^۱\big(-a^{۳}(۱-t)^{۳},a^{۳}(۱-t)^{۳}\big).(۰,-a)dt$$

$$=\int_۰^۱ -a^{۴}(۱-t)^{۳}\,dt$$

$$=a^{۴}\frac{(۱-t)^{۴}}{۴}\Big|_۰^۱$$

$$=-\frac{a^{۴}}{۴}$$

راهنمای حل سوال

خم C شامل سه خم $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ است و ما انتگرال مورد نظر را به صورت جداگانه روی این سه خم محاسبه می‌کنیم و پس از آن خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr=\int_{C_۱}F.dr\int_{C_۲}F.dr+\int_{C_۳}F.dr$$

اگر خم ما به شکل یک پاره خط با شروع از A و انتهای B باشد، آنگاه می‌توانیم به شکل زیر آن را پارامتری کنیم:

$$r(t)=A+(B-A)t,\quad ۰\le t\le ۱$$

برای پارامتری کردن دایره ای به معادله $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=a^{۲}$، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$x-\alpha=a\cos t, y-\beta=a\sin t$

$$\int F.dr=\int F\big(r(t)\big).r'(t)\,dt$$

۸- میدان برداری $F=(x-y^۳,y^۳+x^۳)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^۲+y^۲\le a^۲$ و $x\ge ۰,y\ge ۰$ و C مرز ناحیه D باشد و به طور مثبت جهت دهی شده است. انتگرال $\oint_C F.dr$ را با استفاده از (پایان ترم ۹۵)

ب) به طور مستقیم محاسبه کنید.

ادامه پاسخ ب) حال نمایشی پارامتری را برای خم $C_۲$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C_۲: r(t)=(۰,۰)+\big((a,۰)-(۰,۰)\big)t,\qquad ۰\le t\le ۱$$

$$C_۲: r(t)=(at,۰),\qquad ۰\le t\le ۱$$

حال داریم:

$$\int_{C_۲} F.dr=\int F\big(r(t)\big).r'(t)\,dt=\int_۰^۱ (at,a^۳t^۳).(a,۰)dt$$

$$=\int_۰^۱ a^۲t\ dt$$

$$=a^۲\frac{t^۲}{۲}\Big|_۰^۱$$

$$=\frac{a^۲}{۲}$$

راهنمای حل سوال

خم C شامل سه خم $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ است و ما انتگرال مورد نظر را به صورت جداگانه روی این سه خم محاسبه می‌کنیم و پس از آن خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr=\int_{C_۱}F.dr\int_{C_۲}F.dr+\int_{C_۳}F.dr$$

اگر خم ما به شکل یک پاره خط با شروع از A و انتهای B باشد، آنگاه می‌توانیم به شکل زیر آن را پارامتری کنیم:

$$r(t)=A+(B-A)t,\quad ۰\le t\le ۱$$

برای پارامتری کردن دایره ای به معادله $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=a^۲$، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$x-\alpha=a\cos t\,,y-\beta=a\sin t$$

$$\int F.dr=\int F\big(r(t)\big).r'(t)\,dt$$

۸- میدان برداری $F=(x-y^۳,y^۳+x^۳)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^۲+y^۲\le a^۲$ و $x\ge ۰,y\ge ۰$ و C مرز ناحیه D باشد و به طور مثبت جهت دهی شده است. انتگرال $\oint_C F.dr$ را با استفاده از (پایان ترم ۹۵)

ب) به طور مستقیم محاسبه کنید.

ادامه پاسخ ب) حال نمایشی پارامتری را برای خم $C_۳$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C_۳: r(t)=(a\cos t\,,a\sin t),\qquad ۰\le t\le \frac{\pi}{۲}$$

حال داریم:

$$\int_{C_۳} F.dr=\int F\big(r(t)\big).r'(t)\,dt$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(a\cos t-a^۳\sin^۳ t,a^۳\sin^۳ t+a^۳\cos^۳ t).(-a\sin t\,,a\cos t)dt$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}-a^۲\cos t\sin t+a^۴\sin^۴ t+a^۴\sin^۳ t\cos t+a^۴\cos^۴ t\,dt$$

$$=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}-a^۲\cos t\sin t+a^۴(\sin^۴ t+\cos^۴ t)+a^۴\sin^۳ t\cos t\,dt$$

$$=-\frac{a^۲}{۲}+\frac{۳\pi}{۸}a^۴+\frac{a^۴}{۴}$$

راهنمای حل سوال

خم C شامل سه خم $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ است و ما انتگرال مورد نظر را به صورت جداگانه روی این سه خم محاسبه می‌کنیم و پس از آن خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr=\int_{C_۱}F.dr\int_{C_۲}F.dr+\int_{C_۳}F.dr$$

اگر خم ما به شکل یک پاره خط با شروع از A و انتهای B باشد، آنگاه می‌توانیم به شکل زیر آن را پارامتری کنیم:

$$r(t)=A+(B-A)t,\quad ۰\le t\le ۱$$

برای پارامتری کردن دایره ای به معادله $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=a^۲$، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$x-\alpha=a\cos t\,,y-\beta=a\sin t$$

$$\int F.dr=\int F\big(r(t)\big).r'(t)\,dt$$

۸- میدان برداری $F=(x-y^{۳},y^{۳}+x^{۳})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^{۲}+y^{۲}\le a^{۲}$ و $x\ge ۰,y\ge ۰$ و C مرز ناحیه D باشد و به طور مثبت جهت دهی شده است. انتگرال $\oint_C F.dr$ را با استفاده از (پایان ترم ۹۵)

ب) به طور مستقیم محاسبه کنید.

ادامه پاسخ ب) بنابراین:

$$\int_C F.dr=\int_{C_۱} F.dr\int_{C_۲} F.dr+\int_{C_۳} F.dr=-\frac{a^{۴}}{۴}+\frac{a^{۲}}{۲}-\frac{a^{۲}}{۲}+\frac{۳\pi}{۸}a^{۴}+\frac{a^{۴}}{۴}=\frac{۳\pi}{۸}a^{۴}$$

راهنمای حل سوال

خم C شامل سه خم $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ است و ما انتگرال مورد نظر را به صورت جداگانه روی این سه خم محاسبه می‌کنیم و پس از آن خواهیم داشت:

$$\int_C F.dr=\int_{C_۱} F.dr\int_{C_۲} F.dr+\int_{C_۳} F.dr$$

اگر خم ما به شکل یک پاره خط با شروع از A و انتهای B باشد، آنگاه می‌توانیم به شکل زیر آن را پارامتری کنیم:

$$r(t)=A+(B-A)t,\quad ۰\le t\le ۱$$

برای پارامتری کردن دایره ای به معادله $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=a^{۲}$، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$x-\alpha=a\cos t\,,y-\beta=a\sin t$$

$$\int F.dr=\int F\big(r(t)\big).r'(t)\,dt$$

۹- میدان برداری $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$F(x,y,z) = ((1+x)e^{x+y}, xe^{x+y}, x)$$

انتگرال میدان برداری F روی خم C، یعنی $\int_C F.dr$ را بیابید که در آن C منحنی زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$r(t) = (\cos t, t\sin t, t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

پاسخ) ابتدا $curl\ F$ را محاسبه می‌کنیم:

$$curl\ F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (1+x)e^{x+y} & xe^{x+y} & x \end{vmatrix}$$

$$= \left(1, -1, e^{x+y}(1+x) - e^{x+y}(1+x)\right)$$

$$= (0, -1, 0)$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر مولفه سوم میدان برداری ما برابر با صفر بود، میدان پایستار می‌شد. دامنه F همبند ساده است و بنابراین می‌توانیم میدان برداری F را به صورت $F = F_1 + F_2$ در نظر بگیریم که در آن

$$F_1 = ((1+x)e^{x+y}, xe^{x+y}, 0), \qquad F_2 = (0,0,x)$$

راهنمای حل سوال

در این جا $curl\ F \neq 0$ و در نتیجه F پایستار نیست اما با محاسبه $curl\ F$ می‌بینیم که فقط یک مولفه آن ناصفر است و اگر مولفه سوم نیروی F برابر با صفر باشد، آنگاه نیرو پایستار می‌شود. از طرفی دامنه F همبند ساده است. بنابراین می‌توانیم نیروی F را به صورت $F = F_1 + F_2$ بنویسیم که در آن F_1 پایستار است ولی F_2 پایستار نیست و در این صورت داریم:

$$\int_C F.dr = \int_C F_1.dr + \int_C F_2.dr$$

چون F_1 پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F_1$ و کار انجام شده توسط این میدان فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است

برای F_2 که پایستار نیست باید به صورت مستقیم عمل کنیم:

$$\int F_2.dr = \int F_2(r(t)).r'(t)\,dt$$

دقت داشته باشیم که در این جا خم ما بسته نیست و نمی‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم

۹- میدان برداری $F: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$F(x,y,z) = ((۱+x)e^{x+y}, xe^{x+y}, x)$$

انتگرال میدان برداری F روی خم C، یعنی $\int_C F.dr$ را بیابید که در آن C منحنی زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$r(t) = (\cos t\,, t\sin t\,, t), \qquad ۰ \le t \le ۲\pi$$

ادامه پاسخ) در این جا $F_۱$ پایستار است و ما می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم. تابع پتانسیلی برای $F_۱$ پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = (۱+x)e^{x+y} & (۱) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xe^{x+y} & (۲) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = ۰ & (۳) \end{cases}$$

حال از دو طرف رابطه (۱) نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx = \int (۱+x)e^{x+y}\,dx \Longrightarrow \varphi = xe^{x+y} + g(y,z)$$

راهنمای حل سوال

در این جا $curl\, F \neq ۰$ و در نتیجه F پایستار نیست اما با محاسبه $curl\, F$ می‌بینیم که فقط یک مولفه آن ناصفر است و اگر مولفه سوم نیروی F برابر با صفر باشد، آنگاه نیرو پایستار می‌شود. از طرفی دامنه F همبند ساده است. بنابراین می‌توانیم نیروی F را به صورت $F = F_۱ + F_۲$ بنویسیم که در آن $F_۱$ پایستار است ولی $F_۲$ پایستار نیست و در این صورت داریم:

$$\int_C F.dr = \int_C F_۱.dr + \int_C F_۲.dr$$

چون $F_۱$ پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F_۱$ و کار انجام شده توسط این میدان فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است

برای $F_۲$ که پایستار نیست باید به صورت مستقیم عمل کنیم:

$$\int F_۲.dr = \int F_۲(r(t)).r'(t)\,dt$$

دقت داشته باشیم که در این جا خم ما بسته نیست و نمی‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم

۹- میدان برداری $F: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$F(x,y,z) = ((۱+x)e^{x+y}, xe^{x+y}, x)$$

انتگرال میدان برداری F روی خم C، یعنی $\int_C F.dr$ را بیابید که در آن C منحنی زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$r(t) = (\cos t, t\sin t, t), \qquad ۰ \le t \le ۲\pi$$

ادامه پاسخ) حال از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = xe^{x+y} + \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (۴)$$

ادامه پاسخ الف) حال با مقایسه روابط (۲) و (۴) داریم:

$$xe^{x+y} = xe^{x+y} + \frac{\partial g}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow g(y,z) = h(z) \Longrightarrow \varphi = xe^{x+y} + h(z)$$

حال از طرفین رابطه بالا نسبت به z مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = ۰ + h'(z) \qquad (۵)$$

حال با مقایسه روابط (۳) و (۵) داریم:

$$۰ = h'(z) \Longrightarrow h'(z) = C \Longrightarrow \phi = xe^{x+y} + C$$

راهنمای حل سوال

در این جا $curl\, F \neq ۰$ و در نتیجه F پایستار نیست اما با محاسبه $curl\, F$ می‌بینیم که فقط یک مولفه آن ناصفر است و اگر مولفه سوم نیروی F برابر با صفر باشد، آنگاه نیرو پایستار می‌شود. از طرفی دامنه F همبند ساده است. بنابراین می‌توانیم نیروی F را به صورت $F = F_۱ + F_۲$ بنویسیم که در آن $F_۱$ پایستار است ولی $F_۲$ پایستار نیست و در این صورت داریم:

$$\int_C F.dr = \int_C F_۱.dr + \int_C F_۲.dr$$

چون $F_۱$ پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F_۱$ و کار انجام شده توسط این میدان فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است

برای $F_۲$ که پایستار نیست باید به صورت مستقیم عمل کنیم:

$$\int F_۲.dr = \int F_۲(r(t)).r'(t)\,dt$$

دقت داشته باشیم که در این جا خم ما بسته نیست و نمی‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم

۹- میدان برداری $F:\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$F(x,y,z) = ((۱+x)e^{x+y}, xe^{x+y}, x)$$

انتگرال میدان برداری F روی خم C، یعنی $\int_C F.dr$ را بیابید که در آن C منحنی زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$r(t) = (\cos t, t\sin t, t), \qquad ۰ \le t \le ۲\pi$$

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$r(۰) = (۱,۰,۰), \qquad r(۲\pi) = (۱,۰,۲\pi)$$

بنابراین:

$$\int_C F_۱.dr = \phi(۱,۰,۲\pi) - \phi(۱,۰,۰) = e - e = ۰$$

حال به محاسبه $\int_C F_۲.dr$ می‌پردازیم.

$$\int_C F_۲.dr = \int_C F_۲(r(t)).r'(t)\,dt = \int_۰^{۲\pi} (۰,۰,\cos t).(-\sin t, \sin t + t\cos t, ۱)dt$$

$$= \int_۰^{۲\pi} \cos t \; dt$$

$$= \sin t \Big|_۰^{۲\pi}$$

$$= ۰$$

راهنمای حل سوال

در این جا $curl\, F \neq ۰$ و در نتیجه F پایستار نیست اما با محاسبه $curl\, F$ می‌بینیم که فقط یک مولفه آن ناصفر است و اگر مولفه سوم نیروی F برابر با صفر باشد، آنگاه نیرو پایستار می‌شود. از طرفی دامنه F همبند ساده است. بنابراین می‌توانیم نیروی F را به صورت $F = F_۱ + F_۲$ بنویسیم که در آن $F_۱$ پایستار است ولی $F_۲$ پایستار نیست و در این صورت داریم:

$$\int_C F.dr = \int_C F_۱.dr + \int_C F_۲.dr$$

چون $F_۱$ پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F_۱$ و کار انجام شده توسط این میدان فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است

برای $F_۲$ که پایستار نیست باید به صورت مستقیم عمل کنیم:

$$\int F_۲.dr = \int F_۲(r(t)).r'(t)\,dt$$

دقت داشته باشیم که در این جا خم ما بسته نیست و نمی‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم

۹- میدان برداری $F:\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$F(x,y,z) = ((۱+x)e^{x+y}, xe^{x+y}, x)$$

انتگرال میدان برداری F روی خم C، یعنی $\int_C F.dr$ را بیابید که در آن C منحنی زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$r(t) = (\cos t\,, t\sin t\,, t), \qquad ۰ \le t \le ۲\pi$$

ادامه پاسخ) بنابراین:

$$\int_C F.dr = \int_C F_۱.dr + \int_C F_۲.dr = ۰ + ۰ = ۰$$

راهنمای حل سوال

در این جا $curl\ F \neq ۰$ و در نتیجه F پایستار نیست اما با محاسبه $curl\ F$ می‌بینیم که فقط یک مولفه آن ناصفر است و اگر مولفه سوم نیروی F برابر با صفر باشد، آنگاه نیرو پایستار می‌شود. از طرفی دامنه F همبند ساده است. بنابراین می‌توانیم نیروی F را به صورت $F = F_۱ + F_۲$ بنویسیم که در آن $F_۱$ پایستار است ولی $F_۲$ پایستار نیست و در این صورت داریم:

$$\int_C F.dr = \int_C F_۱.dr + \int_C F_۲.dr$$

چون $F_۱$ پایستار است پس دارای تابع پتانسیلی مانند ϕ است به گونه‌ای که $\nabla\phi = F_۱$ و کار انجام شده توسط این میدان فقط به ابتدا و انتهای مسیر وابسته است

برای $F_۲$ که پایستار نیست باید به صورت مستقیم عمل کنیم:

$$\int F_۲.dr = \int F_۲(r(t)).r'(t)\,dt$$

دقت داشته باشیم که در این جا خم ما بسته نیست و نمی‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم