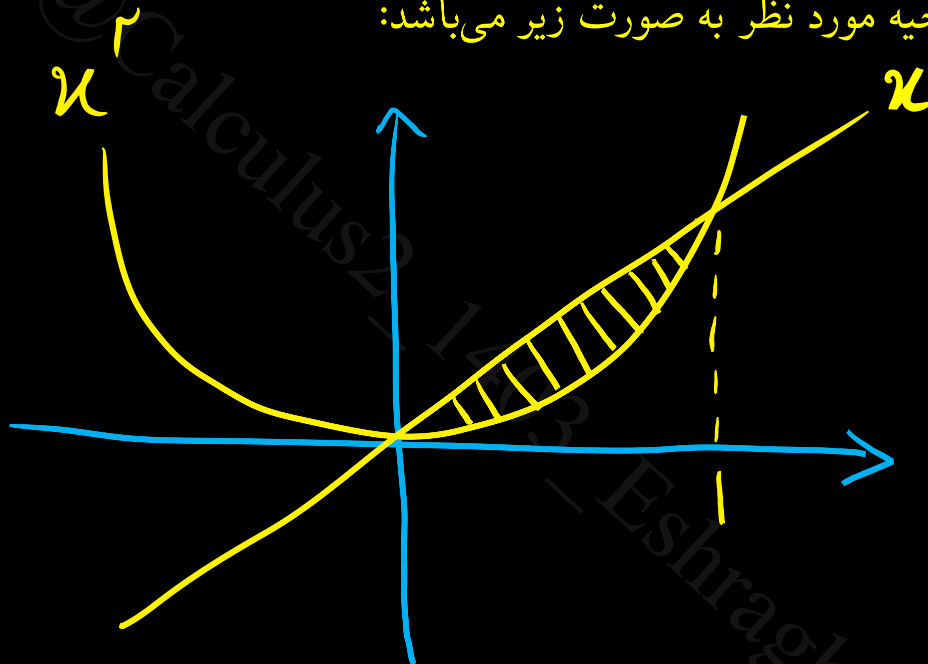
راهنمای حل سوال

۱- مقدار $\iint_A xy + x^۴ dA$ را به دست آورید که در آن A ناحیه محصور بین نمودار توابع $y = x$ و $y = x^۲$ است.

پاسخ) ناحیه مورد نظر به صورت زیر می‌باشد:



برای پیدا کردن محل تقاطع دو نمودار، ضابطه دو نمودار را با هم برابر قرار می‌دهیم. پس قرار می‌دهیم $x^۲ = x$ که نتیجه می‌دهد $x = ۰$ یا $x = ۱$. حال ترتیب $dydx$ را برای dA انتخاب می‌کنیم. البته با توجه به تابع داخل انتگرال (که یک چند جمله‌ای بر حسب x و y است) می‌توانیم $dxdy$ را نیز انتخاب کنیم. در واقع در هر دو حالت، پیداکردن تابع اولیه به سادگی امکان پذیر است.

رسم ناحیه مورد نظر

پیدا کردن محل تقاطع نمودارها

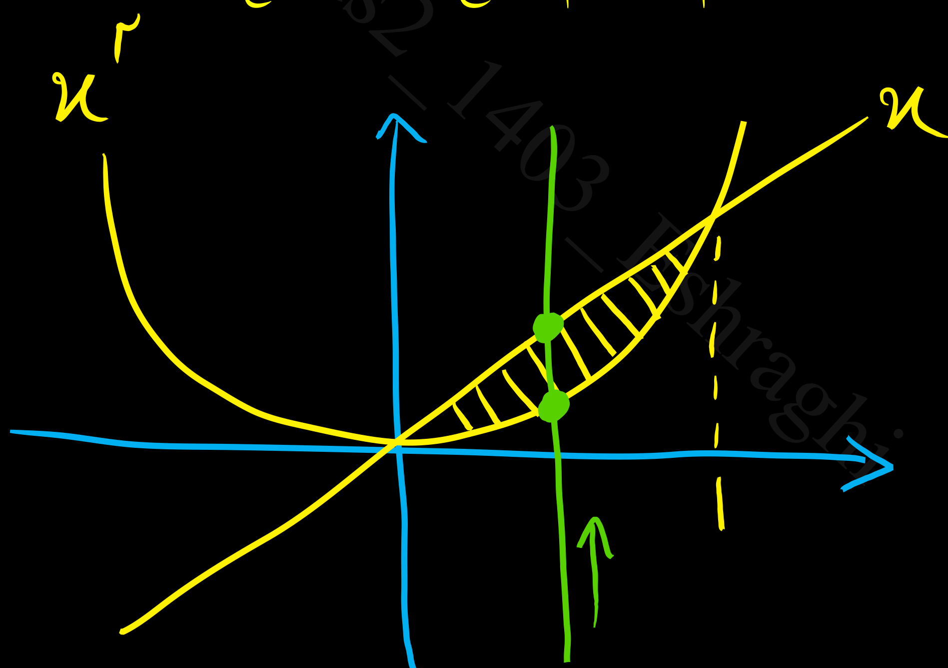
انتخاب $dy\, dx$ برای ترتیب انتگرال گیری (برعکس این نیز این جا می‌تواند انتخاب شود)

چون $dy\, dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۱- مقدار $\iint_A xy + x^4\, dA$ را به دست آورید که در آن A ناحیه محصور بین نمودار توابع $y = x$ و $y = x^2$ است.

ادامه پاسخ) حال چون $dydx$ را انتخاب کردیم، ابتدا یک خط موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم. وقتی از پایین به بالا حرکت کنیم، در هنگام ورود به نمودار تابع $y = x^2$ برخورد می‌کنیم و هنگام خروج به نمودار تابع $y = x$ می‌رسیم.



بنابراین می‌نویسیم $\int \int_{x^2}^{x} xy + x^4\, dy\, dx$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه مورد نظر

پیدا کردن محل تقاطع نمودارها

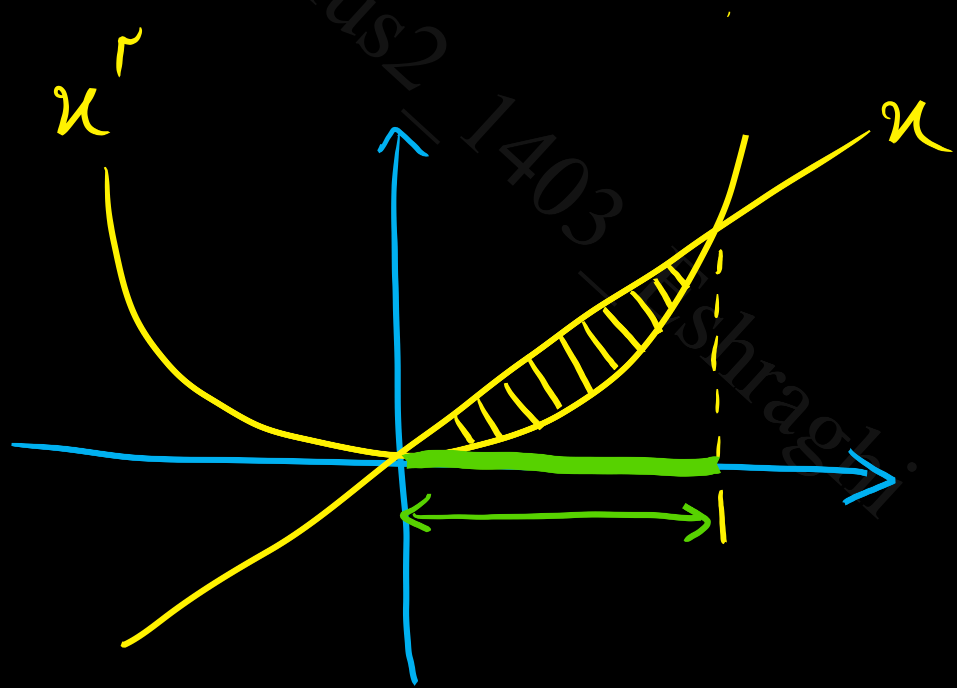
انتخاب $dy\,dx$ برای ترتیب انتگرال گیری (برعکس این نیز این جا می‌تواند انتخاب شود)

چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۱- مقدار $\iint_A xy + x^۴ \, dA$ را به دست آورید که در آن A ناحیه محصور بین نمودار توابع $y = x$ و $y = x^۲$ است.

ادامه پاسخ) حال باید حدود x را تعیین کنیم. برای این کار، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم. از ۰ تا ۱ را در بر می‌گیرد.



بنابراین می‌نویسیم $\int_۰^۱ \int_{x^۲}^{x} xy + x^۴ \, dydx$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه مورد نظر

پیدا کردن محل تقاطع نمودارها

انتخاب $dy\,dx$ برای ترتیب انتگرال گیری (برعکس این نیز این جا می‌تواند انتخاب شود)

چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۱- مقدار $\iint_A xy + x^4 \, dA$ را به دست آورید که در آن A ناحیه محصور بین نمودار توابع $y = x$ و $y = x^2$ است.

ادامه پاسخ) حال که کران‌های انتگرال را به طور کامل نوشتیم، به حل انتگرال می‌پردازیم.

از داخلی‌ترین قسمت شروع می‌کنیم و کار را جلو می‌بریم.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy + x^4 \, dy dx = \int_0^1 x\frac{y^2}{2} + x^4 y \Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2} + x^5 - \frac{x^5}{2} - x^6 \, dx$$

$$= \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^6}{12} - \frac{x^7}{7} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{7}$$

$$= \frac{87}{168}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه مورد نظر

پیدا کردن محل تقاطع نمودارها

انتخاب $dy\,dx$ برای ترتیب انتگرال گیری (برعکس این نیز این جا می‌تواند انتخاب شود)

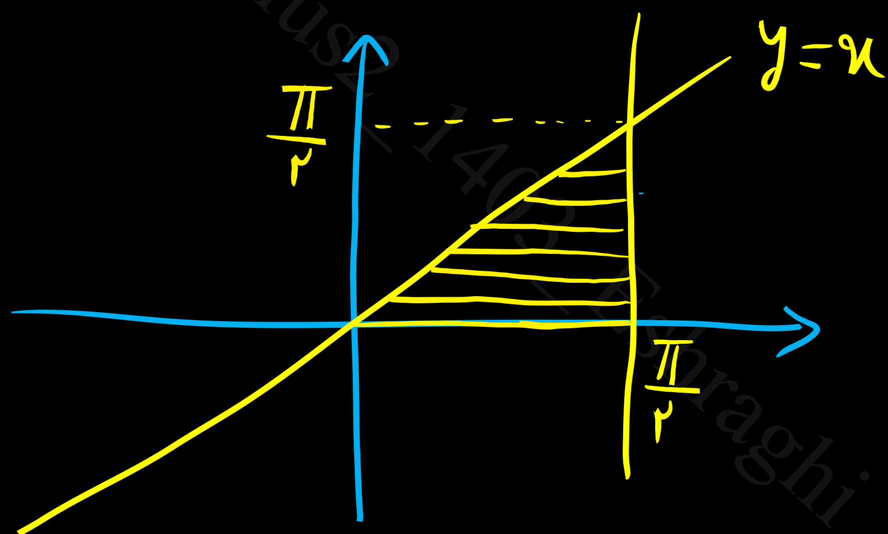
چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۲- در هر یک از انتگرال‌های زیر قلمرو انتگرال‌گیری را رسم کنید و انتگرال مکرر مفروض را محاسبه کنید: (آدامز)

الف) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \, dx \, dy$

پاسخ الف) ابتدا با توجه به کران‌های نوشته شده، ناحیه انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم:



در شکل فعلی، به دست آوردن حاصل $\int \frac{\sin x}{x} dx$ به سادگی امکان پذیر نیست.

بنابراین ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر می‌دهیم؛ یعنی به جای $dx\,dy$ می‌خواهیم از $dy\,dx$ استفاده کنیم.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری به کمک کران‌های نوشته شده

برای حل انتگرال، ترتیب $dx\,dy$ نمی‌تواند مناسب باشد چون حل $\int \frac{\sin x}{x} dx$ به سادگی امکان پذیر نیست. لذا ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم یعنی از $dy\,dx$ استفاده می‌کنیم

چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۲- در هر یک از انتگرال‌های زیر قلمرو انتگرال‌گیری را رسم کنید و انتگرال مکرر مفروض را محاسبه کنید: (آدامز)

الف) $I = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{y}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy$

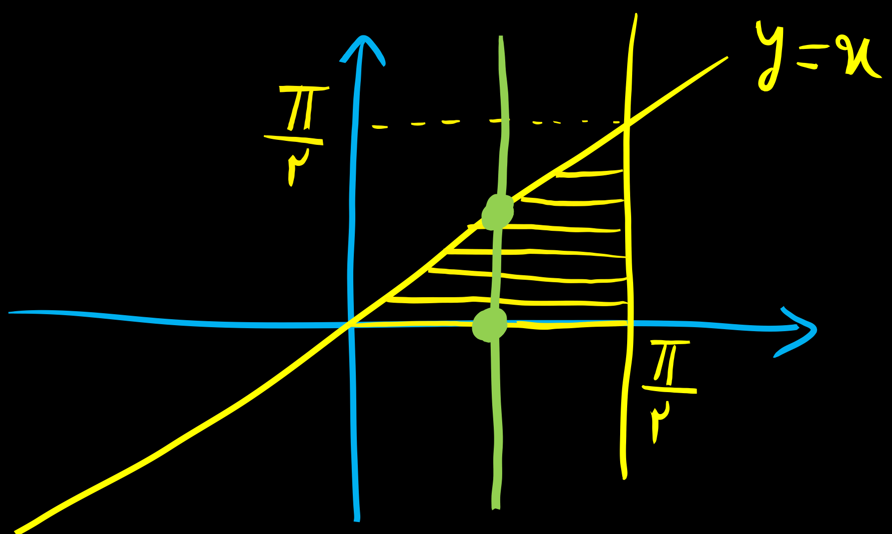
ادامه پاسخ الف) بنابراین ابتدا یک خط موازی با محور yها از ناحیه عبور می‌دهیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم. بنابراین:

$$I = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\circ}^{x} \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{x}\, y \Big|_{\circ}^{x} dx = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x \; dx$$

$$= -\cos x \Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$= \circ - (-۱)$$

$$= ۱$$



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری به کمک کران‌های نوشته شده

برای حل انتگرال، ترتیب $dx\,dy$ نمی‌تواند مناسب باشد چون حل $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ به سادگی امکان پذیر نیست. لذا ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم یعنی از $dy\,dx$ استفاده می‌کنیم

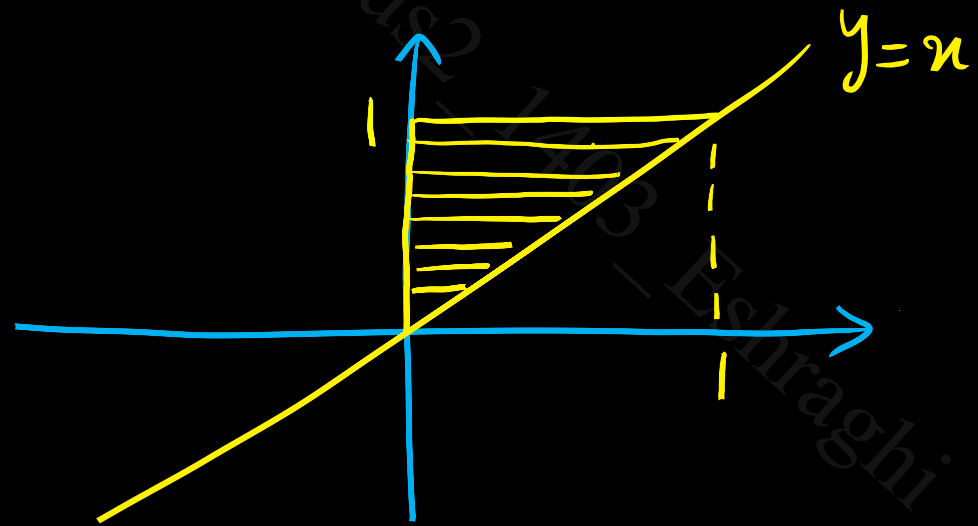
چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۲- در هر یک از انتگرال‌های زیر قلمرو انتگرال‌گیری را رسم کنید و انتگرال مکرر مفروض را محاسبه کنید: (آدامز)

ب) $I = \int_{۰}^{۱}\int_{x}^{۱} \frac{y^{\lambda}}{x^{۲}+y^{۲}}\,dydx$

پاسخ ب) ابتدا با توجه به کران‌های نوشته شده، ناحیه انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم:



حال ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. یعنی به جای $dy\,dx$ می‌خواهیم از $dx\,dy$ استفاده کنیم. پس یک خط موازی با محور xها را از ناحیه عبور می‌دهیم و پس از آن ناحیه را روی محور yها تصویر می‌کنیم.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری به کمک کران‌های نوشته شده

برای حل انتگرال، ترتیب $dy\,dx$ نمی‌تواند مناسب باشد چون حل $\int \frac{y^{\lambda}}{x^{۲}+y^{۲}}dy$ به سادگی امکان پذیر نیست. لذا ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم یعنی از $dx\,dy$ استفاده می‌کنیم

چون $dx\,dy$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور xها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود x تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود y، ناحیه را روی محور yها تصویر می‌کنیم تا حدود y نیز تعیین شود

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

$$\int \frac{۱}{x^{۲}+a^{۲}}dx = \frac{۱}{a}tan^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

۲- در هر یک از انتگرال‌های زیر قلمرو انتگرال‌گیری را رسم کنید و انتگرال مکرر مفروض را محاسبه کنید: (آدامز)

ب) $I=\int_{0}^{1}\int_{x}^{1}\frac{y^{\lambda}}{x^{2}+y^{2}}\,dydx$

ادامه پاسخ ب) حال داریم:

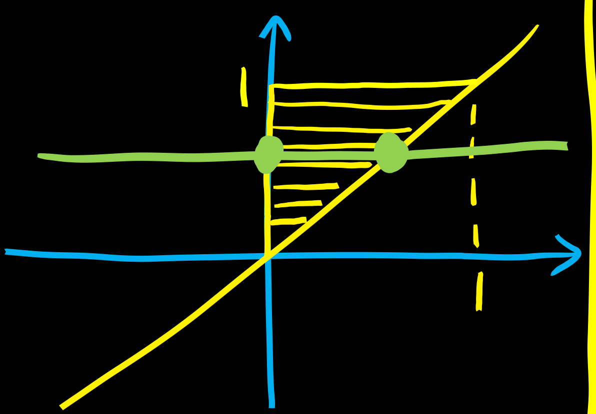
$$I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{y}\frac{y^{\lambda}}{x^{2}+y^{2}}\,dxdy=\int_{0}^{1}y^{\lambda}\frac{1}{y}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{0}^{y}\,dy$$

$$=\int_{0}^{1}y^{\lambda-1}\left(\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(0)\right)dy$$

$$=\int_{0}^{1}y^{\lambda-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{y^{\lambda}}{\lambda}\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{4\lambda}$$



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری به کمک کران‌های نوشته شده

برای حل انتگرال، ترتیب $dy\,dx$ نمی‌تواند مناسب باشد چون حل $\int\frac{y^{\lambda}}{x^{2}+y^{2}}dy$ به سادگی امکان پذیر نیست. لذا ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم یعنی از $dx\,dy$ استفاده می‌کنیم

چون $dx\,dy$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور xها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود x تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود y، ناحیه را روی محور yها تصویر می‌کنیم تا حدود y نیز تعیین شود

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

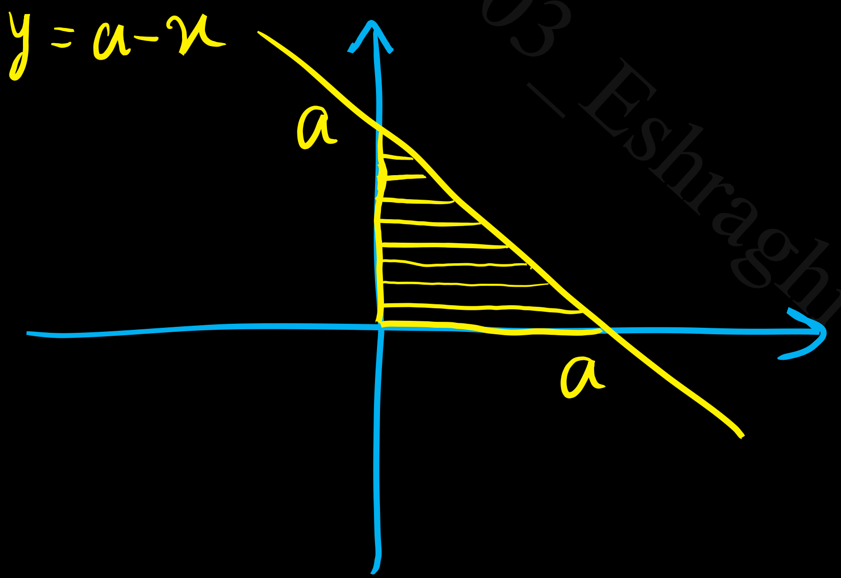
$$\int\frac{1}{x^{2}+a^{2}}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

۳- مقدار متوسط تابع $x^۲ + y^۲$ بر مثلث $a \leq x \leq$ ۰ و $۰ \leq y \leq a - x$ را بیابید. (آدامز)

پاسخ) ناحیه مورد نظر را D و مساحت آن را S در نظر می‌گیریم. اگر مقدار متوسط تابعی مانند f را با $\bar{f}$ نمایش دهیم، آنگاه $\bar{f}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{f} = \frac{۱}{S} \iint_D f(x,y)\ dA$$

در این جا $f(x,y) = x^۲ + y^۲$ و ناحیه انتگرال گیری به صورت زیر می‌باشد:



به وضوح $S = \frac{a^۲}{۲}$.

راهنمای حل سوال

مقدار متوسط تابع f روی ناحیه D به صورت زیر است:

$$\bar{f} = \frac{۱}{S} \iint_D f(x,y)\ dA$$

که S مساحت ناحیه D است

رسم ناحیه انتگرال گیری

انتخاب یکی از ترتیب‌های $dx\,dy$ و $dy\,dx$ که در این‌جا ترتیب $dy\,dx$ انتخاب شد

چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۳- مقدار متوسط تابع x^2+y^2 بر مثلث $0\le x\le a$ و $0\le y\le a-x$ را بیابید.
(آدامز)

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\bar{f}=\frac{1}{\frac{a^2}{2}}\int_0^a\int_0^{a-x}x^2+y^2\,dydx=\frac{2}{a^2}\int_0^a x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_0^{a-x}dx$$

$$=\frac{2}{a^2}\int_0^a x^2(a-x)+\frac{(a-x)^3}{3}dx$$

$$=\frac{2}{a^2}\left(a\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(a-x)^4}{12}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{12}+\frac{a^4}{12}\right)$$

$$=\frac{a^2}{3}$$

راهنمای حل سوال

مقدار متوسط تابع f روی ناحیه D به صورت زیر است:

$$\bar{f}=\frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\,dA$$

که S مساحت ناحیه D است

رسم ناحیه انتگرال گیری

انتخاب یکی از ترتیب‌های $dx\,dy$ و $dy\,dx$ که در این‌جا ترتیب $dy\,dx$ انتخاب شد

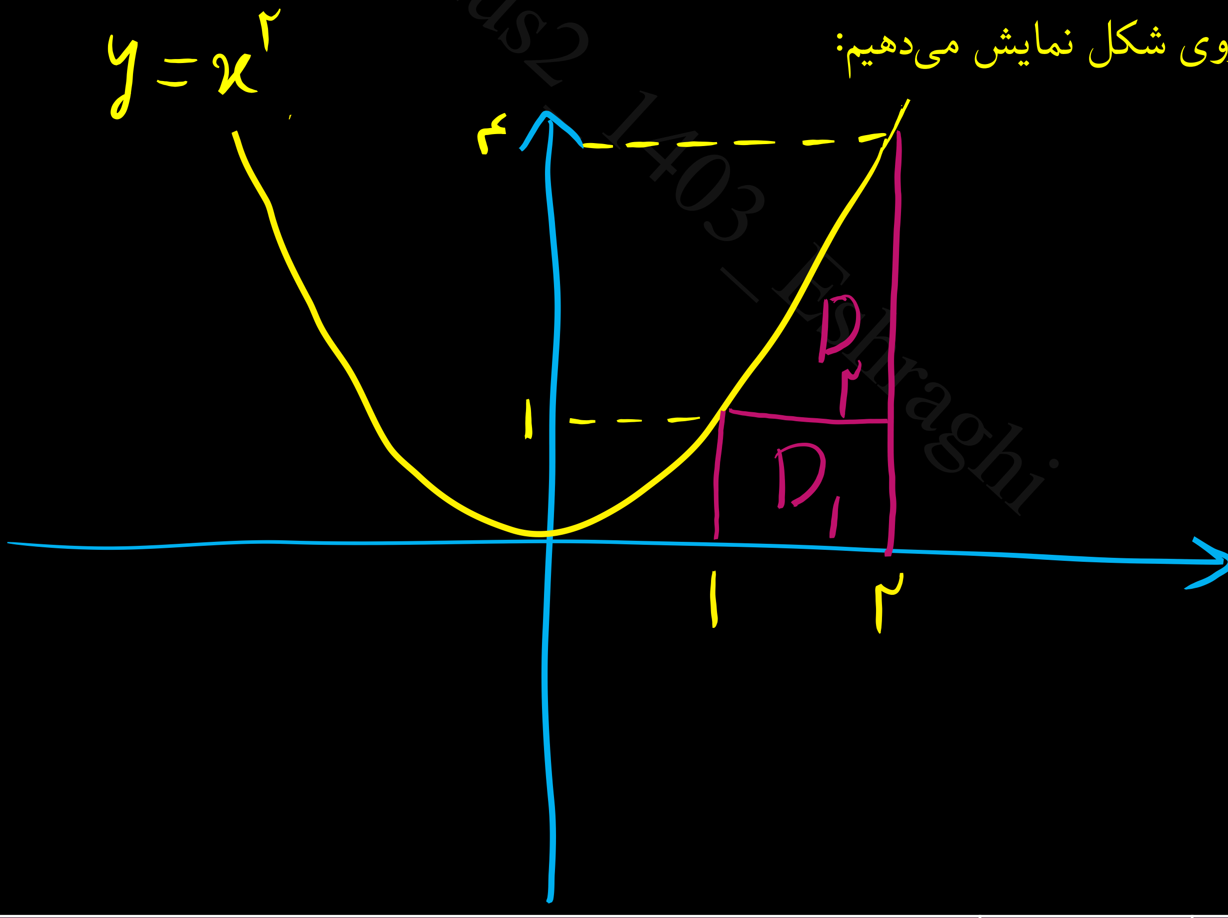
چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۱}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)dxdy+\int_{۱}^{۴}\int_{\sqrt{y}}^{۲}\frac{y}{x^{۴}}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)dxdy$$

پاسخ) تابع داخل انتگرال، برای هر دو عبارت یکسان است. حال ناحیه مربوط به انتگرال اول را با $D_۱$ و ناحیه مربوط به انتگرال دوم را با $D_۲$ نمایش می‌دهیم. این ناحیه‌ها را روی شکل نمایش می‌دهیم:



راهنمای حل سوال

تابع داخل انتگرال برای هر دو یکسان است و تفاوت فقط در ناحیه انتگرال گیری است

ناحیه مربوط به هر دو انتگرال را رسم می‌کنیم

دو ناحیه رسم شده با هم اشتراکی ندارند (مگر صرفا در یک خط)

برای به دست آوردن حاصل عبارت، انتگرال تابع $\frac{y}{x^{۴}}\sin\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$ را روی $D_۱\cup D_۲$ به دست می‌آوریم

ترتیب $dy\,dx$ مناسب است

چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dxdy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dxdy$$

ادامه پاسخ) ما می‌توانیم اجتماع این دو ناحیه را در نظر بگیریم و به جای دو انتگرال، از یک انتگرال استفاده کنیم:

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dxdy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dxdy = \int_1^2 \int_0^{x^2} \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dydx$$

بنابراین داریم:

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = -\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Bigg|_1^2$$

$$= \frac{1}{\pi} - 0 = \frac{1}{\pi}$$

راهنمای حل سوال

تابع داخل انتگرال برای هر دو یکسان است و تفاوت فقط در ناحیه انتگرال گیری است

ناحیه مربوط به هر دو انتگرال را رسم می‌کنیم

دو ناحیه رسم شده با هم اشتراکی ندارند (مگر صرفا در یک خط)

برای به دست آوردن حاصل عبارت، انتگرال تابع $\frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ را روی $D_1 \cup D_2$ به دست می‌آوریم

ترتیب $dy\,dx$ مناسب است

چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۵- مطلوبست محاسبه $\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dA$ که در آن A ناحیه داخل مثلث با رأس‌های (۰,۱)، (۱,۰) و (۰,۰) است. (آدامز)

پاسخ) برای محاسبه این انتگرال از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u = y - x$ و $v = y + x$. پس از اعمال تغییر متغیر باید داشته باشیم:

$$\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dA = \iint e^{\frac{u}{v}}\,|J|dudv$$

که در آن $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$. در این جا می‌توانیم مستقیماً این را محاسبه کنیم یا این که از $\frac{1}{J}$ استفاده کنیم:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow J = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

به دلیل تغییر متغیری که اعمال کردیم، کران‌های انتگرال ما دچار تغییر می‌شوند. چون ناحیه انتگرال گیری ما از سه نقطه که رأس‌های یک مثلث هستند تشکیل شده است، کافی است تصویر سه نقطه را تحت تغییر متغیر در نظر گرفته شده پیدا کنیم.

$$(0,0) \longrightarrow (0,0) \qquad (1,0) \longrightarrow (-1,1), \qquad (0,1) \longrightarrow (1,1),$$

راهنمای حل سوال

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:
$u = y - x, \qquad v = y + x$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید کافی است تصویر رئوس مثلث را تحت تغییر متغیر پیدا کنیم و آن‌ها را به هم وصل کنیم

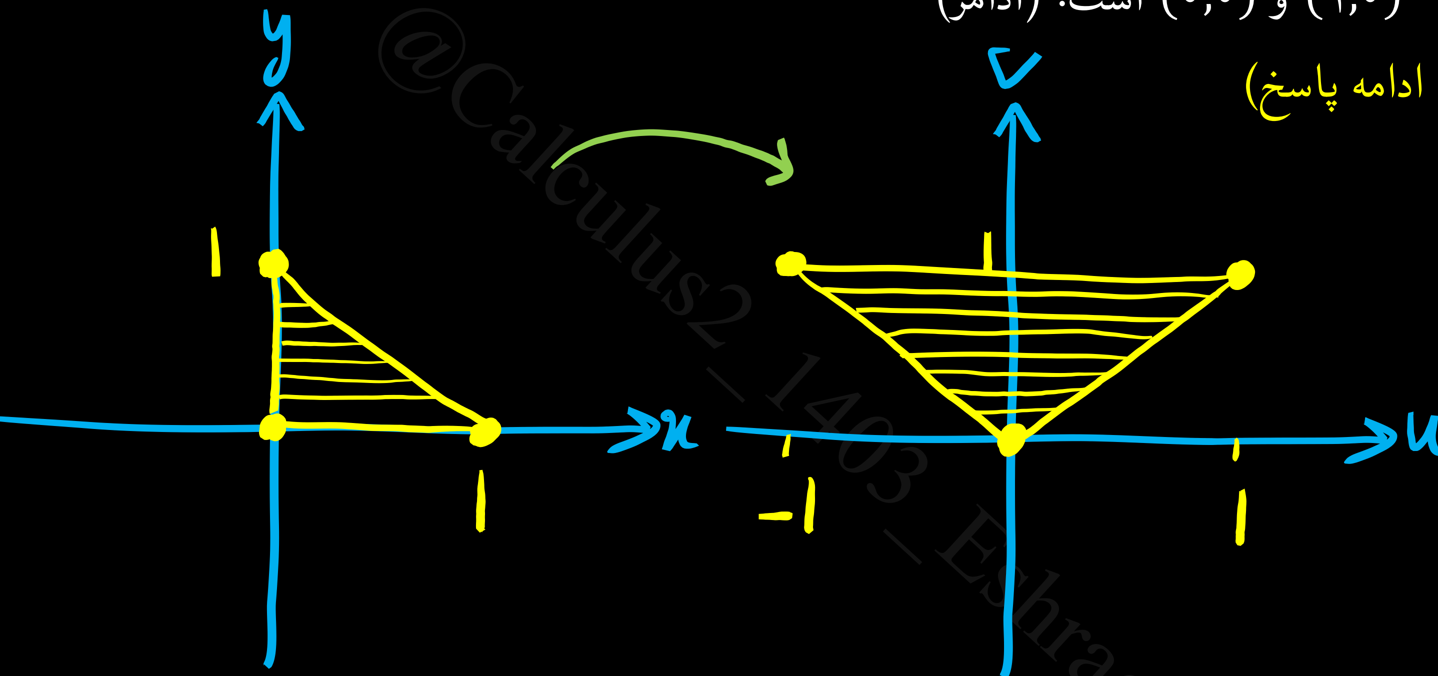
انتخاب $du\,dv$ برای ترتیب

چون $du\,dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۵- مطلوبست محاسبه $\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA$ که در آن A ناحیه داخل مثلث با رأس‌های (۰,۱)، (۱,۰) و (۰,۰) است. (آدامز)

ادامه پاسخ)



حال داریم:

$$\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA = \int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \times \left(\frac{1}{2}\right) du dv = \frac{1}{2}\int_0^1 v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^{v} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v(e - e^{-1})\, dv$$

$$= \frac{1}{4}(e - e^{-1})$$

راهنمای حل سوال

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$u = y - x, \quad v = y + x$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید کافی است تصویر رئوس مثلث را تحت تغییر متغیر پیدا کنیم و آن‌ها را به هم وصل کنیم

انتخاب $du\, dv$ برای ترتیب

چون $du\, dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۶- مطلوبست محاسبه

$$\iint_S e^{x+3y}\sin^2(x-y)\,dxdy$$

که در آن S ناحیه محصور به خطوط $y=-\frac{1}{3}x+2$، $y=-\frac{1}{3}x+1$، $y=x-\frac{1}{2}$ و $y=x$ است. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

پاسخ) از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u=3y+x$ و $v=y-x$. حال $|J|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$J=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{4}\Rightarrow |J|=\frac{1}{4}$$

حال بر مبنای تغییر متغیری که اعمال کردیم، داریم:

$$\begin{cases}3y+x=3\\ 3y+x=6\\ y-x=-\frac{1}{2}\\ y-x=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}3\le u\le 6\\ -\frac{1}{2}\le v\le 0\end{cases}$$

راهنمای حل سوال

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:
$u=3y+x,\qquad v=y-x$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید باید ضابطه چهار خط را در ناحیه اصلی (با ترتیب مناسب) در نظر بگیریم

چون $du\,dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

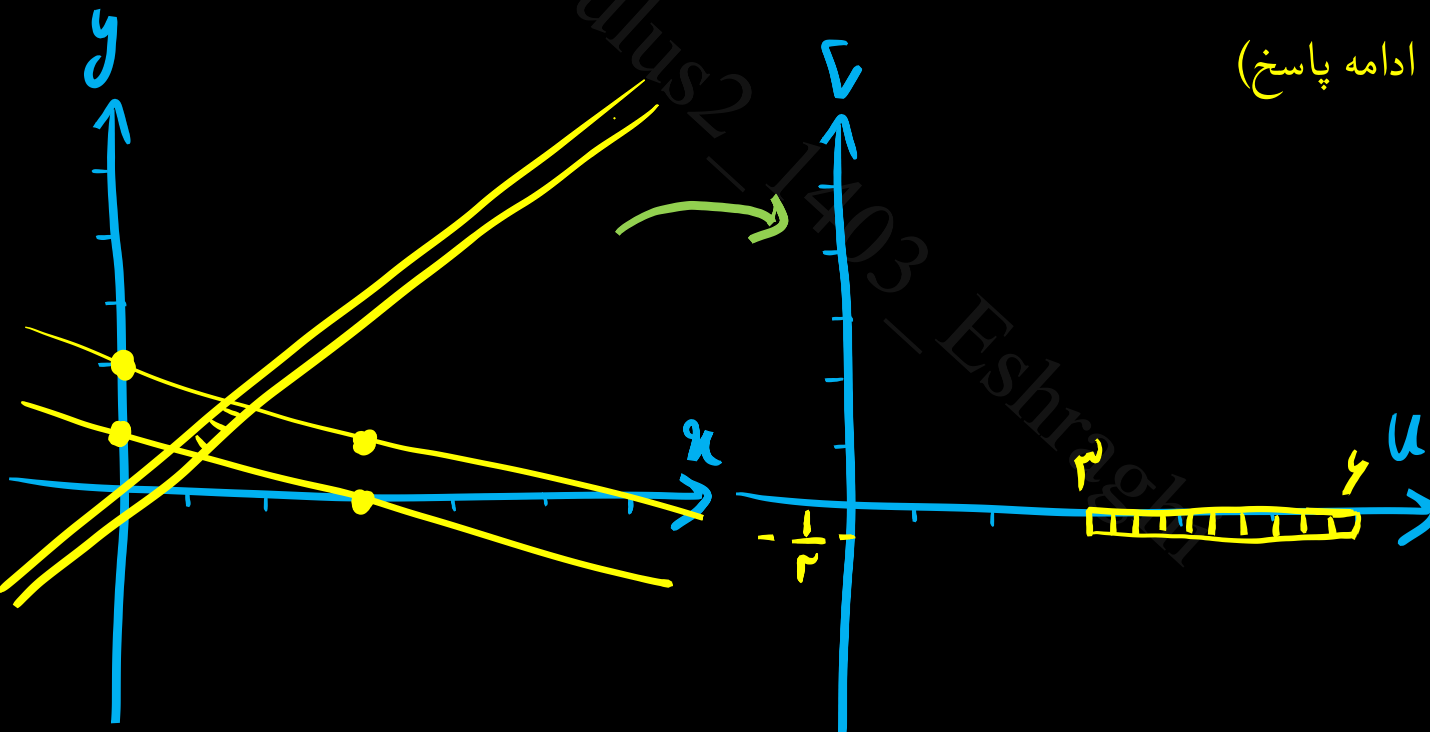
شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۶- مطلوبست محاسبه

$$\iint_S e^{x+۳y} sin^۲(x-y)\,dxdy$$

که در آن S ناحیه محصور به خطوط $y=-\frac{۱}{۳}x+۲$ ،$y=-\frac{۱}{۳}x+۱$ ،$y=x-\frac{۱}{۲}$ و $y=x$ است. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ)



راهنمای حل سوال

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:
$u=۳y+x,\qquad v=y-x$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید باید ضابطه چهار خط را در ناحیه اصلی (با ترتیب مناسب) در نظر بگیریم

چون $du\,dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۶- مطلوبست محاسبه

$$\iint_S e^{x+۳y}\sin^۲(x-y)\,dxdy$$

که در آن S ناحیه محصور به خطوط $y=-\frac{۱}{۳}x+۲$ ،$y=-\frac{۱}{۳}x+۱$ ،$y=x-\frac{۱}{۲}$ و $y=x$ است. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ)

$$I=\iint_S e^{x+۳y}\sin^۲(x-y)\,dxdy=\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۰}\int_{۳}^{۶} e^u\sin^۲(-v)\ \times\frac{۱}{۴}du\,dv$$

$$=\frac{۱}{۴}\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۰} e^u\sin^۲ v\ \Big|_{۳}^{۶} dv$$

$$=\frac{۱}{۴}\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۰}(e^۶-e^۳)\sin^۲ v\,dv$$

$$=\frac{۱}{۴}(e^۶-e^۳)\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۰}\frac{۱-\cos ۲v}{۲}dv$$

راهنمای حل سوال

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$u=۳y+x,\qquad v=y-x$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید باید ضابطه چهار خط را در ناحیه اصلی (با ترتیب مناسب) در نظر بگیریم

چون $du\,dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۶- مطلوبست محاسبه

$$\iint_S e^{x+۳y} sin^۲(x-y)\, dxdy$$

که در آن S ناحیه محصور به خطوط $y=-\frac{۱}{۳}x+۲$ ،$y=-\frac{۱}{۳}x+۱$ ،$y=x-\frac{۱}{۲}$ و $y=x$ است. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ)

$$\Longrightarrow I=\frac{۱}{۸}(e^۶-e^۳)(v-\frac{۱}{۲}\sin ۲v)\Big|_{-\frac{۱}{۲}}^{۰}$$

$$=-\frac{۱}{۸}(e^۶-e^۳)(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sin ۱)$$

راهنمای حل سوال

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$u=۳y+x, \qquad v=y-x$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید باید ضابطه چهار خط را در ناحیه اصلی (با ترتیب مناسب) در نظر بگیریم

چون $du\,dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال