۱- انتگرال

$$\iint_T \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$$

را محاسبه کنید که در آن T ناحیه مثلثی با رئوس $(۰,۰)$، $(۲,-۱)$ و $(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است.
(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

پاسخ) از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u=x-y$ و $v=x+y$. حال $|J|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$J=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{vmatrix}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow |J|=\frac{۱}{۲}$$

حال تصویر هر کدام از رئوس مثلث را تحت تغییر متغیری که اعمال کردیم، پیدا می‌کنیم:

$$(۰,۰)\longrightarrow(۰,۰),\qquad (۲,-۱)\longrightarrow(۳,۱),\qquad (\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲})\longrightarrow(۲,۱)$$

راهنمای حل سوال

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:
$u=x-y,\qquad v=x+y$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید کافی است تصویر رئوس مثلث را تحت تغییر متغیر پیدا کنیم و آن‌ها را به هم وصل کنیم

انتخاب $du\,dv$ برای ترتیب

چون $du\,dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

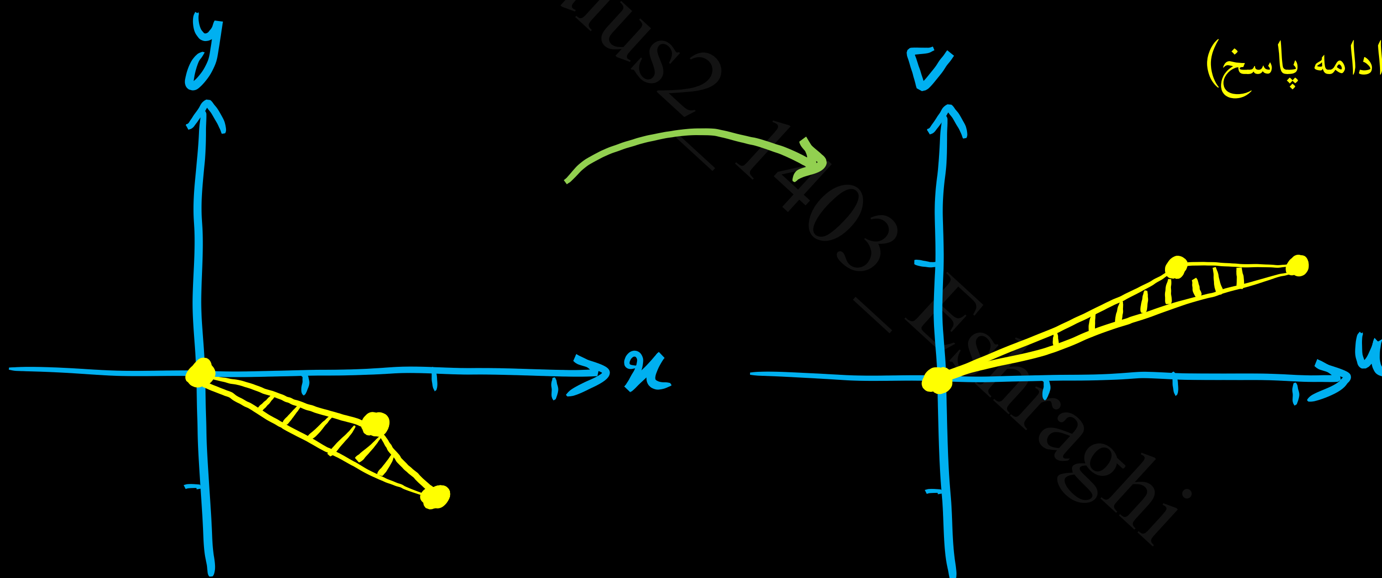
شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۱- انتگرال

$$\iint_T \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$$

را محاسبه کنید که در آن T ناحیه مثلثی با رئوس (۰,۰)، (۲, −۱) و $(\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ است.
(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ



برای ترتیب انتگرال گیری، $du\,dv$ را انتخاب می‌کنیم. معادله خطی که از نقاط (۰,۰) و (۲,۱) می‌گذرد، $v = \frac{۱}{۲}u$ و معادله خطی که از نقاط (۰,۰) و (۳,۱) می‌گذرد، $v = \frac{۱}{۳}u$ است.

راهنمای حل سوال

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:
$u = x - y, \qquad v = x + y$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید کافی است تصویر رئوس مثلث را تحت تغییر متغیر پیدا کنیم و آن‌ها را به هم وصل کنیم

انتخاب $du\,dv$ برای ترتیب

چون $du\,dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

۱- انتگرال

$$\iint_T \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$$

را محاسبه کنید که در آن T ناحیه مثلثی با رئوس $(۰,۰)$، $(۱,-۲)$ و $(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است.
(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\iint_T \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy = \int_۰^۱ \int_{۲v}^{۳v} \ln\left(\frac{u}{v}\right) \times \frac{۱}{۲} du\, dv$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ v\left(\frac{u}{v}\ln\left(\frac{u}{v}\right) - \frac{u}{v}\right)\Bigg|_{۲v}^{۳v} dv$$

$$= \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ v(۳\ln ۳ - ۳ - ۲\ln ۲ + ۲)\, dv$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\ln\frac{۲۷}{۴} - ۱\right)\frac{v^۲}{۲}\Bigg|_۰^۱$$

$$= \frac{۱}{۴}\left(\ln\frac{۲۷}{۴} - ۱\right)$$

استفاده از تغییر متغیرهای زیر:
$u = x - y,\qquad v = x + y$

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

به دلیل اعمال تغییر متغیر، ناحیه انتگرال گیری ما عوض می‌شود. برای پیداکردن ناحیه جدید کافی است تصویر رئوس مثلث را تحت تغییر متغیر پیدا کنیم و آن‌ها را به هم وصل کنیم

انتخاب $du\, dv$ برای ترتیب

چون $du\, dv$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور uها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود u تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود v، ناحیه را روی محور vها تصویر می‌کنیم تا حدود v نیز تعیین شود.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

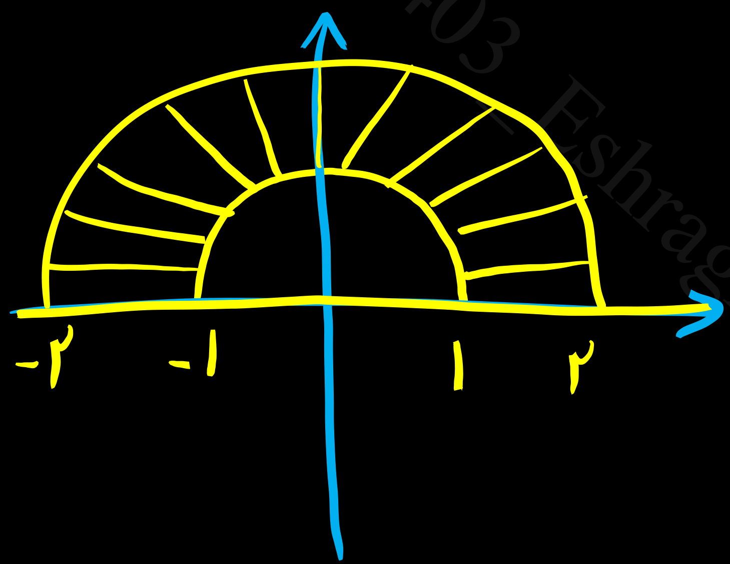
راهنمای حل سوال

۲- با استفاده از انتگرال دوگانه، مساحت بین دو دایره $x^۲+y^۲=۴$ و $x^۲+y^۲=۱$ و بالای خط $y=۰$ را به دست آورید.

پاسخ) می‌دانیم مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\iint_D dA$$

که D ناحیه‌ای است که می‌خواهیم مساحت آن را پیدا کنیم. در این جا ناحیه به صورت زیر می‌باشد:



رسم ناحیه انتگرال گیری

برای محاسبه مساحت به کمک انتگرال دوگانه باید $\iint dA$ را محاسبه کنیم

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

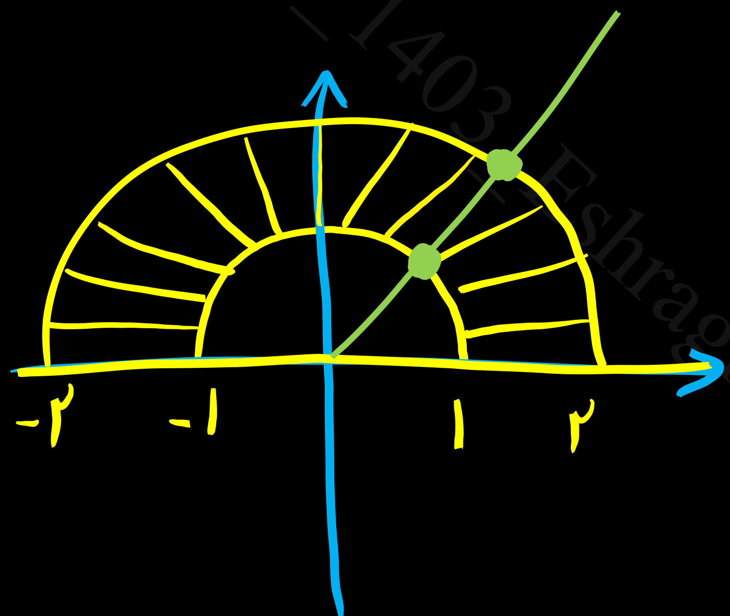
شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۲- با استفاده از انتگرال دوگانه، مساحت بین دو دایره $x^۲+y^۲=۴$ و $x^۲+y^۲=۱$ و بالای خط $y=۰$ را به دست آورید.

ادامه پاسخ) در مختصات قطبی داریم $|J|=r$ و در نتیجه:

$$S=\iint r\,dr\,d\theta$$

حال برای نوشتن حدود r و θ، با شروع از مبدأ مختصات، نیم خطی را از ناحیه عبور می‌دهیم.



در هنگام ورود، داریم $x^۲+y^۲=۱$ که نتیجه می‌دهد $r^۲=۱$ و این یعنی $r=۱$.

در هنگام خروج، داریم $x^۲+y^۲=۴$ که نتیجه می‌دهد $r^۲=۴$ و این یعنی $r=۲$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

برای محاسبه مساحت به کمک انتگرال دوگانه باید $\iint dA$ را محاسبه کنیم

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

۲- با استفاده از انتگرال دوگانه، مساحت بین دو دایره $x^۲+y^۲=۴$ و $x^۲+y^۲=۱$ و بالای خط $y=۰$ را به دست آورید.

ادامه پاسخ) پس حدود r به صورت $۱\leq r\leq ۲$ می‌باشد. از طرف دیگر اگر نیم خط فرضی را داخل ناحیه حرکت بدهیم، می‌بینیم زاویه‌ای که می‌سازد، از ۰ تا π تغییر می‌کند. پس حدود θ، به صورت $۰\leq\theta\leq\pi$ می‌باشد. حال می‌توانیم به محاسبه انتگرال بپردازیم:

$$S=\int_۰^\pi\int_۱^۲ r\,dr\,d\theta=\int_۰^\pi \frac{r^۲}{۲}\Big|_۱^۲ d\theta=\int_۰^\pi\frac{۳}{۲}d\theta=\frac{۳}{۲}\theta\Big|_۰^\pi=\frac{۳\pi}{۲}$$

رسم ناحیه انتگرال گیری

برای محاسبه مساحت به کمک انتگرال دوگانه باید $\iint dA$ را محاسبه کنیم

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad |J|=r$

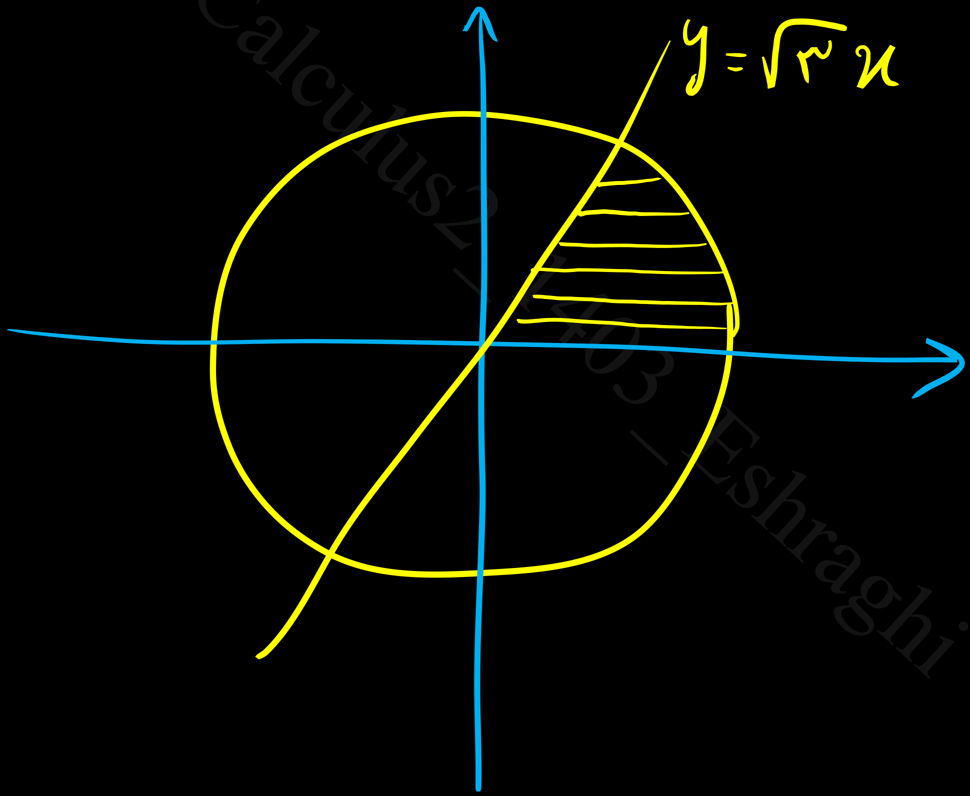
برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۳- مطلوبست محاسبه $\iint(x+y)\,dA$ روی ناحیه S که در ربع اول، درون قرص $x^۲+y^۲\leq a^۲$ و زیر خط $y=\sqrt{۳}x$ قرار گرفته است. (آدامز)

پاسخ) ابتدا ناحیه را رسم می‌کنیم:



از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. برای این مختصات داریم $|J|=r$. همچنین داریم $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

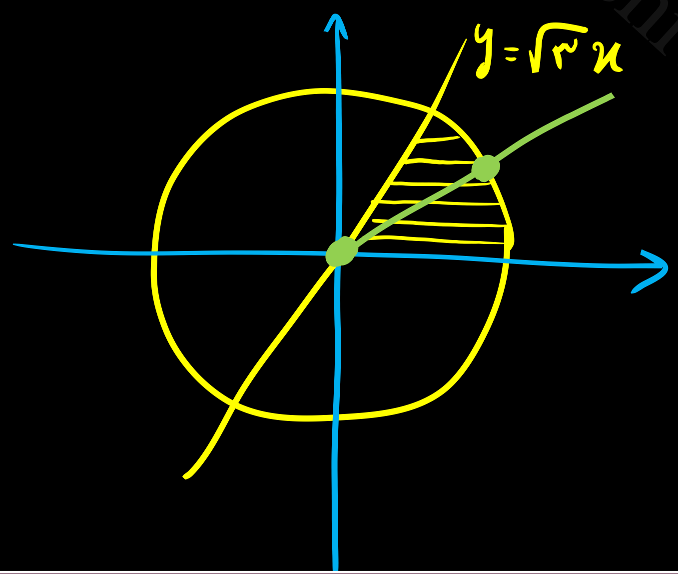
برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۳- مطلوبست محاسبه $\iint (x+y)\,dA$ روی ناحیه S که در ربع اول، درون قرص $x^۲+y^۲\le a^۲$ و زیر خط $y=\sqrt{۳}x$ قرار گرفته است. (آدامز)

ادامه پاسخ) برای تعیین حدود r، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم. در هنگام ورود $r=۰$ و در هنگام خروج داریم $x^۲+y^۲=a^۲$ که این نتیجه می‌دهد $r^۲=a^۲$ و این یعنی $r=a$. پس حدود r به صورت $۰\le r\le a$ می‌باشد. برای حدود θ، با توجه به این که شیب خط $y=\sqrt{۳}x$ برابر با $\sqrt{۳}$ است، قرار می‌دهیم $\tan\theta=\sqrt{۳}$ که با فرض $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت $\theta=\frac{\pi}{۳}$. برای خط $y=۰$ نیز شیب خط برابر با صفر و در نتیجه $\theta=۰$. پس حدود θ به صورت $۰\le\theta\le\frac{\pi}{۳}$ است.



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۳- مطلوبست محاسبه $\iint (x+y)\,dA$ روی ناحیه S که در ربع اول، درون قرص $x^۲+y^۲\le a^۲$ و زیر خط $y=\sqrt{۳}x$ قرار گرفته است. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال به محاسبه انتگرال می‌پردازیم:

$$\iint (x+y)\,dA = \int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\int_۰^{a} (r\cos\theta + r\sin\theta)\ r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_۰^{\frac{\pi}{۳}}\int_۰^{a} r^۲(\cos\theta+\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_۰^{\frac{\pi}{۳}} \frac{r^۳}{۳}(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_۰^{a}\ d\theta$$

$$= \int_۰^{\frac{\pi}{۳}} \frac{a^۳}{۳}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^۳}{۳}(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$= \frac{a^۳}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\qquad y=r\sin\theta\,,$
$|J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

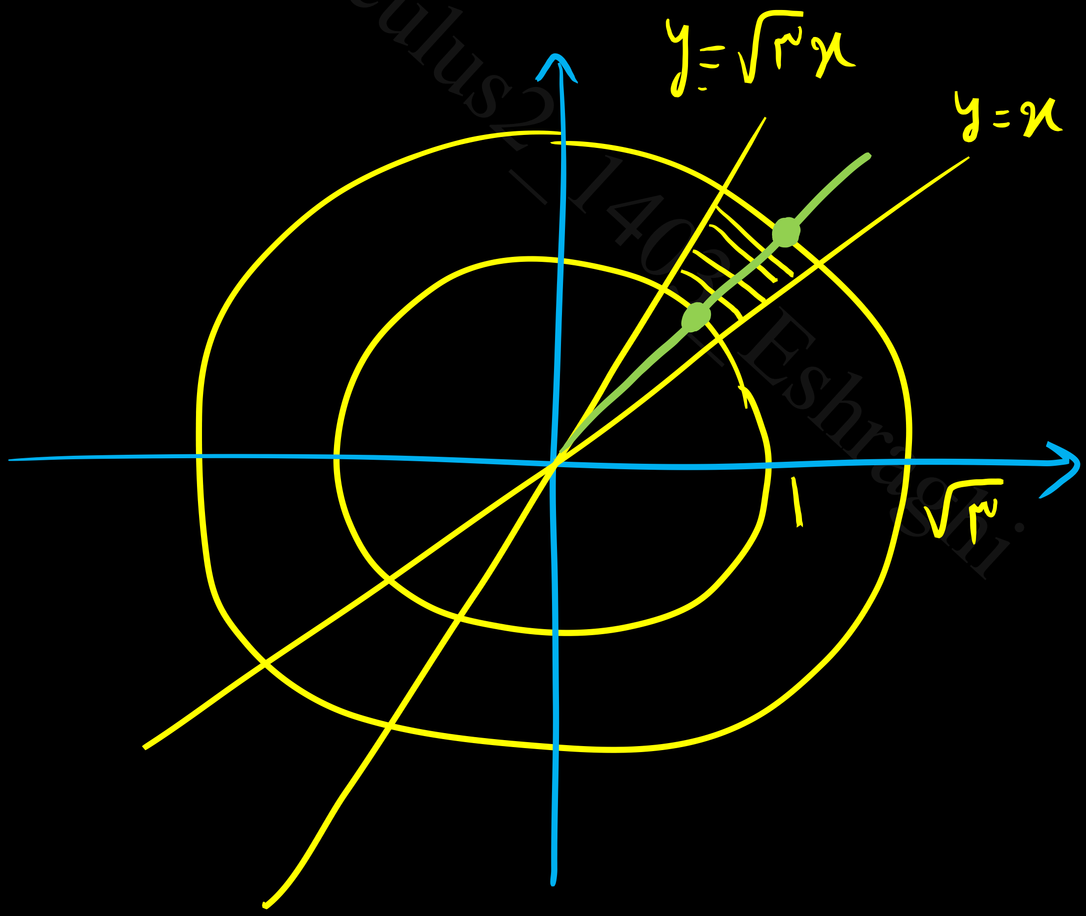
برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- حاصل $\iint_D \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy$ را بیابید که در آن D ناحیه محصور به دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=3$ و خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ در ربع اول دستگاه مختصات می‌باشد. (پایان ترم ۱۴۰۱)

پاسخ) ابتدا ناحیه D را در صفحه مختصات رسم می‌کنیم:



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- حاصل $\iint_D \sin\left(x^۲+y^۲\right)dxdy$ را بیابید که در آن D ناحیه محصور به دایره‌های $x^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۳$ و خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{۳}x$ در ربع اول دستگاه مختصات می‌باشد. (پایان ترم ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم $|J|=r$، $x=r\,cos\theta$ و $y=r\,sin\,\theta$. حال می‌خواهیم حدود r را تعیین کنیم. یک نیم خط را با شروع از مبدأ، از ناحیه عبور می‌دهیم. هنگام ورود به ناحیه داریم $x^۲+y^۲=۱$ که این یعنی $r^۲=۱$ و در نتیجه $r=۱$. هنگام خروج از ناحیه داریم $x^۲+y^۲=۳$ که این یعنی $r^۲=۳$ و در نتیجه $r=\sqrt{۳}$. پس حدود r به صورت $۱\le r\le\sqrt{۳}$ است. حال می‌خواهیم حدود θ را تعیین کنیم. برای خط $y=x$، شیب خط برابر با ۱ است و اگر قرار دهیم $\tan\theta=۱$ (θ در ربع اول) به $\theta=\frac{\pi}{۴}$ می‌رسیم. همچنین برای خط $y=\sqrt{۳}x$، شیب خط برابر با $\sqrt{۳}$ است و اگر قرار دهیم $\tan\theta=\sqrt{۳}$ (θ در ربع اول) به $\theta=\frac{\pi}{۳}$ می‌رسیم. پس حدود θ به صورت $\frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- حاصل $\iint_D \sin\left(x^۲+y^۲\right)dxdy$ را بیابید که در آن D ناحیه محصور به دایره‌های $x^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۳$ و خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{۳}x$ در ربع اول دستگاه مختصات می‌باشد. (پایان ترم ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) پس انتگرال به صورت زیر می‌باشد:

$$\iint_D \sin\left(x^۲+y^۲\right)dxdy=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}\int_{۱}^{\sqrt{۳}}\sin(r^۲)\ r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}-\frac{۱}{۲}\cos\left(r^۲\right)\Big|_{۱}^{\sqrt{۳}}\ d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}-\frac{۱}{۲}(\cos(۳)-\cos(۱))d\theta$$

$$=-\frac{۱}{۲}(\cos(۳)-\cos(۱))\theta\ \Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$=-\frac{۱}{۲}(\cos(۳)-\cos(۱))\frac{\pi}{۱۲}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

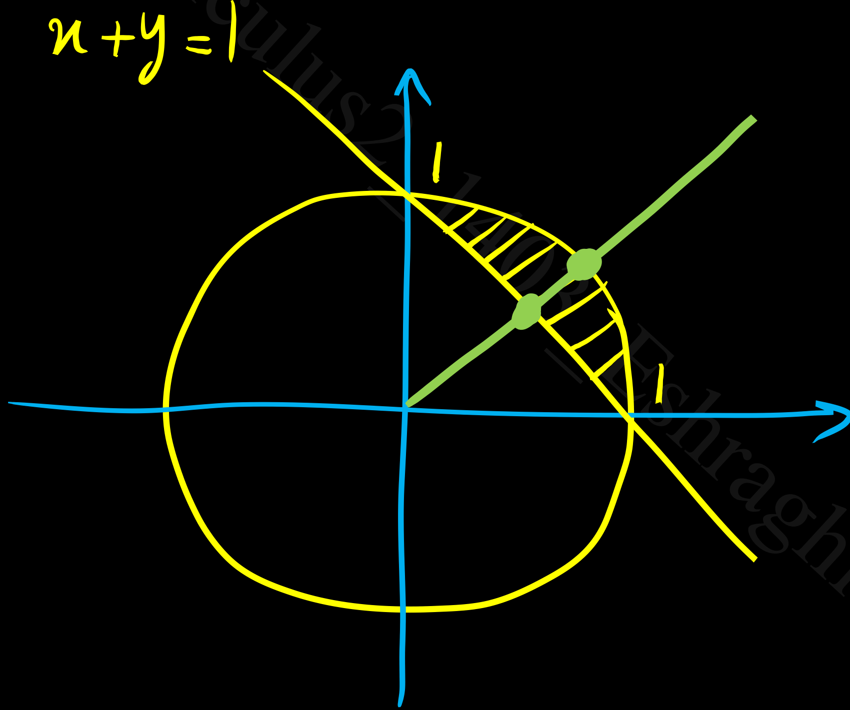
برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۵- با استفاده از مختصات قطبی، حاصل $\iint_S x+y\ dA$ را به دست آورید که در آن ناحیه S داخل دایره $x^2+y^2=1$ و بالای خط $x+y=1$ می‌باشد.

پاسخ) ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می‌کنیم:



از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. بنابراین $|J|=r$، $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم. باید دقت داشته باشیم که در این جا در هنگام ورود به ناحیه داریم $x+y=1$ و ما باید x و y را طبق مختصات قطبی بر حسب r و θ بنویسیم و سپس r را بر حسب θ به دست آوریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۵- با استفاده از مختصات قطبی، حاصل $\iint_S \; x+y \; dA$ را به دست آورید که در آن ناحیه S داخل دایره $x^۲+y^۲=۱$ و بالای خط $x+y=۱$ می‌باشد.

ادامه پاسخ) حال می‌خواهیم حدود r را تعیین کنیم. نیم خطی را با شروع از مبدأ مختصات رسم می‌کنیم به گونه‌ای که از ناحیه عبور کند. هنگام ورود داریم $x+y=۱$. این یعنی:

$$x+y=۱ \Rightarrow r\cos\theta + r\sin\theta = ۱ \Rightarrow r(\cos\theta+\sin\theta)=۱$$

$$\Rightarrow r = \frac{۱}{\cos\theta+\sin\theta}$$

موقع خروج، داریم $x^۲+y^۲=۱$ که این یعنی $r^۲=۱$ که نتیجه می‌دهد $r=۱$.

بنابراین حدود r به صورت $\frac{۱}{\cos\theta+\sin\theta} \le r \le ۱$ می‌باشد.

از طرف دیگر اگر خطی را داخل ناحیه حرکت دهیم، مقدار θ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند.

بنابراین انتگرال به صورت زیر می‌باشد:

$$I = \iint_S \; x+y \; dA = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\frac{۱}{\cos\theta+\sin\theta}}^{۱} (r\cos\theta + r\sin\theta) r \, dr \, d\theta$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\quad y=r\sin\theta\,,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم. باید دقت داشته باشیم که در این جا در هنگام ورود به ناحیه داریم $x+y=۱$ و ما باید x و y را طبق مختصات قطبی بر حسب r و θ بنویسیم و سپس r را بر حسب θ به دست آوریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۵- با استفاده از مختصات قطبی، حاصل $\iint_S x+y\, dA$ را به دست آورید که در آن ناحیه S داخل دایره $x^2+y^2=1$ و بالای خط $x+y=1$ می‌باشد.

(ادامه پاسخ)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} r^2(\cos\theta+\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\Bigg|_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\Big(\cos\theta+\sin\theta-\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\Big)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\,d\theta\right)$$

حل دو انتگرال اول به سادگی امکان پذیر است. برای حل انتگرال سوم، از تغییر متغیر $u=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ می‌توانیم استفاده کنیم.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad |J|=r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم. باید دقت داشته باشیم که در این جا در هنگام ورود به ناحیه داریم $x+y=1$ و ما باید x و y را طبق مختصات قطبی بر حسب r و θ بنویسیم و سپس r را بر حسب θ به دست آوریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۵- با استفاده از مختصات قطبی، حاصل $\iint_S \; x+y \; dA$ را به دست آورید که در آن ناحیه S داخل دایره $x^۲+y^۲=۱$ و بالای خط $x+y=۱$ می‌باشد.

ادامه پاسخ) نهایتاً خواهیم داشت:

$$I=\lim_{b\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{۱}{۳}\left(\sin\theta-\cos\theta+\frac{۱}{۱+\tan\theta}\right)\Bigg|_{۰}^{b}$$

$$=\frac{۱}{۳}(۱-۰)$$

$$=\frac{۱}{۳}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$x=r\cos\theta\,,\qquad y=r\sin\theta\,,$
$|J|=r$

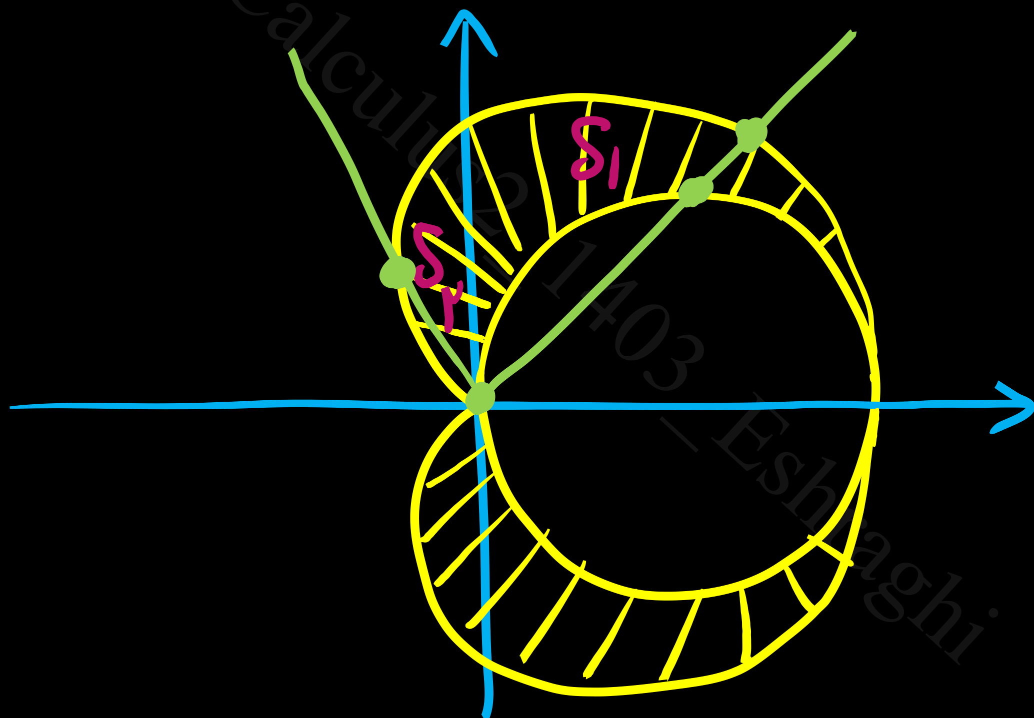
برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم. باید دقت داشته باشیم که در این جا در هنگام ورود به ناحیه داریم $x+y=۱$ و ما باید x و y را طبق مختصات قطبی بر حسب r و θ بنویسیم و سپس r را بر حسب θ به دست آوریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۶- مساحت خارج دایره به معادله $r = ۲a \cos \theta$ و داخل کاردیوئید $r = a(۱ + \cos \theta)$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

پاسخ) ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می‌کنیم:



با توجه به تقارنی که وجود دارد، کافی است مساحت قسمت بالای محور xها را محاسبه کنیم و جواب را دو برابر کنیم.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

برای محاسبه مساحت به کمک انتگرال دوگانه باید $\iint dA$ را محاسبه کنیم

با توجه به تقارنی که وجود دارد می‌توانیم فقط مساحت بالای محور xها را به دست آوریم و سپس جواب را دو برابر کنیم

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$|J| = r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم. در این جا باید دقت داشته باشیم که ضابطه r هنگام ورود به ناحیه‌های $S_۱$ و $S_۲$ متفاوت است و در نتیجه باید دو حالت را در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

۶- مساحت خارج دایره به معادله $r = 2a\cos\theta$ و داخل کاردیوئید $r = a(1+\cos\theta)$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

ادامه پاسخ) برای محاسبه مساحت به کمک انتگرال دوگانه باید $\iint dA$ را محاسبه کنیم. طبیعتاً از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. با توجه به این که حدود r و θ برای دو ناحیه S_1 و S_2 متفاوت است پس انتگرال گیری ما شامل دو بخش خواهد بود. برای ناحیه S_1 داریم:

$$2a\cos\theta \le r \le a(1+\cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

برای ناحیه S_2 داریم:

$$0 \le r \le a(1+\cos\theta), \qquad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

حال داریم:

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{2a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} r\ dr\,d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\ dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{2a\cos\theta}^{a(1+\cos\theta)} d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{a(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1+2\cos\theta-3\cos^2\theta)\ d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\ d\theta$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

برای محاسبه مساحت به کمک انتگرال دوگانه باید $\iint dA$ را محاسبه کنیم

با توجه به تقارنی که وجود دارد می‌توانیم فقط مساحت بالای محور xها را به دست آوریم و سپس جواب را دو برابر کنیم

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$|J| = r$

برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم. در این جا باید دقت داشته باشیم که ضابطه r هنگام ورود به ناحیه‌های S_1 و S_2 متفاوت است و در نتیجه باید دو حالت را در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

۶- مساحت خارج دایره به معادله $r = ۲a\cos\theta$ و داخل کاردیوئید $r = a(۱+\cos\theta)$ را با استفاده از انتگرال دوگانه محاسبه کنید.

(ادامه پاسخ)

$$S = a^۲\left(\theta + ۲\sin\theta - \frac{۳}{۲}\theta - \frac{۳}{۴}\sin ۲\theta\right)\Bigg|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} + a^۲\left(\theta + ۲\sin\theta + \frac{۱}{۲}\theta + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}$$

$$= a^۲\left(-\frac{\pi}{۴} + ۲\right) + a^۲\left(\frac{۳\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۴} - ۲\right)$$

$$= \frac{\pi a^۲}{۲}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

برای محاسبه مساحت به کمک انتگرال دوگانه باید $\iint dA$ را محاسبه کنیم

با توجه به تقارنی که وجود دارد می‌توانیم فقط مساحت بالای محور xها را به دست آوریم و سپس جواب را دو برابر کنیم

استفاده از مختصات قطبی

در مختصات قطبی داریم:
$|J| = r$

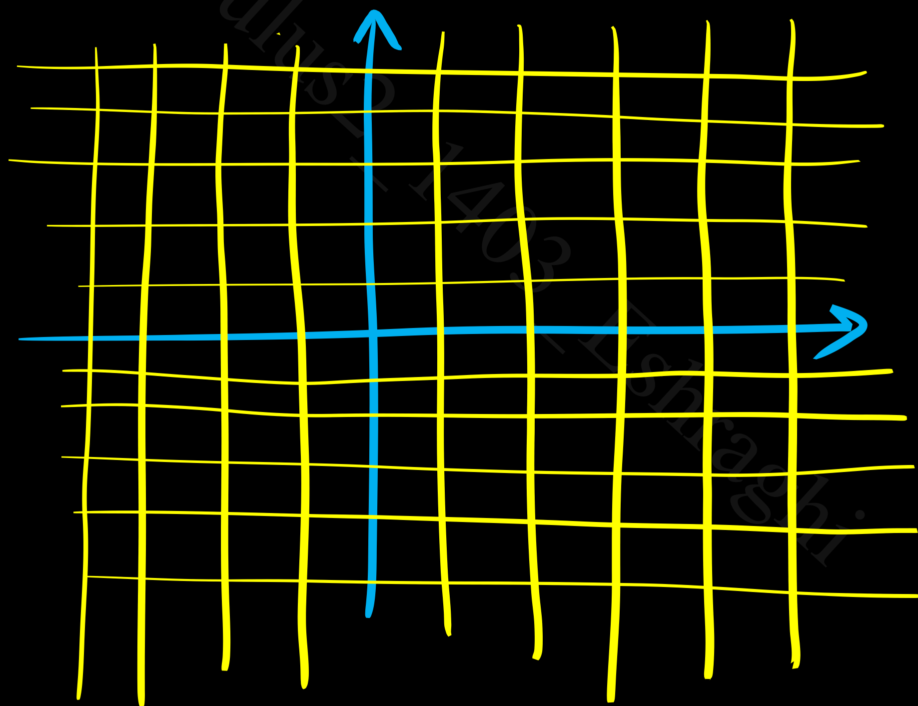
برای تعیین حدود r، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه r را در هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم. در این جا باید دقت داشته باشیم که ضابطه r هنگام ورود به ناحیه‌های $S_۱$ و $S_۲$ متفاوت است و در نتیجه باید دو حالت را در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، نیم‌خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت می‌دهیم و تغییرات زاویه‌ای که این نیم خط دارد را به عنوان حدود θ در نظر می‌گیریم

۷- تعیین کنید که انتگرال‌های زیر همگراست یا واگرا و مقدار انتگرال‌های همگرا را محاسبه کنید.

الف) $\iint e^{-(|x|+|y|)}dA$ روی ناحیه $\mathbb{R}^۲$

پاسخ الف) ناحیه انتگرال گیری کل صفحه $\mathbb{R}^۲$ یعنی به صورت زیر می‌باشد:



با توجه به تابع داخل انتگرال، می‌توانیم بنویسیم:

$$I = \iint e^{-(|x|+|y|)}dA = ۴\int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-(|x|+|y|)}dx\,dy = ۴\int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-(x+y)}dx\,dy$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

با توجه به تابع داخل انتگرال می‌توانیم انتگرال را روی $x,y \geq ۰$ در نظر بگیریم و سپس جواب را چهار برابر کنیم

چون تابع $e^{-(x+y)}$ در دامنه‌اش پیوسته است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-(x+y)}dx\,dy = \left(\int_۰^\infty e^{-x}\,dx\right)\left(\int_۰^\infty e^{-y}\,dy\right)$$

راهنمای حل سوال

۷- تعیین کنید که انتگرال‌های زیر همگراست یا واگرا و مقدار انتگرال‌های همگرا را محاسبه کنید.

الف) $\iint e^{-(|x|+|y|)}dA$ روی ناحیه $\mathbb{R}^۲$

ادامه پاسخ الف) حال با توجه به پیوستگی تابع $e^{-(x+y)}$ در دامنه اش، می‌توانیم بنویسیم:

$$I = ۴\left(\int_۰^\infty e^{-x}\,dx\right)\left(\int_۰^\infty e^{-y}\,dy\right)$$

$$= ۴\lim_{R\to\infty}\left(\int_۰^R e^{-x}\,dx\right)\left(\int_۰^R e^{-y}\,dy\right)$$

$$= ۴\lim_{R\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_۰^R\right)\left(-e^{-y}\Big|_۰^R\right)$$

$$= ۴\lim_{R\to\infty}(-e^{-R}+۱)(-e^{-R}+۱)$$

$$= ۴$$

پس انتگرال همگراست.

رسم ناحیه انتگرال گیری

با توجه به تابع داخل انتگرال می‌توانیم انتگرال را روی $x,y \geq ۰$ در نظر بگیریم و سپس جواب را چهار برابر کنیم

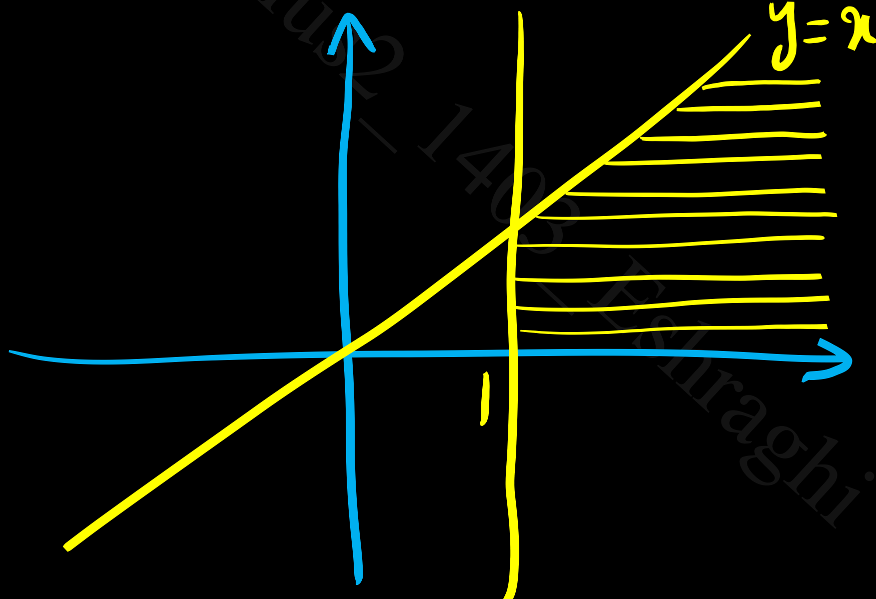
چون تابع $e^{-(x+y)}$ در دامنه‌اش پیوسته است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_۰^\infty\int_۰^\infty e^{-(x+y)}dx\,dy = \left(\int_۰^\infty e^{-x}\,dx\right)\left(\int_۰^\infty e^{-y}\,dy\right)$$

۷- تعیین کنید که انتگرال‌های زیر همگراست یا واگرا و مقدار انتگرال‌های همگرا را محاسبه کنید.

ب) $\iint \frac{۱}{x^۳} e^{-\frac{y}{x}} dA$ روی ناحیه‌ای که در رابطه‌های $x \geq ۱$ و $۰ \leq y \leq x$ صدق کند.

پاسخ ب) ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می‌کنیم:



ترتیب $dy\,dx$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$I = \int_{۱}^{\infty} \int_{۰}^{x} \frac{۱}{x^۳} e^{-\frac{y}{x}} \, dy dx$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

انتخاب $dy\,dx$ برای ترتیب انتگرال گیری

چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

۷- تعیین کنید که انتگرال‌های زیر همگراست یا واگرا و مقدار انتگرال‌های همگرا را محاسبه کنید.

ب) $\iint \frac{۱}{x^{۳}} e^{-\frac{y}{x}} dA$ روی ناحیه‌ای که در رابطه‌های $x \geq ۱$ و $x \geq y \geq ۰$ صدق کند.

ادامه پاسخ ب) حال داریم:

$$I = \int_{۱}^{\infty}\int_{۰}^{x} \frac{1}{x^{۳}} e^{-\frac{y}{x}}\, dydx = \int_{۱}^{\infty} -x\frac{۱}{x^{۳}} e^{-\frac{y}{x}}\Big|_{۰}^{x}\, dx$$

$$= \int_{۱}^{\infty} -\frac{1}{x^{۲}}(e^{-۱}-۱)\, dx$$

$$= (۱-e^{-۱})\left(-\frac{۱}{x}\right)\Big|_{۱}^{\infty}$$

$$= (۱-e^{-۱})$$

پس انتگرال همگراست.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

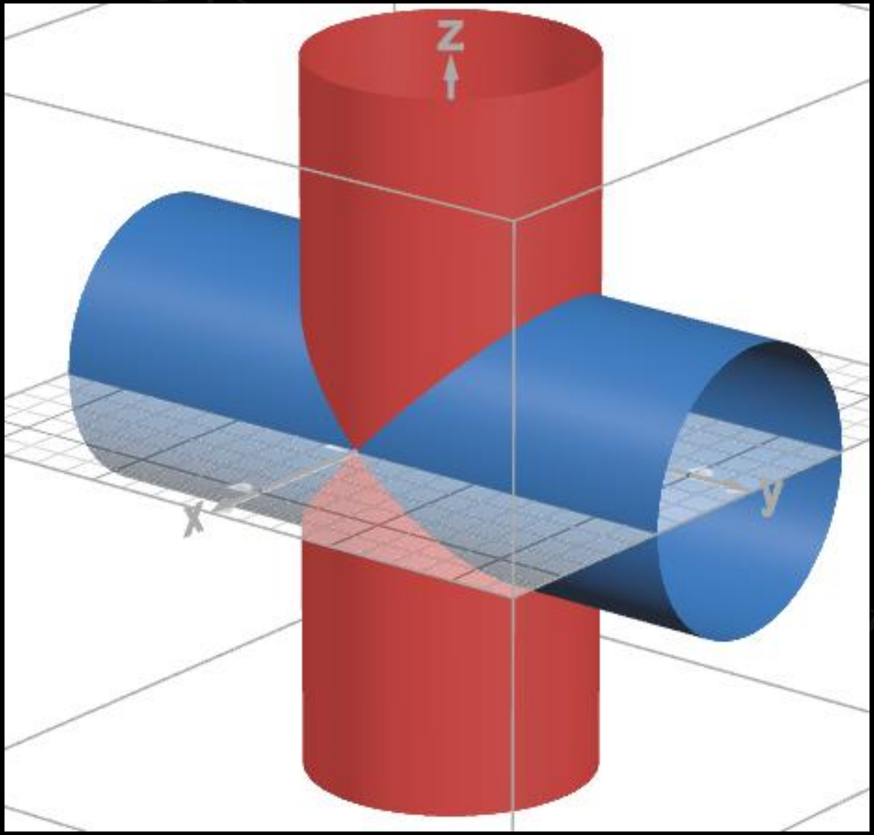
انتخاب $dy\,dx$ برای ترتیب انتگرال گیری

چون $dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود y تعیین شود. در مرحله بعدی، برای نوشتن حدود x، ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم تا حدود x نیز تعیین شود.

راهنمای حل سوال

۸- با استفاده از انتگرال دوگانه حجم محصور به دو استوانه $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و $x^۲ + z^۲ = a^۲$ را بیابید. (آدامز)

پاسخ) دو استوانه به صورت زیر می‌باشند:



با توجه به تقارنی که وجود دارد، می‌توانیم حجم محصور در یک هشتم اول را به دست آوریم و برای جواب نهایی، عدد به دست آمده را در هشت ضرب کنیم.

برای محاسبه حجم به کمک انتگرال دوگانه، باید ببینیم بین کدام دو رویه حجم محصور شده است. در این جا بین رویه‌های $z = \sqrt{a^۲ - x^۲}$ و $z = ۰$ محصور هست (در همان یک هشتم اول منظور هست)

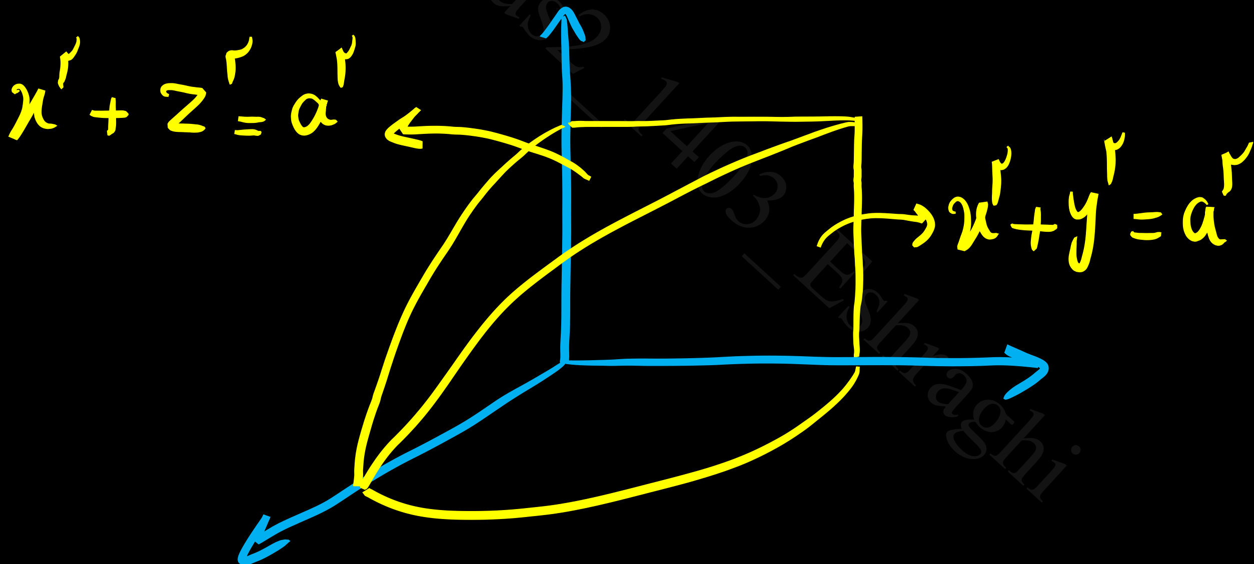
برای نوشتن حدود انتگرال، باید ببینیم روی کدام ناحیه در صفحه xy، می‌خواهیم حجم را محاسبه کنیم

راهنمای حل سوال

۸- با استفاده از انتگرال دوگانه حجم محصور به دو استوانه $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و $x^۲ + z^۲ = a^۲$ را بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) با توجه به تقارنی که وجود دارد، می‌توانیم حجم محصور در یک هشتم اول را به دست آوریم و برای جواب نهایی، عدد به دست آمده را در هشت ضرب کنیم.

بنابراین حجم محصور زیر را می‌خواهیم به دست آوریم:



بنابر شکل بالا، حجم بین دو رویه $z = ۰$ و $z = \sqrt{a^۲ - x^۲}$ مد نظر است. پس حجم محصور بالا به صورت زیر می‌باشد:

$$\iint \sqrt{a^۲ - x^۲} - ۰ \, dA$$

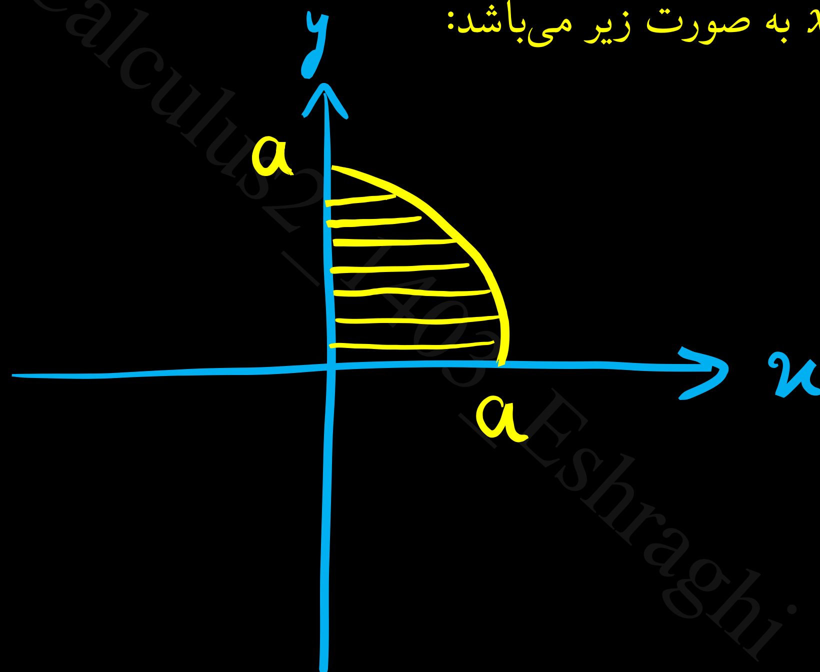
با توجه به تقارنی که وجود دارد، می‌توانیم حجم محصور در یک هشتم اول را به دست آوریم و برای جواب نهایی، عدد به دست آمده را در هشت ضرب کنیم.

برای محاسبه حجم به کمک انتگرال دوگانه، باید ببینیم بین کدام دو رویه حجم محصور شده است. در این جا بین رویه‌های $z = \sqrt{a^۲ - x^۲}$ و $z = ۰$ محصور هست (در همان یک هشتم اول منظور هست)

برای نوشتن حدود انتگرال، باید ببینیم روی کدام ناحیه در صفحه xy، می‌خواهیم حجم را محاسبه کنیم

۸- با استفاده از انتگرال دوگانه حجم محصور به دو استوانه $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ و $x^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ را بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) ناحیه‌ای که می‌خواهیم روی آن، حجم بین دو رویه را محاسبه کنیم، روی صفحه xy به صورت زیر می‌باشد:



پس اگر ترتیب $dy\,dx$ را انتخاب کنیم، انتگرال ما به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dy\,dx$$

راهنمای حل سوال

با توجه به تقارنی که وجود دارد، می‌توانیم حجم محصور در یک هشتم اول را به دست آوریم و برای جواب نهایی، عدد به دست آمده را در هشت ضرب کنیم.

برای محاسبه حجم به کمک انتگرال دوگانه، باید ببینیم بین کدام دو رویه حجم محصور شده است. در این جا بین رویه‌های $z=\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}$ و $z=۰$ محصور هست (در همان یک هشتم اول منظور هست)

برای نوشتن حدود انتگرال، باید ببینیم روی کدام ناحیه در صفحه xy، می‌خواهیم حجم را محاسبه کنیم

۸- با استفاده از انتگرال دوگانه حجم محصور به دو استوانه $x^۲+y^۲=a^۲$ و $x^۲+z^۲=a^۲$ را بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) پس حجم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V=۸\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}\sqrt{a^۲-x^۲}\,dy\,dx$$

$$=۸\int_{۰}^{a} y\sqrt{a^۲-x^۲}\,\Big|_{۰}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}\,dx$$

$$=۸\int_{۰}^{a} a^۲-x^۲\,dx$$

$$=۸\left(a^۲x-\frac{x^۳}{۳}\right)$$

$$=\frac{۱۶}{۳}a^۳$$

راهنمای حل سوال

با توجه به تقارنی که وجود دارد، می‌توانیم حجم محصور در یک هشتم اول را به دست آوریم و برای جواب نهایی، عدد به دست آمده را در هشت ضرب کنیم.

برای محاسبه حجم به کمک انتگرال دوگانه، باید ببینیم بین کدام دو رویه حجم محصور شده است. در این جا بین رویه‌های $z=\sqrt{a^۲-x^۲}$ و $z=۰$ محصور هست (در همان یک هشتم اول منظور هست)

برای نوشتن حدود انتگرال، باید ببینیم روی کدام ناحیه در صفحه xy، می‌خواهیم حجم را محاسبه کنیم