۱- کوتاه‌ترین فاصله مبدأ از خم حاصل از فصل مشترک رویه‌های $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و $x - ۲z = ۳$ را بیابید. (آدامز)

پاسخ) فاصله مبدأ از نقطه دلخواهی مانند (x,y,z) به صورت زیر می‌باشد:

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

پس ما به دنبال پیدا کردن مینیمم مطلق تابع d تحت شرایط $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و $x - ۲z = ۳$ هستیم. به دلیل صعودی بودن تابع $\sqrt{t}$، می‌توانیم مینیمم مطلق تابع زیر را تحت این قیدها پیدا کنیم:

$$f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$$

قرار می‌دهیم $g(x,y,z) = x^۲ + y^۲ - z^۲$ و $h(x,y,z) = x - ۲z - ۳$ و از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$L(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

$$= x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda(x^۲ + y^۲ - z^۲) + \mu(x - ۲z - ۳)$$

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$$
$$x - ۲z = ۳$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:

$$L = f + \lambda g + \mu h$$

شروع کار با رابطه (۲) که به نسبت خلوت‌تر است و همچنین قابل تجزیه است

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم و نهایتا جایگذاری نقطه مینیمم در تابع d به منظور پیداکردن جواب نهایی

۱- کوتاه‌ترین فاصله مبدأ از خم حاصل از فصل مشترک رویه‌های $x^۲+y^۲-z^۲=۰$ و $x-۲z=۳$ را بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=۰ \Longrightarrow ۲x+۲\lambda x+\mu=۰ & (۱) \\ \frac{\partial L}{\partial y}=۰ \Longrightarrow ۲y+۲\lambda y=۰ & (۲) \\ \frac{\partial L}{\partial z}=۰ \Longrightarrow ۲z-۲\lambda z-۲\mu=۰ & (۳) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=۰ \Longrightarrow x^۲+y^۲-z^۲=۰ & (۴) \\ \frac{\partial L}{\partial \mu}=۰ \Longrightarrow x-۲z-۳=۰ & (۵) \end{cases}$$

از رابطه (۲) نتیجه می‌گیریم $y(۱+\lambda)=۰$ و بنابراین $y=۰$ یا $\lambda=-۱$. اگر $y=۰$، آنگاه از رابطه (۴) داریم $x=\pm z$. اگر $x=z$، آنگاه از رابطه (۵) به دست می‌آوریم $z=-۳$ و در نتیجه $x=-۳$. پس $(-۳,۰,-۳)$ یکی از جواب‌هاست. اگر $x=-z$، آنگاه از رابطه (۵) به دست می‌آوریم $z=-۱$ و در نتیجه $x=۱$. پس $(۱,۰,-۱)$ یکی دیگر از جواب‌هاست.

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$x^۲+y^۲-z^۲=۰$$
$$x-۲z=۳$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$$L=f+\lambda g+\mu h$$

شروع کار با رابطه (۲) که به نسبت خلوت‌تر است و همچنین قابل تجزیه است

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم و نهایتا جایگذاری نقطه مینیمم در تابع d به منظور پیداکردن جواب نهایی

۱- کوتاه‌ترین فاصله مبدأ از خم حاصل از فصل مشترک رویه‌های $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و $x - ۲z = ۳$ را بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال فرض کنیم $\lambda = -۱$. از رابطه (۱) به دست می‌آوریم $\mu = ۰$. حال از رابطه (۳) به دست می‌آوریم $z = ۰$ و از رابطه (۵) به دست می‌آوریم $x = ۳$. اما اگر رابطه (۴) را در نظر بگیریم، به $۹ + y^۲ = ۰$ می‌رسیم که جواب ندارد. پس در حالتی که $\lambda = -۱$، به جوابی نمی‌رسیم.

بنابراین نقاط بحرانی همان نقاط $(-۳,۰,-۳)$ و $(۱,۰,-۱)$ هستند. حال مقدار تابع f را در این دو نقطه محاسبه می‌کنیم:

$$f(-۳,۰,-۳) = ۱۸, \qquad f(۱,۰,-۱) = ۲$$

پس $(۱,۰,-۱)$ مینیمم مطلق است و در نتیجه کوتاه‌ترین فاصله برابر است با $\sqrt{۲}$.

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$$
$$x - ۲z = ۳$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$$L = f + \lambda g + \mu h$$

شروع کار با رابطه (۲) که به نسبت خلوت‌تر است و همچنین قابل تجزیه است

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم و نهایتا جایگذاری نقطه مینیمم در تابع d به منظور پیداکردن جواب نهایی

۲- ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = x + y^۲z$ را مقید به قیدهای $y^۲ + z^۲ = ۲$ و $z = x$ بیابید. (آدامز)

پاسخ) قرار می‌دهیم $g(x,y,z) = y^۲ + z^۲ - ۲$ و $h(x,y,z) = z - x$. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x + y^۲z + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

$$= x + y^۲z + \lambda(y^۲ + z^۲ - ۲) + \mu(z - x)$$

حال قرار می‌دهیم $\nabla L = ۰$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = ۰ \Longrightarrow ۱ - \mu = ۰ & (۱) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow ۲yz + ۲\lambda y = ۰ & (۲) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = ۰ \Longrightarrow y^۲ + ۲\lambda z + \mu = ۰ & (۳) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = ۰ \Longrightarrow y^۲ + z^۲ - ۲ = ۰ & (۴) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = ۰ \Longrightarrow z - x = ۰ & (۵) \end{cases}$$

راهنمای حل سوال

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم ماکسیمم و مینیمم تابع f را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$y^۲ + z^۲ = ۲$$
$$z = x$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$$L = f + \lambda g + \mu h$$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم

۲- ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = x + y^۲ z$ را مقید به قیدهای $y^۲ + z^۲ = ۲$ و $z = x$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) از رابطه (۱) به دست می‌آوریم $\mu = ۱$. همچنین از رابطه (۲) به دست می‌آوریم $y(z+\lambda) = ۰$ که نتیجه می‌دهد $y = ۰$ یا $z = -\lambda$. اگر $y = ۰$، آنگاه از رابطه (۴) به دست می‌آوریم $z^۲ = ۲$ که نتیجه می‌دهد $z = \pm\sqrt{۲}$. از طرف دیگر با توجه به رابطه (۵) داریم $x = z$. پس برای این حالت $(y = ۰)$، جواب‌های $(\sqrt{۲},۰,\sqrt{۲})$ و $(-\sqrt{۲},۰,-\sqrt{۲})$ را خواهیم داشت.

حال فرض کنیم $z = -\lambda$. از رابطه (۴) داریم:

$$y^۲ + z^۲ - ۲ = ۰ \Longrightarrow y^۲ = ۲ - \lambda^۲$$

حال در رابطه (۳) جایگذاری می‌کنیم:

$$y^۲ + ۲\lambda z + \mu = ۰ \Longrightarrow ۲ - \lambda^۲ - ۲\lambda^۲ + ۱ = ۰ \Longrightarrow \lambda^۲ = ۱ \Longrightarrow \lambda = \pm ۱$$

اگر $\lambda = ۱$، آنگاه داریم $z = -۱$ و $y = \pm ۱$. اگر $\lambda = -۱$، آنگاه $z = ۱$ و $y = \pm ۱$.

پس برای این حالت $(z = -\lambda)$، جواب‌های $(-۱,۱,-۱)$، $(-۱,-۱,-۱)$، $(۱,۱,۱)$ و $(۱,-۱,۱)$ را خواهیم داشت.

راهنمای حل سوال

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم ماکسیمم و مینیمم تابع f را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$y^۲ + z^۲ = ۲$$
$$z = x$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$$L = f + \lambda g + \mu h$$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم

راهنمای حل سوال

۲- ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = x + y^۲z$ را مقید به قیدهای $y^۲ + z^۲ = ۲$ و $z = x$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال مقدار f را در نقاط بحرانی به دست می‌آوریم:

$$f\left(-\sqrt{۲}, ۰, -\sqrt{۲}\right) = -\sqrt{۲} \qquad f\left(\sqrt{۲}, ۰, \sqrt{۲}\right) = \sqrt{۲}$$

$$f(-۱, -۱, -۱) = -۲ \qquad f(-۱, ۱, -۱) = -۲$$

$$f(۱, -۱, ۱) = ۲ \qquad f(۱, ۱, ۱) = ۲$$

پس نقاط $(۱,۱,۱)$ و $(۱, -۱, ۱)$ ماکسیمم و نقاط $(-۱, ۱, -۱)$ و $(-۱, -۱, -۱)$ مینیمم تابع f هستند و مقدار ماکسیمم f برابر با ۲ و مقدار مینیمم f برابر با ۲− است.

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم ماکسیمم و مینیمم تابع f را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$y^۲ + z^۲ = ۲$$
$$z = x$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$$L = f + \lambda g + \mu h$$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم

۳- ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = xy^۲ + yz^۲$ را بر گوی $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۱$ بیابید. (آدامز)

پاسخ) در گام اول نقاط بحرانی تابع f که در محدوده $x^۲ + y^۲ + z^۲ < ۱$ هستند را پیدا می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (y^۲, ۲xy + z^۲, ۲yz)$$

$$\nabla f = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} y^۲ = ۰ \\ ۲xy + z^۲ = ۰ \\ ۲yz = ۰ \end{cases} \Longrightarrow y = z = ۰$$

بنابراین نقاط بحرانی در محدوده مورد نظر به شکل $(x,۰,۰)$ هستند که $-۱ < x < ۱$.

حال در گام بعدی، ماکسیمم و مینیمم تابع f را روی گوی بسته $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ پیدا می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم:

$$g(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱$$

$$L(x,y,z,\lambda) = xy^۲ + yz^۲ + \lambda g(x,y,z)$$

$$= xy^۲ + yz^۲ + \lambda(x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱)$$

راهنمای حل سوال

در مرحله اول، پیداکردن نقاط بحرانی تابع f که در محدوده $x^۲ + y^۲ + z^۲ < ۱$ قرار دارند و در مرحله دوم پیداکردن نقاط با روش ضرایب لاگرانژ (اکسترمم مقید که قید در این جا $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ است)

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$L = f + \lambda g + \mu h$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در هر دو مرحله در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم

۳- ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = xy^۲ + yz^۲$ را بر گوی $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۱$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال قرار می‌دهیم $\nabla L = ۰$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = ۰ \Longrightarrow y^۲ + ۲\lambda x = ۰ & (۱) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow ۲xy + z^۲ + ۲\lambda y = ۰ & (۲) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = ۰ \Longrightarrow ۲yz + ۲\lambda z = ۰ & (۳) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = ۰ \Longrightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱ = ۰ & (۴) \end{cases}$$

از رابطه (۳) به دست می‌آوریم $z = ۰$ یا $y = -\lambda$. اگر $z = ۰$، آنگاه از رابطه (۲) به دست می‌آوریم $y(x+\lambda) = ۰$ که نتیجه می‌دهد $y = ۰$ یا $x = -\lambda$. اگر $y = ۰$، آنگاه از رابطه (۴) به دست می‌آوریم $x^۲ = ۱$ که نتیجه می‌دهد $x = \pm ۱$. اگر $x = -\lambda$، آنگاه از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم $y^۲ = ۲x^۲$ که با جایگذاری در رابطه (۴) به دست می‌آوریم

$۳x^۲ = ۱$ که نتیجه می‌دهد $x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و در نتیجه $y = \pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$.

راهنمای حل سوال

در مرحله اول، پیداکردن نقاط بحرانی تابع f که در محدوده $x^۲ + y^۲ + z^۲ < ۱$ قرار دارند و در مرحله دوم پیداکردن نقاط با روش ضرایب لاگرانژ (اکسترمم مقید که قید در این جا $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ است)

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$L = f + \lambda g + \mu h$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در هر دو مرحله در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم

۳- ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=xy^{۲}+yz^{۲}$ را بر گوی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\leq ۱$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) پس در این حالت $(y=۰)$، در مجموع جواب‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$(۱,۰,۰),\quad (-۱,۰,۰),\quad \left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\sqrt{\frac{۲}{۳}},۰\right),\quad \left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},-\sqrt{\frac{۲}{۳}},۰\right),$$

$$\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}},\sqrt{\frac{۲}{۳}},۰\right),\quad \left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}},-\sqrt{\frac{۲}{۳}},۰\right)$$

حال فرض کنیم $y=-\lambda$. از رابطه (۱) به دست می‌آوریم $\lambda(\lambda+۲x)=۰$ که نتیجه می‌دهد $\lambda=۰$ یا $\lambda=-۲x$. اگر $\lambda=۰$، آنگاه $y=۰$ و از رابطه (۲) نتیجه می‌گیریم که $z=۰$ و در نتیجه از رابطه (۴)، به دست می‌آوریم $x=\pm ۱$. حال اگر $\lambda=-۲x$ یا به طور معادل $y=۲x$، آنگاه از رابطه (۲) به دست می‌آوریم $z^{۲}=۴x^{۲}$. حال از رابطه (۴) به دست می‌آوریم $۹x^{۲}=۱$ که نتیجه می‌دهد $x=\pm\frac{۱}{۳}$. پس $y=\pm\frac{۲}{۳}$ و $z=\pm\frac{۲}{۳}$.

راهنمای حل سوال

در مرحله اول، پیداکردن نقاط بحرانی تابع f که در محدوده $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}<۱$ قرار دارند و در مرحله دوم پیداکردن نقاط با روش ضرایب لاگرانژ (اکسترمم مقید که قید در این جا $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ است)

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f=۰$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$L=f+\lambda g+\mu h$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در هر دو مرحله در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم

۳- ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = xy^۲ + yz^۲$ را بر گوی $x^۲ + y^۲ + z^۲ \le ۱$ بیابید. (آدامز)

ادامه پاسخ) پس در این حالت $(y = -\lambda)$، در مجموع جواب‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$(۱,۰,۰), \qquad (-۱,۰,۰), \qquad \left(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right), \qquad \left(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳}\right),$$

$$\left(-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right), \qquad \left(-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳}\right)$$

حال به ازای هر x، داریم $f(x,۰,۰) = ۰$. از طرف دیگر:

$$f(-۱,۰,۰) = ۰ \qquad f(۱,۰,۰) = ۰$$

$$f\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},-\sqrt{\frac{۲}{۳}},۰\right) = \frac{۲}{۳\sqrt{۳}} \qquad f\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\sqrt{\frac{۲}{۳}},0\right) = \frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$$

$$f\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}},-\sqrt{\frac{۲}{۳}},۰\right) = -\frac{۲}{۳\sqrt{۳}} \qquad f\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}},\sqrt{\frac{۲}{۳}},۰\right) = -\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$$

$$f\left(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۴}{۹} \qquad f\left(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۴}{۹}$$

راهنمای حل سوال

در مرحله اول، پیداکردن نقاط بحرانی تابع f که در محدوده $x^۲ + y^۲ + z^۲ < ۱$ قرار دارند و در مرحله دوم پیداکردن نقاط با روش ضرایب لاگرانژ (اکسترمم مقید که قید در این جا $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ است)

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$L = f + \lambda g + \mu h$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در هر دو مرحله در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم

۳- ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z) = xy^۲ + yz^۲$ را بر گوی $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۱$ بیابید. (آدامز)

(ادامه پاسخ)

$$f\left(-\frac{۱}{۳}, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۲}{۳}\right) = -\frac{۴}{۹} \qquad f\left(-\frac{۱}{۳}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}\right) = -\frac{۴}{۹}$$

پس مقدار ماکسیمم و مینیمم به ترتیب برابر است با $\frac{۴}{۹}$ و $-\frac{۴}{۹}$.

راهنمای حل سوال

در مرحله اول، پیداکردن نقاط بحرانی تابع f که در محدوده $x^۲ + y^۲ + z^۲ < ۱$ قرار دارند و در مرحله دوم پیداکردن نقاط با روش ضرایب لاگرانژ (اکسترمم مقید که قید در این جا $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ است)

برای پیداکردن نقاط بحرانی قرار می‌دهیم $\nabla f = ۰$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$L = f + \lambda g + \mu h$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در هر دو مرحله در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم

۴- مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ به وسیله صفحه $۱ + x + y = z$ در طول منحنی C قطع شده است. بر C نزدیک‌ترین نقطه به مبدأ را تعیین کنید.

پاسخ) فاصله مبدأ از نقطه دلخواهی مانند (x,y,z) به صورت زیر می‌باشد:

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

پس ما به دنبال پیدا کردن مینیمم مطلق تابع d تحت شرایط $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ و $x + y - z + ۱ = ۰$ هستیم. به دلیل صعودی بودن تابع $\sqrt{t}$، می‌توانیم مینیمم مطلق تابع زیر را تحت قیدهای ذکر شده پیدا کنیم:

$$f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$$

قرار می‌دهیم $g(x,y,z) = x^۲ + y^۲ - z^۲$ و $h(x,y,z) = x + y - z + ۱$ و از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم:

$$L(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

$$= x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda(x^۲ + y^۲ - z^۲) + \mu(x + y - z + ۱)$$

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$z^۲ = x^۲ + y^۲$$
$$۱ + x + y = z$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$$L = f + \lambda g + \mu h$$

کم کردن روابط (۱) و (۲) از همدیگر در ابتدای کار حل دستگاه. بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم

۴- مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ به وسیله صفحه $z = ۱ + x + y$ در طول منحنی C قطع شده است. بر C نزدیک‌ترین نقطه به مبدأ را تعیین کنید.

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = ۰ \Longrightarrow ۲x + ۲\lambda x + \mu = ۰ & (۱) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow ۲y + ۲\lambda y + \mu = ۰ & (۲) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = ۰ \Longrightarrow ۲z - ۲\lambda z - \mu = ۰ & (۳) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = ۰ \Longrightarrow x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰ & (۴) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = ۰ \Longrightarrow x + y - z + ۱ = ۰ & (۵) \end{cases}$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم (با کم کردن روابط از همدیگر):

$$۲(x - y) + ۲\lambda(x - y) = ۰ \Longrightarrow (x - y)(۱ + \lambda) = ۰ \Longrightarrow x = y \ or \ \lambda = -۱$$

اگر $x = y$، آنگاه از رابطه (۵) به دست می‌آوریم $z = ۲x + ۱$. حال با جایگذاری در رابطه (۴) به دست می‌آوریم:

$$x^۲ + x^۲ - (۲x + ۱)^۲ = ۰ \Longrightarrow -۲x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \Longrightarrow x = -۱ \pm \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$z^۲ = x^۲ + y^۲$$
$$۱ + x + y = z$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$$L = f + \lambda g + \mu h$$

کم کردن روابط (۱) و (۲) از همدیگر در ابتدای کار حل دستگاه. بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم

۴- مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ به وسیله صفحه $z = ۱ + x + y$ در طول منحنی C قطع شده است. بر C نزدیک‌ترین نقطه به مبدأ را تعیین کنید.

ادامه پاسخ) بنابراین $y = -۱ \pm \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و چون $z = ۲x + ۱$، داریم $z = -۱ \pm \sqrt{۲}$.

پس در مجموع برای این حالت $(x = y)$، جواب‌های زیر به دست آمدند:

$$\left(-۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ - \sqrt{۲}\right), \quad \left(-۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ + \sqrt{۲}\right)$$

حال فرض کنیم $\lambda = -۱$. از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم $\mu = ۰$. حال از رابطه (۳) نتیجه می‌گیریم که $z = ۰$. حال با جایگذاری $z = ۰$ در رابطه (۴) به دست می‌آوریم $x = y = ۰$. حال با جایگذاری $x = y = z = ۰$ در رابطه (۵) به $۱ = ۰$ می‌رسیم که تناقض است. پس برای این حالت، جوابی نداریم. حال داریم:

$$f\left(-۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ + \sqrt{۲}\right) = ۶ - ۴\sqrt{۲}$$

$$f\left(-۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ - \sqrt{۲}\right) = ۶ + ۴\sqrt{۲}$$

بنابراین نقطه $\left(-۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}, -۱ + \sqrt{۲}\right)$ نزدیک ترین نقطه به مبدأ است.

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$z^۲ = x^۲ + y^۲$$
$$۱ + x + y = z$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$$L = f + \lambda g + \mu h$$

کم کردن روابط (۱) و (۲) از همدیگر در ابتدای کار حل دستگاه. بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم

۵- کمترین و بیشترین فاصله مبدأ مختصات تا خم فصل مشترک رویه‌های $x^۲ = ۳y^۲ + ۳z^۲$ و $z + y - x = -۲$ را بیابید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

پاسخ) فاصله مبدأ از نقطه دلخواهی مانند (x,y,z) به صورت زیر می‌باشد:

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

بنابراین ما به دنبال پیدا کردن مینیمم مطلق و ماکسیمم مطلق تابع d تحت دو شرط $۳y^۲ + ۳z^۲ - x^۲ = ۰$ و $z + y - x + ۲ = ۰$ هستیم. به دلیل صعودی بودن تابع $\sqrt{t}$، می‌توانیم مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع زیر را تحت قیدهای ذکر شده پیدا کنیم:

$$f(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$$

قرار می‌دهیم $g(x,y,z) = ۳y^۲ + ۳z^۲ - x^۲$ و $h(x,y,z) = z + y - x + ۲$ و از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم:

$$L(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

$$= x^۲ + y^۲ + z^۲ + \lambda(۳y^۲ + ۳z^۲ - x^۲) + \mu(z + y - x + ۲)$$

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم و ماکسیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم و ماکسیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$۳y^۲ + ۳z^۲ = x^۲$$
$$z + y - x = -۲$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:

$$L = f + \lambda g + \mu h$$

کم کردن روابط (۲) و (۳) از همدیگر در ابتدای کار حل دستگاه. بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم و ماکسیمم و نهایتا جایگذاری نقاط مینیمم و ماکسیم به دست آمده در تابع d برای جواب نهایی

۵- کمترین و بیشترین فاصله مبدأ مختصات تا خم فصل مشترک رویه‌های $۳y^۲ + ۳z^۲ = x^۲$ و $z + y - x = -۲$ را بیابید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) حال داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = ۰ \Longrightarrow ۲x - ۲\lambda x - \mu = ۰ & (۱) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow ۲y + ۶\lambda y + \mu = ۰ & (۲) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = ۰ \Longrightarrow ۲z + ۶\lambda z + \mu = ۰ & (۳) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = ۰ \Longrightarrow ۳y^۲ + ۳z^۲ - x^۲ = ۰ & (۴) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = ۰ \Longrightarrow z + y - x + ۲ = ۰ & (۵) \end{cases}$$

حال از روابط (۲) و (۳) به دست می‌آوریم (با کم کردن عبارت‌ها از هم دیگر):

$$۲(y - z) + ۶\lambda(y - z) = ۰ \Longrightarrow (y - z)(۲ + ۶\lambda) = ۰ \Longrightarrow z = y \ or \ \lambda = -\frac{۱}{۳}$$

فرض کنید $z = y$. از رابطه (۵) به دست می‌آوریم $x = ۲y + ۲$. حال با جایگذاری در رابطه (۴) به دست می‌آوریم:

$$۳y^۲ + ۳y^۲ - (۲y + ۱)^۲ = ۰ \Longrightarrow ۲y^۲ - ۸y - ۴ = ۰ \Longrightarrow y = ۲ \pm \sqrt{۶}$$

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم و ماکسیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم و ماکسیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$۳y^۲ + ۳z^۲ = x^۲$$
$$z + y - x = -۲$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:

$$L = f + \lambda g + \mu h$$

کم کردن روابط (۲) و (۳) از همدیگر در ابتدای کار حل دستگاه. بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم و ماکسیمم و نهایتا جایگذاری نقاط مینیمم و ماکسیم به دست آمده در تابع d برای جواب نهایی

۵- کمترین و بیشترین فاصله مبدأ مختصات تا خم فصل مشترک رویه‌های $x^۲ = ۳y^۲ + ۳z^۲$ و $z + y - x = -۲$ را بیابید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) بنابراین $z = ۲ \pm \sqrt{۶}$ و در نتیجه با توجه به $x = ۲y + ۲$ خواهیم داشت $x = ۶ \pm ۲\sqrt{۶}$. پس در مجموع برای این حالت، جواب‌های زیر را داریم:

$$\left(۶ - ۲\sqrt{۶}, ۲ - \sqrt{۶}, ۲ - \sqrt{۶}\right) \qquad \left(۶ + ۲\sqrt{۶}, ۲ + \sqrt{۶}, ۲ + \sqrt{۶}\right),$$

حال فرض کنیم $\lambda = -\frac{۱}{۳}$. از رابطه (۳) نتیجه می‌گیریم $\mu = ۰$. حال از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که $x = ۰$. حال با جایگذاری $x = ۰$ در رابطه (۴) به دست می‌آوریم $y = z = ۰$. حال با جایگذاری $x = y = z = ۰$ در رابطه (۵) به $۲ = ۰$ می‌رسیم که تناقض است. پس برای این حالت، جوابی نداریم. حال داریم:

$$f\left(۶ + ۲\sqrt{۶}, ۲ + \sqrt{۶}, ۲ + \sqrt{۶}\right) = ۸۰ + ۳۲\sqrt{۶}$$

$$f\left(۶ - ۲\sqrt{۶}, ۲ - \sqrt{۶}, ۲ - \sqrt{۶}\right) = ۸۰ - ۳۲\sqrt{۶}$$

بنابراین کمترین و بیشترین فاصله از مبدأ به ترتیب عبارت است از $\sqrt{۸۰ - ۳۲\sqrt{۶}}$ و $\sqrt{۸۰ + ۳۲\sqrt{۶}}$.

راهنمای حل سوال

تشکیل تابعی که می‌خواهیم مینیمم و ماکسیمم آن را پیدا کنیم (که در واقع فاصله یک نقطه دلخواه از مبدأ است). برای سادگی بیشتر کار، توان دوم تابع ساخته شده را در نظر می‌گیریم

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم مینیمم و ماکسیمم تابع در نظر گرفته شده را با دو شرط زیر پیدا کنیم:

$$۳y^۲ + ۳z^۲ = x^۲$$
$$z + y - x = -۲$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:

$$L = f + \lambda g + \mu h$$

کم کردن روابط (۲) و (۳) از همدیگر در ابتدای کار حل دستگاه.

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن مینیمم و ماکسیمم و نهایتا جایگذاری نقاط مینیمم و ماکسیمم به دست آمده در تابع d برای جواب نهایی

۶- ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y,z) = e^{x+y^{۲}+z}$ را روی مجموعه زیر بیابید.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} | x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z = ۱\}$$

(میان ترم ۱۴۰۱)

پاسخ) قرار می‌دهیم $g(x,y,z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z - ۱$. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم:

$$L(x,y,z,\lambda) = e^{x+y^{۲}+z} + \lambda g(x,y,z)$$
$$= e^{x+y^{۲}+z} + \lambda(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z - ۱)$$

حال قرار می‌دهیم $\nabla L = ۰$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = ۰ \Longrightarrow e^{x+y^{۲}+z} + ۲\lambda x - \lambda = ۰ & (۱) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = ۰ \Longrightarrow ۲y e^{x+y^{۲}+z} + ۲\lambda y = ۰ & (۲) \\ \frac{\partial L}{\partial z} = ۰ \Longrightarrow e^{x+y^{۲}+z} + ۲\lambda z - \lambda = ۰ & (۳) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = ۰ \Longrightarrow x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z - ۱ = ۰ & (۴) \end{cases}$$

راهنمای حل سوال

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم ماکسیمم و مینیمم تابع f را با شرط زیر پیدا کنیم:

$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z = ۱$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$L = f + \lambda g$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

استفاده از مثبت بودن تابع e^{u}

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم و نهایتا معرفی مقادیر ماکسیمم و مینیمم به عنوان جواب نهایی

۶- ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y,z) = e^{x+y^{۲}+z}$ را روی مجموعه زیر بیابید.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} | x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z = ۱\}$$

(میان ترم ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) از روابط (۱) و (۳) داریم:

$$۲\lambda x - \lambda = ۲\lambda z - \lambda \Rightarrow ۲\lambda x - ۲\lambda z = ۰ \Rightarrow \lambda(x-z) = ۰ \Rightarrow \lambda = ۰ \ or \ x = z$$

اگر $\lambda = ۰$، آنگاه از رابطه (۳) داریم $e^{x+y^{۲}+z} = ۰$ که این امکان پذیر نیست.

بنابراین $\lambda = ۰$ اتفاق نمی‌افتد و در نتیجه باید داشته باشیم $x = z$. حال از رابطه (۲) داریم:

$$۲ye^{x+y^{۲}+z} + ۲\lambda y = ۰ \Rightarrow y\left(e^{x+y^{۲}+z} + \lambda\right) = ۰ \Rightarrow y = ۰ \ or \ e^{x+y^{۲}+z} = -\lambda$$

اگر $y = ۰$، آنگاه با توجه به این که $x = z$، از رابطه (۴) داریم:

$$x^{۲} + x^{۲} - x - x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

در نتیجه $z = \frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$. بنابراین برای این حالت $(y = ۰)$ جواب‌های زیر را داریم:

$$\left(\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \qquad \left(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right),$$

راهنمای حل سوال

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم ماکسیمم و مینیمم تابع f را با شرط زیر پیدا کنیم:

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z = ۱$$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:
$L = f + \lambda g$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

استفاده از مثبت بودن تابع e^{u}

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم و نهایتا معرفی مقادیر ماکسیمم و مینیمم به عنوان جواب نهایی

۶- ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y,z) = e^{x+y^{۲}+z}$ را روی مجموعه زیر بیابید.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} | x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z = ۱\}$$

(میان ترم ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) حال اگر $e^{x+y^{۲}+z} = -\lambda$، از رابطه (۱) به دست می‌آوریم $۲\lambda x - ۲\lambda = ۰$ که چون $\lambda \neq ۰$، نتیجه می‌گیریم $x = ۱$ و بنابراین $z = ۱$. حال با جایگذاری در رابطه (۵) به $y^{۲} = ۱$ می‌رسیم که نتیجه می‌دهد $y = \pm ۱$. پس برای این حالت که حالت دوم است $(e^{x+y^{۲}+z} = -\lambda)$ نقاط $(۱,۱,۱)$ و $(۱,-۱,۱)$ را به دست می‌آوریم. حال داریم:

$$f\left(\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = e^{۱-\sqrt{۳}} \qquad f\left(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = e^{۱+\sqrt{۳}}$$

$$f(۱,۱,۱) = e^{۳} \qquad f(۱,-۱,۱) = e^{۳}$$

پس ماکسیمم مطلق تابع f در دو نقطه $(۱,۱,۱)$ و $(۱,-۱,۱)$ و مینیمم مطلق در نقطه $(\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ رخ می‌دهد و مقدار ماکسیمم مطلق برابر با $e^{۳}$ و مقدار مینیمم مطلق برابر با $e^{۱-\sqrt{۳}}$ می‌باشد.

راهنمای حل سوال

در این جا با اکسترمم مقید مواجه هستیم؛ یعنی می‌خواهیم ماکسیمم و مینیمم تابع f را با شرط زیر پیدا کنیم:

$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - x - z = ۱$

روش ضرایب لاگرانژ

تشکیل تابع لاگرانژ:

$L = f + \lambda g$

بررسی حالت‌های مختلف در بعضی از مراحل حل دستگاه

استفاده از مثبت بودن تابع e^{u}

جایگذاری نقاط به دست آمده در تابع f به منظور پیداکردن ماکسیمم و مینیمم و نهایتا معرفی مقادیر ماکسیمم و مینیمم به عنوان جواب نهایی