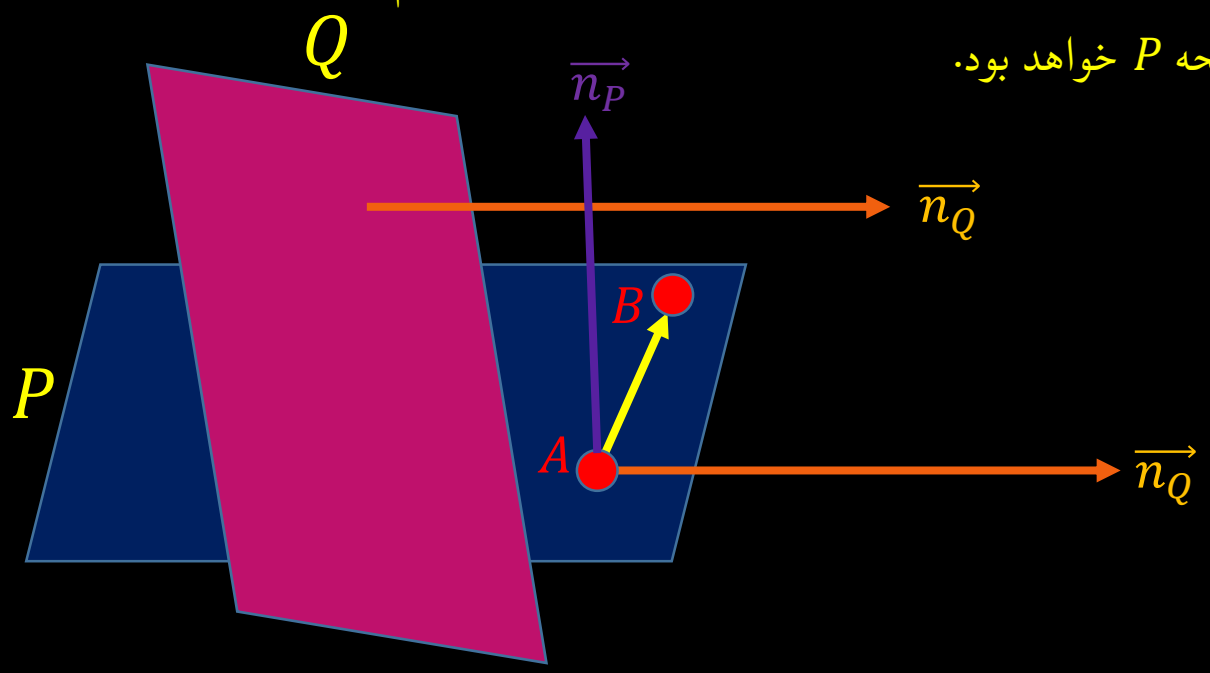
۱- معادله صفحه (P) گذرنده از نقاط $B = (۱,۱,۱)$ و $A = (۲,۰,۳)$ و عمود بر صفحه $Q: x + ۲y - ۳z = ۰$ را بیابید.

پاسخ) بردار نرمال صفحه Q، بردار $\overrightarrow{n_Q} = (۱,۲,-۳)$ می‌باشد. مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر است:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-۱,۱,-۲)$$

حال اگر ضرب خارجی دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ را در نظر بگیریم، بردار حاصل، بردار نرمال صفحه P خواهد بود.



راهنمای حل سوال

معادله یک صفحه در حالت کلی:

$$a(x - x_۰) + b(y - y_۰) + c(z - z_۰) = ۰$$

که (a,b,c) بردار نرمال صفحه و $(x_۰,y_۰,z_۰)$ یک نقطه از صفحه می‌باشد

بردار نرمال صفحه Q و بردار حاصل از اتصال دو نقطه، می‌توانند بردار نرمال صفحه هدف (P) را برای ما ایجاد کنند (به وسیله ضرب خارجی)

۱- معادله صفحه (P) گذرنده از نقاط $B = (۱,۱,۱)$ و $A = (۲,۰,۳)$ و عمود بر صفحه $Q: x + ۲y - ۳z = ۰$ را بیابید.

ادامه پاسخ) بنابراین

$$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۱ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۲ & -۳ \end{vmatrix} = \vec{i} - ۵\vec{j} - ۳\vec{k}$$

پس بردار $(۱, -۵, -۳)$ بردار نرمال صفحه P می‌باشد و اگر یکی از نقاط مانند B را در نظر بگیریم، معادله صفحه P به صورت زیر خواهد بود:

$$P: (x - ۱) - ۵(y - ۱) - ۳(z - ۱) = ۰$$

$$P: x - ۵y - ۳z + ۷ = ۰$$

راهنمای حل سوال

معادله یک صفحه در حالت کلی:

$$a(x - x_۰) + b(y - y_۰) + c(z - z_۰) = ۰$$

که (a,b,c) بردار نرمال صفحه و $(x_۰,y_۰,z_۰)$ یک نقطه از صفحه می‌باشد

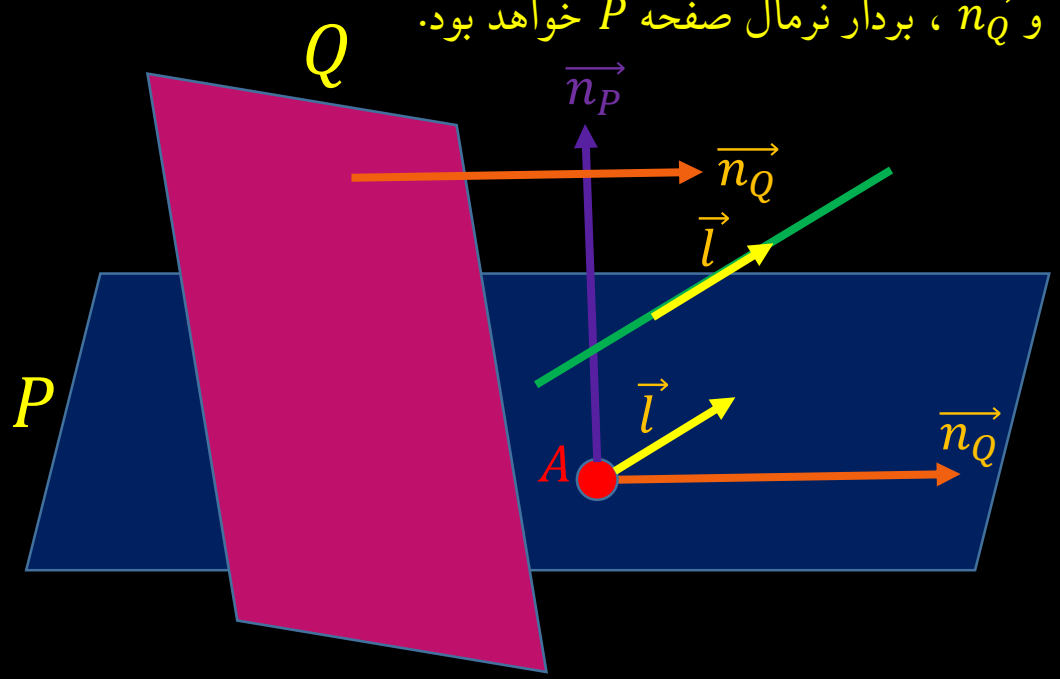
بردار نرمال صفحه Q و بردار حاصل از اتصال دو نقطه، می‌توانند بردار نرمال صفحه هدف (P) را برای ما ایجاد کنند (به وسیله ضرب خارجی)

۲- معادله صفحه (P) گذرنده از نقطه $(۱,۱,۱)$ و عمود بر صفحه (Q) $۲x - y + ۴z = ۱$ و موازی خط

$$\frac{x-۱}{۲} = y + ۱ = \frac{z-۱}{۴}$$

را بیابید.

پاسخ) بردار نرمال صفحه Q به صورت $\overrightarrow{n_Q} = (۲, -۱, ۴)$ و بردار هادی خط داده شده به صورت $\vec{l} = (۲,۱,۴)$ می‌باشد. حال با توجه به اطلاعات داده شده، ضرب خارجی بردارهای $\vec{l}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ ، بردار نرمال صفحه P خواهد بود.



راهنمای حل سوال

معادله یک صفحه در حالت کلی:

$$a(x - x_۰) + b(y - y_۰) + c(z - z_۰) = ۰$$

که (a,b,c) بردار نرمال صفحه و $(x_۰,y_۰,z_۰)$ یک نقطه از صفحه می‌باشد

بردار نرمال صفحه Q و بردار هادی خط، می‌توانند بردار نرمال صفحه هدف (P) را برای ما ایجاد کنند (به وسیله ضرب خارجی)

۲- معادله صفحه (P) گذرنده از نقطه $(۱,۱,۱)$ و عمود بر صفحه $۲x - y + ۴z = ۱ \ (Q)$ و موازی خط

$$\frac{x-۱}{۲} = y + ۱ = \frac{z-۱}{۴}$$

را بیابید.

ادامه پاسخ) بنابراین

$$\overrightarrow{n_P} = \vec{l} \times \overrightarrow{n_Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۸\vec{i} - ۴\vec{k}$$

پس معادله صفحه P به صورت زیر است:

$$P: ۸(x-۱) - ۴(z-۱) = ۰$$

$$P: ۸x - ۴z - ۴ = ۰$$

معادله یک صفحه در حالت کلی:

$$a(x - x_۰) + b(y - y_۰) + c(z - z_۰) = ۰$$

که (a,b,c) بردار نرمال صفحه و $(x_۰,y_۰,z_۰)$ یک نقطه از صفحه می‌باشد

بردار نرمال صفحه Q و بردار هادی خط، می‌توانند بردار نرمال صفحه هدف (P) را برای ما ایجاد کنند (به وسیله ضرب خارجی)

۳- سرعت و تندی و شتاب ذره‌ای را بیابید که مکانش در لحظه t عبارت است از $\vec{r}(t)$. مسیر حرکت ذره را توصیف کنید.

$$\vec{r}(t) = (e^{-t}\cos(e^t), e^{-t}\sin(e^t), -e^{-t})$$

پاسخ) ابتدا بردار سرعت را به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{r'(t)} = (-e^{-t}\cos(e^t) - \sin(e^t), -e^{-t}\sin(e^t) + \cos(e^t), e^{-t})$$

بنابراین اندازه سرعت یا همان تندی پس از ساده سازی، برابر است با:

$$\left|\overrightarrow{v(t)}\right| = \sqrt{۱ + ۲e^{-۲t}}$$

حال بردار شتاب را به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{r''(t)}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = ((e^{-t} - e^t)\cos(e^t) + \sin(e^t), (e^{-t} - e^t)\sin(e^t) - \cos(e^t), -e^{-t})$$

راهنمای حل سوال

$$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{r'(t)}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{r''(t)}$$

تندی برابر است با $|\overrightarrow{v(t)}|$

اندازه یک بردار مانند (a,b,c) برابر است با

$$\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

رابطه $x^۲ + y^۲ = z^۲$ معرف یک مخروط است (در راستای محور z) و بنابراین مسیر حرکت این ذره روی قسمتی از یک مخروط است

۳- سرعت و تندی و شتاب ذره‌ای را بیابید که مکانش در لحظه t عبارت است از $\vec{r}(t)$. مسیر حرکت ذره را توصیف کنید.

$$\vec{r}(t) = (e^{-t}\cos(e^t), e^{-t}\sin(e^t), -e^{-t})$$

ادامه پاسخ) اگر $x^۲ + y^۲$ را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$x^۲ + y^۲ = e^{-۲t}cos^۲(e^t) + e^{-۲t}sin^۲(e^t) = e^{-۲t}(cos^۲(e^t) + sin^۲(e^t))$$

$$= e^{-۲t}$$

$$= z^۲$$

مسیر حرکت روی قسمتی از یک مخروط است.

راهنمای حل سوال

$$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{r'(t)}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{r''(t)}$$

تندی برابر است با $|\overrightarrow{v(t)}|$

اندازه یک بردار مانند (a,b,c) برابر است با

$$\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

رابطه $x^۲ + y^۲ = z^۲$ معرف یک مخروط است (در راستای محور z) و بنابراین مسیر حرکت این ذره روی قسمتی از یک مخروط است

۴- خم $\gamma(t) = (۴\cos(۳t), ۴\sin(۳t), ۳\cos(۲t))$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $T(۰), N(۰), B(۰), \kappa(۰), \tau(۰)$.

پاسخ) ابتدا مشتق‌های مرتبه اول تا سوم $\gamma(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$\gamma'(t) = (-۱۲\sin(۳t), ۱۲\cos(۳t), -۶\sin(۲t))$$

$$\gamma''(t) = (-۳۶\cos(۳t), -۳۶\sin(۳t), -۱۲\cos(۲t))$$

$$\gamma'''(t) = (۱۰۸\sin(۳t), -۱۰۸\cos(۳t), ۲۴\sin(۲t))$$

حال می‌خواهیم بردار مماس یکه یعنی $T(۰)$ را به دست آوریم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \Longrightarrow \quad T(۰) = \frac{\gamma'(۰)}{|\gamma'(۰)|} = \frac{(۰,۱۲,۰)}{۱۲} = (۰,۱,۰)$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^{۳}}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^{۲}}$$

۴- خم $\gamma(t) = (۴\cos(۳t), ۴\sin(۳t), ۳\cos(۲t))$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $T(۰), N(۰), B(۰), \kappa(۰), \tau(۰)$.

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه دوم یعنی $B(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$\gamma'(۰) = (۰, ۱۲, ۰), \qquad \gamma''(۰) = (-۳۶, ۰, -۱۲)$$

$$\gamma'(۰) \times \gamma''(۰) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & ۱۲ & ۰ \\ -۳۶ & ۰ & -۱۲ \end{vmatrix} = (-۱۴۴, ۰, ۴۳۲)$$

$$|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)| = \sqrt{۱۴۴^۲ + ۰^۲ + ۴۳۲^۲} = \sqrt{۲۰۷۳۶۰} = ۱۴۴\sqrt{۱۰}$$

بنابراین

$$B(۰) = \frac{(-۱۴۴, ۰, ۴۳۲)}{۱۴۴\sqrt{۱۰}} = \left(-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, ۰, \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right)$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۴- خم $\gamma(t) = (۴\cos(۳t), ۴\sin(۳t), ۳\cos(۲t))$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $T(۰), N(۰), B(۰), \kappa(۰), \tau(۰)$.

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه اول (اصلی) یعنی $N(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$N(۰) = B(۰) \times T(۰)$$

$$N(۰) = \left(-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, ۰, \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right) \times (۰,۱,۰) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{۱}{\sqrt{۱۰}} & ۰ & \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$N(۰) = \left(-\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}, ۰, -\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right)$$

مقدار انحنا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

$$\kappa(0) = \frac{۱۴۴\sqrt{۱۰}}{۱۲^۳} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۱۲}$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۴- خم $\gamma(t) = (۴\cos(۳t), ۴\sin(۳t), ۳\cos(۲t))$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $T(۰), N(۰), B(۰), \kappa(۰), \tau(۰)$.

ادامه پاسخ) حال مقدار تاب را محاسبه می‌کنیم:

$$\tau(t) = \frac{\left(\gamma'(t) \times \gamma''(t)\right).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^{۲}}$$

$$\left(\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)\right).\gamma'''(۰) = (-۱۴۴, ۰, ۴۳۲).(۰, -۱۰۸, ۰) = ۰$$

در نتیجه $\tau(۰) = ۰$.

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^{۳}}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{\left(\gamma'(t) \times \gamma''(t)\right).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^{۲}}$$

۵- کنج فرنه (T,N,B)، تاب و انحنا را برای خم $\gamma(t) = (e^t, t^۲ + ۱, \ln(t+۱))$ در نقطه $(۱,۱,۰)$ به دست آورید. (میان ترم اردیبهشت ۱۴۰۲)

پاسخ) ابتدا می‌خواهیم ببینیم نقطه $(۱,۱,۰)$ به ازای کدام مقدار t حاصل می‌شود. با حل معادلات $e^t = ۱$، $t^۲ + ۱ = ۱$ و $\ln(t+۱) = ۰$ به دست می‌آوریم $t = ۰$.

حال مشتق‌های مرتبه اول تا سوم $\gamma(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$\gamma'(t) = (e^t, ۲t, \frac{۱}{t+۱})$$

$$\gamma''(t) = (e^t, ۲, \frac{-۱}{(t+۱)^۲})$$

$$\gamma'''(t) = (e^t, ۰, \frac{۲}{(t+۱)^۳})$$

حال می‌خواهیم بردار مماس یکه یعنی $T(۰)$ را به دست آوریم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \Longrightarrow T(۰) = \frac{\gamma'(۰)}{|\gamma'(۰)|} = \frac{(۱,۰,۱)}{\sqrt{۲}} = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰, \frac{۱}{\sqrt{۲}})$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۵- کنج فرنه (T,N,B)، تاب و انحنا را برای خم $\gamma(t) = (e^t, t^۲ + ۱, \ln(t+۱))$ در نقطه $(۱,۱,۰)$ به دست آورید. (میان ترم اردیبهشت ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه دوم یعنی $B(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

$$\gamma'(۰) = (۱,۰,۱), \qquad \gamma''(۰) = (۱,۲,-۱)$$

$$\gamma'(۰) \times \gamma''(۰) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix} = (-۲,۲,۲)$$

$$|\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)| = \sqrt{(-۲)^۲ + ۲^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$B(۰) = \frac{(-۲,۲,۲)}{۲\sqrt{۳}} = \left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۵- کنج فرنه (T,N,B)، تاب و انحنا را برای خم $\gamma(t) = (e^t, t^۲ + ۱, \ln(t+۱))$ در نقطه $(۱,۱,۰)$ به دست آورید. (میان ترم اردیبهشت ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) حال بردار قائم یکه اول (اصلی) یعنی $N(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$N(۰) = B(۰) \times T(۰)$$

$$N(۰) = (-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}}) \times (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰, \frac{۱}{\sqrt{۲}}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{vmatrix}$$

$$N(۰) = (\frac{۱}{\sqrt{۶}}, \frac{۲}{\sqrt{۶}}, -\frac{۱}{\sqrt{۶}})$$

مقدار انحنا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

$$\kappa(۰) = \frac{۲\sqrt{۳}}{(\sqrt{۲})^۳} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

۵- کنج فرنه (T,N,B)، تاب و انحنا را برای خم $\gamma(t) = (e^t, t^۲ + ۱, \ln(t+۱))$ در نقطه $(۱,۱,۰)$ به دست آورید. (میان ترم اردیبهشت ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) حال مقدار تاب را محاسبه می‌کنیم:

$$\tau(t) = \frac{\left(\gamma'(t) \times \gamma''(t)\right).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$

$$\left(\gamma'(۰) \times \gamma''(۰)\right).\gamma'''(۰) = (-۲,۲,۲).(۱,۰,۲) = -۲ + ۰ + ۴ = ۲$$

در نتیجه

$$\tau(۰) = \frac{۲}{\left(\sqrt{۱۲}\right)^۲} = \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$$

راهنمای حل سوال

بردار مماس یکه:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

بردار قائم یکه دوم:

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}$$

بردار قائم یکه اصلی:

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

انحنا:

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳}$$

تاب:

$$\tau(t) = \frac{\left(\gamma'(t) \times \gamma''(t)\right).\gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲}$$