۱- فرض کنید S رویه پارامتری

$$r(u,v) = (e^u \cos v\,, e^u \sin v\,, u), \qquad ۰ \le u \le ۱, ۰ \le v \le \pi$$

باشد. انتگرال $\iint_S \sqrt{۱ + x^۲ + y^۲}\, dS$ را محاسبه کنید. (پایان ترم ۹۷)

پاسخ) ابتدا المان سطح را به دست می‌آوریم که به صورت زیر است:

$$dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| dudv$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (e^u \cos v\,, e^u \sin v\,, ۱), \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = (-e^u \sin v\,, e^u \cos v\,, ۰)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e^u \cos v & e^u \sin v & ۱ \\ -e^u \sin v & e^u \cos v & ۰ \end{vmatrix} = (-e^u \cos v\,, -e^u \sin v\,, e^{2u})$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| = \sqrt{e^{۲u} cos^۲ v + e^{۲u} sin^۲ v + e^{۴u}} = \sqrt{e^{۲u}(۱ + e^{۲u})} = e^u \sqrt{۱ + e^{۲u}}$$

از طرفی:

$$\sqrt{۱ + x^۲ + y^۲} = \sqrt{۱ + e^{۲u} cos^۲ v + e^{۲u} sin^۲ v} = \sqrt{۱ + e^{۲u}}$$

المان سطح را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| dudv$$

نوشتن محدوده u و v بر اساس رابطه پارامتری داده شده برای رویه

۱- فرض کنید S رویه پارامتری

$$r(u,v)=(e^u\cos v\,,e^u\sin v\,,u),\qquad 0\le u\le 1,0\le v\le \pi$$

باشد. انتگرال $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\,dS$ را محاسبه کنید. (پایان ترم ۹۷)

ادامه پاسخ) بنابراین انتگرال سطح به صورت زیر خواهد بود:

المان سطح را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$dS=\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|dudv$$

$$\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\,dS=\int_0^{\pi}\int_0^{1}\sqrt{1+e^{2u}}\,e^u\sqrt{(1+e^{2u})}\,dudv$$

نوشتن محدوده u و v بر اساس رابطه پارامتری داده شده برای رویه

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{1}e^u\,(1+e^{2u})dudv$$

$$=\left(\int_0^{1}e^u+e^{3u}\,du\right)\left(\int_0^{\pi}dv\right)$$

$$=\left(e^u+\frac{e^{3u}}{3}\Bigg|_0^1\right)\left(v\Bigg|_0^{\pi}\right)$$

$$=\left(e+\frac{e^3}{3}-\frac{4}{3}\right)\pi$$

۲- شار گذرنده از میدان نیروی $F = (۳xz^۲, -x, -y)$ در عبور از S که قسمتی از استوانه $y^۲ + z^۲ = ۱۶$ است که در یک هشتم اول و بین صفحات $x = ۰$ و $x = ۵$ قرار دارد را در جهتی که از محور x دور می‌شود محاسبه کنید. (آدامز)

پاسخ) ابتدا قرار می‌دهیم $g(x,y,z) = y^۲ + z^۲ - ۱۶$. برای محاسبه شار گذرنده، باید انتگرال $\iint_S F.NdS$ را محاسبه کنیم. در این جا

$$N = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, \qquad dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

بنابراین

$$NdS = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy = \pm\frac{\nabla g}{|g_z|}dx\,dy = \pm\frac{(۰,۲y,۲z)}{|۲z|}dx\,dy$$

چون شار گذرنده را در جهتی که از محور xها دور می‌شود، می‌خواهیم به دست آوریم، پس علامت مثبت را انتخاب می‌کنیم. همچنین چون در ناحیه اول قرار داریم، خواهیم داشت $|۲z| = ۲z$. بنابراین

$$NdS = \frac{(۰,۲y,۲z)}{۲z}dx\,dy = (۰,\frac{y}{z},۱)dx\,dy$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.NdS$$

تعریف تابع g به وسیله انتقال تمام جملات معادله رویه به یک سمت

در این جا داریم:

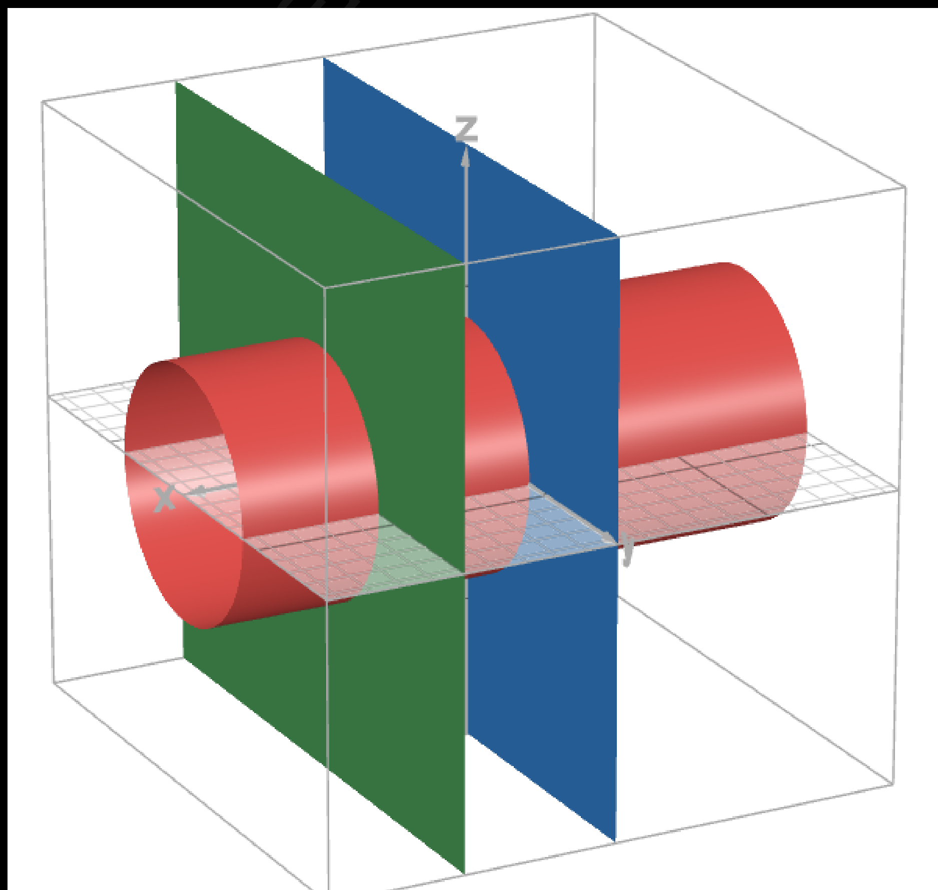
$$N = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

که در این جا چون از محور xها دور می‌شود، علامت مثبت را برای N انتخاب می‌کنیم (در واقع این جا با شار برون سو مواجه هستیم و N به سمت خارج استوانه است)

برای نوشتن حدود انتگرال دوگانه، رویه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم

۲- شار گذرنده از میدان نیروی $F = (۳xz^{۲}, -x, -y)$ در عبور از S که قسمتی از استوانه $y^{۲} + z^{۲} = ۱۶$ است که در یک هشتم اول و بین صفحات $x = ۰$ و $x = ۵$ قرار دارد را در جهتی که از محور x دور می‌شود محاسبه کنید. (آدامز)

(ادامه پاسخ)



راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.N dS$$

تعریف تابع g به وسیله انتقال تمام جملات معادله رویه به یک سمت

در این جا داریم:

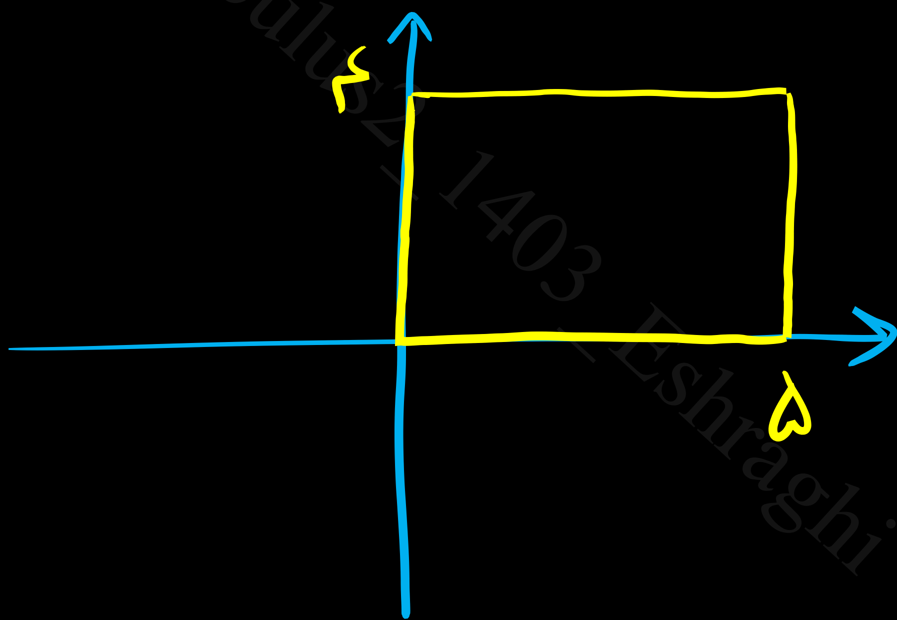
$$N = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} dx\, dy$$

که در این جا چون از محور xها دور می‌شود، علامت مثبت را برای N انتخاب می‌کنیم (در واقع این جا با شار برون سو مواجه هستیم و N به سمت خارج استوانه است)

برای نوشتن حدود انتگرال دوگانه، رویه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم

۲- شار گذرنده از میدان نیروی $F = (3xz^2, -x, -y)$ در عبور از S که قسمتی از استوانه $y^2 + z^2 = 16$ است که در یک هشتم اول و بین صفحات $x = 0$ و $x = 5$ قرار دارد را در جهتی که از محور x دور می‌شود محاسبه کنید. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال اگر ناحیه را روی صفحه xy تصویر کنیم، به صورت زیر خواهد بود:



ترتیب $dy\,dx$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\iint_S F.NdS = \int_0^5 \int_0^4 \left(3xz^2, -x, -y\right).\left(0, \frac{y}{z}, 1\right)dy\,dx$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.NdS$$

تعریف تابع g به وسیله انتقال تمام جملات معادله رویه به یک سمت

در این جا داریم:

$$N = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

که در این جا چون از محور xها دور می‌شود، علامت مثبت را برای N انتخاب می‌کنیم (در واقع این جا با شار برون سو مواجه هستیم و N به سمت خارج استوانه است)

برای نوشتن حدود انتگرال دوگانه، رویه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم

۲- شار گذرنده از میدان نیروی $F=(۳xz^۲,-x,-y)$ در عبور از S که قسمتی از استوانه $y^۲+z^۲=۱۶$ است که در یک هشتم اول و بین صفحات $x=۰$ و $x=۵$ قرار دارد را در جهتی که از محور x دور می‌شود محاسبه کنید. (آدامز)

ادامه پاسخ)

$$\iint_S F.NdS=\int_۰^۵\int_۰^۴(۳xz^۲,-x,-y).(۰,\frac{y}{z},۱)dy\,dx$$

$$=\int_۰^۵\int_۰^۴-\frac{xy}{z}-y\ dy\,dx$$

$$=\int_۰^۵\int_۰^۴-\frac{xy}{\sqrt{۱۶-y^۲}}-y\ dy\,dx$$

$$=\int_۰^۵ x\sqrt{۱۶-y^۲}-\frac{y^۲}{۲}\Big|_۰^۴\ dx$$

$$=\int_۰^۵-۸-۴x\,dx$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.NdS$$

تعریف تابع g به وسیله انتقال تمام جملات معادله رویه به یک سمت

در این جا داریم:

$$N=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|},dS=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

که در این جا چون از محور xها دور می‌شود، علامت مثبت را برای N انتخاب می‌کنیم (در واقع این جا با شار برون سو مواجه هستیم و N به سمت خارج استوانه است)

برای نوشتن حدود انتگرال دوگانه، رویه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم

۲- شار گذرنده از میدان نیروی $F=(۳xz^۲,-x,-y)$ در عبور از S که قسمتی از استوانه $y^۲+z^۲=۱۶$ است که در یک هشتم اول و بین صفحات $x=۰$ و $x=۵$ قرار دارد را در جهتی که از محور x دور می‌شود محاسبه کنید. (آدامز)

ادامه پاسخ)

$$=-۸x-۲x^۲\Big|_{۰}^{۵}$$

$$=-۹۰$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.NdS$$

تعریف تابع g به وسیله انتقال تمام جملات معادله رویه به یک سمت

در این جا داریم:

$$N=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|},dS=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

که در این جا چون از محور xها دور می‌شود، علامت مثبت را برای N انتخاب می‌کنیم (در واقع این جا با شار برون سو مواجه هستیم و N به سمت خارج استوانه است)

برای نوشتن حدود انتگرال دوگانه، رویه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم

۳- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_S x\,dS$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{۲(x^۲+y^۲)}$ است که زیر صفحه $z=۱+y$ قرار دارد. (آدامز)

پاسخ) قرار می‌دهیم $g(x,y,z)=z-\sqrt{۲(x^۲+y^۲)}$. حال dS را محاسبه می‌کنیم:

$$\nabla g=\left(\frac{-۲x}{\sqrt{۲(x^۲+y^۲)}},\frac{-۲y}{\sqrt{۲(x^۲+y^۲)}},۱\right),\qquad g_z=۱$$

$$dS=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy=\sqrt{\frac{۴x^۲}{۲x^۲+۲y^۲}+\frac{۴y^۲}{۲x^۲+۲y^۲}+۱}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{\frac{۶(x^۲+y^۲)}{۲(x^۲+y^۲)}}=\sqrt{۳}dx\,dy$$

$$=\sqrt{۳}dx\,dy$$

بنابراین داریم:

$$\iint_S x\,dS=\iint x\sqrt{۳}dx\,dy$$

حال باید کران‌های انتگرال دوگانه را مشخص کنیم.

راهنمای حل سوال

تعریف تابع g به وسیله انتقال تمام جملات معادله رویه به یک سمت (دقت داریم که در این جا g را از روی مخروط می‌سازیم چون S قسمتی از مخروط است)

در این جا داریم:

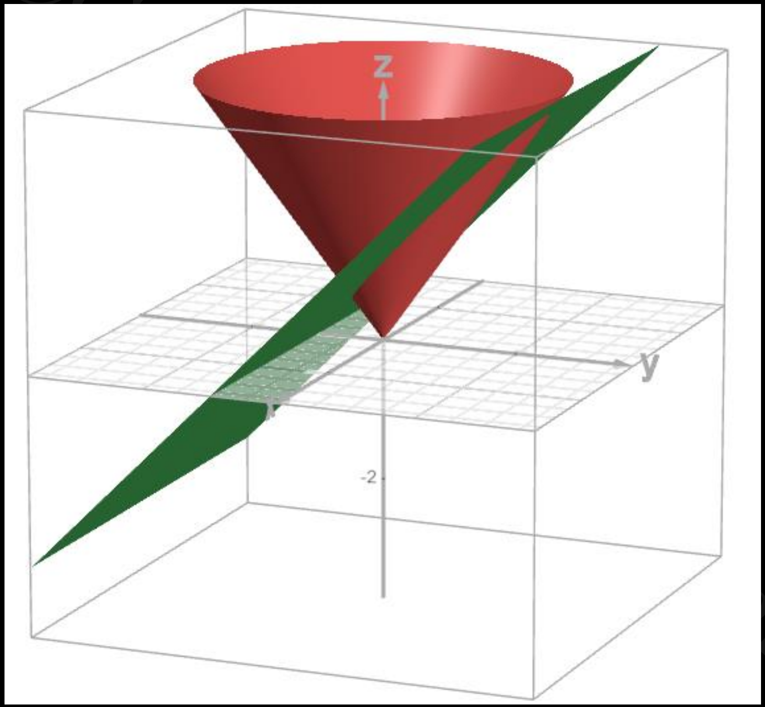
$$dS=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}dx\,dy$$

برای نوشتن حدود انتگرال دوگانه، رویه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم. برای این که تشخیص دهیم تصویر، چه ناحیه‌ای است، ضابطه مخروط و صفحه داده شده را برابر قرار می‌دهیم

انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن برابر با صفر است

۳- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_S x\,dS$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{۲(x^۲+y^۲)}$ است که زیر صفحه $z=۱+y$ قرار دارد. (آدامز)

ادامه پاسخ)



ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم. برای این که متوجه شویم، تصویر ناحیه به چه شکلی است، به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} z=\sqrt{۲(x^۲+y^۲)} \\ z=۱+y \end{cases} \qquad \sqrt{۲(x^۲+y^۲)}=۱+y \Rightarrow x^۲+\frac{(y-۱)^۲}{۲}=۱$$

راهنمای حل سوال

تعریف تابع g به وسیله انتقال تمام جملات معادله رویه به یک سمت (دقت داریم که در این جا g را از روی مخروط می‌سازیم چون S قسمتی از مخروط است)

در این جا داریم:

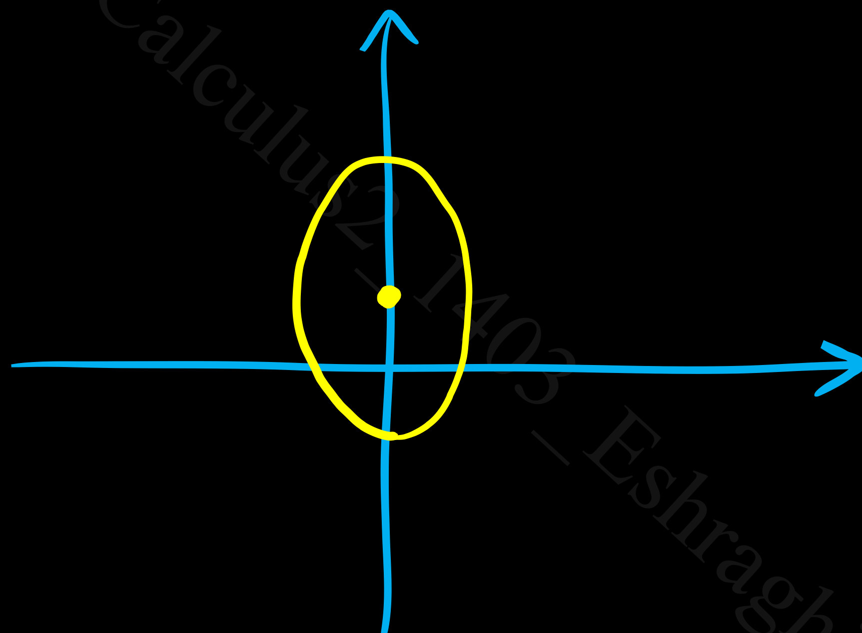
$$dS=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}\,dx\,dy$$

برای نوشتن حدود انتگرال دوگانه، رویه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم. برای این که تشخیص دهیم تصویر، چه ناحیه‌ای است، ضابطه مخروط و صفحه داده شده را برابر قرار می‌دهیم

انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن برابر با صفر است

۳- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_S x\,dS$ که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ است که زیر صفحه $z=1+y$ قرار دارد. (آدامز)

ادامه پاسخ) پس تصویر ناحیه روی صفحه xy، یک بیضی به مرکز $(0,1)$ است.



اگر ترتیب $dx\,dy$ را انتخاب کنیم، خواهیم داشت:

$$\iint_S x\,dS=\sqrt{3}\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{2}}}^{\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{2}}} x\,dx\,dy=0$$

دلیل تساوی بالا این است که تابع x فرد است و ناحیه انتگرال گیری (برای x) متقارن است.

راهنمای حل سوال

تعریف تابع g به وسیله انتقال تمام جملات معادله رویه به یک سمت (دقت داریم که در این جا g را از روی مخروط می‌سازیم چون S قسمتی از مخروط است)
.

در این جا داریم:

$$dS=\frac{|\nabla g|}{|g_z|}\,dx\,dy$$

برای نوشتن حدود انتگرال دوگانه، رویه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم. برای این که تشخیص دهیم تصویر، چه ناحیه‌ای است، ضابطه مخروط و صفحه داده شده را برابر قرار می‌دهیم

انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن برابر با صفر است

۴- با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری (آدامز)

الف) $F = (x^۳, ۳yz^۲, ۳y^۲z + x^۲)$ را در خروج از کره به معادله $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a$ که در آن $a > ۰$ محاسبه کنید.

پاسخ الف) می‌خواهیم $\oiint_S F.N\, dS$ را محاسبه کنیم که S سطح کره و N قائم یکه به آن به سمت بیرون است. فرض کنید D ناحیه محصور داخل کره داده شده باشد. در این صورت، مرز D یک رویه بسته است که هموار است. همچنین F نیز یک میدان برداری هموار است و جهت N به سمت بیرون کره است. حال طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV$$

مقدار $div\, F$ به صورت زیر می‌باشد.

$$div\, F = \nabla.F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = ۳x^۲ + ۳z^۲ + ۳y^۲$$

از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این مختصات داریم:

$$\rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲, \qquad |J| = \rho^۲ \sin\phi$$

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta\,, \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta\,, \qquad z = \rho \cos\phi$$

راهنمای حل سوال

شارگذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.N dS$$

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV$$

$$div\, F = \nabla.F$$

استفاده از مختصات کروی برای حل انتگرال سه گانه

۴- با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری (آدامز)

الف) $F = (x^۳, ۳yz^۲, ۳y^۲z + x^۲)$ را در خروج از کره به معادله $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a$ که در آن $a > ۰$ محاسبه کنید.

ادامه پاسخ الف) بنابراین:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV = \iiint_D ۳x^۲ + ۳z^۲ + ۳y^۲\, dV$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^{a} ۳\rho^۲\rho^۲ \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= ۳\left(\frac{\rho^۵}{۵}\Bigg|_۰^a\right)\left(-\cos\phi\Bigg|_۰^{\pi}\right)\left(\theta\Bigg|_۰^{۲\pi}\right)$$

$$= \frac{۱۲}{۵}\pi a^۵$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.NdS$$

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV$$

$$div\, F = \nabla.F$$

استفاده از مختصات کروی برای حل انتگرال سه گانه

۴- با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری (آدامز)

ب) $F = (x^۲,y^۲,z^۲)$ را در خروج از مرز ناحیه محصور به استوانه $x^۲ + y^۲ \leq ۲y$ و $۰ \leq z \leq ۴$ محاسبه کنید.

پاسخ ب) می‌خواهیم $\oiint_S F.N\, dS$ را محاسبه کنیم که S مرز ناحیه محصور و N قائم یکه آن رو به بیرون است. است. فرض کنید D ناحیه محصور به استوانه $x^۲ + y^۲ \leq ۲y$ و $۰ \leq z \leq ۴$ باشد. در این صورت، مرز D یک رویه بسته و قطعه به قطعه هموار است. همچنین F نیز یک میدان برداری هموار است و جهت N به سمت خارج است. حال طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV$$

مقدار $div\, F$ به صورت زیر می‌باشد.

$$div\, F = \nabla . F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = ۲x + ۲y + ۲z$$

حال داریم:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV = \iiint_D ۲x + ۲y + ۲z \;\; dV$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.N dS$$

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV$$

$$div\, F = \nabla . F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.N dS$$

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV$$

$$div\, F = \nabla.F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

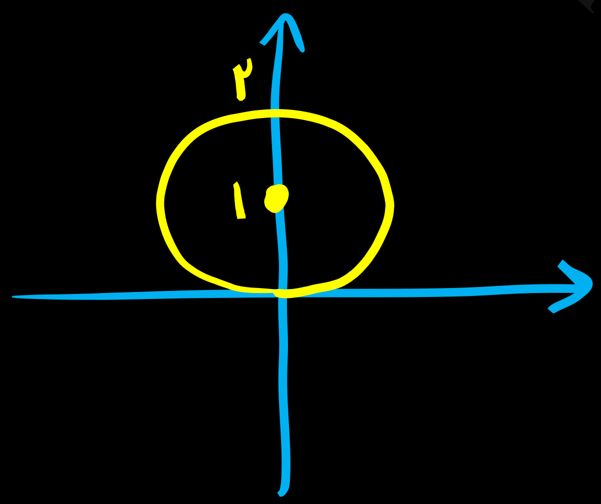
۴- با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری (آدامز)

ب) $F = (x^۲, y^۲, z^۲)$ را در خروج از مرز ناحیه محصور به استوانه $x^۲ + y^۲ \le ۲y$ و $۰ \le z \le ۴$ محاسبه کنید.

ادامه پاسخ ب) برای حل این انتگرال سه گانه از مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این مختصات داریم:

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta\,, \qquad |J| = r$$

اگر خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور دهیم، هنگام ورود به $z = ۰$ و هنگام خروج به $z = ۴$ برخورد می‌کنیم. از طرفی اگر ناحیه D را روی صفحه xy تصویر کنیم، دایره $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ به دست می‌آید.



۴- با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری (آدامز)

ب) $F = (x^۲, y^۲, z^۲)$ را در خروج از مرز ناحیه محصور به استوانه $x^۲ + y^۲ \leq ۲y$ و $۰ \leq z \leq ۴$ محاسبه کنید.

ادامه پاسخ ب) حدود θ به صورت $۰ \leq \theta \leq \pi$ می‌باشد. برای حدود r، هنگام ورود داریم $r = ۰$ و هنگام خروج داریم $x^۲ + y^۲ = ۲y$ که در مختصات قطبی خواهیم داشت $r^۲ = ۲r \sin\theta$ که نتیجه می‌دهد $r = ۲ \sin\theta$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV = \int_۰^{\pi} \int_۰^{۲\sin\theta} \int_۰^{۴} (۲r\sin\theta + ۲r\cos\theta + ۲z) r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_۰^{\pi} \int_۰^{۲sin\theta} r(۲r\sin\theta + ۲r\cos\theta)z + rz^۲ \Big|_۰^{۴} dr\, d\theta$$

$$= \int_۰^{\pi} \int_۰^{۲\, sin\theta} ۴r(۲r\sin\theta + ۲r\cos\theta) + ۱۶r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_۰^{\pi} \int_۰^{۲\, sin\theta} ۸r^۲(\sin\theta + \cos\theta) + ۱۶r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_۰^{\pi} ۸\frac{r^۳}{۳}(\sin\theta + \cos\theta) + ۸r^۲ \Big|_۰^{۲\, sin\theta} d\theta$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.N dS$$

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\, dS = \iiint_D div\, F\, dV$$

$$div\, F = \nabla . F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

۴- با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری (آدامز)

ب) $F=(x^۲,y^۲,z^۲)$ را در خروج از مرز ناحیه محصور به استوانه $x^۲+y^۲\le ۲y$ و $۰\le z\le ۴$ محاسبه کنید.

ادامه پاسخ ب)

$$=\int_۰^{\pi} ۶۴\frac{sin^۳\theta}{۳}(\sin\theta+\cos\theta)+۳۲\ sin^۲\theta\ \ d\theta$$

$$=\int_۰^{\pi}\frac{۶۴}{۳}\left(\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}\right)^۲+\frac{۶۴}{۳}sin^۳\theta\cos\theta+۳۲\left(\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}\right)\ d\theta$$

$$=۲۴\pi$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.N dS$$

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\ dS=\iiint_D div\ F\ dV$$

$$div\ F=\nabla.F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

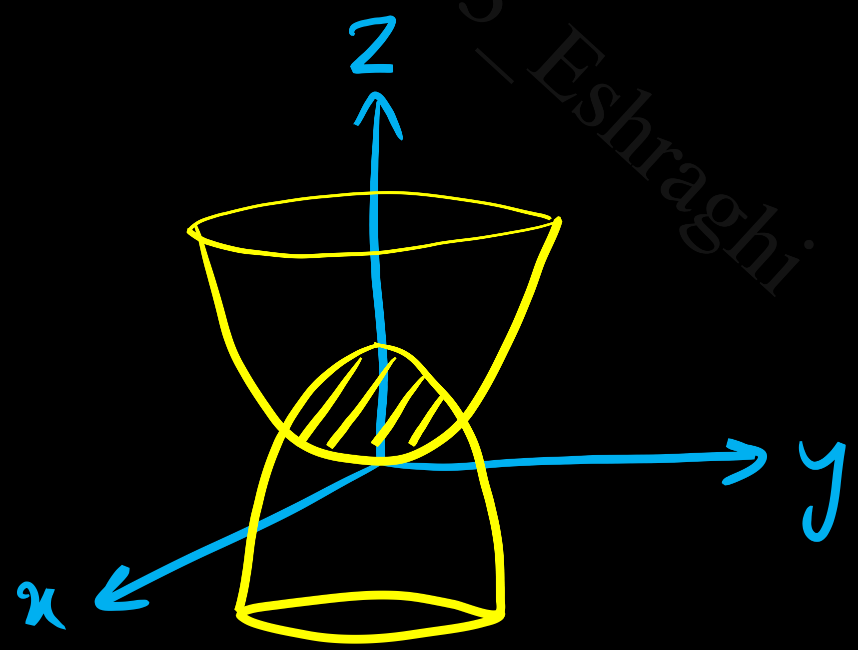
۵- فرض کنید D ناحیه سه بعدی محصور به دو سهمی گون $2 - z = x^2 + y^2$ و $z = x^2 + y^2$ باشد. همچنین فرض کنید رویه S مرز ناحیه D و N بردار قائم یکه بر S و رو به خارج D باشد. مقدار

$$\oiint_S F.N\,dS$$

را بیابید که در آن میدان برداری F به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۲)

$$F = (5x + 12e^z y^2, 1 - 3y^2 + e^y \cos z, 6yz - e^y \sin z)$$

پاسخ) ناحیه D به صورت زیر می‌باشد:



راهنمای حل سوال

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\,dS = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F = \nabla.F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

برای پیدا کردن حدود r و θ باید ناحیه را روی صفحه xy تصویر کنیم. بنابراین ضابطه دو سهمی گون را با هم برابر قرار می‌دهیم

۵- فرض کنید D ناحیه سه بعدی محصور به دو سهمی گون $z = x^۲ + y^۲ - ۲$ و $z = x^۲ + y^۲$ باشد. همچنین فرض کنید رویه S مرز ناحیه D و N بردار قائم یکه بر S و رو به خارج D باشد. مقدار

$$\oiint_S F.N\,dS$$

را بیابید که در آن میدان برداری F به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۲)

$$F = (۵x + ۱۲e^z y^۲, ۱ - ۳y^۲ + e^y \cos z, ۶yz - e^y \sin z)$$

ادامه پاسخ) رویه S بسته و قطعه به قطعه هموار است و همچنین میدان F نیز هموار است. بردار N نیز رو به بیرون است. حال طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_S F.N\,dS = \iiint_D div\,F\,dV$$

مقدار $div\,F$ به صورت زیر می‌باشد.

$$div\,F = \nabla.F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = ۵ - ۶y + e^y \cos z + ۶y - e^y \cos z = ۵$$

حال داریم:

$$\oiint_S F.N\,dS = \iiint_D div\,F\,dV = \iiint_D ۵\,dV$$

راهنمای حل سوال

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\,dS = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F = \nabla.F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

برای پیدا کردن حدود r و θ باید ناحیه را روی صفحه xy تصویر کنیم. بنابراین ضابطه دو سهمی گون را با هم برابر قرار می‌دهیم

۵- فرض کنید D ناحیه سه بعدی محصور به دو سهمی گون $z=x^۲+y^۲$ و $z=۲-x^۲-y^۲$ باشد. همچنین فرض کنید رویه S مرز ناحیه D و N بردار قائم یکه بر S و رو به خارج D باشد. مقدار

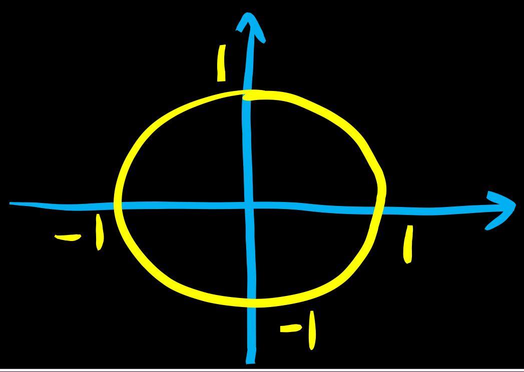
$$\oiint_S F.N\,dS$$

را بیابید که در آن میدان برداری F به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۲)

$$F=(۵x+۱۲e^z y^۲, ۱-۳y^۲+e^y\cos z, ۶yz-e^y\sin z)$$

ادامه پاسخ) می‌خواهیم از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. اگر خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور دهیم، هنگام ورود داریم $z=x^۲+y^۲$ و در نتیجه $z=r^۲$. همچنین هنگام خروج داریم $z=۲-x^۲-y^۲$ که نتیجه می‌دهد $z=۲-r^۲$. برای تعیین حدود r و θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم.

$$\begin{cases} z=x^۲+y^۲ \\ z=۲-x^۲-y^۲ \end{cases} \qquad x^۲+y^۲=۲-x^۲-y^۲ \Longrightarrow x^۲+y^۲=۱$$



راهنمای حل سوال

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\,dS=\iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F=\nabla.F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

برای پیدا کردن حدود r و θ باید ناحیه را روی صفحه xy تصویر کنیم. بنابراین ضابطه دو سهمی گون را با هم برابر قرار می‌دهیم

۵- فرض کنید D ناحیه سه بعدی محصور به دو سهمی گون $z = x^۲ + y^۲$ و $۲ - z = x^۲ + y^۲$ باشد. همچنین فرض کنید رویه S مرز ناحیه D و N بردار قائم یکه بر S و رو به خارج D باشد. مقدار

$$\oiint_S F.N\,dS$$

را بیابید که در آن میدان برداری F به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۲)

$$F = (۵x + ۱۲e^z y^۲, ۱ - ۳y^۲ + e^y \cos z, ۶yz - e^y \sin z)$$

ادامه پاسخ) پس حدود r به صورت $۰ \le r \le ۱$ و حدود θ به صورت $۰ \le \theta \le ۲\pi$ می‌باشد. بنابراین:

$$\oiint_S F.N\,dS = \iiint_D div\,F\,dV = \iiint_D ۵\,dV = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱\int_{r^۲}^{۲-r^۲} ۵r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۵rz\Big|_{r^۲}^{۲-r^۲} dr\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۵r(۲ - ۲r^۲)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱ ۱۰r - ۱۰r^۳ dr\,d\theta$$

راهنمای حل سوال

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\,dS = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F = \nabla.F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

برای پیدا کردن حدود r و θ باید ناحیه را روی صفحه xy تصویر کنیم. بنابراین ضابطه دو سهمی گون را با هم برابر قرار می‌دهیم

۵- فرض کنید D ناحیه سه بعدی محصور به دو سهمی گون $z = x^{۲} + y^{۲}$ و $۲ - z = x^{۲} + y^{۲}$ باشد. همچنین فرض کنید رویه S مرز ناحیه D و N بردار قائم یکه بر S و رو به خارج D باشد. مقدار

$$\oiint_S F.N\,dS$$

را بیابید که در آن میدان برداری F به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۲)

$$F = (۵x + ۱۲e^{z}y^{۲}, ۱ - ۳y^{۲} + e^{y}\cos z, ۶yz - e^{y}\sin z)$$

(ادامه پاسخ)

$$= \int_{۰}^{۲\pi} ۵r^{۲} - \frac{۵}{۲}r^{۴}\Big|_{۰}^{۱}\, d\theta$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \frac{۵}{۲}\, d\theta$$

$$= \frac{۵}{۲}\theta\Big|_{۰}^{۲\pi}$$

$$= ۵\pi$$

راهنمای حل سوال

رویه بسته است و جهت به سمت بیرون است

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_S F.N\,dS = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F = \nabla.F$$

استفاده از مختصات استوانه‌ای برای حل انتگرال سه گانه

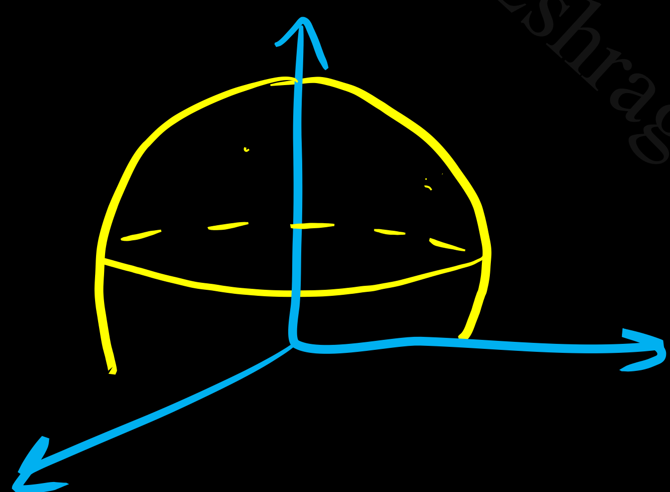
برای پیدا کردن حدود r و θ باید ناحیه را روی صفحه xy تصویر کنیم. بنابراین ضابطه دو سهمی گون را با هم برابر قرار می‌دهیم

-۶ فرض کنید $F = (x^۲ + y^۲ + ۲ + z^۲, e^{x^۲} + y^۲, ۳ + x)$. اگر $a > ۰$ و S آن قسمت از رویه کروی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲az + ۳a^۲$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و اگر N قائم یکه رو به بالا بر S، (رو به خارج کره شامل S) باشد، شار میدان برداری F را که از S در جهت N می‌گذرد حساب کنید. (پایان ترم ۹۶)

پاسخ) ابتدا معادله کره را استاندارد می‌کنیم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲az + ۳a^۲ \Longrightarrow x^۲ + y^۲ + (z-a)^۲ = ۴a^۲$$

پس با کره‌ای به مرکز $(۰,۰,a)$ و شعاع $۲a$ مواجه هستیم که طبق صورت سوال، فقط با قسمتی از آن که بالای صفحه xy است، مواجه هستیم.



راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.N dS$$

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به انتهای کره، یک صفحه را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. همچنین برای رویه اضافه شده، $N_۱ = -k$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

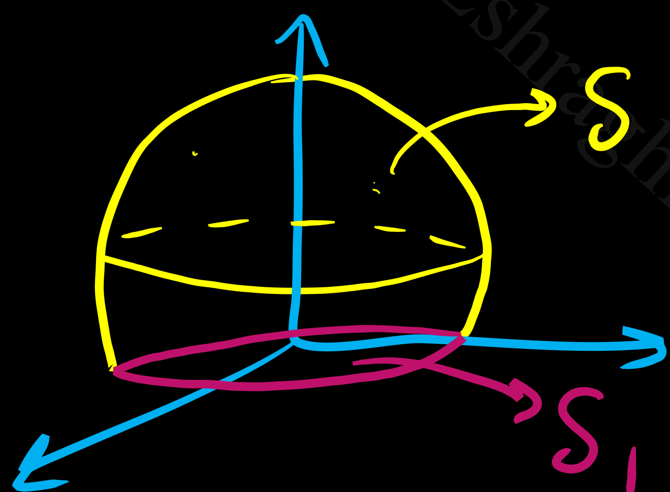
$$\oiint_{S'} F.N' \, dS' = \iiint_D div\, F\, dV$$

$$div\, F = \nabla . F$$

انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن برابر صفر است

۶- فرض کنید $F=(x^۲+y^۲+۲+z^۲, e^{x^۲}+y^۲, ۳+x)$. اگر $a>۰$ و S آن قسمت از رویه کروی $x^۲+y^۲+z^۲=۲az+۳a^۲$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و اگر N قائم یکه رو به بالا بر S، (رو به خارج کره شامل S) باشد، شار میدان برداری F را که از S در جهت N می‌گذرد حساب کنید. (پایان ترم ۹۶)

ادامه پاسخ) برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، باید یک رویه بسته در اختیار داشته باشیم. در این جا رویه S بسته نیست. لذا قسمتی از صفحه $z=۰$ را به کف کره می‌چسبانیم و اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته در اختیار داشته باشیم. رویه اضافه شده را $S_۱$ نامگذاری می‌کنیم.



راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.NdS$$

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به انتهای کره، یک صفحه را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. همچنین برای رویه اضافه شده، $N_۱=-k$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

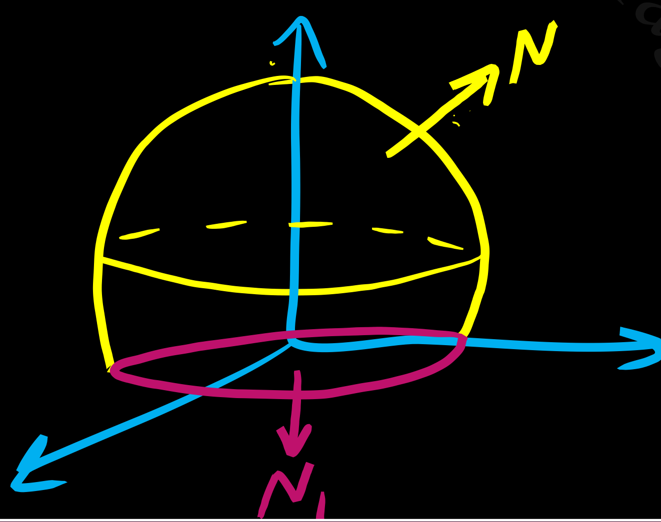
$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F=\nabla.F$$

انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن برابر صفر است

۶- فرض کنید $F = (x^۲ + y^۲ + ۲ + z^۲, e^{x^۲} + y^۲, ۳ + x)$. اگر $a > ۰$ و S آن قسمت از رویه کروی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲az + ۳a^۲$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و اگر N قائم یکه رو به بالا بر S، (رو به خارج کره شامل S) باشد، شار میدان برداری F را که از S در جهت N می‌گذرد حساب کنید. (پایان ترم ۹۶)

ادامه پاسخ) قائم یکه N برای رویه S رو به بالاست و ما قائم یکه برای رویه $S_۱$ که زیر کره قرار گرفته است را رو به پایین در نظر می‌گیریم (در واقع اگر آن را با $N_۱$ نمایش دهیم، خواهیم داشت $N_۱ = -k$). حال برای $S \cup S_۱$ می‌توان قضیه دیورژانس را به کار برد چون یک رویه بسته و قطعه به قطعه هموار است و همچنین میدان F نیز هموار است و قائم یکه نیز در سرتاسر آن رو به خارج است.



راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.NdS$$

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به انتهای کره، یک صفحه را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. همچنین برای رویه اضافه شده، $N_۱ = -k$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS' = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F = \nabla.F$$

انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن برابر صفر است

۶- فرض کنید $F = (x^۲ + y^۲ + ۲ + z^۲, e^{x^۲} + y^۲, ۳ + x)$. اگر $a > ۰$ و S آن قسمت از رویه کروی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲az + ۳a^۲$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و اگر N قائم یکه رو به بالا بر S، (رو به خارج کره شامل S) باشد، شار میدان برداری F را که از S در جهت N می‌گذرد حساب کنید. (پایان ترم ۹۶)

ادامه پاسخ) حال قرار می‌دهیم $S' = S \cup S_۱$. اگر D ناحیه داخل کره و بالای صفحه $z = ۰$ و N' قائم یکه S' باشد، آنگاه طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS' = \iiint_D div\,F\,dV$$

مقدار $div\,F$ به صورت زیر می‌باشد.

$$div\,F = \nabla.F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = ۲x + ۲y + ۰ = ۲x + ۲y$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS' = \iiint_D div\,F\,dV = \iiint_D ۲x + ۲y\,dV = \iiint_D ۲x\,dV + \iiint_D ۲y\,dV$$

حال هر دو انتگرال بالا، شامل توابع فرد با ناحیه متقارن هستند و لذا حاصل هر دو صفر است و در نتیجه:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS' = ۰ + ۰ = ۰$$

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_S F.NdS$$

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به انتهای کره، یک صفحه را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. همچنین برای رویه اضافه شده، $N_۱ = -k$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS' = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F = \nabla.F$$

انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن برابر صفر است

۶- فرض کنید $F=(x^{۲}+y^{۲}+۲+z^{۲},e^{x^{۲}}+y^{۲},۳+x)$. اگر $a>۰$ و S آن قسمت از رویه کروی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲az+۳a^{۲}$ باشد که بالای صفحه xy قرار دارد و اگر N قائم یکه رو به بالا بر S، (رو به خارج کره شامل S) باشد، شار میدان برداری F را که از S در جهت N می‌گذرد حساب کنید. (پایان ترم ۹۶)

ادامه پاسخ) از طرف دیگر داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iint_{S} F.N\,dS+\iint_{S_{۱}} F.N_{۱}\,dS_{۱}$$

بنابراین

$$\iint_{S} F.N\,dS+\iint_{S_{۱}} F.N_{۱}\,dS_{۱}=۰\Longrightarrow\iint_{S} F.N\,dS=-\iint_{S_{۱}} F.N_{۱}\,dS_{۱}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\iint_{S} F.N\,dS=-\iint_{S_{۱}} F.N_{۱}\,dS_{۱}=-\iint_{x^{۲}+y^{۲}\leq ۳a^{۲}}-(۳+x)\,dx\,dy$$

$$=\iint_{x^{۲}+y^{۲}\leq ۳a^{۲}}۳\,dx\,dy+\iint_{x^{۲}+y^{۲}\leq ۳a^{۲}}x\,dx\,dy$$

$$=۳\left(۳\pi a^{۲}\right)+۰$$

$$=۹\pi a^{۲}$$

(اولی مساحت دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}a$ است و دومی انتگرال یک تابع فرد روی ناحیه متقارن است)

راهنمای حل سوال

شار گذرنده از نیروی F در عبور از S به صورت زیر است:

$$\iint_{S} F.NdS$$

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به انتهای کره، یک صفحه را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. همچنین برای رویه اضافه شده، $N_{۱}=-k$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iiint_{D} div\,F\,dV$$

$$div\,F=\nabla.F$$

انتگرال تابع فرد روی ناحیه متقارن برابر صفر است

۷- فرض کنید S رویه پارامتری

$$r(u,v)=\left(\sin u\cos v\,,\sin u\sin v\,,u^{۲}\right),\qquad ۰\le u\le\pi,۰\le v\le ۲\pi$$

باشد. مقدار $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{۴z-x^{۲}-y^{۲}+۱}}$ را بیابید.(پایان ترم ۱۴۰۱)

پاسخ الف) ابتدا المان سطح را به دست می‌آوریم که به صورت زیر است:

$$dS=\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|dudv$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}=(\cos u\cos v\,,\cos u\sin v\,,۲u),\qquad \frac{\partial r}{\partial v}=(-\sin u\sin v\,,\sin u\cos v\,,۰)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos u\cos v & \cos u\sin v & ۲u\\ -\sin u\sin v & \sin u\cos v & ۰\end{vmatrix}$$

$$=(-۲u\sin u\cos v\,,-۲u\sin u\sin v\,,\sin u\cos u)$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|=\sqrt{۴u^{۲}sin^{۲}u\,cos^{۲}v+۴u^{۲}sin^{۲}u\,sin^{۲}v+sin^{۲}u\,cos^{۲}u}$$

$$=\sqrt{۴u^{۲}sin^{۲}u+sin^{۲}u\,cos^{۲}u}$$

$$=\sin u\sqrt{۴u^{۲}+cos^{۲}u}$$

المان سطح را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$dS=\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|dudv$$

نوشتن محدوده u و v بر اساس رابطه پارامتری داده شده برای رویه

۷- فرض کنید S رویه پارامتری

$$r(u,v)=\left(\sin u\cos v\,,\sin u\sin v\,,u^{۲}\right),\qquad ۰\le u\le\pi,۰\le v\le ۲\pi$$

باشد. مقدار $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{۴z-x^{۲}-y^{۲}+۱}}$ را بیابید.(پایان ترم ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) از طرف دیگر داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۴z-x^{۲}-y^{۲}+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۴u^{۲}-\sin^{۲}u\cos^{۲}v-\sin^{۲}u\sin^{۲}v+۱}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۴u^{۲}-\sin^{۲}u\;+۱}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۴u^{۲}+\cos^{۲}u}}$$

المان سطح را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$dS=\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|dudv$$

بنابراین:

$$\iint_S\frac{dS}{\sqrt{۴z-x^{۲}-y^{۲}+۱}}=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\frac{\sin u\sqrt{۴u^{۲}+\cos^{۲}u}}{\sqrt{۴u^{۲}+\cos^{۲}u}}du\,dv$$

نوشتن محدوده u و v بر اساس رابطه پارامتری داده شده برای رویه

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin u\,du\,dv$$

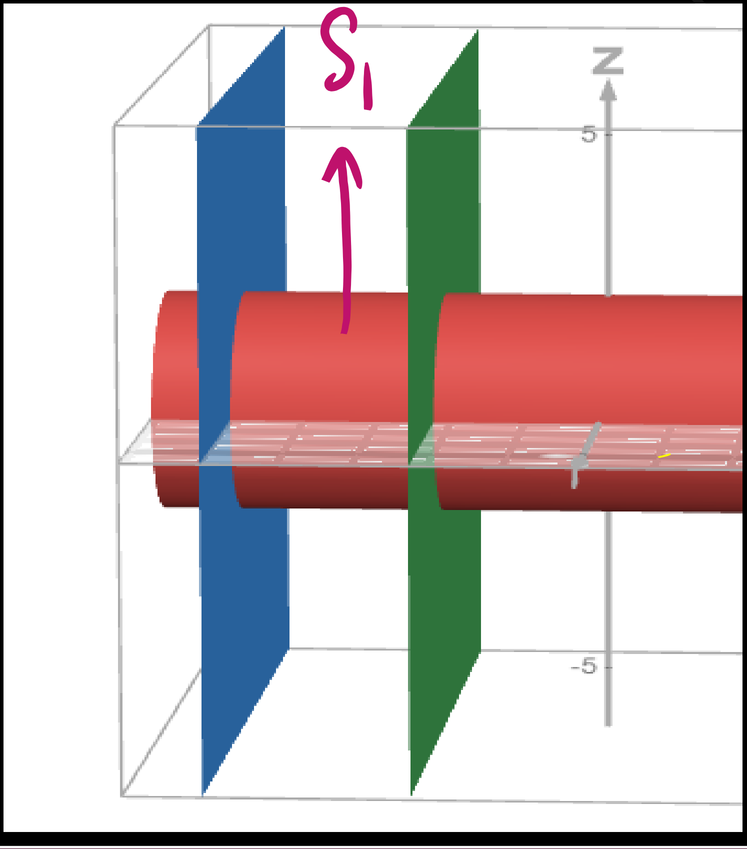
$$=\left(-\cos u\,\Big|_{۰}^{\pi}\right)\left(v\,\Big|_{۰}^{۲\pi}\right)$$

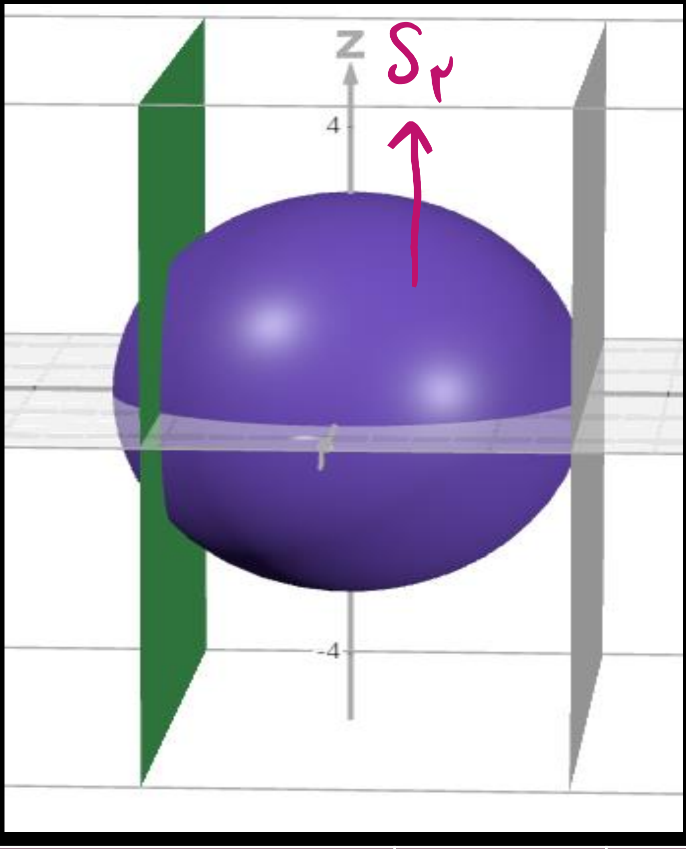
$$=۴\pi$$

۸- فرض کنید $S_۱$ سطح جانبی استوانه $x^۲ + z^۲ \leq ۴$ محدود به صفحات $y = -\sqrt{۵}$ و $y = -۵$ باشد و $S_۲$ آن قسمت از کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ باشد که در آن $-\sqrt{۵} \leq y \leq ۳$. همچنین فرض کنید $S = S_۱ \cup S_۲$ و N برداری قائم یکه رو به خارج S باشد. حاصل $\iint_S F.N\, dS$ را بیابید که در آن میدان برداری $F: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$F = \left(e^{\cos z} - ۲xz - ۱۰x, x^۲ + ۱۰y, z^۲\right)$$

پاسخ) سطوح $S_۱$ و $S_۲$ را به طور مجزا در شکل‌های زیر می‌بینیم:





راهنمای حل سوال

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. در واقع سمت راست کره، بسته شده است اما سمت چپ استوانه بسته نیست. لذا به انتهای استوانه، سطحی را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. برای رویه اضافه شده داریم $N_۳ = -j$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

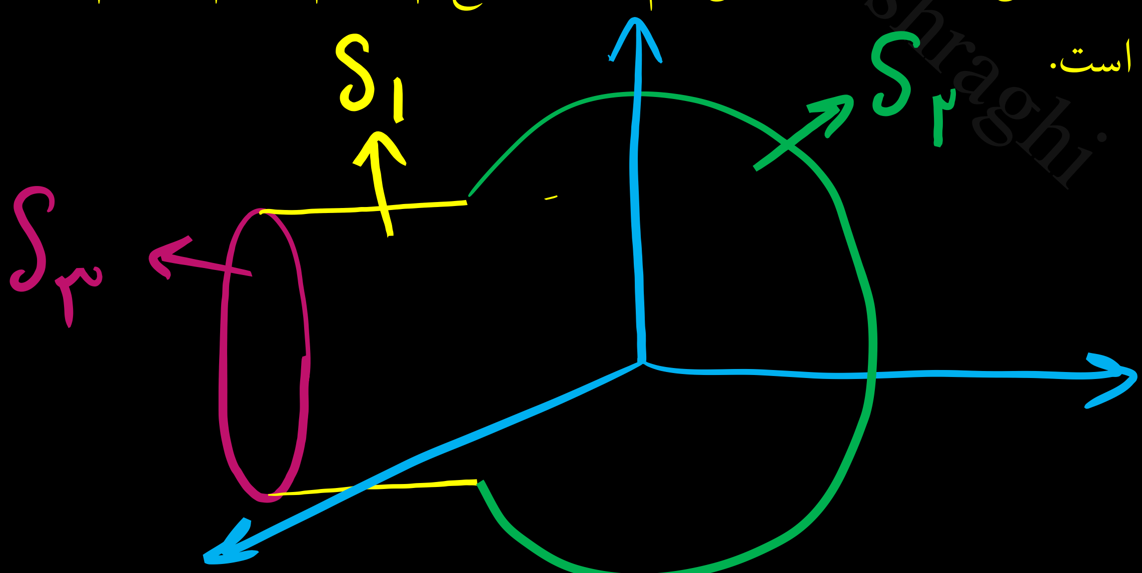
$$\oiint_{S'} F.N'\, dS' = \iiint_D div\, F\, dV$$

$$div\, F = \nabla . F$$

۸- فرض کنید $S_۱$ سطح جانبی استوانه $x^۲ + z^۲ \leq ۴$ محدود به صفحات $y = -\sqrt{۵}$ و $y = -۵$ باشد و $S_۲$ آن قسمت از کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ باشد که در آن $-\sqrt{۵} \leq y \leq ۳$. همچنین فرض کنید $S = S_۱ \cup S_۲$ و N برداری قائم یکه رو به خارج S باشد. حاصل $\iint_S F.N\,dS$ را بیابید که در آن میدان برداری $F: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$F = \left(e^{\cos z} - ۲xz - ۱۰x, x^۲ + ۱۰y, z^۲\right)$$

ادامه پاسخ) به نوعی سطح $S_۲$ در ادامه سطح $S_۱$ قرار دارد. اگر دقت کنیم سمت راست سطح $S_۲$ بسته است اما سمت چپ سطح $S_۱$ بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به سمت چپ سطح $S_۱$، سطح جدید $S_۳$ را که رویه $x^۲ + z^۲ \leq ۴$ به ازای $y = ۵$ می‌باشد را اضافه می‌کنیم. حال سطح $S \cup S_۳ = S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳$ یک سطح بسته است.



راهنمای حل سوال

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. در واقع سمت راست کره، بسته شده است اما سمت چپ استوانه بسته نیست. لذا به انتهای استوانه، سطحی را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. برای رویه اضافه شده داریم $N_۳ = -j$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS' = \iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F = \nabla.F$$

راهنمای حل سوال

۸- فرض کنید $S_۱$ سطح جانبی استوانه $x^۲+z^۲\le ۴$ محدود به صفحات $y=-\sqrt{۵}$ و $y=-۵$ باشد و $S_۲$ آن قسمت از کره $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ باشد که در آن $-\sqrt{۵}\le y\le ۳$. همچنین فرض کنید $S=S_۱\cup S_۲$ و N برداری قائم یکه رو به خارج S باشد. حاصل $\iint_S F.N\,dS$ را بیابید که در آن میدان برداری $F:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۳$ به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$F=\left(e^{\cos z}-۲xz-۱۰x,x^۲+۱۰y,z^۲\right)$$

ادامه پاسخ) برای سطح $S_۳$، بردار قائم یکه $N_۳$ را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم. واضح است که $N_۳=-j$. قرار می‌دهیم $S'=S\cup S_۳$. حال چون S' یک رویه بسته و قطعه به قطعه هموار است و قائم یکه نیز در سرتاسر آن رو به خارج است و همچنین میدان F نیز هموار است، می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم. ابتدا $div\ F$ را محاسبه می‌کنیم.

$$div\ F=-۲z-۱۰+۱۰+۲z=۰$$

اگر ناحیه محصور توسط سطح S' را D و قائم یکه برای آن را N' بنامیم، آنگاه طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iiint_D div\ F\,dV=۰$$

از طرف دیگر، چون سطح S' اجتماع دو سطح S و S_3 است، داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iint_S F.N\,dS+\iint_{S_۳} F.N_۳\,dS_۳$$

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. در واقع سمت راست کره، بسته شده است اما سمت چپ استوانه بسته نیست. لذا به انتهای استوانه، سطحی را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. برای رویه اضافه شده داریم $N_۳=-j$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iiint_D div\ F\,dV$$

$$div\ F=\nabla.F$$

راهنمای حل سوال

۸- فرض کنید $S_۱$ سطح جانبی استوانه $x^۲+z^۲\leq ۴$ محدود به صفحات $y=-\sqrt{۵}$ و $y=-۵$ باشد و $S_۲$ آن قسمت از کره $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ باشد که در آن $-\sqrt{۵}\leq y\leq ۳$. همچنین فرض کنید $S=S_۱\cup S_۲$ و N برداری قائم یکه رو به خارج S باشد. حاصل $\iint_S F.N\,dS$ را بیابید که در آن میدان برداری $F:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}^۳$ به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$F=\left(e^{\cos z}-۲xz-۱۰x,x^۲+۱۰y,z^۲\right)$$

ادامه پاسخ) بنابراین:

$$\iint_S F.N\,dS+\iint_{S_۳}F.N_۳\,dS_۳=۰\Longrightarrow\iint_S F.N\,dS=-\iint_{S_۳}F.N_۳\,dS_۳$$

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. در واقع سمت راست کره، بسته شده است اما سمت چپ استوانه بسته نیست. لذا به انتهای استوانه، سطحی را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. برای رویه اضافه شده داریم $N_۳=-j$

حال داریم:

$$\iint_S F.N\,dS=-\iint_{S_۳}F.N_۳\,dS_۳=-\iint_{x^۲+z^۲\leq۴}-x^۲-۱۰y\;dx\,dz$$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'}F.N'\,dS'=\iiint_D div\,F\,dV$$

$$=\iint_{x^۲+z^۲\leq۴}x^۲\;dx\,dz+\iint_{x^۲+z^۲\leq۴}۱۰y\;dx\,dz$$

$$div\,F=\nabla.F$$

$$=\iint_{x^۲+z^۲\leq۴}x^۲\;dx\,dz+\iint_{x^۲+z^۲\leq۴}-۵۰\;dx\,dz$$

۸- فرض کنید $S_{۱}$ سطح جانبی استوانه $x^{۲}+z^{۲}\leq ۴$ محدود به صفحات $y=-\sqrt{۵}$ و $y=-۵$ باشد و $S_{۲}$ آن قسمت از کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۹$ باشد که در آن $-\sqrt{۵}\leq y\leq ۳$. همچنین فرض کنید $S=S_{۱}\cup S_{۲}$ و N برداری قائم یکه رو به خارج S باشد. حاصل $\iint_{S} F.N\, dS$ را بیابید که در آن میدان برداری $F:\mathbb{R}^{۳}\to\mathbb{R}^{۳}$ به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$F=\left(e^{\cos z}-۲xz-۱۰x, x^{۲}+۱۰y, z^{۲}\right)$$

ادامه پاسخ) برای انتگرال دوم، دقت داریم که $y=-۵$ بود و به همین دلیل عدد -۵۰ داخل انتگرال نوشته شد. حال کار را ادامه می‌دهیم. برای انتگرال اول از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم و انتگرال دوم مرتبط با مساحت دایره $x^{۲}+z^{۲}=۴$ است. بنابراین:

$$\iint_{S} F.N\, dS=\iint_{x^{۲}+z^{۲}\leq ۴} x^{۲}\, dx\, dz+\iint_{x^{۲}+z^{۲}\leq ۴} -۵۰\, dx\, dz$$

$$=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۲}(r^{۲}cos^{۲}\theta) r\, dr\, d\theta-۵۰\iint_{x^{۲}+z^{۲}\leq ۴} dx\, dz$$

$$=\left(\int_{۰}^{۲} r^{۳}\, dr\right)\left(\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}\right)-۵۰(۴\pi)$$

راهنمای حل سوال

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. در واقع سمت راست کره، بسته شده است اما سمت چپ استوانه بسته نیست. لذا به انتهای استوانه، سطحی را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. برای رویه اضافه شده داریم $N_{۳}=-j$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\, dS'=\iiint_{D} div\, F\, dV$$

$$div\, F=\nabla.F$$

۸- فرض کنید $S_۱$ سطح جانبی استوانه $x^۲ + z^۲ \le ۴$ محدود به صفحات $y = -\sqrt{۵}$ و $y = -۵$ باشد و $S_۲$ آن قسمت از کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ باشد که در آن $-\sqrt{۵} \le y \le ۳$. همچنین فرض کنید $S = S_۱ \cup S_۲$ و N برداری قائم یکه رو به خارج S باشد. حاصل $\iint_S F.N\, dS$ را بیابید که در آن میدان برداری $F: \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ به صورت زیر است: (پایان ترم ۱۴۰۱)

$$F = \left(e^{\cos z} - ۲xz - ۱۰x, x^۲ + ۱۰y, z^۲\right)$$

ادامه پاسخ)

$$= \left(\int_۰^۲ r^۳\, dr\right)\left(\int_۰^{۲\pi} \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲}\right) - ۵۰(۴\pi)$$

$$= \left(\frac{r^۴}{۴}\Bigg|_۰^۲\right)\left(\frac{۱}{۲}\theta + \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta \Bigg|_۰^{۲\pi}\right) - ۲۰۰\pi$$

$$= ۴\pi - ۲۰۰\pi = -۱۹۶\pi$$

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. در واقع سمت راست کره، بسته شده است اما سمت چپ استوانه بسته نیست. لذا به انتهای استوانه، سطحی را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. برای رویه اضافه شده داریم $N_۳ = -j$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\, dS' = \iiint_D div\, F\, dV$$

$$div\, F = \nabla . F$$

۹- فرض کنید S بخشی از رویه $x^{۲}+y^{۲}+z^{۱۴۰۰}=۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. همچنین فرض کنید N بردار قائم یکه بر S به سمت خارج S است. میدان برداری F نیز به صورت زیر مفروض است: (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

$$F(x,y,z)=(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱)$$

حاصل $\iint_S F.N\,dS$ را بیابید.

پاسخ) برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، باید یک رویه بسته در اختیار داشته باشیم. در این جا رویه S بسته نیست. لذا قسمتی از صفحه $z=۰$ که به رویه S محدود است را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته در اختیار داشته باشیم. رویه اضافه شده را $S_۱$ نامگذاری می‌کنیم. بردار یکه قائم برای سطح $S_۱$ را به سمت بیرون در نظر می‌گیریم و بنابراین اگر آن را $N_۱$ نمایش دهیم، خواهیم داشت $N_۱=-k$. حال اگر قرار دهیم $S'=S\cup S_۱$، آنگاه شرایط قضیه دیورژانس برای S' برقرار است چون یک رویه بسته و قطعه به قطعه هموار است و همچنین میدان F نیز هموار است و قائم یکه نیز در سرتاسر آن رو به خارج است. بنابراین اگر D ناحیه محصور توسط سطح S' باشد و N' قائم یکه این سطح باشد، آنگاه داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iiint_D div\,F\,dV$$

راهنمای حل سوال

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به انتها، یک سطح را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. همچنین برای رویه اضافه شده، $N_۱=-k$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F=\nabla.F$$

۹- فرض کنید S بخشی از رویه $x^{۲}+y^{۲}+z^{۱۴۰۰}=۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. همچنین فرض کنید N بردار قائم یکه بر S به سمت خارج S است. میدان برداری F نیز به صورت زیر مفروض است: (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

$$F(x,y,z)=(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱)$$

حاصل $\iint_S F.N\,dS$ را بیابید.

ادامه پاسخ) مقدار $div\,F$ به صورت زیر می‌باشد:

$$div\,F=\nabla.F=\cos x-x\sin y+x\sin y-\cos x=۰$$

از طرف دیگر، S' از دو رویه S و $S_۱$ تشکیل شده است. بنابراین:

$$\oiint_{S'} F.N\ dS'=\iint_S F.N\,dS+\iint_{S_۱} F.N_۱\,dS_۱=۰\Longrightarrow\iint_S F.N\,dS=-\iint_{S_۱} F.N_۱\,dS_۱$$

حال با توجه به این که برای سطح $S_۱$ داریم $z=۰$، خواهیم داشت:

$$\iint_S F.N\,dS=-\iint_{x^۲+y^۲\le ۱}(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱).(۰,۰,-۱)\ dx\,dy$$

$$=-\iint_{x^۲+y^۲\le ۱}-xz\sin y+z\cos x-۱\ dx\,dy$$

$$\overset{z=۰}{=}\iint_{x^۲+y^۲\le ۱}dx\,dy$$

راهنمای حل سوال

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به انتها، یک سطح را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. همچنین برای رویه اضافه شده، $N_۱=-k$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F=\nabla.F$$

۹- فرض کنید S بخشی از رویه $x^{۲}+y^{۲}+z^{۱۴۰۰}=۱$ است که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. همچنین فرض کنید N بردار قائم یکه بر S به سمت خارج S است. میدان برداری F نیز به صورت زیر مفروض است: (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۰)

$$F(x,y,z)=(\sin y+\sin x+y, x\cos y, xz\sin y-z\cos x+۱)$$

حاصل $\iint_S F.N\,dS$ را بیابید.

ادامه پاسخ) این انتگرال برابر است با مساحت دایره $x^{۲}+y^{۲}=۱$. پس

$$\iint_S F.N\,dS=\pi$$

راهنمای حل سوال

باید دقت کنیم که در این جا رویه بسته نیست. لذا برای این که بتوانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم، به انتها، یک سطح را اضافه می‌کنیم تا یک رویه بسته ایجاد شود. برای رویه‌ای که اضافه کردیم، جهت را به سمت بیرون انتخاب می‌کنیم تا قضیه دیورژانس قابل استفاده باشد. همچنین برای رویه اضافه شده، $N_{۱}=-k$

استفاده از قضیه دیورژانس که طبق آن داریم:

$$\oiint_{S'} F.N'\,dS'=\iiint_D div\,F\,dV$$

$$div\,F=\nabla.F$$