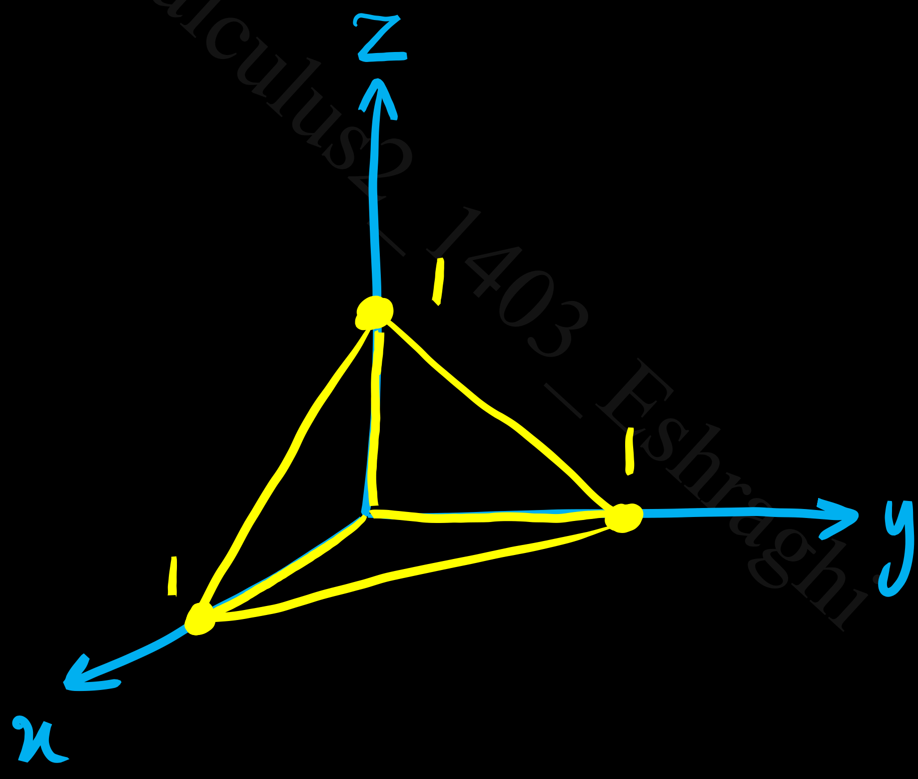
راهنمای حل سوال

۱- مقدار $\iiint x\,dV$ را روی ناحیه محصور بین صفحه $x+y+z=۱$ و محورهای مختصات در ناحیه اول به دست آورید.

پاسخ) ناحیه انتگرال گیری به صورت زیر می‌باشد:



رسم ناحیه انتگرال گیری

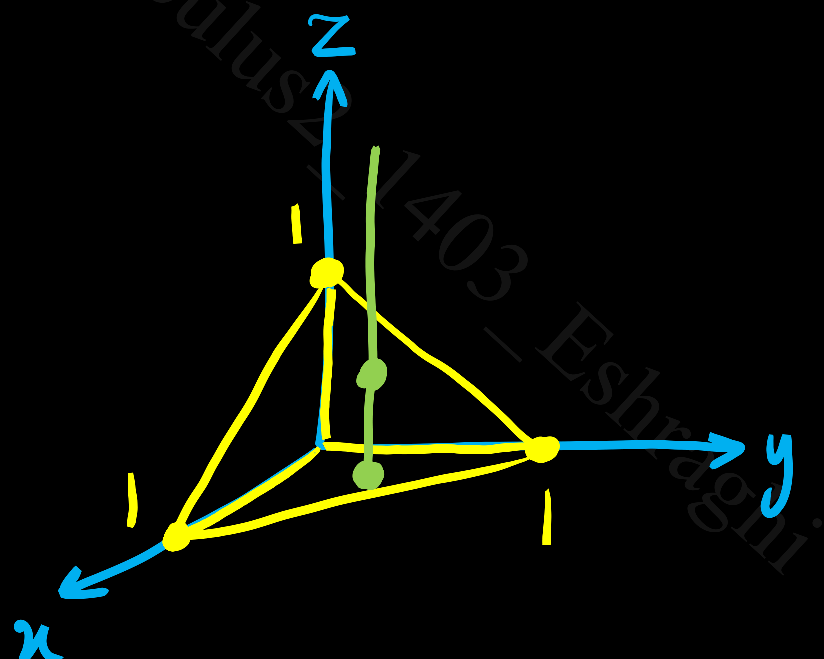
چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۱- مقدار $\iiint x\, dV$ را روی ناحیه محصور بین صفحه $x+y+z=۱$ و محورهای مختصات در ناحیه اول به دست آورید.

ادامه پاسخ) حال برای ترتیب انتگرال گیری، $dz\, dy\, dx$ را انتخاب می‌کنیم.

بنابراین در مرحله اول، یک خط موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم.



هنگام ورود به ناحیه (از پایین به بالا) داریم $z=۰$ و هنگام خروج از ناحیه داریم $z=۱-x-y$. بنابراین حدود z به صورت $۰\leq z\leq ۱-x-y$ می‌باشد.

راهنمای حل سوال

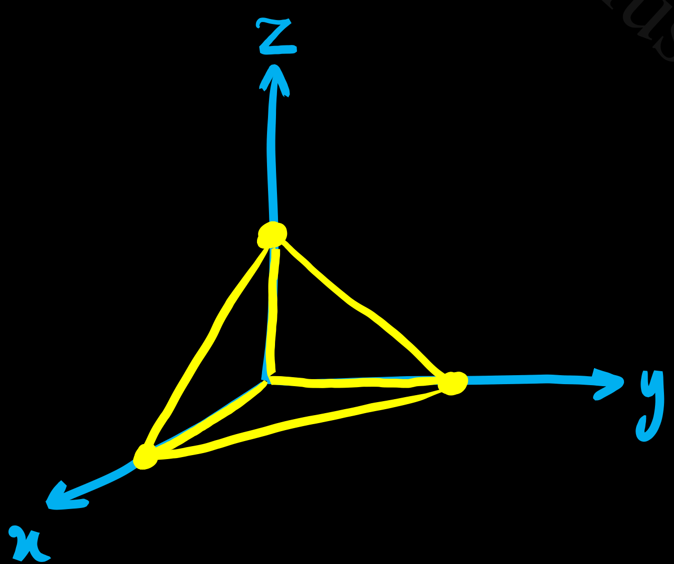
رسم ناحیه انتگرال گیری

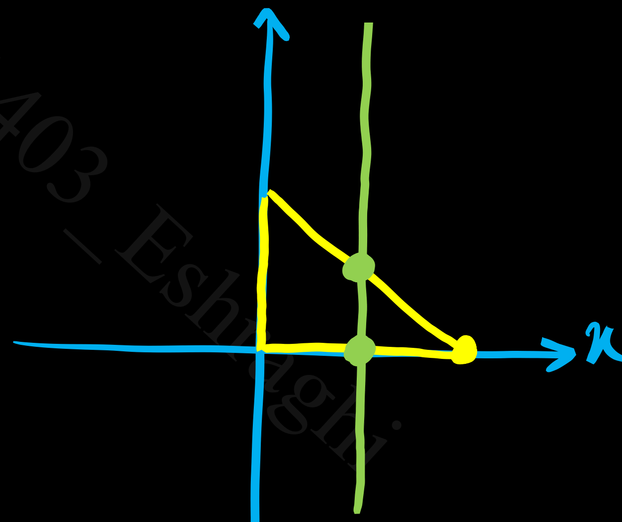
چون $dz\, dy\, dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۱- مقدار $\iiint x\,dV$ را روی ناحیه محصور بین صفحه $x+y+z=۱$ و محورهای مختصات در ناحیه اول به دست آورید.

ادامه پاسخ) حال می‌خواهیم حدود x و y را تعیین کنیم. برای این کار ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم:





حال شبیه کاری که در انتگرال دوگانه انجام می‌دادیم عمل می‌کنیم. یعنی یک خط موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم. هنگام ورود داریم $y=۰$ و هنگام خروج داریم $y=-x+۱$. سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم که خواهیم داشت $۰\leq x\leq ۱$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۱- مقدار $\iiint x\,dV$ را روی ناحیه محصور بین صفحه $x+y+z=۱$ و محورهای مختصات در ناحیه اول به دست آورید.

ادامه پاسخ) بنابراین داریم:

$$\iiint x\,dV = \int_۰^۱ \int_۰^{-x+۱} \int_۰^{۱-x-y} x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_۰^۱ \int_۰^{-x+۱} xz \Big|_۰^{۱-x-y} dy\,dx$$

$$= \int_۰^۱ \int_۰^{-x+۱} x\,(۱-x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_۰^۱ \int_۰^{-x+۱} x - x^۲ - xy\ dy\,dx$$

$$= \int_۰^۱ \left(x-x^۲\right)y - x\frac{y^۲}{۲} \Big|_۰^{-x+۱} dx$$

$$= \int_۰^۱ \left(x-x^۲\right)(-x+۱) - x\frac{(-x+۱)^۲}{۲}\,dx$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

۱- مقدار $\iiint x\,dV$ را روی ناحیه محصور بین صفحه $x+y+z=۱$ و محورهای مختصات در ناحیه اول به دست آورید.

ادامه پاسخ)

$$=\int_{۰}^{۱} -۲x^{۲}+x+x^{۳}-\frac{۱}{۲}(x^{۳}-۲x^{۲}+x)\,dx$$

$$=\frac{۱}{۸}x^{۴}-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۱}{۴}x^{۲}\Big|_{۰}^{۱}$$

$$=\frac{۱}{۲۴}$$

رسم ناحیه انتگرال گیری

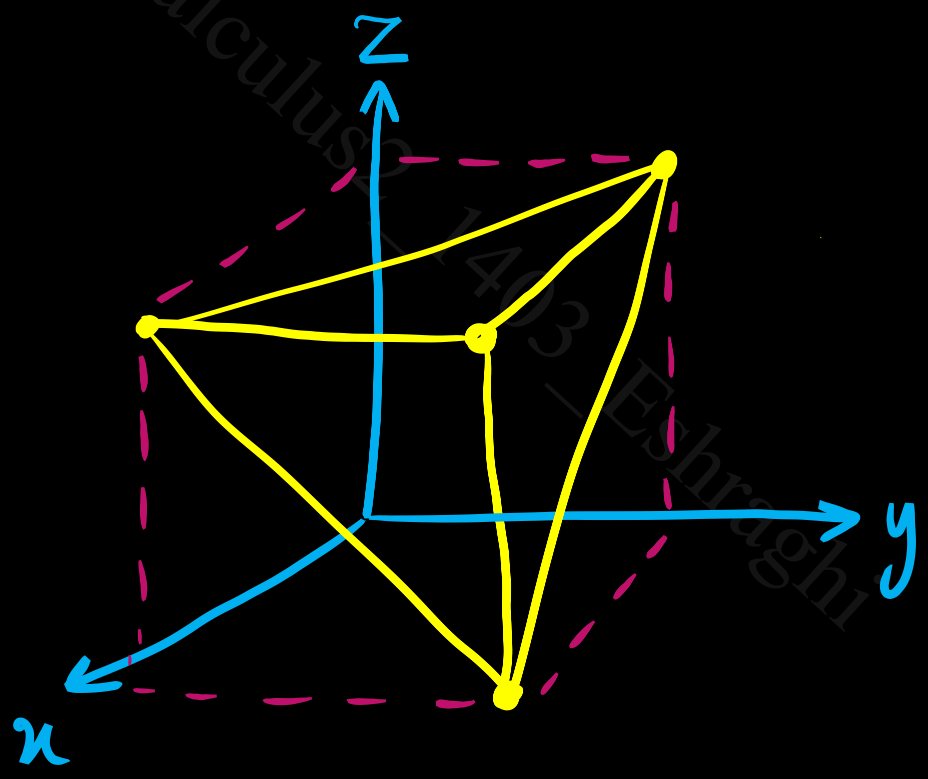
چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

۲- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint x\,dV$ روی چهار وجهی محصور به صفحات $x+y+z=۲$، $z=۱$، $y=۱$ و $x=۱$. (آدامز)

پاسخ) ناحیه انتگرال گیری به صورت زیر می‌باشد:



رسم ناحیه انتگرال گیری

چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

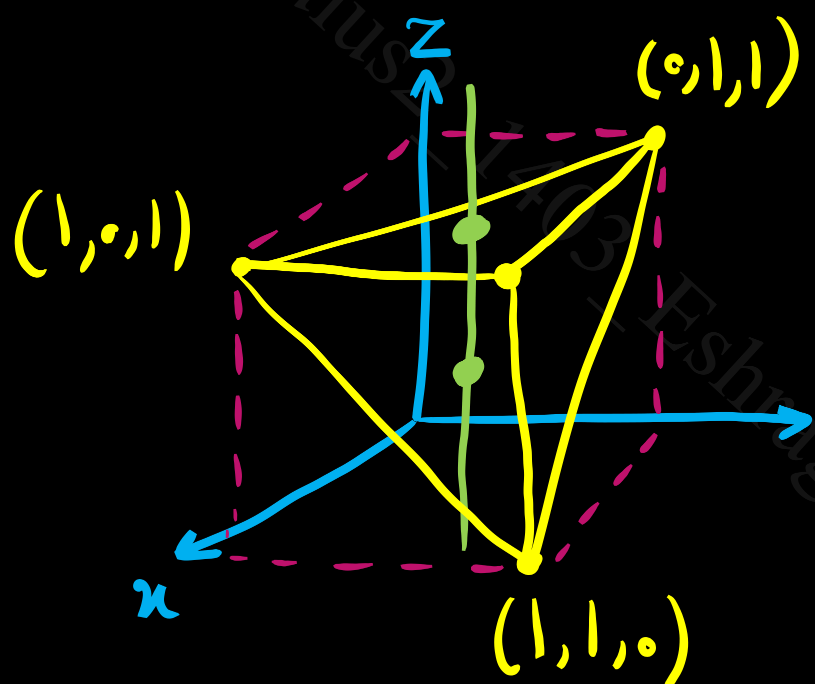
شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

۲- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint x\,dV$ روی چهار وجهی محصور به صفحات $x+y+z=۲$، $z=۱$، $y=۱$ و $x=۱$. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال ترتیب $dz\,dy\,dx$ را برای انتگرال گیری انتخاب می‌کنیم. پس خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم.

رسم ناحیه انتگرال گیری



چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

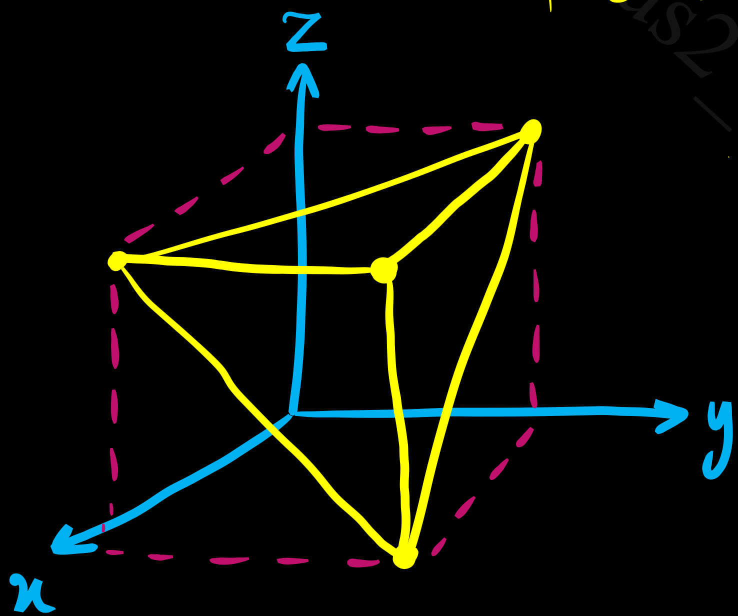
هنگام ورود به ناحیه داریم $z=۲-x-y$ و هنگام خروج از ناحیه داریم $z=۱$.

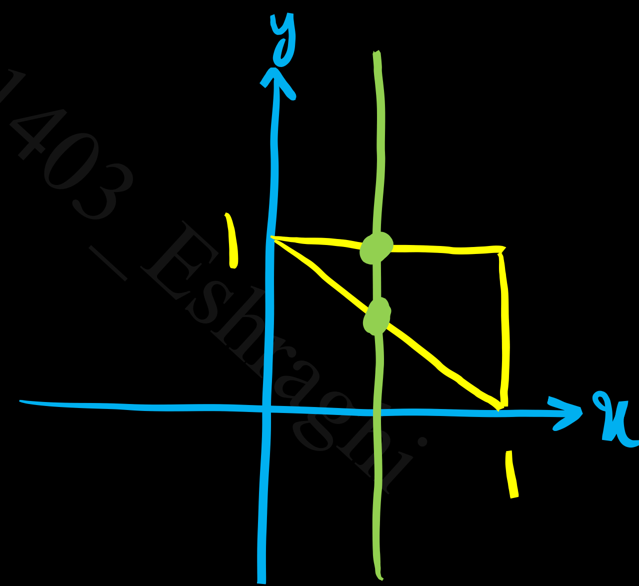
بنابراین حدود z به صورت $۲-x-y\le z\le ۱$ می‌باشد.

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۲- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint x\,dV$ روی چهار وجهی محصور به صفحات $x+y+z=۲$، $z=۱$، $y=۱$ و $x=۱$. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال برای تعیین حدود x و y، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم. یعنی خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم.





موقع ورود به ناحیه داریم $y=۱-x$ و موقع خروج از ناحیه داریم $y=۱$. پس حدود y به صورت $۱-x\le y\le ۱$ است. همچنین اگر ناحیه را روی محور xها تصویر کنیم، حدود x به صورت $۰\le x\le ۱$ خواهد بود.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۲- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint x\,dV$ روی چهار وجهی محصور به صفحات $x+y+z=۲$، $z=۱$، $y=۱$ و $x=۱$. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال به محاسبه انتگرال می‌پردازیم:

رسم ناحیه انتگرال گیری

$$\iiint x\,dV = \int_{۰}^{۱}\int_{۱-x}^{۱}\int_{۲-x-y}^{۱} x\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{۰}^{۱}\int_{۱-x}^{۱} xz\,\Big|_{۲-x-y}^{۱}\,dy\,dx$$

$$= \int_{۰}^{۱}\int_{۱-x}^{۱} x\,(-۱+x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{۰}^{۱}\int_{۱-x}^{۱} x^{۲}-x+xy\;\,dy\,dx$$

$$= \int_{۰}^{۱}\left(x^{۲}-x\right)y + x\frac{y^{۲}}{۲}\Big|_{۱-x}^{۱}\,dx$$

$$= \int_{۰}^{۱}\left(x^{۲}-\frac{x}{۲}\right)+x\frac{(x-۱)^{۲}}{۲}\,dx$$

چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

۲- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint x\,dV$ روی چهار وجهی محصور به صفحات $x+y+z=۲$، $z=۱$، $y=۱$ و $x=۱$. (آدامز)

ادامه پاسخ)

$$=\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۳}}{۲}dx$$

$$=\frac{x^{۴}}{۸}\Bigg|_{۰}^{۱}$$

$$=\frac{۱}{۸}$$

رسم ناحیه انتگرال گیری

چون $dz\,dy\,dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۳- مطلوبست محاسبه $\iiint e^{-x^{۲}-۲y^{۲}-۳z^{۲}}\,dV$ روی $\mathbb{R}^{۳}$. (آدامز)

پاسخ) چون تابع $f(x,y,z) = e^{-x^{۲}-۲y^{۲}-۳z^{۲}}$ در دامنه‌اش پیوسته است، طبق قضیه، می‌توانیم انتگرال داده شده را به صورت ضرب سه انتگرال بنویسیم. همچنین چون ناحیه انتگرال‌گیری کل $\mathbb{R}^{۳}$ است، حدود x، y و z از $-\infty$ تا $+\infty$ است (پس از طی مراحل). بنابراین:

$$\iiint e^{-x^{۲}-۲y^{۲}-۳z^{۲}}\,dV = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲y^{۲}}\,dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-۳z^{۲}}\,dz$$

حال به عنوان نمونه، اگر $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}}\,dx$ را در نظر بگیریم، می‌توانیم از مختصات قطبی استفاده کنیم به این شکل که:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}}\,dx \Longrightarrow I^{۲} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^{۲}}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^{۲}+y^{۲})}\,dx\,dy$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\infty} e^{-r^{۲}}\,r\,dr\,d\theta$$

راهنمای حل سوال

ناحیه انتگرال‌گیری کل $\mathbb{R}^{۳}$ است. بنابراین حدود x، y و z، از $-\infty$ تا $+\infty$ است (پس از طی مراحل، یعنی مثلاً رسم خطی موازی با محور zها و سپس تصویر کردن ناحیه روی صفحه xy و رسم خطی موازی با محور yها و تصویر کردن ناحیه روی محور xها)

می‌توانیم انتگرال را به صورت ضرب سه انتگرال بنویسیم چون شرایط آن برقرار است

برای محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}}\,dx$ از مختصات قطبی استفاده در انتگرال دوگانه استفاده می‌کنیم به این شکل که یک کپی از انتگرال (با یک نماد دیگر) را در انتگرال اصلی ضرب می‌کنیم و کار را ادامه می‌دهیم.

برای محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲y^{۲}}\,dy$ و $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۳z^{۲}}\,dz$ از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم به نحوی که از $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{۲}}\,dx = \sqrt{\pi}$ استفاده کنیم

۳- مطلوبست محاسبه $\iiint e^{-x^۲-۲y^۲-۳z^۲}\, dV$ روی $\mathbb{R}^۳$. (آدامز)

ادامه پاسخ

$$= \int_{۰}^{۲\pi} -\frac{۱}{۲} e^{-r^۲} \Big|_{۰}^{\infty} \, d\theta$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \frac{۱}{۲} \, d\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\theta$$

$$= \pi$$

پس $I^۲ = \pi$ و در نتیجه $I = \sqrt{\pi}$. حال برای $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲y^۲}\, dy$ کافی است از تغییر متغیر $u = \sqrt{۲}y$ و برای $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۳z^۲}\, dz$ از تغییر متغیر $u = \sqrt{۳}z$ استفاده کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲y^۲}\, dy = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^۲}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{۲}}$$

راهنمای حل سوال

ناحیه انتگرال‌گیری کل $\mathbb{R}^۳$ است. بنابراین حدود x، y و z، از $-\infty$ تا $+\infty$ است (پس از طی مراحل، یعنی مثلاً رسم خطی موازی با محور zها و سپس تصویر کردن ناحیه روی صفحه xy و رسم خطی موازی با محور yها و تصویر کردن ناحیه روی محور xها)

می‌توانیم انتگرال را به صورت ضرب سه انتگرال بنویسیم چون شرایط آن برقرار است

برای محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}\, dx$ از مختصات قطبی استفاده در انتگرال دوگانه استفاده می‌کنیم به این شکل که یک کپی از انتگرال (با یک نماد دیگر) را در انتگرال اصلی ضرب می‌کنیم و کار را ادامه می‌دهیم.

برای محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲y^۲}\, dy$ و $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۳z^۲}\, dz$ از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم به نحوی که از $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}\, dx = \sqrt{\pi}$ استفاده کنیم

۳- مطلوبست محاسبه $\iiint e^{-x^۲-۲y^۲-۳z^۲}\,dV$ روی $\mathbb{R}^۳$. (آدامز)

ادامه پاسخ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۳z^۲}\,dz = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^۲}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{۳}}$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر خواهد بود:

$$\iiint e^{-x^۲-۲y^۲-۳z^۲}\,dV = \sqrt{\pi}\times\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\times\sqrt{\frac{\pi}{۳}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{۶}}$$

راهنمای حل سوال

ناحیه انتگرال‌گیری کل $\mathbb{R}^۳$ است. بنابراین حدود x، y و z، از $-\infty$ تا $+\infty$ است (پس از طی مراحل، یعنی مثلاً رسم خطی موازی با محور zها و سپس تصویر کردن ناحیه روی صفحه xy و رسم خطی موازی با محور yها و تصویر کردن ناحیه روی محور xها)

می‌توانیم انتگرال را به صورت ضرب سه انتگرال بنویسیم چون شرایط آن برقرار است

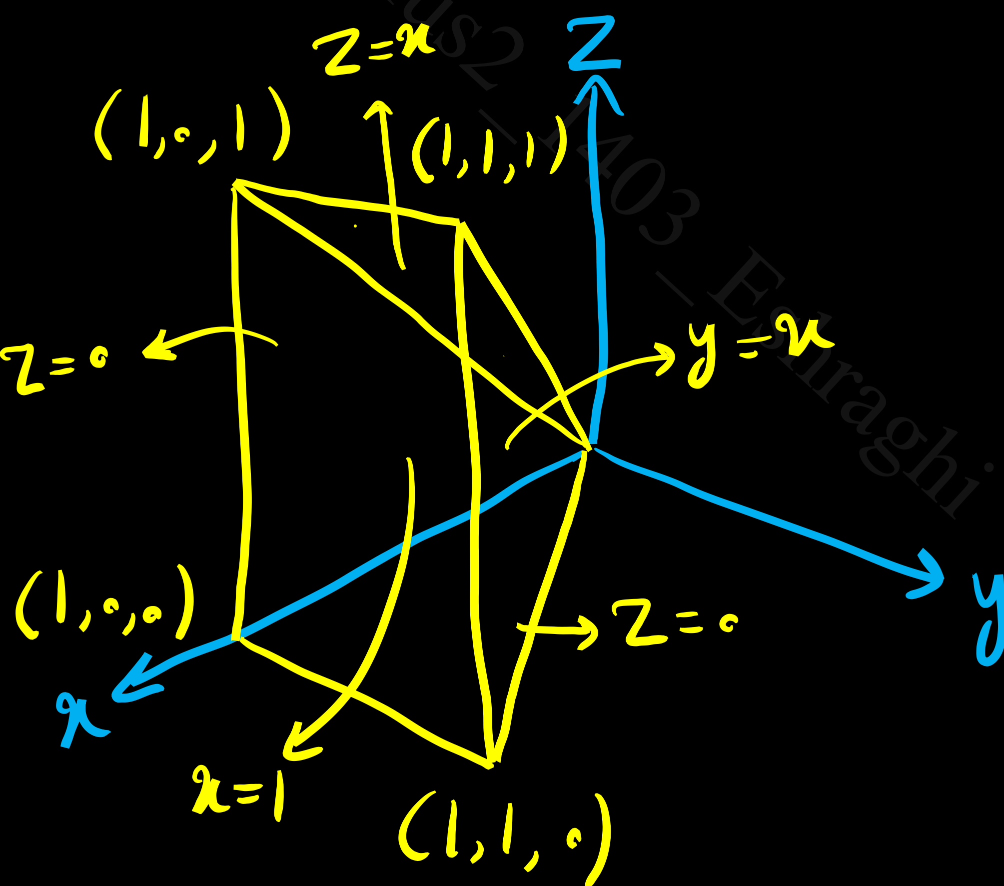
برای محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}\,dx$ از مختصات قطبی استفاده در انتگرال دوگانه استفاده می‌کنیم به این شکل که یک کپی از انتگرال (با یک نماد دیگر) را در انتگرال اصلی ضرب می‌کنیم و کار را ادامه می‌دهیم.

برای محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۲y^۲}\,dy$ و $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۳z^۲}\,dz$ از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم به نحوی که از $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲}\,dx = \sqrt{\pi}$ استفاده کنیم

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

الف) $I = \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{0}^{x} e^{x^{3}}\, dy\, dx\, dz$

پاسخ الف) ابتدا با توجه به کران‌های داده شده، ناحیه انتگرال گیری را رسم می‌کنیم:



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

تغییر ترتیب انتگرال گیری

چون $dz\, dy\, dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

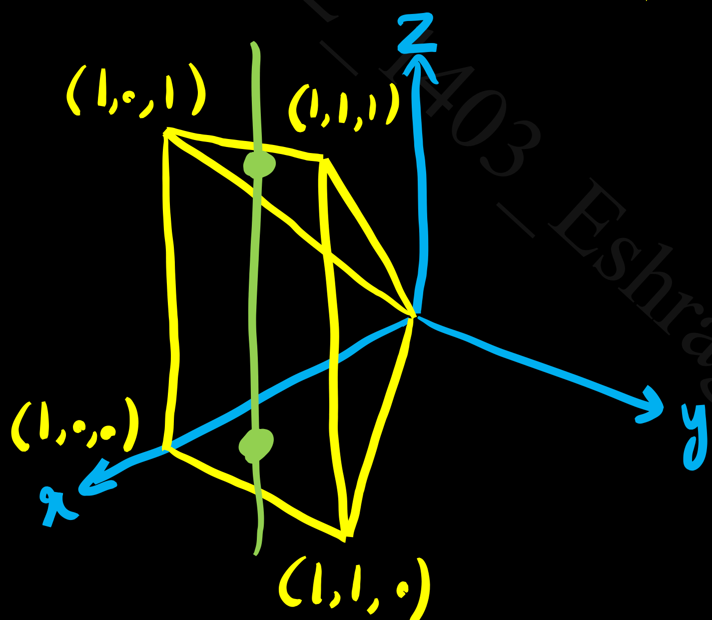
۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

الف) $I = \int_{0}^{1} \int_{z}^{1} \int_{0}^{x} e^{x^{3}}\, dy\, dx\, dz$

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

ادامه پاسخ الف) حال ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم. می‌خواهیم از $dz\, dy\, dx$ استفاده کنیم. پس یک خط موازی با محور zها از ناحیه عبور می‌دهیم:

تغییر ترتیب انتگرال گیری



چون $dz\, dy\, dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

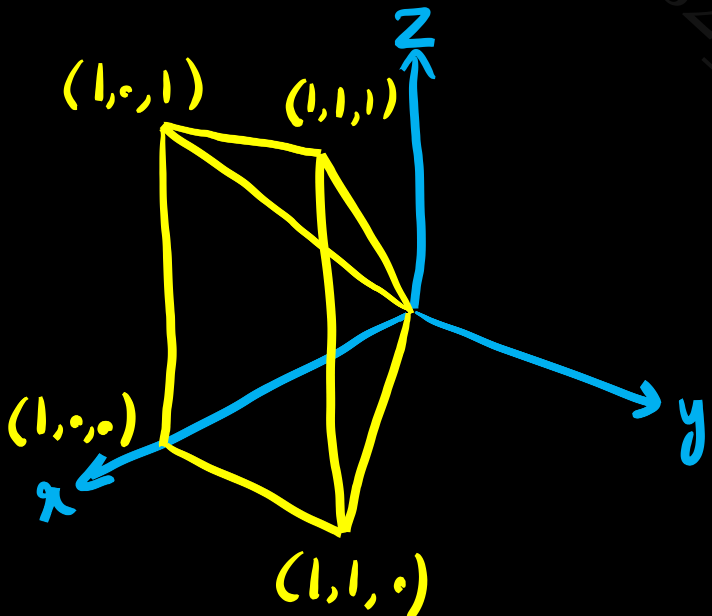
هنگام ورود به ناحیه داریم $z = 0$ و هنگام خروج داریم $z = x$.

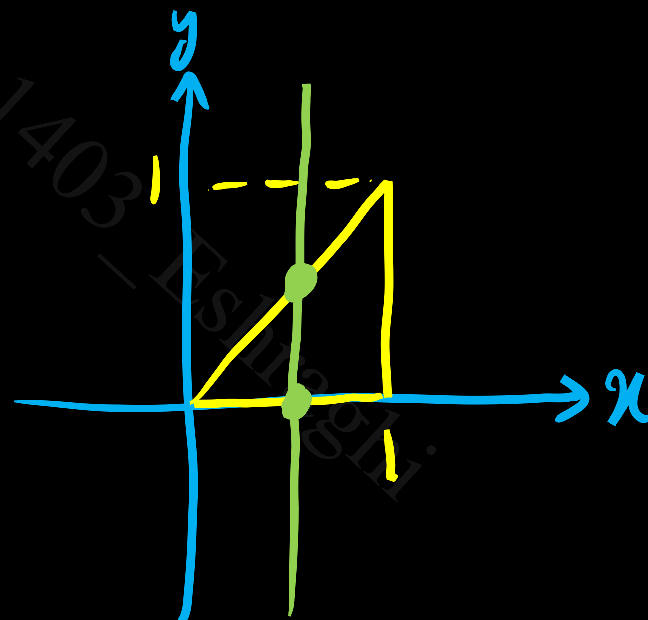
شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

الف) $I = \int_0^1 \int_z^1 \int_0^x e^{x^3}\, dy\, dx\, dz$

ادامه پاسخ الف) حال برای تعیین حدود x و y ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم.





پس خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم. هنگام ورود داریم $y = 0$ و هنگام خروج داریم $y = x$. پس $0 \le y \le x$. حال ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم که به دست می‌آوریم $0 \le x \le 1$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

تغییر ترتیب انتگرال گیری

چون $dz\, dy\, dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

الف) $I = \int_{۰}^{۱} \int_{z}^{۱} \int_{۰}^{x} e^{x^{۳}}\, dy\, dx\, dz$

ادامه پاسخ الف) حال به حل انتگرال می‌پردازیم:

$$I = \int_{۰}^{۱} \int_{z}^{۱} \int_{۰}^{x} e^{x^{۳}}\, dy\, dx\, dz = \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{x} \int_{۰}^{x} e^{x^{۳}}\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{x} z e^{x^{۳}} \Big|_{۰}^{x}\, dy\, dx$$

$$= \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{x} x e^{x^{۳}}\, dy\, dx$$

$$= \int_{۰}^{۱} y x e^{x^{۳}} \Big|_{۰}^{x}\, dx$$

$$= \int_{۰}^{۱} x^{۲} e^{x^{۳}}\, dx$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

تغییر ترتیب انتگرال گیری

چون $dz\, dy\, dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

الف) $I = \int_{۰}^{۱}\int_{z}^{۱}\int_{۰}^{x} e^{x^{۳}}\, dy\, dx\, dz$

ادامه پاسخ الف)

$$= \frac{۱}{۳} e^{x^{۳}} \Big|_{۰}^{۱}$$

$$= \frac{۱}{۳}(e - ۱)$$

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

تغییر ترتیب انتگرال گیری

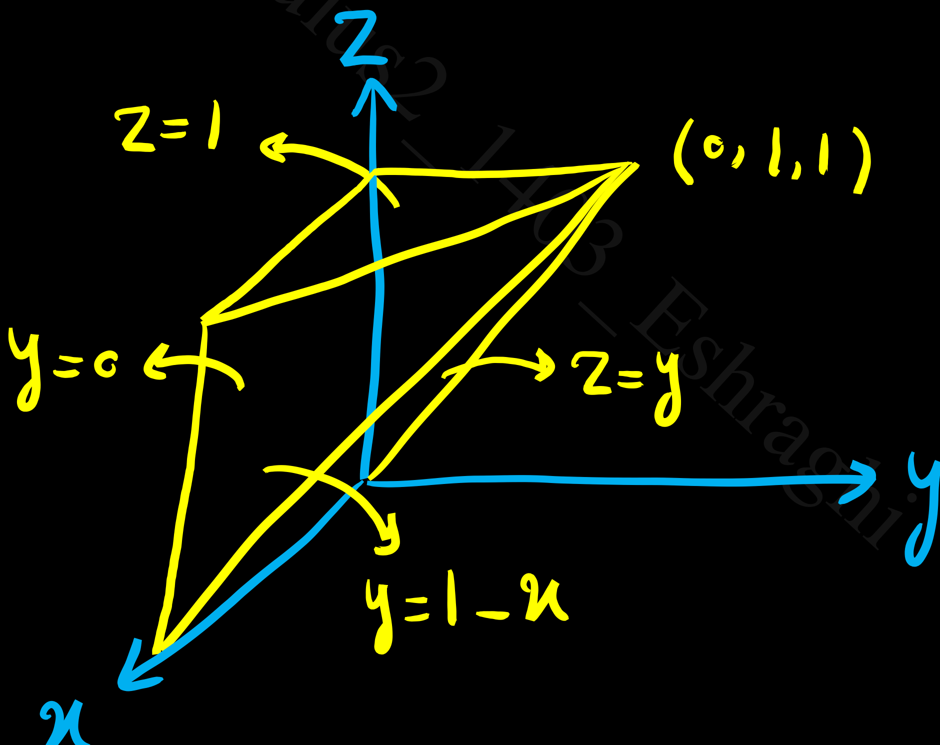
چون $dz\, dy\, dx$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود z تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور xها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

ب) $I = \int_{\circ}^{۱} \int_{\circ}^{۱-x} \int_{y}^{۱} \frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)} dz\, dy\, dx$

پاسخ ب) ابتدا با توجه به کران‌های داده شده، ناحیه انتگرال گیری را رسم می‌کنیم:



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

تغییر ترتیب انتگرال گیری

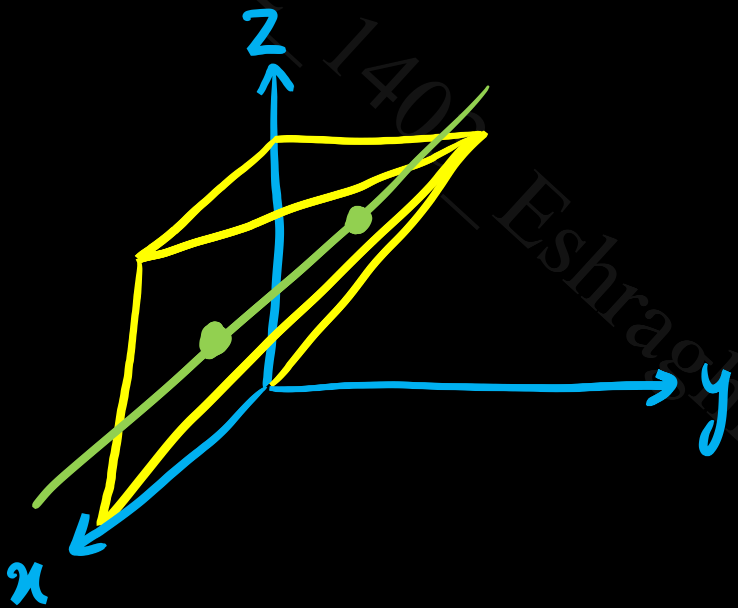
چون $dx\, dy\, dz$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور xها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود x تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه zy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور zها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

$$\text{ب)}\quad I = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\int_{y}^{۱}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dz\,dy\,dx$$

ادامه پاسخ ب) حال ترتیب انتگرال گیری را عوض می‌کنیم. می‌خواهیم از $dx\,dy\,dz$ استفاده کنیم. بنابراین در گام اول، خطی موازی با محور x را از ناحیه عبور می‌دهیم:



هنگام ورود داریم $x=۰$ و هنگام خروج داریم $x=۱-y$. بنابراین حدود x به صورت $۰\le x\le ۱-y$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

تغییر ترتیب انتگرال گیری

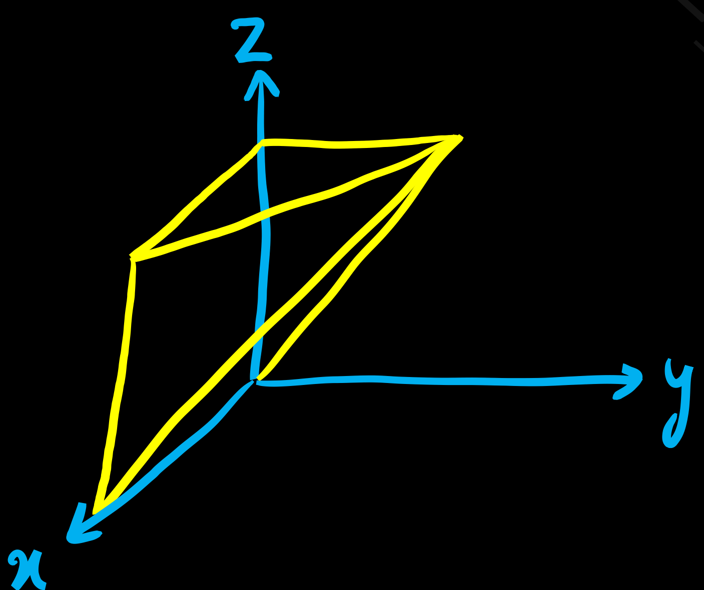
چون $dx\,dy\,dz$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور xها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود x تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه zy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور zها تصویر می‌کنیم

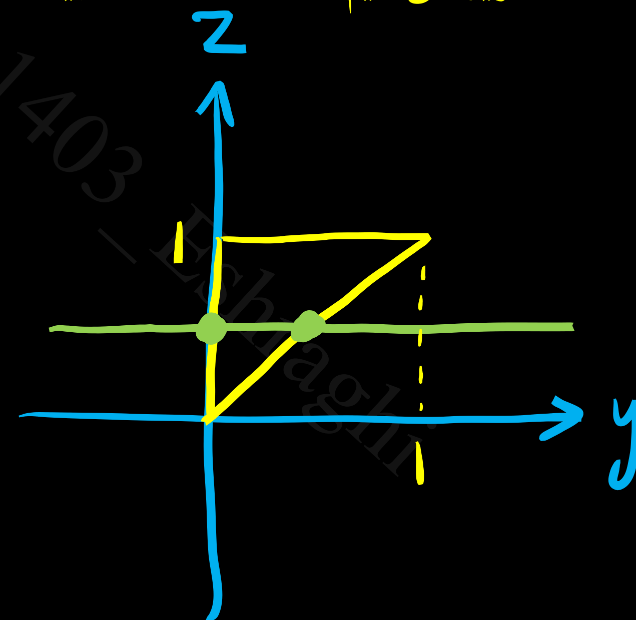
شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

ب) $I = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\int_{y}^{۱} \frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dz\,dy\,dx$

ادامه پاسخ ب) حال می‌خواهیم حدود y و z را تعیین کنیم. پس ناحیه را روی صفحه yz تصویر می‌کنیم و ادامه کار را شبیه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم.





پس خطی موازی با محور yها را از ناحیه عبور می‌دهیم. موقع ورود داریم $y = ۰$ و موقع خروج داریم $y = z$. پس حدود y به صورت $۰ \le y \le z$ است. در محله بعدی ناحیه را روی محور zها تصویر می‌کنیم که خواهیم داشت $۰ \le z \le ۱$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

تغییر ترتیب انتگرال گیری

چون $dx\,dy\,dz$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور xها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود x تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه zy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور zها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

راهنمای حل سوال

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

ب) $I=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\int_{y}^{۱}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dz\,dy\,dx$

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

ادامه پاسخ ب) حال به حل انتگرال می‌پردازیم:

تغییر ترتیب انتگرال گیری

$$I=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\int_{y}^{۱}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dz\,dy\,dx=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{z}\int_{۰}^{۱-y}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dx\,dy\,dz$$

چون $dx\,dy\,dz$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور xها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود x تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه zy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور zها تصویر می‌کنیم

$$=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{z} x\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\Big|_{۰}^{۱-y}\,dy\,dz$$

$$=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{z}(۱-y)\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dy\,dz$$

$$=\int_{۰}^{۱}\left(y-\frac{y^{۲}}{۲}\right)\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\Big|_{۰}^{z}\,dz$$

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

$$=\int_{۰}^{۱}\left(z-\frac{z^{۲}}{۲}\right)\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dz$$

راهنمای حل سوال

۴- در هر یک از انتگرال‌های زیر، انتگرال مکرر مفروض را با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید. (آدامز)

ب) $I = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\int_{y}^{۱}\frac{\sin(\pi z)}{z(۲-z)}\,dz\,dy\,dx$

ادامه پاسخ ب)

$$= \int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۲}\sin(\pi z)\,dz$$

$$= -\frac{۱}{۲\pi}\cos(\pi z)\Big|_{۰}^{۱}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}+\frac{۱}{۲\pi}$$

$$= \frac{۱}{\pi}$$

رسم ناحیه انتگرال گیری با توجه به کران‌های داده شده

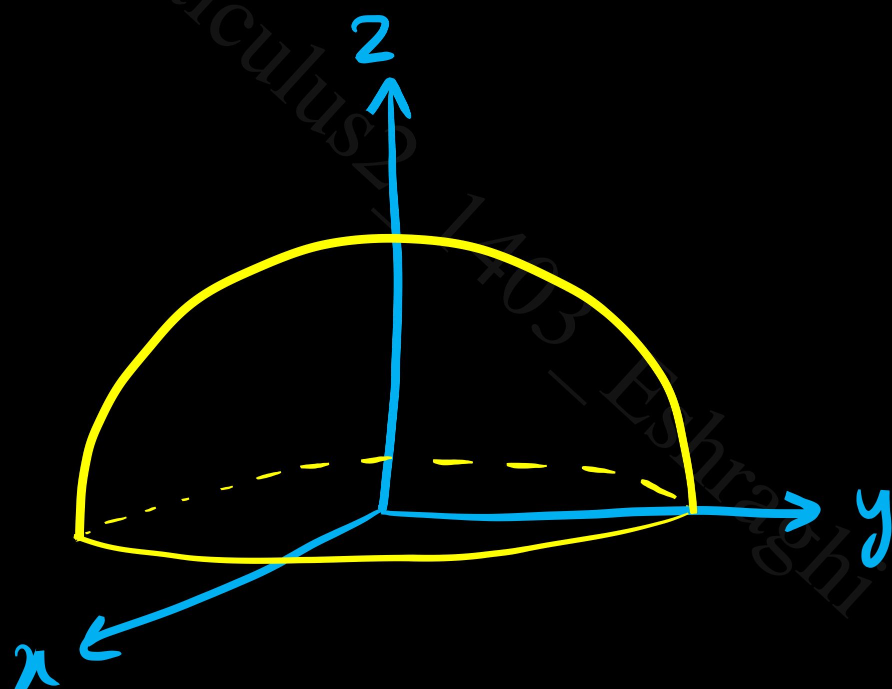
تغییر ترتیب انتگرال گیری

چون $dx\,dy\,dz$ انتخاب شد، پس ابتدا خطی موازی با محور xها را از ناحیه عبور می‌دهیم تا حدود x تعیین شود. در مرحله بعدی، ناحیه را روی صفحه zy تصویر می‌کنیم و پس از آن مشابه انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم؛ یعنی ابتدا خطی موازی با محور yها رسم می‌کنیم و سپس ناحیه را روی محور zها تصویر می‌کنیم

شروع محاسبه انتگرال با محاسبه داخلی ترین انتگرال

۵- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint (۳+۲xy)dV$ بر حجم محصور به نیم کره $x^۲+y^۲+z^۲ \le ۴$ و $z \ge ۰$. (آدامز)

پاسخ) ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می‌کنیم:



می‌خواهیم از مختصات کروی استفاده کنیم. در این مختصات داریم:

$$\rho^۲ = x^۲+y^۲+z^۲, \qquad |J| = \rho^۲ \sin\phi$$

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta\,, \qquad z = \rho\cos\phi$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, y = \rho\sin\phi\sin\theta$

$z = \rho\cos\phi\,, \rho^۲ = x^۲+y^۲+z^۲$

$|J| = \rho^۲\sin\phi$

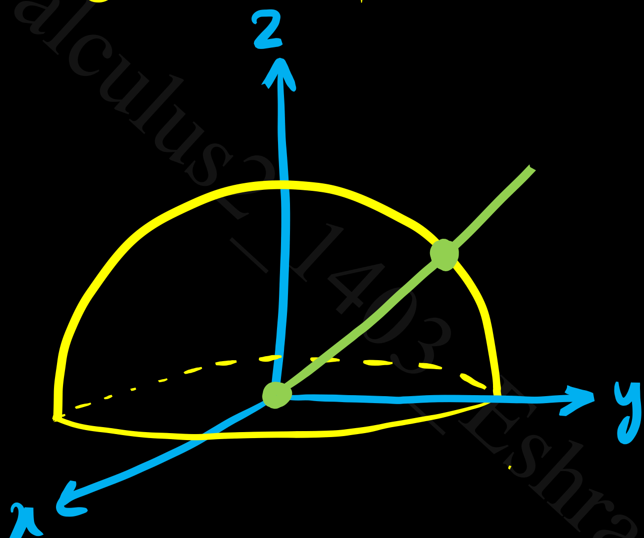
برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

چون $z \ge ۰$، $\rho\cos\phi \ge ۰$ که نتیجه می‌دهد $۰ \le \phi \le \frac{\pi}{۲}$ و از آنجایی که مثلاً در نقطه $(۰,۲,۰)$ مقدار $\phi = \frac{\pi}{۲}$ و مثلاً در نقطه $(۰,۰,۲)$ داریم $\phi = ۰$، پس حدود ϕ به صورت $۰ \le \phi \le \frac{\pi}{۲}$ است (با چرخاندن نیم خط فرضی در ناحیه این مطلب مشخص است)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۵- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint (۳+۲xy)dV$ بر حجم محصور به نیم کره $x^۲+y^۲+z^۲\le ۴$ و $z\ge ۰$. (آدامز)

ادامه پاسخ) برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم.



در هنگام ورود داریم $\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲=۰$ که نتیجه می‌دهد $\rho=۰$. هنگام خروج داریم $\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲=۴$ که نتیجه می‌دهد $\rho=۲$. پس حدود ρ به صورت $۰\le\rho\le۲$. برای تعیین حدود ϕ، می‌توانیم نیم خط را داخل ناحیه بچرخانیم و زاویه‌ای که این نیم خط با جهت مثبت محور zها می‌سازد، از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند. پس حدود ϕ به صورت $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۲}$ است.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

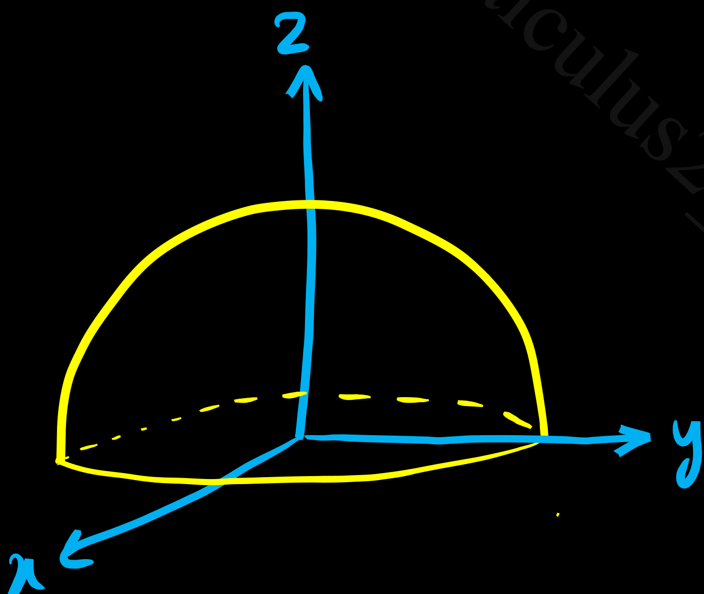
برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

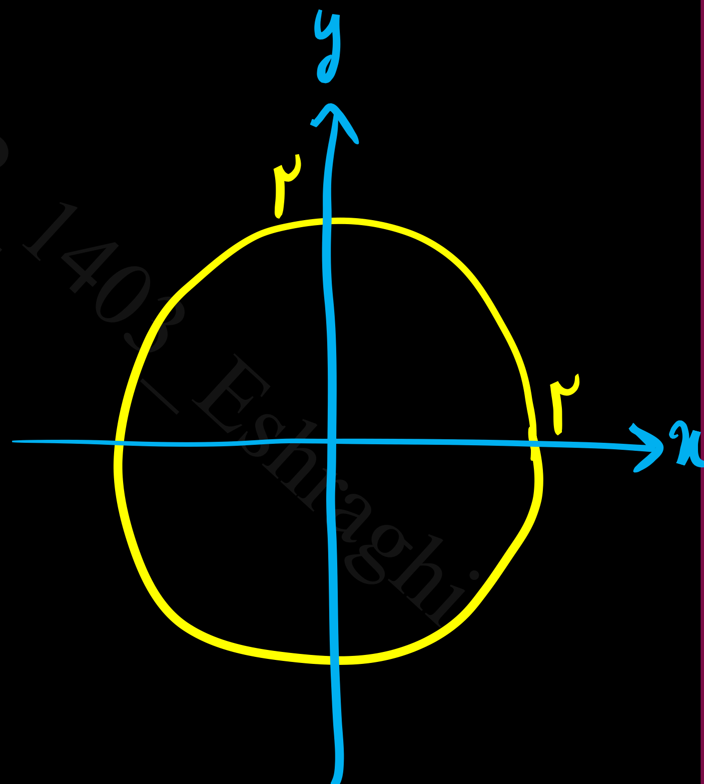
چون $z\ge ۰$، $\rho\cos\phi\ge ۰$ که نتیجه می‌دهد $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۲}$ و از آنجایی که مثلاً در نقطه $(۰,۲,۰)$ مقدار $\phi=\frac{\pi}{۲}$ و مثلاً در نقطه $(۰,۰,۲)$ داریم $\phi=۰$، پس حدود ϕ به صورت $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۲}$ است (با چرخاندن نیم خط فرضی در ناحیه این مطلب مشخص است)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۵- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint (۳+۲xy)\,dV$ بر حجم محصور به نیم کره $x^۲+y^۲+z^۲\leq ۴$ و $z\geq ۰$. (آدامز)

ادامه پاسخ) برای نوشتن حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم:





پس حدود θ به صورت $۰\leq\theta\leq ۲\pi$ است چون داخل این ناحیه زاویه از ۰ تا ۲π تغییر می‌کند.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$
$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$
$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

چون $z\geq ۰$، $\rho\cos\phi\geq ۰$ که نتیجه می‌دهد $۰\leq\phi\leq\frac{\pi}{۲}$ و از آنجایی که مثلاً در نقطه $(۰,۲,۰)$ مقدار $\phi=\frac{\pi}{۲}$ و مثلاً در نقطه $(۰,۰,۲)$ داریم $\phi=۰$، پس حدود ϕ به صورت $۰\leq\phi\leq\frac{\pi}{۲}$ است (با چرخاندن نیم خط فرضی در ناحیه این مطلب مشخص است)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۵- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint (۳+۲xy)dV$ بر حجم محصور به نیم کره $x^۲+y^۲+z^۲\le ۴$ و $z\ge ۰$. (آدامز)

ادامه پاسخ) حال به حل انتگرال می‌پردازیم:

$$\iiint (۳+۲xy)dV=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۲}(۳+۲(\rho\sin\phi\cos\theta)(\rho\sin\phi\sin\theta))\rho^۲\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=I_۱+I_۲$$

که در آن

$$I_۱=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۲}۳\rho^۲\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$I_۲=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۲}۲\ \rho^۴ sin^۳\phi\cos\theta\sin\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$I_۱=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۲}۳\rho^۲\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=۳\left(\int_۰^{۲}\rho^۲\, d\rho\right)\left(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin\phi\, d\phi\right)\left(\int_۰^{۲\pi}d\theta\right)$$

$$=۳\left(\frac{\rho^۳}{۳}\Big|_۰^۲\right)\left(-\cos\phi\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\right)\left(\theta\Big|_۰^{۲\pi}\right)$$

$$=۱۶\pi$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,, y=\rho\sin\phi\sin\theta$
$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$
$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

چون $z\ge ۰$، $\rho\cos\phi\ge ۰$ که نتیجه می‌دهد $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۲}$ و از آنجایی که مثلاً در نقطه $(۰,۲,۰)$ مقدار $\phi=\frac{\pi}{۲}$ و مثلاً در نقطه $(۰,۰,۲)$ داریم $\phi=۰$، پس حدود ϕ به صورت $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۲}$ است (با چرخاندن نیم خط فرضی در ناحیه این مطلب مشخص است)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۵- مطلوبست محاسبه انتگرال سه گانه $\iiint(۳+۲xy)dV$ بر حجم محصور به نیم کره $x^۲+y^۲+z^۲\leq ۴$ و $z\geq ۰$. (آدامز)

ادامه پاسخ) برای $I_۲$ داریم:

$$I_۲=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^{۲} ۲\ \rho^۴ sin^۳\phi\cos\theta\sin\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=۲\left(\int_۰^{۲}\rho^۴\,d\rho\right)\left(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} sin^۳\phi\,d\phi\right)\left(\int_۰^{۲\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)$$

$$=۲\left(\frac{\rho^۵}{۵}\Big|_۰^۲\right)\left(\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin\phi\,(۱-cos^۲\phi)\,d\phi\right)\left(\int_۰^{۲\pi}\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\,d\theta\right)$$

$$=۲\left(\frac{۳۲}{۵}\right)\left(-\cos\phi+\frac{cos^۳\phi}{۳}\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\right)\underbrace{\left(-\frac{۱}{۴}\cos ۲\theta\Big|_۰^{۲\pi}\right)}_{۰}$$

$$=۰$$

در نتیجه:

$$I=I_۱+I_۲=۱۶\pi+۰=۱۶\pi$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

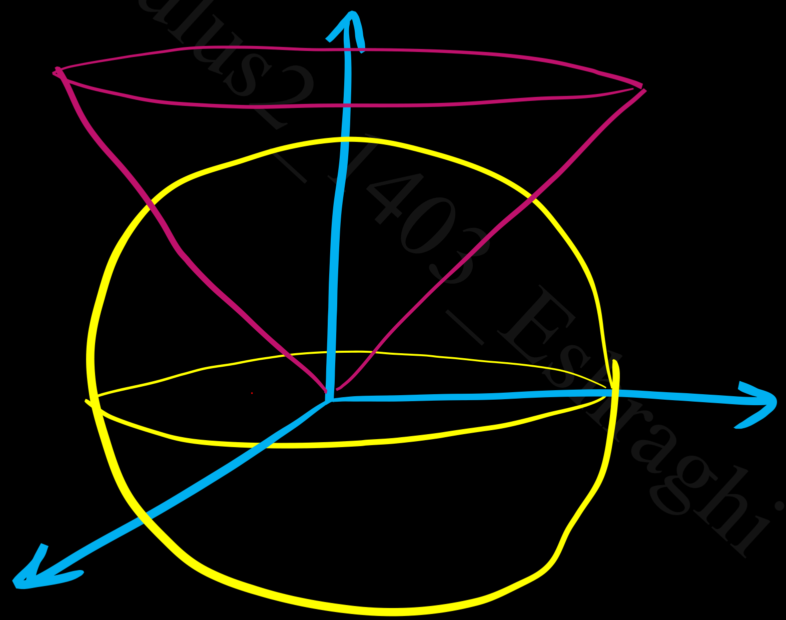
چون $z\geq ۰$، $\rho\cos\phi\geq ۰$ که نتیجه می‌دهد $۰\leq\phi\leq\frac{\pi}{۲}$ و از آنجایی که مثلاً در نقطه $(۰,۲,۰)$ مقدار $\phi=\frac{\pi}{۲}$ و مثلاً در نقطه $(۰,۰,۲)$ داریم $\phi=۰$، پس حدود ϕ به صورت $۰\leq\phi\leq\frac{\pi}{۲}$ است (با چرخاندن نیم خط فرضی در ناحیه این مطلب مشخص است)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۶- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iiint_R x^۲+y^۲+z^۲\,dV$ که در آن R ناحیه‌ای است

که بالای مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و درون کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ قرار دارد.

پاسخ) ناحیه انتگرال گیری به صورت زیر می‌باشد:



می‌خواهیم از مختصات کروی استفاده کنیم. در این مختصات داریم:

$$\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲, \qquad |J|=\rho^۲\sin\phi$$

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,, \qquad y=\rho\sin\phi\sin\theta\,, \qquad z=\rho\cos\phi$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به کره برخورد می‌کنیم

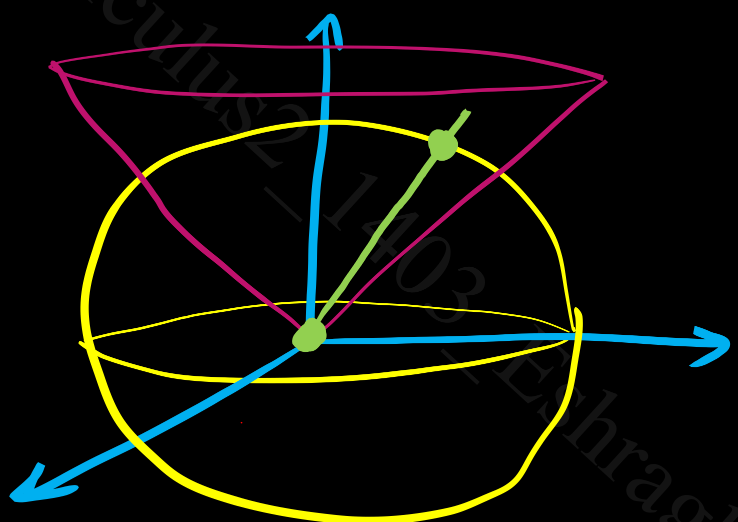
برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط استفاده کنیم. در واقع ضابطه مخروط را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط هست که زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را محدود می‌کند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۶- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iiint_R x^۲+y^۲+z^۲\,dV$ که در آن R ناحیه‌ای است

که بالای مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و درون کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ قرار دارد.

ادامه پاسخ) برای تعیین حدود ρ، نیم خطی با شروع از مبدأ را از ناحیه عبور می‌دهیم.



در هنگام ورود داریم $x=y=z=۰$ و در نتیجه $\rho=۰$. در هنگام خروج از ناحیه داریم

$x^۲+y^۲+z^۲=۴$ و در نتیجه $\rho=۲$. پس حدود ρ به صورت $۰\le\rho\le۲$ می‌باشد.

برای تعیین حدود ϕ، ابتدا توجه داریم که برای مخروط، $z\ge۰$ و بنابراین $\rho\cos\phi\ge۰$

که در نتیجه $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۲}$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به کره برخورد می‌کنیم

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط استفاده کنیم. در واقع ضابطه مخروط را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط هست که زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را محدود می‌کند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۶- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iiint_R x^۲+y^۲+z^۲\,dV$ که در آن R ناحیه‌ای است

که بالای مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و درون کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ قرار دارد.

ادامه پاسخ) همچنین:

$$z=\sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{\rho^۲\sin^۲\phi\cos^۲\theta+\rho^۲\sin^۲\phi\sin^۲\theta}$$

$$\Rightarrow \rho^۲\cos^۲\phi=\rho^۲\sin^۲\phi(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta)$$

$$\overset{\rho\neq ۰}{\Longrightarrow} \cos^۲\phi=\sin^۲\phi$$

حال با شرط $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت $\phi=\frac{\pi}{۴}$. بنابراین حدود ϕ به صورت $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۴}$ خواهد بود و در واقع اگر نیم خطی را با شروع از مبدأ در ناحیه حرکت دهیم، زاویه‌ای که با جهت مثبت محور zها می‌سازد (با شرط کمتر یا مساوی ۱۸۰ درجه)، از ۰ تا $\frac{\pi}{۴}$ تغییر می‌کند.

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم.

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^۲+y^۲} \\ x^۲+y^۲+z^۲=۴\end{cases}\Rightarrow \sqrt{۴-x^۲-y^۲}=\sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow x^۲+y^۲=۲$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به کره برخورد می‌کنیم

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط استفاده کنیم. در واقع ضابطه مخروط را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط هست که زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را محدود می‌کند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۶- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iiint_R x^۲+y^۲+z^۲\,dV$ که در آن R ناحیه‌ای است

که بالای مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و درون کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ قرار دارد.

ادامه پاسخ) بنابراین تصویر ناحیه روی صفحه xy، دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt{۲}$ می‌باشد. به هر حال حدود θ به شکل $۰\le\theta\le ۲\pi$ است چون یک دایره کامل داریم. حال به حل انتگرال می‌پردازیم:

$$\iiint_R x^۲+y^۲+z^۲\,dV=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{۲}\rho^۲\ \rho^۲\sin\phi\ d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\left(\int_۰^{۲}\rho^۴\,d\rho\right)\left(\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sin\phi\,d\rho\right)\left(\int_۰^{۲\pi}d\theta\right)$$

$$=\left(\frac{\rho^۵}{۵}\Big|_۰^{۲}\right)\left(-\cos\phi\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}\right)\left(\theta\Big|_۰^{۲\pi}\right)$$

$$=\left(\frac{۳۲}{۵}\right)\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱\right)(۲\pi)$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

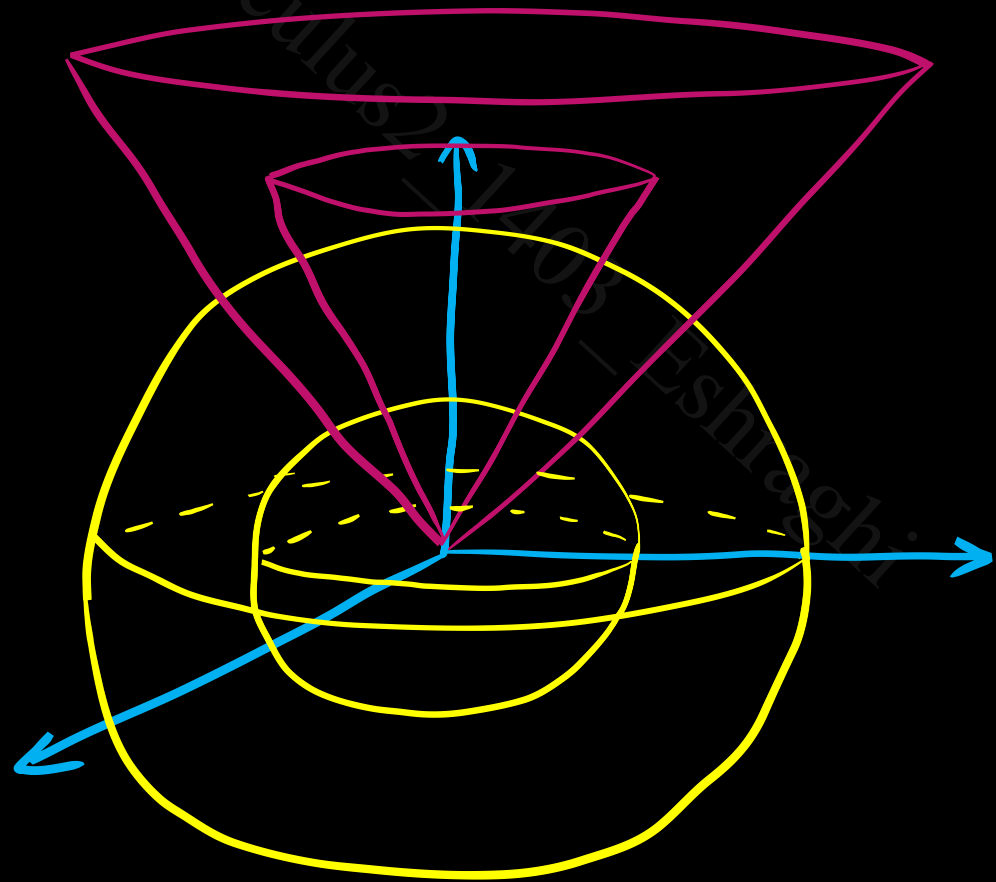
برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به کره برخورد می‌کنیم

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط استفاده کنیم. در واقع ضابطه مخروط را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط هست که زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را محدود می‌کند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۷- حجم ناحیه محصور به مخروط‌های $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ کره‌های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=3$ را محاسبه کنید. (میان ترم ۹۷)

پاسخ) ناحیه انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد:



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^2=x^2+y^2+z^2$

$|J|=\rho^2\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به کره برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروطها استفاده کنیم. در واقع ضابطه دو مخروط را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا کمترین و بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروطها هستند که محدوده زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را تعیین می‌کنند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

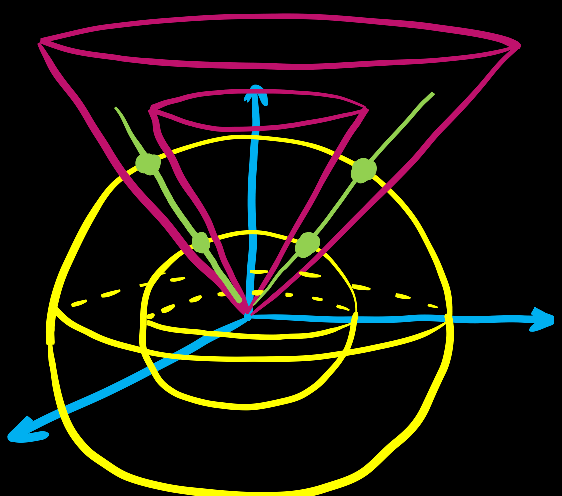
۷- حجم ناحیه محصور به مخروط‌های $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $z = \sqrt{۳(x^۲ + y^۲)}$ کره‌های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳$ را محاسبه کنید. (میان ترم ۹۷)

ادامه پاسخ) حجم به صورت $\iiint dV$ محاسبه می‌شود. در این جا از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در مختصات کروی داریم:

$$\rho^۲ = x^۲ + y^2 + z^۲, \qquad |J| = \rho^۲ \sin\phi$$

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta\,, \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta\,, \qquad z = \rho \cos\phi$$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم. هنگام ورود به ناحیه داریم $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و در نتیجه $\rho = ۱$. هنگام خروج از ناحیه داریم $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳$ و در نتیجه $\rho = \sqrt{۳}$.



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x = \rho \sin\phi \cos\theta\,, y = \rho \sin\phi \sin\theta$
$z = \rho \cos\phi\,, \rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$
$|J| = \rho^۲ \sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به کره برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروطها استفاده کنیم. در واقع ضابطه دو مخروط را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا کمترین و بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروطها هستند که محدوده زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را تعیین می‌کنند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۷- حجم ناحیه محصور به مخروط‌های $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و $z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}$ کره‌های $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را محاسبه کنید. (میان ترم ۹۷)

ادامه پاسخ) حال می‌خواهیم حدود ϕ را تعیین کنیم. برای مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ داریم:

$$z=\sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{\rho^۲ sin^۲\phi\, cos^۲\theta+\rho^۲ sin^۲\phi\, sin^۲\theta}$$

$$\Rightarrow \rho^۲ cos^۲\phi=\rho^۲ sin^۲\phi(cos^۲\theta+sin^۲\theta)$$

$$\overset{\rho\neq ۰}{\Rightarrow}\tan\phi=۱$$

$$\overset{z\geq ۰}{\Rightarrow}\phi=\frac{\pi}{۴}$$

حال می‌خواهیم حدود ϕ را تعیین کنیم. برای مخروط $z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}$ داریم:

$$z=\sqrt{۳}\sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{۳}\sqrt{\rho^۲ sin^۲\phi\, cos^۲\theta+\rho^۲ sin^۲\phi\, sin^۲\theta}$$

$$\Rightarrow \rho^۲ cos^۲\phi=۳\rho^۲ sin^۲\phi(cos^۲\theta+sin^۲\theta)$$

$$\overset{\rho\neq ۰}{\Rightarrow}\tan\phi=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\overset{z\geq ۰}{\Rightarrow}\phi=\frac{\pi}{۶}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به کره برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط‌ها استفاده کنیم. در واقع ضابطه دو مخروط را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا کمترین و بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط‌ها هستند که محدوده زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را تعیین می‌کنند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۷- حجم ناحیه محصور به مخروط‌های $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و $z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}$

کره‌های $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را محاسبه کنید. (میان ترم ۹۷)

ادامه پاسخ) پس حدود ϕ به صورت $\frac{\pi}{۶}\le\phi\le\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد. برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم که با فضاهای بین دایره‌های کامل مواجه هستیم و در نتیجه حدود θ به صورت $۰\le\theta\le ۲\pi$ است.

حال به محاسبه حجم می‌پردازیم:

$$V=\iiint dV=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۱}^{\sqrt{۳}}\rho^۲\sin\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\left(\int_{۱}^{\sqrt{۳}}\rho^۲\, d\rho\right)\left(\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\sin\phi\, d\rho\right)\left(\int_{۰}^{۲\pi}d\theta\right)$$

$$=\left(\frac{\rho^۳}{۳}\Bigg|_{۱}^{\sqrt{۳}}\right)\left(-\cos\phi\ \Bigg|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\right)\left(\theta\ \Bigg|_{۰}^{۲\pi}\right)$$

$$=\left(\sqrt{۳}-\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(۲\pi)$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:
$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$
$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$
$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به کره برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط‌ها استفاده کنیم. در واقع ضابطه دو مخروط را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا کمترین و بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط‌ها هستند که محدوده زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را تعیین می‌کنند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

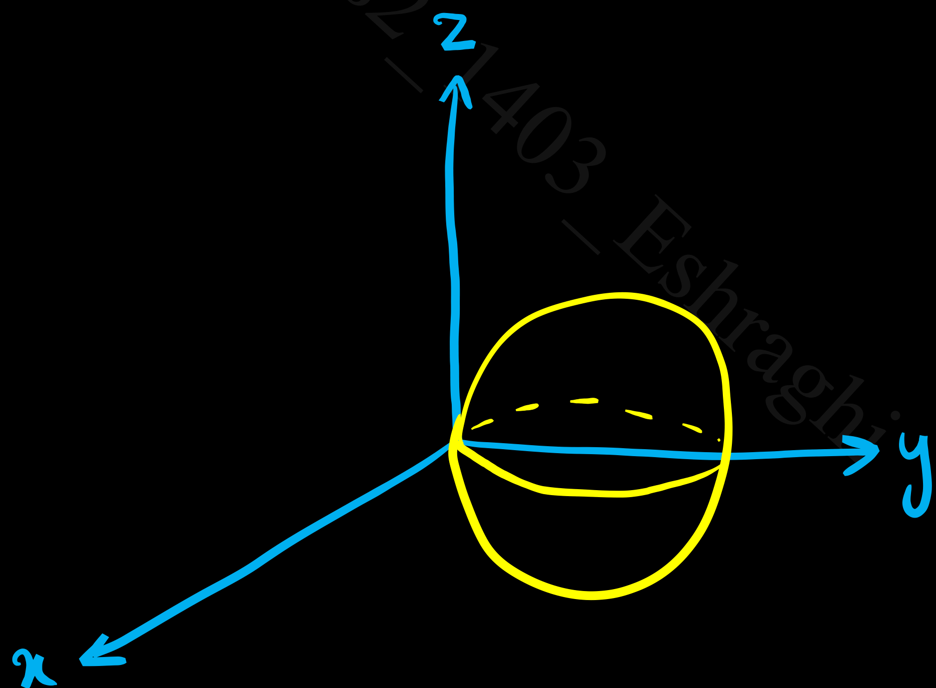
۸- انتگرال سه گانه

$$I = \iiint_D y\ dx\,dy\,dz$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محصور به کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲y$ است.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

پاسخ) ناحیه انتگرال گیری به صورت زیر می‌باشد:



ناحیه محصور کره $x^۲ + (y-1)^۲ + z^۲ = ۱$ است که در واقع کره‌ای به مرکز نقطه $(۰,۱,۰)$ و شعاع ۱ است.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از تغییر متغیر

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta\,, y = \rho\sin\phi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\phi\,, \rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$$
$$|J| = \rho^۲ \sin\phi$$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

با توجه به ناحیه، حدود ϕ از ۰ تا π تغییر می‌کند (کافی است نقاطی مانند $(۰,۰,۱)$، $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۰,-۱)$ را در مختصات کروی در نظر بگیریم)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۸- انتگرال سه گانه

$$I = \iiint_D y \; dx\, dy\, dz$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محصور به کره $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۲y$ است.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) در این جا ابتدا از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u = x$، $v = y - ۱$ و $w = z$. حال ژاکوبین را محاسبه می‌کنیم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}} = ۱$$

با توجه به تغییر متغیری که اعمال کردیم، داریم $y = v + ۱$. پس انتگرال پس از تغییر متغیر به صورت زیر می‌باشد:

$$I = \iiint_D y \; dx\, dy\, dz = \iiint (v + ۱)\, du\, dv\, dw$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از تغییر متغیر

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x = \rho \sin\phi \cos\theta \,, y = \rho \sin\phi \sin\theta$

$z = \rho \cos\phi \,, \rho^{۲} = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$

$|J| = \rho^{۲} \sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

با توجه به ناحیه، حدود ϕ از ۰ تا π تغییر می‌کند (کافی است نقاطی مانند (۰,۰,۱)، (۰,۱,۰) و (۰,۰,۱ −) را در مختصات کروی در نظر بگیریم)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۸- انتگرال سه گانه

$$I = \iiint_D y \ dx \, dy \, dz$$

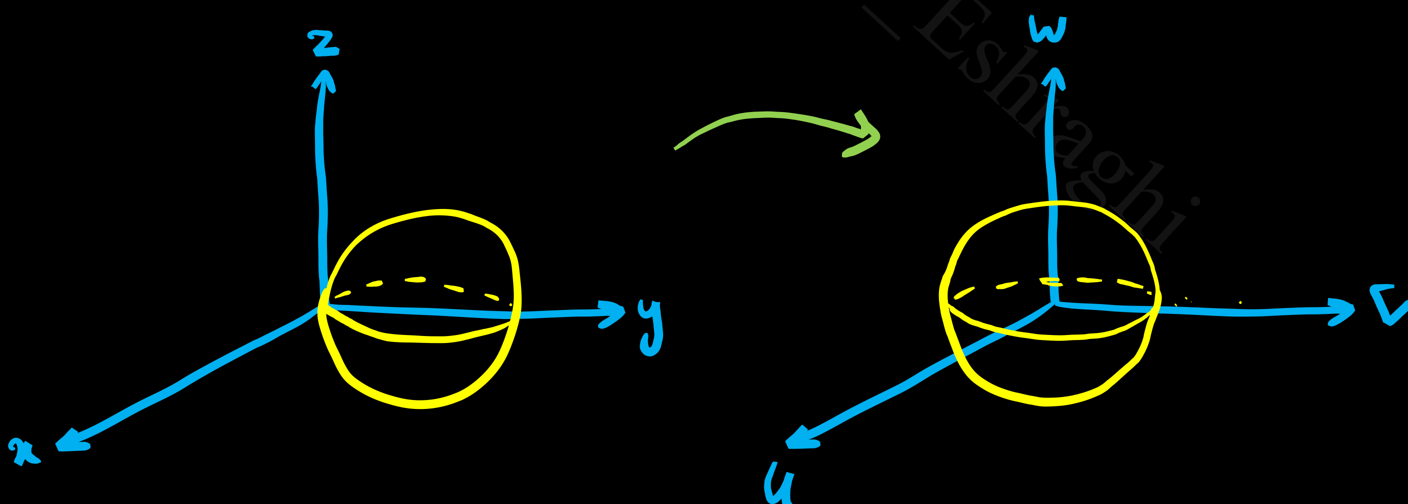
را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محصور به کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲y$ است.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) پس از اعمال تغییر متغیر، ناحیه ما تغییر می‌کند. در واقع خواهیم داشت:

$$u^۲ + v^۲ + w^۲ = ۱$$

که بیانگر کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ است.



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از تغییر متغیر

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \,, y = \rho \sin\phi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\phi \,, \rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$$
$$|J| = \rho^۲ \sin\phi$$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

با توجه به ناحیه، حدود ϕ از ۰ تا π تغییر می‌کند (کافی است نقاطی مانند (۰,۰,۱)، (۰,۱,۰) و (۰,۰,−۱) را در مختصات کروی در نظر بگیریم)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۸- انتگرال سه گانه

$$I = \iiint_D y\ dx\, dy\, dz$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محصور به کره $x^۲+y^۲+z^۲=۲y$ است.

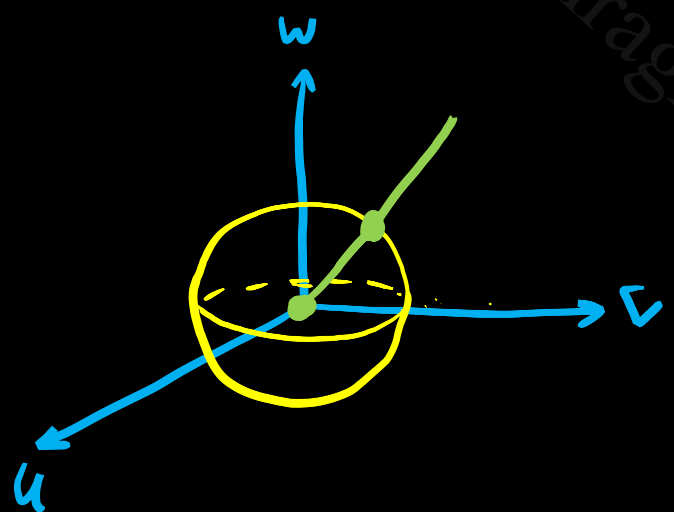
(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) حال از مختصات کروی استفاده می‌کنیم. در این مختصات داریم:

$$\rho^۲ = u^۲ + v^۲ + w^۲, \qquad |J| = \rho^۲ \sin\phi$$

$$u = \rho\sin\phi\cos\theta\,, \qquad v = \rho\sin\phi\sin\theta\,, \qquad w = \rho\cos\phi$$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ مختصات از ناحیه عبور می‌دهیم.



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از تغییر متغیر

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,, y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,, \rho^۲ = x^۲+y^۲+z^۲$

$|J| = \rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

با توجه به ناحیه، حدود ϕ از ۰ تا π تغییر می‌کند (کافی است نقاطی مانند (۰,۰,۱)، (۰,۱,۰) و (۰,۰,۱ −) را در مختصات کروی در نظر بگیریم)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۸- انتگرال سه گانه

$$I = \iiint_D y \; dx\, dy\, dz$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محصور به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ است.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

ادامه پاسخ) هنگام ورود به ناحیه داریم $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ که نتیجه می‌دهد $\rho = 0$.

هنگام خروج از ناحیه داریم $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ که نتیجه می‌دهد $\rho = 1$. پس حدود ρ به صورت $0 \le \rho \le 1$ می‌باشد. حدود ϕ از ۰ تا π تغییر می‌کند. حدود θ از ۰ تا 2π تغییر می‌کند چون تصویر ناحیه روی صفحه uv، دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است. پس انتگرال به صورت زیر می‌باشد:

$$I = \iiint (v + 1)\, du\, dv\, dw$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} (1 + \rho \sin\phi \sin\theta) \rho^2 \sin\phi \;\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} \rho^2 \sin\phi \;\, d\rho\, d\phi\, d\theta \; + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} \rho^3 sin^2\phi \sin\theta \;\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{I_1} + \underbrace{\left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi} sin^2\phi\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\right)}_{I_2}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از تغییر متغیر

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$x = \rho \sin\phi \cos\theta\,, y = \rho \sin\phi \sin\theta$

$z = \rho \cos\phi\,, \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$|J| = \rho^2 \sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

با توجه به ناحیه، حدود ϕ از ۰ تا π تغییر می‌کند (کافی است نقاطی مانند $(0,0,1)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,-1)$ را در مختصات کروی در نظر بگیریم)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۸- انتگرال سه گانه

$$I = \iiint_D y \; dx\, dy\, dz$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه محصور به کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲y$ است.

(تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۱)

(ادامه پاسخ)

$$I_۱ = \left(\frac{\rho^۳}{۳}\Big|_۰^۱\right)\left(-\cos\phi\,\Big|_۰^{\pi}\right)\left(\theta\,\Big|_۰^{۲\pi}\right) = \left(\frac{۱}{۳}\right)(۲)(۲\pi) = \frac{۴\pi}{۳}$$

$$I_۲ = \left(\frac{\rho^۳}{۳}\Big|_۰^۱\right)\left(\frac{\phi}{۲} - \frac{\sin ۲\phi}{۲}\Big|_۰^{\pi}\right)\left(-\cos\theta\,\Big|_۰^{۲\pi}\right) = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{\pi}{۲}\right)(۰) = ۰$$

$$I = I_۱ + I_۲ = \frac{۴\pi}{۳}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

استفاده از تغییر متغیر

برای تغییر متغیر باید J که به صورت زیر می‌باشد را به دست آوریم:

$$J = \frac{۱}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

استفاده از مختصات کروی

در مختصات کروی داریم:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, y = \rho\sin\phi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\phi\,, \rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$$
$$|J| = \rho^۲\sin\phi$$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

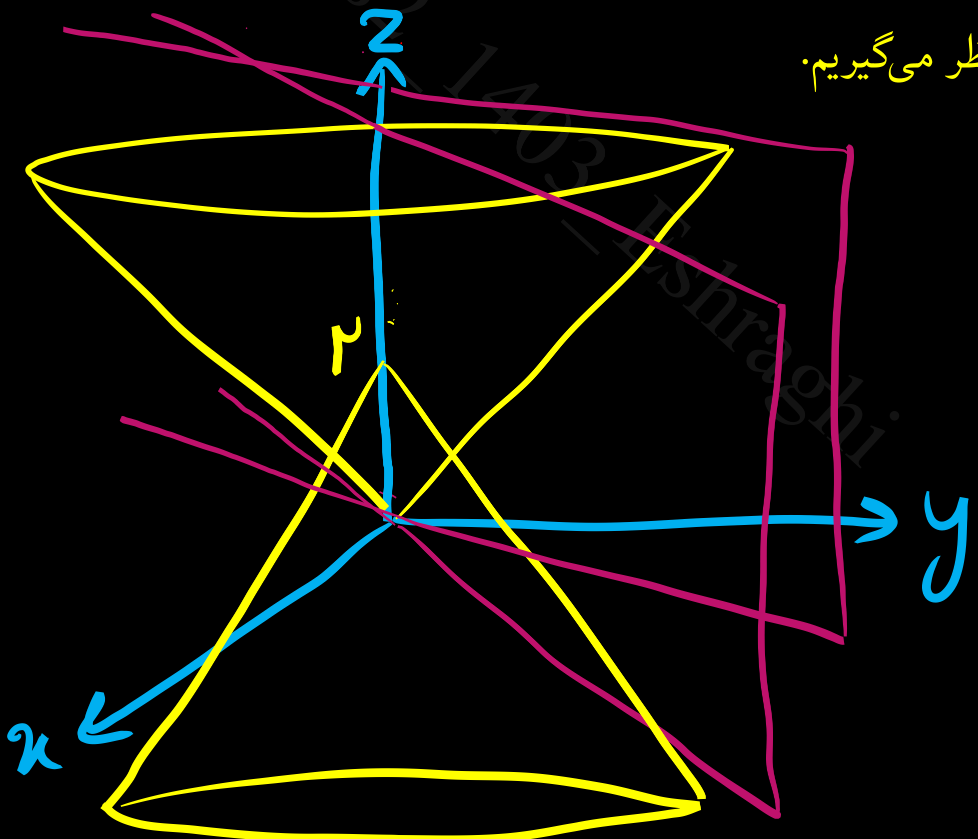
با توجه به ناحیه، حدود ϕ از ۰ تا π تغییر می‌کند (کافی است نقاطی مانند (۰,۰,۱)، (۰,۱,۰) و (۰,۰,۱ −) را در مختصات کروی در نظر بگیریم)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۹- فرض کنید D ناحیه سه بعدی واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات، بین دو صفحه $y = x$ و $y = \sqrt{۳}x$ باشد که از بالا به مخروط $z = ۲ - \sqrt{x^۲ + y^2}$ و از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ محدود شده است. (پایان ترم ۱۴۰۲)

الف) کران‌های $\iiint_D dV$ را در مختصات استوانه‌ای به طور دقیق بیابید.

پاسخ الف) رویه‌های داده شده در کل $\mathbb{R}^۳$ به صورت زیر می‌باشند که ما یک هشتم اول را در نظر می‌گیریم.



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$
$r^۲ = x^۲ + y^۲, |J| = r$

برای نوشتن حدود z، خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه z بر حسب r و θ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود به مخروط بالایی و هنگام خروج به مخروط پایینی برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود r و θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و مشابه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

برای حدود r، هنکام ورود $r = ۰$ و هنگام خروج باید محل برخورد دو مخروط را در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، باید از خطوط $y = x$ و $y = \sqrt{۳}x$ استفاده کنیم

۹- فرض کنید D ناحیه سه بعدی واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات، بین دو صفحه $y = x$ و $y = \sqrt{۳}x$ باشد که از بالا به مخروط $z = ۲ - \sqrt{x^۲ + y^2}$ و از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ محدود شده است. (پایان ترم ۱۴۰۲)

الف) کران‌های $\iiint_D dV$ را در مختصات استوانه‌ای به طور دقیق بیابید.

ادامه پاسخ الف) برای نوشتن حدود z، اگر خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور دهیم، هنگام ورود، به مخروط بالایی یعنی $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ برخورد می‌کنیم و این یعنی $z = r$. همچنین هنگام خروج، به مخروط پایینی یعنی $z = ۲ - \sqrt{x^۲ + y^۲}$ برخورد می‌کنیم و این یعنی $z = ۲ - r$. پس حدود z به صورت $r \le z \le ۲ - r$ می‌باشد.

برای نوشتن حدود r و θ ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم. اگر نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه تصویرشده عبور دهیم، هنگام ورود داریم $r = ۰$ و هنگام خروج داریم $r = ۱$ زیرا در برخورد دو مخروط داریم:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^۲ + y^۲} \\ z = ۲ - \sqrt{x^۲ + y^۲} \end{cases} \qquad r = ۲ - r \Longrightarrow r = ۱$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$$
$$r^۲ = x^۲ + y^۲, |J| = r$$

برای نوشتن حدود z، خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه z بر حسب r و θ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود به مخروط بالایی و هنگام خروج به مخروط پایینی برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود r و θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و مشابه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

برای حدود r، هنگام ورود $r = ۰$ و هنگام خروج باید محل برخورد دو مخروط را در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، باید از خطوط $y = x$ و $y = \sqrt{۳}x$ استفاده کنیم

۹- فرض کنید D ناحیه سه بعدی واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات، بین دو صفحه $y = x$ و $y = \sqrt{۳}x$ باشد که از بالا به مخروط $z = ۲ - \sqrt{x^۲ + y^2}$ و از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ محدود شده است. (پایان ترم ۱۴۰۲)

الف) کران‌های $\iiint_D dV$ را در مختصات استوانه‌ای به طور دقیق بیابید.

ادامه پاسخ الف) پس حدود r به صورت $۰ \le r \le ۱$ می‌باشد. برای حدود θ، باید خطوط $y = x$ و $y = \sqrt{۳}x$ را در بعد ۲ در نظر بگیریم.

$$y = x \Longrightarrow r\sin\theta = r\cos\theta \Longrightarrow \sin\theta = \cos\theta \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$y = \sqrt{۳}x \Longrightarrow r\sin\theta = \sqrt{۳}\,r\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta = \sqrt{۳} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}$$

دقت داریم که با توجه به ناحیه باید داشته باشیم $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$. پس با توجه به روابط بالا، حدود θ به صورت $\frac{\pi}{۴} \le \theta \le \frac{\pi}{۳}$ است.

بنابراین در مجموع کران‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} \int_۰^۱ \int_r^{r-۲} r\,dz\,dr\,d\theta$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$
$r^۲ = x^۲ + y^۲, |J| = r$

برای نوشتن حدود z، خطی موازی با محور zها را از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه z بر حسب r و θ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود به مخروط بالایی و هنگام خروج به مخروط پایینی برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود r و θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و مشابه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

برای حدود r، هنگام ورود $r = ۰$ و هنگام خروج باید محل برخورد دو مخروط را در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، باید از خطوط $y = x$ و $y = \sqrt{۳}x$ استفاده کنیم

۹- فرض کنید D ناحیه سه بعدی واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات، بین دو صفحه $y=x$ و $y=\sqrt{۳}x$ باشد که از بالا به مخروط $z=۲-\sqrt{x^۲+y^2}$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ محدود شده است. (پایان ترم ۱۴۰۲)

ب) کران‌های $\iiint_D dV$ را در مختصات کروی به طور دقیق بیابید.

پاسخ ب) برای نوشتن حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم. هنگام ورود داریم $\rho=۰$ و هنگام خروج از ناحیه به مخروط پایینی یعنی $z=۲-\sqrt{x^۲+y^۲}$ برخورد می‌کنیم. در مختصات کروی داریم:

$$\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲, \qquad |J|=\rho^۲\sin\phi$$

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,, \qquad y=\rho\sin\phi\sin\theta\,, \qquad z=\rho\cos\phi$$

بنابراین:

$$z=۲-\sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow \rho\cos\phi=۲-\sqrt{\rho^۲sin^۲\phi\ cos^۲\theta+\rho^۲sin^۲\phi\ sin^۲\theta}$$

$$\overset{۰\le\phi\le\frac{\pi}{۲}}{\Longrightarrow}\rho\cos\phi=۲-\rho\sin\phi$$

$$\Rightarrow\rho=\frac{۲}{\cos\phi+\sin\phi}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به مخروط پایینی برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط بالایی استفاده کنیم. در واقع ضابطه مخروط بالایی را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط بالایی است که محدوده زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را تعیین می‌کند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم. طبیعتاً باید از خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ استفاده کنیم

۹- فرض کنید D ناحیه سه بعدی واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات، بین دو صفحه $y = x$ و $y = \sqrt{۳}x$ باشد که از بالا به مخروط $z = ۲ - \sqrt{x^۲ + y^2}$ و از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ محدود شده است. (پایان ترم ۱۴۰۲)

ب) کران‌های $\iiint_D dV$ را در مختصات کروی به طور دقیق بیابید.

ادامه پاسخ ب) پس حدود ρ به صورت $۰ \le \rho \le \frac{۲}{\cos\phi + \sin\phi}$ می‌باشد. برای تعیین حدود ϕ، مخروط بالایی یعنی $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ را در نظر می‌گیریم:

$$z = \sqrt{x^۲ + y^۲} \Longrightarrow \rho\cos\phi = \sqrt{\rho^۲ sin^۲\phi\, cos^۲\theta + \rho^۲ sin^۲\phi\, sin^۲\theta}$$

$$\overset{۰ \le \phi \le \frac{\pi}{۲}}{\Longrightarrow} \rho\cos\phi = \rho\sin\phi$$

$$\overset{\rho \ne ۰}{\Longrightarrow} \cos\phi = \sin\phi$$

$$\overset{۰ \le \phi \le \frac{\pi}{۲}}{\Longrightarrow} \phi = \frac{\pi}{۴}$$

بنابراین حدود ϕ به صورت $۰ \le \phi \le \frac{\pi}{۴}$ می‌باشد.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات کروی داریم:

$x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, y = \rho\sin\phi\sin\theta$
$z = \rho\cos\phi\,, \rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$
$|J| = \rho^۲\sin\phi$

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به مخروط پایینی برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط بالایی استفاده کنیم. در واقع ضابطه مخروط بالایی را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط بالایی است که محدوده زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را تعیین می‌کند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم. طبیعتاً باید از خطوط $y = x$ و $y = \sqrt{3}x$ استفاده کنیم

۹- فرض کنید D ناحیه سه بعدی واقع در یک هشتم اول دستگاه مختصات، بین دو صفحه $y=x$ و $y=\sqrt{۳}x$ باشد که از بالا به مخروط $z=۲-\sqrt{x^۲+y^2}$ و از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ محدود شده است. (پایان ترم ۱۴۰۲)

ب) کران‌های $\iiint_D dV$ را در مختصات کروی به طور دقیق بیابید.

ادامه پاسخ ب) برای حدود θ، باید ناحیه را روی صفحه xy تصویر کنیم. طبیعتاً باید از خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{۳}x$ برای تعیین حدود θ استفاده کنیم.

$$y=x \Longrightarrow r\sin\theta = r\cos\theta \Longrightarrow \sin\theta=\cos\theta \Longrightarrow \theta=\frac{\pi}{۴}$$

$$y=\sqrt{۳}x \Longrightarrow r\sin\theta=\sqrt{۳}\,r\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta=\sqrt{۳} \Longrightarrow \theta=\frac{\pi}{۳}$$

پس با توجه به روابط بالا، حدود θ به صورت $\frac{\pi}{۴}\le\theta\le\frac{\pi}{۳}$ است. بنابراین در مجموع کران‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{\frac{۲}{\cos\theta+\sin\theta}} \rho^۲\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

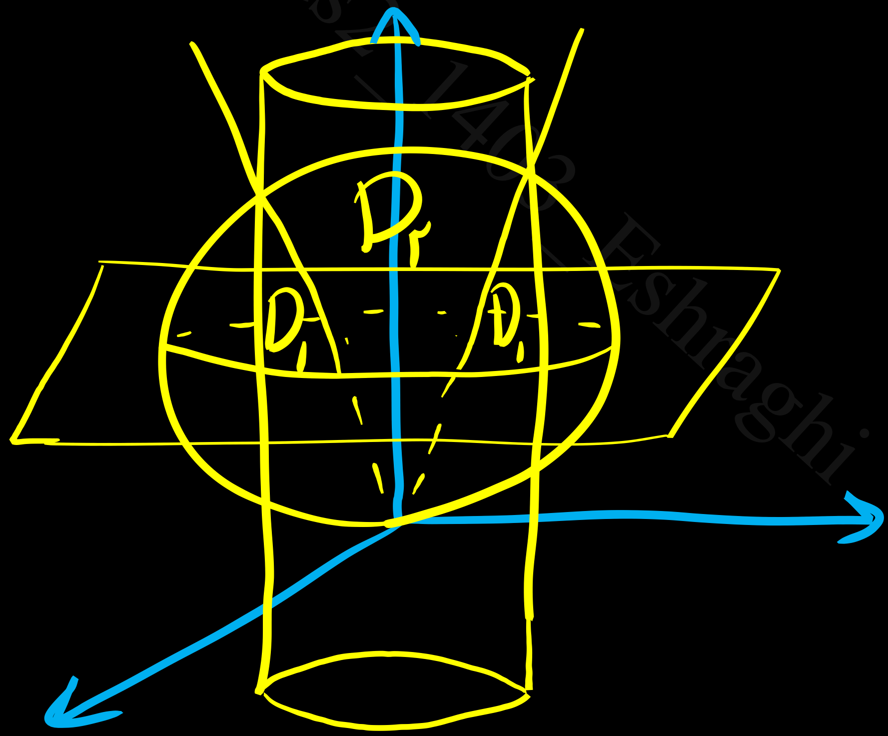
برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم (هنگام ورود در مبدأ هستیم و هنگام خروج به مخروط پایینی برخورد می‌کنیم)

برای تعیین حدود ϕ، باید از مخروط بالایی استفاده کنیم. در واقع ضابطه مخروط بالایی را در مختصات کروی در نظر می‌گیریم تا بیشترین مقدار برای ϕ تعیین شود (در واقع مخروط بالایی است که محدوده زاویه نیم خط با جهت مثبت محور zها را تعیین می‌کند)

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم. طبیعتاً باید از خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ استفاده کنیم

۱۰- فرض کنید D ناحیه محصور به کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲z$ و استوانه $x^۲ + y^۲ = \frac{۱}{۴}$ باشد که بالای صفحه $z = ۱$ قرار دارد. کران‌های $\iiint_D f(x,y,z)dV$ را در مختصات کروی به طور دقیق تعیین کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

پاسخ) ناحیه D به صورت زیر می‌باشد که آن را به دو قسمت $D_۱$ و $D_۲$ تقسیم کرده‌ایم.



راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات کروی داریم:

$x = \rho \sin\phi \cos\theta , y = \rho \sin\phi \sin\theta$
$z = \rho\cos\phi , \rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$
$|J| = \rho^۲ \sin\phi$

باید ناحیه را به دو قسمت تقسیم کنیم چون کران‌ها برای این دو ناحیه متفاوت است

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود ϕ، باید در بعضی موارد، تلاقی رویه‌های مناسب (بر مبنای ناحیه) را در مختصات کروی در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۱۰- فرض کنید D ناحیه محصور به کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲z$ و استوانه $x^{۲}+y^{۲}=\frac{۱}{۴}$ باشد که بالای صفحه $z=۱$ قرار دارد. کران‌های $\iiint_D f(x,y,z)dV$ را در مختصات کروی به طور دقیق تعیین کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) می‌خواهیم حدود ρ را.تعیین کنیم. برای ناحیه $D_۲$ داریم:

$$z=۱\Longrightarrow \rho\cos\phi=۱\Longrightarrow \rho=\frac{۱}{\cos\phi}$$

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲z\Longrightarrow \rho^{۲}=۲\rho\cos\phi\Longrightarrow \rho=۲\cos\phi$$

برای ناحیه $D_۱$ داریم:

$$z=۱\Longrightarrow \rho\cos\phi=۱\Longrightarrow \rho=\frac{۱}{\cos\phi}$$

$$x^{۲}+y^{2}=\frac{۱}{۴}\Longrightarrow \rho^{۲}sin^{۲}\phi\, cos^{۲}\theta+\rho^{۲}sin^{۲}\phi\, sin^{۲}\theta=\frac{۱}{۴}$$

$$\Longrightarrow \rho^{۲}sin^{۲}\phi=\frac{۱}{۴}$$

$$\Longrightarrow \rho=\frac{۱}{۲\sin\phi}$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta\,,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi\,,\rho^{۲}=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$

$|J|=\rho^{۲}\sin\phi$

باید ناحیه را به دو قسمت تقسیم کنیم چون کران‌ها برای این دو ناحیه متفاوت است

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود ϕ، باید در بعضی موارد، تلاقی رویه‌های مناسب (بر مبنای ناحیه) را در مختصات کروی در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۱۰- فرض کنید D ناحیه محصور به کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲z$ و استوانه $x^۲ + y^۲ = \frac{۱}{۴}$

باشد که بالای صفحه $z = ۱$ قرار دارد. کران‌های $\iiint_D f(x,y,z)dV$ را در مختصات کروی

به طور دقیق تعیین کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) می‌خواهیم حدود ϕ را.تعیین کنیم. برای ناحیه $D_۲$، کمترین مقدار ϕ برابر با ۰ است و برای بیشترین مقدار، باید تلاقی کره و استوانه را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲z \\ x^۲ + y^۲ = \frac{۱}{۴} \end{cases} \qquad \frac{۱}{۴} + z^۲ = ۲z \Rightarrow z^۲ - ۲z + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow z = ۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{z} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{۲ + \sqrt{۳}} \Rightarrow \phi = tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲ + \sqrt{۳}}\right)$$

پس برای این ناحیه داریم $۰ \le \phi \le tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\right)$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات کروی داریم:

$x = \rho\sin\phi\cos\theta\,, y = \rho\sin\phi\sin\theta$

$z = \rho\cos\phi\,, \rho^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$

$|J| = \rho^۲\sin\phi$

باید ناحیه را به دو قسمت تقسیم کنیم چون کران‌ها برای این دو ناحیه متفاوت است

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود ϕ، باید در بعضی موارد، تلاقی رویه‌های مناسب (بر مبنای ناحیه) را در مختصات کروی در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۱۰- فرض کنید D ناحیه محصور به کره $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۲z$ و استوانه $x^{۲} + y^{۲} = \frac{۱}{۴}$ باشد که بالای صفحه $z = ۱$ قرار دارد. کران‌های $\iiint_D f(x,y,z)dV$ را در مختصات کروی به طور دقیق تعیین کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) برای ناحیه $D_۱$، برای کمترین مقدار ϕ باید تلاقی کره و استوانه را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۲z \\ x^{۲} + y^{۲} = \frac{۱}{۴} \end{cases} \qquad \frac{۱}{۴} + z^{۲} = ۲z \Rightarrow z^{۲} - ۲z + \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow z = ۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}}{z} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{۲ + \sqrt{۳}} \Rightarrow \phi = tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲ + \sqrt{۳}}\right)$$

برای بیشترین مقدار ϕ، باید تلاقی صفحه $z = ۱$ و استوانه را در نظر بگیریم:

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}}{z} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱} \Rightarrow \phi = tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

پس برای این ناحیه داریم $tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\right) \le \phi \le tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)$.

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات کروی داریم:

$x = \rho\sin\phi\cos\theta , y = \rho\sin\phi\sin\theta$
$z = \rho\cos\phi , \rho^{۲} = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$
$|J| = \rho^{۲}\sin\phi$

باید ناحیه را به دو قسمت تقسیم کنیم چون کران‌ها برای این دو ناحیه متفاوت است

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود ϕ، باید در بعضی موارد، تلاقی رویه‌های مناسب (بر مبنای ناحیه) را در مختصات کروی در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم

۱۰- فرض کنید D ناحیه محصور به کره $x^۲+y^۲+z^۲=۲z$ و استوانه $x^۲+y^۲=\frac{۱}{۴}$ باشد که بالای صفحه $z=۱$ قرار دارد. کران‌های $\iiint_D f(x,y,z)dV$ را در مختصات کروی به طور دقیق تعیین کنید. (تمرین تحویلی بهمن ۱۴۰۲)

ادامه پاسخ) برای تعیین حدود θ ٬باید ناحیه را روی صفحه xy تصویر کنیم که برای هر دو ناحیه داریم $۰\le\theta\le۲\pi$.

بنابراین:

$$\iiint_D f(x,y,z)\ dV=\iiint_{D_۱} f(x,y,z)\ dV+\iiint_{D_۲} f(x,y,z)\ dV$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\int_{tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\right)}^{tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)}\int_{\frac{۱}{\cos\phi}}^{\frac{۱}{۲\sin\phi}} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\,\rho^۲\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$+\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\right)}\int_{\frac{۱}{\cos\phi}}^{۲\cos\phi} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\,\rho^۲\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

راهنمای حل سوال

رسم ناحیه انتگرال گیری

در مختصات کروی داریم:

$x=\rho\sin\phi\cos\theta,y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi,\rho^۲=x^۲+y^۲+z^۲$

$|J|=\rho^۲\sin\phi$

باید ناحیه را به دو قسمت تقسیم کنیم چون کران‌ها برای این دو ناحیه متفاوت است

برای تعیین حدود ρ، نیم خطی را با شروع از مبدأ از ناحیه عبور می‌دهیم و ضابطه ρ را هنگام ورود و خروج در نظر می‌گیریم

برای تعیین حدود ϕ، باید در بعضی موارد، تلاقی رویه‌های مناسب (بر مبنای ناحیه) را در مختصات کروی در نظر بگیریم

برای تعیین حدود θ، ناحیه را روی صفحه xy تصویر می‌کنیم و شبیه مختصات قطبی در انتگرال دوگانه عمل می‌کنیم