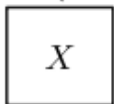


# آمار و احتمالات مهندسی

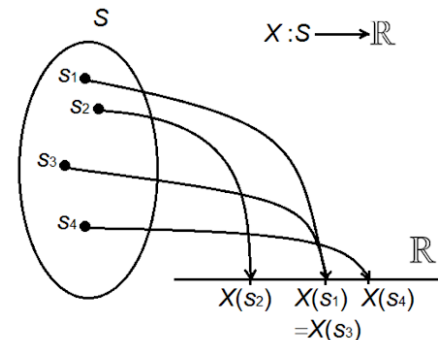
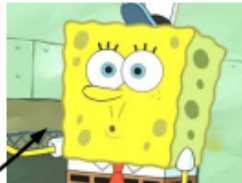
فصل: متغیرهای تصادفی پیوسته  
مدرس: مشکانی فراهانی



$\omega \in \Omega$



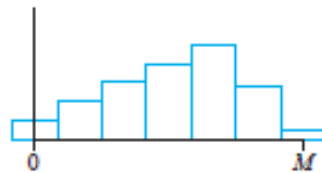
$X(\omega) \in E$



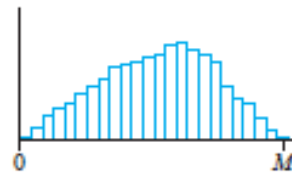
# متغیر تصادفی پیوسته

و

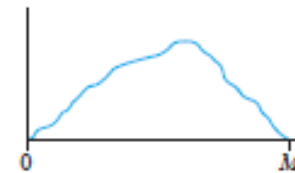
## تابع چگالی احتمال



(a)



(b)



(c)

## متغیر تصادفی پیوسته و توزیع احتمالات آن

• **تعریف:** متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته گویند.

• **تابع چگالی احتمال:**

• اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع  $f(x)$  را تابع چگالی احتمال  $X$  می‌نامند هرگاه :

$$\begin{aligned} ۱) \quad & f_X(x) > 0, \quad \forall x \in R_X \\ ۲) \quad & \int_{R_X} f_X(x) dx = 1 \end{aligned}$$

## مثال ۱ - الف

- مقدار ثابت  $c$  را چنان تعیین کنید که تابع زیر یک تابع چگالی احتمال باشد.

$$f(x) = cx(1-x), \quad 0 < x < 1$$

$$۱) \quad c > 0$$

• راه حل

$$۲) \quad \int_{R_X} f_X(x) dx = \int_0^1 cx(1-x) dx$$

$$= c \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$= c \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{c}{6} = 1$$

$$\Rightarrow c = 6$$

## مثال ١ - ب ، ج

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 4$$

*Solution :*

١)  $c > 0$ .

$$\begin{aligned} ٢) \int_{R_X} f_X(x) dx &= \int_0^4 \frac{c}{\sqrt{x}} dx \\ &= c \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= c \left[ 2\sqrt{x} \right]_0^4 \\ &= c \left[ 4 - 0 \right] = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = ce^{-\gamma x}, \quad x > 0$$

*Solution :*

١)  $c > 0$ .

$$\begin{aligned} ٢) \int_{R_X} f_X(x) dx &= \int_0^{\infty} ce^{-\gamma x} dx \\ &= c \left[ \frac{e^{-\gamma x}}{-\gamma} \right]_0^{\infty} \\ &= c \left[ 0 - \frac{1}{-\gamma} \right] = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = \gamma$$

## مثال ١ - هـ، و

$$f(x) = c|1-x|, \quad 0 < x < 2$$

$$= \begin{cases} c(1-x), & 0 < x \leq 1 \\ c(x-1), & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

*Solution :*

١)  $c > 0$ .

$$\begin{aligned} ٢) \int_{R_X} f_X(x) dx &= \int_0^1 c(1-x) dx + \int_1^2 c(x-1) dx \\ &= c \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + c \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \\ &= c \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] + c \left[ 0 - \frac{-1}{2} \right] = 1 \\ &\Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

*Solution :*

١)  $c > 0$ .

$$\begin{aligned} ٢) \int_{R_X} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2} dx \\ &= c \left[ \text{Arctan}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= c \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right] = 1 \\ &\Rightarrow c = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

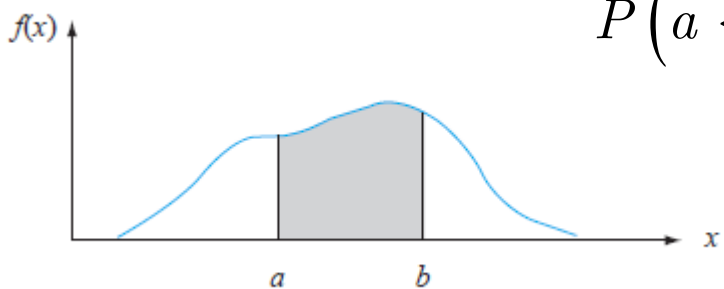
## محاسبه‌ی احتمال (با استفاده از تابع چگالی احتمال)

- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد، بنا بر تعریف، احتمال هر پیشامد  $A \subseteq R_X$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(A) = \int_A f(x) dx$$

- برای مثال اگر  $A = \{ a < X < b \}$  داریم:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$



## چند نکته

- در توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی گسسته،  $f(x)$  نمایان گر احتمال در نقطه  $x$  است و احتمال فقط در نقاط تکیه گاه مثبت و در سایر نقاط برابر صفر است؛ در حالی که در توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی پیوسته،  $f(x)$  نشان دهنده‌ی هیچ احتمالی نیست و احتمال قطعه‌ای از مساحت واقع در زیر نمودار تابع  $f(x)$  است.

- احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته دقیقاً مقدار معینی مانند  $a$  را بگیرد برابر صفر است:

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x) dx = 0.$$

- افزودن یا کاستن یک یا چند نقطه‌ی شمارا در پیشامدهای مربوط به متغیرهای تصادفی پیوسته هیچ تأثیری در مقدار احتمال آنها نخواهد داشت:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$



## مثال ۲

- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی  $X$  به صورت زیر است؛ مطلوبست:  
الف- تعیین مقدار  $k$   
ب- محاسبه‌ی احتمال‌های زیر

$$f(x) = k \frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

• راه حل

۱)  $k > 0$ .

$$\begin{aligned} ۲) \int_{\beta}^{\infty} k \frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx &= k \beta^\alpha \int_{\beta}^{\infty} x^{-(\alpha+1)} dx \\ &= \left[ \frac{k \beta^\alpha}{-\alpha x^\alpha} \right]_{\beta}^{\infty} \\ &= \frac{k \beta^\alpha}{\alpha \beta^\alpha} = 1 \\ \Rightarrow k &= \alpha \end{aligned}$$

$$P(X = ۴\beta) = 0.$$

$$\begin{aligned} P(X > ۲\beta) &= \int_{۲\beta}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{۲\beta}^{\infty} \alpha \frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx \\ &= \left[ -\frac{\beta^\alpha}{x^\alpha} \right]_{۲\beta}^{\infty} \\ &= \left( \frac{1}{۲} \right)^\alpha \end{aligned}$$

## مثال ۳

- میزان تحمل خاک زیر پایه‌ی یک ستون بین ۶ تا ۱۵ تن بر متر مربع تغییر می‌کند. تابع چگالی احتمال آن در این تکیه‌گاه به صورت زیر است. اگر این ستون برای تحمل بار ۷/۵ تن بر متر مربع طراحی شود، احتمال شکستن پایه‌ی ستون چه قدر است؟

$$f_Y(y) = \frac{1}{2/7} \left( 1 - \frac{y}{15} \right), \quad y \in [6, 15]$$

### • راه حل

$$\begin{aligned} P(Y > 7/5) &= \int_{7/5}^{15} \frac{1}{2/7} \left( 1 - \frac{y}{15} \right) dy \\ &= \frac{1}{2/7} \left[ y - \frac{y^2}{2 \cdot 15} \right]_{7/5}^{15} \\ &= \frac{1}{2/7} \left[ \left( 15 - \frac{7}{5} \right) - \left( \frac{7}{5} - \frac{1}{875} \right) \right] \end{aligned}$$

## یادآوری

- در فضای احتمال **گسسته**، احتمال وقوع یک پیشامد را به صورت زیر حساب می‌کردیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

- در فضای احتمال **پیوسته**، احتمال وقوع یک پیشامد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

## مثال ۴

- یک عدد تصادفی از بازه‌ی  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که سینوس آن از کسینوس آن بیشتر باشد، چه قدر است؟

• راه‌حل:

- $X$ : عدد انتخاب شده

$$\begin{aligned}
 P(\sin X > \cos X) &= P(\tan X > 1) \\
 &= P\left(X > \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

## مثال ۵

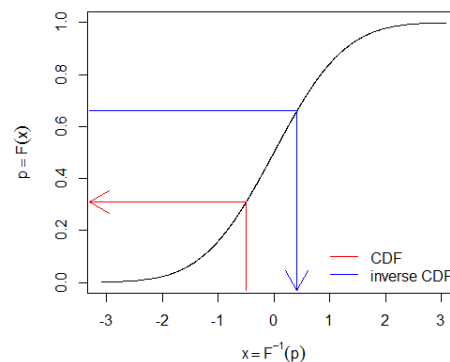
- فرض کنید  $X$  یک نقطه‌ی تصادفی از بازه‌ی  $(۰, ۳)$  باشد. احتمال پیشامد  $۰ < X^۲ - ۵X + ۶$  چه قدر است؟

• راه حل:

$$\begin{aligned}
 P(X^۲ - ۵X + ۶ > ۰) &= P((X - ۲)(X - ۳) > ۰) \\
 &= P(X < ۲, X < ۳) + P(X > ۲, X > ۳) \\
 &= P(X < ۲) + P(X > ۳) \\
 &= \frac{۲ - ۰}{۳ - ۰} + ۰
 \end{aligned}$$

# تابع توزیع تجمعی

برای متغیرهای تصادفی پیوسته



## تابع توزیع تجمعی

- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد، تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

## مثال ۶

- مقاومت جانبی اسکلت یک ساختمان کوچک  $R$  متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است. تابع توزیع  $F_R(r)$  را حساب کنید.

$$f_R(r) = \frac{3}{500}(r-10)(20-r), \quad r \in [10, 20]$$

• راه حل

$$F_R(t) = \int_{10}^t \frac{3}{500}(r-10)(20-r) dr$$

$$= \frac{3}{500} \int_{10}^t (-r^2 + 30r - 200) dr$$

$$= \frac{3}{500} \left[ \frac{-r^3}{3} + 15r^2 - 200r \right]_{10}^t$$

$$= \frac{3}{500} \left[ \frac{-t^3}{3} + 15t^2 - 200t + \frac{2500}{3} \right]$$

$$F_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 10 \\ \frac{3}{500} \left[ \frac{-t^3}{3} + 15t^2 - 200t + \frac{2500}{3} \right], & 10 \leq t < 20 \\ 1, & t \geq 20 \end{cases}$$



## مثال ۷- الف

- تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی  $X$  به صورت زیر است؛ تابع توزیع تجمعی  $X$  را به دست آورید.

$$f(x) = 4 e^{-2x} (1 - e^{-2x}), \quad x > 0.$$

- راه حل

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_0^t 4 e^{-2x} (1 - e^{-2x}) dx \\ &= 4 \int_0^t (e^{-2x} - e^{-4x}) dx \\ &= 4 \left[ \frac{e^{-2x}}{-2} - \frac{e^{-4x}}{-4} \right]_0^t \\ &= e^{-2t} - 2 e^{-4t} + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0. \\ e^{-2t} - 2 e^{-4t} + 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

## مثال ۷-ب

$$f(x) = |1 - x|, \quad 0 < x < 2$$

$$= \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \leq 1 \\ x - 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

• راه حل

$$F_X(t) = \int_0^t (1 - x) dx$$

$$= \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^t$$

$$= t - \frac{t^2}{2}$$

$$F_X(t) = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^t (x - 1) dx$$

$$= \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_1^t$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t - \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{t^2}{2} - t + 1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

## نکته

- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f_X(\cdot)$  و تابع توزیع تجمعی  $F_X(\cdot)$  باشد، داریم:

$$F'_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$$

$$f \xrightarrow{\text{انتگرال}} F$$

$$F \xrightarrow{\text{مشتق}} f$$

## مثال ۸

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی  $X$  به صورت زیر است. تابع چگالی احتمال  $X$  را به دست آورید.

$$F(x) = 1 - e^{-3x}, \quad x > 0.$$

راه حل

$$f(x) = F'(x) = 3 e^{-3x}$$

$$F(x) = 1 - \frac{9}{x^3}, \quad x > 3$$

• راه حل

$$f(x) = F'(x) = 2 \times 9 x^{-3}$$

## مثال ۹

• نقطه‌ای به تصادف از داخل دایره‌ای به شعاع  $r$  انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی  $X$  را برابر فاصله‌ی نقطه‌ی انتخابی تا مرکز دایره در نظر می‌گیریم. مطلوب است:

الف- تعیین تابع توزیع تجمعی  $X$   
 ب- تعیین تابع چگالی احتمال  $X$   
 ج- محاسبه‌ی احتمال زیر

$$a) \quad F(x) = P(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \left(\frac{x}{r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{x}{r}\right)^2, & 0 \leq x < r \\ 1, & x \geq r \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = F'(x) = \frac{2x}{r^2}, \quad 0 < x < r$$

$$c) \quad P\left(\frac{r}{3} < X < \frac{r}{2}\right) = F\left(\frac{r}{2}\right) - F\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$$

## نکته

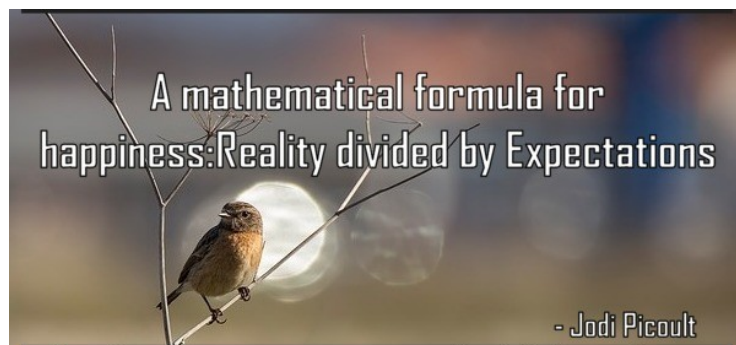
• اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی  $F(x)$  باشد، احتمال هر پیشامد  $A \subseteq R_X$  با استفاده از روابط بیان شده در تعریف تابع توزیع تجمعی به دست می‌آید.

• مراجعه شود به فایل:

آمار مهندسی - فصل ۲ و ۳ - متغیر تصادفی گسسته - اسلاید ۲۲

# امید ریاضی

متغیرهای تصادفی پیوسته



## امید ریاضی

- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد، امید ریاضی  $X$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(X) = \int_{R_X} x f(x) dx$$



## مثال ۱۰

- قطر سوراخ‌های ایجاد شده به وسیله‌ی مته‌ای بر حسب میلی‌متر دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = 10 e^{-10(x-5)}, \quad x > 5$$

اگر چه اندازه‌ی قطر مورد نظر ۵ میلی‌متر است، لرزش‌ها، سایش ابزار و سایر عوامل غیر قابل کنترل باعث تولید قطرهایی با اندازه‌ی بزرگتر از ۵ میلی‌متر می‌شوند. متوسط قطر سوراخ‌های ایجاد شده را به دست آورید.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{R_X} x f(x) dx \\ &= \int_5^{\infty} 10 x e^{-10(x-5)} dx \\ &= \left[ -e^{-10(x-5)} \left( x + \frac{1}{10} \right) \right]_5^{\infty} \\ &= 5 / 1 \end{aligned}$$

مشتق	انتگرال
<i>derivative</i>	<i>Integral</i>
$x$	$10 e^{-10(x-5)}$
$1$	$-e^{-10(x-5)}$
$0$	$\frac{1}{10} e^{-10(x-5)}$

## مثال ۱۱ - الف

- مدت زمان استفاده‌ی خانواده‌ای از جاروبرقی در طول سال، در واحد ۱۰۰ ساعت، متغیر تصادفی  $X$  با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1 \\ b(2-x), & 1 \leq x < 2 \\ 0, & O.W. \end{cases}$$

الف- اگر  $E(X)=1$  باشد،

مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

$$\int_{R_X} f(x) dx = 1 \quad *$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 ax \, dx + \int_1^2 b(2-x) \, dx \\ &= a \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + b \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\ &= \frac{a}{2} + b \left( 2 - \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$E(X) = \int_{R_X} xf(x) dx = 1 \quad **$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x \cdot ax \, dx + \int_1^2 x \cdot b(2-x) \, dx \\ &= a \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + b \left[ 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{a}{3} + b \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} = 1 \end{aligned}$$

## مثال ۱۱ - ب

$$\begin{cases} ۱) & a + b = ۲ \\ ۲) & a + ۲b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۱ \quad b = ۱$$

ب- اگر  $X > \frac{۱}{۲}$  باشد، احتمال این که  $X$  از  $\frac{۳}{۲}$  کمتر باشد، چه قدر است؟

$$\begin{aligned} P\left(X < \frac{۳}{۲} \mid X > \frac{۱}{۲}\right) &= \frac{P\left(X < \frac{۳}{۲}, X > \frac{۱}{۲}\right)}{P\left(X > \frac{۱}{۲}\right)} = \frac{P\left(\frac{۱}{۲} < X < \frac{۳}{۲}\right)}{P\left(X > \frac{۱}{۲}\right)} \\ &= \frac{\int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} x \, dx + \int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} (۲ - x) \, dx}{\int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} x \, dx + \int_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} (۲ - x) \, dx} = \frac{\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} + \left[۲x - \frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}}}{\left[\frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}} + \left[۲x - \frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\left[\frac{۳}{۸}\right] + \left[\frac{۳}{۸}\right]}{\left[\frac{۳}{۸}\right] + \left[\frac{۱}{۲}\right]} = \frac{۶}{۷} \end{aligned}$$

## مثال ۱۱ - ج

• ج- تابع توزیع تجمعی  $X$  را به دست آورید.

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_0^t x \, dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^t \\ &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_0^1 x \, dx + \int_1^t (2-x) \, dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^t \\ &= \frac{1}{2} + 2t - \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ 2t - \frac{t^2}{2} - 1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

## یک ویژگی خاص از امید ریاضی

- در تعریف امید ریاضی داشتیم: اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد، امید ریاضی  $X$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(X) = \int_{R_X} x f(x) dx$$

- حال اگر بخواهیم **امید ریاضی عدد ثابت  $c$**  را حساب کنیم، با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم:

$$E(c) = \int_{R_X} c f(x) dx = c \int_{R_X} f(x) dx = c$$

- به عنوان مثال:

$$E(5) = 5 \qquad E(-11) = -11 \qquad E(0) = 0$$

## امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی پیوسته

- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد، امید ریاضی  $g(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[g(X)] = \int_{R_X} g(x) f(x) dx$$

## مثال ۱۲

- فرض کنید طول کابل‌های رایانه بر حسب میلی‌متر دارای تابع چگالی زیر باشد؛ امید ریاضی  $(X - ۱۲۰.۵)^۲$  را محاسبه کنید.

$$f(x) = ۰/۱, \quad ۱۲۰.۰ < x < ۱۲۱.۰$$

• راه حل

$$\begin{aligned} E\left[(X - ۱۲۰.۵)^۲\right] &= \int_{۱۲۰.۰}^{۱۲۱.۰} (X - ۱۲۰.۵)^۲ \times \frac{۱}{۱.۰} dx \\ &= \frac{۱}{۱.۰} \left[ \frac{U^۳}{۳} \right]_{-۰.۵}^{۰.۵} \\ &= \frac{۲۵.۰}{۳.۰} \end{aligned}$$

## ویژگی‌های خاص از امید ریاضی

- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد، امید ریاضی تابع  $cX$ ، که در آن  $c$  یک عدد ثابت است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(cX) = \int_{R_X} c x f(x) dx = c \int_{R_X} x f(x) dx = c E(X)$$

- به عنوان مثال:

$$E(rX) = rE(X) \quad E(-sY) = -sE(Y)$$



## ویژگی‌های خاص از امید ریاضی

- حال اگر بخواهیم امید ریاضی تابع  $a g(X) \pm b h(X)$  را حساب کنیم، با استفاده از رابطه‌ی صفحه‌ی قبل داریم:

$$\begin{aligned} E[a g(X) \pm b h(X)] &= \int_{R_X} [a g(X) \pm b h(X)] f(x) dx \\ &= a \int_{R_X} g(x) f(x) dx \pm b \int_{R_X} h(x) f(x) dx \\ &= a E[g(X)] \pm b E[h(X)] \end{aligned}$$

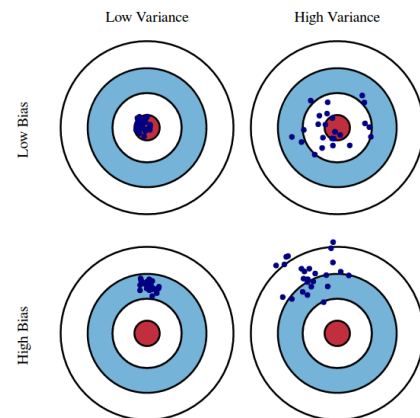
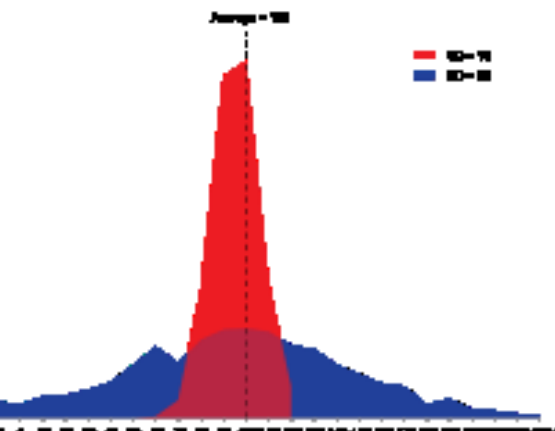
- به عنوان مثال:

$$E(rX^r - \gamma \ln X) = rE(X^r) - \gamma E(\ln X)$$

$$E(-2X + 5X^r - 1) = -2E(X) + 5E(X^r) - 1$$

# واریانس و انحراف معیار

## برای متغیرهای تصادفی پیوسته



## واریانس و انحراف معیار

- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با میانگین  $E(X)$  یا  $\mu$  باشد، آنگاه واریانس  $X$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right] = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

- اثبات: در فایل متغیرهای گسسته آورده شده است.

$$E(X) = \int_{R_X} x f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{R_X} x^2 f(x) dx$$

- **انحراف معیار:** جذر واریانس را انحراف معیار نامیده و آن را با  $\sigma$  نشان می‌دهیم.

## مثال ۱۳

- مدت زمان لازم برای ارائه یک خدمت بانکی به یک مشتری متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است؛ واریانس این توزیع را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

• راه حل

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx & E[X^2] &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{6} \right]_0^2 & &= \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{6} & &= 2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

## مثال ۱۴

- فرض کنید اندازه‌ی ذرات آلودگی بر حسب میکرومتر به صورت زیر مدل‌بندی شود. انحراف معیار  $X$  را تعیین کنید.

$$f(x) = 2x^{-3}, \quad x > 1$$

- راه حل

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_1^{\infty} x \cdot 2x^{-3} dx \\ &= \left[ \frac{-2}{x} \right]_1^{\infty} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_1^{\infty} x^2 \cdot 2x^{-3} dx \\ &= 2 \left[ \ln(x) \right]_1^{\infty} \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \infty - (2)^2 = \infty \end{aligned}$$

## قضیه

- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، در این صورت برای ثابت‌های  $a$  و  $b$  داریم:

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X),$$

$$\sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$$

## اثبات:

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &= E \left[ (aX + b) - E(aX + b) \right]^2 \\ &= E \left[ (aX + b) - aE(X) - E(b) \right]^2 \\ &= E \left[ (aX - aE(X)) - (b - b) \right]^2 \\ &= E \left[ a(X - E(X)) \right]^2 \\ &= a^2 E \left[ X - E(X) \right]^2 \\ &= a^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$$

## خواص امید ریاضی و واریانس (خلاصه - متغیرهای گسسته و پیوسته)

• فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی و  $a$  و  $b$  اعدادی ثابت باشند، آن گاه برای هر تابع  $g(x)$  داریم:

$$\bullet Var(a) = 0$$

$$\ast E(a) = a$$

$$\bullet Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$\ast E(aX) = a E(X)$$

$$\bullet Var[ag(X)] = a^2 Var[g(X)]$$

$$\ast E[ag(X)] = a E[g(X)]$$

$$\bullet Var[ag(X) \pm b] = a^2 Var[g(X)]$$

$$\ast E[ag(X) \pm b] = a E[g(X)] \pm b$$

$$\ast E[ag_1(X) \pm bg_2(X)] = a E[g_1(X)] \pm b E[g_2(X)]$$

$$\bullet Var[ag_1(X) \pm bg_2(X)] = a^2 Var[g_1(X)] + b^2 Var[g_2(X)]$$

## مثال ۱۵

- مقدار تقاضای هفتگی برای نوشابه‌ای معین (بر حسب هزار لیتر) در فروشگاه‌های زنجیره‌ای متغیر تصادفی پیوسته‌ای  $g(X) = X^2 + X - 2$  است، که در آن  $X$  دارای تابع چگالی زیر است. مقدار مورد انتظار تقاضای هفتگی این نوع نوشابه را پیدا کنید.

$$f(x) = 2(x - 1), \quad 1 < x < 2$$

• راه حل

$$E[X^2 + X - 2] = E(X^2) + E(X) - 2 = \frac{17}{6} + \frac{5}{3} - 2 = 2/5$$

$$E(X^2) = \int_1^2 x^2 \times 2(x - 1) dx = 2 \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{6}$$

$$E(X) = \int_1^2 x \times 2(x - 1) dx = 2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{5}{3}$$